

АБРАГАМ—БЕКЕР

# ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСТВА

ПЕРЕВОД С НЕМЕЦКОГО  
В. А. ФЛОРИНСКОЙ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ  
Т. П. КРАВЦА

*Издание второе,  
исправленное*

Цена 4 руб. 25 коп., переплет 1 руб. 25 коп.

ГОСТИ НКТП СССР  
РЕДАКЦИЯ ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
ЛЕНИНГРАД 1939 МОСКВА

АБРАХАМ — БЕККЕР

# THEORIE DER ELEKTRIZITÄT

BAND I

## EINFÜHRUNG IN DIE MAXWELLSCHE THEORIE DER ELEKTRIZITÄT

1932

LEIPZIG — B. G. TEUBNER — BERLIN

---

45-5-4

Книга является переводом с немецкого книги Абрагама: «Theorie der Elektrizität», в переработке Беккера. Она содержит основы теории электричества, которые дает в векторном изложении. Элементы векторного анализа даются в вводной главе, а затем систематически излагаются свойства электрического и магнитного полей и общие законы электромагнитного поля. Через всю книгу систематически проводится макроскопическая точка зрения. Микроскопическая картина раскрывается во втором томе: «Электронная теория» Беккера.

В конце книги имеется свыше ста задач с решениями, а также сводка формул и обозначений.

Книга может служить первоклассным пособием, при изучении теории электричества, для студентов вузов и втузов.

## ПРЕДИСЛОВИЕ К ВОСЬМОМУ ИЗДАНИЮ

В 1894 г. появилось „Введение в теорию Максвелла“ Феппля. Через десять лет вышло заново переработанное Максом Абрагамом второе издание, в качестве первого тома его „Теории электричества“. С тех пор для целого поколения физиков „Абрагам и Фепплъ“ был самым ходовым руководством при изучении основ теории электричества. Большое число изданий, появившихся еще при жизни Макса Абрагама, свидетельствует о том, как высоко ценится его книга преподавателями и учащимися.

В новом издании я считал своей обязанностью в основном сохранить оправдавший себя общий план книги; некоторые места остались в прежнем виде. Однако внутри отдельных глав я решил произвести существенные изменения; при этом я старался сильнее оттенить конкретное физическое содержание по сравнению с чисто формальными утверждениями теории. Для большей наглядности изложения число рисунков увеличено более, чем в пять раз.

По сравнению со старыми изданиями добавлены §§ 40 и 41, касающиеся электрострикции, а также §§ 74 до 76, касающиеся термодинамики энергии поля. Теория скин-эффекта развита далее (§ 66), теория волн вдоль провода распространена на случай конечного сопротивления проводов (§§ 69 и 70). К изложению величин переменного тока применена употребительная в технике векторная диаграмма. Совершенно выпущено изложение электрических токов как циклической системы. Содержание двух последних глав последних изданий (ферромагнитные тела и явления индукции в движущихся телах) частью перенесено в другие места текста.

В выборе единиц мер я всецело придерживался последнего издания Абрагама. Всюду применяется Гауссова система мер, в которой плотность энергии в пустоте равна

$$\frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) \frac{\text{э}}{\text{см}^2}$$

и которая диэлектрическую постоянную и магнитную проницаемость пустоты полагает равной единице. В настоящее время невозможно удовлетворить в выборе системы мер требованиям и электротехники и физики, потому что „электротехническое“ и „физическое“ понимания теории Максвелла различаются не только обозначениями, но и по существу. При этом техническое понимание гораздо теснее примыкает к первоначальной форме теории Максвелла-Фарадея, чем в современной физике.

Электротехник считает (и в пустоте) векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$  величинами, различными по существу и находящимися в таком же соотношении, как растягивающее усилие и растяжение в теории упругости. С этой точки зрения является, конечно, сомнительным, когда в изложении основных

положений множитель пропорциональности  $\varepsilon$  в соотношении  $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$  полагается для безвоздушного пространства равным единице и когда благодаря этому искусственно достигается одинаковость в размерности величин  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$ . Наоборот, современная физика совершенно отказалась от того принципиального различия между  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$ , которое было тесно связано с механической теорией эфира. Она считает электромагнитное состояние в любой точке безвоздушного пространства вполне описанным заданием одного электрического вектора  $\mathbf{E}$  и одного магнитного вектора  $\mathbf{H}$  (или  $\mathbf{H}$ ). Существующее в Гауссовой системе мер численное совпадение  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$  (в пустоте) для физика является не результатом произвольного определения, а выражением действительного тождества двух величин. Напротив, введение отличных от единицы диэлектрической постоянной и магнитной проницаемости в пустоте ему кажется искусственным вычислительным приемом электротехника, с помощью которого последний приводит формулы к виду, удобному для его практических целей.

В конце книги помещена наглядная сводка главных формул.

Считаю своим долгом сердечно поблагодарить инж. Ороvana за его неутомимую и ценную помощь при обработке книги, а также за чтение корректур.

Берлин, Февраль 1930 г.

*Р. Беккер.*

## ПРЕДИСЛОВИЕ К ДЕВЯТОМУ ИЗДАНИЮ

Девятое издание дополнено собранием примерно 100 задач с решениями. В остальном, за исключением небольших поправок и исправления опечаток, оно представляет перепечатку восьмого издания. Каждому читателю, который желает хорошо овладеть основами теории электричества, рекомендуется внимательная проработка задач.

Утомительный труд подбора и обработки задач произведен главным образом инж. Ороvanом, которому я приношу глубокую благодарность.

Берлин, Февраль 1932 г.

*Р. Беккер.*

## ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ ПЕРЕВОДА

Уже через 2 года после первого издания перевода I т. Абрагама-Беккера появилась необходимость во втором. Отсюда ясно, что и советский читатель оценил по достоинству это классическое руководство.

Редакция, пользуясь случаем, внесла в текст различные исправления и улучшения, не изменяющие принципиального смысла содержания; все обозначения переделаны в соответствии с существующими стандартами.

Редакция выражает признательность всем лицам, любезно сделавшим ей различные замечания по поводу текста. В частности, она особо отмечает ценные указания, сделанные Л. Э. Гуревичем.

1938 г. XI. ЛГУ

*Т. Кравец.*



## ВВЕДЕНИЕ

Теория электрических и магнитных явлений основывалась до работ Максвелла на представлении дальнего действия между телами, наэлектризованными, намагниченными или такими, по которым текут электрические токи. В этом отношении отклонялись от воззрения всех физиков только воззрения Фарадея. Но Фарадей не владел математическим анализом настолько, чтобы дать своим представлениям исчерпывающую и свободную от противоречий форму, которая возвысила бы их до степени теории; впрочем, его представления об электрических явлениях и их описание имели все же математический характер, хотя он при этом и не пользовался математическим языком формул. Только Максвеллу удалось это, и он создал, облекая идеи Фарадея в строго математические формы, учение, которое в самом основании своем существенно отличалось от теории дальнего действия, при дальнейшем же своем развитии отклонялось от нее все дальше.

Открытия Генриха Гертца дали доказательства того, что действительно в диэлектрике, в частности в безвоздушном пространстве, происходят электромагнитные процессы. С тех пор основные представления теории Максвелла были приняты всеми физиками. Каковы же те признаки, которые отличают Максвеллову теорию поля от теорий дальнего действия?

Основными представлениями учения Максвелла можно считать следующие:

1. Представление, что электрические и магнитные действия тела на другое отделенное от него тело происходит посредством промежуточного пустого или заполненного материей пространства.

2. Что место нахождения электрической (соответственно—магнитной) энергии нужно искать не только в наэлектризованных, намагниченных телах или телах, по которым текут электрические токи, но также — и в значительно большей степени — в окружающем поле.

3. Что электрический ток в незамкнутой цепи дополняется током смещения в диэлектрике до замкнутого потока и что этот ток смещения так же, как и ток проводимости, сопровождается соответственным магнитным полем.

4. Что поток магнитной индукции не имеет никаких источников, т. е., другими словами, что нигде не может проявляться „истинный“ магнетизм.

5. Что световые волны суть электромагнитные волны.

Сам Максвелл дал уравнения поля между прочим и в терминах теории кватернионов; однако, в основном он пользуется обычными прямоугольными координатами. Но при последнем способе связь между формулами делается более сложной. Большая наглядность достигается при

применении векторного исчисления. Затруднения, связанные с изучением векторного исчисления, с избытком уравниваются теми преимуществами, которые дает этот метод. Это есть действительно единственный метод, который с легкостью приспособляется ко всем требованиям задачи, когда речь идет о том, чтобы точно выразить представления Фарадея о потоке сил. Мы ставим поэтому теорию векторов и векторных полей во главу этой книги. Данный способ представления применяется теперь почти всеми исследователями, работающими в области электродинамики. Этим методом, который полезен также в механике твердых тел и в гидродинамике, мы всюду будем пользоваться в следующих главах.

## А. ВЕКТОРЫ И ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

### 1. ВЕКТОРЫ

**§ 1. Определение вектора.** Уравнения физики являются в конечном счете соотношениями между непосредственно измеряемыми величинами. Измерение показывает, сколько раз в измеренной величине содержится мера, принятая за единицу. Единицу измерения можно выбрать произвольно. Но можно также свести ее к ранее установленным единицам, с которыми она связана некоторым уравнением. Решение этого уравнения относительно новой единицы называют ее размерностью по отношению к остальным единицам. Так называемая абсолютная система мер строится на трех основных единицах: единицах длины, массы и времени. Но каковы бы ни были единицы, положенные в основу системы, всегда обе части уравнения должны быть равны не только по своему численному значению, но и по размерности. В самом деле, различие размерностей имело бы следствием, что при изменении основных единиц нарушилось бы равенство численных значений. Это требование используется в практике физического вычисления как первая проверка правильности уравнения.

Простейшие физические величины вполне определяются, при выбранной единице меры, посредством одного числа. Они называются скалярами. Таковы, например, масса, температура, градус Цельсия.

Существуют однако величины, которые не принадлежат к классу скаляров. Так, для установления конечного положения точки, сдвинутой из некоторого начального положения, необходимо знание трех чисел,—скажем, трех прямоугольных координат по отношению к осям, проведенным через начальную точку. Можно было бы с самого начала производить вычисления со скалярными составляющими смещения, не вводя формально новых величин. Но таким образом нельзя было бы, во-первых, выразить вполне понятное физически единство смещения; во-вторых, избранием координатной системы с самого начала вносится чуждый элемент, который с самим смещением ничего общего не имеет. Поэтому мы введем смещение как величину нового рода и установим для нее правила вычисления. Только в том случае, когда мы от формул перейдем к определению численных значений, будет необходимо вводить определенную координатную систему.

Будем называть векторами прямолинейные смещения точек, а равно и все физические величины, совокупность коих может быть изображена в виде совокупности прямолинейных смещений, подобно тому, как значения скаляра представляются отрезками прямой; при этом все векторы удовлетворяют тем же правилам сложения, как и изображающие их смещения.

Со строгим признаком того, является ли величина вектором, мы познакомимся в § 3.

**§ 2. Сложение и вычитание векторов.** При определении вектора сложение векторов было сведено к суммированию прямолинейных смещений. Рассмотрим два вектора **A** и **B** одинакового рода и размерности. Для того чтобы их сложить, представим себе движущуюся точку, находящуюся вначале в положении 1 (рис. 1). Пусть точке дано сначала смещение (1, 2), которое по длине, направлению и знаку представляет вектор **A**; затем из положения (2) пусть она передвигается на расстояние (2, 3), которое по длине, направлению и знаку представляет вектор **B**. Результат получается тот же самый, что и при смещении из (1) в (3). Непосредственное прямолинейное смещение из (1) в (3) называется равнодействующей или геометрической суммой двух смещений (1, 2) и (2, 3). Она представляет вектор **C**, который, согласно определению § 1, являясь равнодействующей или суммой векторов **A** и **B**, должен быть обозначен



Рис. 1. Сложение двух векторов.

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}. \quad (1)$$

Если произвести сначала смещение **B** (рис. 2), а затем смещение **A**, то движущаяся точка описывает путь (143), который вместе с путем (123) образует параллелограм. Следовательно, равнодействующая смещений **B** и **A**, так же как и равнодействующая смещений **A** и **B**, представляется диагональю (13) этого параллелограмма (рис. 2). Таким образом сложение векторов следует коммутативному закону: геометрическая сумма двух векторов не зависит от порядка слагаемых

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}. \quad (2)$$

Закон параллелограмма при сложении, представленный на рис. 2, характерен для тех величин, которые мы называем векторами. Существуют однако величины, которые также имеют длину, направление и знак и которые тем не менее, в установленном здесь смысле, нельзя рассматривать как векторы, так как их сложение следует другому закону. Так например, как известно из кинематики, бесконечно малые вращения твердой системы вокруг неподвижной точки представляются векторами, ибо сложение таких вращений повинует закону параллелограмма; наоборот, конечное вращение нельзя рассматривать как вектор, потому что сложение вращений совершается более сложным образом. Как учат статика, силы, действующие на материальную точку, следуют при сложении закону параллелограмма. Значит, эти силы суть векторы.

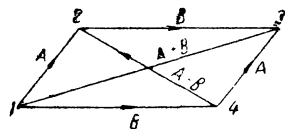


Рис. 2. Сложение и вычитание векторов.

Если рассмотреть смещения, аддитивно сложенные из векторов **A**, **B** и **C** (рис. 3), то можно легко убедиться в том, что для сложения векторов справедлив ассоциативный закон

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}). \quad (3)$$

На рис. 3 сумма трех векторов получалась путем построения четырехугольника, сторонами которого являются слагаемые векторы и их сумма. Аналогично этому для нахождения суммы  $n$  векторов пользуются векторным многоугольником, имеющим  $n+1$  сторон, из которых  $n$  сторон — слагаемые векторы, а одна сторона — их сумма.

Спрашивается теперь, какое значение придавать геометрической разности двух векторов  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ ? — Разность должна определяться таким образом, чтобы для векторов, так же, как и для скаляров, имело место соотношение

$$\mathbf{B} - \mathbf{B} = 0. \quad (4)$$

Соответственно этому вектору  $-\mathbf{B}$  должно соответствовать смещение, которое уничтожает смещение  $\mathbf{B}$ , возвращая движущуюся точку в начальное положение — другими словами, смещение, равное по длине и одинаковое по направлению со смещением  $\mathbf{B}$ , но обратное ему по знаку.

Под геометрической разностью векторов  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  понимаем геометрическую сумму векторов  $\mathbf{A}$  и  $-\mathbf{B}$  и соответственно определяют вычитание векторов следующим образом: вычтись из вектора  $\mathbf{A}$  вектор  $\mathbf{B}$  значит сложить вектор  $\mathbf{A}$  с вектором, равным по длине и одинаковым по направлению с вектором  $\mathbf{B}$ , но противоположным ему по знаку. В параллелограме рис. 2 диагональ (13) представляет геометрическую сумму  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ , диагональ (42) — геометрическую разность  $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ .

Вышеуказанные правила сложения и вычитания векторов формально согласуются с законами обычной алгебры.

**§ 3. Единичные и основные векторы, составляющие.** Под произведением  $\mathbf{A}$  скаляра  $a$  на вектор  $\mathbf{a}$

$$\mathbf{A} = a\mathbf{a} = \mathbf{a}a \quad (5)$$

понимают вектор, длина которого равна произведению численного значения скаляра  $a$  на длину вектора  $\mathbf{a}$

$$|\mathbf{A}| = |a| \cdot |\mathbf{a}|; \quad (5a)$$

направление его совпадает с вектором  $\mathbf{a}$ , а знак одинаков с  $a$  или ему противоположен, смотря по тому, является ли скаляр  $a$  положительным или отрицательным.

Умножение векторов на скаляры следует правилам алгебры скалярных величин; коммутативный закон находит себе выражение в (5). Дистрибутивный закон также справедлив, т. е.

$$(a + \beta)\mathbf{a} = a\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}, \quad a(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = a\mathbf{a} + a\mathbf{b}. \quad (5b)$$

Все векторы  $\mathbf{A}$  одинакового направления можно выразить через вектор  $\mathbf{s}$  того же направления, но длиной равный 1

$$\mathbf{A} = \pm |\mathbf{A}| \mathbf{s}. \quad (6)$$

Здесь имеет место положительный или отрицательный знак, в зависимости от того, одинаковы ли  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{s}$  по знаку или противоположны.

Вектор  $\mathbf{s}$ , длина которого равна единице, называется **единичным вектором**. Условимся приписывать длине его размерность вектора. Тогда единичному вектору  $\mathbf{s}$  (6) мы должны придать размерность отвлеченного числа. Единичным вектором пользуются для того, чтобы задать направление и знак одного или нескольких параллельных векторов.

Пусть будет дан (рис. 4) некоторый постоянный единичный вектор  $\mathbf{s}$  и любой вектор  $\mathbf{a}$ , образующий с  $\mathbf{s}$  угол  $\varphi$ . Составляющей вектора  $\mathbf{a}$  по направлению единичного вектора  $\mathbf{s}$  называют величину

$$\mathbf{a}_s = \mathbf{a} \cos \varphi, \quad (7)$$

равную длине проекции вектора  $\mathbf{a}$  на прямую единичного вектора  $\mathbf{s}$  и взятую со знаком плюс или минус, смотря по тому, как направлены проекция и  $\mathbf{s}$ : в одну сторону или в противоположные.

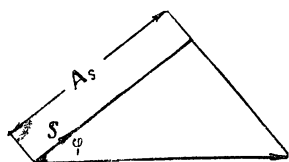


Рис. 4. Составляющая  $\mathbf{A}_s$  от  $\mathbf{A}$  по направлению  $\mathbf{s}$ .

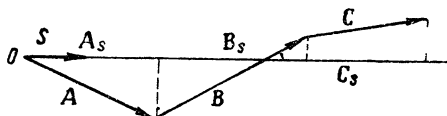


Рис. 5. Составляющая суммы  $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$  по  $\mathbf{s}$  равна сумме отдельных составляющих.

Составляющая вектора есть скалярная величина. Если проекцию вектора  $\mathbf{a}$  на прямую единичного вектора  $\mathbf{s}$  желательно охарактеризовать в отношении ее направления, то необходимо образовать произведение составляющей вектора  $\mathbf{a}$  по  $\mathbf{s}$  на единичный вектор  $\mathbf{s}$ . Выражение

$$|\mathbf{a}| \cos \varphi \cdot \mathbf{s}$$

дает проекцию в виде вектора.

Рассмотрим сумму трех векторов  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}.$$

Как следует из § 5, составляющая ее по направлению единичного вектора  $\mathbf{s}$  равна

$$\mathbf{A}_s + \mathbf{B}_s + \mathbf{C}_s,$$

т. е. алгебраической сумме составляющих векторов  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  по  $\mathbf{s}$ . Этот результат можно обобщить для любого числа векторов и выразить следующим образом: составляющая геометрической суммы любого числа векторов по направлению единичного вектора равна алгебраической сумме соответствующих составляющих отдельных векторов.

Векторы любого направления и любой длины можно характеризовать их составляющими по направлению постоянных единичных векторов. Для этого пользуются тремя единичными векторами, не лежащими в одной плоскости. Примем три взаимно перпендикулярных единичных

вектора  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  за основные. Пусть их направления совпадают с направлениями осей прямоугольной системы координат.

Как известно, существуют две системы осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , которые называют: одну — правой, а другую — левой. Все правые системы можно привести к совпадению друг с другом, равно и все левые, но правая с левой совпасть не могут. Отражением в координатной плоскости, как в зеркале, получают из правой системы левую, из левой — правую. Отражением в начале координат (поворотом всех трех осей в противоположную сторону) из правой системы тоже получается левая, и наоборот. Мы будем в дальнейшем всегда пользоваться выбранной Максвеллом правой системой.

Она представлена на рис. 6. Оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , которые совпадают при этом с основными векторами  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$ , идут в такой последовательности, что вращение от оси  $x$  к оси  $y$ , соединенное с поступательным движением вдоль оси  $z$ , приводит к винту с правой нарезкой. Положительные направления осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  в правой системе изображаются большим, указательным и средним пальцами правой руки.

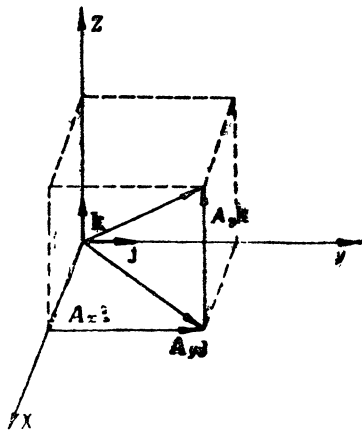


Рис. 6. Ортогональные единичные векторы  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$ .

Пусть составляющими вектора  $\mathbf{a}$  по направлению основных векторов  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$ , или, как говорят, по осям  $x$ ,  $y$ ,  $z$  будут

$$a_x, a_y, a_z.$$

Тогда проекции вектора  $\mathbf{a}$  на оси по длине, направлению и знаку даются выражениями:

$$a_x \mathbf{i}, a_y \mathbf{j}, a_z \mathbf{k}.$$

Сложение этих трех векторов, как можно усмотреть из рис. 6, приводит обратно к самому вектору  $\mathbf{a}$ . Он, следовательно, равен

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}. \quad (8)$$

Пусть даны длина, направление и знак вектора  $\mathbf{a}$ ; тогда сразу уравнениями

$$a_x = |\mathbf{a}| \cos(\mathbf{a}, x), \quad a_y = |\mathbf{a}| \cos(\mathbf{a}, y), \quad a_z = |\mathbf{a}| \cos(\mathbf{a}, z) \quad (8a)$$

однозначно определяются его составляющие.

Обратно, если даны три составляющих, то однозначно определяется вектор  $\mathbf{a}$ , как диагональ прямоугольника параллелепипеда, ребра которого суть векторы  $a_x \mathbf{i}$ ,  $a_y \mathbf{j}$ ,  $a_z \mathbf{k}$ . Его длина равна

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}; \quad (8b)$$

его направление и знак определяются косинусами, вычисляемыми по (8a).

Зная три составляющих некоторого вектора по направлению основных векторов  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$ , можно вычислить его составляющую по направле-

нию любого единичного вектора  $\mathbf{s}$ , если известны углы, которые образует вектор  $\mathbf{s}$  с основными векторами. Нужно вектор  $\mathbf{a}$  представить согласно (8) в виде суммы трех векторов, параллельных векторам  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$ , и алгебраически сложить составляющие этих трех слагаемых векторов по направлению  $\mathbf{s}$ ; таким образом получаем:

$$\mathbf{a}_s = \mathbf{a}_x \cos(\mathbf{s}, x) + \mathbf{a}_y \cos(\mathbf{s}, y) + \mathbf{a}_z \cos(\mathbf{s}, z). \quad (9)$$

Это правило вычисления составляющей по любой оси является характерным свойством векторов. Согласно ему, каждому направлению пространства соответствует некоторая скалярная величина—именно, составляющая вектора  $\mathbf{a}$  по этому направлению. Она зависит однородно линейно от направляющих косинусов. Используем обратно правило составляющих (9) для общей характеристики вектора. Если дан вектор, то всякому направлению в пространстве соответствует некоторая скалярная „составляющая вектора“, которая зависит линейно-однородно от составляющих единичного вектора, расположенного вдоль данного направления (т. е. от направляющих косинусов).

**§ 4. Внутреннее или скалярное произведение.** Пусть  $\mathbf{F}$ —сила, действующая на точку. Если  $\mathbf{v}$  есть скорость движущейся точки, то работа, которую совершает сила  $\mathbf{F}$  в единицу времени, есть скалярная величина, значение которой дается произведением длин векторов  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{v}$  на косинус угла между ними. Напишем это произведение в виде

$$\mathbf{Fv} = |\mathbf{F}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \cos(\mathbf{F}, \mathbf{v}) \quad (10)$$

и назовем его скалярным или (по Грассману) внутренним произведением двух указанных векторов. Это обозначение перенесем на любые векторы.

Косинус угла между двумя векторами равен  $+1$ , если оба вектора направлены одинаково и в одну сторону, и равен  $-1$ , если они направлены противоположно. Он равен нулю, если векторы образуют между собой прямой угол. Если применить это к основным векторам  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$ , то получаем

$$\mathbf{ij} = \mathbf{jk} = \mathbf{ki} = 0; \text{ напротив } \mathbf{ii} = \mathbf{jj} = \mathbf{kk} = 1. \quad (11)$$

Скалярное произведение остается, согласно служащему для его определения уравнению (10), неизменным, если изменить порядок его множителей. Скалярное умножение двух векторов следует коммутативному закону. Внутреннее произведение двух векторов  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{v}$  можно понимать как алгебраическое произведение длины вектора (например,  $\mathbf{v}$ ) на составляющую другого вектора ( $\mathbf{F}$ ) по направлению первого вектора. Из этого толкования непосредственно следует дистрибутивный закон скалярного умножения:

$$\mathbf{v} \sum_{h=1}^n \mathbf{F}_h = \sum_{h=1}^n \mathbf{vF}_h. \quad (12)$$

В самом деле, по доказанной в § 3 теореме, составляющая геометрической суммы векторов  $\mathbf{F}_h$  по какому-либо направлению равна



алгебраической сумме составляющих слагаемых векторов  $F_h$  по тому же направлению. Если векторы  $F_h$ , как выше, суть силы, а  $v$  — скорость, то (12) гласит: работа равнодействующей силы равна алгебраической сумме работ отдельных составляющих сил.

Вследствие применимости коммутативного и дистрибутивного законов при скалярном умножении соблюдаются правила умножения обычной алгебры. Так, например, имеет место правило:

$$(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd. \quad (13)$$

Если оба множителя скалярного произведения  $A$  и  $B$  выразить через основные векторы  $i, j, k$ , то получают

$$AB = (A_x i + A_y j + A_z k)(B_x i + B_y j + B_z k).$$

Если вычислить правую сторону по обычным правилам умножения, принимая во внимание (11), то следует

$$AB = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z, \quad (14)$$

— формула, которая, согласно определению скалярного произведения и уравнению (8a), переходит в известную формулу аналитической геометрии

$$\cos(A, B) = \cos(A, x) \cos(B, x) + \cos(A, y) \cos(B, y) + \cos(A, z) \cos(B, z).$$

**§ 5. Внешнее или векторное произведение.** Двумя векторами  $A$  и  $B$  (именно в таком порядке следования) дается параллелограмм с определенным направлением обхода (рис. 7); площадь этого параллелограмма дается выражением

$$S = |A| \cdot |B| \sin(A, B).$$

Подобное образование называется „плоской величиной“. Она определяется как площадка с определенным направлением обхода. Две плоские величины будут равны, если обе площадки параллельны, равны по площади и одинаковы по направлению обхода. Плоская величина, образуемая векторами  $A$  и  $B$ , называется внешним произведением векторов  $A$  и  $B$ . Оно обозначается символом  $A \times B$ . Каждой „плоской величине“ можно обратимо однозначно сопоставить вектор  $C$ , равный по длине ее площади, нормальный к ней и направленный таким образом, что поступательное движение в направлении  $C$ , совместно с вращением в направлении обхода „плоской величины“, воспроизводит правый винт. Когда плоская величина дана двумя указанными векторами  $A$  и  $B$ , то вектор  $C$  называется векторным произведением  $A$  и  $B$ , что можно написать так:

$$C = A \times B. \quad (15)$$

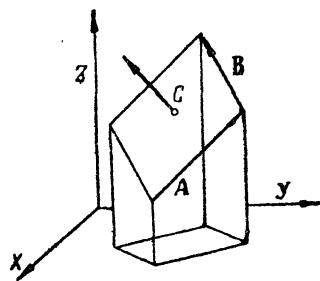


Рис. 7. Векторное произведение  $A \times B$  как вектор  $C$ .

Для действий над такими величинами введем следующее определение. Будем понимать под суммой нескольких плоских величин такую плоскую

величину, которая соответствует вектору, получающемуся путем сложения векторов, соответствующих отдельным плоским величинам. Целесообразность такого определения вытекает из рассмотрения составляющей  $C_s$  вектора  $C$  по какому-нибудь заданному направлению  $s$ ; пусть последнее с  $C$  образует угол  $\varphi$ . В самом деле, если спроектировать плоскую величину на плоскость, нормальную к  $s$ , то площадь этой проекции также равна  $|C| \cdot \cos \varphi$ . Она согласуется с  $C_s$  также и по знаку, если мы припишем плоскости такое направление обхода, которое вместе с  $s$  представляет правый винт, и условимся считать плоскую величину положительной или отрицательной, смотря по тому, совпадает ли направление обхода этой величины и плоскости или нет. Составляющая плоской величины на плоскость, с указанным для последней направлением обхода, равна, следовательно, составляющей сопоставленного ей вектора по направлению правовинтовой нормали к этой плоскости.

Из данного определения для плоских величин следует, что коммутативный закон не имеет места.

Наоборот,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \mathbf{A} = 0. \quad (16)$$

Дистрибутивный закон остается, напротив, в силе:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times \mathbf{D} = \mathbf{A} \times \mathbf{D} + \mathbf{B} \times \mathbf{D}. \quad (17)$$

Для доказательства этого уравнения обратим внимание на то, что векторное произведение  $\mathbf{A} \times \mathbf{D}$  не изменяется, если вектор  $\mathbf{A}$  заменить его проекцией  $\mathbf{A}'$  на плоскость, нормальную к  $\mathbf{D}$ . Если мы поступим таким образом с тремя векторами  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ , затем полученную таким образом фигуру на плоскости, нормальной к  $\mathbf{D}$ , увеличим в масштабе  $|\mathbf{D}|$  и повернем на прямой угол, то векторы  $\mathbf{A}'$ ,  $\mathbf{B}'$ ,  $\mathbf{A}' + \mathbf{B}'$  переходят в векторы  $\mathbf{A} \times \mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B} \times \mathbf{D}$  и  $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times \mathbf{D}$ .

Для единичных векторов  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  имеет в частности место:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} = -\mathbf{j} \times \mathbf{i}; \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} = -\mathbf{k} \times \mathbf{j}; \\ \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} = -\mathbf{i} \times \mathbf{k} \\ \mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Если по этим правилам вычислить векторное произведение

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (\mathbf{A}_x \mathbf{i} + \mathbf{A}_y \mathbf{j} + \mathbf{A}_z \mathbf{k}) \times (\mathbf{B}_x \mathbf{i} + \mathbf{B}_y \mathbf{j} + \mathbf{B}_z \mathbf{k}),$$

то приходим к формуле

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{i}(\mathbf{A}_y \mathbf{B}_z - \mathbf{A}_z \mathbf{B}_y) + \mathbf{j}(\mathbf{A}_z \mathbf{B}_x - \mathbf{A}_x \mathbf{B}_z) + \mathbf{k}(\mathbf{A}_x \mathbf{B}_y - \mathbf{A}_y \mathbf{B}_x), \quad (19)$$

или в наглядной детерминантной форме

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \mathbf{A}_x & \mathbf{A}_y & \mathbf{A}_z \\ \mathbf{B}_x & \mathbf{B}_y & \mathbf{B}_z \end{vmatrix}. \quad (20)$$

Примером внешнего произведения двух векторов может служить момент вращения силы  $\mathbf{F}$ . Пусть  $O$  будет центр (рис. 8); из него про-

веден вектор  $\mathbf{r}$  в точку  $P$ , на которую действует сила  $\mathbf{F}$ . Тогда момент силы  $\mathbf{F}$  относительно  $O$

$$\mathbf{M} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}. \quad (21)$$

Другой пример дает кинематика твердого тела. Пусть некоторое твердое тело, закрепленное в точке  $O$ , вращается вокруг оси  $ON$  (рис. 9). Отложим на этой оси из точки  $O$  отрезок, численное значение длины которого равно угловой скорости, и притом в том направлении, которое соответствует вращательному движению так же, как направление поступательного движения соответствует вращению при винтовом движении с правым ходом. Это условие указывает соответствующий данному вращательному движению вектор  $\mathbf{u}$ . Если далее  $\mathbf{r}$  — вектор, проведенный из  $O$  в какую-нибудь точку  $P$  твердого тела, то очевидно скорость последнего  $\mathbf{v}$

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{r}. \quad (21a)$$

Действительно, точка  $P$  движется нормально к плоскости, проведенной через  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{u}$ . Стрелка, которая указывает направление  $\mathbf{v}$ , направлена, как видно на рисунке, как векторное произведение. Численное значение  $v$  мы найдем, если опустим перпендикуляр из  $P$  на ось вращения и помножим его на угловую скорость. А это дает как раз численное значение

$$|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{r}| \sin(\mathbf{u}, \mathbf{r})$$

векторного произведения, чем и доказывается предыдущее утверждение.

**§ 6. Произведение трех векторов.** Будем пользоваться круглыми скобками только в том случае, когда нам понадобится отделить два вектора, перемножаемые скалярно, от всех остальных векторов. Из трех векторов можно образовать произведения трех различных родов.

a) *Произведение вектора на скалярное произведение двух других векторов:*

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{C}).$$

Так как  $\mathbf{BC}$  является скаляром, то  $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$  есть вектор, параллельный  $\mathbf{A}$ . Отсюда ясно, что например  $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$  есть вектор, совершенно отличный от предыдущего.

b) *Скалярное произведение вектора на векторное произведение двух других векторов.* Здесь имеет место важное соотношение:

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}). \quad (22)$$

По элементарному правилу объем есть произведение площади основания на высоту; поэтому каждое из трех указанных выражений дает

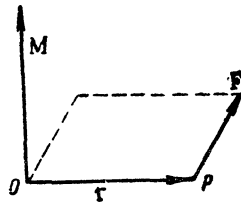


Рис. 8. Момент вращения  $\mathbf{M}$  силы  $\mathbf{F}$ , действующей в точке  $P$ , относительно точки  $O$ ;  
 $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ .

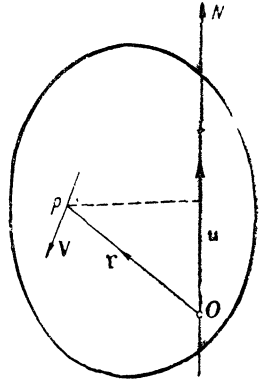


Рис. 9. Вращение тела вокруг оси  $ON$  с угловой скоростью  $\mathbf{u}$ ;  
 $\mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{r}$ .

объем параллелепипеда, образованного ребрами  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ; знак этого произведения положителен, если векторы, взятые в порядке  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ , образуют правую систему.

Все три произведения даются согласно (14) и (20) следующим выражением через составляющие векторов  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ :

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}. \quad (23)$$

с) *Векторное произведение вектора на векторное произведение двух других векторов:*

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{F}.$$

Вектор  $\mathbf{F}$  лежит в плоскости, определенной векторами  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$ , и притом перпендикулярен проекции вектора  $\mathbf{A}$  на эту плоскость, ибо вектор  $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$  нормален к этой плоскости, а  $\mathbf{F}$  перпендикулярен к  $\mathbf{A}$  и к  $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ .

Составляющая вектора  $\mathbf{F}$  по оси  $x$ -ов по (20) равна

$$F_x = A_y(B_x C_y - B_y C_x) - A_z(B_z C_x - B_x C_z);$$

мы перепишем это следующим образом:

$$F_x = B_x(A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z) - C_x(A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z),$$

или по (14)

$$F_x = B_x(AC) - C_x(AB);$$

соответствующие уравнения имеют место для обеих других составляющих; все они могут быть объединены одним векторным уравнением

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(AC) - \mathbf{C}(AB). \quad (24)$$

Тем самым произведение третьего рода сведено к двум произведениям первого рода. С помощью этого выражения легко можно показать, что

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) + \mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) + \mathbf{C} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{0}. \quad (25)$$

Для этого нужно только отдельные его члены разложить по (24).

Вычислим, наконец, скалярное произведение двух векторных произведений  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D})$ .

Это есть произведение второго рода, в котором первый вектор заменен произведением двух других. Применяя правило (23), получим

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = \mathbf{C}[\mathbf{D} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})].$$

Так как согласно (24)  $\mathbf{D} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$  можно заменить

$$\mathbf{D} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{D}) - \mathbf{B}(\mathbf{A}\mathbf{D}),$$

то отсюда следует

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A}\mathbf{C})(\mathbf{B}\mathbf{D}) - (\mathbf{B}\mathbf{C})(\mathbf{A}\mathbf{D}). \quad (26)$$

**§ 7. Дифференцирование векторов по времени.** Производная вектора  $\mathbf{a}$  по скалярной переменной  $t$  (например, по времени) определяется как предел дроби

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{a}(t + \Delta t) - \mathbf{a}(t)}{\Delta t}. \quad (27)$$

Так как при делении на скаляр векторные свойства не нарушаются, то производная вектора по скалярной переменной сама является вектором. Так например, если  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, проведенный из неподвижной точки  $O$  в движущуюся точку  $P$ , то

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (28)$$

дает вектор скорости точки  $P$ .

Получение производной от вектора по скалярной переменной сводится к вычитанию векторов и последующему переходу к пределу, с делением на скаляр; поэтому здесь соблюдаются правила обычной алгебры, а отсюда следует, что обычные правила дифференциального исчисления относятся и к дифференцированию суммы векторов

$$\frac{d(\mathbf{A} + \mathbf{B})}{dt} = \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{d\mathbf{B}}{dt}, \quad (29)$$

а равно и к дифференцированию произведения скаляра на вектор

$$\frac{d\alpha\mathbf{a}}{dt} = \frac{d\alpha}{dt}\mathbf{a} + \alpha \frac{d\mathbf{a}}{dt} \quad (30)$$

и внутреннего произведения двух векторов

$$\frac{d(\mathbf{A}\mathbf{B})}{dt} = \frac{d\mathbf{A}}{dt}\mathbf{B} + \mathbf{A} \frac{d\mathbf{B}}{dt}. \quad (31)$$

Для дифференцирования внешнего произведения также соблюдается соответствующее общее правило; нужно только иметь в виду, чтобы множители были написаны в правильном порядке:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt}, \quad (32)$$

так как при перестановке множителей векторное произведение меняет свой знак.

## II. ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

**§ 8. Гидродинамическое изображение.** В главе I этого раздела мы развивали понятие вектора и правила векторной алгебры применительно к механике материальной точки. Скорость последней давалась одним вектором. В настоящей главе мы будем исходить из задачи исследования движения жидкости, заполняющей собой объем. Здесь скорости различных материальных частиц вообще независимы друг от друга. Поэтому каждой точке надо сопоставлять свой особый вектор скорости. Движущаяся жидкость, заполняющая объем, образует, как принято говорить, векторное поле.

В математической физике принято говорить о поле некоторой переменной, когда в известной части пространства рассматривают значе-

ние ее величины в зависимости от координат места; при этом, за исключением отдельных поверхностей, линий и точек, считают эти значения непрерывными. Существуют скалярные поля (например, поле температуры) и векторные поля (например, поле силы тяжести).

Изучение движения жидкости чрезвычайно способствовало развитию теории векторных полей; особое значение имели здесь основные исследования вихревых движений, принадлежащие Гельмгольтцу. На них основывался Максвелл, когда он приступил к математическому обоснованию идеи Фарадея о силовом поле. Для Максвелла гидродинамические аналогии представляли нечто большее, нежели чисто математическую картину. Гидродинамические представления о механизме поля руководили им при установлении законов близкого действия электромагнитного поля.

Мы последуем этому историческому пути и разовьем в этой главе математическую теорию векторных полей применительно к гидродинамической задаче. Подобно тому, как выше мы любому вектору сопоставляли некоторое смещение, заменим теперь вектор, поле которого мы исследуем, вектором скорости жидкости, заполняющей пространство. Существует, однако, опасность, что при такой гидродинамической картине мы ограничим наше исследование слишком частным случаем; чтобы этого избежать, мы иногда будем приписывать жидкости такие свойства, которые в некоторых отношениях отклоняются от свойств реальных жидкостей. Это дозволено, поскольку здесь речь идет исключительно о математической аналогии.

**§ 9. Безвихревое поле. Градиент и интеграл по кривой.** Из каждого скалярного поля можно образовать векторное; сделать это можно следующим образом. Пусть каждой точке  $x, y, z$  пространства будет сопоставлен некоторый скаляр  $\varphi$  и пусть  $\varphi(x, y, z)$  непрерывно и обладает производной во всех точках. Отложим в этом поле малый вектор  $ds$ . Спрашивается, каково будет приращение функции  $\varphi$  при переходе на вектор  $ds$ . — Если  $dx, dy, dz$  — составляющие вектора  $ds$ , а  $ds$  — его длина, то искомое приращение равно:

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z} dz. \quad (33)$$

Так как далее  $\frac{dx}{ds} = \cos(\mathbf{s}, x)$  и т. д., то приращение  $\varphi$ , отнесенное к единице длины, при переходе в направлении  $ds$  будет

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \cos(\mathbf{s}, x) + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \cos(\mathbf{s}, y) + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \cos(\mathbf{s}, z). \quad (33a)$$

Согласно (9) этот результат можно выразить следующим образом: при переходе в направлении  $ds$  искомое приращение равно составляющей вектора  $\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}$  по направлению  $ds$ . Назовем этот вектор градиентом скаляра  $\varphi$  в точке  $x, y, z$  и напомним, что

$$\mathbf{v} = \text{grad } \varphi = \mathbf{i} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial\varphi}{\partial z}. \quad (34)$$

Градиент  $\varphi$  нормален к поверхности уровня  $\varphi = \text{const}$ , ибо согласно (33) скалярное произведение  $\text{grad } \varphi \cdot ds$  равно нулю, когда век-

тор  $ds$  лежит в плоскости, касательной к поверхности уровня. Направление  $\text{grad } \varphi$  совпадает с направлением быстрого увеличения скаляра  $\varphi$ , а величина его равна

$$|\text{grad } \varphi| = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2}.$$

Итак, пользуясь (34), мы из скалярного поля  $\varphi(x, y, z)$  образовали векторное поле  $\mathbf{v}(x, y, z)$ .

Одним из самых основных понятий всей математической физики является понятие интеграла по кривой в векторном поле. Соединим две произвольные точки векторного поля 1 и 2 произвольной же кривой; пусть она состоит из отдельных элементарных отрезков  $ds$  с направлением от 1 до 2. Для каждого элемента  $ds$  составим его скалярное произведение на вектор  $\mathbf{v}$ , отвечающий началу вектора  $ds$

$$\mathbf{v} ds = v_s ds.$$

Составим далее сумму всех таких скалярных произведений и перейдем к пределу, устремляя длину всех элементов  $ds$  к нулю. Тогда мы получим интеграл по кривой

$$\int_1^2 \mathbf{v} ds = \int_1^2 v_s ds. \quad (35)$$

Его значение, вообще говоря, конечно, зависит от кривой, по которой происходит интегрирование.

В разбираемом здесь особом случае, когда вектор  $\mathbf{v}$  является градиентом некоторого скаляра  $\varphi$ , интеграл по кривой не зависит от пути, соединяющего точки 1 и 2.

В самом деле:

$$v_s ds = \frac{\partial \varphi}{\partial s} ds$$

есть приращение скаляра  $\varphi$  на элементе пути  $ds$ ; при образовании интеграла по кривой (35) все бесконечно малые величины складываются и дают общее приращение  $\varphi$ :

$$\int_1^2 \mathbf{v} ds = \varphi_2 - \varphi_1. \quad (35a)$$

Интеграл градиента по кривой имеет, следовательно, одно и то же значение для двух различных кривых, если их начальная и конечная точки одинаковы. Интеграл градиента по любому замкнутому контуру равен нулю

$$\oint \mathbf{v} ds = \oint \frac{\partial \varphi}{\partial s} ds = 0. \quad (35b)$$

Назовем течение жидкости, образующее поле скоростей  $\mathbf{v}$ , безвихревым, если интеграл скорости вдоль любой замкнутой кривой равен нулю. В этом случае будем и самое поле обозначать как безвихревое.

Тогда мы можем высказать следующую теорему: поле градиента скаляра  $\varphi$  всегда — поле безвихревое.

В силовом поле интеграл вектора силы по кривой дает работу. Условие, что интеграл по любому замкнутому контуру всегда равен нулю, выражает здесь следующее: нельзя безгранично получать работу путем повторного обхода материальной точки вдоль замкнутого контура. Мы показали, что это условие выполняется, когда вектор силы есть градиент некоторого скаляра.

Имеет место и обратная теорема: безвихревое поле всегда можно рассматривать как поле градиента скаляра. В самом деле, пусть скаляр в некоторой точке  $O$  имеет некоторое значение  $\varphi_0$ ; тогда

$$\varphi(P) = \varphi_0 + \int_0^P \mathbf{v}_s ds \quad (36)$$

определяет этот скаляр в любой другой точке  $P$ , причем путь интегрирования из 1 и 2 согласно (35b) можно брать произвольный. Если конечную точку  $P$  этого пути передвинуть на малое расстояние  $ds$ , то

$$d\varphi = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} \quad \text{или} \quad \mathbf{v}_s = \frac{\partial \varphi}{\partial s}.$$

Таким образом безвихревое поле действительно является градиентом скаляра, определяемого уравнением (36).

Если поле, о котором идет речь, является силовым полем, то  $(-\varphi)$  называют потенциалом, или, еще лучше, скалярным потенциалом. Существование потенциала есть необходимое и достаточное условие для того, чтобы из силового поля нельзя было вышеуказанным образом безгранично получать работу. Самое понятие потенциала впервые возникло при изучении безвихревого поля силы тяжести.

Уравнение движения материальной точки в силовом поле  $\mathbf{F}$

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F};$$

скалярное умножение на вектор  $\mathbf{v}$  дает

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} mv^2 \right) = \mathbf{F}\mathbf{v} = \mathbf{F} \frac{ds}{dt};$$

Следовательно

$$\left( \frac{1}{2} mv^2 \right)_2 - \left( \frac{1}{2} mv^2 \right)_1 = \int_1^2 \mathbf{F} ds. \quad (37)$$

Если  $\mathbf{F} = -\text{grad } \varphi$ , то правая сторона независимо от пути равна  $\varphi_1 - \varphi_2$ , и мы имеем следующий результат: приращение кинетической энергии равно пройденной разности потенциалов.

Это понятие нашло применение и в гидродинамике; скаляр  $(-\varphi)$ , определяемый вышеуказанным образом для любого безвихревого движения, называют здесь потенциалом скоростей.

**§ 10. Отдача поля источников, теорема Гаусса и расхождение вектора.** Идеальной жидкости, лежащей в основе нашего гидродинамического изображения, мы приписываем еще свойство несжимае-



мости. Тем самым для свободы движения жидкости вводится известное ограничение, так как в области, заполненной жидкостью, через каждую замкнутую поверхность должно втекать столько же жидкости, сколько и вытекать: Посредством такого течения мы могли бы изображать далеко не все векторные поля.

Чтобы это ограничение в дальнейшем опять устранить, допустим, что в известных местах пространства жидкость непрерывно образуется, в других же, наоборот, уничтожается. Места первого рода обозначим как источники, места второго рода — как стоки или отрицательные источники. Впрочем, выражение „источник“ мы можем употреблять и в более общем смысле, так чтобы оно охватывало и положительные и отрицательные источники. Если придумать подходящую систему источников, можно тем самым изобразить посредством стационарного движения несжимаемой жидкости любое векторное поле.

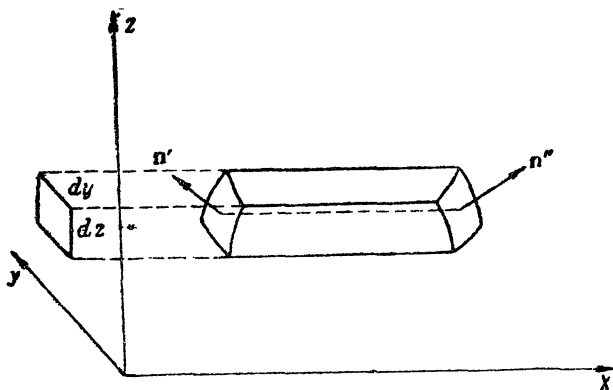


Рис. 10. К доказательству теоремы Гаусса.

Мы будем предполагать, что источники распределены в пространстве непрерывно. Тогда возникает задача — указать меру отдачи всей системы источников.

Выделим для этого определенный объем  $G$  и измерим объем жидкости, вытекающей из  $G$  в единицу времени. Так как мы поток заранее предполагаем несжимаемым и стационарным, то этот объем жидкости должен характеризовать собой отдачу всех находящихся в  $G$  источников.

Через элемент поверхности величины  $dS$  в единицу времени в направлении нормали, проведенной в любую сторону, протекает количество жидкости

$$dS \cdot v_n dt = dS |v| \cos(v, n) dt.$$

В самом деле, это есть объем цилиндра с основанием  $dS$  и высотой  $v_n dt$ . Общий объем ежесекундно вытекающей из  $G$  жидкости дается поэтому интегралом, взятым по поверхности  $G$ :

$$\iint v_n dS = \iint [v_x \cos(n, x) + v_y \cos(n, y) + v_z \cos(n, z)] dS, \quad (38)$$

где  $dS$  есть элемент поверхности  $G$ , а  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль. Преобразуем первое слагаемое правой стороны

$$\int \int \mathbf{v}_x \cos(\mathbf{n}, x) dS$$

в интеграл по объему; для этого представим себе, что объем  $G$  разделен в направлении  $x$  на бруски с прямоугольными поперечными сечениями. Такой брусок имеет поперечное сечение  $dydz$  и вырезает из поверхности  $G$  два элемента поверхности  $dS'$  и  $dS''$ . Величина, приносимая обоими элементами в искомый интеграл, будет

$$\mathbf{v}'_x \cdot \cos(\mathbf{n}', x) dS' + \mathbf{v}''_x \cdot \cos(\mathbf{n}'', x) dS''.$$

Пусть координаты  $x$  оконечных элементов нашего бруска будут  $x'$  и  $x''$ , и пусть притом  $x'' > x'$ . Тогда очевидно

$$\cos(\mathbf{n}'', x) dS'' = dydz$$

и

$$\cos(\mathbf{n}', x) dS' = -dydz,$$

так что предыдущее выражение можно представить в виде

$$dydz (\mathbf{v}''_x + \mathbf{v}'_x) = dydz \int_{x'}^{x''} \frac{\partial \mathbf{v}_x}{\partial x} dx.$$

Если теперь просуммировать по всем брускам, на которые разделен объем  $G$ , то получим:

$$\int \int \mathbf{v}_x \cos(\mathbf{n}, x) dS = \int \int \int \frac{\partial \mathbf{v}_x}{\partial x} dx dy dz. \quad (39)$$

Если произвести далее соответствующее преобразование и для остальных двух слагаемых правой стороны (38), то получится важная теорема Гаусса:

$$\int_0 \int \mathbf{v}_n dS = \int_G \int \left( \frac{\partial \mathbf{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{v}_z}{\partial z} \right) dx dy dz. \quad (40)$$

Назовем удельной отдачей или расхождением нашего поля потока в некотором месте отдачу единицы объема элемента, окружающего рассматриваемое место, т. е.

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \lim_{G \rightarrow 0} \frac{1}{G} \int \mathbf{v}_n dS. \quad (41)$$

Уравнение (40) непосредственно дает для него значение

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{v}_z}{\partial z}. \quad (41a)$$

В тех случаях, когда  $\mathbf{v}(x, y, z)$  представляет поток без источников,  $\mathbf{v}$  должно всюду удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{v}_z}{\partial z} = 0.$$

**§ 11. Теоремы Грина.** Преобразование на основании теоремы Гаусса интеграла по объему в интеграл по поверхности

$$\int_0 \int \mathbf{v}_n dS = \int_G \int \int (\operatorname{div} \mathbf{v}) dv \dots \quad (40)$$

позволяет произвести ряд различных других, также весьма важных преобразований.

Пусть, например,  $\mathbf{v}$  — произведение скаляра  $\psi$  на вектор  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{v} = \psi \mathbf{A}.$$

Тогда

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \psi \operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{\partial \psi}{\partial x} A_x + \frac{\partial \psi}{\partial y} A_y + \frac{\partial \psi}{\partial z} A_z$$

или

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \psi \operatorname{div} \mathbf{A} + (\operatorname{grad} \psi \cdot \mathbf{A});$$

в силу этого, согласно уравнению (40),

$$\int \int \psi A_n dS = \int \int \int dv \{ \psi \operatorname{div} \mathbf{A} + (\operatorname{grad} \psi \cdot \mathbf{A}) \}. \quad (42)$$

Далее, если вектор  $\mathbf{A}$  можно представить как градиент второго скаляра  $\varphi$ :

$$\mathbf{A} = \operatorname{grad} \varphi,$$

то

$$A_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n}$$

и

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

Эту сумму вторых производных некоторой функции называют оператором Лапласа и обозначают через  $\Delta$ :

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \quad (43)$$

Делая подстановку  $\mathbf{A} = \operatorname{grad} \varphi$ , получаем уравнение (42) в виде

$$\int \int dS \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \int \int \int dv \{ \psi \Delta \varphi + (\operatorname{grad} \psi \cdot \operatorname{grad} \varphi) \}. \quad (44)$$

Оно годно для двух любых функций координат  $\varphi$  и  $\psi$ , если только последние внутри всего объема  $G$  конечны, непрерывны и имеют первую и вторую производные по координатам.

Если вычесть из уравнения (44) уравнение, полученное из него перестановкой  $\psi$  и  $\varphi$ , то получаем

$$\int \int dS \left( \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) = \int \int \int dv \{ \psi \Delta \varphi - \varphi \Delta \psi \}. \quad (45)$$

Уравнения (44) и (45) называются теоремами Грина. В электродинамике мы будем ими пользоваться очень часто.

**§ 12. Точечные источники.** До сих пор мы всегда предполагали, что источники распределены непрерывно, и значение расхождения

вектора всегда конечно. Такое предположение действительно справедливо для всех векторных полей. Однако имеются случаи, когда распределение источников приближается к прерывному и источники оказываются сжатыми около точек, линий или поверхностей. Так как с прерывным распределением математически иногда оперировать легче, чем с непрерывным, то часто задачу упрощают и производят вычисление, предполагая распределение прерывным. Но при этом, если хотят избежать ошибочных заключений, нужно всегда иметь в виду, что с самого начала было введено предположение, которое не совсем точно отвечает действительности.

В этом параграфе мы хотим рассмотреть безвихревый поток, образуемый точечными источниками. Мы исходим из случая, когда во всем пространстве, заполненном жидкостью, имеется всего один источник. Выходящая из источника жидкость уходит, в силу симметрии, одинаково по всем направлениям. Она движется в радиальных направлениях, причем через все концентрические шаровые поверхности, описанные вокруг точечного источника, как центра, протекает одинаковое количество жидкости. Это количество характеризует отдачу источника, если мы измеряем ее, как и раньше, объемом вытекающей из него жидкости. Будем теперь за меру отдачи источника принимать не объем, а массу идеальной жидкости, плотностью которой мы тоже можем распорядиться произвольно; положим ее равной  $\frac{1}{4}\pi$ . Это делается для того, чтобы отчетливее показать аналогию между полем потока и электрическим силовым полем, выраженным в абсолютных электростатических единицах. Таким образом отдача источника должна быть равна единице, если из него в каждую секунду появляется  $4\pi$  несжимаемой жидкости. Через шаровую поверхность радиуса  $r$ , описанную вокруг источника, как центра, протекает каждую секунду масса жидкости  $e$ , равная

$$e = \frac{1}{4\pi} \int dS v_n = r^2 v_r; \quad (46)$$

обратно, радиальная скорость потока выражается через отдачу следующим образом:

$$v_r = \frac{e}{r^2};$$

она падает обратно пропорционально квадрату удаления  $r$  от точечного источника и становится бесконечной, если войти в точку источника.

Невихревая природа потока приводит к тому, что вектор  $\mathbf{v}$  можно представить как отрицательный градиент некоторого потенциала

$$\mathbf{v} = -\text{grad } \varphi, \quad \varphi = \frac{e}{r}. \quad (47)$$

Если мы имеем ряд из  $h$  точечных источников с отдачами  $e_1, \dots, e_h$  и если поля их налагаются друг на друга, то результирующее поле можно вычислить или путем геометрического сложения векторов  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_h$ , или просто алгебраическим суммированием скалярных потенциалов  $\varphi_1, \dots, \varphi_h$ .

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^h \mathbf{v}_i = -\text{grad } \varphi, \quad \varphi = \sum_{i=1}^h \frac{e_i}{r_i}. \quad (48)$$

Если мы имеем замкнутую поверхность, охватывающую некоторое число точечных источников, то объем жидкости, протекающей через эту поверхность наружу, равен произведению  $4\pi$  на алгебраическую сумму отдач источников, охваченных поверхностью.

Если  $x_i, y_i, z_i$  суть координаты  $i$ -го точечного источника, то значение потенциала  $\varphi$  в точке  $x, y, z$  согласно (48) равно

$$\varphi(x, y, z) = \sum_{i=1}^h \frac{e_i}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}}. \quad (49)$$

Мы убеждаемся, что эта функция фактически всюду, за исключением самых точечных источников, удовлетворяет уравнению Лапласа для безвихревого свободного от источников потока

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = -\Delta\varphi = -\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right) = 0.$$

Для поверхности  $S$ , окружающей  $h$  точечных источников ( $e_1, e_2, \dots, e_h$ )

$$\iint \mathbf{v}_n dS = 4\pi(e_1 + e_2 + \dots + e_h). \quad (50)$$

Для доказательства применим теорему Гаусса к области, ограниченной поверхностью  $S$  и малыми шаровыми поверхностями  $S_1, S_2, \dots, S_h$  вокруг отдельных точечных источников. В ограниченной таким образом области  $\operatorname{div} \mathbf{v}$  равен всюду нулю; поэтому

$$\iint_S \mathbf{v}_n dS + \iint_{S_1} \mathbf{v}_n dS_1 + \dots + \iint_{S_h} \mathbf{v}_n dS_h = 0;$$

нужно здесь предполагать направленной всегда от заштрихованной области наружу, так что по (46)

$$\iint_{S_1} \mathbf{v}_n dS_1 = -4\pi e_1 \text{ и т. д.}$$

Рассмотрим, исходя из выражения (49), потенциал системы источников, лежащих на конечном расстоянии от данной точки, и пусть это расстояние будет велико по сравнению с расстояниями отдельных источников друг от друга. Поместим начало координат в области системы источников и разложим выражение (49) по величинам  $x_i, y_i, z_i$ , которые, как указано, малы в сравнении с  $x, y, z$ ; мы получим тогда

$$\varphi = [\varphi]_0 + \sum_{i=1}^h \left( \left[ \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \right]_0 \cdot x_i + \left[ \frac{\partial\varphi}{\partial y_i} \right]_0 \cdot y_i + \left[ \frac{\partial\varphi}{\partial z_i} \right]_0 \cdot z_i + \dots \right),$$

где индекс 0 означает, что в соответствующем члене все значения  $x_i = y_i = z_i$  нужно положить равными нулю. Производная

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}} &= \\ &= \frac{x-x_i}{(\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2})^3}; \end{aligned}$$

следовательно

$$\left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right]_0 = \frac{e_i}{r^2} \cdot \frac{x}{r},$$

так что мы получаем

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{r} \sum_i e_i + \frac{1}{r^2} \left[ \frac{x}{r} \sum_i e_i x_i + \frac{y}{r} \sum_i e_i y_i + \frac{z}{r} \sum_i e_i z_i \right] + \dots$$

В таком приближении поведение нашей системы характеризуется следовательно: во-первых, общей отдачей  $e = \sum_i e_i$ ; во-вторых, вектором  $\mathbf{m} = \sum_i e_i \mathbf{r}_i$  с составляющими  $\sum_i e_i x_i$ ,  $\sum_i e_i y_i$ ,  $\sum_i e_i z_i$ ; его мы назовем моментом системы источников. Тогда

$$\varphi = \frac{e}{r} + \frac{\mathbf{m}\mathbf{r}}{r^3} + \dots$$

или, если  $\vartheta$  обозначает угол между вектором  $\mathbf{m}$  и радиусом вектором  $\mathbf{r}$ :

$$\varphi = \frac{e}{r} + \frac{|\mathbf{m}| \cos \vartheta}{r^2} + \dots \quad (51)$$

На большом расстоянии система источников действует, следовательно, в первом приближении как точечный источник с отдачей  $\sum_i e_i$ . Для

рассмотрения второго приближения разберем сначала простейший случай такой системы источников, для которой общая отдача равна нулю.

**§ 13. Двойные источники.** Рассмотрим два точечных источника с отдачами  $+e$  и  $-e$ . Пусть  $\mathbf{a}$  — вектор, направленный от стока ( $-e$ ) к источнику ( $+e$ ). Тогда (рис. 11):

$$e(\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-) = e\mathbf{a} = \mathbf{m}$$

есть момент системы, состоящей из двух источников. Если одновременно заставить  $\mathbf{a}$  стремиться к нулю, а  $e$  к бесконечности, и притом так, чтобы их произведение  $e\mathbf{a}$  сохраняло все время постоянное значение  $\mathbf{m}$ , то получим двойной источник с моментом  $\mathbf{m}$ .

Рис. 11. Двойной источник или диполь как предельный случай двух равных и противоположных зарядов.

Точечный источник  $+e$  дает сам по себе в рассматриваемой точке  $P$  потенциал  $\varphi_+ = \frac{e}{r}$ . Если идти от точки  $P$  вдоль вектора  $\mathbf{a}$  к точке  $P'$ , то очевидно, что сток  $-e$  образует в  $P$  по величине точно такой же потенциал как источник  $+e$  в точке  $P'$ . Отсюда следует, что оба источника вместе дадут в точке  $P$  потенциал

$$\varphi(P) = \varphi_+(P) - \varphi_+(P').$$

Далее, по определению градиента

$$\varphi = -(\mathbf{a} \operatorname{grad} \varphi_+) = -\left(e\mathbf{a} \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{r}\right).$$

Составляющая от  $\operatorname{grad} \frac{1}{r}$  по  $x$  будет

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{x}{r}.$$

Таким образом мы получаем потенциал двойного источника

$$\varphi = -\mathbf{m} \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{r} = \frac{1}{r^3} \mathbf{m}r = \frac{1}{r^2} |\mathbf{m}| \cdot \cos \vartheta, \quad (52)$$

что соответствует второму приближению в более общей формуле (51).

Если поместить двойной источник в начало координат, и если  $\mathbf{m}$  имеет направление положительной оси  $z$ -ов, то (52) дает

$$\varphi(x, y, z) = \frac{m \cdot z}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}. \quad (52a)$$

Градиент в точке наблюдения и градиент в точке самого источника. Если  $x, y, z$  суть координаты некоторой точки ( $a$ ), а  $\xi, \eta, \zeta$  — координаты точечного источника ( $q$ ), то при применении операций  $\operatorname{grad}$  к функции расстояний между этими двумя точками  $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$  необходимо всегда обращать внимание на то, по каким координатам должно производить дифференцирование: по координатам ли точки  $a$ , или по координатам точечного источника. Во избежание ошибок часто бывает целесообразно особым индексом ( $a$  или  $q$ ) точно указать, какое дифференцирование подразумевается.

Тогда вектор  $\operatorname{grad}_a \frac{1}{r}$  имеет составляющие:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r}\right); \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r}\right); \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r}\right);$$

напротив,  $\operatorname{grad}_q \frac{1}{r}$  имеет составляющие:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{r}\right); \quad \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{r}\right); \quad \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{r}\right).$$

Очевидно, что всегда

$$\operatorname{grad}_a \frac{1}{r} = -\operatorname{grad}_q \frac{1}{r}.$$

При выводе (52) мы дифференцировали по координатам точки  $P$ . Чтобы это оттенить особо, будет целесообразно писать:

$$\varphi = -\mathbf{m} \operatorname{grad}_a \frac{1}{r} = \mathbf{m} \operatorname{grad}_q \frac{1}{r}. \quad (52')$$

**§ 14. Вычисление безвихревого векторного поля из поля источников.** В § 12 мы рассмотрели только поток, образуемый точечными источниками. Допустим теперь, что наряду с точечными источниками,

с отдачами  $e_1, e_2, \dots$ , имеются также источники, распределенные в пространстве непрерывно. Для этого введем новую функцию координат  $\varrho(x, y, z)$  по формуле

$$4\pi\varrho = \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (53)$$

Тогда  $\varrho dv$  дает как раз массу жидкости плотности  $1/4 \pi$ , вытекающей ежесекундно из элемента объема  $dv$ . К потенциалу  $\sum \frac{e_i}{r_i}$ , образуемому точечными источниками  $e_i$ , присоединяется теперь действие источников  $\varrho dv$ , распределенных во всем пространстве. Естественно предположить, что общий потенциал

$$\varphi = \sum_i \frac{e_i}{r_i} + \iiint \frac{\varrho dv}{r}, \quad (54)$$

или, в более полном виде:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) = & \sum_i \frac{e_i}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}} + \\ & + \iiint \frac{\varrho(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} \end{aligned} \quad (54a)$$

Выведем теперь эту формулу вполне строго; но предварительно убедимся в том, что безвихревый поток однозначно определяется своими источниками. Для этого формулируем еще раз задачу, решением которой должно являться выражение (54):

Ищется поле потока  $\mathbf{v}$  со следующими свойствами:

а) поле  $\mathbf{v}$  должно быть безвихревым, т. е. может быть представлено как  $\mathbf{v} = -\operatorname{grad} \varphi$ ;

б)  $\mathbf{v}$  всюду конечна и непрерывна, равно и ее потенциал  $\varphi$ , за исключением однако отдельных точек пространства (точечные источники). В самом точечном источнике разность

$$\varphi - \frac{e_i}{a_i}$$

должна быть конечной и непрерывной ( $a_i$  — расстояние от точечного источника);  $e_i$  называется тогда отдачей источника;

в) в остальной части пространства  $4\pi\varrho = \operatorname{div} \mathbf{v} = -\Delta\varphi$  должно быть заданной функцией места;

д) все источники должны лежать на конечном расстоянии, т. е., другими словами, можно указать такой конечный отрезок  $B$ , что вне сферы радиуса  $B$  нет ни одного источника, и потому там  $\varrho$  всюду равно нулю.

Приведем сначала доказательство однозначности решения; для этого допустим обратное: пусть существуют два поля  $\mathbf{V}_1$  и  $\mathbf{V}_2$ , которые удовлетворяют всем условиям от а) до д), и пусть они имеют потенциалы  $\varphi_1$  и соответственно  $\varphi_2$ . Применим к разности

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \chi$$



формулу Грина (44), в которой как  $\psi$ , так и  $\varphi$  заменим через  $\chi$

$$\int \int dS \chi \frac{\partial \chi}{\partial n} = \int \int \int dv \{ \chi \Delta \chi + (\text{grad } \chi \cdot \text{grad } \chi) \},$$

причем будем производить интегрирование по всему бесконечному пространству. Тогда левая сторона обращается в нуль, так как в силу условия d)  $\chi$  стремится к нулю как  $\frac{1}{R}$ ,  $\frac{\partial \chi}{\partial n}$  как  $\frac{1}{R^2}$ , в то время как поверхность  $\int \int dS$  стремится к бесконечности лишь как  $R^2$ . На правой стороне  $\Delta \chi$  всюду равно нулю, так как  $\mathbf{V}_1$  и  $\mathbf{V}_2$  обладают равными источниками, а потому  $\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2$  наверное не имеет источников. Таким образом мы получаем для вектора  $\mathbf{W} = \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2 = \text{grad } \chi$  результат

$$\int \int \int dv |\mathbf{w}|^2 = 0,$$

который может иметь место лишь тогда, когда вектор  $\mathbf{W}$  всюду равен нулю. Таким образом оба решения  $\mathbf{V}_1$  и  $\mathbf{V}_2$  совпадают; поставленная задача ни в каком случае не может иметь больше одного решения. Векторное поле, которое везде является безвихревым, не имеет нигде источника и исчезает в бесконечности, должно поэтому везде равняться нулю.

Чтобы найти теперь самое решение, применим к нашей задаче теорему Грина в форме (45):

$$\int \int dS \left( \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) = \int \int \int dv \{ \psi \Delta \varphi - \varphi \Delta \psi \};$$

здесь под  $\varphi$  будем подразумевать искомую потенциальную функцию, а  $\psi$  положим равной

$$\psi = \frac{1}{r},$$

где  $r$  означает расстояние точки, для которой мы как раз хотим определить потенциал  $\varphi$ . Границей области интегрирования будем считать, с одной стороны, замкнутую поверхность, уходящую в бесконечность, с другой стороны — малые шаровые поверхности, вырезающие источники  $e_1, e_2, \dots, e_h$  и рассматриваемую точку  $P$  (рис. 12). Большая внешняя поверхность, по только-что высказанному соображению, не вносит в левую сторону (45) ничего. Сфера, окружающая первый точечный источник  $e_1$ , дает

$$\int \int dS \left( \psi \cdot \frac{e_1}{a^2} - \frac{e_1}{a} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial n} \right),$$

так как, согласно предположению б),  $\varphi$  вблизи точечного источника может быть представлено

$\varphi = \frac{e_1}{a} +$  конечные члены. Конечные члены однако

ничего не дадут, если сфера стянется в точку. Ничего не внесет и слагаемое  $\frac{e_1}{a} \frac{\partial \psi}{\partial n}$ , так как при переходе к пределу величина поверх-

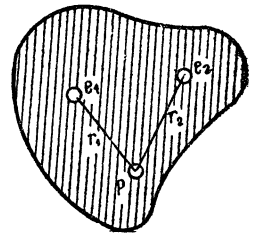


Рис. 12. К вычислению безвихревого векторного поля по его источникам.

ности стремится к нулю как  $a^2$ . При этом  $\psi$  переходит в величину  $\frac{1}{r_1}$ , обратную расстоянию точки наблюдения  $P$  от первого источника.

Таким образом точечный источник вносит собой

$$\psi \cdot \frac{e_1}{a^2} \cdot 4\pi a^2 = \frac{4\pi e_1}{r_1}.$$

Подобное выражение получается для всех остальных источников. Сфера вокруг точки наблюдения  $P$  дает

$$\int \int dS \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \cdot \frac{1}{r^2} \right).$$

Производя над этим выражением такой же переход к пределу как над предыдущими, получим

$$-4\pi\varphi(P).$$

С правой стороны (45)  $\Delta\varphi$  должно по условию равняться  $-4\pi\rho$ ,  $\Delta\varphi$  становится равным нулю. Таким образом получим

$$\sum \frac{4\pi e_i}{r_i} - 4\pi\varphi(P) = - \int \int \int dv \frac{4\pi\rho}{r}.$$

Это и есть уравнение для потенциала  $\varphi(P)$ , в полном соответствии с данным выше выражением [уравнение (54)].

### § 15. Источники и двойные слои, расположенные по поверхности.

До сих пор мы предполагали, что потенциал  $\varphi$  и вектор  $\mathbf{v} = -\text{grad } \varphi$ , за исключением отдельных точек, всюду суть конечные и непрерывные функции координат. Мы должны перейти к изложению разрывных поверхностей; но сначала, в виде предварительного упражнения, рассмотрим задачу о круговом диске радиуса  $a$  и толщины  $\eta$ , равномерно заполненном источниками. Мы ограничимся определением потенциала на оси диска, которую выберем за ось  $z$  нашей координатной системы. Если  $\rho$  — постоянная внутри диска отдача, то круговое кольцо радиуса  $r$  и толщиной  $dr$  образует в точке  $z$  потенциал

$$\frac{\eta \cdot \rho \cdot 2\pi r \cdot dr}{\sqrt{r^2 + z^2}}.$$

Потенциал, создаваемый всем диском, будет

$$\varphi(z) = 2\pi\eta \cdot \rho \cdot \int_0^a \frac{rdr}{\sqrt{r^2 + z^2}} = 2\pi\eta\rho \cdot [V a^2 + z^2 - V z^2]. \quad (55)$$

При этом мы предполагаем, что  $\eta \ll z$ . Будем переходить теперь к пределу  $\lim \eta = 0$  у  $\rho = \infty$  таким образом, чтобы поверхностная плотность

$$\sigma = \eta \cdot \rho$$

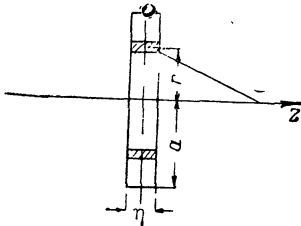


Рис. 13. Круглый диск радиуса  $a$  и толщины  $\eta$ .

сохраняла постоянное значение. Наряду с потенциалом

$$\varphi(z) = 2\pi\sigma \left[ \sqrt{a^2 + z^2} - \sqrt{z^2} \right] \quad (55a)$$

рассмотрим еще составляющую по  $z$  скорости  $\mathbf{v}$  ( $\mathbf{v}_x$  и  $\mathbf{v}_y$  должны на оси  $z$  исчезать в силу симметрии);  $v_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -2\pi\sigma \left[ \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} - \frac{z}{\sqrt{z^2}} \right]$ . Нас интересует главным образом поведение полученных нами решений при прохождении через диск.

Потенциал  $\varphi$  для больших значений  $z$  принимает значение  $\frac{\sigma\pi a^2}{|z|}$ . Внутри диска  $\varphi$  принимает, начиная с обеих границ, постоянное значение  $2\pi\sigma a$ . Наоборот,  $v_z$  положительно для положительных  $z$  и отри-

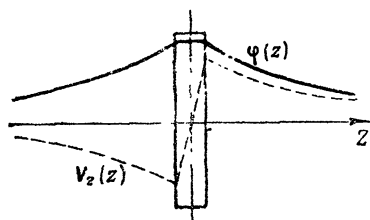


Рис. 14. Ход  $\varphi$  и  $\mathbf{v}$  на оси тонкого круглого диска.

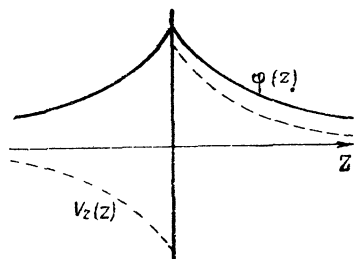


Рис. 14а. Предельный случай рис. 14. Непрерывность  $\varphi$  и скачок  $\mathbf{v}_n$  при прохождении через поверхностный источник.

цательн) для отрицательных  $z$ . При  $z=0$ ,  $\mathbf{v}_z$  получает, в зависимости от того, идем ли мы от положительных или отрицательных значений  $z$ , значение

$$v_{+0} = 2\pi\sigma \text{ или } v_{-0} = -2\pi\sigma.$$

Обобщая этот результат, утверждаем следующее: при прохождении через поверхностно-распределенные источники с отдачей  $\omega$  на единицу поверхности (поверхностное расхождение вектора) потенциал  $\varphi$  меняется непрерывно, нормальная же составляющая  $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = -v_n$  претерпевает при этом скачок, равный  $4\pi\sigma$ .

Для доказательства этого утверждения будем рассуждать следующим образом. Пусть дана произвольная поверхность  $S$  с поверхностной плотностью источников  $\sigma$ ; последняя пусть будет определенная функция координат. Пересечем поверхность (в направлении нормали) в некоторой точке  $P$ . Вырежем далее из поверхности малый круговой диск с центром в  $P$ . Тогда действие всей поверхности можно разделить на две части: во-первых, действие кругового диска; согласно вышесказанному, он вызывает скачок  $\mathbf{v}_n$  на  $4\pi\sigma$ ; при этом никакого скачка в самом  $\varphi$  не будет; во-вторых, действие остальной части поверхности. Но все источники последней лежат на конечном расстоянии от  $P$ , а потому никаких разрывов образовать не могут.

Рассмотрим далее два параллельных круговых диска на расстоянии  $\eta$  с равными, но противоположными поверхностными плотностями  $+\sigma$  и  $-\sigma$  (рис. 15). Положительный диск  $+\sigma$  создает в точках оси  $z$ -ов потенциал  $\varphi(z)$ , определяемый по формуле (55a). Отрицательный диск  $-\sigma$  при этом дает потенциал  $-\varphi(z+\eta)$ . Следовательно, в общем получается (пока  $\eta \ll z$ )

$$\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} \cdot \eta = 2\pi\sigma\eta \left[ \frac{z}{\sqrt{z^2}} - \frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}} \right]$$

и

$$v_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 2\pi\sigma\eta \frac{a^2}{\sqrt{(a^2+z^2)^3}}. \quad (55b)$$

Пусть далее  $\sigma$  стремится к бесконечности, а  $\eta$  к нулю, но таким образом, что величина

$$\tau = \sigma \cdot \eta$$

сохраняет конечное значение. Мы называем тогда  $\tau$  моментом двойного слоя, который получается в результате сближения двух дисков. Тогда наши последние две формулы содержат общий результат:

При прохождении двойного слоя с моментом  $\tau$ , потенциал  $\varphi$  изменяется скачком на  $4\pi\tau$ ; при этом нормальная составляющая  $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = -v_n$  не претерпевает скачка.

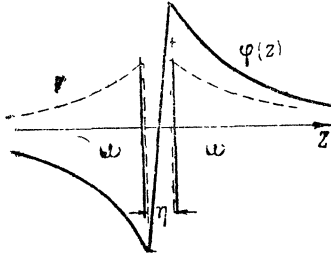


Рис. 15. Два круглых диска с противоположными поверхностными обкладками на расстоянии  $\eta$ .

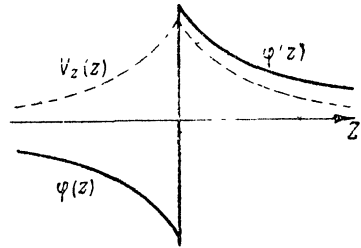


Рис. 15а. Предельный случай рис. 15. Скачок  $\varphi$  и непрерывность  $v$  у двойного слоя.

Имея эти результаты, рассмотрим теперь, какое влияние на безвихревой поток оказывают заданные на поверхности  $S$  скачки  $\varphi$  и  $v_n$ .

Мы различим две стороны данной поверхности 1 и 2;  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$  — внешние нормали области, ограниченной поверхностью  $S$ . Тогда  $\mathbf{v}_{n_1} + \mathbf{v}_{n_2}$  есть скачок нормальной составляющей  $\mathbf{v}$ . Пусть далее скачки  $\mathbf{v}_n$  и  $\varphi$  заданы на  $S_{12}$  как функции координат

$$\left. \begin{aligned} 4\pi\sigma &= -(\mathbf{v}_{n_1} + \mathbf{v}_{n_2}) \\ 4\pi\tau &= \varphi_1 - \varphi_2 \end{aligned} \right\}. \quad (56)$$

Согласно полученным выше результатам, мы можем предсказать следующее: элемент  $dS_{12}$  поверхности благодаря скачку  $\mathbf{v}_n$  действует

на точку  $P(x, y, z)$ , лежащую вне поверхности, как источник с отдачей  $\omega dS_{12}$ , благодаря же скачку  $\varphi$  — как двойной источник с моментом  $\tau n dS_{12}$ . При этом  $\mathbf{n}$  есть та нормаль, которая направлена от отрицательного потенциала к положительному (направление  $\mathbf{n}$  на рис. 16 соответствует предположению, что  $\varphi_1 > \varphi_2$ ). Согласно (47) и (52) элемент  $dS_{12}$  внесет в величину потенциала в точке  $P$  слагаемое

$$\frac{\omega dS_{12}}{r} + \left( \tau n dS_{12} \cdot \text{grad}_a \frac{1}{r} \right).$$

Поэтому общий потенциал, создаваемый всей поверхностью, будет

$$\varphi = \iint dS_{12} \frac{\sigma}{r} - \iint dS_{12} \tau \left( \mathbf{n} \text{grad}_a \frac{1}{r} \right). \quad (57)$$

Докажем эту формулу, пользуясь теоремой Грина

$$\iint (\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n}) dS = \iint (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) dv.$$

Обозначим опять через  $r$  расстояние до точки  $P$  и положим  $\psi = \frac{1}{r}$ .

Пусть  $\varphi$  — искомый потенциал с заданными посредством (56) разрывностями на поверхности  $S_{12}$ . Вне этой поверхности  $\Delta \varphi$  всюду должно равняться 0.

Границами области интегрирования будут теперь служить: во-первых, внешняя поверхность, которую мы (как и в § 14) будем предполагать уходящей в бесконечность; поэтому она ничего не вносит в величину интеграла по поверхности. Во-вторых, сфера вокруг точки  $P$ , которая, как показано в § 14, вносит в указанный интеграл слагаемое

$$\varphi(P) \cdot \frac{1}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = 4\pi \varphi(P).$$

В-третьих, оболочка с поверхностями  $S_1$  и  $S_2$ , с помощью которых мы исключаем из области интегрирования поверхность разрыва. В ограниченной таким образом области  $\varphi$  и  $\psi$  всюду — конечные непрерывные функции, удовлетворяющие условию  $\Delta \varphi = 0$ ,  $\Delta \psi = 0$ , так что правая сторона уравнения Грина обращается в нуль. Остается, следовательно только

$$4\pi \varphi(P) = \iint_{S_1} dS_1 \left( \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n_1} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n_1} \right) + \iint_{S_2} dS_2 \left( \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n_2} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n_2} \right).$$

Будем с правой стороны всегда соединять попарно два противоположащие элемента поверхности  $dS_1$  и  $dS_2$ . Пусть направление нормали к данной поверхности  $\mathbf{n}$  совпадает с  $\mathbf{n}_2$ , тогда  $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}$ ;  $\mathbf{n}_2 = \mathbf{n}$ . Следовательно

$$\frac{\partial \psi}{\partial n_1} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}; \quad \frac{\partial \psi}{\partial n_2} = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}.$$

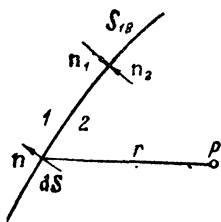


Рис. 16. Поверхность разрыва  $S_{12}$  с заданными скачками  $\varphi$  и  $\mathbf{v}$ .

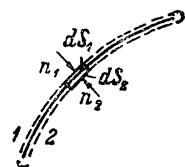


Рис. 17. К вычислению потенциала поверхности разрыва с помощью теоремы Грина.

При таком соединении мы получим интеграл, распространенный по поверхности разрыва:

$$4\pi\varphi(P) = \int \int dS_{12} \psi \left( \frac{\partial\varphi}{\partial n_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial n_2} \right) + \int \int dS_{12} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial n} (\varphi_1 - \varphi_2).$$

Если теперь положить здесь

$$\psi = \frac{1}{r} ; \quad \frac{\partial\psi}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \text{grad}_q \frac{1}{r} = -\mathbf{n} \cdot \text{grad}_a \frac{1}{r}$$

и ввести далее как для  $\mathbf{v}_{n_1} + \mathbf{v}_{n_2} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial n_2}\right)$ , так и для  $\varphi_1 - \varphi_2$  заданные формулой (56) скачки, то получается формула (57).

**§ 16. Однородный двойной слой.** Двойной слой с моментом  $\tau$  образует согласно (57) потенциал

$$\varphi = \int \int dS_{12} \tau \left( \mathbf{n} \cdot \text{grad}_q \frac{1}{r} \right).$$

Это выражение позволяет сделать важное преобразование. Если  $\mathbf{r}$  — вектор, проведенный от точки  $P$  к элементу  $dS_{12}$ , то

$$\text{grad}_q \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} ;$$

следовательно

$$\mathbf{n} \cdot \text{grad}_q \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{n}\mathbf{r}}{r^3} = -\frac{\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r})}{r^2}.$$

Тогда потенциал

$$\varphi = -\int \int \tau \cdot \frac{dS_{12} \cdot \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r})}{r^2}.$$

Но

$$\pm \frac{dS_{12} \cdot \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r})}{r^2} = d\Omega$$

есть телесный угол, под которым наблюдатель, находящийся в точке  $P$ , видит элемент поверхности  $dS_{12}$ , а потому мы получаем

$$\varphi = \int \int \tau \cdot d\Omega. \quad (58)$$

При этом  $d\Omega$  надо брать положительным или отрицательным в зависимости от того, какая сторона элемента видна из  $P$ : положительная или отрицательная.

Если далее  $\tau$  на поверхности есть величина постоянная, то двойной слой называют однородным.

Уравнение (58) принимает тогда простой вид

$$\varphi = \tau \cdot \Omega.$$

Потенциал однородного двойного слоя с моментом  $\tau$  равен произведению  $\tau$  на телесный угол  $\Omega$ , под которым виден из точки наблюдения контур этого слоя.

Если стянуть пограничную кривую как отверстие кошелька, получается замкнутый двойной слой. При этом  $\Omega$  для точки  $P$ , находящейся вне объема, ограниченного поверхностью двойного слоя, обра-

щается в нуль, для точки же  $P$  внутри указанного объема — в  $4\pi$ . Итак, если однородный двойной слой замкнут (положительная сторона наружу), то вне слоя всюду  $\varphi = 0$ , внутри же слоя  $\varphi = -4\pi$ .

Величина потока  $\mathbf{v} = -\text{grad } \varphi$ , образуемого однородным двойным слоем, получается из следующих соображений: если  $\delta\varphi$  есть изменение  $\varphi$  при переходе на вектор  $\delta\mathbf{a}$ , то  $\mathbf{v}\delta\mathbf{a} = -\delta\varphi = -\tau\delta\Omega$ .

При этом  $\delta\Omega$  есть изменение телесного угла при передвижении точки  $P$  на  $\delta\mathbf{a}$ . Точно такое же изменение  $\delta\Omega$  получается в том случае, если закрепить положение точки  $P$  и сдвинуть весь двойной

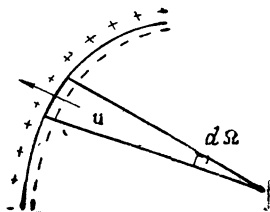


Рис. 18. Телесный угол  $d\Omega$  при вычислении потенциала однородного двойного слоя. На рисунке нужно считать  $d\Omega$  отрицательным, так как наблюдатель смотрит на отрицательную сторону двойного слоя.

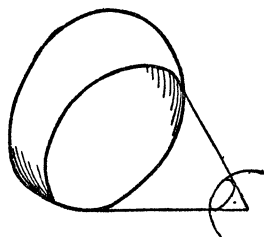


Рис. 19. Потенциал однородного двойного слоя зависит только от вида ограничивающей кривой.

слой на  $-\delta\mathbf{a}$ . При таком смещении элемент длины  $ds$  контура, огибающего поверхность, описывает элемент поверхности  $-\delta\mathbf{a} \times ds$  который из точки наблюдения  $P$  виден под телесным углом

$$-\frac{\mathbf{r}(\delta\mathbf{a} \times ds)}{r^3} = \frac{(ds \times \mathbf{r})\delta\mathbf{a}}{r^3}.$$

Отсюда интегрированием по всей кривой получается  $d\Omega$ . Таким образом для каждого направления  $\delta\mathbf{a}$

$$\mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{a} = \delta\mathbf{a} \cdot \tau \oint \frac{ds \times \mathbf{r}}{r^3}$$

и, следовательно,

$$\mathbf{v} = \tau \oint \frac{ds \times \mathbf{r}}{r^3}.$$

При этом  $\mathbf{r}$  есть вектор, направленный от элемента  $ds$  кривой в точку наблюдения.

**§ 17. Вихрь и теорема Стокса.** В § 9 мы называли векторное поле безвихревым, когда для любого замкнутого контура интеграл по кривой

$$\oint \mathbf{v}_s ds \quad (59)$$

равен нулю. Необходимым и достаточным условием для этого являлось условие, чтобы вектор  $\mathbf{v}$  мог быть представлен в виде  $-\text{grad } \varphi$ , т. е.

другими словами, чтобы существовал некоторый скаляр  $\varphi$ , обладающий свойством

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial x} = v_x; \quad -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = v_y; \quad -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = v_z.$$

Отсюда сейчас же следует, что для безвихревого вектора три величины

$$\begin{aligned} W_x &= \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ W_y &= \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ W_z &= \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{aligned} \quad (60)$$

всюду должны быть равны нулю. Естественно поэтому эти три величины  $W_x$ ,  $W_y$ ,  $W_z$  принять за меру силы вихря векторного поля  $\mathbf{V}$ . Покажем, что вводимые формулами (60) величины  $W_x$ ,  $W_y$ ,  $W_z$  на самом деле представляют составляющие некоторого вектора; для него мы введем символ  $\text{rot } \mathbf{V}$  и будем его называть: „вихрь  $\mathbf{V}$ “. Итак, напишем уравнения (60) (сначала чисто формально) в виде:

$$\mathbf{W} = \text{rot } \mathbf{V} \quad (60a)$$

или

$$\text{rot } \mathbf{V} = \mathbf{i} \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right). \quad (60b)$$

Покажем прежде всего связь между интегралом по кривой (59) и новой величиной  $\mathbf{W}$ ; для этого рассмотрим площадку, лежащую в плоскости  $xy$  (рис. 20); обойдем ее в положительном направлении, т. е. так, чтобы обход был связан с поступательным движением вдоль  $z$ , как вращение с поступательным движением правого винта. Вычислим для такого обхода интеграл по кривой

$$\oint \mathbf{v}_s ds = \oint (\mathbf{v}_x dx + \mathbf{v}_y dy).$$

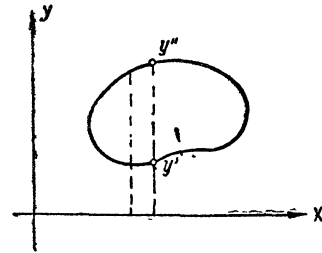


Рис. 20. Интеграл по контуре для плоского участка поверхности.

Будем вычислять сначала первое слагаемое  $\int \mathbf{v}_x dx$ ; при этом будем всегда соединять попарно участки кривой, соответствующие одному и тому же  $dx$  (при  $y''$  и  $y' < y''$ ). При положительном обходе контура  $dx$  будет положительно при меньшем значении  $y$  ( $y'$ ). Элемент  $dx$  вносит, следовательно, в интеграл  $\int \mathbf{v}_x dx$  член

$$-dx \{ \mathbf{v}_x(y'') - \mathbf{v}_x(y') \} = -dx \int_{y'}^{y''} \frac{\partial \mathbf{v}_x}{\partial y} dy.$$



Общая сумма будет равна

$$\oint \mathbf{v}_x dx = - \int \int \frac{\partial v_x}{\partial y} dx dy,$$

где интеграл справа берется по всей поверхности. После аналогичного преобразования второго слагаемого  $\int \mathbf{v}_y dy$ , получим

$$\oint \mathbf{v}_s ds = \int \int \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) dx dy,$$

где подинтегральной функцией двойного интеграла является как раз введенная нами величина  $\mathbf{w}_z$ . Выберем  $S$  настолько малой, чтобы величина  $\mathbf{w}_z$  внутри  $S$  изменялась очень мало, тогда

$$\oint \mathbf{v}_s ds = \mathbf{w}_z \cdot S,$$

или точнее

$$\mathbf{w}_z = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint \mathbf{v}_s ds. \quad (61)$$

Итак, чтобы определить в любом месте поля  $\mathbf{v}$  величину  $\mathbf{w}_z$ , нужно найти разность частных производных по формуле (60), или вычислить для соответствующей точки интеграл  $\oint \mathbf{v}_s ds$  по контуру площадки, у которой правовинтовая нормаль параллельна оси  $z$ ; далее нужно его разделить на площадь  $S$  и перейти к пределу, устремляя величину площади  $S$  к нулю. Согласно (61), этим пределом будет  $\mathbf{w}_z$ . Аналогично получаются величины  $\mathbf{w}_x$  и  $\mathbf{w}_y$ , если нормаль к площадке с положительным направлением обхода идет вдоль оси  $x$  или  $y$  по правилу правого винта.

Спрашивается теперь, что же будет представлять собой величина

$$\lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint \mathbf{v}_s ds,$$

если нормаль  $\mathbf{n}$  к поверхности  $S$  будет ориентирована некоторым произвольным образом [направляющими косинусами  $\cos(\mathbf{n}, x)$ ,  $\cos(\mathbf{n}, y)$ ,  $\cos(\mathbf{n}, z)$ ] по отношению к координатной системе. — Поместим начало координат вблизи элемента поверхности; тогда можно представить вектор  $\mathbf{v}$  в области, содержащей элемент  $S$ , в виде ряда Тэйлора:

$$\mathbf{v}_x = v_{x_0} + \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} \right)_0 x + \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_0 y + \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)_0 z$$

$$\mathbf{v}_y = v_{y_0} + \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)_0 x + \left( \frac{\partial v_y}{\partial y} \right)_0 y + \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} \right)_0 z$$

$$\mathbf{v}_z = v_{z_0} + \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)_0 x + \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)_0 y + \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)_0 z.$$

Если теперь подставить эти выражения в интеграл  $\oint \mathbf{v}_s ds = \oint (\mathbf{v}_x dx + \mathbf{v}_y dy + \mathbf{v}_z dz)$ , то члены с  $\mathbf{v}_{x_0}$  и  $\left(\frac{\partial \mathbf{v}_x}{\partial x}\right)_0$  пропадают, так как очевидно, что интеграл

$$\mathbf{v}_{x_0} \oint dx \text{ и } \left(\frac{\partial \mathbf{v}_x}{\partial x}\right) \oint x dx = \left(\frac{\partial \mathbf{v}_x}{\partial x}\right) \frac{1}{2} \oint d(x^2)$$

обращаются в нуль. Таким образом остается только

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{v}_s ds &= \left(\frac{\partial \mathbf{v}_x}{\partial y}\right)_0 \oint y dx + \left(\frac{\partial \mathbf{v}_x}{\partial z}\right)_0 \int z dx \\ &+ \left(\frac{\partial \mathbf{v}_y}{\partial x}\right)_0 \int x dy + \left(\frac{\partial \mathbf{v}_y}{\partial z}\right)_0 \int z dy \\ &+ \left(\frac{\partial \mathbf{v}_z}{\partial x}\right)_0 \int x dz + \left(\frac{\partial \mathbf{v}_z}{\partial y}\right)_0 \int y dz. \end{aligned}$$

Но стоящие здесь интегралы представляют собой не что иное, как проекции данной поверхности  $S$  на три координатные плоскости. Если принять во внимание знак составляющих, определяемый направлением обхода, то получится

$$S \cos(\mathbf{n}, z) = \oint x dy = - \oint y dx$$

$$S \cos(\mathbf{n}, y) = \oint z dx = - \oint x dz$$

$$S \cos(\mathbf{n}, x) = \oint y dz = - \oint z dy.$$

Мы, следовательно, нашли

$$\begin{aligned} \frac{1}{S} \int \mathbf{v}_s ds &= \cos(\mathbf{n}, x) \left(\frac{\partial \mathbf{v}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{v}_y}{\partial z}\right) + \cos(\mathbf{n}, y) \left(\frac{\partial \mathbf{v}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{v}_z}{\partial x}\right) + \\ &+ \cos(\mathbf{n}, z) \left(\frac{\partial \mathbf{v}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{v}_x}{\partial y}\right). \end{aligned} \quad (62)$$

Только это уравнение дает нам право трактовать введенные по формулам (60) величины  $\mathbf{w}_x$ ,  $\mathbf{w}_y$ ,  $\mathbf{w}_z$  как составляющие некоторого вектора, ибо уравнение (62) показывает, что и для произвольно ориентированной малой площадки  $S$  с праввинтовой нормалью  $\mathbf{n}$  имеет место соотношение

$$\oint \mathbf{v}_s ds = S \cdot \mathbf{w}_n = S \cdot |\mathbf{w}| \cdot \cos(\mathbf{n}, \mathbf{w}). \quad (62a)$$

Интеграл по кривой  $\oint \mathbf{v}_s ds$  равен произведению площади, ограниченной контуром интегрирования, на составляющую вектора  $\text{rot } \mathbf{V}$  по направлению нормали.

Эта теорема содержит в себе одновременно определение для вектора  $\text{rot } \mathbf{V}$ , не зависящее от выбора координатной системы.

Теорема Стокса. Уравнения (61) и (62а), строго говоря, имеют место только для предельного случая  $S = 0$ . Мы можем однако с их помощью вывести теорему, позволяющую вычислять интеграл  $\oint \mathbf{v}_s ds$  по любому замкнутому контуру. Для этого представим себе произвольную поверхность  $S$ , ограниченную данной кривой  $s$ . Задавая направление обхода  $s$ , мы для каждого элемента поверхности  $S$  однозначно определяем направление нормали, соответствующей правилу правого винта. Разделим эту поверхность на малые элементы  $dS_1, dS_2, dS_3, \dots$  и т. д. Если мы для каждого из этих элементов в отдельности образуем величины  $\oint_{S_1} \mathbf{v}_s ds, \oint_{S_2} \mathbf{v}_s ds$  и т. д. и сложим

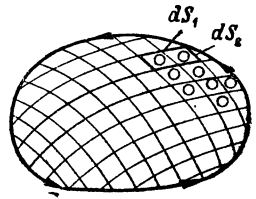


Рис. 21. К теореме Стокса.

их, то члены, соответствующие общей границе двух каких-либо элементов (например  $dS_1$  и  $dS_2$ ), взаимно уничтожатся, так как они равны по величине и противоположны по знаку. При сложении остается следовательно лишь интеграл по первоначальному контуру

$$\oint_S \mathbf{v}_s ds = \oint_{S_1} \mathbf{v}_s ds + \int_{S_2} \mathbf{v}_s ds + \dots$$

Но уравнение (62а) мы можем применить к каждому элементу поверхности. Таким образом мы получаем теорему Стокса

$$\oint \mathbf{v}_s ds = \int \int \mathbf{w}_n dS; \quad \mathbf{w} = \text{rot } \mathbf{v}. \quad (63)$$

Следует при этом обратить внимание на то, что поверхность была проведена через пространственную кривую совершенно произвольно. Поэтому, если провести через контур две различные поверхности  $S_1$  и  $S_2$  (рис. 22), то согласно (63)

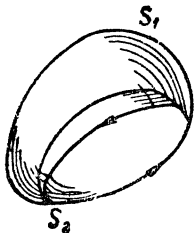


Рис. 22. Отсутствие источников у  $\text{rot } \mathbf{v}$ .

$$\int \int \mathbf{w}_n dS_1 = \int \int \mathbf{w}_n dS_2.$$

Но две поверхности вместе ограничивают некоторый объем. Если мы в последнем уравнении переменим у одной из поверхностей (например  $S_2$ ) направление нормали на обратное, то

$$\int \int \mathbf{w}_n dS_1 + \int \int \mathbf{w}_n dS_2 = 0,$$

т. е. общий поток вектора  $\mathbf{W}$  через поверхность объема, ограниченного двумя поверхностями, равен нулю. Таким образом мы видим отсюда, что поле вектора  $\mathbf{W} = \text{rot } \mathbf{v}$  всегда есть поле без источников, т. е. вообще справедливо

$$\text{div rot } \mathbf{v} = 0, \quad (64)$$

что можно также показать непосредственно из (60).

Вычислим  $\text{rot rot } \mathbf{v}$ , которым мы будем пользоваться в дальнейшем. Его составляющая по  $x$ , очевидно

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) - \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right), \end{aligned}$$

т. е., в векторной форме:

$$\text{rot rot } \mathbf{v} = \text{grad div } \mathbf{v} - \Delta \mathbf{v}. \quad (65)$$

Далее всегда, конечно,

$$\text{rot grad } \varphi = 0. \quad (66)$$

В дальнейшем мы будем пользоваться также соотношением

$$\text{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \text{ rot } \mathbf{A} - \mathbf{A} \text{ rot } \mathbf{B}, \quad (67)$$

которое применимо к любым векторам  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ , что нетрудно проверить, написав его полное выражение через составляющие.

**§ 18. Вычисление векторного поля по его источникам и вихрям.** В § 15 мы видели, как можно вообще вычислять безвихревое поле по его источникам. В этом параграфе мы займемся общей задачей вычисления векторного поля по данным источникам и вихрям. При этом будем опять полагать, что как все источники, так и вихри находятся на конечном расстоянии. Мы ищем следовательно такое векторное поле  $\mathbf{v}$ , для которого одновременно удовлетворяются условия

$$\text{div } \mathbf{v} = 4\pi\rho \quad (68a)$$

$$\text{rot } \mathbf{v} = 4\pi\mathbf{c}, \quad (68b)$$

где скаляр  $\rho$  и вектор  $\mathbf{c}$  для каждой точки пространства даны. При этом  $\mathbf{c}$  не может быть вполне произвольным; согласно (64) всюду должно выполняться условие

$$\text{div } \mathbf{c} = 0. \quad (68c)$$

Из доказанной в § 14 теоремы о том, что безвихревое векторное поле, не имеющее источников, просто равно нулю, следует, что уравнения (68a, b) могут иметь только одно решение, так как разность двух решений всегда должна удовлетворять уравнениям  $\text{div } \mathbf{v} = 0$  и  $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ . Найдем теперь это решение.

Для этого разложим искомый вектор  $\mathbf{v}$  на два слагаемых  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \quad (68d)$$

и попытаемся удовлетворить уравнениям (68a, b), потребовав, чтобы

$$\text{rot } \mathbf{v}_1 = 0; \quad \text{div } \mathbf{v}_1 = 4\pi\rho \quad (68e)$$

$$\text{rot } \mathbf{v}_2 = 4\pi\mathbf{c}; \quad \text{div } \mathbf{v}_2 = 0. \quad (68f)$$

Иначе говоря, разложим искомое поле  $\mathbf{v}$  на безвихревое поле  $\mathbf{v}_1$ , с заданными источниками, и на поле  $\mathbf{v}_2$  без источников, но с заданными вихрями.

Это разложение можно произвести только одним путем, ибо безвихревая составная часть  $\mathbf{v}_1$ , согласно § 15, однозначно определяется требованием (68e). Ее значение будет:

$$\mathbf{v}_1 = -\text{grad } \varphi, \text{ причем } \varphi = \int \int \int \frac{e dv}{r}. \quad (68g)$$

Нам остается теперь только определить поле без источников  $\mathbf{v}_2$  согласно (68f). Отсутствие источников позволяет представить  $\mathbf{v}_2$  как вихрь некоторого другого вектора  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{v}_2 = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (68h)$$

Определенный таким образом вектор  $\mathbf{A}$  называется векторным потенциалом  $\mathbf{v}_2$ . Подобно тому, как при определении  $\varphi$  по первому из уравнений (68g) мы можем прибавлять к нему произвольную постоянную, можно также и к векторному потенциалу  $\mathbf{A}$ , не нарушая уравнения (68h), прибавить любой безвихревой вектор. Выберем его таким образом, чтобы выполнялось условие

$$\text{div } \mathbf{A} = 0. \quad (68i)$$

При таком выборе  $\mathbf{A}$  из (68f) получается

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = 4\pi\mathbf{c}.$$

Из правила (65) и условия (68i) получаем уравнение

$$\Delta \mathbf{A} = -4\pi\mathbf{c}, \quad (68k)$$

совершенно аналогичное лапласовскому уравнению для скалярного потенциала

$$\Delta \varphi = -4\pi\rho,$$

решение которого дается в (68g). Эта аналогия позволяет нам сразу же написать решение (68k). Оно будет:

$$\mathbf{A} = \int \int \int \frac{\mathbf{c} dv}{r}. \quad (68l)$$

Этими формулами поставленная вначале задача решена. Окончательный результат таков:

$$\mathbf{v} = -\text{grad } \varphi + \text{rot } \mathbf{A}$$

$$\varphi = \int \int \int \frac{e dv}{r}; \quad \mathbf{A} = \int \int \int \frac{\mathbf{c} dv}{r}.$$

Мы должны еще убедиться в том, что векторное поле  $\mathbf{A}$ , данное (68l), действительно не имеет источников, как это было потребовано в (68i).

Очевидно, согласно (68l),

$$\text{div } \mathbf{A} = \int \int \int \left( \mathbf{c} \text{grad}_a \frac{1}{r} \right) dv = - \int \int \int \left( \mathbf{c} \text{grad}_q \frac{1}{r} \right) d\mathbf{x}.$$

Но

$$\mathbf{c} \text{grad}_q \frac{1}{r} = \text{div} \left( \frac{\mathbf{c}}{r} \right) - \frac{1}{r} \text{div } \mathbf{c}.$$

А так как, согласно (60с),  $\mathbf{c}$  всегда должно быть задано как вектор без источников, то

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = - \int \int \int \operatorname{div} \left( \frac{\mathbf{c}}{r} \right) dv = - \int \int \frac{\mathbf{c}_n}{r} dS.$$

Если теперь  $S$  охватывает всю систему вихрей, то  $\mathbf{c}_n$  на  $S$  всюду должно равняться нулю, т. е., другими словами, поле вектора  $\mathbf{A}$  действительно источников не имеет.

При применении уравнения (42) ко всей системе интеграл по поверхности, уходящей в бесконечность, равен нулю. Отсюда следует, что

$$\int \int \int (\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2) dv = 0. \quad (68m)$$

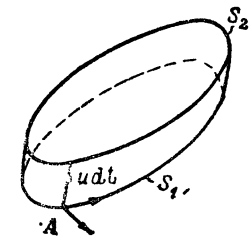
Если образовать скалярное произведение двух векторов: одного безвихревого, а другого—без источников и взять интеграл этого произведения по объему, охватывающему всю систему, получится нуль.

**§ 19. Изменение со временем потока через движущийся элемент поверхности.** Пусть  $\mathbf{A}$ —произвольное поле скоростей; пусть оно изменяется со временем, и так, что  $\mathbf{A}$  пусть будет некоторая функция (непрерывная и дифференцируемая)  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и  $t$ . Тогда  $\int \int \mathbf{A}_n dS$  есть поток через поверхность  $S$ , т. е. объем жидкости, протекающей через  $S$  в единицу времени. Если поверхность неподвижна, то  $\int \int \dot{\mathbf{A}}_n dS = \int \int \frac{\partial \mathbf{A}_n}{\partial t} dS$  есть изменение потока со временем. Но

если поверхность сама движется, то поток будет изменяться еще и по той причине, что в различное время поверхность  $S$  будет находиться в различных местах поля  $\mathbf{A}$ . Обозначим символом  $\dot{\mathbf{A}}$  новый вид дифференцирования по времени, определяемый по формуле:

$$\frac{d}{dt} \int \int \mathbf{A}_n dS = \int \int \dot{\mathbf{A}}_n dS. \quad (69)$$

Рис. 23. Изменение потока через движущуюся поверхность.



$\dot{\mathbf{A}}$  есть, следовательно, вектор, поток которого через движущуюся поверхность равен изменению во времени потока вектора  $\mathbf{A}$  через эту же поверхность. Для того чтобы вычислить  $\dot{\mathbf{A}}$  мы должны точно знать движение поверхности. Предположим, что это движение описывается вектором  $\mathbf{u}$ , который задан для каждого элемента поверхности и представляет его скорость.

Пусть (рис. 23)  $S_1$ —положение нашей поверхности в момент времени  $t - dt$  и  $S_2$ —ее положение в момент  $t$ ;  $S_2$  можно получить из  $S_1$ , сдвигая каждый элемент поверхности из положения  $S_1$  на вектор  $\mathbf{u} dt$ . При таком смещении контур опишет поверхность в виде узкой полосы, которая вместе с поверхностями  $S_1$  и  $S_2$  дает замкнутую поверхность, ограничивающую объем  $dt \cdot \int \int \mathbf{u}_n dS$ .

Данное формулой (69) изменение потока  $\mathbf{A}$  через поверхность  $S$  нужно вычислять как разность между потоком через  $S_2$  в момент времени  $t$  и потоком через  $S_1$  в момент  $t - dt$ :

$$\frac{d}{dt} \iint \mathbf{A}_n dS = \frac{\iint \mathbf{A}_{n,t} dS_2 - \iint \mathbf{A}_{n,t-dt} dS_1}{dt}.$$

Применим теорему Гаусса к плоской коробке, ограниченной поверхностями  $S_1$ ,  $S_2$  и бортом, описанным контуром поверхности при смещении для момента времени  $t$ . Для этой коробки нормаль к поверхности  $S_2$  будет являться внешней нормалью, нормаль  $S_1$  — внутренней. Элемент поверхности борта как по величине, так и по направлению своей внешней нормали дается  $d\mathbf{s} \times \mathbf{u} dt$ . Таким образом теорема Гаусса дает

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} \mathbf{A}_{n,t} dS + dt \oint \mathbf{A} (d\mathbf{s} \times \mathbf{u}) - \iint_{S_1} \mathbf{A}_{n,t} dS_1 = \\ = dt \iint (\operatorname{div} \mathbf{A}) \mathbf{u}_n dS. \end{aligned}$$

Далее

$$\iint \mathbf{A}_{n,t-dt} dS_1 = \iint \mathbf{A}_{n,t} dS_1 - \iint \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)_n dS_1 \cdot dt.$$

Следовательно

$$\begin{aligned} \iint \mathbf{A}_{n,t} dS_2 - \iint \mathbf{A}_{n,t-dt} dS_1 = \\ = dt \left\{ \iint \mathbf{A}_n dS_1 + \iint (\operatorname{div} \mathbf{A}) \mathbf{u}_n dS_1 - \oint \mathbf{A} (d\mathbf{s} \times \mathbf{u}) \right\}. \end{aligned}$$

Последнее слагаемое справа можно преобразовать по теореме Стокса

$$\oint \mathbf{A} (d\mathbf{s} \times \mathbf{u}) = \oint (\mathbf{u} \times \mathbf{A}) d\mathbf{s} = \iint [\operatorname{rot} (\mathbf{u} \times \mathbf{A})]_n dS,$$

так что окончательно получаем:

$$\frac{d}{dt} \iint \mathbf{A}_n dS = \iint [\dot{\mathbf{A}} + \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{A} - \operatorname{rot} (\mathbf{u} \times \mathbf{A})]_n dS.$$

Тем самым вычислен вектор  $\dot{\mathbf{A}}$ , определяемый (69). Он равен

$$\dot{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{A}} + \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{A} - \operatorname{rot} (\mathbf{u} \times \mathbf{A}). \quad (69a)$$

Это выражение имеет особо важное значение в электродинамике, когда нужно вычислить изменение потока индукции, пронизывающего движущийся проволочный контур.

**§ 20. Криволинейные ортогональные координаты.** Многие вычисления электродинамики можно значительно сократить, если вместо декартовой координатной системы пользоваться другой системой, учитывающей особые отношения симметрии в рассматриваемой схеме.

Определим новые координаты  $u_1, u_2, u_3$  таким образом, что прямоугольные координаты будут даны, как функции  $u_1, u_2, u_3$ :

$$x = x(u_1, u_2, u_3)$$

$$y = y(u_1, u_2, u_3)$$

$$z = z(u_1, u_2, u_3).$$

Мы ограничимся случаем, когда три семейства поверхностей  $u_1 = \text{const.}, u_2 = \text{const.}, u_3 = \text{const.}$  ортогональны друг к другу. Тогда элементарный отрезок  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$  представляется выражением вида

$$ds^2 = h_1^2 du_1^2 + h_2^2 du_2^2 + h_3^2 du_3^2,$$

где  $h_1, h_2, h_3$  могут в свою очередь быть функциями от  $u_1, u_2, u_3$ . Кроме того установим, что новая координатная система так же, как и первоначальная, будет правинтовой системой. Рассмотрим теперь бесконечно малый параллелепипед, диагональю которого является элементарный отрезок  $ds$ , а ограничивающие поверхности совпадают соответственно с плоскостями  $u_1 = \text{const.}, u_2 = \text{const.}, u_3 = \text{const.}$  Его ребра равны тогда

$h_1 du_1, h_2 du_2, h_3 du_3$ , а объем равен  $h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3$ . Пусть далее  $\varphi(u_1, u_2, u_3)$  — некоторая скалярная функция, а  $\mathbf{A}$  — векторное поле с составляющими  $A_1, A_2, A_3$  по трем направлениям  $u_1, u_2, u_3$ .

Для составляющей градиента  $\varphi$  по  $u_1$  имеем непосредственно из рис. 24

$$(\text{grad } \varphi)_1 = \lim_{du_1 \rightarrow 0} \frac{\varphi(A) - \varphi(O)}{h_1 du_1}$$

или

$$(\text{grad } \varphi)_1 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \quad (70a)$$

и соответственно так же для направлений 2 и 3.

Для вычисления расхождения обратимся опять к теореме Гаусса: поток через поверхность  $OBHC$  в направлении внешней нормали равен  $-\mathbf{A}_1 h_2 h_3 du_2 du_3$ ; при этом поток через  $AFGI$  будет

$$\mathbf{A}_1 h_2 h_3 du_2 du_3 + \frac{\partial}{\partial u_1} (\mathbf{A}_1 h_2 h_3) du_1 du_2 du_3;$$

аналогично и для двух других пар поверхностей. Складывая все эти выражения, получим общий поток

$$\text{div } \mathbf{A} \cdot h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3 \int \int \int \mathbf{A}_n d_j,$$

откуда следует уравнение

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 h_3 \mathbf{A}_1) + \frac{\partial}{\partial u_2} (h_3 h_1 \mathbf{A}_2) + \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 h_2 \mathbf{A}_3) \right\}. \quad (70b)$$



Первая составляющая вихря получается путем применения теоремы Стокса к поверхности *ОВНС*. Так например:

$$\int_B^H \mathbf{A}_s ds + \int_G^0 \mathbf{A}_s ds = \frac{\partial}{\partial u_2} (\mathbf{A}_3 h_3 du_3) du_2 \text{ и т. д.}$$

Следовательно

$$(\text{rot } \mathbf{A})_1 = \frac{1}{h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_2} (\mathbf{A}_3 h_3) - \frac{\partial}{\partial u_3} (\mathbf{A}_2 h_2) \right\}. \quad (70c)$$

Круговой перестановкой индексов получаем составляющие и для двух других направлений.

Наконец, Лапласовский оператор  $\Delta = \text{div grad}$  получается комбинированием (70a) и (70b)

$$\Delta \varphi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \varphi}{\partial u_3} \right) \right\} \quad (70d)$$

Приложим эти формулы к двум особо важным случаям:

а) Цилиндрические координаты

$$x = r \cos \alpha$$

$$y = r \sin \alpha$$

$$z = z$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\alpha^2 + dz^2.$$

В этом случае мы имеем следовательно

$$u_1 = r \quad h_1 = 1$$

$$u_2 = \alpha \quad \text{и} \quad h_2 = r$$

$$u_3 = z \quad h_3 = 1.$$

Из (70a) до (70b) получается

$$\left. \begin{aligned} \text{grad}_r \varphi &= \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad \text{grad}_\alpha \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}, \quad \text{grad}_z \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \text{div } \mathbf{A} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \mathbf{A}_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{A}_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathbf{A}_z}{\partial z} \\ (\text{rot } \mathbf{A})_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{A}_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial \mathbf{A}_\alpha}{\partial z} \\ (\text{rot } \mathbf{A})_\alpha &= \frac{\partial \mathbf{A}_r}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{A}_z}{\partial r} \\ (\text{rot } \mathbf{A})_z &= \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r \mathbf{A}_\alpha) - \frac{\partial \mathbf{A}_r}{\partial \alpha} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (70e)$$

и

$$\Delta \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

б) Полярные координаты

$$x = r \cdot \cos \alpha \sin \vartheta$$

$$y = r \cdot \sin \alpha \sin \vartheta$$

$$z = r \cos \vartheta$$

$$dS^2 = dr^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\alpha^2 + r^2 d\vartheta^2.$$

Мы должны, следовательно, во всех уравнениях (70) до (70d) положить

$$u_1 = r \quad h_1 = 1$$

$$u_2 = \vartheta \quad \text{и} \quad h_2 = r$$

$$u_3 = \alpha \quad h_3 = r \sin \vartheta.$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} \text{grad}_r \varphi &= \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad \text{grad}_\vartheta \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta}, \quad \text{grad}_\alpha \varphi = \frac{1}{r \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \\ \text{div } \mathbf{A} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \mathbf{A}_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta \mathbf{A}_\vartheta) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}_\alpha}{\partial \alpha} \\ (\text{rot } \mathbf{A})_r &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta \mathbf{A}_\alpha) - \frac{\partial \mathbf{A}_\vartheta}{\partial \alpha} \right\} \\ (\text{rot } \mathbf{A})_\vartheta &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \mathbf{A}_r}{\partial \alpha} - \frac{1}{r} \frac{\partial r \mathbf{A}_\alpha}{\partial r} \\ (\text{rot } \mathbf{A})_\alpha &= \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r \mathbf{A}_\vartheta) - \frac{\partial \mathbf{A}_r}{\partial \vartheta} \right\} \\ \Delta \varphi &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2}. \end{aligned} \right\} (70f)$$

§ 21\*. Тензоры. Полярные и аксиальные векторы. Как мы видели в § 3, уравнение (9), каждому направлению  $\mathbf{s}$  пространства вектором  $\mathbf{a}$  сопоставляется скаляр

$$\mathbf{a}_s = \mathbf{a}_x \cos(\mathbf{s}, x) + \mathbf{a}_y \cos(\mathbf{s}, y) + \mathbf{a}_z \cos(\mathbf{s}, z),$$

который есть не что иное, как составляющая этого вектора по направлению  $\mathbf{s}$ ;  $\mathbf{a}_s$  зависит линейно-однородно как от составляющих вектора  $\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y, \mathbf{a}_z$ , так и от направляющих косинусов.

В физике часто бывает, что по аналогичному закону каждому направлению сопоставляется некоторый вектор  $\mathbf{q}$

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_1 \cos(\mathbf{s}, x) + \mathbf{q}_2 \cos(\mathbf{s}, y) + \mathbf{q}_3 \cos(\mathbf{s}, z); \quad (71)$$

здесь вместо скалярных составляющих вектора  $\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y, \mathbf{a}_z$  выступают три вектора  $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$ , которые сопоставлены направлениям  $x, y, z$ .

Подобно тому, как три скаляра  $\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y, \mathbf{a}_z$ , сопоставленные координатным направлениям, определяют собой некоторый вектор  $\mathbf{a}$ , три вектора  $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$  объединяют в новую величину, которую называют тензором. Под составляющими тензора понимают  $3 \times 3 = 9$  составляющих векторов  $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$ .

Так как направляющие косинусы в (9) или (71) являются составляющими единичного вектора  $\mathbf{s}$ , то можно также написать

$$\mathbf{q} = q_1 \mathbf{s}_x + q_2 \mathbf{s}_y + q_3 \mathbf{s}_z. \quad (71a)$$

Это пишут сокращенно

$$\mathbf{q} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{s}$$

и говорят, что вектор  $\mathbf{q}$  получается путем умножения тензора  $\mathbf{Q}$  на  $\mathbf{s}$ . Точно так же тензор  $\mathbf{Q}$  можно перемножать с любым вектором  $\mathbf{r}$ , длина которого  $|\mathbf{r}| = r$ ; таким образом получается

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r} = q_1 r_x + q_2 r_y + q_3 r_z = r [q_1 \cos(\mathbf{r}, x) + q_2 \cos(\mathbf{r}, y) + q_3 \cos(\mathbf{r}, z)]. \quad (71b)$$

Каждому вектору  $\mathbf{r}$  тензором  $\mathbf{Q}$  сопоставляется следовательно линейно-однородно вектор  $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}$ .

Чтобы пояснить физическое значение тензора как вновь вводимой величины, укажем на то, что, например, напряжение в какой-либо точке твердого тела дается тензором.

Проведем через точку  $P$  подвергнутого напряжению тела элемент поверхности  $dS$  и припишем ему направление нормали  $\mathbf{s}$ . Представим себе теперь, что вещество, прилегающее к элементу поверхности, удалено с той стороны, куда указывает нормаль. Для того чтобы оставшиеся части не сместились, необходимо приложить силу, распределенную по элементу. Деля эту силу на  $dS$  и относя ее тем самым к единице поверхности, получим напряжение, действующее в точке  $P$  на площадку  $dS$ ; последней припишем также определенное направление обхода. Каждому положению площадки, проведенной через  $P$ , а, следовательно, каждому единичному вектору  $\mathbf{s}$  отвечает свой вектор напряжения  $\mathbf{T}$ . Спрашивается, как зависят друг от друга векторы напряжения, отвечающие различным направлениям  $\mathbf{s}$ .

Возьмем прямоугольную систему координат с началом в точке  $P$  и отсечем от вершины первого октанта бесконечно малый тетраэдр (рис. 25); величина плоскости основания его пусть будет равна  $dS$ , а внешней нормалью служит  $\mathbf{s}$  с составляющими  $s_x = \cos \alpha$ ,  $s_y = \cos \beta$ ,  $s_z = \cos \gamma$ . Тогда остальные поверхности будут  $dS \cos \alpha$ ,  $dS \cos \beta$ ,  $dS \cos \gamma$ ; напряжения, действующие на них, будут  $-\mathbf{T}_1$ ,  $-\mathbf{T}_2$ ,  $-\mathbf{T}_3$ , если  $\mathbf{T}_1$ ,  $\mathbf{T}_2$ ,  $\mathbf{T}_3$  суть напряжения, отвечающие положительной оси  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  (внешние нормали поверхностей тетраэдра имеют направление отрицательных осей). Если  $\mathbf{T}$  есть напряжение, действующее на основание, то силы, действующие на тетраэдр, будут:

$$\mathbf{T} dS, -\mathbf{T}_1 dS \cos \alpha, -\mathbf{T}_2 dS \cos \beta, -\mathbf{T}_3 dS \cos \gamma.$$

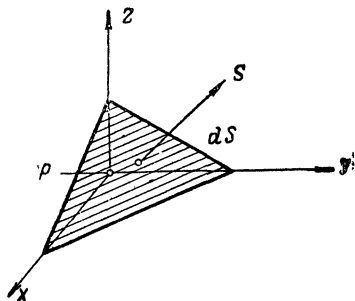


Рис. 25. Равновесие на тетраэдре.

Условием равновесия будет следовательно

$$\mathbf{T} dS - \mathbf{T}_1 dS \cos \alpha - \mathbf{T}_2 dS \cos \beta - \mathbf{T}_3 dS \cos \gamma = 0.$$

Отсюда следует искомое соотношение

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_1 \cos \alpha + \mathbf{T}_2 \cos \beta + \mathbf{T}_3 \cos \gamma. \quad (72)$$

Сравнение с (71) дает, что напряжение в точке твердого тела является тензорной величиной. Оно задано, если для какой-либо системы координат известны напряжения  $\mathbf{T}_1$ ,  $\mathbf{T}_2$ ,  $\mathbf{T}_3$ , отвечающие направлениям осей. Из этих величин, а также из направляющих косинусов нормали к поверхности линейно-однородно складывается напряжение  $\mathbf{T}$ , действующее на эту поверхность.

Если  $\mathbf{T}_x$ ,  $\mathbf{T}_y$ ,  $\mathbf{T}_z$  — составляющие  $\mathbf{T}$ , то имеет место

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_x &= T_{11} \cos \alpha + T_{12} \cos \beta + T_{13} \cos \gamma \\ \mathbf{T}_y &= T_{21} \cos \alpha + T_{22} \cos \beta + T_{23} \cos \gamma \\ \mathbf{T}_z &= T_{31} \cos \alpha + T_{32} \cos \beta + T_{33} \cos \gamma, \end{aligned}$$

где, например,  $\mathbf{T}_{21}$  будет составляющая  $\mathbf{T}_1$  по оси  $Y$ . В частном случае тензора напряжений составляющие этого тензора удовлетворяют условию симметрии

$$T_{ik} = T_{ki},$$

значение которого мы вскоре увидим.

Дальнейший пример тензора мы получим следующим образом:

В § 9, уравнение (33а), мы видели, что возрастание скаляра  $\varphi$  в каком-либо направлении дается соответствующей компонентой вектора, являющегося градиентом  $\varphi$ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos(s, x) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos(s, y) + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cos(s, z).$$

Если векторное поле задано тем, что каждой точке пространства сопоставлен вектор  $\mathbf{a}$ , то каждая из составляющих  $\mathbf{a}_x$ ,  $\mathbf{a}_y$ ,  $\mathbf{a}_z$  сама по себе образует скалярное поле. Применим к ним уравнение (33а):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{a}_x}{\partial s} &= \frac{\partial \mathbf{a}_x}{\partial x} \cos(s, x) + \frac{\partial \mathbf{a}_x}{\partial y} \cos(s, y) + \frac{\partial \mathbf{a}_x}{\partial z} \cos(s, z) \\ \frac{\partial \mathbf{a}_y}{\partial s} &= \frac{\partial \mathbf{a}_y}{\partial x} \cos(s, x) + \frac{\partial \mathbf{a}_y}{\partial y} \cos(s, y) + \frac{\partial \mathbf{a}_y}{\partial z} \cos(s, z) \\ \frac{\partial \mathbf{a}_z}{\partial s} &= \frac{\partial \mathbf{a}_z}{\partial x} \cos(s, x) + \frac{\partial \mathbf{a}_z}{\partial y} \cos(s, y) + \frac{\partial \mathbf{a}_z}{\partial z} \cos(s, z). \end{aligned}$$

Перемножая каждое из этих уравнений с соответствующим ему основным вектором ( $\mathbf{i}$  или  $\mathbf{j}$  или  $\mathbf{k}$ ) и складывая, получим:

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial s} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} \cos(s, x) + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y} \cos(s, y) + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z} \cos(s, z). \quad (73)$$

Следовательно, в то время как возрастание скалярного поля определяет вектор, производная векторного поля дается тензором.

Полученный результат можно применить физически. Самая общая деформация тела определена, если для каждой из его точек известен вектор смещения. Рассмотрим малый вектор  $ds$  с составляющими  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , соединяющий две точки тела, подвергнутого деформации. Если  $\mathbf{a}(x, y, z)$  есть смещение точки  $x, y, z$ , то элемент  $ds$  изменяется на разность смещений своих конечных точек, т. е. на

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial s} ds = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z} dz. \quad (73a)$$

Этот полный дифференциал нужно понимать, согласно (71a), как произведение тензора деформации (состоящего из частных производных вектора поля) на вектор  $ds$ .

Если обозначить составляющие тензора, как выше для тензора натяжений, через  $q_{11}, q_{12}, \dots, q_{21}, \dots$  и т. д., так что  $q_{ik}$  будет  $i$ -ая составляющая того вектора, который сопоставлен  $k$ -той координатной оси, то векторное уравнение (71) можно написать в составляющих

$$\left. \begin{aligned} q_x &= q_{11}r_x + q_{12}r_y + q_{13}r_z \\ q_y &= q_{21}r_x + q_{22}r_y + q_{23}r_z \\ q_z &= q_{31}r_x + q_{32}r_y + q_{33}r_z. \end{aligned} \right\} \quad (73b)$$

Составляющие тензора, которые являются коэффициентами этой линейной системы уравнений, можно наглядно расположить таким образом

$$\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix}.$$

Эта таблица называется квадратичной матрицей. Диагональ, идущую слева сверху направо вниз и содержащую элементы с двумя одинаковыми индексами, называют главной диагональю. Если все элементы, получающиеся попарно один из другого путем зеркального отражения в главной диагонали, равны, то матрица, так же как и тензор, называется симметричной. Для симметричного тензора имеет поэтому место

$$q_{12} = q_{21}; \quad q_{13} = q_{31}; \quad q_{23} = q_{32}.$$

Если же составляющие тензора, получающиеся отражением в главной диагонали, равны по величине, но противоположны по знаку, и в то же время все элементы главной диагонали обращаются в нуль, то тензор называется антисимметричным или кососимметричным.

Если мы имеем два тензора  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ , которые при умножении на вектор  $\mathbf{r}$  дают векторы

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{a}_1 r_x + \mathbf{a}_2 r_y + \mathbf{a}_3 r_z \\ \mathbf{b} &= \mathbf{B} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{b}_1 r_x + \mathbf{b}_2 r_y + \mathbf{b}_3 r_z, \end{aligned}$$

то

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1) r_x + (\mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2) r_y + (\mathbf{a}_3 + \mathbf{b}_3) r_z.$$

Векторами  $(\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1)$ ,  $(\mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2)$ ,  $(\mathbf{a}_3 + \mathbf{b}_3)$ , которые сопоставлены соответственно трем координатным направлениям, определяется тензор, произведением которого на  $\mathbf{r}$  как раз является  $(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ . Обозначим его  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  и назовем суммой тензоров  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ . Его составляющие получаются путем сложения соответствующих составляющих  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ ; его матрицей будет

$$\begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} \end{pmatrix}.$$

Всякий тензор можно представить как сумму симметричного и антисимметричного тензоров. Согласно правилу сложения имеем

$$\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11} & 1/2(q_{12} + q_{21}) & 1/2(q_{13} + q_{31}) \\ 1/2(q_{12} + q_{21}) & q_{22} & 1/2(q_{23} + q_{32}) \\ 1/2(q_{13} + q_{31}) & 1/2(q_{23} + q_{32}) & q_{33} \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} 0 & 1/2(q_{12} - q_{21}) & 1/2(q_{13} - q_{31}) \\ 1/2(q_{21} - q_{12}) & 0 & 1/2(q_{23} - q_{32}) \\ 1/2(q_{31} - q_{13}) & 1/2(q_{32} - q_{23}) & 0 \end{pmatrix}.$$

Первая матрица справа действительно есть симметричная, вторая — кососимметричная.

Нас интересуют теперь те свойства тензора, которые не зависят от случайного положения координатной системы. Для этого напишем (73b) в сокращенной форме

$$\mathbf{q}_i = \sum_{k=1}^3 q_{ik} \mathbf{r}_k, \quad (i=1, 2, 3) \quad (73c)$$

где через  $\mathbf{q}_1$ ,  $\mathbf{q}_2$ ,  $\mathbf{q}_3$  обозначены составляющие вектора по  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Если мы повернем координатную систему таким образом, что  $\mathbf{q}'_i$  и  $\mathbf{r}'_i$  будет являться составляющими  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{r}$  по отношению к новой координатной системе, то между этими величинами будет существовать уже другое соотношение

$$\mathbf{q}'_i = \sum_s q'_{is} \mathbf{r}'_s. \quad (73d)$$

Пусть вращение координатной системы описывается девятью направляющими косинусами  $\alpha_{ik}$  новой координатной системы в отношении старой.

Тогда

$$\mathbf{q}'_i = \sum_s \alpha_{is} \mathbf{q}_s; \quad \mathbf{r}'_s = \sum_k \alpha_{sk} \mathbf{r}_k, \quad (73e)$$

а между  $\alpha_{ik}$  будут существовать соотношения ортогональности

$$\sum_i \alpha_{is} \alpha_{ir} = \delta_{sr} \quad \text{и} \quad \sum_i \alpha_{si} \alpha_{ri} = \delta_{sr}. \quad (73f)$$

( $\delta_{sr}$  означает нуль при  $s \neq r$  и 1 при  $s = r$ ).

Если ввести в (73d) уравнения (73c) и (73e), то получим

$$\sum_{s, k} \alpha_{is} q_{sk} \mathbf{r}_k = \sum_{s, k} q'_{is} \alpha_{sk} \mathbf{r}_k.$$

Это уравнение имеет место для всякого вектора  $\mathbf{r}$ . Следовательно

$$\sum \alpha_{is} q_{sk} = \sum_s q'_{is} \alpha_{sk}.$$

Перемножение на  $\alpha_{rk}$  и суммирование по  $k$  дает согласно (73f) преобразование тензора

$$q'_{ir} = \sum_{s, k} \alpha_{is} \alpha_{rk} q_{sk}. \quad (73g)$$

Из уравнения (73g) мы прежде всего заключаем, что если для всех индексов  $q_{sk} = q_{ks}$ , то и  $q'_{ik} = q'_{ki}$ . С другой стороны, из  $q_{sk} = -q_{ks}$  следует также, что  $q'_{ik} = -q'_{ki}$ . Свойство симметричности и антисимметричности тензора не зависит от системы координат.

Если положить в (73g)  $i = r$  и просуммировать по  $r$ , то в силу (73f) получится

$$\sum_r q'_{rr} = \sum_s q_{ss}.$$

Сумма всех элементов главной диагонали тензора (так называемый след тензора) является, значит, также инвариантом.

„Единичный тензор“  $\delta_{ik}$  при вращении по (73g) вообще не изменяется; следовательно, имеет место также

$$q'_{ir} - \lambda \delta_{ir} = \sum_{s, k} \alpha_{is} \alpha_{rk} (q_{sk} - \lambda \delta_{sk}),$$

где  $\lambda$  — произвольное число. Так как детерминант  $\alpha_{ik}$  равен 1, то правило умножения теории детерминантов дает важную теорему:

Значение детерминанта

$$F(\lambda) = \begin{vmatrix} q_{11} - \lambda & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} - \lambda & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} - \lambda \end{vmatrix} \quad (73h)$$

не зависит от координатной системы. Следовательно, все коэффициенты полинома  $F(\lambda)$  имеют инвариантное значение. В частности имеют инвариантное значение корни  $\lambda'$ ,  $\lambda''$ ,  $\lambda'''$  уравнения  $F(\lambda) = 0$ , называемого „вековым уравнением“.

В качестве примера рассмотрим деформацию непрерывной среды при условии, что скорость  $\mathbf{v}$  в каждой точке дана. Спрашивается,

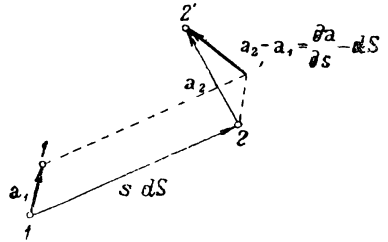


Рис. 26. Изменение вектора  $s ds$ , соединяющего две материальные точки, при деформации.

каково будет изменение расстояния  $x_1 x_2 x_3$  двух материальных точек за время  $\delta t$ . Соединим две соседние материальные точки вектором  $\mathbf{s}$  с составляющими  $x_1, x_2, x_3$ . Тогда начало  $\mathbf{s}$  за время  $\delta t$  передвинется на расстояние  $\mathbf{v} \delta t$ , конечная точка, напротив, на

$$[\mathbf{v} + (\text{grad } \mathbf{v} \cdot \mathbf{s})] \delta t.$$

Составляющие  $\mathbf{s}$  претерпевают, следовательно, изменение со скоростью

$$\dot{x}_i = \sum_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} x_k. \quad (73i)$$

Разложим тензор  $\frac{\partial v_i}{\partial x_k}$  скорости деформации на его симметричную и антисимметричную части

$$v_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right); \quad a_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right). \quad (73k)$$

Симметричную часть

$$\dot{x}_i = \sum_k v_{ik} x_k \quad (v_{ik} = v_{ki})$$

можно описать следующим образом: если поставить вопрос о том, существует ли такой вектор, который не изменяет своего направления, то этот вопрос сводится к нахождению такого вектора, который должен удовлетворять соотношению  $\dot{x}_i = \lambda x_i$ . Система уравнений

$$\sum_k v_{ik} x_k = \lambda x_i \quad (73l)$$

имеет решение только для такого  $\lambda$ , для которого детерминант

$$F(\lambda) = |v_{ik} - \lambda \delta_{ik}| = 0.$$

Каждому из корней  $\lambda', \lambda'', \lambda'''$  этого уравнения отвечает, согласно (73l) направление  $x_i$ . Если все три корня различны, то уравнением (73l) даются три вектора  $x'_i, x''_i, x'''_i$ , которые при симметричной деформации сохраняют свое направление. Напишем уравнения

$$\sum_k v_{ik} x'_k = \lambda' x'_i$$

и

$$\sum_k v_{ik} x''_k = \lambda'' x''_i;$$

умножая первое из этих уравнений на  $x''_i$ , второе на  $x'_i$ , вычитая затем одно из другого и произведя суммирование по  $i$ , в силу симметрии  $v_{ik}$ , получим

$$0 = (\lambda' - \lambda'') (x'_1 x''_1 + x'_2 x''_2 + x'_3 x''_3).$$



Различным „собственным значениям“  $\lambda$  соответствуют различные „собственные векторы“  $x_i$ , которые перпендикулярны друг другу. Самая общая симметричная деформация заключается, следовательно, в растяжении или сжатии по трем взаимно перпендикулярным направлениям. Если повернуть координатную систему таким образом, чтобы ее оси совпали с этими направлениями, то

$$\dot{x}_1 = \lambda' x_1; \quad \dot{x}_2 = \lambda'' x_2; \quad \dot{x}_3 = \lambda''' x_3.$$

Для изменения материального объема  $V = x_1 x_2 x_3$  получается

$$\frac{dV}{dt} = \dot{x}_1 x_2 x_3 + x_1 \dot{x}_2 x_3 + x_1 x_2 \dot{x}_3 = V (\lambda' + \lambda'' + \lambda''').$$

Но сумма трех корней  $\lambda' + \lambda'' + \lambda'''$  есть след тензора и, как таковой, инвариантна по отношению к предпринятому повороту. Следовательно

$$\lambda' + \lambda'' + \lambda''' = v_{11} + v_{22} + v_{33} = \text{div } \mathbf{v}. \quad (73k)$$

Таким образом мы расхождение вектора представили, как след тензора  $\frac{\partial v_i}{\partial x_k}$ .

Антисимметричная часть  $a_{ik}$  [уравнение (73k)] нашего тензора

$$\dot{x}_i = \sum_k \dot{a}_{ik} x_k; \quad a_{ik} + a_{ki} = 0 \quad (73n)$$

оставляет без изменения все углы и расстояния. Для доказательства рассмотрим изменение во времени скалярного произведения двух любых векторов  $x_i$  и  $x'_i$ :

$$\frac{d}{dt} \sum_i x'_i x_i = \sum_i (\dot{x}'_i x_i + x'_i \dot{x}_i) = \sum_{i, k} a_{ik} x'_i x'_k + \sum_{i, k} a_{ik} x'_k x'_i.$$

Если во втором слагаемом переменить местами индексы  $i$  и  $k$ , то получится

$$\frac{d}{dt} \sum_i x'_i x'_i = \sum_{i, k} x'_i x'_k (a_{ik} + a_{ki}) = 0,$$

чем утверждение и доказано. Тензор  $a_{ik}$  должен, следовательно, описывать поворот. Это можно видеть непосредственно, если обозначить

$$a_{12} = -u_3; \quad a_{13} = u_2; \quad a_{23} = -u_1. \quad (73o)$$

Тогда (73h) дает

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = u_2 x_3 - u_3 x_2 \\ \dot{x}_2 &= a_{21} x_1 + a_{23} x_3 = u_3 x_1 - u_1 x_3 \\ \dot{x}_3 &= a_{31} x_1 + a_{32} x_2 = u_1 x_2 - u_2 x_1. \end{aligned}$$

Сравнение с уравнением (21a)  $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{u} \times \mathbf{r}$  показывает, что уравнением (73n) описано не что иное, как вращение, и что вектор  $\mathbf{u}$ , выражен-

ный уравнениями (73o), определяет ось вращения и скорость вращения. Согласно (73k) вектор  $\mathbf{u}$  связан с первоначальным полем потока  $\mathbf{v}$  уравнением

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{v}. \quad (74)$$

Скорость вращения  $\mathbf{u}$ , а равно и  $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ , собственно говоря, не являются векторами, а представляют собой антисимметричные тензоры. К таким величинам применяют иногда термин „аксиальные векторы“ в отличие от нормальных или „полярных векторов“. Дальнейшим важным примером аксиального вектора может служить векторное произведение двух векторов  $a_i$  и  $b_i$ , которое собственно следовало бы описывать как кососимметричный тензор

$$c_{ik} = -a_i b_k + a_k b_i.$$

Данное в (73o) представление кососимметричного тензора посредством вектора возможно только для трехмерного пространства, да и то лишь постольку, поскольку мы ограничиваемся правой координатной системой. Согласно (73g), законы преобразования векторов и антисимметричных тензоров тождественны только тогда, когда детерминант  $|a_{ik}|$  равен +1. Если же этот детерминант равен -1 (что означает переход от правой к левой системе), то сразу же обнаруживается разница в существовании этих двух величин. Положим, например,  $a_k = -\delta_{ik}$  (отражение в нулевой точке). Тогда составляющие вектора согласно (73e) меняют свой знак, в то время как все тензорные составляющие остаются неизменными.

В предыдущих параграфах введение аксиальных векторов всегда регулярно проявляло себя тем, что для их объяснения мы вынуждены были пользоваться понятием правого винта. Этого понятия, а с ним и ограничения правой координатной системой, можно совершенно избежать, если вместо аксиального вектора всегда вводить соответствующий тензор.

Резюмируя, можем сказать, что для трехмерного пространства мы в векторном произведении обладаем простым и наглядным способом представления кососимметричного тензора. Чтобы избежать, однако, недоразумений, мы не должны забывать, что здесь идет речь только о практическом правиле, область применения которого имеет свои границы.

В применении к физике мы чаще всего будем встречаться с тензором напряжений. В теории упругости тензор напряжений получается из симметричной части тензора деформаций путем применения закона Гука; так как ни тензор деформаций, ни закон Гука не содержат какого-либо преимущественного направления поворота, то тензор напряжений является симметричным, как это уже было сказано выше.

## В. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

### 1. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ПУСТОТЕ

§ 22. Напряженность электрического поля. Если натереть кошачьим мехом сургучную палочку, то оба эти тела, а равно и окружающее пространство приводятся в особое состояние, которое проявляет себя тем, что находящиеся вблизи легкие частицы приводятся

з движение; в этом случае говорят, что тела, вследствие трения „наэлектризовались“, окружающее же пространство представляет „электрическое поле“. Электрическое состояние присуще не только сургучной палочке и меху; оно передается также и металлам, если последние привести в соприкосновение с этими телами. Возникновение электрического состояния не связано с процессом трения; металлическая пластинка, соединенная проволокой с одним из полюсов батареи, также проявляет, после удаления проволоки, электрические действия. Предположим, что наэлектризованная металлическая пластинка помещена в воздушную среду. Окружающее ее электрическое поле исследуют с помощью „пробного тела“, например, с помощью бузинного шарика, покрытого сусальным золотом; пробное тело электризуется прикосновением сургучной палочки или меха, предварительно натертых друг о друга.

В электрическом поле на это пробное тело действует некоторая сила  $F$ . Представим себе, что мы измерили эту силу  $F$ . Для различных точек поля сила будет различна как по величине, так и по направлению. Для одной и той же точки она будет зависеть от того, каким способом бузинный шарик был наэлектризован. Впрочем, по этому вопросу имеется очень простая закономерность: если пробное тело было в соприкосновении с сургучной палочкой, то направление и знак силы, которая на него действует в данной точке, вполне определены, и только величина зависит от того, как мы действовали на шарики. Если же пробное тело находилось в соприкосновении с мехом, то сила имеет противоположный знак, а ее величина опять зависит от рода подготовки. Таким образом мы приходим к заключению, что силу, действующую в электрическом поле на пробное тело, надо положить равной

$$F = eE, \quad (75)$$

где скаляр  $e$  зависит от электрического состояния пробного тела, в то время как вектор  $E$  не зависит от этого состояния, но для различных точек поля имеет различное направление и величину. Действительно, опыт показывает, что для двух различно наэлектризованных пробных тел, последовательно помещаемых в одну и ту же точку поля, силы находятся в определенном отношении

$$F_1 : F_2 = e_1 : e_2, \quad (75a)$$

которое остается постоянным для различных точек поля. Опыт далее показывает, что на данное пробное тело в двух различных точках поля  $P$  и  $P'$  действуют различные силы  $F$  и  $F'$ , и отношение их величин

$$|F| : |F'| = |E| : |E'| \quad (75b)$$

не зависит от подготовки пробного тела. Формула (75) содержит в себе как (75a), так и (75b).

Если для первого пробного тела  $e_1$  задано, то для второго  $e_2$  определяется из (75a); тогда для отдельных точек поля можно определить  $E$  с помощью любого пробного тела.

Скалярный множитель  $e$  в выражении (75) называют электрическим зарядом пробного тела или количе-

ством электричества, находящимся на нем; векторный множитель  $\mathbf{E}$  называют напряженностью электрического поля. Обе величины — количество электричества и напряженность электрического поля — сразу же определяются однозначно, если только установить единицу количества электричества. Противоположность направления сил, действующих на два пробных тела, из которых одно было приведено в соприкосновение с сургучной палочкой, а другое — с мехом, учитывают тем, что различают положительное и отрицательное электричество. Электричеству шарика, приведенного в соприкосновение с мехом, о который предварительно натиралась сургучная палочка, совершенно произвольно приписали положительный знак, а электричеству сургучной палочки — соответственно отрицательный. Согласно этому, за направление силы поля приняли направление силы, действующей на пробное тело, приведенное в соприкосновение с мехом.

Выражение (75) для силы, действующей в электрическом поле на заряженное пробное тело, справедливо не всегда. Значение силы (75) отклоняется от истинного значения, если пробное тело находится очень близко от заряженного тела, причем это отклонение тем больше, чем больше заряд пробного тела. Это выражение становится неточным также тогда, когда сила поля слишком сильно меняется от точки к точке, причем неточность тем больше, чем больше размеры пробного тела. В дальнейшем мы познакомимся с причинами этих отклонений и в § 38 введем соответственное дополнение для выражения силы. Для начала мы должны поэтому при определении электрического поля по (75) пользоваться достаточно малыми пробными телами с достаточно слабыми зарядами на них.

Для теории Максвелла характерно то, что она для каждой точки пространства указывает напряженность  $\mathbf{E}$  и именно это векторное поле считает главным предметом своего исследования. Первоначально физическое значение  $\mathbf{E}$  заключалось лишь в том соотношении (75), которое гласит, что если в данную точку пространства поместить заряд  $e$ , то на него будет действовать сила  $\mathbf{F} = e\mathbf{E}$ . Максвелловская же теория приписывает этой величине  $\mathbf{E}$  непосредственную реальность, не зависящую от существования пробного тела. Хотя наблюдаемая сила обнаруживается только при наличии по крайней мере двух заряженных тел (например, заряженной металлической пластинки и пробного тела), мы вслед за Максвеллом утверждаем, что уже одна металлическая пластинка сама по себе вызывает изменение состояния окружающего пространства, которое и описывается полем вектора  $\mathbf{E}$ . Векторное поле в части пространства, занимаемой пробным телом, мы рассматриваем как первопричину действия силы на пробное тело. Задача заряженной металлической пластинки заключается лишь в поддержании этого поля. Мы говорим поэтому о теории действия поля в отличие от господствовавшей до Фарадея — Максвелла теории дальнего действия, исходным пунктом которой является взаимодействие двух зарядов.

**§ 23. Поток электрических сил.** Рассмотрим сначала электрическое поле в пустоте. Одним из важнейших результатов количественной теории электричества до Фарадея был закон Кулона:

Сила взаимодействия двух заряженных тел 1 и 2, размеры которых малы по сравнению с расстоянием между ними, направлена вдоль соединяющей их прямой и обратно пропорциональна квадрату их расстояния. Так как мы можем любое из этих тел рассматривать как пробное тело, в том смысле, как это говорилось в предыдущем параграфе, то следовательно

$$|E| = \frac{e_1 \cdot e_2}{r^2} \cdot f,$$

где множитель  $f$  уже не зависит от свойств тел и их положения. Далее, сила  $F$  действует как отталкивание, если  $e_1$  и  $e_2$  одинакового знака, и как притяжение, если знаки противоположны.

Мы сразу же введем абсолютную электростатическую систему единиц, определяя единицу количества электричества, как такое количество электричества, которое действует на равное ему количество электричества, находящееся на расстоянии в 1 см, с силой в одну дину. Следствием такого определения является то, что в предыдущем уравнении множитель  $f$  становится равным единице. Тем самым одновременно определяется также из (75) единица для  $E$ .

Придерживаясь способа выражения Фарадея — Максвелла, мы можем результат кулоновских измерений описать следующим образом:

Точечный заряд образует в окружающем пространстве поле  $E$ , которое по величине и направлению дается выражением

$$E = \frac{e}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}. \quad (75')$$

При этом  $\mathbf{r}$  есть вектор, направленный от заряда в точку наблюдения.

Сравнение с нашим предшествующим изложением точечных источников позволяет далее высказать следующее:

Электрическое поле  $E$ , образуемое точечным зарядом  $e$ , тождественно с безвихревым полем потока несжимаемой жидкости плотности  $\frac{1}{4\pi}$ , образуемым точечным источником с отдачей  $e$ .

В частности, для всякой замкнутой поверхности, содержащей заряд  $e$ , имеет место закон:

$$\iint E_n dS = 4\pi e. \quad (76)$$

Назовем  $E_n dS$  потоком сил через элемент поверхности  $dS$ . Тогда согласно (76) полный поток сил через замкнутую поверхность равен произведению  $4\pi$  на точечный заряд, охватываемый этой поверхностью.

При одновременном действии на пробное тело нескольких зарядов, все силы  $F_1, F_2, \dots$ , действующие на него, складываются по закону векторного сложения

$$F' = F_1 + F_2 + F_3 + \dots$$

Подобным же образом складываются и напряженности  $E_1, E_2, \dots$ , создаваемые отдельными зарядами. Этот экспериментальный факт позволяет нам интерпретировать уравнение (76) в более общем виде:

Полный поток сил через замкнутую поверхность равен произведению  $4\pi$  на общий заряд, охватываемый этой поверхностью.

Эту теорему можно признать исходным пунктом теории Максвелла: электрические заряды выступают теперь уже не как центры сил, но как источники потока сил. Результаты, полученные нами относительно пространственно и поверхностно распределенных источников (§ 10 и § 11), мы можем теперь непосредственно перенести на соответственно распределенное электричество.

Заряд, распределенный в объеме с плотностью  $\rho(x, y, z)$ , образует расхождение потока сил

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho.$$

Заряд, распределенный по поверхности с поверхностной плотностью  $\sigma$ , вызывает скачок нормальной составляющей  $\mathbf{E}$ :

$$-(\mathbf{E}_{n_1} + \mathbf{E}_{n_2}) = 4\pi\sigma.$$

**§ 24. Электростатический потенциал.** Поле, образуемое точечным зарядом, по формуле (75')—безвихревое. Его можно представить, как отрицательный градиент скаляра  $\varphi = \frac{e_1}{r}$ :

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi; \quad \varphi = \frac{e_1}{r}$$

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{e_1}{r^2} \cdot \frac{x}{r} = \frac{e_1}{r^2} \cos(\mathbf{r}, \mathbf{x}) \text{ и т. д.}$$

Поэтому общее электростатическое поле, получающееся от наложения полей, образуемых распределенными в объеме источниками  $\rho dv$  и поверхностными источниками  $\sigma dS$ , также должно быть безвихревым:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0. \quad (77)$$

Следовательно, согласно § 11, напряженность электростатического поля можно выразить как взятый с обратным знаком градиент скалярного однозначного потенциала  $\varphi$ :

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi; \quad (77a)$$

$\varphi$  называют электростатическим потенциалом. Его падение от точки (1) до точки (2) равно интегралу  $\mathbf{E}$ , взятому по любому пути  $s$ , соединяющему (1) с (2):

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \mathbf{E} ds. \quad (77b)$$

Электростатическое поле вполне соответствует полю безвихревого потока жидкости, которое было рассмотрено в главе I. Отдача источников  $e$  согласно уравнению (76), соответствует количеству электричества, которое мы и обозначили таким же образом

Если задано распределение электричества, то электростатический потенциал, а равно и безвихревое поле  $\mathbf{E}$  вычисляются согласно формулам §§ 12—15.

Для некоторого числа  $n$  точечных зарядов потенциал [уравнение (49)] будет

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \frac{e_i}{r_i}; \quad (78)$$

для зарядов, распределенных в объеме [уравнение (54)], он равен

$$\varphi = \int \frac{\rho dv}{r}; \quad (78a)$$

для зарядов, распределенных по поверхности,

$$\varphi = \int \frac{\sigma dS}{r}; \quad (78b)$$

поле двойных слоев можно было бы вычислить по формулам § 18.

**§ 25. Распределение электричества на проводниках.** При постановке задач в электростатике дело в большинстве случаев обстоит не так просто, что задано распределение электричества, и можно вычислить потенциал по (78a, b). Распределение электричества на металлических телах само определяется некоторыми условиями, к установлению которых мы теперь и перейдем. В § 22 мы уже упоминали о свойстве металлической проволоки проводить электричество от полюса батареи к телу. Тела, обладающие этим свойством, называют проводниками электричества, тела же, у которых подобное свойство отсутствует, называют изоляторами. Эту классификацию тел не всегда удается провести вполне строго.

Решение вопроса о том, как нужно назвать предмет: проводником или изолятором, теснейшим образом связано с продолжительностью наблюдения. Если поместить предмет в электростатическое поле, то сначала внутри предмета во всяком случае возникает поле, и следствием этого поля всегда является электрический ток. Этот ток имеет стремление произвести на поверхности предмета такое распределение зарядов, которое могло бы как раз компенсировать внешнее поле внутри предмета. Если такое состояние достигнуто, мы имеем перед собой опять электростатическое состояние, при котором внутри тела поле всюду равно нулю. При этом возможны два крайних случая. Либо время, необходимое для достижения этого конечного состояния, мало по сравнению с продолжительностью наблюдения (например,  $10^{-6}$  секунды). Тогда поле, которое мы будем видеть внутри тела, всегда будет равно нулю. Такое тело мы будем называть проводником. Либо это время очень велико (дни и месяцы). Тогда ток становится настолько малым, что при нашей обычной продолжительности наблюдения он не оказывает влияния на наши измерения. В этом случае мы говорим об изоляторе. Чистая электростатика имеет дело только с идеальными телами — именно с такими, у которых это время бесконечно мало (металлы) или бесконечно велико (изоляторы). Поэтому металлы с точки зрения электростатики характеризуются тем, что внутри их поле  $E$  всюду равно нулю. Или, другими словами, электростатический потенциал  $\varphi$  внутри проводника постоянен.

Итак, поле, образуемое различно заряженными кусками металла в пространстве, вообще свободном от зарядов, можно описать следующим образом: во всем внешнем пространстве действует соотношение:

$$4\pi\rho = \operatorname{div} \mathbf{E} = 0;$$

в пространстве, занимаемом самим металлом, нет никаких зарядов, так как нет никакого поля.

Но на поверхности металла имеются распределенные по ней источники напряженности  $\mathbf{E}$ , так как наружу от нее исходит поток сил; он равняется  $\mathbf{E}_n$ , если  $\mathbf{n}$  — нормаль, направленная в окружающее воздушное пространство.

Произведение поверхностной плотности электричества  $\sigma$  на  $4\pi$  равно потоку сил, исходящему из единицы поверхности. Он будет

$$4\pi\sigma = \mathbf{E}_n = -\frac{\partial\varphi}{\partial n}. \quad (7c)$$

Следует также учесть, что на границе раздела воздуха и металла, кроме поверхностно распределенных источников силового потока, могут находиться также двойные источники. В самом деле, однородный двойной слой, согласно § 16, не вызвал бы никакого изменения поля как снаружи, так и внутри. В этом именно и заключается трудность экспериментально установить его наличие. Поэтому вначале таких двойных слоев мы учитывать не будем.

Если известно безвихревое поле вектора  $\mathbf{E}$ , то можно вычислить распределение электричества по (79). Наоборот, если бы было известно распределение электричества на поверхности проводника, то можно было бы вычислить поле с помощью (78b) и (77a). Но ни та, ни другая постановка задачи не отвечают действительности. Основная задача электростатики такова: в воздушном пространстве, в котором зарядов нет, для электростатического потенциала имеет место уравнение Лапласа

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = -\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\Delta\varphi = 0. \quad (80)$$

На поверхности  $S_i$  каждого из проводников  $\varphi$  должно принимать постоянное значение

$$\varphi = \varphi_i = \text{const}. \quad (80a)$$

Это же значение должно сохраняться и внутри проводника, так как здесь должен обращаться в нуль градиент потенциала. Для каждого из проводников наперед заданным является либо это значение потенциала, либо его общий заряд

$$e_i = \int \sigma_i dS_i = -\frac{1}{4\pi} \int dS_i \frac{\partial\varphi}{\partial n_i}, \quad (80b)$$

а искомым является соответствующее решение лапласовского уравнения; если это решение известно с точностью до аддитивной постоянной, то электрическое поле однозначно определяется градиентом  $\varphi$ . Определенное таким образом поле есть поле действительно электростатическое; соответствующее распределение зарядов действительно имеет место в случае равновесия.



То, что эти уравнения действительно определяют поле однозначно, следует опять из теоремы Грина, которая в применении к пространству, ограниченному поверхностью металла, гласит:

$$\int \int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = - \int \int \int |\text{grad } \varphi|^2 dv.$$

Допустим, что имеются два решения задачи  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ ; тогда для функции  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$  на всяком элементе поверхности  $dS$  или  $\varphi = 0$  или  $\int \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = 0$ . Тем самым во всем пространстве  $|\text{grad } \varphi| = 0$ , а это значит, что  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  могут различаться разве на аддитивную постоянную, что может иметь место в том случае, когда для каждого проводника задан заряд  $e_i$ . Но если хоть для одного из проводников задан самый потенциал  $\varphi$ , то тем самым всюду определена и абсолютная величина потенциала.

**§ 26. Емкость шарового и плоского конденсаторов.** Электростатическая задача решена лишь для немногих случаев. Простейшим является заряженный металлический шар. Пусть  $e$  — заряд шара,  $a$  — его радиус; в силу симметрии надо считать распределение заряда равномерным, так что поверхностная плотность электричества будет

$$\sigma = \frac{e}{4\pi a^2}.$$

Уравнения (77) и (79), дающие связь между зарядом и потоком сил, будут удовлетворены, если через все поверхности, концентрические с поверхностью проводника, проходит поток сил  $4\pi e$ , и если, значит, радиальная напряженность  $E$  равна

$$E_r = \frac{e}{r^2}.$$

Потенциал этого безвихревого поля

$$\varphi = \frac{e}{r} + k;$$

на самом шаре он имеет постоянное значение

$$\varphi_a = \frac{e}{a} + k.$$

Чтобы получить физически возможное электростатическое поле, мы должны указать, где оканчивается поток сил, исходящий из шара. Предположим, что шаровая поверхность концентрически окружена второй шаровой металлической поверхностью с внутренним радиусом  $b$ , и что на ней находится отрицательное электричество; так как заряд  $-e$  распределен по шару равномерно, то поверхностная плотность составляет

$$\sigma = -\frac{e}{4\pi b^2};$$

потенциал для  $r = b$  имеет значение

$$\varphi_b = \frac{e}{b} + k.$$

Такая система носит название шарового конденсатора; „емкостью“ конденсатора называют частное от деления положительного заряда  $e$  на разность потенциалов  $\varphi_a - \varphi_b$  положительно и отрицательно заряженных проводников. Эта разность равна

$$\varphi_a - \varphi_b = e \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = e \frac{b-a}{ab},$$

откуда емкость

$$C = \frac{e}{\varphi_a - \varphi_b} = \frac{ab}{b-a}. \quad (81)$$

Уменьшая расстояние  $(b-a)$  между шаровыми поверхностями, можно достигнуть весьма больших величин емкости. Если иногда говорят о емкости уединенного шара, то полагают, что другой шар, имеющий противоположный заряд, находится на очень большом расстоянии; в этом случае емкость шара равна его радиусу  $a$ . В лабораторных опытах общий электрический заряд в поле всегда равен нулю. В каждом случае надо поэтому указывать, где находится соответствующий заряд противоположного знака, т. е., другими словами, где оканчивается поток сил, исходящий из шара. В лабораторных опытах поток сил оканчивается на стенах комнаты или на поверхности проводников, имеющих в комнате. Если последние находятся на расстоянии, которое велико по сравнению с радиусом шара, то емкость шара практически равна его радиусу.

Плоский конденсатор состоит из двух плоских и расположенных параллельно металлических пластинок, взаимное расстояние которых  $d$  мало по сравнению с радиальными размерами пластинок. Если пренебречь расхождением силовых линий вблизи края, то мы имеем между пластинками однородное поле

$$|E| = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d},$$

вследствие чего поверхностная плотность электричества составляет

$$4\pi\sigma = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d}.$$

Таким образом мы получаем для емкости плоского конденсатора, у которого расстояние между пластинками равно  $d$ , а поверхность пластины  $S$ :

$$C = \frac{S}{4\pi d}.$$

Эта формула уже содержится, как частный случай, в (81), а именно: если радиусы шаров  $a$  и  $b$  становятся почти равными, то шаровой конденсатор можно рассматривать как плоский конденсатор с расстоянием между пластинками  $b-a = d$  и поверхностью пластинки  $S = 4\pi ab$ .

**§ 27. Вытянутый эллипсоид вращения.** Рассмотрим теперь проводящий вытянутый эллипсоид вращения, который заряжен электричеством; спрашивается, каково его поле, и какое значение имеет его емкость. Если говорят о емкости эллипсоида, как такового, то предпо-

лагается, что концы силовых линий потока, исходящего из поверхности, находятся на очень большом расстоянии, — скажем, на шаровой поверхности, концентричной с эллипсоидом. Математически надо задачу формулировать следующим образом (§ 25): внутри пространства, ограниченного двумя проводниками, потенциал  $\varphi$  должен удовлетворять уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0; \quad (82)$$

на поверхностях проводников  $S_1$  и  $S_2$  он принимает постоянные значения

$$\varphi = \varphi_1, \quad \varphi = \varphi_2; \quad (82a)$$

градиент  $\varphi$  направлен нормально к этим поверхностям и согласно (79) пропорционален поверхностной плотности  $\sigma$

$$4\pi\sigma = -\frac{\partial\varphi}{\partial n}.$$

При этом  $\sigma$  остается пока до известной степени произвольной; задан только общий заряд

$$e = \int dS_1\sigma_1 = -\frac{1}{4\pi} \int dS_1 \frac{\partial\varphi}{\partial n_1} = +\frac{1}{4\pi} \int dS_2 \frac{\partial\varphi}{\partial n_2}. \quad (82b)$$

В большинстве случаев важно знать не столько распределение электричества, как значение емкости; это значение будет известно, если мы найдем потенциалы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  обоих проводников; тогда емкость равна

$$C = \frac{e}{\varphi_1 - \varphi_2}. \quad (82c)$$

Так как не существует общего метода решения основной задачи электростатики для любой формы проводника, то мы найдем емкость вытянутого эллипсоида вращения особым путем, применимым только для этой специальной формы проводника. Воспользуемся нашей гидродинамической аналогией и представим себе, что на прямой, соединяющей фокусы эллипсоида, равномерно расположены источники. Мы покажем, что эквипотенциальными поверхностями соответствующего безвихревого поля являются конфокальные эллипсоиды вращения, и что это поле обладает и остальными требуемыми свойствами.

Положим отдачу всего отрезка длины  $2c$  равной  $e$ . Если  $r$  есть расстояние точки наблюдения от точек линий источников, то потенциал

$$\varphi = \frac{e}{2c} \int_{-c}^{+c} \frac{d\zeta}{r}$$

представляет решение лапласовского уравнения (82). Отложим ось  $z$  вдоль линии источников, а начало координат поместим в среднюю точку этой линии, так что

$$r = \sqrt{(z - \zeta)^2 + x^2 + y^2},$$

и мы получаем

$$\varphi = -\frac{e}{2c} \left\{ \ln(z - \zeta + r) \right\}_{\zeta=-c}^{\zeta=+c} = \frac{e}{2c} \ln \left( \frac{z+c+r_1}{z-c+r_2} \right), \quad (83)$$

где  $r_1$  и  $r_2$  суть расстояния точки наблюдения от конечных точек линии источников, характеризуемых  $\zeta = -c$ ,  $\zeta = +c$ .

Если положить сокращенно (рис. 27)

$$\begin{aligned} z + c &= z_1 \\ z - c &= z_2, \end{aligned}$$

то для эквипотенциальной поверхности, согласно (83),

$$\frac{z_1 + r_1}{z_2 + r_2} = k = \text{const.}$$

должно быть постоянным, или

$$z_1 + r_1 = k(z_2 + r_2). \quad (83a)$$

Если разделить это уравнение на соотношение, получающееся из теоремы Пифагора

$$r_1^2 - z_1^2 = r_2^2 - z_2^2 = h^2,$$

то мы имеем

$$\frac{1}{r_1 - z_1} = \frac{k}{r_2 - z_2}$$

или

$$k(r_1 - z_1) = r_2 - z_2.$$

Вычтем из этого уравнения (83a); тогда, располагая отдельные члены в другом порядке, получим:

$$\begin{aligned} (k-1)(r_1 + r_2) &= \\ &= (k+1)(z_1 - z_2) = (k+1)2c. \end{aligned}$$

Рис. 27. К вычислению потенциала заряженного отрезка длины  $2c$ .

Сумма расстояний всякой точки от двух постоянных точек 1 и 2

$$r_1 + r_2 = 2c \frac{k+1}{k-1}$$

оказывается для эквипотенциальной поверхности постоянной; это значит, что эти поверхности суть эллипсоиды вращения с большими осями

$$2a = r_1 + r_2 = 2c \frac{k+1}{k-1}.$$

На очень больших расстояниях ( $a \rightarrow \infty$ )  $k$  становится равной 1;  $\ln k$ , а также  $\varphi = 0$ . Потенциал на поверхности шара, находящегося на очень большом расстоянии, равен нулю. Если представить себе, что один вытянутый эллипсоид из вышеуказанного семейства является проводящим, то поле в пространстве, ограниченном с одной стороны этой поверхностью, а с другой стороны — очень удаленной сферой, удовлетворяет всем условиям электростатической задачи. Поле является здесь безвихревым; источников в нем нет; общий поток сил, исходящий из этого эллипсоида, равен отдаче линии источников; наконец, обе проводящие поверхности, ограничивающие поле, суть эквипотенциальные поверхности. Поэтому условия (82), (82a), (82b) выполнены. Так как,

согласно § 25, эти условия определяют электростатическое поле однозначно, то  $\varphi$  есть потенциал искомого поля.

Из уравнения для  $2a$  получается

$$k = \frac{a+c}{a-c};$$

если подставить это значение в (83), то получаем

$$\varphi_1 = \frac{e}{2c} \ln \left( \frac{a+c}{a-c} \right) = \frac{e}{\sqrt{a^2-b^2}} \ln \left( \frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b} \right); \quad (83b)$$

так как, кроме того, для очень удаленной сферы (для  $a = \infty$ )

$$\varphi_2 = 0,$$

то емкость  $C$  вытянутого эллипсоида вращения определяется выражением

$$\frac{1}{C} = \frac{\varphi_1}{e} = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \cdot \ln \left( \frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b} \right). \quad (83c)$$

Для очень вытянутых эллипсоидов, т. е. для малых значений частного  $b : a$ , получаем

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{a} \cdot \ln \left( \frac{2a}{b} \right). \quad (83d)$$

Емкость такого стержнеобразного проводника, который можно, например, осуществить при помощи проволоки с круговым поперечным сечением, уменьшающимся к концам, получается тем меньше, чем меньше толщина при заданной длине. Распределение электричества в этом предельном случае повторяет равномерное покрытие отрезка, соединяющего фокусы, как это было предположено нами выше для вывода потенциала. Электричество распределяется поэтому на стержнеобразном проводнике таким образом, что на равных длинах проволоки находятся равные заряды.

**§ 28. Точечный заряд вблизи проводящей плоскости.** Представим себе поле, ограниченное с одной стороны бесконечной плоскостью, образующей поверхность некоторого проводника. Предположим далее, что на расстоянии  $a$  от этой плоскости в точке  $A$  находится малое заряженное тело с количеством электричества  $e$ . Размеры тела должны быть настолько малы, чтобы можно было его электрическое поле, когда нет проводящей плоскости, вывести из потенциала

$$\varphi = \frac{e}{r}.$$

Спрашивается теперь, как влияет на поле проводящая пограничная плоскость. Вышеуказанный потенциал очевидно отнюдь не удовлетворяет условию постоянства на проводящей плоскости. Но можно получить поле, для которого эта плоскость будет являться эквипотенциальной поверхностью, если представить себе, что мы имеем в точке  $B$  зеркальное изображение точки  $A$ , и предположить, что в этой точке

изображения находится противоположный заряд  $e' = -e$  (рис. 28). Если  $r'$  — расстояние точки наблюдения от изображения, то

$$\varphi = \frac{e}{r} - \frac{e}{r'} \quad (84)$$

представляет потенциал общего поля в рассматриваемой части пространства. Этот потенциал на пограничной плоскости равен нулю, так как здесь  $r = r'$ . Безвихревое поле с той стороны плоскости, где лежит точка  $A$ , не имеет источников, за исключением самой точки  $A$ ; из нее исходит поток сил  $4\pi e$ .

На пограничной плоскости электрическая напряженность направлена к ней нормально и равна

$$\mathbf{E}_n = -\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -e \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} + e \frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial n} = -\frac{2ae}{r^3};$$

поверхностная плотность, пропорциональная ей согласно (79), будет

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} \mathbf{E}_n = -\frac{e}{2\pi} \cdot \frac{a}{r^3}. \quad (84a)$$

Электричество распределяется следовательно на плоской поверхности проводника таким образом, что поверхностная плотность обратно пропорциональна третьей степени расстояния от точечного источника. Общий заряд плоскости

$$\int \sigma dS = -\frac{e}{2\pi} \int \frac{a dS}{r^3}$$

Рис. 28. Вид силовых линий при системе: точечный заряд вблизи проводящей плоскости.

можно вычислить, вводя полярные координаты  $\varrho$ ,  $\vartheta$ :

$$\int \sigma dS = -\frac{e}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\infty} \frac{a\varrho d\varrho}{(a^2 + \varrho^2)^{\frac{3}{2}}} = +e \left\{ \frac{a}{(a^2 + \varrho^2)^{\frac{1}{2}}} \right\}_{\varrho=0}^{\infty} = -e.$$

Следовательно, весь поток сил, начинающийся в точке  $A$ , оканчивается на плоской поверхности проводника. Напряженность, которую создает этот поверхностно распределенный заряд проводника, в том месте, где помещается заряд  $e$ , тождественна с напряженностью, вызываемой изображением  $e' = -e$ . Таким образом на  $e$  действует сила „изображения“  $\frac{e^2}{(2a)^2}$ .

Явление, заключающееся в том, что электрически заряженное тело вызывает на внешней поверхности соседнего первоначально незаряженного проводника заряд противоположного знака, называют электрической индукцией. Это явление нужно понимать как следствие того, что поле не может проникнуть внутрь проводника. Если проводник — конечного размера и не соединен проводниками с другими телами, то, так как его заряд остается в общем равным нулю, поток

сил, оканчивающийся на стороне, ближайшей к индуцирующей точке, должен опять выйти с другой стороны проводника. В рассмотренном выше случае бесконечно протяженного проводника, ограничивающего поле с одной стороны, нужно считать, что заряд  $+e$ , возникающий при приближении индуцирующей точки одновременно с индуцированным зарядом  $-e$ , удаляется в бесконечность.

Если вблизи заряженного проводника поместить точечный заряд, — например, заряд пробного тела для исследования поля, — то его поле, на которое в свою очередь влияет присутствие проводника, налагается на первоначальное поле проводника. Поэтому сила, действующая на пробное тело, не будет соответствовать первоначальному распределению электричества по проводнику, но будет отвечать распределению по проводнику, измененному под влиянием пробного тела. В этом случае сила уже не будет являться точной мерой первоначально господствовавшего поля. Отступление будет тем больше, чем больше заряд пробного тела, и чем ближе оно находится к поверхности проводника. В непосредственном соседстве поверхности проводника данное в § 22 определение вектора  $\mathbf{E}$  через заряд пробного тела будет верно только тогда, когда заряд последнего можно сделать сколь угодно малым. Строго говоря, вектор  $\mathbf{E}$  определяется лишь предельным значением частного от силы, деленной на заряд  $e$ , когда последний непрерывно уменьшается.

**§ 29. Точечный заряд и шаровой проводник.** Прежде чем перейти к задаче, об индуктивном заряде проводящего шара, рассмотрим следующую задачу.

Даны на определенном расстоянии два заряда  $e_1$  и  $-e_2$ . Ищется поверхность, на которой потенциал

$$\varphi = \frac{e_1}{r_1} - \frac{e_2}{r_2}$$

равен нулю.

Пусть  $e_2$  будет заряд, меньший по абсолютному значению.

Поместим начало полярной системы координат  $R, \vartheta$  в точку, лежащую на продолжении соединительной линии  $e_1 \rightarrow e_2$ , за  $-e_2$ , и обозначим его расстояния от двух зарядов через  $p_1$  и  $p_2$  (рис. 29). Тогда

$$r_1^2 = R^2 + p_1^2 - 2Rp_1 \cos \vartheta$$

$$r_2^2 = R^2 + p_2^2 - 2Rp_2 \cos \vartheta.$$

Потенциал, следовательно, равен нулю, если

$$\frac{e_1^2}{e_2^2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{p_1}{p_2} \cdot \frac{\frac{R^2}{p_1} + p_1 - 2R \cos \vartheta}{\frac{R^2}{p_2} + p_2 - 2R \cos \vartheta}.$$

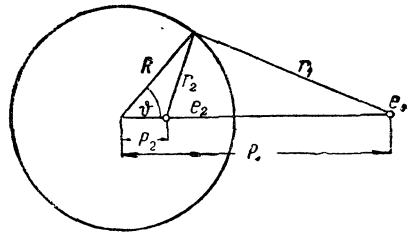


Рис. 29. Место нулевого потенциала при двух зарядах противоположных знаков.

Отсюда видно что это условие выполняется для всех  $\vartheta$ , если, во-первых,

$$R^2 = p_1 p_2$$

и, во-вторых,

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{e_1^2}{e_2^2}.$$

Потенциал равен нулю на шаре, центр которого делит отрезок прямой, соединяющей оба точечные заряда, извне в отношении квадратов зарядов, и по отношению к которому оба заряда находятся в сопряженных точках.

*Точечный заряд и металлический шар.* Пусть заряд  $e$  находится на расстоянии  $p$  от центра некоторого проводящего шара с радиусом  $R$ . Предположим, что сначала потенциал шара <sup>116</sup>держится на нуле (при помощи проводящего соединения с землей). Рис. 29 позволяет нам сразу же написать решение: именно, если представить себе, что шар удален и заменен на расстоянии

$$p' = \frac{R^2}{p}$$

от его центра точечным зарядом

$$-e' = -e \cdot \sqrt{\frac{p'}{p}} = -e \cdot \frac{R}{p},$$

то этот последний, совместно с данным точечным зарядом, создает поле, потенциал которого как раз на месте первоначальной шаровой поверхности всюду равен нулю; вне указанной поверхности в поле имеется только источник  $e$ . Потенциал вне заземленного шара определяется следовательно через

$$\varphi = \frac{e}{r} - \frac{e'}{r_1}.$$

Если, напротив, шар изолирован и до приближения точечного источника не был заряжен, то, естественно, что он остается и далее незаряженным. Для описания его поля мы должны, следовательно, предполагать, что во внутрь его помещен заряд  $+e'$ , и притом таким образом, что постоянство потенциала на поверхности от этого не нарушается; другими словами, мы предполагаем заряд  $+e'$  в центре шара. Потенциал всей системы: „точечный заряд  $e$  и изолированный незаряженный шар“ равен:

$$\varphi = \frac{e}{r} - \frac{e'}{r_1} + \frac{e'}{r_0},$$

где  $r_0$  означает расстояние точки наблюдения от центра (рис. 30). На внешней поверхности шара потенциал будет теперь  $\frac{e'}{R} = \frac{e}{p}$ , т. е. тот же самый, который существовал на месте центра шара, когда последний отсутствовал.



Интересно теперь отодвигать точечный заряд  $e$  в бесконечность, одновременно усиливая его таким образом, что создаваемое им поле

$$|E_0| = \frac{e}{p^2}$$

все время сохраняет конечное значение. При таком процессе точка изображения  $-e'$  сдвигается в центр шара, но таким образом, что

$$e' \cdot p' = e \cdot \frac{R^3}{p^2}$$

сохраняет конечное значение  $|E_0| \cdot R^3$ . Мы имеем следовательно в центре шара двойной источник или, как говорят, электрический диполь, который в векторной форме дается уравнением

$$m = E_0 R^3.$$

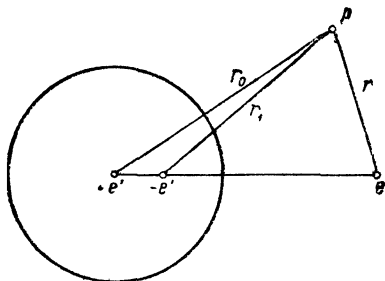


Рис. 30. Поляризация изолированного металлического шара под влиянием заряда.

Поле  $E_0$  бесконечно далекого и бесконечно сильного точечного заряда в пространстве, окружающем шар, естественно является однородным: проводящий изолированный шар радиуса  $R$  поляризуется однородным электрическим полем таким образом, что заряд его внешней поверхности действует наружу как диполь момента  $E_0 R^3$ , помещенный в центре шара.

## II. ДИЭЛЕКТРИКИ.

**§ 30. Плоский конденсатор с диэлектрическим промежуточным слоем.** До сих пор мы ограничивались электрическим полем в пустоте. Если мы при этом говорили иногда о поле в воздухе, то это было не вполне точно, но в большинстве случаев, как мы сейчас же увидим дальше, не влекло за собой заметной ошибки. Теперь же мы подчеркиваем, что формулы предыдущей главы относятся к пустоте и к металлам, граничащим с пустотой.

Фарадей сделал основное открытие, состоящее в том, что емкость конденсатора изменяется, если пространство между его обкладками заполнить изолятором — например, стеклом, серой или керосином. При этом емкость при введении всех известных веществ повышается. Коэффициент  $\epsilon$ , на который умножается при этом  $C$ , является постоянной, характерной для заполняющего вещества. Он называется диэлектрической постоянной соответствующего материала. Следовательно, согласно § 26, теперь получается для

шарового конденсатора . . . . .  $C = \epsilon \frac{ab}{b-a}$

плоского конденсатора . . . . .  $C = \epsilon \frac{S}{4\pi d}$ .

Примеры некоторых численных значений  $\epsilon$ :

воздуха . . . . .	1,0006	фарфора . . . . .	5
сернистого ангидрида . . . . .	1,01	алкоголя . . . . .	26
керосина . . . . .	2,0	воды . . . . .	81
стекла . . . . .	от 5 до 7		

Согласно определению,  $\epsilon$  имеет для пустоты значение единицы. Вместо слова: „пустота“ мы будем употреблять иногда также исторический термин „эфир“. Однако мы отнюдь не связываем с этим названием представления о каком-либо гипотетическом веществе; мы просто будем пользоваться этим словом, когда будем говорить о пространстве как носителе электромагнитного поля.

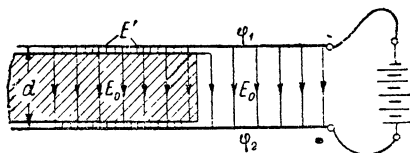


Рис. 31. Вдвигание диэлектрика в плоский конденсатор.

Остановимся сначала на примере плоского конденсатора и, исходя из него, постараемся создать себе ясное представление о сущности фарадеевского открытия.

Пусть две обкладки конденсатора, находящиеся на расстоянии  $d$  друг от друга и имеющие поверхность  $S$ , поддерживаются при постоянной разности потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2$  (например, с помощью гальванического элемента). Тогда в пустоте между пластинками поле  $|\mathbf{E}_0| = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d}$  (направленное на рис. 31 сверху вниз) будет всюду постоянным, и соответственно этому поверхностная плотность электрического заряда  $\sigma_0$  на пластинках определяется уравнением:

$$4\pi\sigma_0 = |\mathbf{E}_0| = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d}.$$

Если теперь поместить в конденсатор изолирующую пластинку толщины  $d$  и с диэлектрической постоянной  $\epsilon$ , то в той части конденсатора, которая заполнена веществом, мы имеем другую поверхностную плотность заряда, а именно

$$4\pi\sigma = \epsilon |\mathbf{E}_0| = \epsilon \cdot \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d}.$$

Вследствие этого при вдвигании пластинки в конденсатор на каждый квадратный сантиметр, покрытый изолятором, гальванический элемент должен добавочно дать количество электричества, равное

$$\sigma - \sigma_0 = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} |\mathbf{E}_0|;$$

что это действительно имеет место, можно доказать с помощью включенного по пути амперметра. Для удачи этого опыта совсем не нужно, чтобы стеклянная пластинка и обкладки касались друг друга. То же произойдет и при существовании узкого промежутка между металлом и изолятором, если только высота этого промежутка мала по сравнению с расстоянием пластинок  $d$ . Так как, согласно опыту, такой пустой промежуток не влияет на емкость, а следовательно и на поверх-

ностную плотность заряда, то в этом промежутке напряженность электрического поля будет иметь значение

$$4\pi\sigma = |\mathbf{E}'| = \varepsilon \cdot |\mathbf{E}_0|,$$

ибо ведь теперь поверхность металла граничит с пустотой. Наоборот, внутри изолятора должна, как и раньше, существовать напряженность  $\mathbf{E}_0$ , так как интеграл по контуру  $\int \mathbf{E}_s ds$ , взятый в пределах от одной обкладки до другой, должен попрежнему иметь значение  $\varphi_1 - \varphi_2$ . Следовательно, если мы переходим от промежутка внутри изолятора, то напряженность  $\mathbf{E}$  претерпевает скачок с  $\varepsilon\mathbf{E}_0$  на  $\mathbf{E}_0$ . Но скачок нормальной составляющей напряженности всегда равнозначен наличию распределенного по поверхности заряда. Поэтому влияние изолятора на электрическое поле таково, как если бы его внешняя поверхность имела заряд с поверхностной плотностью  $\sigma'$ , где

$$4\pi\sigma' = (\varepsilon - 1)(\mathbf{E}_0 n).$$

Здесь  $\mathbf{E}_0$  означает, следовательно, напряженность в изоляторе,  $n$  — нормаль, направленную от изолятора наружу.

**§ 31. Диэлектрическая поляризация.** Свойство изолятора, остающегося как целое незаряженным, влиять подобным образом на поле, мы называем поляризуемостью. Он „поляризован“ электрическим полем  $\mathbf{E}_0$ . Чтобы понять это свойство, мы должны сделать предположение, что всякое материальное тело содержит положительное и отрицательное электричества (заряды), притом каждого сорта поровну, если тело электрически нейтрально. У проводника по крайней мере один из сортов является подвижным (электроны у металла, ионы у электролита); наоборот, у изолятора оба сорта связаны квази-упруго, и притом так, что под влиянием электрического поля заряды могут немного смещаться: положительные — в направлении поля, или отрицательные — в противоположном направлении, или оба одновременно, каждый в свою сторону; это движение прекращается, когда смещение достигло известной величины, пропорциональной силе поля. При устранении поля смещение исчезает. Это взаимное смещение зарядов мы называем поляризацией; мы измеряем последнюю вектором  $\mathbf{P}$ , который определяем следующим образом: возьмем не поляризованный материал; выберем в нем произвольное направление  $\mathbf{s}$  и нормально к нему элемент поверхности  $dS$ . Если теперь материал испытает поляризацию, то общее количество электричества, проходящее при этом через  $dS$  в направлении  $\mathbf{s}$ , равно произведению составляющей  $\mathbf{P}$  по направлению  $\mathbf{s}$  на величину поверхности  $dS$ .

Мы говорим, что тело поляризовано однородно, если в нем  $\mathbf{P}$  имеет всюду одинаковое значение. Избыточные заряды очевидно могут появляться в ограниченном объеме  $v$  тела при поляризации только тогда, когда интеграл, взятый по поверхности этого объема:

$$e' = - \int_S \mathbf{P}_n dS,$$

имеет значение, отличное от нуля, причем  $\mathbf{n}$  есть внешняя нормаль. В самом деле,  $-\mathbf{P}_n dS$  есть как раз заряд, смещаемый при этом через  $dS$  в  $v$ . По теореме Гаусса

$$\rho' dv = -\operatorname{div} \mathbf{P} dv$$

есть следовательно заряд, появляющийся в элементе объема  $dv$  вследствие поляризации.

Таким образом при однородной поляризации внутри никаких зарядов появиться не может. Напротив того, на поверхности тела появляется электричество в виде распределенных по ней зарядов. В самом деле, рассмотрим плоский цилиндр, с площадью основания  $dS$ , у которого одно из оснований лежит целиком в пустоте, а другое — целиком в теле, которое мы будем подвергать поляризации; тогда при поляризации  $\mathbf{P}$  в этот цилиндр войдет заряд

$$\sigma' dS = \mathbf{P}_n dS.$$

Внешняя поверхность поляризованного тела имеет следовательно поверхностный заряд плотностью  $\sigma'$ , равной  $\mathbf{P}_n$ .

К тем же формулам для  $\rho$  и  $\omega'$  можно прийти следующим образом. Представим себе, что диэлектрик разделен на малые цилиндрические элементы объема  $dv = dS \cdot h$ , площади основания которых  $dS$  нормальны к  $\mathbf{P}$ . При поляризации  $dv$  возникает электрический диполь с моментом

$$\mathbf{m} = \mathbf{P} dv.$$

В самом деле, на основаниях цилиндра появляются заряды  $\pm |\mathbf{P}| \cdot dS$ , которые находятся на расстоянии  $h$  и тем самым вызывают момент  $|\mathbf{P}| \cdot dS \cdot h$ . Потенциал  $\varphi'$ , вызываемый диполем в точке наблюдения на расстоянии  $r$ , согласно (52') дается выражением  $(m \cdot \operatorname{grad}_q \frac{1}{r})$ ; общий потенциал, образуемый поляризованным телом, будет следовательно

$$\varphi' = \iiint (\mathbf{P} \cdot \operatorname{grad}_q \frac{1}{r}) dv.$$

Но так как

$$\operatorname{div} \left( \frac{\mathbf{P}}{r} \right) = \frac{1}{r} \operatorname{div} \mathbf{P} + \left( \mathbf{P} \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right),$$

то, пользуясь теоремой Гаусса, мы получаем

$$\varphi' = \iint \frac{\mathbf{P}_n dS}{r} \iiint \frac{\operatorname{div} \mathbf{P}}{r} dv.$$

Это уравнение выражает собой не что иное, как то, что изолятор имеет на себе с одной стороны поверхностный заряд с поверхностной плотностью  $\sigma' = \mathbf{P}_n$ , а с другой — заряд, распределенный по объему с объемной плотностью  $\rho' = -\operatorname{div} \mathbf{P}$ .

Мы имеем, следовательно, два вполне равнозначные определения  $\mathbf{P}$ : либо как электрического момента единицы объема, либо как величины заряда, проходящего через единицу поверхности, ориентированной нормально к  $\mathbf{P}$ .

В рассмотренном выше случае плоского конденсатора (рис. 31) мы имеем дело с однородной поляризацией вдвинутой пластинки, причем вектор  $\mathbf{P}$  направлен снизу вверх и по своей величине дается свободным зарядом, появляющимся на внешней поверхности пластинки

$$\sigma' = \mathbf{P} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \mathbf{E}. \quad (85)$$

Таким образом с помощью диэлектрической постоянной  $\varepsilon$  установлена численная связь между векторами  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{E}$ . Стоящий в (85) множитель пропорциональности

$$\frac{\varepsilon - 1}{4\pi} = \chi$$

называют коэффициентом электризации соответствующего материала.

**§ 32. Максвелловский вектор смещения  $\mathbf{D}$ .** Следствием пространственных зарядов  $\rho'$  и поверхностных зарядов  $\omega'$ , появляющихся при поляризации, является соответствующее расхождение силы поля

$$\left. \begin{aligned} \text{и} \quad \text{div } \mathbf{E} &= 4\pi\rho' = -4\pi \text{ div } \mathbf{P} \\ - (E_{n1} + E_{n2}) &= 4\pi\sigma' = 4\pi (\mathbf{P}_{n1} + \mathbf{P}_{n2}). \end{aligned} \right\} \quad (85a)$$

Но эти уравнения выражают собой следующее: поле вектора  $\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$  в изоляторе не имеет источников. Его нормальная составляющая не претерпевает никакого скачка на границе двух изоляторов.

Введем для этого вектора особое обозначение: „электрическое смещение“ (displacement у Максвелла)

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}, \quad (86)$$

который характеризуется, следовательно, следующими свойствами:

- 1) Внутри незаряженного изолятора всюду  $\text{div } \mathbf{D} = 0$ .
- 2) На границе двух изоляторов нормальная составляющая везде непрерывна.

Положение 2 есть конечно по существу лишь следствие положения 1, так как поведение на пограничной поверхности всегда можно вывести путем допущения непрерывного перехода от одного изолятора в другой и подходящим предельным переходом, принимая также во внимание, что  $\text{div } \mathbf{D} = 0$ .

С введением вектора  $\mathbf{D}$  тесно связано понятие об истинных и свободных зарядах, которые играли большую роль в прежних курсах электродинамики. Свободные заряды определяются как источники  $\mathbf{E}$ , а истинные заряды — как источники  $\mathbf{D}$ . Если в однородный диэлектрик поместить металлический изолированный шар с зарядом  $e$ , то этот заряд частично компенсируется поверхностной плотностью  $\sigma' = \mathbf{P}_n$  граничащего с шаром диэлектрика, так что источником  $\mathbf{E}$  является лишь свободный заряд  $\frac{e}{\varepsilon}$ . Напротив, истинный заряд остается при этом неизменным, ибо, согласно его определению, его можно получить из свободного заряда вычитанием пространственных зарядов  $\rho'$  и поверхностных  $\sigma'$ , возникающих при поляризации. Если

в последующем будет говориться просто о зарядах то всегда будут подразумеваться истинные заряды, т. е. источники  $\mathbf{D}$ . Из этих положений следует:

3) При наличии истинных зарядов (это будут, значит, заряды на металлических частях или заряды, введенные как-нибудь в изолятор) интеграл по поверхности  $\frac{1}{4\pi} \int \mathbf{D}_n dS$  дает общий заряд, содержащийся в объеме. В частности, поверхностная плотность заряда  $\sigma$  на металле, граничащем с изолятором, дается нормальной составляющей  $\mathbf{D}$

$$4\pi\sigma = \mathbf{D}_n. \quad (87)$$

Для плотности заряда, распределенного в объеме, имеем

$$4\pi\rho = \text{div } \mathbf{D}. \quad (87a)$$

4) В изотропном изоляторе согласно (85) и (86)

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (88)$$

где  $\varepsilon$  может быть какой угодно функцией координат, а напряженность электрического поля  $\mathbf{E}$  всюду свободна от вихрей в областях непрерывности:

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi; \quad (89)$$

тангенциальные составляющие  $\mathbf{E}$  непрерывны на поверхностях разрыва  $\varepsilon$ .

В некоторых курсах вектор  $\mathbf{D}$  определяют сразу по формуле (88). Отметим поэтому, что такое определение носит гораздо более частный характер, чем данное в (86). Оно справедливо только тогда, когда поляризация  $\mathbf{P}$  пропорциональна силе поля  $\mathbf{E}$ . Оно неприменимо для случая кристаллических сред. У кристаллов направление  $\mathbf{P}$  в общем отлично от направления  $\mathbf{E}$ . На место скалярной диэлектрической постоянной  $\varepsilon$  выступает здесь тензор  $\varepsilon_{ik}$ :

$$\mathbf{D}_i = \sum_k \varepsilon_{ik} \mathbf{E}_k. \quad (i, k = x, y, z)$$

Рис. 32. Преломление силовых линий на границе двух диэлектриков.

$$\text{tg } \alpha_1 : \text{tg } \alpha_2 = \varepsilon_1 : \varepsilon_2.$$

Но все же здесь существует еще линейная связь между  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$ . Позднее мы увидим, что в случае ферромагнетизма, при вполне аналогичном соотношении между магнитной индукцией  $\mathbf{B}$  и напряженностью магнитного поля  $\mathbf{H}$ , о такой связи уже не может быть речи. Напротив, соотношение (86) можно непосредственно перенести и на этот случай.

Следствием пограничных условий (непрерывность нормальных составляющих  $\mathbf{D}$  и тангенциальных составляющих  $\mathbf{E}$ ), имеющих место на границе двух изоляторов, является своеобразный закон преломле-

ния силовых линий: если  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — углы между силовой линией и нормалью с двух сторон поверхности разрыва, то из

$$|\mathbf{D}_1| \cos \alpha_1 = |\mathbf{D}_2| \cos \alpha_2$$

и

$$|\mathbf{E}_1| \sin \alpha_1 = |\mathbf{E}_2| \sin \alpha_2$$

в соединении с (88) прямо следует

$$\operatorname{tg} \alpha_1 : \operatorname{tg} \alpha_2 = \varepsilon_1 : \varepsilon_2.$$

Следовательно при входе в изолятор с большим  $\varepsilon$  силовые линии удаляются от нормали (рис. 32).

**§ 33. Шаровой конденсатор. Диэлектрический слой бесконечной толщины.** 1. Предположим, что пространство между сферическими поверхностями некоторого конденсатора заполнено в виде концентрических слоев двумя различными средами с диэлектрическими постоянными  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ . Пусть  $a$  и  $c$  — радиусы внутреннего и внешнего шаров,  $b$  — радиус сферы раздела между  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ ,  $+e$  и  $-e$  — заряды внутреннего и наружного шаров (рис. 33).

Тогда всюду между  $a$  и  $c$

$$\mathbf{D}_r = \frac{e}{r^2};$$

при этом от  $a$  до  $b$ :

$$\mathbf{E}_r = + \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{e}{r^2};$$

от  $b$  до  $c$ :

$$\mathbf{E}_r = \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{e}{r^2}.$$

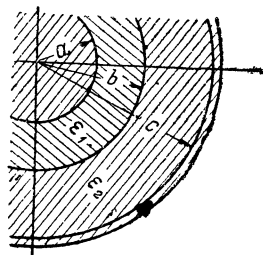


Рис. 33. Шаровой конденсатор с концентрическими слоями диэлектриков.

Тем самым разность потенциалов между  $a$  и  $c$  становится равной

$$\varphi_a - \varphi_c = \int_a^c \mathbf{E}_r dr = \frac{e}{\varepsilon_1} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + \frac{e}{\varepsilon_2} \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right).$$

Для емкости

$$C = \frac{e}{\varphi_a - \varphi_c},$$

откуда

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{\varepsilon_1 a} - \frac{1}{\varepsilon_2 c} + \frac{1}{b} \left( \frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right).$$

Случай шара с радиусом  $a$ , окруженного диэлектрической оболочкой радиуса  $b$ , характеризуется тем, что  $\varepsilon_2 = 1$ ,  $c = \infty$ . Тогда

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{\varepsilon_1 a} \left[ 1 + \frac{a}{b} (\varepsilon_1 - 1) \right].$$

Если  $b$  становится велико по сравнению с  $a$  ( $\varepsilon_1 - 1$ ), оболочка практически действует так, как если бы шар находился в бесконечно протяженном пространстве с диэлектрической постоянной  $\varepsilon_1$ .

2. Точечный заряд около плоской границы диэлектрического слоя бесконечной толщины.

Представим себе, что в воздухе и на расстоянии  $a$  от плоской поверхности некоторого диэлектрика находится точечный заряд  $A$ ; спрашивается, какое влияние оказывает наличие диэлектрика.

Эта задача соответствует задаче, решенной в § 28 для проводящей плоскости. Но тогда нам нужно было рассматривать поле только в воздухе, так как по другую сторону плоскости раздела поля вообще не существовало. Теперь нужно будет принимать во внимание также поле внутри изолятора; будем считать, что изолятор заполняет все пространство за поверхностью раздела. Пусть диэлектрическая постоянная изолятора будет  $\varepsilon_2$ , воздуха —  $\varepsilon_1$ .

Попытаемся решить эту задачу по методу электрических изображений. Представим себе опять, что точке  $A$  по другую сторону плоской границы соответствует зеркальное изображение  $B$ . Обозначим через  $r$  и  $r'$  расстояния точки наблюдения от  $A$  и соответственно от его изображения  $B$ .

Потенциал в воздухе мы положим равным

$$\varphi_1 = \frac{e}{\varepsilon_1 r} - \frac{e'}{\varepsilon_1 r'}.$$

Поле в воздухе должно следовательно соответствовать истинному заряду  $e$  в  $A$  и воображаемому истинному заряду ( $-e'$ ) в  $B$ . Это допущение удовлетворяет основному условию, что в воздухе есть только один источник электрического смещения, а именно в точке  $A$ ; точка изображения  $B$  лежит вне этой части пространства.

Что касается поля внутри диэлектрика, то мы попробуем удовлетворить его допущением, что потенциал в диэлектрике равен

$$\varphi_2 = \frac{e''}{\varepsilon_2 r}.$$

Значит в изоляторе поле должно быть таково, как если бы изолятор простирался безгранично и в  $A$  находился истинный заряд  $e''$ . Это допущение соответствует условию, что внутри действительно заполненной диэлектриком части пространства не существует источников или стоков электрического смещения.

Можно показать, что указанное допущение действительно ведет к правильным заключениям о поле. Для этого докажем, что пограничные условия на плоскости раздела диэлектрика могут быть выполнены, если только распорядиться соответствующим образом величинами  $e'$ ,  $e''$ , которые оставались до сих пор неопределенными. Что касается нормальных составляющих  $D$ , то

$$D_{n_1} = +e \frac{a}{r^3} + e' \frac{a}{r'^3}, \quad D_{n_2} = -e'' \cdot \frac{a}{r^3},$$

где нормали  $n_1$ ,  $n_2$  считаются направленными у пограничной плоскости от точки заряда. Пограничное условие гласит: поверхностное расхождение  $D$  равно нулю; на пограничной плоскости  $r = r'$ ; следовательно это первое пограничное условие требует, чтобы

$$e + e' - e'' = 0.$$



С другой стороны, тангенциальные составляющие  $E$  с обеих сторон плоскости раздела должны иметь равные значения; это во всяком случае будет иметь место тогда, когда вдоль плоскости выполнено  $\varphi_1 = \varphi_2$ , ибо ведь  $E$  есть отрицательный градиент  $\varphi$ . Условие  $\varphi_1 = \varphi_2$  является не только достаточным, но также и необходимым, если только на поверхности изолятора нет двойных слоев свободного электричества. Мы требуем поэтому, во-вторых,

$$\frac{e - e'}{\varepsilon_1} = \frac{e''}{\varepsilon_2}.$$

Из этих двух уравнений, линейных относительно  $e$ ,  $e'$ ,  $e''$ , получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{e - e'}{e + e'} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}, \quad e' = e \cdot \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \\ e'' = e + e' = e \cdot \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}. \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

Этим определены воображаемые „истинные“ заряды  $(-e')$  в  $B$  и  $(+e'')$  в  $A$ . Внутри диэлектрика силовые линии идут таким образом, что они кажутся радиально исходящими из  $A$ , в воздухе же поле может быть представлено, как наложение двух полей, из которых одно создается точечным источником  $A$ , другое — точечным стоком  $B$ .

Если заменить диэлектрик проводником, то для того, чтобы определить потенциал в воздухе, надо, согласно § 28, придать точке изображения  $B$  заряд  $(-e)$ . Следовательно, возмущающее действие диэлектрика на силу поля в воздухе, по сравнению с возмущающим действием проводника, измеряется отношением

$$e' : e = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) : (\varepsilon_2 + \varepsilon_1).$$

Диэлектрик оказывает следовательно всегда меньшее действие, чем проводник. В предельном случае, когда диэлектрическая постоянная  $\varepsilon_2$  изолятора очень велика по сравнению с диэлектрической постоянной воздуха,  $e' = e$ ; это значит, что проводник влияет на поле в воздухе так же, как изолятор с бесконечно большой диэлектрической постоянной.

Что касается далее силы поля внутри диэлектрика, то она соответствует свободному заряду  $\frac{e''}{\varepsilon_2}$ , находящемуся в  $A$  в безграничном диэлектрике. Если удалить диэлектрик, то сила поля соответствовала бы свободному заряду  $\frac{e}{\varepsilon_1}$ , который действительно имеется в точке  $A$  в воздухе. Изменение поля присутствием диэлектрика измеряется поэтому частным

$$\frac{e''}{\varepsilon_2} : \frac{e}{\varepsilon_1} = 2\varepsilon_1 : (\varepsilon_2 + \varepsilon_1).$$

В предельном случае бесконечной диэлектрической постоянной  $\varepsilon_2$  сила электрического поля внутри изолятора равна нулю — так же, как внутри проводника.

**§ 34. Диэлектрический шар в однородном поле.** Рассмотрим шар радиуса  $a$  с диэлектрической постоянной  $\epsilon_1$ , находящийся в другом диэлектрике  $\epsilon_2$ , который пусть заполняет собою все остальное пространство; предположим, что в этом диэлектрике до внесения шара имелось однородное поле  $\mathbf{E}_x = E_0$ , имеющее направление положительной оси  $x$ . Как изменяется это поле при внесении в него шара? — Чтобы ответить на этот вопрос, определим потенциал  $\varphi$  следующими свойствами:

1) На большом расстоянии от шара ( $\lim r = \infty$ )  $\varphi$  должен перейти в  $-E_0x$ .

2) На внешней поверхности шара нормальная составляющая градиента претерпевает такой скачок, что  $\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n}$  с обеих сторон имеет одинаковое значение

3) Само  $\varphi$ , а, значит, и тангенциальные составляющие  $\text{grad } \varphi$  остаются непрерывными при прохождении через поверхность шара.

4)  $\varphi$  всюду удовлетворяет уравнению Лапласа  $\Delta \varphi = 0$ .

Обозначим через  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  значения потенциала внутри и вне шара и сделаем допущение.

$$\varphi_1 = -E_1x$$

$$\varphi_2 = -E_0x + E_0 \frac{k}{r^2} \cdot \frac{x}{r}.$$

Это означает: внутри ( $\varphi_1$ ) шара имеется однородное поле  $E_1$ ; следовательно шар однородно поляризован в направлении  $x$ . При этом на внешнее пространство ( $\varphi_2$ ) шар действует так, как если бы в его центре находился диполь момента  $E_0k$ .

Первое и четвертое из наших условий уже удовлетворены при указанных допущениях.

Мы должны показать, что соответствующим выбором постоянных  $E_1$  и  $k$ , которыми мы еще можем распорядиться произвольно, можно удовлетворить и пограничные условия 2 и 3. Вводя полярные координаты ( $x = r \cos \vartheta$ ), имеем

$$\varphi_1 = -E_1r \cos \vartheta$$

$$\varphi_2 = -E_0 \cos \vartheta \left[ r - \frac{k}{r^2} \right].$$

Наши пограничные условия требуют теперь

$$\varphi_1 = \varphi_2 \text{ и } \epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \text{ для } r = a.$$

Это дает два уравнения:

$$E_1 = E_0 \left[ 1 - \frac{k}{a^3} \right]$$

$$\epsilon_1 E_1 = \epsilon_2 E_0 \left[ 1 + \frac{2k}{a^3} \right],$$

из которых получается

$$E_1 = E_0 \cdot \frac{3\epsilon_2}{2\epsilon_2 + \epsilon_1} = E_0 \left[ 1 - \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{2\epsilon_2 + \epsilon_1} \right],$$

$$\frac{k}{a^3} = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{2\epsilon_2 + \epsilon_1}.$$

Рассмотрим частный случай  $\epsilon_2 = 1$ , т. е. диэлектрический шар в пустоте. Поле внутри его ослабляется в  $\frac{3}{2 + \epsilon_1}$  раз по сравнению с однородным внешним полем. Наружу он действует как диполь момента

$$\mathbf{M} = \mathbf{E}_0 k = \mathbf{E}_0 \cdot a^3 \frac{\epsilon_1 - 1}{\epsilon_1 + 2}. \quad (90a)$$

Его поляризация  $\mathbf{P}$  (момент единицы объема) равна

$$\mathbf{P} = \mathbf{E}_0 \cdot \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{\epsilon_1 - 1}{\epsilon_1 + 2}.$$

Сравнение с тем, что мы говорили о проводящем шаре (§ 29), показывает, что такой шар проявляет себя в смысле возмущающего действия на однородное поле как изолятор с бесконечно большой диэлектрической постоянной.

### III. ЭНЕРГИЯ И МЕХАНИЧЕСКИЕ СИЛЫ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

**§ 35. Заряды и металлические проводники в пустоте.** Различие в представлениях максвелловской теории поля и более старой теории дальнего действия выступает особо отчетливо, когда мы вычисляем работу, необходимую для того, чтобы осуществить данное электростатическое распределение зарядов, и при этом действуем следующим образом. Мы предполагаем, что отдельные заряды сначала удалены друг от друга на бесконечные расстояния, и затем приводим их по отдельности в ранее определенное для них место. Рассмотрим сначала случай, когда дело идет об отдельных точечных зарядах  $e_1, e_2, e_3$  и т. д., и пусть они приводятся из бесконечности в такое положение, при котором их взаимные расстояния друг от друга будут  $r_{12}, r_{13}$  и т. д. Сначала приведем на соответствующее ему место заряд  $e_1$ . При этом никакой работы еще совершать не надо, так как все остальные заряды находятся на бесконечном расстоянии. Приведем теперь заряд  $e_2$  на расстояние  $r_{12}$  от  $e_1$ . Для этого нужно совершить работу против кулоновского отталкивания

$$a_2 = \frac{e_1 e_2}{r_{12}}.$$

Поднесем теперь заряд  $e_3$ ; при этом мы должны затратить

$$a_3 = \frac{e_1 e_3}{r_{13}} + \frac{e_2 e_3}{r_{23}}.$$

Будем продолжать таким образом далее, пока все  $n$  зарядов не окажутся на своих местах. В общем мы должны затратить работу

$$A = a_2 + a_3 + \dots + a_n,$$

которую можно также написать в виде

$$A = \frac{1}{2} e_1 \left[ \frac{e_2}{r_{12}} + \frac{e_3}{r_{13}} + \dots + \frac{e_n}{r_{1n}} \right] + \\ + \frac{1}{2} e_2 \left[ \frac{e_1}{r_{21}} + \frac{e_3}{r_{23}} + \dots + \frac{e_n}{r_{2n}} \right] + \dots,$$

или также

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n e_i \Phi_i, \quad (91)$$

где  $\Phi_i$  есть потенциал, создаваемый остальными зарядами на месте  $i$ -го заряда.

Уравнение (91) по своей форме характерно для теории дальнего действия. Если уместен вопрос, где собственно локализуется затраченная работа, то, руководствуясь (91), мы ответили бы на него в том смысле, что потенциальная энергия сосредоточивается в отдельных зарядах, и что каждый из зарядов вносит в потенциальную энергию слагаемое  $\frac{1}{2} e_i \Phi_i$ . Совсем иначе дается ответ в максвелловской теории поля.

Последняя рассматривает как носитель электрической энергии именно поле и утверждает: каждый элемент объема  $dv$  того „пустого пространства“, в котором существует электрическое поле, содержит благодаря этому энергию

$$\frac{1}{8\pi} \mathbf{E}^2 dv.$$

Таким образом на конечный объем приходится энергия

$$U = \int \int \int \frac{1}{8\pi} \mathbf{E}^2 dv. \quad (92)$$

Мы оправдаем это утверждение прежде всего тем, что покажем: работа  $A$  (91), затрачиваемая при вышеописанном взаимном приближении  $n$  точечных зарядов, тождественна с увеличением энергии поля  $U$ , происходящим при этом процессе. Для этой цели обозначим через  $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots$  напряженности в любой точке наблюдения, создаваемые зарядами  $e_1, e_2, \dots$ . Тогда  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots + \mathbf{E}_n$ , и поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^2 &= \mathbf{E}_1^2 + \mathbf{E}_2^2 + \dots + \mathbf{E}_n^2 \\ &+ \mathbf{E}_1(\mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 + \dots + \mathbf{E}_n) \\ &+ \mathbf{E}_2(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_3 + \dots + \mathbf{E}_n) \\ &\dots \dots \dots \\ &+ \mathbf{E}_n(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots + \mathbf{E}_{n-1}). \end{aligned}$$

Если образовать энергию поля  $U$ , то прежде всего видно, что члены, даваемые первой строкой ( $U_0$ ), при взаимном приближении зарядов вообще не меняются. Действительно, например,  $\frac{1}{8\pi} \int \int \int \mathbf{E}_1^2 dv$  есть энергия, приходящаяся только на первый заряд (она соответствовала бы работе, которую нужно было бы затратить, чтобы сгустить бесконечно тонкое облако зарядов в первый точечный заряд; для действительно точечного заряда она была бы даже бесконечно большой). Здесь мы должны рассмотреть только члены, обусловленные взаимодействием и стоящие в следующих строках. Если положить

$$\mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 + \dots + \mathbf{E}_n = -\text{grad } \Phi_1,$$

где следовательно  $\Phi_1$  означает потенциал, образуемый всеми зарядами, за исключением первого, то вторая строка от  $E^2$  дает для  $U$  член

$$-\frac{1}{8\pi} \int \int \int (\mathbf{E}_1 \text{ grad } \Phi_1) dv,$$

который мы можем написать по теореме Гаусса — уравнение (42) — в виде

$$-\frac{1}{8\pi} \left\{ \int \int \Phi_1 \mathbf{E}_{1n} dS - \int \int \int dv \Phi_1 \text{ div } \mathbf{E}_1 \right\}.$$

В качестве ограничивающей поле поверхности  $S$  возьмем, с одной стороны, бесконечно далекую сферу, которая не внесет ничего в общую сумму, и малую шаровую поверхность, охватывающую первый заряд. На последней мы можем считать  $\Phi_1$  постоянным; далее интеграл

$$-\frac{1}{4\pi} \int \int \mathbf{E}_{1n} dS = e_1$$

дает заряд  $e_1$ , так что в общем

$$\frac{1}{8\pi} \int \int \int \mathbf{E}_1 (\mathbf{E}_2 + \dots + \mathbf{E}_k) dv = \frac{1}{2} e_1 \Phi_1.$$

После соответствующего преобразования остальных строк разность

$$U - U_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} e_i \Phi_i = \frac{1}{2} \sum_{i, k} \frac{e_i e_k}{r_{ik}}$$

действительно оказывается равной затраченной работе  $A$ .

Рассмотрим, например, смещение точечного заряда в некоторое соседнее положение; мы получим тогда теорему: работа, которую надо затратить при смещении любого данного точечного заряда, равна увеличению энергии поля, связанному с этим смещением. Следовательно, затраченная работа накапливается в поле в виде потенциальной энергии.

Хотя случай точечных зарядов вследствие обращения поля в этом случае в бесконечность в вычислительном отношении является не особенно удобным, мы все же рассмотрели его первым, имея в виду его ближайшее отношение к закону Кулона. Если заряды распределены в объеме с плотностью  $\rho$ , то соответствующая связь в формальном отношении становится гораздо проще.

Формула Грина

$$\int \int \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS = \int \int \int dv (\varphi \Delta \psi + \text{grad } \varphi \text{ grad } \psi)$$

дает теперь, если положить  $\psi = \varphi$ ;  $\Delta \varphi = -4\pi\rho$ ;  $\text{grad } \varphi = -\mathbf{E}$ , непосредственно

$$\frac{1}{2} \int dv \rho \varphi = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{E}^2 dv.$$

Слева энергия оказывается локализованной в элементах заряда  $\rho dv$ , которые находятся в местах потенциала величины  $\varphi$ . Справа же энергия распределена по полю с плотностью  $\frac{1}{8\pi} \mathbf{E}^2$ .

В случае распределения зарядов по поверхности металлического проводника (поверхностная плотность заряда равна  $\sigma$ ),  $\Delta\varphi$  в формуле Грина становится равным нулю (если остальное пространство не имеет источников); но при этом слева остается интеграл, распространенный по поверхностям отдельных проводников

$$U = \frac{1}{8\pi} \int E^2 dv = \frac{1}{8\pi} \int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS. \quad (93)$$

Поверхность  $S$  распадается на поверхности  $S_1, S_2 \dots$  и т. д. отдельных проводников, на каждом из которых потенциалы имеют свои постоянные значения  $\varphi_1, \varphi_2$  и т. д. Но  $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial n}$  равно поверхностному заряду; следовательно

$$\int_{S_k} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS_k = 4\pi e_k,$$

где  $e_k$  означает заряд, находящийся на  $k$ -ом проводнике. Для энергии системы проводников 1, 2 ... и т. д. получаем, следовательно,

$$U = \frac{1}{2} (\varphi_1 e_1 + \varphi_2 e_2 + \dots).$$

Энергия конденсатора с зарядами  $+e$  и  $-e$  на обкладках становится поэтому равной

$$U = \frac{e(\varphi_1 - \varphi_2)}{2} = \frac{1}{2} C (\varphi_1 - \varphi_2)^2 = \frac{e^2}{2C},$$

если мы при этом обозначаем опять через  $C = \frac{e}{\varphi_1 - \varphi_2}$  емкость конденсатора.

**§ 36. Энергия поля при наличии изоляторов.** Последнее полученное нами выражение для энергии конденсатора

$$U = \frac{1}{2} e (\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2} C (\varphi_1 - \varphi_2)^2,$$

очевидно, совсем не зависит от того, находится ли между его обкладками изолятор или нет; оно представляет собой работу, необходимую для заряжения. При плоском конденсаторе в пустоте (площадь  $S$ , расстояние пластин  $a$ ) заряд равен

$$e = \frac{1}{4\pi} S |\mathbf{E}|$$

и  $\varphi_1 - \varphi_2 = |\mathbf{E}| a$ , так что согласно (92)

$$U = \frac{1}{8\pi} S \cdot a \cdot |\mathbf{E}^2|.$$

В диэлектрике с диэлектрической постоянной  $\epsilon$  плотность заряда  $\sigma$  на границе металла определяется теперь нормальной составляющей не  $\mathbf{E}$  а  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ . Следовательно теперь

$$e = \frac{\epsilon}{4\pi} S |\mathbf{E}|,$$

и энергия

$$U = Sa \frac{\epsilon}{8\pi} |\mathbf{E}|^2.$$

Плотность энергии электрического поля должна следовательно теперь равняться<sup>1</sup>

$$u = \frac{\epsilon}{8\pi} \mathbf{E}^2 = \frac{1}{8\pi} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}. \quad (94)$$

И, действительно, уравнение (94) дает для бесконечно протяженного всюду непрерывного поля, в силу  $\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho$  и  $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi$ ,

$$\frac{1}{8\pi} \int \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dv = -\frac{1}{8\pi} \int \mathbf{D} \cdot \operatorname{grad} \varphi dv = \frac{1}{8\pi} \int \varphi \operatorname{div} \mathbf{D} dv = \frac{1}{2} \int \varphi \rho dv.$$

Но это как раз то выражение, которого мы должны ожидать с точки зрения теории дальнего действия. Оправдание выражения (94) для плотности энергии поля будет составлять существенную часть следующих параграфов. Но отметим уже здесь, что оно сохраняет значение далеко за пределами электростатики, — в частности, остается верным для полей, изменяющихся во времени. Но сейчас оно должно дать нам возможность вычислить в общем случае действия сил, проявляющиеся в электростатическом поле. При этом мы исходим из того принципа, что при любом смещении зарядов работа, совершаемая полем, равна уменьшению энергии поля. Превращаемая в работу энергия поля экспериментально обнаруживается в самых различных видах: или в виде кинетической энергии, если носитель заряда может свободно двигаться (свободные электроны), или в виде теплоты, если носитель заряда движется, преодолевая сопротивление, аналогичное трению, или также в виде потенциальной механической энергии, если при движении носителя заряда затрачивается работа против внешней консервативной силы (например, силы тяжести или упругой силы).

В простейшем случае однородного диэлектрика выражение (94) означает лишь незначительное усложнение по сравнению с пустотой. Пусть произвольная система металлических тел помещена сначала в пустоту и находится в электростатическом равновесии;  $e_n$  и  $\varphi_n$  — заряд и потенциал  $n$ -го проводника. Пусть  $\mathbf{E}_0$  — напряженность в каком-нибудь месте пространства,  $u_0 = \frac{1}{8\pi} \mathbf{E}_0^2$  — плотность энергии. Заполним теперь пространство диэлектриком с диэлектрической постоянной  $\epsilon$ . Какой вид имеет теперь плотность энергии, даваемая уравнением (94)? — Если  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$  — напряженность и смещение в новом поле, то во всяком случае мы имеем  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ . Но дальше мы должны различать, что мы поддерживаем постоянным при введении диэлектрика: заряды ли  $e_n$  или потенциалы  $\varphi_n$ .

*а) Постоянными поддерживаются заряды  $e_n$  (путем изоляции отдельных проводников). Тогда*

$$\int \mathbf{D}_n ds = \int \mathbf{E}_{0n} dS.$$

Выражением (94) дается собственно плотность не энергии, а свободной энергии (в термодинамическом смысле). При выводах следующих параграфов мы будем всегда ограничиваться изотермическими процессами, не отмечая при этом этого обстоятельства особо. Поэтому соображения, изложенные в тексте, настоятельно нуждаются в последующем оправдании, которое мы дадим однако только позднее (стр. 218 и сл.).

Источники  $\mathbf{D}$  — те же самые, которые были раньше источниками  $\mathbf{E}_0$ . Но тогда вообще должно быть  $\mathbf{D} = \mathbf{E}_0$ , и тем самым  $\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{E}_0$ . Таким образом

$$u = \frac{1}{8\pi} \mathbf{E} \mathbf{D} = \frac{u_0}{\varepsilon}.$$

Так как вообще  $\varphi = \int \mathbf{E} d\mathbf{S}$ , то отсюда следует, что потенциалы также падают в  $\varepsilon$  раз. Далее сила, действующая между зарядами  $e_1$  и  $e_2$ , дается вообще энергией поля; следовательно, закон Кулона будет теперь иметь вид:

$$\mathbf{F} = \frac{e_1 \cdot e_2}{\varepsilon \cdot r_{12}^2}.$$

При заполнении пространства между изолированными проводниками однородным диэлектриком (когда заряды поддерживаются постоянными) энергия поля, напряженность, потенциалы и сила взаимодействия уменьшаются в  $\varepsilon$  раз.

Принимая во внимание принцип сохранения энергии, приходится сейчас же спросить, куда же девалась при таком заполнении исчезнувшая энергия. Фактически она компенсируется тем, что в поле входит диэлектрик, что, следовательно, при заполнении пространства может совершаться работа. Но так как во время введения изолятора диэлектрик не является уже однородным ( $\varepsilon$  даже разрывна на внешней поверхности изолятора), то пока мы эти силы вычислить не можем.

*б) Постоянными поддерживаются потенциалы проводников* (например, при помощи соединения проводниками с полюсами гальванических элементов). Потенциалами  $\varphi$  однозначно определяются напряженности  $\mathbf{E}$  (в однородном диэлектрике  $\varepsilon$ ). Мы имеем, следовательно, в этом случае

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0, \text{ и поэтому } \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}_0;$$

стало быть

$$u = \frac{1}{8\pi} \mathbf{E} \mathbf{D} = \varepsilon u_0,$$

и также

$$e_1 = \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{D}_n d\mathbf{S} = \varepsilon \cdot e_{10} \quad \text{и т. д.}$$

Когда при заполнении пространства между проводниками однородным диэлектриком поддерживаются постоянными потенциалы последних, энергия поля, смещение, заряды и силы взаимодействия увеличиваются в  $\varepsilon$  раз.

Поставим опять вопрос об энергетическом балансе. Прежде всего, как мы видели выше, при введении изолятора мы получаем работу. Но кроме того еще увеличивается энергия поля. И та и другая части энергии должны доставляться гальваническими элементами, которые поддерживают потенциалы на отдельных проводниках постоянными.



В самом деле, заряд  $i$ -го проводника увеличивается на  $e_i$  ( $\epsilon - 1$ ). Для этого соответствующий элемент должен совершить работу

$$\varphi_i e_i (\epsilon - 1).$$

Тогда полная работа, произведенная гальваническими элементами, равна

$$A = \sum_i \varphi_i e_i (\epsilon - 1) = 2 \cdot (\epsilon - 1) \cdot U_0,$$

если

$$U_0 = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i e_i = \iiint u_0 dv$$

означает энергию системы с потенциалами  $\varphi_i$  в пустоте. Но прирост энергии поля составляет только половину  $A$ , именно

$$\epsilon \cdot U_0 - U_0 = (\epsilon - 1) U_0.$$

Таким образом мы видим: при внесении диэлектрика  $\epsilon$  в поле энергии  $U_0$ , если проводники держатся на постоянных потенциалах, во-первых, приобретается работа  $(\epsilon - 1) U_0$ , во-вторых, настолько же увеличивается энергия поля. Полученная работа + прирост энергии доставляются источниками тока, которые обеспечивают сохранение постоянства потенциала.

**§ 37. Теорема Томсона.** Если в электростатическом поле под влиянием напряженности заряды движутся, то энергия поля уменьшается на величину совершаемой при этом работы. При этом заряды, поскольку они подвижны, будут стараться распределяться таким образом, чтобы энергия поля имела наименьшее из всех возможных значений. В частности, если даны проводники, на которых заряды распределены вначале произвольным образом, то эти заряды перераспределяются так, что энергия поля становится минимальной. С другой стороны, мы знаем, что в электростатическом состоянии потенциал в проводнике является постоянным, и что весь заряд находится на внешней поверхности; мы ожидаем поэтому, что этому распределению зарядов действительно соответствует минимум энергии поля.

В свете такого ожидания докажем следующую теорему: пусть дана некоторая система металлических проводников, помещенная в диэлектрике, диэлектрическая постоянная которого  $\epsilon$  есть произвольная функция координат. Поверхности разрыва  $\epsilon$  мы можем исключить, отнюдь не нарушая при этом общности, так как ведь каждую поверхность разрыва можно мысленно заменить непрерывным, но весьма быстрым переходом. Отдельные изолированные проводники несут на себе заряды  $e_1, e_2$  и т. д.

Пусть соответствующее электростатическое поле описывается векторами  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$ . Это значит, что должны выполняться следующие условия на внешних поверхностях проводников:

$$\iint_{S_i} \mathbf{D}_n dS_i = 4\pi e_i \quad (i = 1, 2, \dots, h) \quad (\alpha)$$

и

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi \rho; \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad (\beta)$$

где  $\epsilon_i$  и функции координат места  $\rho$  и  $\epsilon$  заданы. К этим условиям, которые мы назовем общими, присоединяются чисто электростатические условия:

$$\varphi = \varphi_i = \text{const.} \quad (\gamma)$$

на каждом из отдельных проводников, а также всюду

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0 \quad \text{или} \quad \mathbf{E} = -\text{grad } \varphi. \quad (\delta)$$

Пусть теперь  $\mathbf{D}'$  и  $\mathbf{E}'$  — какое-нибудь другое поле, о котором мы знаем только то, что оно удовлетворяет общим условиям  $(\alpha)$  и  $(\beta)$  и что оно отлично от поля  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$ . Мы утверждаем, что этого указания достаточно, чтобы доказать, что

$$U' > U,$$

если

$$U' = \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{D}' \mathbf{E}'_i) dv \quad \text{и} \quad U = \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{D}\mathbf{E}) dv$$

означают энергии обоих полей.

Для доказательства положим

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{E}''; \quad \mathbf{D}' = \mathbf{D} + \mathbf{D}''.$$

В силу условий  $(\alpha)$  и  $(\beta)$  для введенных таким образом полей  $\mathbf{E}''$  и  $\mathbf{D}''$  имеют место уравнения

$$\int_{S_i} \mathbf{D}_n'' dS = 0; \quad \text{div } \mathbf{D}'' = 0; \quad \mathbf{D}'' = \epsilon \cdot \mathbf{E}''. \quad (\epsilon)$$

Тогда

$$\begin{aligned} U' &= \frac{1}{8\pi} \int \int \int (\mathbf{E} + \mathbf{E}'') (\mathbf{D} + \mathbf{D}'') dv = \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{E}\mathbf{D}) dv + \\ &+ \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{E}''\mathbf{D}'') dv + \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{E}\mathbf{D}'' + \mathbf{E}''\mathbf{D}) dv. \end{aligned}$$

В силу  $\mathbf{D}'' = \epsilon \mathbf{E}''$

$$U' = U + \frac{1}{8\pi} \int \epsilon \mathbf{E}''^2 dv + \frac{1}{4\pi} \int (\mathbf{E}\mathbf{D}'') dv.$$

Воспользуемся теперь указанием  $(\delta)$  о том, что  $\mathbf{E}$  должно быть безвихревым:

$$\mathbf{E}\mathbf{D}'' = -(\text{grad } \varphi \cdot \mathbf{D}'') = -\text{div}(\varphi \cdot \mathbf{D}'') + \varphi \text{div } \mathbf{D}''.$$

Согласно предположению  $(\gamma)$ ,  $\mathbf{E}$  внутри металла всюду равно нулю. Мы можем, следовательно, при вычислении объемного интеграла  $\frac{1}{4\pi} \int \mathbf{E}\mathbf{D}'' dv$  ограничиться областью, заполненной диэлектриком, в котором  $\text{div } \mathbf{D}'' = 0$ . Таким образом

$$\int \mathbf{E}\mathbf{D}'' dv = \sum_i \int_{S_i} \varphi \mathbf{D}_n'' dS = \sum_i \varphi_i \int_{S_i} \mathbf{D}_n'' dS = 0,$$

так как, согласно ( $\gamma$ ),  $\varphi$  на каждом проводнике постоянен. Но этим теорема Томсона доказана. Действительно

$$U' = U + \frac{1}{8\pi} \int \varepsilon E'^2 dv.$$

$U'$  больше чем  $U$ , как только в каком-нибудь месте пространства  $E'$  отлично от  $E$ .

Теорема Томсона выводит, следовательно, поле, соответствующее равновесному распределению электричества, из некоторого принципа минимальности. Этот принцип вполне соответствует условию равновесия, которое имеет место для тяжелых тел в поле силы тяжести. Эти тела находятся в равновесии, и притом в устойчивом равновесии, когда потенциальная энергия силы тяжести в соответствующем положении принимает наименьшее значение. Подобным образом здесь мы видим, что равновесие электричества, находящегося на внешних поверхностях неподвижных проводников, характеризуется минимумом электрической энергии. Электрическая энергия играет поэтому здесь ту же самую роль, какую потенциальная энергия играет в обычной механике.

Предыдущие рассуждения показывают еще раз, что нельзя дать двух различных решений электростатической задачи. Доказанное неравенство означает как раз то, что для всякого поля  $E'$ ,  $D'$ , которое удовлетворяет условиям ( $\alpha$ ) и ( $\beta$ ) и отлично от электростатического поля, энергия  $U' < U$ . Если само поле  $E'$ ,  $D'$  есть поле электростатическое, то должно, кроме того, иметь место  $U > U'$ , что невозможно. Следовательно, не может быть двух различных решений электростатической задачи; условиями ( $\alpha$ ) до ( $\delta$ ) электростатическое поле определяется однозначно.

**§ 38. Диэлектрический шар в неоднородном поле.** Прежде чем приступить к выводу самого общего выражения для пондеромоторных сил из принципа энергии, что мы сделаем в следующих параграфах, мы вычислим здесь непосредственным путем силу, которую испытывает заряженный или незаряженный шар в неоднородном поле. Предварительно рассмотрим рой точечных зарядов  $e_1, e_2, \dots, e_h$ , которые находятся в точках  $x_1 y_1 z_1, \dots, x_h y_h z_h$  недалеко от начала координат. Пусть размеры роя настолько малы, что действующее извне поле  $E$  с достаточным приближением можно представить в виде

$$E_x = E_{x_0} + \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} \right)_0 \cdot x + \left( \frac{\partial E_x}{\partial y} \right)_0 \cdot y + \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} \right)_0 \cdot z'$$

или в сокращенной форме

$$E(\mathbf{r}) = E_0 + (\mathbf{r} \operatorname{grad}_0 E),$$

где индекс 0 означает, что соответствующую величину нужно брать для начала координат. Сила, действующая на наш рой, будет

$$F = \sum_{i=1}^h e_i E(\mathbf{r}_i) = E_0 \sum_{i=1}^h e_i + \left( \sum e_i \mathbf{r}_i \operatorname{grad} \right) E.$$

$$\sum_{i=1}^h e_i \mathbf{r}_i = M$$

есть электрический момент нашего роя зарядов (ср. при этом выводы § 12). Если далее  $\sum e_i = e$  есть общий заряд, то  $\mathbf{F}$  будет также

$$\mathbf{F} = E_0 e + (\mathbf{M} \text{ grad } E).$$

Применим этот результат к шару с диэлектрической постоянной  $\epsilon$  и радиусом  $a$ . Согласно уравнению (90a), этот шар поляризуется в однородном поле  $\mathbf{E}$  таким образом, что его поляризационные заряды действуют наружу как диполь момента

$$\mathbf{M} = a^3 \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \cdot \mathbf{E}_0.$$

Если размеры шара не слишком велики, то это выражение останется приблизительно верным также и в неоднородном поле. Но если, кроме того, шар имеет еще заряд  $e$ , то всего на него действует сила

$$\mathbf{F} = e \mathbf{E} + a^3 \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} (\mathbf{E} \text{ grad } E).$$

В электростатическом поле в силу безвихревого характера  $\mathbf{E}$

$$\mathbf{E} \text{ grad } E = \frac{1}{2} \text{ grad } E^2,$$

что легко можно подтвердить, выписав выражение, например, для составляющей по  $x$ .

Но тогда

$$\mathbf{F} = e \mathbf{E} + \frac{1}{2} a^3 \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \text{ grad } E^2. \quad (94a)$$

Незаряженный шар ( $e = 0$ ) втягивается в места с большей напряженностью. В частности, если перейти к пределу  $\lim \epsilon = \infty$ , то сила, действующая на металлический незаряженный шар радиуса  $a$ , будет

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} a^3 \text{ grad } E^2. \quad (94)$$

$\frac{1}{2} a^3 E^2$  есть, следовательно, работа, которую надо затратить, чтобы перевести металлический шар радиуса  $a$  из поля  $\mathbf{E}$  в пространство, свободное от поля.

Мы теперь в состоянии указать условия, которым должно удовлетворять пробное тело, если мы хотим с его помощью измерить поле, пользуясь простым соотношением  $\mathbf{F} = e \mathbf{E}$ . С одной стороны, радиус шара  $a$  должен быть настолько мал, чтобы можно было в (94a) пренебречь вторым членом по сравнению с первым.

С другой стороны, сам заряд  $e$  должен быть настолько мал, чтобы можно было пренебречь по сравнению с  $e \mathbf{E}$  силами изображения (см. § 28), которые создаются незаряженными металлическими поверхностями и поверхностями изолятора, и которые пропорциональны  $e^2$ . Чем ближе мы подходим к возмущающей поверхности, или чем сильнее неоднородность поля, тем меньше нужно выбирать заряд и диаметр пробного тела.

§ 39. Механические силы в электростатическом поле. Выведем теперь общее выражение для силы  $\mathbf{f} dv$ , действующей со стороны поля на материальный элемент объема  $dv$ . Применим для этого принцип энергии следующим образом: пусть находящееся в поле вещество движется как-нибудь произвольно. Пусть  $\mathbf{u}(x, y, z)$  — вектор потока, который дает скорость материальной частицы, находящейся в положении  $x, y, z$ . Будем полагать, что величина  $\mathbf{u}$  настолько мала, что в любой момент времени поле может считаться электростатическим (наши соображения строго справедливы лишь в случае  $\lim |\mathbf{u}| = 0$ ). Очевидно, что скалярное произведение  $(\mathbf{u}\mathbf{f}) dv$  есть работа, совершаемая при этом потоке в единицу времени отнесенной к единице объема силой  $\mathbf{f}$ .

Если обозначить через

$$U = \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{E}\mathbf{D}) dv \quad (95)$$

общую энергию поля, то принцип энергии требует, чтобы падение  $U$  в одну секунду было равно полной работе, затраченной в веществе:

$$\frac{dU}{dt} = - \int (\mathbf{u}\mathbf{f}) dv. \quad (96)$$

На самом деле мы  $\mathbf{f}$  пока не знаем; наоборот, наша задача состоит как раз в том, чтобы преобразовать изменение во времени значения  $U$ , даваемого уравнением (95), таким образом, чтобы оно приняло вид (96). Тогда мы имеем право появляющийся при этом множитель  $\mathbf{f}$  рассматривать как совместимую с принципом энергии плотность силы. Мы должны, следовательно, вычислить, как меняется  $U$  вследствие существования потока  $\mathbf{u}$ . Но поле является однозначно определенным, если плотность зарядов  $\rho$  и диэлектрическая постоянная  $\epsilon$  всюду даны.

$U$  изменяется, следовательно, лишь постольку, поскольку изменяются во времени  $\rho$  и  $\epsilon$ . Поэтому вычислим прежде всего оба выражения  $\delta_\rho U$  и  $\delta_\epsilon U$ . При этом  $\delta_\rho U$  должно означать изменение  $U$  вследствие изменения  $\rho(x, y, z)$  в  $\rho + \delta\rho(x, y, z)$ , причем  $\epsilon(x, y, z)$  держится постоянной; соответственно  $\delta_\epsilon U$  есть изменение  $U$ , когда  $\rho$  держится постоянной, а изменяется  $\epsilon$ .

И в том и в другом случае мы должны вычислять разность энергий между двумя полями:

$$\delta U = U_2 - U_1 = \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{E}_2\mathbf{D}_2 - \mathbf{E}_1\mathbf{D}_1) dv. \quad (97)$$

а) Когда постоянной держится  $\epsilon$ ,  $\mathbf{E}_1\mathbf{D}_2 = \mathbf{E}_2\mathbf{D}_1$ , а потому

$$\mathbf{E}_2\mathbf{D}_2 - \mathbf{E}_1\mathbf{D}_1 = (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1).$$

Так как мы ограничиваемся малыми изменениями, то значит

$$\delta_\rho U = \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{E}\delta\mathbf{D} dv.$$

Но

$$\mathbf{E}\delta\mathbf{D} = -(\text{grad } \varphi, \delta\mathbf{D}) = -\text{div}(\varphi\delta\mathbf{D}) + \varphi \text{div } \delta\mathbf{D}.$$

Изменение плотности зарядов  $\delta\rho$  означает изменение расхождения вектора смещения

$$4\pi\delta\rho = \operatorname{div} \delta\mathbf{D},$$

так что

$$\delta_e U = \int \varphi \delta\rho \, dv. \quad (98)$$

Этот результат содержит в себе как частный случай предложение, что при малом смещении зарядов, находящихся на изолированном проводнике, энергия поля не изменяется. При предполагаемом здесь электростатическом равновесии  $\varphi$  фактически постоянен и  $\int \delta\rho \, dv = 0$ . Это конечно есть только частный случай теоремы Томсона о минимуме электростатической энергии. Но для нас этот частный случай является особенно важным, потому что мы из него узнаем, что та часть от  $\delta\rho$ , которая заключается в передвижении зарядов на металлических проводниках, ничего к изменению  $U$  не прибавляет, если только длительно сохраняется электростатическое равновесие. Но как раз это мы и предполагали.

*б) Когда держится постоянной плотность зарядов  $\rho$ ,  $\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1$  всюду свободно от источников; так как, кроме того, поля  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{E}_2$  — безвихревые, то в этом случае*

$$\int \mathbf{E}_1(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \, dv = 0 \quad \text{и} \quad \int \mathbf{E}_2(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \, dv = 0,$$

если оба интеграла берутся по всему пространству. Мы можем, следовательно, заменить под знаком интеграла в (97)  $\mathbf{E}_2\mathbf{D}_2$  на  $\mathbf{E}_2\mathbf{D}_1$  и  $\mathbf{E}_1\mathbf{D}_1$  на  $\mathbf{E}_1\mathbf{D}_2$ , так что получим

$$\delta_e U = \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{E}_2\mathbf{D}_1 - \mathbf{E}_1\mathbf{D}_2) \, dv.$$

Если теперь  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  — значения диэлектрической постоянной на одном и том же месте до изменения и после, то  $\mathbf{D}_1 = \epsilon_1\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{D}_2 = \epsilon_2\mathbf{E}_2$ ; тем самым

$$\delta_e U = -\frac{1}{8\pi} \int (\epsilon_2 - \epsilon_1) \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2 \, dv.$$

При малом изменении  $\delta\epsilon$

$$\delta_e U = -\frac{1}{8\pi} \int \delta\epsilon \mathbf{E}^2 \, dv. \quad (99)$$

Таким образом для скорости изменения энергии поля в общем имеем

$$\frac{dU}{dt} = \int \varphi \frac{\partial\rho}{\partial t} \, dv - \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{E}^2 \frac{\partial\epsilon}{\partial t} \, dv. \quad (100)$$

Теперь мы должны связать изменения во времени  $\rho$  и  $\epsilon$  с заранее заданным движением вещества  $\mathbf{u}$ . По теореме Томсона при вычислении  $\frac{\partial\rho}{\partial t}$  не нужно принимать во внимание передвижения электричества по поверхности проводника. Мы можем поэтому производить вычисления так, как если бы заряд всюду был прочно связан с материей.

Но тогда  $\rho \mathbf{u}$  есть плотность конвекционного потока, и таким образом по теореме Гаусса

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho \mathbf{u}). \quad (101)$$

Заметим еще вполне аналогичную формулу для изменения плотности текущего вещества

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = -\operatorname{div}(\mathbf{u} \delta).$$

Чтобы вычислить  $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$ , рассмотрим изменение  $\varepsilon$  для текущей материальной частицы. Для этого мы должны сравнить значение  $\varepsilon$  в момент времени 0 в положении  $x, y, z$ , с соответствующим значением ко времени  $dt$  в положении  $x + u_x dt, y + u_y dt, z + u_z dt$ . Для вещественного изменения мы получаем:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\varepsilon(dt, x + u_x dt, y + u_y dt, z + u_z dt) - \varepsilon(0, x, y, z)}{dt} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + (\mathbf{u} \operatorname{grad} \varepsilon);$$

таким образом

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -(\mathbf{u} \operatorname{grad} \varepsilon) + \frac{d\varepsilon}{dt}.$$

Вещественное изменение  $\frac{d\varepsilon}{dt}$  нельзя определить в общем виде без дальнейших данных о природе диэлектрика. Поэтому мы ограничимся (в случае жидкостей вполне достаточным) предположением, что  $\varepsilon$  есть однозначная функция плотности  $\delta$ . Тогда

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon}{d\delta} \cdot \frac{d\delta}{dt}.$$

Но вещественное изменение плотности дается общим уравнением

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{\partial \delta}{\partial t} + (\mathbf{u} \operatorname{grad} \delta);$$

поэтому с данным выше значением для  $\frac{\partial \delta}{\partial t}$ :

$$\frac{d\delta}{dt} = -\operatorname{div}(\mathbf{u} \delta) + (\mathbf{u} \operatorname{grad} \delta)$$

или также

$$\frac{d\delta}{dt} = -\delta \cdot \operatorname{div} \mathbf{u}.$$

Таким образом мы получаем окончательно

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -\left\{ (\mathbf{u} \operatorname{grad} \varepsilon) + \delta \frac{d\varepsilon}{d\delta} \cdot \operatorname{div} \mathbf{u} \right\}. \quad (102)$$

Совместно с (101) и (102) получим

$$\frac{dU}{dt} = -\int \varphi \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) dv + \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{E}^2 \left( \mathbf{u} \operatorname{grad} \varepsilon + \delta \frac{d\varepsilon}{d\delta} \operatorname{div} \mathbf{u} \right) dv.$$

Применим теперь еще раз теорему Гаусса, полагая при этом

$$\varphi \operatorname{div} (\rho \mathbf{u}) = \operatorname{div} (\varphi \rho \mathbf{u}) - (\rho \mathbf{u} \operatorname{grad} \varphi)$$

и

$$\mathbf{E}^2 \frac{d\varepsilon}{d\delta} \operatorname{div} \mathbf{u} = \operatorname{div} \left( \mathbf{E}^2 \delta \cdot \frac{d\varepsilon}{d\delta} \mathbf{u} \right) - \mathbf{u} \operatorname{grad} \left( \mathbf{E}^2 \frac{d\varepsilon}{d\delta} \delta \right).$$

При этом интегралы по бесконечно далекой поверхности поля обращаются в нуль, и так как теперь  $\mathbf{u}$  оказывается общим множителем, то остается только

$$\frac{dU}{dt} = - \int \mathbf{u} \left\{ \rho \mathbf{E} - \frac{1}{8\pi} \mathbf{E}^2 \operatorname{grad} \varepsilon + \frac{1}{8\pi} \operatorname{grad} \left( \mathbf{E}^2 \frac{d\varepsilon}{d\delta} \delta \right) \right\} dv.$$

Таким образом мы получили действительно выражение вида (96), из которого можно непосредственно вывести силу  $\mathbf{f}$ , отнесенную к единице объема:

$$\mathbf{f}_e = \rho \mathbf{E} - \frac{1}{8\pi} \mathbf{E}^2 \operatorname{grad} \varepsilon + \frac{1}{8\pi} \operatorname{grad} \left( \mathbf{E}^2 \frac{d\varepsilon}{d\delta} \delta \right). \quad (103)$$

Подчеркнем еще раз, что при этом диэлектрическая постоянная  $\varepsilon$  считается функцией одной только плотности  $\delta$ .

$\mathbf{f}_e$  составляется из трех слагаемых. Первое —  $\rho \mathbf{E}$  — дает известное нам действие силы на истинные заряды; второе

$$- \frac{1}{8\pi} \mathbf{E}^2 \operatorname{grad} \varepsilon$$

проявляется всюду, где  $\varepsilon$  изменяется от точки к точке. В частности, на пограничной поверхности изолятора с пустотой оно дает силу, нормальную к внешней поверхности изолятора и стремящуюся втянуть изолятор в пустоту.

Наконец, третье слагаемое является важным для явления электрострикции, которое мы особо рассмотрим в следующем параграфе.

**§ 40. Электрострикция в химически однородных жидкостях и газах.** Если внутри незаряженного диэлектрика возбудить электрическое поле, то прежде всего следствием силы (103) будет движение отдельных частиц диэлектрической среды по отношению друг к другу. Вследствие этого возникают упругие противодействия. Движение прекращается, когда упругие силы уравновешивают электрическую силу.

Это явление, состоящее в том, что в незаряженном изоляторе возникают упругие натяжения и изменения формы, называют электрострикцией.

В жидкостях и газах при равновесии имеется только один род упругого натяжения, а именно — равное во все стороны давление  $p$ . Здесь мы должны ожидать особо простых отношений. А именно: если давление от места к месту меняется, то вследствие падения давления на элемент объема  $dv$  действует сила

$$\mathbf{f}_p dv = - \operatorname{grad} p \cdot dv. \quad (104a)$$

Равновесие наступит, если общая сила, действующая на элемент объема, т. е. сила давления  $\mathbf{f}_p$  совместно с электрической силой  $\mathbf{f}_e$



равна нулю. Условие равновесия для незаряженного изолятора ( $\rho=0$ ) будет

$$-\frac{1}{8\pi} \mathbf{E}^2 \text{grad } \varepsilon + \frac{1}{8\pi} \text{grad} \left( \mathbf{E}^2 \frac{d\varepsilon}{d\delta} \cdot \delta \right) - \text{grad } p = 0. \quad (104b)$$

Если  $p$  и  $\varepsilon$  известны как функции плотности  $\delta$ , то (104b) дает связь между плотностью (или: также давлением) и квадратом напряженности.

Уравнение (104b) для равновесного давления  $p$  в незаряженном жидком диэлектрике можно проинтегрировать в общем виде, если только известны функции  $p = p(\delta)$  и  $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ . Для этого нужно обратиться к градиенту от

$$\mathbf{E}^2 \frac{d\varepsilon}{d\delta} = \mathbf{E}^2 \frac{d\varepsilon}{d\delta} \cdot \delta \cdot \frac{1}{\delta},$$

пользуясь для этого правилами дифференцирования произведения:

$$\text{grad} \left( \mathbf{E}^2 \frac{d\varepsilon}{d\delta} \right) = \frac{1}{\delta} \text{grad} \left( \mathbf{E}^2 \frac{d\varepsilon}{d\delta} \delta \right) + \mathbf{E}^2 \frac{d\varepsilon}{d\delta} \cdot \delta \text{grad} \frac{1}{\delta}.$$

Очевидно, что

$$\text{grad } \varepsilon = \frac{d\varepsilon}{d\delta} \cdot \text{grad } \delta$$

и

$$\text{grad} \frac{1}{\delta} = -\frac{1}{\delta^2} \cdot \text{grad } \delta;$$

следовательно;

$$\frac{d\varepsilon}{d\delta} \delta \text{grad} \frac{1}{\delta} = -\frac{1}{\delta} \text{grad } \varepsilon.$$

Таким образом

$$\text{grad} \left( \mathbf{E}^2 \frac{d\varepsilon}{d\delta} \right) = \frac{1}{\delta} \left\{ \text{grad} \left( \mathbf{E}^2 \frac{d\varepsilon}{d\delta} \delta \right) - \mathbf{E}^2 \text{grad } \varepsilon \right\}.$$

Но тем самым из (104b) получается

$$\frac{1}{\delta} \text{grad } p = \text{grad} \left( \frac{1}{8\pi} \mathbf{E}^2 \frac{d\varepsilon}{d\delta} \right).$$

Положим теперь, что и  $p$  в выражении слева является функцией от  $\delta$ ; образуем интеграл

$$f(\delta) = \int_{\delta_0}^{\delta} \frac{1}{\delta} \frac{dp}{d\delta} d\delta$$

с постоянной нижней границей  $\delta_0$ . Тогда

$$\text{grad } f(\delta) = \frac{df}{d\delta} \cdot \text{grad } \delta = \frac{1}{\delta} \frac{dp}{d\delta} \text{grad } \delta = \frac{1}{\delta} \text{grad } p.$$

Таким образом имеем результат: градиент от

$$f(\delta) - \frac{1}{8\pi} \mathbf{E}^2 \frac{d\varepsilon}{d\delta}$$

равен нулю; эта величина имеет в диэлектрике везде одинаковое значение. Следовательно, если мы сравним какие-нибудь два места в жид-

кости, характеризуемые индексами 0 и 1, то поскольку  $f$  можно написать как функцию давления,

$$f(p) = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\delta(p)}$$

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{\delta} = \frac{1}{8\pi} \left[ E_1^2 \left( \frac{d\varepsilon}{d\delta} \right)_{\delta=\delta_1} - E_0^2 \left( \frac{d\varepsilon}{d\delta} \right)_{\delta=\delta_0} \right]. \quad (104c)$$

Если даны величины  $E_1$  и  $E_0$  напряженностей, то (104с) дает соотношение между плотностями  $\delta_1$  и  $\delta_0$ , или, что все равно, между давлениями  $p_1$  и  $p_0$ .

Рассмотрим теперь (104с) для случая  $E_0 = 0$ ; сравним, например, давление диэлектрика между двумя пластинками конденсатора (напряженность  $|\mathbf{E}| = E_1$ ) с давлением в пространстве, где поля нет:

$$\int_{p_0}^{p_1} \frac{dp}{\delta} = \frac{1}{8\pi} E_1^2 \cdot \left( \frac{d\varepsilon}{d\delta} \right)_{\delta=\delta_1}.$$

Если диэлектрик является слабо сжимаемой жидкостью, то плотность  $\delta$  можно приближенно считать постоянной. Тогда получаем

$$p_1 - p_0 = \frac{1}{8\pi} E_1^2 \delta \cdot \frac{d\varepsilon}{d\delta}.$$

Это уравнение можно использовать и далее, если подставить для  $\varepsilon$  экспериментально хорошо подтверждающуюся формулу Клаузиуса-Мосотти, согласно которой

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = C\delta, \quad (104d)$$

где  $C$  уж не зависит от плотности.

Из нее дифференцированием получаем

$$\frac{3}{(\varepsilon + 2)^2} d\varepsilon = C d\delta,$$

а потому

$$\delta \cdot \frac{d\varepsilon}{d\delta} = \delta C \cdot \frac{(\varepsilon + 2)^2}{3} = \frac{\varepsilon + 2}{3} \cdot (\varepsilon - 1). \quad (104e)$$

Для электрострикции в жидкостях будет следовательно

$$p_1 - p_0 = \frac{1}{2} E_1^2 \frac{\varepsilon + 2}{3} \cdot \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}.$$

Наоборот, для не очень плотного газа значение  $p$  можно подставить из уравнения

$$p = \delta \cdot \frac{RT}{M}$$

( $M$  — молекулярный вес), в то время как коэффициент электризации пропорционален плотности:

$$\varepsilon = 1 + K\delta,$$

следовательно

$$\frac{d\varepsilon}{d\delta} = K = \frac{\varepsilon - 1}{\delta}.$$

Таким образом, согласно (104с)

$$\frac{RT}{M} \cdot \ln \frac{p_1}{p_0} = \frac{1}{2} E^2 \cdot \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \cdot \frac{1}{\delta}.$$

Если обозначить через  $\alpha$  поляризуемость [см. уравнение (85)] отдельной молекулы, т. е. электрический момент, который индуцируется в ней напряженностью 1, и через  $n$  число молекул в кубическом сантиметре, то

$$\frac{\varepsilon - 1}{4\pi} = \alpha n \quad \text{и} \quad \delta = n \cdot \frac{M}{N}.$$

При этом  $N = 6 \cdot 10^{23}$  есть число молекул в грамм-молекуле. Вводя Больцмановскую постоянную

$$k = \frac{R}{N} = 1,37 \cdot 10^{-16}$$

(газовая постоянная, отнесенная к отдельной молекуле), для газов получим

$$\frac{p_1}{p_0} = e^{\frac{\frac{1}{2} \alpha E^2}{kT}}. \quad (104f)$$

Впрочем, можно было бы вывести эту формулу совсем иным путем, непосредственно из рассмотрения силы, действующей на диэлектрический шар [§ 38, уравнение (94а)]. Если, скажем, представить себе отдельную молекулу в виде шара из диэлектрического или проводящего материала, то, согласно уравнению (90а), если  $a$  есть радиус молекулы,

$$\alpha = a^3 \cdot \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}.$$

Таким образом в однородном поле на этот шар действует сила

$$F = \frac{1}{2} \alpha \operatorname{grad} E^2 = \operatorname{grad} \left( \frac{1}{2} \alpha E^2 \right),$$

которую можно вывести из потенциала  $-\frac{1}{2} \alpha E^2$ . Таким образом уравнение (104f) есть не что иное, как известная формула падения барометрического давления с высотой

$$\frac{p}{p_0} = e^{-\frac{mgh}{kT}},$$

в которой только потенциальная энергия частицы в поле земли ( $mgh$ ) заменена на соответствующую энергию в неоднородном поле  $\left(-\frac{1}{2} \alpha E^2\right)$ .

Только-что указанная грубая модель молекулы позволяет все же дать еще порядок величины электрострикции (104f).

А именно, опыт показывает, что она дает правильный порядок величины для  $\alpha$ , если положить  $\varepsilon = \infty$  (проводящий шар), а для  $a$  взять величину действительного диаметра молекулы ( $10^{-8}$  см). Например, в поле  $300\,000 \frac{\text{вольт}}{\text{см}}$ , соответственно  $|E| = 1\,000$ , при  $T$ , равном 300, и принимая  $k = 1,37 \cdot 10^{-16}$ , будем иметь

$$\frac{\frac{1}{2} \alpha E^2}{kT} = \frac{10^{-24} \cdot 10^6}{2 \cdot 1,37 \cdot 10^{-16} \cdot 300} \approx 10^{-5}.$$

Следовательно, здесь речь идет всегда об очень незначительных эффектах, которые можно измерить только при очень большой тщательности.

Рассмотрим вкратце более общий вопрос о том, какие условия должны быть соблюдены для того, чтобы жидкость находилась в равновесии при действии на нее силы, даваемой уравнением (103). Единственное противодействие, которое может восстановить равновесие внутри покоящейся жидкости, есть выводимая из гидростатического давления  $p$  объемная сила (104а)  $\mathbf{f}_p = -\text{grad } p$ . Следовательно, условие равновесия будет

$$\mathbf{f}_e + \mathbf{f}_p = \mathbf{f}_e - \text{grad } p = 0.$$

Необходимым и достаточным условием того, чтобы электрическая сила  $\mathbf{f}_e$  находилась в равновесии с гидростатическим падением давления, будет

$$\mathbf{f}_e = \text{grad } p$$

или

$$\text{rot } \mathbf{f}_e = 0,$$

так как всякий безвихревой вектор можно, согласно § 9, представить в виде градиента некоторого скаляра. Из трех слагаемых, из которых составляется  $\mathbf{f}_e$ , третье слагаемое — всегда безвихревое. Первые два дают условие равновесия

$$\text{rot} \left\{ \rho \mathbf{E} - \frac{1}{8\pi} \mathbf{E}^2 \text{grad } \varepsilon \right\} = 0.$$

Если предположить, что плотность заряда  $\rho$  отлична от нуля только в тех местах, где диэлектрическая постоянная  $\varepsilon$  не изменяется от места к месту, то согласно общей формуле,

$$\text{rot} (f\mathbf{A}) = f \text{rot } \mathbf{A} + (\text{grad } f) \times \mathbf{A},$$

и принимая во внимание безвихревой характер  $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$ , получаем два условия:

$$\text{rot} (\rho \mathbf{E}) = -(\text{grad } \rho) \times (\text{grad } \varphi) = 0$$

и

$$\text{rot} (\mathbf{E}^2 \cdot \text{grad } \varepsilon) = (\text{grad } \mathbf{E}^2) \times (\text{grad } \varepsilon) = 0.$$

Последним условием мы уже пользовались выше при выводе электрострикции. Оно означает то, что поверхности  $\mathbf{E}^2 = \text{const}$  и  $\varepsilon = \text{const}$

совпадают. В самом деле, только при таком условии градиенты этих двух величин параллельны друг другу, что необходимо для того, чтобы их векторное произведение равнялось нулю. Так как, с другой стороны, мы предполагали, что  $\epsilon$  зависит только от плотности  $\delta$ , то это условие означает, следовательно, что  $\epsilon$ , а потому и плотность  $\delta$  должны быть функцией одного  $E^2$ . Но это находится в согласии с нашими предыдущими выводами относительно электрострикции.

Совершенно аналогично первое уравнение означает, что плотность заряда  $\rho$  должна быть функцией одного только потенциала. Этот случай практически важен для вопроса о поведении электролита, когда он находится в соприкосновении с металлическим электродом; вблизи его в общем существует падение потенциала, связанное с пространственным зарядом электролита (избыток одного сорта ионов по сравнению с другим). При этом плотность объемного заряда фактически зависит лишь от потенциала в соответствующем месте.

**§ 41. Механическая сила на поверхности диэлектрика.** С помощью уравнения (104с) предыдущего параграфа можно вычислить гидростатическое давление  $p$  в любом месте внутри незаряженного диэлектрика, если известно уравнение состояния  $p = p(\delta)$  диэлектрика, свободного от поля, а также зависимость диэлектрической постоянной  $\epsilon$  от плотности  $\delta$ . При применении этого уравнения необходимо указать на следующее обстоятельство: непосредственное экспериментальное значение разности давлений, даваемой (104с), состоит исключительно в том, что с ее помощью можно вычислить изменения плотности в электрическом поле, например, количество жидкости, всасываемой конденсатором. Наоборот, давление, вычисляемое по (104с), прямо ничего не говорит например, о силе, с которой диэлектрик действует на стенки сосуда, в который он заключен. Очень быстрое изменение диэлектрической постоянной, естественно имеющее место на поверхности раздела, имеет следствием, согласно общей формуле (104b), соответственно быстрое изменение давления  $p$ . Для примера рассмотрим следующую схему (рис. 34).

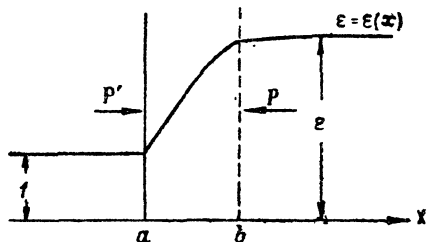


Рис. 34. Ход диэлектрической постоянной в поверхностном слое, простирающемся от  $a$  до  $b$ .

Проведем ось  $x$  координатной системы нормально к поверхности жидкости и заменим разрывное изменение  $\epsilon$  очень быстрым, но все же непрерывным, переходом. При  $x = a$ ,  $\epsilon$  должно иметь значение 1, отвечающее пустоте; начиная с  $x = b$ , мы находимся внутри диэлектрика. В точке  $x = a$  слева на диэлектрик давит поршень с силой  $p'$ , отнесенной к единице поверхности. Пусть диэлектрическая постоянная вещества поршня имеет также значение 1. Применим теперь к плотности жидкости между  $a$  и  $b$  общее условие равновесия (104b). Оно говорит, что между положениями  $a$  и  $b$  должна существовать такая разность давлений  $p' - p$ , которая как раз уравновешивает электрическую объемную силу, действующую на слой жидкости. Так как в нашем случае дело

идет очевидно только о составляющей силы по  $x$ , то здесь (104b) гласит

$$p' - p = \frac{1}{8\pi} \int_a^b \mathbf{E}^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} dx - \frac{1}{8\pi} \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} \left( \mathbf{E}^2 \frac{d\varepsilon}{d\delta} \delta \right) dx.$$

Слева стоит здесь разность давлений, действующая слева направо, а справа — электрическая объемная сила, действующая справа налево.

Так как, согласно предположению, при  $x = a$ ,  $\delta$  равняется нулю, то имеем

$$p' - p = \frac{1}{8\pi} \int_a^b \mathbf{E}^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} dx - \left( \frac{1}{8\pi} \mathbf{E}^2 \frac{d\varepsilon}{d\delta} \delta \right)_{x=b}. \quad (105)$$

Численное значение остающегося в этом выражении интеграла можно определить в общем виде, если принять во внимание, что тангенциальная составляющая  $\mathbf{E}$  и нормальная составляющая от  $\varepsilon \cdot \mathbf{E}$  являются непрерывными при прохождении через поверхность границы. Обозначим нормальную и тангенциальную составляющие индексами  $n$  и  $t$  и разложим

$$\mathbf{E}^2 = \mathbf{E}_t^2 + \mathbf{E}_n^2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_a^b \mathbf{E}^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} dx &= \int_a^b \mathbf{E}_t^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} dx + \int_a^b (\varepsilon \mathbf{E}_n)^2 \cdot \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} dx = \\ &= \mathbf{E}_t^2 (\varepsilon_b - 1) + (\varepsilon \mathbf{E}_n)^2 \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon_b} \right). \end{aligned}$$

Отнесем все величины без индекса, и в частности  $\mathbf{E}_n$ , к месту  $b$  внутри диэлектрика. Тогда

$$\int_a^b \mathbf{E}^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} dx = (\varepsilon - 1) \{ \mathbf{E}_t^2 + \varepsilon \mathbf{E}_n^2 \} \quad (105')$$

или также, прибавляя и вычитая в фигурных скобках  $\mathbf{E}_n^2$ ,

$$\int_a^b \mathbf{E}^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} dx = (\varepsilon - 1) \cdot \mathbf{E}^2 + (\varepsilon - 1)^2 \mathbf{E}_n^2.$$

Уравнение (105) принимает таким образом вид

$$p' - p = \mathbf{E}^2 \frac{1}{8\pi} \left\{ (\varepsilon - 1) - \frac{d(\varepsilon - 1)}{d\delta} \delta \right\} + \mathbf{E}_n^2 \cdot \frac{(\varepsilon - 1)^2}{8\pi}. \quad (105a)$$

Таким образом сила давления  $p'$ , действующая со стороны жидкости на неполяризующую стенку, превышает гидростатическое давление  $p$ , господствующее внутри, на величину (105a).

В области применимости формулы Клаузиуса-Мосотти (104d и e)

$$\varepsilon - 1 - \frac{d(\varepsilon - 1)}{d\delta} \delta = (\varepsilon - 1) \left( 1 - \frac{\varepsilon + 2}{3} \right) = -\frac{(\varepsilon - 1)^2}{3}.$$

Таким образом

$$p' - p = \frac{(\varepsilon - 1)^2}{8\pi} \left( \mathbf{E}_n^2 - \frac{1}{3} \mathbf{E}^2 \right)$$

или также

$$p' - p = \frac{(\varepsilon - 1)^2}{8\pi} \left( \frac{2}{3} \mathbf{E}_n^2 - \frac{1}{3} \mathbf{E}_t^2 \right). \quad (105b)$$

Ясно, что  $p'$  больше  $p$ , если  $\mathbf{E}$  нормальна к поверхности границы, и, наоборот, меньше  $p$ , если  $\mathbf{E}$  лежит в поверхности границы.

Позднее мы выведем соотношение (105а) еще раз чисто термодинамическим путем. Теперь же покажем значение общего соотношения (105) на двух простых примерах. Для этого выпишем его в виде:

$$p' = \frac{1}{8\pi} \int_a^b \mathbf{E}^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} dx + p - \frac{1}{8\pi} \mathbf{E}^2 \frac{d\varepsilon}{d\delta} \delta \quad (105c)$$

и применим выведенную выше формулу электрострикции для слабосжимаемых жидкостей, согласно которой величина

$$p - \frac{1}{8\pi} \mathbf{E}^2 \frac{d\varepsilon}{d\delta} \delta$$

всюду внутри жидкости имеет одинаковое значение. Значит, если погрузить (рис. 35) пластинки  $A$  и  $B$  в диэлектрическую жидкость, которая с своей стороны, вне поля находится под давлением  $p_0$ , то

$$p - \frac{1}{8\pi} \mathbf{E}^2 \frac{d\varepsilon}{d\delta} \delta = p_0. \quad (105d)$$

Сила, с которой жидкость втягивается в конденсатор, дается, следовательно, разностью

$$p' - p_0 = \frac{1}{8\pi} \int_a^b \mathbf{E}^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} dx. \quad (105e)$$

Этот результат часто заменяется утверждением, что на внешней поверхности жидкости, находящейся в конденсаторе, действует натяжение

$\frac{1}{8\pi} \mathbf{E}^2 \text{grad } \varepsilon$ , направленное наружу. К этому утверждению можно прийти, если пренебречь в нашем уравнении (103) характерным для электрострикции членом  $\frac{1}{8\pi} \text{grad} \left( \mathbf{E}^2 \frac{d\varepsilon}{d\delta} \delta \right)$ . Оказывается, что этот прием правильно указывает полную разность давлений  $p' - p_0$ , но ход изменения давления в отдельных случаях может быть совсем иным. Обычно на поверхностный слой жидкости, находящейся между пластинками  $A$  и  $B$ , действует, согласно (105b), вообще не натяжение, а давление. В самом деле, в нашей схеме  $\mathbf{E}_n$  равно нулю. Кроме того, внутри жидкости у нижнего конца конденсатора (в местах сильной неоднородности поля  $\mathbf{E}$ ) имеется сильное падение давления, даваемое (105d), и оно вгоняет жидкость в конденсатор и настолько по-

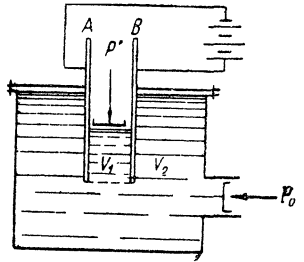


Рис. 35. К вычислению силы  $p' - p_0$  [ур-ние (105e)], с которой втягивается конденсатором диэлектрическая жидкость.

вышает давление в поверхностной зоне, что в сумме получается формула (105e).

Рассмотрим, наконец, еще действие силы на заряженное металлическое тело внутри электрической жидкости. Здесь имеется своеобразная трудность для понимания электростатического действия силы вообще. Это можно видеть на следующем простом примере. Пусть плоский конденсатор заряжен с поверхностной плотностью  $\pm\sigma$  и пусть вначале он находится в пустоте. Тогда первая пластинка испытывает со стороны второй силу притяжения, величиной  $\frac{1}{8\pi} E_0^2$  на каждый квадратный сантиметр ее поверхности, причем  $4\pi\sigma = |E_0|$ . Эта сила происходит от напряженности, которая создается зарядами второй пластинки на месте первой. Погрузим теперь весь конденсатор в электрическую жидкость, сохраняя при этом его заряды постоянными. При этом, как мы знаем из общих энергетических соображений § 36, сила притяжения уменьшается в  $\epsilon$  раз. Как надо понимать этот факт? — Если мы припишем металлу пластин конденсатора электрическую постоянную 1, то, как показывает на рис. 31 ход вектора  $\mathbf{E}$  между пластинками конденсатора, не может быть речи о том, чтобы при погружении напряженность на месте первой пластинки уменьшилась в  $\epsilon$  раз. Правда, в жидкости она стала в  $\epsilon$  раз меньше, чем перед тем в пустоте; но у самых пластинок, где расположены заряды, она несколько не изменила своего значения. Итак, сила, действующая на заряды первой пластинки, теперь, как и раньше, равна  $\frac{1}{8\pi} E_0^2$ . Уменьшение силы, действующей на пластину, совершается действием давления незаряженного диэлектрика, который раздвигает пластинки конденсатора. В самом деле, на 1 см<sup>2</sup> поверхности пластинки действует, согласно (105c), сила давления

$$p' = \frac{1}{8\pi} \int_a^b E^2 \frac{d\epsilon}{dx} dx + p - \frac{1}{8\pi} E^2 \frac{d\epsilon}{d\delta} \delta.$$

Из трех слагаемых два последние вместе дают в жидкости, согласно (105d), везде одинаковое значение, в частности, также и на внутренней и на внешней поверхностях каждой пластины, так что их результирующее действие равно нулю. Остающийся интеграл вычисляется из (105').  $E_t$  равна нулю,  $E_n$  имеет значение  $\frac{1}{\epsilon} E_0$ , так что в конечном счете сила давления, действующая на внутреннюю поверхность пластинки, равна

$$\frac{1}{8\pi} \cdot (\epsilon - 1) \cdot \frac{E_0^2}{\epsilon} = \frac{1}{8\pi} \left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right) E_0^2.$$

Общая сила, действующая на пластинку, получается вычитанием этого давления из кулоновской силы  $\frac{1}{8\pi} E_0^2$ , действующей на заряды. Только таким путем можно получить правильную общую силу  $\frac{1}{8\pi} \cdot \frac{1}{\epsilon} E_0^2$ , которой требует принцип энергии.

**§ 42. Максвелловы натяжения.** Созданная Фарадеем и Максвеллом теория не признает никаких сил дальнего действия. Согласно этой теории,



все силовые воздействия передаются электромагнитным полем непрерывно от одного тела к другому. Факт непрерывной (от точки к точке) передачи сил в упруго напряженной пружине вполне понятен. Подобным образом Фарадей усмотрел места нахождения электромагнитного силового воздействия в особом напряжении пространства, заполненного электрическими или магнитными линиями сил. Оно должно передавать силовое воздействие от одного заряда к другому. Представим себе, что система, находящаяся в электростатическом равновесии, разделена замкнутой, произвольной поверхностью  $S$  на две части. Обозначим часть, охватываемую  $S$ , через 1, остальную часть через 2. Тогда, согласно представлению Фарадея, общая сила, действующая со стороны 2 на 1, должна каким-то образом проникать через эту поверхность. При этом совсем безразлично, находится ли поверхность частью или целиком в пустоте. Строгое проведение этой концепции принадлежит Максвеллу, который показал, что общее силовое воздействие, производимое на часть 1 [с силой  $\mathbf{f}_e$  на 1 см<sup>3</sup> (103)]

$$\mathbf{F} = \int_{(1)} \mathbf{f}_e dv$$

можно представить как результат поверхностных сил, которые приложены к поверхности  $S$  этой части (при этом прежде всего надо иметь в виду, что указанное выражение для  $\mathbf{F}$  содержит лишь силовое воздействие со стороны 2 на 1; если два заряда находятся оба внутри 1, то в силу равенства действия и противодействия они ничего не прибавят к результирующей силе). Обозначим через  $\mathbf{T}$   $dS$  силу, которая действует на элемент  $dS$  граничной поверхности 1. Мы утверждаем вместе с Максвеллом: выражение для  $\mathbf{F}$  можно преобразовать так, что

$$\mathbf{F} = \iiint \mathbf{f} dv = \iint \mathbf{T} dS. \quad (106)$$

Действие со стороны 2 на 1 эквивалентно действию поверхностных сил  $\mathbf{T}$ . При этом  $\mathbf{T}$  по теории поля может зависеть только от величин поля в месте элемента поверхности  $dS$  и от ориентации  $dS$  (направление нормали) по отношению к направлению поля.

Составляющие  $\mathbf{f}$  можно, как оказывается, представить в виде некоторого расхождения, и потому можно произвести это преобразование на основании теоремы Гаусса. Вычислим составляющую  $\mathbf{F}$  по  $x$ ; мы будем искать, следовательно, такие величины  $T_{xx}$ ,  $T_{xy}$ ,  $T_{xz}$ , для которых

$$f_x = \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z}. \quad (106a)$$

Тогда для составляющих от  $\mathbf{f}$  по  $y$  и  $z$  должны иметь место соответственные же уравнения.

Если такое преобразование  $\mathbf{f}$  сделано, то теорема Гаусса сейчас же дает вектор поверхностной силы  $\mathbf{T}$ :

$$\left. \begin{aligned} T_x &= T_{xx} \cos(\mathbf{n}, x) + T_{xy} \cos(\mathbf{n}, y) + T_{xz} \cos(\mathbf{n}, z) \\ T_y &= T_{yx} \cos(\mathbf{n}, x) + T_{yy} \cos(\mathbf{n}, y) + T_{yz} \cos(\mathbf{n}, z) \\ T_z &= T_{zx} \cos(\mathbf{n}, x) + T_{zy} \cos(\mathbf{n}, y) + T_{zz} \cos(\mathbf{n}, z). \end{aligned} \right\} \quad (107)$$

Для того чтобы произвести преобразование, указанное в (106), положим сокращенно

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{d\delta} \cdot \delta = \beta, \quad (107a)$$

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} - \frac{1}{4\pi} \mathbf{E}^2 \text{ grad } \varepsilon + \frac{1}{8\pi} \text{ grad } (\beta \varepsilon \mathbf{E}^2).$$

Заменим далее  $\rho$  на  $\frac{1}{4\pi} \text{div } \mathbf{D}$  и воспользуемся для второго слагаемого тождеством

$$\mathbf{E}^2 \text{ grad } \varepsilon = \text{grad } (\mathbf{E}^2 \varepsilon) - 2 (\varepsilon \mathbf{E} \text{ grad } \mathbf{E}) - 2\varepsilon (\mathbf{E} \text{ rot } \mathbf{E}). \quad (107b)$$

В силу безвихревого характера  $\mathbf{E}$  имеем

$$\begin{aligned} f_x = & \frac{1}{4\pi} \mathbf{E}_x \left( \frac{\partial \mathbf{D}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{D}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{D}_z}{\partial z} \right) - \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{E} \mathbf{D}) + \\ & + \frac{1}{4\pi} \left( \mathbf{D}_x \frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial x} + \mathbf{D}_y \frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial y} + \mathbf{D}_z \frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial z} \right) + \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial x} (\beta \varepsilon \mathbf{E}^2) \end{aligned}$$

или

$$8\pi f_x = \frac{\partial}{\partial x} (2\mathbf{E}_x \mathbf{D}_x - \mathbf{E} \mathbf{D} + \beta \varepsilon \mathbf{E}^2) + \frac{\partial}{\partial y} (2\mathbf{E}_x \mathbf{D}_y) + \frac{\partial}{\partial z} (2\mathbf{E}_x \mathbf{D}_z).$$

Таким образом для  $f_x$  получено выражение вида (106a). Для составляющих Максвелловского тензора напряжений  $T$  круговой перестановкой получим

$$\begin{aligned} T = & \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix} = \\ = & \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{\varepsilon}{8\pi} (\mathbf{E}_x^2 - \mathbf{E}_y^2 - \mathbf{E}_z^2 + \beta \mathbf{E}^2) & \frac{\varepsilon}{4\pi} \mathbf{E}_x \mathbf{E}_y & \frac{\varepsilon}{4\pi} \mathbf{E}_x \mathbf{E}_z \\ \frac{\varepsilon}{4\pi} \mathbf{E}_y \mathbf{E}_x & \frac{\varepsilon}{8\pi} (\mathbf{E}_y^2 - \mathbf{E}_z^2 - \mathbf{E}_x^2 + \beta \mathbf{E}^2) & \frac{\varepsilon}{4\pi} \mathbf{E}_y \mathbf{E}_z \\ \frac{\varepsilon}{4\pi} \mathbf{E}_z \mathbf{E}_x & \frac{\varepsilon}{4\pi} \mathbf{E}_z \mathbf{E}_y & \frac{\varepsilon}{8\pi} (\mathbf{E}_z^2 - \mathbf{E}_x^2 - \mathbf{E}_y^2 + \beta \mathbf{E}^2) \end{array} \right\} \quad (108) \end{aligned}$$

Эти величины, будучи поставлены в (107), дают искомую систему поверхностных сил  $T$ . Рассмотрим несколько ближе эту связь между вектором поля  $\mathbf{E}$  и Максвелловыми натяжениями. Она оказывается при этом много проще, чем можно было бы ожидать при первом взгляде на формулы: прежде всего та часть натяжений, которая связана с зависимостью  $\beta$  диэлектрической постоянной от объема, появляется только в диагонали  $T$  и дает гидростатическое давление величины  $\frac{\varepsilon \beta}{8\pi} \mathbf{E}^2$ , действующее всегда нормально к  $dS$ . Но это можно было видеть непосредственно из первоначального вида  $\mathbf{f}$ . В дальнейшем мы не будем принимать во внимание эту часть, которая в пустоте всегда равна нулю,

а будем рассматривать только ту часть (108), которая получается из нее при  $\beta = 0$ . Выберем определенный элемент поверхности и поместим координатную систему таким образом, чтобы положительная ось  $x$  была направлена вдоль поля  $\mathbf{E}$ , а ось  $z$  была перпендикулярна как к нормали  $\mathbf{n}$  элемента поверхности, так и к напряженности. Если обозначить через  $\vartheta$  угол между нормалью к поверхности и напряженностью, а через  $|\mathbf{E}|$  величину напряженности, то имеем [рис. 36]

$$\mathbf{E}_y = 0, \mathbf{E}_z = 0, \cos(\mathbf{n}, x) = \cos \vartheta, \cos(\mathbf{n}, y) = \sin \vartheta, \cos(\mathbf{n}, z) = 0.$$

Таким образом для вектора  $\mathbf{T}$  поверхностной силы из (107) и (108) получается

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{T}_x &= \frac{\varepsilon}{8\pi} \mathbf{E}_x^2 \cos \vartheta \\ \mathbf{T}_y &= -\frac{\varepsilon}{8\pi} \mathbf{E}_x^2 \sin \vartheta \\ \mathbf{T}_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (109)$$

Отсюда получается следующее простое построение вектора  $\mathbf{T}$ : Абсолютная величина  $\mathbf{T}$

$$|\mathbf{T}| = \frac{\varepsilon}{8\pi} \mathbf{E}^2,$$

не зависит от ориентации элемента поверхности по отношению к полю. Единичный вектор, имеющий направление  $\mathbf{T}$ , получается отражением вектора  $\mathbf{n}$  (рис. 36), от направления  $\mathbf{E}$ . Действительно, составляющие построенного таким образом единичного вектора по  $x, y, z$  равны  $\cos \vartheta, -\sin \vartheta, 0$ , как это требуется по (109). Выбранное нами при выводе частное положение координатной системы, конечно, ни в коей мере не нарушает общности, а служит только для упрощения вывода.

Согласно указанного построения, угол между нормалью поверхности  $\mathbf{n}$  и вектором силы  $\mathbf{T}$  всегда делится пополам напряженностью. Следовательно, если мы повернем элемент поверхности по отношению к направлению поля, то увидим следующее: если после  $\mathbf{E}$  параллельно  $\mathbf{n}$ , то  $\mathbf{T}$  имеет также направление  $\mathbf{n}$ , и мы имеем чистое нормальное натяжение. Если выводить  $\mathbf{n}$  из положения  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{T}$  всегда поворачивается на тот же угол в противоположную сторону. При  $\vartheta = 45^\circ$   $\mathbf{T}$  лежит в плоскости элемента поверхности; мы имеем в этом случае чистое тангенциальное натяжение. При дальнейшем росте  $\vartheta$  последнее опять падает, уступая место нормальному давлению, которое одно только и остается, когда  $\mathbf{n}$  перпендикулярно к  $\mathbf{E}$ ; тогда  $\mathbf{T}$  антипараллелен  $\mathbf{n}$ . Величина  $\mathbf{T}$  остается при всем вращении неизменной. Знак  $\mathbf{E}$  не оказывает никакого влияния на  $\mathbf{T}$ . Тензор напряжения переносит чистое натяжение, если  $\mathbf{E}$  нормально к  $dS$ ; чистое давление, если  $\mathbf{E}$  лежит в плоскости  $dS$ .

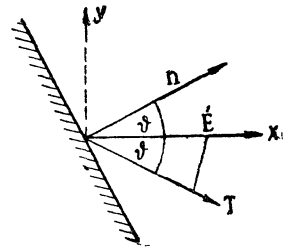


Рис. 36. Угол, образуемый Максвелловой поверхностной силой  $\mathbf{T}$  и нормалью  $\mathbf{n}$ , направлением  $\mathbf{E}$  силовых линий делится пополам.

Рассмотрим кратко в виде примера силу взаимодействия двух точечных зарядов в случае, когда оба заряда равны (отталкивание) или когда они равны и противоположны (притяжение). Поместим оба заряда на оси  $x$  на расстоянии  $+a$  и  $-a$  от начала. В качестве объема первой части нашей системы возьмем полушар, который описывается вокруг начала координат плоскостью  $yz$  и левой половиной некоторой сферы. Поверхностная сила, действующая на шаровую поверхность, ни-

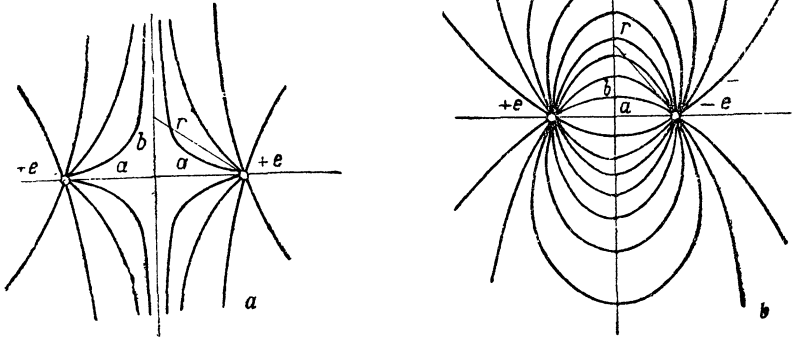


Рис. 37а. 37б. Отталкивание равных точечных зарядов и притяжение равных, но противоположных точечных зарядов описываются Максвелловыми натяжениями, изображенными в плоскости симметрии.

чего не прибавляет к общей силе, так как на ней  $|\mathbf{T}|$  стремится к нулю, как  $\frac{1}{R^4}$ . Остается только действие силы, переносимое плоскостью симметрии.

При равных зарядах ( $e_1 = e_2 = e$ ) (рис. 37а) поле на этой плоскости всюду параллельно к  $dS$ ; на плоскость производится чистое давление. И притом

$$\mathbf{E}_x = 0, \quad \mathbf{E}_y = 2 \frac{e}{\epsilon r^2} \cdot \frac{y}{r}, \quad \mathbf{E}_z = 2 \frac{e}{\epsilon r^2} \cdot \frac{z}{r}.$$

Если  $b = \sqrt{y^2 + z^2}$  есть расстояние точки плоскости симметрии от начала, то в ней, следовательно,

$$|\mathbf{T}| = \frac{\epsilon}{8\pi} \mathbf{E}^2 = \frac{1}{2\pi} \frac{e^2 b^2}{\epsilon r^6} = \frac{e^2}{2\pi\epsilon} \frac{b^2}{(a^2 + b^2)^3}.$$

Поверхность  $dS$  кольца  $b$ ,  $db$  есть  $\pi db^2$ . Подставляя  $b^2 = \lambda$ , получим, что общая сила давления, действующая на рассматриваемую плоскость,

$$\mathbf{F} = \int \mathbf{T} dS = \frac{e^2}{2\epsilon} \int_0^\infty \frac{\lambda d\lambda}{(a^2 + \lambda)^3} = \frac{e^2}{2a^2\epsilon} \cdot \int_0^\infty \frac{\mu d\mu}{(1 + \mu)^3}.$$

Остающийся затем определенный интеграл при интегрировании по частям дает

$$\left| -\frac{1}{2} \frac{\mu}{(1 + \mu)^2} \right|_0^\infty + \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{d\mu}{(1 + \mu)^2} = \frac{1}{2},$$

так что для  $\mathbf{F}$  получается, как это и должно быть, кулоновское отталкивание  $\frac{e^2}{\varepsilon \cdot (2a)^2}$ .

При равных и противоположных зарядах  $e_1 = -e_2 = e$  силовые линии поля всюду идут нормально к плоскости симметрии. Мы имеем чистое натяжение. И притом

$$E_x = 2 \frac{e}{\varepsilon \cdot r^2} \cdot \frac{a}{r}; \quad E_y = E_z = 0;$$

следовательно

$$|\mathbf{T}| = \frac{e^2}{2\pi\varepsilon} \frac{a^2}{(a^2 + b^2)^3}$$

и потому

$$|\mathbf{F}| = \frac{e^2}{2\varepsilon} \int_0^\infty \frac{a^2 d\lambda}{(a^2 + \lambda)^3} = \frac{e^2}{2\varepsilon a^2} \cdot \int_0^\infty \frac{u d\mu}{(1 + \mu)^3} = \frac{e^2}{\varepsilon (2a)^2}.$$

Рассмотрение хода линий поля на двух рис. 37а и 37б позволяет непосредственно понять действие Максвелловых натяжений: растяжение в направлении линий поля (рис. 37б), сжатие в перпендикулярном к ним направлении (рис. 37а).

#### IV. ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

**§ 43. Законы Ома и Джоуля.** Из тех уравнений, которыми мы до сих пор пользовались при описании электростатического поля, некоторые остаются справедливыми и в дальнейшем, при более общих электромагнитных процессах. Сюда относятся уравнения, выражающие зависимость между  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$ , связь между расхождением  $\mathbf{D}$  и электрическими зарядами и выражение для плотности  $u_{эл}$  электрической энергии, т. е.

$$\mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{D}, \quad \text{div } \mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad u_{эл} = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}\mathbf{D}).$$

Наоборот, только электростатике принадлежат уравнения  $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$  и  $\varphi = \text{const}$  в проводниках, т. е., значит, безвихревой характер  $\mathbf{E}$  и обращение в нуль  $\mathbf{E}$  внутри однородных проводников электричества.

Откажемся теперь от последнего из этих двух условий. Экспериментально осуществим это, например, тем, что мы обкладки конденсатора, заряженного до разности потенциалов  $\varphi_2 - \varphi_1$ , соединим металлической проволокой. При наличии такого металлического соединения потенциал в проволоке сейчас же перестает быть постоянным, так как на ее концах он имеет значения  $\varphi_2$  и  $\varphi_1$ . Внутри проволоки возникает поэтому электрическое поле, и условие электростатического равновесия уже не выполняется. И, действительно, через проволоку заряды конденсатора  $+e$  и  $-e$  выравниваются. Равновесие вновь наступает только тогда, когда заряды, а потому и поле конденсатора исчезнут. Во время такого выравнивания по проволоке идет электрический ток, сила которого будет

$$I = - \frac{de}{dt}.$$

Что при таком изменении заряда конденсатора во времени действительно в проволоке что-то происходит, можно судить по тому, что в ней наблюдается выделение тепла, и что в окружающем ее пространстве оказывается магнитное поле. Появление магнитного поля обуславливает собой усложнение процесса, которым мы будем заниматься во всей полноте лишь в дальнейших главах. Пока сила тока  $I$  остается постоянной, не изменяется и образуемое им магнитное поле. Вследствие этого мы можем в известной мере говорить о законах стационарного (это значит: постоянного во времени) тока, совсем не касаясь при этом сопровождающего его магнитного поля. Правда, в нашем примере мы можем только приблизиться к условию постоянного тока, для чего должны выбрать сопротивление проволоки и емкость конденсатора возможно большими. Осуществление вполне постоянного тока невозможно со средствами чистой электростатики. Достигают этого только тем, что с помощью особого приспособления, которое чудно чистой электростатике, искусственно поддерживают постоянно напряжений на обкладках конденсатора (например, с помощью гальванических элементов, аккумуляторов или термоэлементов). Мы вернемся к этим приспособлениям в следующих параграфах.

Остановимся пока на приближающемся к стационарному разряду конденсатора с очень большой емкостью. Измеряя скорость разряда —  $\frac{de}{dt}$ , можно показать справедливость закона Ома

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R}. \quad (110)$$

$R$  называется сопротивлением проволоки и зависит только от материала и размеров последней. Если  $l$  означает длину проволоки,  $q$  — ее поперечное сечение, то

$$R = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{l}{q}, \quad (110a)$$

где теперь величина  $\lambda$  зависит только от материала проволоки. Величину  $\lambda$  называют электропроводностью,  $\frac{1}{\lambda}$  называется удельным сопротивлением, которое равно сопротивлению кубика с ребром в 1 см ( $l = 1$ ,  $q = 1$ ); (110) представляет собой ту форму закона Ома, в которой его можно непосредственно наблюдать. В теории поля она однако не употребительна, так как последняя должна брать за свои положения только такие утверждения, которые относятся к непосредственно окружающему точку пространству. Чтобы найти эту дифференциальную форму закона Ома, предположим, что соотношение, найденное для проволоки, как целого, остается верным и для любого произвольно вырезанного из нее элемента объема. За таковой выберем малый цилиндр, ориентированный в направлении поля, длины  $dl$ , с поперечным сечением  $dS$  (нормальным к полю). Для такого цилиндра, согласно (110), если  $d\varphi$  означает разность потенциалов, существующую на концах  $dl$ ,

$$I = -\frac{d\varphi}{R}, \quad \frac{1}{R} = \lambda \cdot \frac{dS}{dl},$$

или также

$$\frac{I}{dS} = -\lambda \frac{d\varphi}{dl}.$$

Напишем это уравнение в векторной форме

$$\mathbf{i} = \lambda \cdot \mathbf{E}, \quad (111)$$

введя для этого вектор плотности тока  $\mathbf{i}$ ; последний определяется тем, что  $\mathbf{i}_n dS$  представляет количество электричества, проходящее в единицу времени через элемент поверхности  $dS$  в направлении его нормали  $\mathbf{n}$ . Уравнение (111) есть искомая дифференциальная формулировка закона Ома и одновременно представляет собой подходящее для теории поля определение  $\lambda$ . Этот закон остается неизменным также при процессах, изменяющихся во времени, в то время как (110) ограничивается случаями постоянного тока.

Мы должны указать на то, что (110) применимо только к изотропным веществам, свойства которых, значит, не зависят от направления. В анизотропных телах (например, в кристаллах или упругонапряженных материалах) электропроводность, вообще говоря, зависит еще от направления прохождения тока. Тогда  $\lambda$  является уже не скаляром, а представляет собой симметричный тензор. Уравнение (111) надо читать тогда как тензорное уравнение, причем векторы  $\mathbf{i}$  и  $\mathbf{E}$  тогда уже не параллельны друг другу, а подчиняются соотношению, которое, например, для  $\mathbf{i}_x$ , имеет вид

$$\mathbf{i}_x = \lambda_{xx} \mathbf{E}_x + \lambda_{xy} \mathbf{E}_y + \lambda_{xz} \mathbf{E}_z,$$

и аналогично для  $\mathbf{i}_y$  и  $\mathbf{i}_z$ . Но мы в последующем ограничимся одними изотропными веществами.

Закон Джоуля определяет количество тепла, выделяющегося в проволоке, по которой идет ток  $I$ . В случае нашего конденсатора, коротко замкнутого проволокой, в единицу времени выделяется количество тепла

$$Q = -(\varphi_2 - \varphi_1) \frac{de}{dt} = (\varphi_2 - \varphi_1) \cdot I = RI^2;$$

мощность, исчезающая во время разряда конденсатора, количественно равна джоулеву теплу  $RI^2$ . Отметим здесь еще раз, что мы при этом пренебрегли изменением магнитной энергии поля, связанным с изменением силы тока. Учет этой энергии даст нам позднее закон индукции.—От последнего уравнения можно сейчас же перейти к дифференциальной форме; для этого отнесем закон Джоуля к прежнему элементу объема  $dv = dS \cdot dl$ . В нем

$$R = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{dl}{dS} \quad \text{и} \quad I = \mathbf{i} dS = \lambda E dS.$$

Таким образом джоулево тепло, отнесенное к единице объема, будет

$$\frac{Q}{dv} = \lambda E^2 = \mathbf{i} E. \quad (112)$$

$\mathbf{i} E$  есть тепло, выделяемое в единице объема за единицу времени. Так же, как и интегральный закон  $Q = (\varphi_2 - \varphi_1) I$ , его можно вывести из принципа энергии. Общее обоснование его мы дадим позднее (§ 52) в электродинамике. Для случая же, когда сила тока меняется очень

медленно, поле  $\mathbf{E}$  можно в первом приближении рассматривать как поле безвихревое, и для изменения энергии поля

$$U = \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{E}\mathbf{D}) dv,$$

пользоваться выражением, которое мы имели в электростатике [уравнение (100)]

$$\frac{dU}{dt} = \int \varphi \frac{\partial \rho}{\partial t} dv.$$

$\rho$  пусть теперь будет отличной от нуля и внутри проводника. Рассмотрим только то изменение плотности заряда  $\rho$ , которое вызывается током проводимости  $\mathbf{i}$ . Согласно определению  $\mathbf{i}$

$$\frac{d}{dt} \int \rho dv = - \int \mathbf{i}_n dS;$$

отсюда по теореме Гаусса

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \operatorname{div} \mathbf{i}.$$

Но вообще

$$- \varphi \operatorname{div} \mathbf{i} = - \operatorname{div} (\varphi \mathbf{i}) + (\mathbf{i}, \operatorname{grad} \varphi).$$

Поэтому, интегрируя по всей системе, получим

$$\frac{dU}{dt} = \int (\mathbf{i} \operatorname{grad} \varphi) dv = - \int (\mathbf{i}\mathbf{E}) dv.$$

Но это есть как раз результат, ожидаемый согласно (11): уменьшение энергии поля за секунду равно джоулеву теплу, выделяемому во всей системе. Отметим при этом, что вывод является не вполне точным, так как в полях, изменяющихся во времени,  $\mathbf{E}$  уже не является безвихревым.

**§ 44. Ток проводимости. Ток смещения. Ток поляризации.** Постоянный ток подчиняется общему правилу, что через любое сечение проводника протекает одинаковый ток  $I$ . Еще более общее по ожеию гласит, что при постоянном токе, распределенном в объеме, плотность тока  $\mathbf{i}$  нигде не имеет источников. В самом деле, если где-нибудь будет источник  $\mathbf{i}$ , то там должно наблюдаться изменение плотности заряда во времени, а, следовательно, и изменение поля  $\mathbf{E}$ . Поэтому при постоянном токе всюду справедливы условия:

(а)  $\operatorname{div} \mathbf{i} = 0$  внутри;

(б) непрерывность  $\mathbf{i}_n$  на границе двух проводников.

Таким образом на границе двух проводников мы имеем два пограничных условия: непрерывность нормальной составляющей  $\lambda \mathbf{E}$  и тангенциальной составляющей  $\mathbf{E}$ . Отсюда следует, что при постоянном токе линии тока преломляются на границе двух проводников с электропроводностями  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  так же, как и линии смещения на границе двух изоляторов с диэлектрическими постоянными  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ , если только  $\epsilon_1 : \epsilon_2$  равно  $\lambda_1 : \lambda_2$  (ср. рис. 32).



Непостоянный ток, какой, например, имеется при рассмотренном нами выше разряде конденсатора, вообще говоря, связан с изменением плотности заряда во времени. И притом, согласно теореме Гаусса, эта зависимость будет иметь вид

$$\operatorname{div} \mathbf{i} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Но так как, с другой стороны, всегда  $4\pi\rho = \operatorname{div} \mathbf{D}$ , то для тока, изменяющегося во времени, получим

$$\operatorname{div} \mathbf{i} = - \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (113)$$

Поэтому, если ввести

$$\mathbf{c} = \mathbf{i} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (114)$$

то всегда будут иметь место условия:

$$\operatorname{div} \mathbf{c} = 0 \quad \text{внутри};$$

$c_n$  непрерывна на границе.

Ток проводимости  $\mathbf{i}$  дополняется током смещения  $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$  до полного тока  $\mathbf{c}$ , который нигде не имеет источников. Введение этого полного тока, свободного от источников, принадлежит Максвеллу. Позднее в общей электродинамике он будет иметь основное значение. Простой пример приложимости этого понятия дает тот же плоский конденсатор, коротко замкнутый проволокой: проходящий по проволоке ток проводимости

$$I = \frac{de}{dt}$$

оканчивается на обкладке конденсатора. Если, с другой стороны  $S$  есть площадь пластинки и  $\sigma$  — поверхностная плотность ее заряда, то внутри изолятора существует смещение

$$\mathbf{D} = 4\pi\sigma = 4\pi \cdot \frac{e}{S}.$$

В то время, как по проволоке проходит ток  $I$ ,  $\mathbf{D}$  изменяется таким образом, что полный ток смещения в изоляторе будет

$$S \cdot \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\partial e}{\partial t} = I.$$

Он имеет ту же величину, что и ток проводимости в проволоке. Последний находит в токе смещения свое продолжение внутри соприкасающегося с проводником изолятора; при этом источников на границе не наблюдается.

Для того, чтобы дать общую интерпретацию (114), всякому телу надо приписать одновременно электропроводность  $\lambda$  и диэлектрическую постоянную  $\epsilon$ . Тогда  $\mathbf{c}$  будет

$$\mathbf{c} = \lambda \mathbf{E} + \frac{\epsilon}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Работа, совершаемая полем  $\mathbf{E}$  над полным током в единице объема за единицу времени, равна поэтому

$$(\mathbf{cE}) = \lambda \mathbf{E}^2 + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\varepsilon}{8\pi} \mathbf{E}^2 \right).$$

С правой стороны она выступает как джоулево тепло  $\lambda \mathbf{E}^2$  и как увеличение энергии поля  $\frac{\varepsilon}{8\pi} \mathbf{E}^2$ .

В практических применениях те два слагаемых, из которых составляется  $\mathbf{c}$ , имеют величину различного порядка. В абсолютных изоляторах существует только ток смещения. Наоборот, в металлических проводниках ток проводимости настолько велик по сравнению с током смещения, что последним практически всегда можно пренебречь. Только при очень быстро изменяющихся полях (видимый свет или еще более короткие волны) ток смещения в металлах становится также заметным.

Уравнения

$$\varrho = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} (\varepsilon \mathbf{E})$$

и

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = - \operatorname{div} (\lambda \mathbf{E})$$

позволяют решить вопрос, как происходит во времени растекание заряда, который существует вначале внутри проводника. Если рассматривать  $\sigma$  и  $\varepsilon$  как постоянные, то, исключая  $\mathbf{E}$ , получим

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = - \frac{4\pi\lambda}{\varepsilon} \varrho$$

и, интегрируя,

$$\varrho = \varrho_0 \cdot e^{-\frac{t}{\vartheta}}, \quad \vartheta = \frac{\varepsilon}{4\pi\lambda}.$$

Величину  $\vartheta$  называют временем релаксации. Это есть то время, по истечении которого плотность заряда уменьшается в  $e$  раз.

Оно указывает также порядок величины того промежутка времени, который необходим, чтобы установилось электростатическое равновесие. Рассмотрим кое-какие численные примеры; здесь, правда, существует некоторая неопределенность, поскольку мы очень мало знаем о постоянной  $\varepsilon$  у металлов. Однако, нет никакого основания думать, что у металлов порядок величины диэлектрической постоянной  $\varepsilon$  сильно отличается от 1. Мы найдем поэтому порядок величины времени релаксации, если удовлетворимся указанием величины  $\frac{\vartheta}{\varepsilon} = \frac{1}{4\pi\lambda}$ :

	$R_0$	$\lambda = 9 \cdot 10^{11} : R_0$	$1 : 4\pi\lambda = \frac{\vartheta}{\varepsilon}$
Медь . . . . .	$1,7 \cdot 10^{-6}$ ом	$53 \cdot 10^{16}$ сек. <sup>-1</sup>	$0,15 \cdot 10^{-18}$ сек.
Платина . . . . .	$10,7 \cdot 10^{-6}$ „	$8,4 \cdot 10^{16}$ сек. <sup>-1</sup>	$0,95 \cdot 10^{-18}$ сек.
Висмут . . . . .	$120 \cdot 10^{-6}$ „	$0,75 \cdot 10^{16}$ сек. <sup>-1</sup>	$10,6 \cdot 10^{-18}$ сек.

Таким образом для времени релаксации получаются чрезвычайно малые значения. Из результата  $\vartheta = 10^{-18}$  сек. больше ничего вывести нельзя, так как для столь быстро переменных процессов феноменологический метод, применяемый в этой книге, теряет смысл. Наоборот, заслуживают внимания численные значения  $\lambda$ . Они имеют размерность сек.<sup>-1</sup>, т. е. размерность частоты. Во всех формулах, которые описывают поведение металлов, по отношению к периодическим переменным полям, решающее значение имеет отношение числа перемен  $\nu$  поля к частоте, указываемой  $\lambda$ . Обратим внимание на то, что частота ультрафиолетового света при длине волны  $0,3 \mu$  достигает только  $10^{15}$  сек.<sup>-1</sup>.

В токе смещения  $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$  соединены, собственно, два совершенно различных элемента:

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t},$$

т. е. ток смещения в пустоте и ток поляризации. Согласно данному выше (§ 31) определению вектора  $\mathbf{P}$ ; кажется вполне естественным, что изменение  $\mathbf{P}$  во времени выступает как плотность тока. Именно, если  $\mathbf{P}$  изменяется на величину  $d\mathbf{P}$ , то по указанному определению это означает, что через элемент поверхности  $dS$  проходит количество электричества  $(d\mathbf{P} \cdot \mathbf{n})dS$ .

Таким образом новым элементом, характерным для теории Максвелла, остается только ток смещения в пустоте  $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ . Первоначальному пониманию Фарадея—Максвелла разложение  $\mathbf{D}$  на  $\mathbf{E}$  и  $4\pi\mathbf{P}$ , которое в настоящее время кажется вполне естественным, было совершенно чуждо. Прежде склонялись к воззрению, что в пустоте так же, как и в диэлектрике, имеются положительные и отрицательные заряды, связанные друг с другом квази упругими силами, и соответственно этому толковали вектор  $\frac{1}{4\pi} \mathbf{E}$  как поляризацию пустоты. Обсуждение этого представления и предложения соответствующей модели эфира играли большую роль в истории электродинамики. Однако эти усилия оказались бесплодными. Только ток поляризации можно представлять себе как действительный перенос зарядов. Поэтому, если полный ток, не имеющий источников, написать в виде

$$\mathbf{c} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

то оба первые члена представляют действительный перенос зарядов, который третьим членом дополняется до вектора, поле которого не имеет источников.

**§ 45. Стронние силы и электродвижущая сила.** При выводе данного выше вида закона Ома (111)

$$\mathbf{i} = \lambda \mathbf{E}$$

мы ограничивались однородными проводниками. Этот вид не применим для случая неоднородных проводников и для переходного слоя от одного проводника к другому. Согласно этому уравнению, при  $\mathbf{i} = 0$ ,  $\mathbf{E}$

должно было бы равняться нулю. В действительности же наблюдают, это для того, чтобы сохранить равновесие (это значит, чтобы не было тока), значение напряженности в неоднородной области должно быть, вообще говоря, отлично от нуля. В таком месте напряженность  $\mathbf{E}$  не является, следовательно, единственной причиной возникновения тока. Должны существовать, наоборот, еще другие силы, которые стремятся произвести ток в проводнике. Учтем эти силы, вводя для этого новый вектор  $\mathbf{E}^{(e)}$  и давая закону Ома более общий вид:

$$\mathbf{i} = \lambda (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{(e)}). \quad (115)$$

Для краткости назовем  $\mathbf{E}^{(e)}$  сторонней силой (применяя при этом не совсем правильно слово сила); это есть, значит, вектор, который зависит от рода неоднородности в соответствующем месте, и который совместно с напряженностью  $\mathbf{E}$  в этом месте создает согласно (115) плотность тока  $\mathbf{i}$ .

Хотя для феноменологической теории это допущение совершенно достаточно, причем она рассматривает поле сторонней силы  $\mathbf{E}^{(e)}$  как данное, для достижения наглядности все же будет полезно, если мы немного остановимся на механизме возникновения этой силы в не-скольких случаях.

Появление  $\mathbf{E}^{(e)}$  становится особенно ясным, когда в качестве проводника мы возьмем разбавленный водный раствор сильного электролита (например,  $\text{HCl}$ ), а в качестве неоднородности — переменную от места к месту концентрацию последнего. Пусть поля вообще нет. Тогда начнется диффузионный процесс, который стремится выравнять различия в концентрации. Практически электролит является вполне диссоциированным на  $\text{H}^+$  и  $\text{Cl}^-$ -ионы, которые диффундируют независимо друг от друга. Но подвижность, а потому и скорость диффузии  $\text{H}^+$ -ионов много больше, чем подвижность и скорость диффузии  $\text{Cl}^-$ -ионов. Следствием этого является электрический ток в направлении падения концентрации, ибо это последнее будет перегонять в места с малой концентрацией больше  $\text{H}^+$ -ионов, чем  $\text{Cl}^-$ -ионов. Мы видим, что причиной сторонней силы  $\mathbf{E}^{(e)}$  будет в данном случае диффузионное движение. Этот ток придает более разбавленным частям раствора положительный заряд, а более концентрированным — отрицательный; вследствие этого появляется электрическое поле такого направления, что диффузия частиц  $\text{H}^+$  затормаживается, а диффузия  $\text{Cl}^-$ -ионов, наоборот, ускоряется. В конце концов достигается состояние электрического равновесия, при котором различие в скорости диффузии двух сортов ионов как раз уравнивается образовавшимся полем. Тогда мы имеем состояние, при котором ток отсутствует; при этом должно существовать электрическое поле  $\mathbf{E}$ , которое как раз уравнивает стороннее поле  $\mathbf{E}^{(e)}$ :

$$\mathbf{E} + \mathbf{E}^{(e)} = 0.$$

Между векторами  $\mathbf{E}^{(e)}$  и  $\mathbf{E}$  имеется основное различие, которое нужно определенно подчеркнуть:  $\mathbf{E}^{(e)}$  существует внутри электролита только тогда, когда имеется падение концентрации, отличное от нуля;

в окружающей пустоте или в диэлектрике  $\mathbf{E}^{(e)}$  поэтому всегда равно нулю. Совсем иначе ведет себя при этом электростатическое поле  $\mathbf{E}$ ; правда, внутри электролита при отсутствии тока всюду  $\mathbf{E} = -\mathbf{E}^{(e)}$ . Но вне электролита  $\mathbf{E}$  определяется по правилам электростатики (непрерывность тангенциальной составляющей  $\mathbf{E}$  на пограничной поверхности).  $\mathbf{E}$  является, следовательно, при всех обстоятельствах безвихревым; наоборот, интеграл  $\oint \mathbf{E}^{(e)} ds$  по замкнутому контуру может равняться нулю только в особых исключительных случаях, именно тогда, когда, во-первых, сторонние силы распределены так, что внутри проводника они могут компенсироваться электростатическим полем, и когда, во-вторых, путь интегрирования идет целиком внутри этого проводника. Только в таких случаях можно говорить о сторонней разности потенциалов.

Выведем еще формулу для стороны силы, образуемой падением концентрации в электролите. Пусть  $n$  — число молекул  $\text{HCl}$  в  $1 \text{ см}^3$ , т. е. число как  $\text{H}^+$ -ионов, так и  $\text{Cl}^-$ -ионов, и пусть оно дано как функция координат.  $D_+$  и  $D_-$  — коэффициенты диффузии;  $B_+$  и  $B_-$  — подвижности двух сортов ионов;  $+e$  и  $-e$  — их заряды.

$D_+$  и  $B_+$  определяются следующим образом:

$-D_+ \text{ grad } n$  есть вектор потока положительных ионов, создаваемый диффузией (число частиц, проходящих через квадратный сантиметр за одну секунду).

$B_+ \cdot \mathbf{F}$  есть скорость, которую приобретает положительный ион под действием силы  $\mathbf{F}$ .

Соответствующее имеет место для  $D_-$  и  $B_-$ .

Под действием диффузии и поля  $\mathbf{E}$  полная плотность тока будет, следовательно,

$$\mathbf{i} = -e(D_+ - D_-) \text{ grad } n + e^2(B_+ + B_-) n \mathbf{E}$$

или также

$$\mathbf{i} = e^2 n (B_+ + B_-) \left\{ \mathbf{E} - \frac{1}{e} \frac{D_+ + D_-}{B_+ + B_-} \text{ grad } (\ln n) \right\}.$$

Таким образом мы дали уравнению как раз тот вид, который соответствует закону Ома (115). И притом, как дает сравнение с (115), для нашего бинарного электролита

$$\lambda = e^2 n (B_+ + B_-)$$

$$e \mathbf{E}^{(e)} = - \frac{D_+ + D_-}{B_+ + B_-} \text{ grad } (\ln n).$$

В нашем примере направление  $\mathbf{E}^{(e)}$  совпадает, следовательно, с направлением быстрого падения концентрации. Между какими-нибудь двумя точками с концентрациями  $n_1$  и  $n_2$  мы имеем стороннюю разность потенциалов  $E_1^{(e)} - E_2^{(e)}$ , которая определяется инте-

гированием вдоль кривой, целиком проходящей в растворе

$$e(E_2^{(e)} - E_1^{(e)}) = +e \int_2^1 \mathbf{E}_s^{(e)} ds = \frac{D_+ - D_-}{B_+ + B_-} \cdot \ln \frac{n_2}{n_1}.$$

При отсутствии тока устанавливается электростатическая разность потенциалов, которая равна и противоположна сторонней разности потенциалов:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = - (E_2^{(e)} - E_1^{(e)}).$$

Для полноты заметим, что согласно очень общей теореме статистической механики между  $D$  и  $B$  существует численная связь

$$D = kT \cdot B$$

( $k$  — Больцмановская постоянная  $= 1,37 \cdot 10^{-16}$ ;  $T$  — абсолютная температура), и что число

$$\nu = \frac{B_+}{B_+ + B_-}$$

в электрохимии называют числом переноса. Тогда

$$e(E_2^{(e)} - E_1^{(e)}) = kT(2\nu - 1) \ln \frac{n_2}{n_1}.$$

Порядок величины этой разности потенциалов выясняется численным примером:  $\ln \frac{n_2}{n_1} = 1$ ,  $n_2 : n_1 = 2,78$ ,  $\nu = 1$ ,  $T = 300$ ,  $e = 4,80 \cdot 10^{-10}$ . Это дает для разности потенциалов

$$\frac{1,37 \cdot 10^{-16} \cdot 300}{4,80 \cdot 10^{-10}} = 0,86 \cdot 10^{-4} \text{ CGS единиц} = 0,026 \text{ вольт.}$$

Другой пример появления сторонней силы дает соприкосновение металла с электролитом. Если, например, медный стержень погрузить в разбавленный раствор сернокислой меди, то прежде всего небольшое количество меди переходит в раствор в виде  $\text{Cu}^{++}$ -ионов. Следовательно, от меди в электролит идет ток. Причиной „сторонней силы“ является здесь упругость растворения меди. Ток прекращается благодаря тому, что он создает отрицательный заряд на меди и положительный заряд раствора и тем самым в непосредственно прилегающем слое жидкости напряженность, направленную к меди. В состоянии равновесия напряженность как раз уравнивает „стороннюю силу“ упругости растворения. И здесь следствием „сторонней“ разности потенциалов является равная ей, но противоположная по знаку электростатическая разность потенциалов

$$\varphi_{12} = \int_2^1 \mathbf{E} ds = \int_1^2 \mathbf{E}^{(e)} ds$$

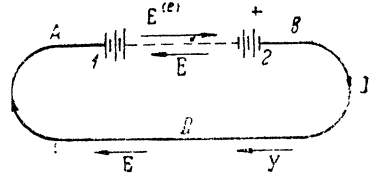
между внутренностью металла (1) и однородным раствором (2). В электролите переходная зона, в которой  $\mathbf{E}^{(e)}$  значительно отлично от нуля,

обычно настолько тонка, что с известным правом говорят о скачке потенциала  $\varphi_{12}$  на границе металл-электролит. Его существованием и свойством объясняется в существенных чертах действие гальванического элемента.

В качестве третьего случая сторонней разности потенциалов упомянем о месте соприкосновения двух различных металлов. В этом случае ток вызывается различием движения электронов в металлах; он прекращается только после того, как установится определенная разность потенциалов между металлами. Подробное изложение этого процесса будет сделано нами в электронной теории металлов.

**§ 46. Гальваническая цепь.** Рассмотрим так называемую цепь, т. е. несколько включенных друг за другом различных проводников, которые как на себе, так и на своих границах могут иметь любые сторонние силы. Но начало (1) и конец (2) цепи пусть будут из одного материала. Тогда в случае отсутствия тока между этими концами существует некоторая разность потенциалов, которая дается интегралом по контуру всех сторонних сил поля

$$\varphi_{12} \equiv \varphi_2 - \varphi_1 = \int_1^2 \mathbf{E}_s^{(e)} ds,$$



причем путь интегрирования должен проходить всюду внутри цепи. Как только мы приведем оба конца цепи в соприкосновение друг с другом (замкнутая цепь  $BDA$ ), электростатическое равновесие становится невозможным, так как интеграл  $\oint \mathbf{E}^{(e)} ds$ , взятый по пути  $ABDA$ , теперь отличен от нуля, потому что в замыкающей однородной проволоке  $BDA$  всюду  $\mathbf{E}^{(e)} = 0$ ; следовательно,

$$\oint \mathbf{E}^{(e)} ds = \int_1^2 \mathbf{E}^{(e)} ds = E_{12}^{(e)}.$$

Таким образом электростатическим полем невозможно компенсировать  $\mathbf{E}^{(e)}$ . Поэтому согласно (115) по цепи должен идти электрический ток. Когда ток разовьется до величины

$$\mathbf{i} = \lambda (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{(e)}),$$

то возникнут опять условия для стационарности явления.

Постоянный ток характеризуется отсутствием источников:  $\text{div } \mathbf{i} = 0$ ; при этом напряженность  $\mathbf{E}$  всюду должна удовлетворять уравнению  $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ . Эти два условия достаточны для того, чтобы при данных  $\lambda$  и  $\mathbf{E}^{(e)}$  вычислить как  $\mathbf{i}$ , так и  $\mathbf{E}$ .

Рассмотрим, как пример подобных вычислений, линейную цепь тока. Если  $q$  есть сечение проводника (нормальное к линиям тока), а  $ds$  — линейный элемент в направлении прохождения тока, то

$$\mathbf{i} ds = \frac{1}{q} I ds.$$

То, что  $\mathbf{i}$  не имеет источников, выражается здесь в том, что через всякое сечение идет одинаковый ток  $I$ . Следовательно, если проинтегрировать уравнение (115) по всей замкнутой кольцом цепи (от 2 по замыкающей проволоке к 1 и отсюда через цепь опять к 2), то получим

$$I \cdot \oint \frac{ds}{\lambda \cdot q} = + \oint (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{(e)}) ds = + \oint \mathbf{E}^{(e)} ds = E_{12}^{(e)},$$

так как интеграл  $\mathbf{E}$  по контуру должен равняться нулю.

$$\oint \frac{ds}{\lambda \cdot q} = R$$

есть сопротивление всей цепи проводников.

Произведение силы тока на сопротивление всей кольцеобразно замкнутой кольцом цепи равно интегралу по контуру сторонних электрических сил. Основываясь на этом, величину  $\mathbf{E}^{(e)}$  называют обыкновенно электродвижущей силой (э. д. с.) замкнутой кольцом цепи. Она равна интегралу по контуру разомкнутой цепи только тогда, когда начальный и конечный участки цепи сделаны из одинакового материала.

Вместе с  $I$  во всяком месте нашей линейной цепи определяются также и  $\mathbf{i}$ , а, следовательно, и напряженность  $\mathbf{E}$

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{i}}{\lambda} - \mathbf{E}^{(e)}.$$

В другом предельном случае бесконечно протяженной системы проводников с произвольно заданными  $\mathbf{E}^{(e)}$  и  $\lambda$ , которые должны быть непрерывными функциями координат, стационарное распределение тока однозначно определяется двумя условиями

$$\operatorname{div} \mathbf{i} = 0, \quad \operatorname{rot} \left( \frac{\mathbf{i}}{\lambda} \right) = -\operatorname{rot} \mathbf{E}^{(e)};$$

в то же время напряженность  $\mathbf{E}$  однозначно следует из уравнений

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0; \quad \operatorname{div} (\lambda \mathbf{E}) = -\operatorname{div} (\lambda \mathbf{E}^{(e)}).$$

Рассмотрим также выделение тепла постоянным током, образуемым сторонними силами:

$$Q = \int \mathbf{i}^2 \lambda \cdot dv = \int \mathbf{i} (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{(e)}) \cdot dv,$$

где интеграл распространен на весь объем, заполняемый током. В силу  $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi$  и

$$\mathbf{i} \operatorname{grad} \varphi = \operatorname{div} (\mathbf{i} \varphi) - \varphi \operatorname{div} \mathbf{i}$$

при постоянном токе ( $\operatorname{div} \mathbf{i} = 0$ ) и при распространении интеграла на весь объем проводников с током получается непосредственно

$$Q = + \int (\mathbf{i} \mathbf{E}^{(e)}) \cdot dv - \int \varphi \mathbf{i}_n \cdot dS.$$



Но если интегрирование производится по всей системе, то всюду на поверхности области интегрирования  $\mathbf{i} = 0$ , так что получаем

$$Q = \int (\mathbf{iE}^{(e)}) dv.$$

Полное джоулево тепло, выделяемое в цепи тока, равно, следовательно, работе, совершаемой сторонними силами. Энергетический эквивалент этой работы целиком определяется процессом, который вызывает появление  $\mathbf{E}^{(e)}$ . В концентрационной цепи она возникает за счет свободной энергии совокупности более концентрированного и разбавленного растворов. В гальваническом элементе ту же роль играют химические процессы, которые связаны с растворением или выделением; в термоэлементе энергия берется из тех приемников тепла, с помощью которых поддерживается разность температур слоев. В каждом случае работа  $+\int (\mathbf{iE}^{(e)}) dv$  совершается за счет источников энергии, которые собственно электростатике чужды так же, как чуждо ей самое тепло Джоуля. Мы имеем, следовательно, своеобразную картину стационарного (постоянного во времени) поля, посредством которого энергия не электрической природы может длительно превращаться в другой вид энергии, а именно в теплоту.

## С. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

### І. МАГНИТНЫЕ ВЕКТОРЫ

§ 47. **Напряженность магнитного поля в пустоте.** До открытий Эрстедта (1820) и Фарадея (1831) магнетизм, как предмет физического исследования, был совершенно независим от учения об электричестве. Учение о магнетизме рассматривало взаимодействия постоянных магнитов, к которым нужно причислить также землю с ее магнитным полем. Правда, между магнитным и электрическим полем существует далеко идущая формальная аналогия, которая иногда ведет к тождественному математическому изложению. Исходной точкой электростатики был закон Кулона для силы, действующей на заряженные пробные тела, и вытекающее из него определение и осуществление единицы заряда и напряженности. Как-раз в этой исходной точке аналогия между электрическим и магнитным полем прекращается, так как нельзя изготовить заряженного магнетизмом пробного шарика: заряженных магнетизмом тел не существует. Железный предмет можно магнитно поляризовать, но нельзя зарядить магнетизмом.

Экспериментальное исследование магнитных полей оказывается возможным благодаря второму существенному отклонению: в то время, как электрическая поляризация  $\mathbf{P}$  диэлектрика существует лишь постольку, поскольку она поддерживается внешним электрическим полем, и в то время как она пропорциональна этому полю  $\mathbf{E}$ , существует вещества с „постоянной“ магнитной поляризацией  $\mathbf{M}$ , где  $\mathbf{M}$  означает определяемый в дальнейшем „магнитный момент единицы объема“ („интенсивность намагничения“). Известные вещества, которые носят название магнитно твердых веществ, можно намагнитить так, что при не очень

сильных полях  $\mathbf{M}$  зависит от  $\mathbf{H}$  весьма мало. Рассмотрим здесь предельный случай идеально твердого магнитного стержня; это значит, что интенсивность его намагничивания мы считаем известной заранее и постоянной величиной, не зависящей от внешнего поля.

С помощью постоянных магнитных стержней мы можем измерять магнитное поле так же хорошо, как электрическое поле с помощью пробного шара. В выборе единиц и во всем остальном будем при этом руководствоваться аналогией с электростатическим полем. Подобно тому, как раньше источником и индикатором электрического поля служило заряженное пробное тело, источником (и притом двойным источником) и индикатором магнитного поля является теперь магнитная стрелка.

Рассмотрим прежде всего метод, посредством которого Гауссу удалось впервые измерить в абсолютных единицах как интенсивность намагничивания такого стержня, так и интенсивность поля земли. Если обозначить через

$$\mathbf{m} = \int \mathbf{M} dv$$

магнитный момент пробного стержня, то в однородном магнитном поле  $\mathbf{H}_0$  (например, в магнитном поле земли) на стержень со стороны поля действует механический момент вращения

$$\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{H}_0; \quad |\mathbf{N}| = |\mathbf{m}| \cdot |\mathbf{H}_0| \cdot \sin \vartheta.$$

В частности, если имеется стрелка, вращающаяся вокруг оси, и если  $J$  означает момент инерции стрелки, а  $H_0$  — составляющую однородного внешнего поля, перпендикулярную к оси вращения, то уравнение движения будет:

$$J \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = -mH_0 \sin \vartheta.$$

Полагая при малых отклонениях ( $\sin \vartheta \cong \vartheta$ )  $\vartheta = \text{const} \cdot \sin 2\pi \nu t$ , получаем для частоты колебания значение

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mH_0}{J}}.$$

Измеряя ее, можно, следовательно, определить в абсолютных единицах произведение  $m \cdot H_0$ .

Рассмотрим теперь тот же стержень как первоисточник магнитного поля  $\mathbf{H}$ .

Последнее должно выводиться из потенциала  $\varphi_m$ , который в полярных координатах  $r, \psi$  (ср. рис. 39) дается уравнением (52)

$$\varphi_m = \frac{m}{r^2} \cdot \cos \psi.$$

Следовательно,

$$\mathbf{H}_r = -\frac{\partial \varphi_m}{\partial r} = \frac{2m}{r^3} \cos \psi$$

$$\mathbf{H}_\psi = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_m}{\partial \psi} = \frac{m}{r^2} \sin \psi.$$

Установим теперь наш стержень неподвижно, и притом так, чтобы он был перпендикулярен к однородному полю  $\mathbf{H}_0$  величины  $H_0$ . В точку, находящуюся на расстоянии  $r_0$  от средней точки стержня, поместим в направлении момента  $\mathbf{m}$  ( $\psi = 0$ ) небольшую свободно вращающуюся магнитную стрелку. Эта стрелка установится в направлении равнодействующей  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{H}_0$  в этом месте, т. е. под таким углом  $\alpha$  к направлению  $\mathbf{H}_0$ :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|\mathbf{H}|}{|\mathbf{H}_0|} = \frac{2m}{r_0^3 H_0}.$$

Измеряя  $\alpha$  и  $r_0^3$ , можно теперь определить в абсолютных единицах частное  $\frac{m}{H_0}$ . Сопоставляя оба результата, находим в абсолютных единицах как поле земли  $H_0$ , так и момент  $\mathbf{m}$  стержня. С помощью прокалиброванного таким образом стержня мы можем теперь измерять как по величине, так и по направлению любое данное магнитное поле, если только при этом стержень настолько мал, что в его непосредственной близости поле может считаться однородным. Интенсивность намагничивания  $\mathbf{M}$  нашего постоянного магнита выступает здесь как первоисточник магнитного поля  $\mathbf{H}$ , и

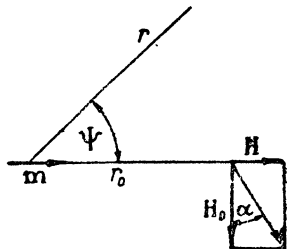


Рис. 39. К Гауссову методу измерения  $m$  и  $H_0$  в абсолютных единицах.

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = -4\pi \operatorname{div} \mathbf{M}$$

находится в полном соответствии с уравнением (85а) для диэлектрической поляризации

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = -4\pi \operatorname{div} \mathbf{P}.$$

Кроме того, в чистой магнетостатике (т. е. при отсутствии электрических токов и при полях, постоянных во времени) справедливо  $\mathbf{H} = -\operatorname{grad} \varphi_m$ . Здесь  $\mathbf{H}$  является, следовательно, безвихревым. Его источники лежат там, где интенсивность намагничивания меняется от места к месту так, что имеется расхождение, отличное от нуля; в случае однородно намагниченного стержня это наблюдается у его концевых поверхностей, где нормальная составляющая  $\mathbf{M}$  при переходе в пустоту создает поверхностное расхождение

$$(\mathbf{H}_n)_{\text{стерж}} - (\mathbf{H}_n)_{\text{пуст}} = -4\pi M_n.$$

**§ 48. Магнитное поле постоянных токов.** Согласно открытию Эрстедта электрический ток всегда сопровождается магнитным полем. Магнитное поле бесконечного прямолинейного тока состоит из линий, кольцами окружающих проводник; плоскость этих колец нормальна к проводнику. Направление  $\mathbf{H}$  в таком кольце совместно с направлением тока образует при этом правый винт. Это поле уже не является безвихревым; интеграл  $\oint \mathbf{H}_s ds$ , взятый по контуру, охватывающему ток, отличен от нуля. Промеры этого поля показали, что значение этого интеграла прямо пропорционально току, охватываемому тем контуром, по которому происходит интегрирование. Если обозначить коэффициент

пропорциональности через  $\frac{4\pi}{c}$ , то все результаты промеров открытого Эрстедтом поля можно свести к одному уравнению

$$\oint \mathbf{H} ds = \frac{4\pi}{c} I, \quad (116)$$

причем путем интегрирования должен быть контур, охватывающий ток  $I$ , а направление обхода должно совершаться как в правом винте. В случае прямолинейного тока, мы получаем отсюда, беря за путь интегрирования окружность радиуса  $r$  вокруг оси провода,

$$2\pi r |\mathbf{H}| = \frac{4\pi}{c} i \quad \text{или} \quad |\mathbf{H}| = \frac{2I}{cr}.$$

От общего уравнения (116) мы можем перейти к дифференциальному закону, подобно тому как это было сделано для закона Ома. Для этого предположим, что (116) справедливо и внутри проводника, по которому течет ток. Тогда через элемент поверхности  $dS$  протекает ток  $\mathbf{I} = \mathbf{i}_n dS$ . Применяя теорему Стокса, уравнение (63), получим уравнение, эквивалентное (116):

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{i}. \quad (116a)$$

Для того, чтобы определить магнитное поле данного постоянного тока, можно, исходя из (116) и (116a), пользоваться различными методами: или применяя непосредственно (116), или методами магнитного двойного слоя (о нем будет сказано ниже), или на основании закона Био-Савара, или, наконец, векторным потенциалом.

Метод непосредственного применения (116) быстро приводит к цели тогда, когда из соображений симметрии или еще каких-либо причин приблизительно известно распределение поля, как, например, в случае прямого провода с круговым сечением радиуса  $a$ . Если за путь интегрирования мы будем брать концентричные окружности вокруг оси провода, то

$$2\pi r H = \frac{4\pi}{c} I \quad \text{вне провода} \quad (r > a)$$

и

$$2\pi r H = \frac{4\pi}{c} I \cdot \frac{r^2}{a^2} \quad \text{внутри провода} \quad (r < a);$$

следовательно,  $H = \frac{2I}{rc}$  вне и  $H = \frac{2I}{a^2 c} \cdot r$  внутри провода.

Известно, что в случае прохождения тока по очень длинной катушке, поле в основном сосредоточивается внутри этой катушки и ориентировано по ее оси. Если за путь интегрирования выбрать узкий прямоугольник, продольные стороны которого параллельны оси катушки, имеют длину, равную  $l$  см, причем одна проходит внутри катушки, а другая вне ее, то для них  $\int \mathbf{H} ds$  просто равен полю  $H$  внутри катушки, если только контур интегрирования находится достаточно далеко от концов катушки. Если  $n$  — число витков, приходящееся на каждый сантиметр

катушки, то сквозь наш прямоугольник проходит ток  $I \cdot n$ . Следовательно, поле внутри катушки будет

$$H = \frac{4\pi}{c} \cdot n \cdot I.$$

Этот результат остается в основном правильным и для катушки, согнутой в кольцо, если только диаметр сечения катушки мал по сравнению с диаметром кольца (ср. рис. 40, где путь интегрирования указан слева сверху).

Метод магнитного двойного слоя вытекает из следующего замечания: если рассматривать весь замкнутый путь тока  $I$ , то для всякого замкнутого пути, не охватывающего тока, интеграл  $\oint \mathbf{H} ds$  равен нулю. Следовательно, если мы проведем произвольную поверхность таким образом, чтобы край ее как раз совпадал с контуром тока, то для всякого пути, не пересекающего этой поверхности, интеграл  $\oint \mathbf{H} ds$  равен нулю; напротив, для любого пути, пересекающего эту поверхность один раз, он равен  $\pm \frac{4\pi}{c} I$ .

Мы можем, исходя отсюда, вывести магнитное поле линейного тока из потенциала  $\varphi_m$ , если подчиним этот потенциал условию, что при прохождении через заперещенную поверхность он претерпевает скачок, равный  $\frac{4\pi}{c} I$ . Значит, согласно соображениям § 16, магнитное поле тока тождественно с магнитным полем окаймляемого им однородного магнитного двойного слоя момента  $\tau = \frac{I}{c}$ . Согласно этому мы можем, например, сейчас же вычислить поле на оси кругового тока радиуса  $a$ , если обратимся к вычислениям § 15, касающимся поля кругового диска, и заменим в формуле (55с)  $v_z$  на  $H$  и момент  $\sigma \cdot \eta$  на  $\frac{I}{c}$ . Для центра круга получаем

$$H = \frac{2\pi I}{c \cdot a}.$$

Эта формула лежит в основе измерений тангенс-бусолью, посредством которой это поле сравнивается с полем земли. Когда дело идет о действии на большие расстояния, то в случае магнита оно зависит только от полного момента  $\mathbf{m} = \int \mathbf{M} dv$ , а в случае магнитного двойного слоя — только от значения интеграла  $\mathbf{m} = \int \mathbf{n} \tau dS$ . Плоский контур тока, окаймляющий плоскость  $S$ , действует, следовательно, на больших расстояниях как постоянный магнит момента

$$m = \frac{S \cdot I}{c}. \quad (116b)$$

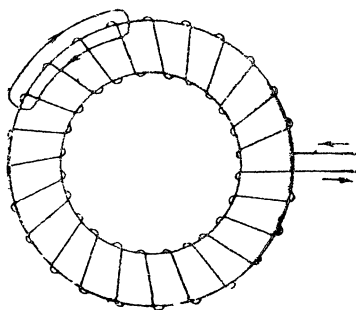


Рис. 40. К вычислению магнитного поля внутри кольцевой катушки.

Поэтому прямой катушке с полным числом витков  $N$  и сечением  $S$  соответствует магнитный момент

$$m = S \cdot N \cdot \frac{I}{c}.$$

Закон Био-Савара для определения магнитного поля при данном распределении токов получается путем применения полученных нами ранее результатов, касающихся однородных двойных слоев (§ 16). Согласно этим результатам образуемое таким слоем, не имеющее источников, поле можно представить в виде интеграла по ограничивающему контуру

$$\mathbf{H} = \frac{I}{c} \int \frac{d\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^3}. \quad (117)$$

Отсюда следует, что магнитную напряженность замкнутого тока можно рассматривать как сумму слагаемых, вносимых отдельными элементами тока  $I d\mathbf{s}$  в напряженность в соответствующей точке; слагаемые эти построены следующим образом: пусть имеется элемент тока  $I d\mathbf{s}$ , и пусть  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, проведенный из элемента тока в данную точку; тогда поле нормально к плоскости  $d\mathbf{s}$ ,  $\mathbf{r}$  и по своей величине равно  $\frac{I d\mathbf{s}}{r^2} \sin \alpha$ , если  $\alpha$  означает угол между  $d\mathbf{s}$  и  $\mathbf{r}$ . Направление  $\mathbf{H}$  определяется из условия, что поступательное движение  $d\mathbf{s}$  в своем собственном направлении и вращение, определяемое направлением  $\mathbf{H}$ , вместе дают правостороннее движение. Согласно (117) для центра кругового тока ( $d\mathbf{s}$  всюду перпендикулярен к постоянному по величине радиусу) получается значение

$$|\mathbf{H}| = \frac{I}{ca^2} \cdot 2\pi a = \frac{2\pi I}{ca},$$

вполне соответствующее тому, которое выводится методом двойного слоя. Разложение тока на отдельные элементы, которое указывается законом Био-Савара (117), является однако до известной степени произвольным, так как в действительности эти элементы не могут существовать отдельно друг от друга.

Метод векторного потенциала получается простым преобразованием закона Био-Савара (117). Это уравнение позволяет, очевидно, написать

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{c} \oint d\mathbf{s} \times \text{grad}_a \frac{1}{r}; \quad (117a)$$

для слагающих по осям координат, если мы обозначим через  $x$ ,  $y$ ,  $z$  координаты точки наблюдения, в которой желаем определить  $\mathbf{H}$ , а через  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  и  $d\xi$ ,  $d\eta$ ,  $d\zeta$  — место и составляющие линейного элемента  $d\mathbf{s}$ , получим:

$$H_x(x, y, z) = -\frac{I}{c} \oint \left\{ d\eta \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right) - d\zeta \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{r} \right) \right\}.$$

В самом деле, например,

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} = -\frac{z-\zeta}{r^3} = -\left( \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right)$$

и т. д.

Применим к (117а) общую формулу векторного исчисления

$$\mathbf{B} \times \text{grad } f = f \text{ rot } \mathbf{B} - \text{rot } f \mathbf{B},$$

которая справедлива для любого вектора  $\mathbf{B}$  и любого скаляра  $f$ .

Так как в (117а) мы должны дифференцировать только по координатам точки наблюдения, которые не входят в выражение  $ds$ , то

$$-ds \times \text{grad}_a \frac{1}{r} = \text{rot} \left( \frac{ds}{r} \right);$$

поэтому

$$\mathbf{H} = \text{rot} \left( \frac{I}{c} \oint \frac{ds}{r} \right). \quad (118)$$

Здесь  $\mathbf{H}$  появляется как вихрь другого вектора  $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}_0$ ;  $\mathbf{A}_0 = \frac{I}{c} \oint \frac{ds}{r}$ , который мы в § 18 назвали векторным потенциалом. Однако этот вывод верен только при отсутствии намагничивающихся веществ. В силу тождества  $\text{div rot} = 0$ , вихрем векторного потенциала может быть лишь вектор, не имеющий источников, что для  $\mathbf{H}$ , вообще говоря, не справедливо. Поэтому позднее в общей теории мы будем выводигь из векторного потенциала не  $\mathbf{H}$ , а вектор  $\mathbf{B}$ , поле которого никогда не имеет источников. Его введение последует ниже.

Согласно (118) член, вносимый элементом тока  $I ds$  в величину вектора  $\mathbf{A}$ , имеет всегда направление  $ds$ . Поэтому способ векторного потенциала особенно выгоден тогда, когда нужно вычислить поле прямолинейных параллельных токов, так как тогда не может возникнуть никакого сомнения относительно направления  $\mathbf{A}$ . В качестве примера вычислим поле двух параллельных токов  $I$ , протекающих по проводам в противоположных направлениях. За положительную ось  $x$  примем направление первого провода и вычислим  $\mathbf{A}_x$  в точке на расстояниях  $r_1$  и  $r_2$  от двух проводов (рис. 41). Очевидно, что  $\mathbf{A}_y$  и  $\mathbf{A}_z$  в данном случае равны нулю. Произведем вычисление сначала для конечных проводов длины  $2L$ . Согласно (118)

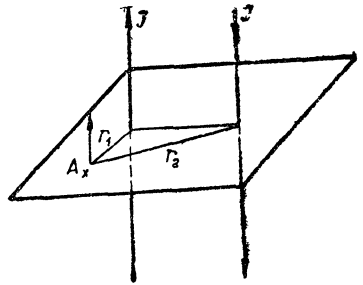


Рис. 41. Векторный потенциал  $\mathbf{A}$  двух антипараллельных токов.

$$A_x = \frac{I}{c} \int_{-L}^{+L} \frac{ds}{\sqrt{s^2 + r_1^2}} - \frac{I}{c} \int_{-L}^{+L} \frac{ds}{\sqrt{s^2 + r_2^2}}.$$

Положив сокращенно  $\eta = \frac{s}{r}$ ,  $\eta_1 = \frac{L}{r_1}$ ,  $\eta_2 = \frac{L}{r_2}$ , получаем

$$\begin{aligned} A_x &= \frac{I}{c} \cdot \int_{\eta_2}^{\eta_1} \frac{d\eta}{\sqrt{1 + \eta^2}} = 2 \cdot \frac{I}{c} \ln \frac{\eta_1 + \sqrt{1 + \eta_1^2}}{\eta_2 + \sqrt{1 + \eta_2^2}} = \\ &= 2 \cdot \frac{I}{c} \left\{ \ln \frac{\eta_1}{\eta_2} + \ln \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{\eta_1^2}}}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{\eta_2^2}}} \right\}. \end{aligned}$$

Если теперь перейти к пределу  $L = \infty$ , то второе слагаемое обращается в нуль. Остается только

$$A_x = \frac{2I}{c} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Таким образом кривые  $A_x = \text{const}$  суть окружности, центры которых лежат на прямой, соединяющей в нормальной плоскости центры обоих проводов; при этом эти два центра по отношению к соответ-

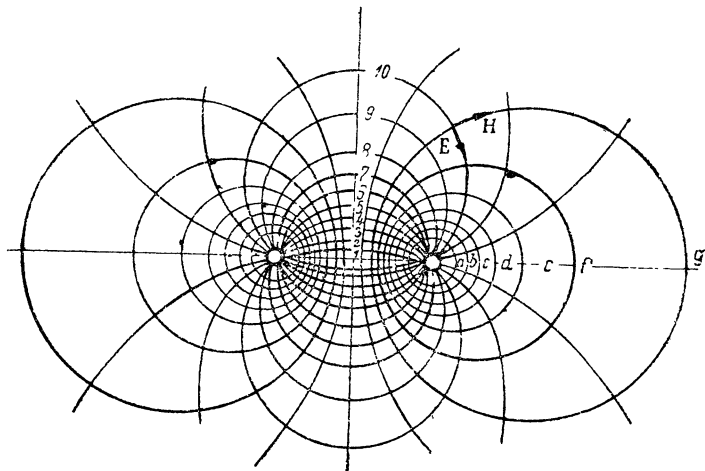


Рис. 42. Силовые линии между двумя параллельными проводами. Если по проводам текут равные, но противоположные токи, то окружности  $a, b, \dots, g$  образуют места постоянного векторного потенциала  $A$  и одновременно силовые линии магнитного поля  $H$ . Если, напротив, провода заряжены противоположными электростатическими зарядами, то те же самые окружности суть места постоянного потенциала  $\varphi$ . Тогда окружности 1, 2, ... 10 дают направление линий электрического поля.

ствующей окружности всегда являются сопряженными точками. Для магнитного поля теперь следует

$$H_y = \frac{\partial A_x}{\partial z}, \quad H_z = -\frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

Величина  $H$  равна падению  $A_x$ ; направление  $H$  совпадает, напротив, с направлением кривых  $A_x = \text{const}$ . Строя кривые  $A_x = \text{const}$ , мы получаем в то же время точную картину хода линий поля вблизи обоих проводов.

В этом результате замечательно следующее обстоятельство: если по проводам не будет идти никакого тока, а вместо этого они будут противоположно заряжены, так что каждый сантиметр их длины имеет заряд  $+e$  и соответственно  $-e$ , то они создают электростатический потенциал  $\varphi$  величины

$$\varphi = \frac{2e}{\epsilon} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$



При этом  $\varepsilon$  есть диэлектрическая постоянная среды, окружающей эти провода. Значит,  $\varphi$  отличается от  $A_x$  только некоторым численным множителем! Этот факт встретится нам в более общей форме еще раз (§ 67) при изучении волн в проводах.

**§ 49. Намагничивание и магнитная восприимчивость.** До сих пор мы рассматривали два идеальных случая магнитных полей, именно: поле, образуемое постоянными магнитами (вещества с заданным намагничиванием  $\mathbf{M}$ ) при отсутствии электрических токов, и образуемое стационарными токами при отсутствии намагничивающихся веществ. Притом имели место уравнения

$$\begin{aligned} &\text{для постоянных магнитов } (i=0); \operatorname{div} \mathbf{H} = 4\pi \operatorname{div} \mathbf{M}; \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0 \\ &\text{для стационарных токов } (\mathbf{M}=0); \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{i}; \operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда можно вывести следующие общие уравнения для вычисления поля любого стационарного распределения тока  $\mathbf{i} = \mathbf{i}(x, y, z)$  и любого распределения намагниченных веществ  $\mathbf{M} = \mathbf{M}(x, y, z)$ : Источники  $\mathbf{H}$  совпадают с источниками  $-4\pi\mathbf{M}$ , вихри  $\mathbf{H}$  равны  $\frac{4\pi}{c} \mathbf{i}$ . В таких местах, где одновременно  $\mathbf{i} = 0$  и  $\operatorname{div} \mathbf{M} = 0$ ,  $\mathbf{H}$  является безвихревым и не имеет источников. На поверхностях разрыва  $\mathbf{M}$  нужно принять существование поверхностного расхождения (скачок нормальной составляющей), соответствующего предельному переходу от непрерывного, но очень быстрого изменения к изменению скачком.

Итак, если бы распределение тока  $\mathbf{i}$  и интенсивность намагничивания  $\mathbf{M}$  были заданы, то определение поля  $\mathbf{H}$  было бы равнозначно задаче вычисления векторного поля из его вихрей и источников — задаче, которая уже решена нами полностью в § 18. В настоящем случае уравнения, соответствующие уравнениям (68a и b) § 18, были бы

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = -4\pi \operatorname{div} \mathbf{M}, \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{i}. \quad (119)$$

В действительности дело обстоит гораздо сложнее вследствие того, что интенсивность намагничивания в свою очередь существенно зависит от силы поля. В большинстве случаев самое появление его бывает обязано действию поля. Эта связь между  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{M}$  есть специфическое свойство каждого данного вещества. Она характеризует как раз его магнитное поведение. Если сгруппировать все известные материалы по их магнитным свойствам, то получаются следующие классы:

*a) Интенсивность намагничивания пропорциональна полю:*

$$\mathbf{M} = \kappa \cdot \mathbf{H}. \quad (119a)$$

Коэффициент пропорциональности  $\kappa$ , называемый магнитной восприимчивостью единицы объема, не зависит от  $\mathbf{H}$ , но при известных условиях зависит от температуры.

Среди веществ, намагничивающихся по простому уравнению (119a), можно различить два типа:

1. Диамагнитные тела. У них  $\chi$  является отрицательным и не зависит от температуры;  $\chi$  всегда очень мало по сравнению с 1.

Оно имеет, например, значения:

водород . . . . .	$\chi = - 0,5 \cdot 10^{-9}$
вода . . . . .	$= - 0,77 \cdot 10^{-6}$
золото . . . . .	$= - 3,00 \cdot 10^{-6}$
висмут . . . . .	$= - 14,00 \cdot 10^{-6}$

Следовательно, у диамагнитных веществ  $\mathbf{M}$  направлен противоположно полю  $\mathbf{H}$ . Качественно можно объяснить диамагнетизм, если допустить, что в отдельных атомах имеются контуры без сопротивления. Согласно общим законам индукции, при включении внешнего поля в таких контурах индуцируются токи, магнитный момент которых [ср., например, уравнение (116b)] имеет направление, противоположное направлению  $\mathbf{H}$ . Количественное объяснение дается в электронной теории. Диамагнетизм есть общее свойство материи и, следовательно, существует у всех веществ. Но он настолько мал, что практически не наблюдается, если соответствующее вещество является кроме того еще парамагнитным или ферромагнитным.

2. Парамагнитные тела. У этих тел  $\chi$  положительно и, как правило, обратно пропорционально абсолютной температуре  $T$  (закон Кюри); кроме того оно пропорционально плотности  $\delta$ :

$$\chi = \frac{C}{T} \delta. \quad (119b)$$

При комнатной температуре наблюдают, например, следующие численные значения  $\chi$ :

кислород . . . . .	$0,14 \cdot 10^{-6}$
платина . . . . .	$29 \cdot 10^{-6}$
марганец . . . . .	$300 \cdot 10^{-6}$

Парамагнетизм нужно представлять себе таким образом, что отдельные молекулы уже заранее обладают определенным магнитным моментом и что под действием магнитного поля эти элементарные магнетики частично ориентируются; но ориентирующему действию поля противодействует беспорядочное тепловое движение. Поэтому, соответственно закону Кюри, одинаковое поле может при более низкой температуре вызвать более высокую степень ориентированности, чем при более высокой.

*б) Интенсивность намагничивания не пропорциональна силе поля.* Этот класс состоит в основном из ферромагнитных материалов: железа, кобальта, никеля и гейслеровских сплавов. Магнитное поведение этих веществ очень сложно и в значительной степени зависит от обстоятельств, часто кажущихся совсем неважными. Поэтому нам придется удовлетворяться только очень схематической характеристикой. Самый отличительный признак ферромагнетика состоит прежде всего в том, что при одинаковой напряженности магнитный момент ферромагнетика имеет более высокий порядок величины, чем магнитный момент остальных

веществ (он часто превышает его больше чем в миллион раз). Затем, при изменении  $H$ ,  $M$  меняется нелинейно; наоборот, уже при достаточно низких и технически легко достижимых полях наблюдается состояние насыщения. Интенсивность намагничивания  $M_{\infty}$  при насыщении, которую нельзя заметно превысить даже при очень сильных полях, имеет следующие значения:

железо . . . . .	$4\pi M_{\infty} = 22\ 000$ эрстедт
никель . . . . .	$= 6\ 000$ „
кобальт . . . . .	$= 18\ 000$ „

Эти насыщающие величины почти независимы от обработки материала и от небольших химических примесей к нему. Наоборот, „кривая намагничивания“, т. е. закон возрастания  $M$  при увеличении  $H$ , самым

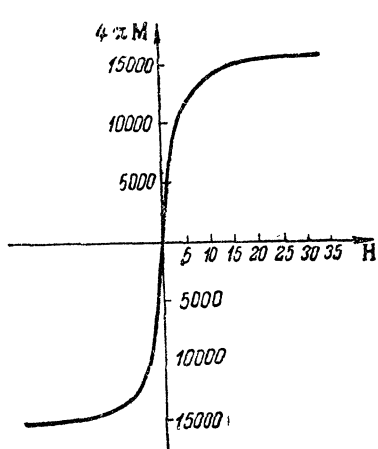


Рис. 43а. Кривая намагничивания мягкого железа.

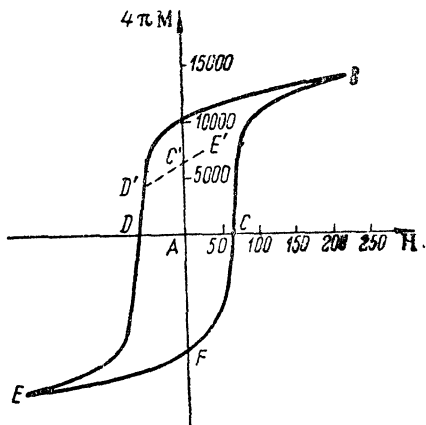


Рис. 43б. Кривая намагничивания твердой стали.

тесным образом зависит от особенностей предварительной обработки испытуемого вещества. Здесь различают опять два крайних случая:

1. Мягкие (в магнитном отношении) вещества; это — такие вещества, у которых  $M$  остается еще однозначной функцией  $H$ . В типичных случаях эта функция изображается кривой, показанной на рис. 43а: вначале, при возрастании  $H$ ,  $M$  быстро растет. Затем кривая делается все более пологой, и, наконец (при насыщении), практически становится горизонтальной. Если кривая начинается почти прямолинейным подъемом, можно говорить еще о „начальной восприимчивости“, которую определяют либо как частное  $\frac{|M|}{|H|}$  соответствующих значений, либо из крутизны кривой как  $\frac{\partial |M|}{\partial |H|}$ . Ее значение для различных сортов железа лежит между 50 и 1000. В природе вряд ли существуют совершенно мягкие, т. е. абсолютно обратимые ферромагнетики. Можно собственно говорить только о „более мягких“ или „более твердых“ веществах, соответственно меньшей или большей ширине петли гистерезиса (см. ниже).

2. Твердые вещества. У этих веществ  $M$  вообще не является однозначной функцией  $H$ ; напротив, интенсивность намагничивания существенно определяется теми напряженностями, в котором испытуемое тело находилось раньше. Типичный ход кривой намагничивания представлен на рис. 43б. Если ненамагниченное тело подвергнуть действию растущего поля  $H$  то вначале  $M$  описывает участок кривой  $AB$ , который качественно мало отличается от кривой (рис. 43а) мягкого вещества. Но если теперь уме вшать  $H$ , то вначале  $M$  падает гораздо медленнее, чем раньше росло (кривая  $BCDE$ ). При поле  $H=0$  имеется еще „остаточное намагничение“ величины  $AC$ . Эту величину мы в дальнейшем будем обозначать через  $M_0$ . Намагничение можно свести к нулю только при помощи напряженности  $AD$ , направленной в сторону, противоположную  $M$ ; ее называют „задерживающей“ или „коэрцитивной силой“. Остаточный магнетизм и задерживающая сила являются мерой магнитной твердости вещества. При больших отрицательных значениях  $H$  вновь достигают в  $E$  состоянии насыщения. Начиная с этого момента при соответствующем изменении  $H$ , ход  $M$  дает кривую  $EFGB$ , чем „петля гистерезиса“ и заканчивается. Если теперь опять изменять поле  $H$  от насыщения в одном направлении до насыщения в противоположном направлении и обратно, то в основном  $M$  повторяет все одну и ту же петлю.

Совсем иное получается, если идти только до определенного места петли, например  $D'$ , и затем опять заставить расти поле  $H$ . Тогда при не очень сильном росте  $H$  получают почти прямую линию, например пунктирную прямую  $D'C'E'$  на рис. 43б; по ней же изменение может происходить и в обратном направлении. Если затем при дальнейших операциях намагничивания оставаться между границами  $D'$  и  $E'$ , то в этих пределах можно говорить об обратимом намагничении и характеризовать материал „уравнением магнитного состояния“

$$M = k'H + M_0', \quad (119c)$$

где, следовательно,  $k'$  означает наклон прямой  $D'E'$ , а  $M_0'$  — расстояние  $AC'$ .

Поле  $H$  внутри постоянного магнита при отсутствии токов и других магнитов имеет направление, существенно противоположное направлению намагничивания. Состояние такого магнита соответствует, следовательно, точкам на участке  $CD$  кривой гистерезиса; его можно представить, например, рассмотренной уже точкой  $D'$ . Впрочем, при заданном намагничении постоянного магнита поле внутри его зависит еще от его формы. При не очень сильных изменениях  $H$ , достигаемых, например, изменением междужелезного промежутка в почти замкнутом кольцеобразном магните, можно по прямой  $D'E'$  или по уравнению (119с) определить соответствующее изменение  $M$ .

Все ферромагнитные вещества обнаруживают ферромагнитные свойства только постольку, поскольку их температура остается ниже температуры, обозначаемой как точка Кюри  $\theta$  и характерной для соответствующего материала. Точка Кюри для железа лежит при  $774^\circ \text{C}$ , для никеля при  $372^\circ \text{C}$  и для кобальта при  $1131^\circ \text{C}$ . Выше точки Кюри все ферромагнитные вещества обнаруживают нормальный парамагне-

тизм, с той только разницей, что в законе Кюри (119b) надо заменить абсолютную температуру  $T$  расстоянием  $T - \theta$  от точки Кюри:

$$\kappa = \frac{C \cdot \cdot}{T - \theta} \quad (\text{закон Кюри-Вейсса}). \quad (119d)$$

§ 50. **Магнитная индукция.** Не делая никаких предположений о свойстве вещества в том смысле, в котором это говорилось в предыдущем параграфе, уравнению (119) можно придать другой вид, введя для этого вектор  $\mathbf{B}$

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}, \quad (120)$$

который мы назовем магнитной индукцией. В то время как  $\mathbf{H}$  определяется источниками и вихрями, вектор  $\mathbf{B}$ , согласно уравнению (119), источников никогда не имеет и поэтому характеризуется только своим вихрем:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{i} + 4\pi \operatorname{rot} \mathbf{M}. \quad (121)$$

В силу того, что  $\mathbf{B}$  не имеет источников, его можно представить как вихрь векторного потенциала  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad (121a)$$

причем векторный потенциал  $\mathbf{A}$  нужно подчинить еще добавочному условию

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \quad (121b)$$

Согласно § 18, из (121a, b) для  $\mathbf{A}$  непосредственно получается значение

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{i} + c \operatorname{rot} \mathbf{M}}{r} dv. \quad (122)$$

Так же, как в предыдущем параграфе, здесь полезно отметить следующее: практическая применимость уравнения (122) значительно ограничена тем обстоятельством, что  $\mathbf{M}$  не является известным заранее, но само весьма сложным образом зависит от  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$ .

Принципиально совершенно безразлично, вычислять ли в конкретном случае сначала  $\mathbf{H}$  с помощью (119) или вектор  $\mathbf{B}$  с помощью (121). Принимая во внимание уравнение (120), дающее связь между векторами  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$ , мы в обоих случаях придем к одному и тому же результату.

В качестве иллюстрации этой зависимости рассмотрим качественный характер поля кругового цилиндра, однородно поляризованного в направлении оси. Будем при этом предполагать, что цилиндр сделан из материала, в магнитном отношении идеально твердого. Если ось цилиндра ориентирована параллельно оси  $x$ , то данные задачи формулируются так: внутри цилиндра  $\mathbf{M}_x = \text{const} = \mathbf{M}$ , вне цилиндра  $\mathbf{M}_x = 0$ ;  $\mathbf{M}_y$  и  $\mathbf{M}_z$  всюду равны нулю. Подчеркнем при этом, что мы здесь рассматривали идеальный, практически не осуществимый случай. В действительности  $\mathbf{M}$  всегда зависит от  $\mathbf{H}$ , что на рисунках нашло бы выражение в преломлении силовых линий поля (рис. 44a) у боковых поверхностей и линий индукции (рис. 44b) у концевых поверхностей. На рис. 43b наша идеализация сказалась бы в том, что для прямой  $D'E'$  обратимого намагничения ход был бы горизонтален. Расхождение  $\mathbf{M}$

концентрируется на двух концевых плоскостях, на которых имеется поверхностное расхождение величины  $\pm M$ . Вихрь его концентрируется, наоборот, на боковой поверхности, где  $M_x$  претерпевает скачок с  $M$  на нуль; вихрь сжимается у нее в поверхностный. Уравнения (119) и (120) дают для этого случая ( $i=0$ ) полям  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{B}$  следующий вид: при прохождении через концевую плоскость нормальная составляющая  $\mathbf{H}$  претерпевает скачок, равный  $\pm 4\pi M$ ; при указанной ориентации  $\mathbf{H}_x$  претерпевает, следовательно, всякий раз скачок, равный  $+4\pi M$ , если, исходя из цилиндра, проходить через одну из концевых плоскостей. В остальном пространстве  $\mathbf{H}$  является всюду безвихревым и не имеет нигде источников. В частности при прохождении через боковую поверхность  $\mathbf{H}$  остается непрерывным.

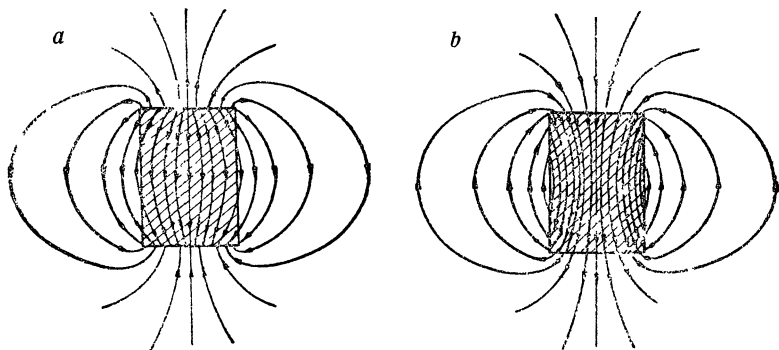


Рис. 44а. 44б. Поле идеально твердого постоянного магнита. 44а показывает ход  $\mathbf{H}$  (источники на основании цилиндра); 44б показывает ход  $\mathbf{B}$  (вихри на боковой поверхности).

Этих указаний достаточно для однозначного определения поля  $\mathbf{H}$ . Получающиеся при этом линии поля наглядно изображены на рис. 44а. Внутри цилиндра  $\mathbf{H}$  в основном направлено противоположно  $\mathbf{M}$  и при вытянутой форме цилиндра вблизи концов его равно примерно  $2\pi M + M \frac{q}{h^2}$ , где  $q$  означает сечение цилиндра, а  $h$ —его высоту. При этом предполагается, что  $q \ll h^2$ ;  $2\pi M$  есть член, вносимый рассматриваемой концевой плоскостью,  $M \frac{q}{h^2}$ , наоборот, — кулоновская напряженность, которая создается другим концом. Сразу же за концевой плоскостью  $\mathbf{H}$  в основном имеет направление, одинаковое с  $\mathbf{M}$ , и величину  $2\pi M - M \frac{q}{h^2}$ . Вблизи боковой поверхности  $\mathbf{H}$  идет наклонно к  $\mathbf{M}$ . Эти поверхности, как таковые, линиями поля совсем игнорируются.

Рассмотрим теперь ход линий индукции  $\mathbf{B}$ . Вне цилиндра  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{B}$ , конечно, тождественны. Напротив, всюду внутри цилиндра к вектору  $\mathbf{H}$  нужно прибавлять  $4\pi M$ . Выполняя это, мы получаем картину 44б линий индукции. Их ход определяется поверхностным вихрем  $\mathbf{M}$ , концентрирующимся на боковой поверхности.

С чисто феноменологической точки зрения изображение поля вектором  $\mathbf{H}$  (рис. 44а) или вектором  $\mathbf{B}$  (рис. 44б) совершенно равноценно.

Несмотря на это, при взгляде на эти две функции невольно хочется спросить, которое же из обоих описаний является более естественным. Ответ на этот вопрос теснейшим образом связан с представлением о сущности магнетизма атомов. Если рассматривать отдельные атомы магнита как малые магнитные стержни с южным и северным полюсами, то поневоле приходим к картине, изображенной на рис. 44а: стерженьки, повернутые вдоль оси цилиндра, создают на концевых плоскостях избыток положительного или отрицательного „свободного“ магнетизма который действует как источник или как сток линий поля. Ответ получается совсем иным если рассматривать атомы (согласно гипотезе, высказанной впервые Ампером) не как магнитные стерженьки, а как небольшие круговые токи, которые, согласно § 48, действуют так же, как небольшой магнитик, нормальный к их плоскости. Если эти элементарные круговые токи повернуты вдоль оси цилиндра, то внутри они везде взаимно уничтожаются, но на боковой поверхности останется конечный поверхностный распределенный ток, окружающий цилиндр (ср. для этого, например, рис. 21, § 17). Непосредственным следствием этого поверхностного тока является поле вектора  $\mathbf{B}$  рис. 44b, которое определяется вихрем, совпадающим с поверхностным током. Мы знаем теперь, что гипотеза Ампера в основном правильна (его элементарные токи трактуются в электронной теории, как конвекционные токи, производимые движением электронов). Поэтому на поставленный выше вопрос можно также однозначно ответить в том смысле, что естественному характеру магнетизма соответствует рис. 44b. Только на боковой поверхности цилиндра „действительно“ существует нечто, именно „свободный“ ток  $i' = \text{rot } \mathbf{M}$ , который в общем случае совместно с током проводимости  $i$  определяет согласно (121) вихрь  $\mathbf{B}$ . Первичной величиной является не напряженность  $\mathbf{H}$ , а индукция  $\mathbf{B}$ . Вектор  $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$ , а равно и его источники нужно рассматривать просто как вспомогательные величины, вводимые для упрощения формул.

Общая связь между  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$ , даваемая уравнением (120), ведет к некоторому упрощению, если  $\mathbf{M}$  известно как функция от  $\mathbf{H}$ . Если, например,  $\mathbf{M}$  пропорционально  $\mathbf{H}$ :

$$\mathbf{M} = \kappa\mathbf{H},$$

то

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}. \quad (123)$$

Величину

$$\mu = 1 + 4\pi\kappa \quad (123a)$$

называют магнитной проницаемостью. Она меньше единицы у диамагнитных веществ и больше единицы у парамагнитных веществ. Но в обоих случаях  $\mu$  отличается от единицы весьма мало (всегда меньше, чем на  $0,1\%$ ). Только у ферромагнитных веществ  $\mu$  значительно больше, чем 1, и на самых крутых местах кривой (рис. 43а) может достигать величин от 1 000 до 10 000.

При обратимом (ограниченном весьма узкою областью  $\mathbf{H}$ ) изменении состояния постоянных магнитов ( $D'C'E'$ , рис. 43b)  $\mathbf{B}$ , согласно уравнению (119e), можно представить в виде

$$\mathbf{B} = \mu'\mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}_0, \quad (123b)$$

который окажется нам полезен позднее, при рассмотрении магнитной энергии поля.

**§ 51. Закон индукции Фарадея.** В 1831 г. Фарадей сделал следующее фундаментальное открытие: если вблизи замкнутого проволочного контура движется магнит, то в этом контуре возникает ток. Более близкое экспериментальное исследование этого явления приводит относительно возникающего при этом тока к следующим количественным данным.

Пусть  $R$  — омическое сопротивление проволочного контура,  $S$  — произвольная поверхность, ограниченная этим контуром. Наметим для контура определенное направление обхода  $ds$  и тем самым, согласно правилу правого винта, и определенное направление нормали  $n$  к его поверхности. Будем считать ток положительным или отрицательным в зависимости от того, идет ли он в направлении  $ds$  или в обратную сторону. Тогда закон индукции для тока, появляющегося в основном опыте Фарадея, будет

$$IR = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int \int \mathbf{B}_n dS. \quad (124)$$

В любой момент времени произведение сопротивления на силу тока равно скорости уменьшения потока индукции, пронизывающего поверхность, ограниченную контуром тока, деленной на  $c$ . При этом совершенно безразлично, происходит ли изменение потока вследствие того, что меняется поле во времени, а контур остается неподвижным, или вследствие того, что контур движется в поле. Уравнение (124) дает нам совсем новый и практически важный метод измерения данного магнитного поля. Для этого выбирают пробную катушку настолько малой, чтобы поле на протяжении катушки можно было считать однородным. Посредством хорошо скрученных проводов эта катушка присоединяется к баллистическому гальванометру. Пока катушка стоит неподвижно в постоянном поле  $\mathbf{B}$ , в гальванометре тока нет. Поток индукции через поверхность  $S$  витка катушки равен  $\mathbf{B}_n S$ . Если теперь унести катушку из поля в место, где поля нет, то во время движения по ней проходит ток

$$I = -\frac{1}{cR} \frac{d}{dt} \mathbf{B}_n S.$$

Полное количество электричества, непосредственно указываемое гальванометром при достаточно быстром движении катушки, будет, следовательно,

$$e = \int_0^t I dt = \frac{\mathbf{B}_n \cdot S}{c \cdot R}.$$

Это значит, что в рассматриваемом опыте отброс гальванометра непосредственно измеряет составляющую  $\mathbf{B}_n$  индукции, нормальную к плоскости катушки в том месте, где катушка находилась до удаления из поля. Этот опыт можно произвести и в другом виде: оставить катушку на ее месте и вращать ее на  $180^\circ$  вокруг оси, лежащей в плос-



кости  $S$  (земной индуктор). Тогда  $\mathbf{B}_n$  меняет свой знак, и для  $e$  получается удвоенное значение.

Приведем теперь закон индукции (124) к более общему виду, и для этого исключим из него с помощью закона Ома силу тока  $I$ .

Предварительно несколько обобщим уравнение (124), а именно допустим, что в рассматриваемой цепи тока действует еще сторонняя электродвижущая сила  $E^{(e)}$ . Тогда последняя тоже будет вызывать ток  $I = \frac{E^{(e)}}{R}$ , так что (124) нужно заменить на

$$IR = E^{(e)} - \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int \int \mathbf{B}_n dS. \quad (124a)$$

Будем всегда придерживаться закона Ома в его дифференциальной форме

$$\mathbf{i} = \lambda (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{(e)});$$

Это значит, что во всяком месте сила тока должна определяться только совместным действием электрической напряженности и сторонних сил в соответствующем месте. Но тогда, при интегрировании (как в § 41) по объему линейного проводника, имеем

$$IR = E^{(e)} + \oint \mathbf{E}_s ds.$$

В то время как в электрическом поле второе слагаемое в силу безвихревого характера  $\mathbf{E}$  всегда равно нулю, сравнение с (124a) показывает, что при изменении потока индукции оно должно равняться

$$\oint \mathbf{E}_s ds = - \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int \int \mathbf{B}_n dS. \quad (125)$$

Интеграл электрической напряженности по контуру  $\oint \mathbf{E}_s ds$  численно равен скорости уменьшения магнитного потока (деленной на  $c$ ). В формулировке (125) совершенно исчезла постоянная  $R$ , относящаяся к материалу провода. Этот факт дает возможность сделать широкое обобщение уравнения (125), выведенного сначала лишь для проволочного контура, — обобщение, являющееся фундаментальным для всего дальнейшего. Именно, мы утверждаем, что для справедливости (125) наличие проволочного контура совсем не обязательно; что, наоборот, для всякой произвольно проведенной замкнутой кривой интеграл  $\oint \mathbf{E}_s ds$  правильно определяется тем же уравнением (125). Это утверждение оправдывается прежде всего в случае, если за путь интегрирования взять не провод, а непосредственно примыкающую к нему кривую, лежащую в пустоте. В самом деле, в виду непрерывности тангенциальных составляющих  $\mathbf{E}$ , значение  $\oint \mathbf{E}_s ds$  при такой замене пути интегрирования не изменяется. Но взятое во всей своей общности, это новое трактование уравнения (125) представляет собой гипотезу, которую мы должны проверить, рассматривая ее следствия.

Наша гипотеза дает непосредственный переход к дифференциальной форме закона индукции. А именно, если уравнение (125) имеет место для всякого произвольно проведенного элемента поверхности, то, применяя теорему Стокса, мы сейчас же получаем отсюда дифференциальную связь векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ .

В неподвижных средах поток индукции изменяется [правая сторона (125)] лишь постольку, поскольку изменяется вектор  $\mathbf{B}$ . Тогда дифференцирование по времени можно совершить под знаком интеграла, и по теореме Стокса сейчас же получится

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\mathbf{B}}{dt} \text{ для неподвижных сред.} \quad (126)$$

Если, напротив, тело, для которого мы хотим определить  $\mathbf{E}$ , движется со скоростью  $\mathbf{u}$ , то изменение со временем потока индукции через поверхность  $S$ , движущуюся вместе с материей, надо вычислять согласно разъяснению, данному для (124). Если элемент поверхности  $dS$  движется со скоростью  $\mathbf{u}$ , то на основании § 19 имеет вообще место

$$\frac{d}{dt} \int \mathbf{B}_n dS = \int \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{B} - \operatorname{rot} (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \right)_n dS.$$

В силу  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$  получаем

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \operatorname{rot} (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \right) \text{ для движущихся сред.} \quad (126a)$$

Это уравнение часто пишут в сокращенной форме, вводя особый вид дифференцирования по времени, о котором говорилось в § 19:

$$\underline{\dot{\mathbf{A}}} \equiv \dot{\mathbf{A}} + \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{A} - \operatorname{rot} [\mathbf{u} \times \mathbf{A}].$$

Тогда из (126a) получается

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \underline{\dot{\mathbf{B}}}.$$

Если перейти от (126a) обратно к интегралу по контуру проводника, то с правой стороны усматриваются две возможные причины изменения потока; во-первых, изменение  $\mathbf{B}$  во времени, которое в случае неподвижной проволоки только одно и действует; во-вторых, влияние движения провода, которое является единственной причиной при постоянстве поля во времени.

Легко убедиться в том, что

$$-ds (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) dt = \mathbf{B} (\mathbf{u} \times ds) dt$$

представляет тот поток индукции, который проходит через элемент поверхности  $(\mathbf{u} dt \times ds)$ , покрываемый элементом  $ds$  ограничивающей кривой при его движении за время  $dt$ .

Собою отметим при этом, что уравнения поля для движущихся тел в действительности гораздо сложнее, чем уравнение (126a), которое является лишь вполне достаточным приближением для всех технических применений. Точную формулу для любых значений  $\mathbf{u}$  можно вывести только с помощью электронной теории и теории относительности.

## II. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА НЕПОДВИЖНЫХ СРЕД

§ 52. Максвелловы уравнения для неподвижных тел. Мы можем теперь составить максвелловы уравнения для неподвижных тел в окончательной форме. Правда, уравнение (116а)

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \dot{\mathbf{i}}$$

для магнитного поля системы постоянных токов требует существенного и важного дополнения для случая, когда линии тока не замкнуты, а, наоборот, как, например, на обкладках конденсатора, прерываются. В таких местах расхождение  $\dot{\mathbf{i}}$  не равно нулю, в то время как левая сторона (116а) всегда является свободной от источников ( $\operatorname{div} \operatorname{rot} \equiv 0$ ). Поэтому, если мы хотим иметь уравнение, верное для общего случая, то надо либо искать совсем нового соотношения, либо путем присоединения более общего вектора сделать правую часть также свободной от источников. Максвелл избрал последний путь, рассмотренный уже в § 44: источник  $\dot{\mathbf{i}}$  неизбежно связан с уменьшением во времени плотности заряда в соответствующем месте, и притом по теореме Гаусса

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{i}} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

С другой стороны, плотность заряда равнозначна расхождению вектора смещения  $\mathbf{D}$

$$4\pi\rho = \operatorname{div} \mathbf{D},$$

а следовательно,

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{i}} = - \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

Это уравнение гласит, что вектор

$$\mathbf{c} = \dot{\mathbf{i}} + \frac{1}{4\pi} \dot{\mathbf{D}}$$

нигде не имеет источников. Таким образом нужное дополнение для тока проводимости  $\dot{\mathbf{i}}$  найдено. Это есть ток смещения

$$\frac{1}{4\pi} \dot{\mathbf{D}} = \frac{1}{4\pi} \dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{P}},$$

введение которого в основные уравнения образует стержень всей максвелловой теории. Это есть единственное, но зато решающее различие между воззрениями максвелловской теории и более старой теории дальнего действия.

К обобщенному таким образом уравнению (116а) присоединим три других, а именно: закон индукции (126) и два условия (87а) и (121) относительно источников  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$ . Таким образом имеем четыре фундаментальных уравнения;

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \dot{\mathbf{i}} + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{D}} \quad (\text{I})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}} \quad (\text{II})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad (\text{III})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (\text{IV})$$

Это — окончательные уравнения максвелловской теории для неподвижных тел. Чтобы эта система стала полной, сюда надо присоединить еще три других уравнения, дающих связь между векторами  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{V}$  и напряженности  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . Если с помощью этих трех добавочных уравнений исключить указанные три вектора из уравнений (I) — (IV), то тогда, и только тогда, возможно по данному начальному состоянию однозначно определить течение процесса во времени. В простейшем виде мы имеем эти три дополнительные уравнения для случая изотропных не ферромагнитных тел с тремя материальными постоянными — электропроводностью  $\lambda$ , диэлектрической постоянной  $\varepsilon$  и магнитной проницаемостью  $\mu$ , а именно:

$$\mathbf{i} = \lambda(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{(e)}) \quad (\text{V})$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} \quad (\text{VI})$$

$$\mathbf{V} = \mu\mathbf{H}. \quad (\text{VII})$$

Все три уравнения (V), (VI), (VII) связаны, таким образом, с особыми свойствами имеющейся в поле материи. Уже по одному этому они никогда не будут обладать той точностью и общностью, которую мы можем требовать от уравнений (I) — (IV), за исключением разве пустоты, где в точности  $\lambda = 0$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $\mu = 1$ . Помимо того, что (VII) совершенно неприменимо к ферромагнитным веществам, уравнение (VI) оставляет в стороне такие явления, как явление диэлектрического последействия или „остаточный заряд“ в Лейденских банках. Далее, уравнение (VI) неприменимо также и в том случае, когда мы переходим к полям, быстро изменяющимся во времени (световые волны). Опыт показывает, что в этом случае  $\varepsilon$  становится функцией частоты переменного поля, так что о ней тогда уже нельзя говорить как о постоянной данного вещества. Выяснение сущности и теоретическое вычисление величин  $\lambda$ ,  $\varepsilon$ ,  $\mu$ , введенных здесь как специфические „постоянные“ для данного вещества, подробно даются в электронной теории.

Интеграл энергии максвелловых уравнений. Если умножить уравнение (I) на  $-\mathbf{E}$ , а (II) — на  $\mathbf{H}$  и полученные уравнения сложить, то непосредственно получается

$$\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{iE} = -\frac{1}{c} \mathbf{E} \dot{\mathbf{D}} - \frac{1}{c} \mathbf{H} \dot{\mathbf{B}}.$$

Мы воспользуемся тождеством

$$\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \operatorname{div} (\mathbf{E} \times \mathbf{H});$$

интегрируя по любому объему и умножая на  $\frac{c}{4\pi}$ , получим

$$-\frac{1}{4\pi} \int (\mathbf{E} \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{H} \dot{\mathbf{B}}) dv = \int (\mathbf{iE}) dv + \frac{c}{4\pi} \int (\mathbf{E} \times \mathbf{H})_n dS. \quad (127)$$

Уравнение (127) основывается только на строго верных уравнениях поля (I) до (IV); мы должны поэтому приписывать и ему строгую правильность в случае неподвижных тел.

Рассмотрим здесь (127) сначала только для случая, когда дополнительные уравнения (V), (VI), (VII) также удовлетворяются. Тогда

$$-\frac{d}{dt} \left\{ \int \left( \frac{\epsilon}{8\pi} \mathbf{E}^2 + \frac{\mu}{8\pi} \mathbf{H}^2 \right) dv \right\} = \int \frac{i^2}{\lambda} dv - \int \mathbf{iE}_e dv + \int \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H})_n dS. \quad (127a)$$

Это уравнение будем читать следующим образом: электромагнитное поле обладает плотностью энергии

$$u = \frac{1}{8\pi} (\epsilon \mathbf{E}^2 + \mu \mathbf{H}^2). \quad (127b)$$

Если полная энергия  $U = \int u dv$ , содержащаяся в объеме  $v$ , уменьшается, то согласно (127a) эквивалентно этому уменьшению появляются три вида энергии: прежде всего необратимое джоулево тепло  $\frac{i^2}{\lambda}$  и работа  $-\mathbf{iE}_e$ , совершаемая против сторонних сил. Эти две величины составляют тепловую и химическую отдачу поля.

В уравнении (127) она представлена членом  $\mathbf{iE}$  [ср., например, ниже уравнение (132b)].

Наряду с этим, в качестве третьей причины уменьшения энергии поля появляется интеграл по поверхности

$$\int \mathbf{S}_n dS; \quad \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}). \quad (128)$$

Таким образом принцип сохранения энергии требует, чтобы через поверхность рассматриваемой области проходил поток энергии  $\mathbf{S}$  (энергия, проходящая за одну секунду через  $1 \text{ см}^2$ ).  $\mathbf{S}$  называется вектором Пойнтинга или вектором излучения. Мы займемся им подробно в теории электромагнитных волн. Подчеркнем при этом, что только интеграл  $\int \mathbf{S}_n dS$ , распространенный по замкнутой поверхности, имеет физическое значение энергии, вытекающей наружу из области, ограниченной этой поверхностью.

Сам вектор  $\mathbf{S}$  может значительно отличаться от нуля, а при этом все же никакого заметного переноса энергии не будет. Представим себе хотя бы такой случай, что на электростатическое поле накладывается магнитное поле.  $\mathbf{S}$  может тогда принимать любые значения, но при этом всегда  $\text{div } \mathbf{S} = 0$ , так что  $\mathbf{S}$  не оказывает никакого влияния на энергетический баланс.

Формулировка принципа энергии (127) правильна только для неподвижных тел. Поэтому она не содержит выражения для механической работы, какое, например, мы подробно рассматривали выше для случая электрического поля; подобное же выражение будет разобрано в следующих параграфах особо для случая магнитного поля.

В следующей главе, относящейся к постоянным токам, мы будем пренебрегать характерным для максвелловской теории током смещения  $\frac{1}{4\pi} \dot{\mathbf{D}}$  по сравнению с током проводимости  $\mathbf{i}$ . При достаточно

медленном изменении поля это является дозволенным. Как мы увидим в дальнейшем, технические переменные токи всегда можно рассматривать как величины, изменяющиеся, в указанном здесь смысле, медленно.

Естественно, что таким способом должны получаться только, такие результаты, которые были доступны также в до-максвелловской теории дальнего действия. Как мы увидим позднее, учет тока смещения дает конечную скорость распространения электромагнитных возмущений. Пренебрежение  $\frac{1}{4\pi} \mathbf{D}$  согласно (1) равнозначно  $\operatorname{div} \mathbf{i} = 0$ , т. е. равнозначно допущению квазистационарных токов. Можно ожидать, что при токах, изменяющихся во времени, это пренебрежение справедливо тогда, когда время, в течение которого токи успевают заметно измениться, велико по сравнению со временем, необходимым для того, чтобы электромагнитные возмущения распространились от одного конца установки до другого.

Ток смещения становится существенным только при рассмотрении быстро-переменных процессов; собственно поэтому максвелловская теория выявляет всю свою плодотворность только при рассмотрении электромагнитных волн.

**§ 53. Магнитная энергия поля и максвелловы натяжения магнитного поля.** Выше мы положили плотность энергии электрического поля равной  $\frac{1}{8\pi} \mathbf{E} \mathbf{D}$  и обосновали это допущение тем, что доказали, что работа, совершаемая полем при смещении материи, равна уменьшению энергии поля

$$U_{\text{эл}} = \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{E} \mathbf{D}) dv.$$

Для этого доказательства являлось существенным то, что всюду

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E},$$

где  $\epsilon$  — диэлектрическая постоянная, не зависящая от напряженности  $\mathbf{E}$ . В магнитном же поле, по крайней мере при наличии постоянных магнитов, такой пропорциональности векторов  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$  не существует. Нельзя поэтому для магнитной энергии поля написать по аналогии с  $U_{\text{эл}}$  выражение  $\frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{H} \mathbf{B}) dv$ . Что подобное допущение неправильно, видно уже из того, что для поля любых постоянных магнитов (в отсутствии токов) это выражение всегда равно нулю. Ибо тогда  $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$ , что совместно с  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$  достаточно для того, чтобы и интеграл  $\int (\mathbf{H} \mathbf{B}) dv$  обратился в нуль.

Мы должны, следовательно, искать общее выражение для энергии магнитного поля  $U_{\text{м}}$ , но мы ограничимся при этом только такими телами, у которых изменение индукции дается изменением напряженности однозначно. Рассмотрим сначала следующий элементарный случай.

Пусть дан провод, по которому, пусть течет ток  $I$ . Элемент этого тока  $\Delta s$  пусть передвинется в течение промежутка  $\Delta t$  на расстояние  $\mathbf{u} \Delta t$ ; этим будет описана площадь  $\mathbf{u} \Delta t \times \Delta s$ . Через эту элементарную площадку пройдет добавочный поток индукции  $\mathbf{B} (\mathbf{u} \Delta t \times \Delta s)$ , и легко

сообразить, что левая часть этого уравнения представляет собой объем параллелепипеда, построенного на сторонах  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{u} \Delta t$  и  $\Delta \mathbf{s}$ . На этом основании (см. также правила об умножении трех векторов, § 6, стр. 15) можно написать также

$$\Delta \Phi = \mathbf{u} \Delta t (\Delta \mathbf{s} \times \mathbf{B}). \quad (129)$$

С другой стороны, закон индукции Фарадея дает

$$I = \frac{E - \frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}}{R},$$

откуда легко получить:

$$EI \Delta t = I^2 R \Delta t + \frac{I}{c} \Delta \Phi.$$

Таким образом работа источника за время  $\Delta t$ , даваемая левой частью, идет не только на джоулево тепло, но еще добавочно на совершение работы тока при его передвижении в магнитном поле

$$\Delta A = \frac{I}{c} \Delta \Phi.$$

Подставляя сюда  $\Delta \Phi$  из (129), имеем:

$$\Delta A = \mathbf{u} \Delta t \frac{I}{c} (\Delta \mathbf{s} \times \mathbf{B}).$$

Но вообще

$$\Delta A = \mathbf{F} \mathbf{u} \Delta t.$$

Сравнивая эти два выражения имеем уравнение:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} I (\Delta \mathbf{s} \times \mathbf{B}), \quad (129a)$$

которое дает величину и направление силы, действующей в магнитном поле на элемент тока. Сила эта открыта и исследована Ампером.

Если исходить из (129a), то можно, по Гельмгольцу, обратно прийти к закону индукции Фарадея.

В качестве второго важного частного примера разберем такой случай. Пусть дан стержень, согнутый в кольцо из какого угодно материала, с поперечным сечением  $q$  и длиной  $l$ . На него равномерно намотан провод с сопротивлением  $R$  так, что на каждый сантиметр приходится  $n$  витков. Предположим, что в этом проводе гальваническая батарея с электродвижущей силой  $E$  поддерживает ток  $I$ . Тогда за время  $dt$  эта батарея совершает работу  $dA = E I dt$ . Если за это время  $dt$  индукция  $\mathbf{B}$  изменяется на величину  $d\mathbf{B}$ , то в силу закона индукции Фарадея

$$IR = E - \frac{qnl}{c} \frac{d\mathbf{B}}{dt}.$$

Магнитное поле  $\mathbf{H}$  в кольце определяется через одно только  $I$ :

$$|\underline{\mathbf{H}}| = \frac{4\pi}{c} nI.$$

Следовательно,

$$dA = EI dt = I^2 R dt + I \frac{qnl}{c} dB = I^2 R dt + \frac{ql}{4\pi} \mathbf{H} d\mathbf{B}.$$

Но  $ql$  есть объем нашего стержня. Мы приходим таким образом к выводу, что в выражение работы  $dA$  входит не только джоулево тепло, но еще и некоторая работа, которая, рассчитанная на единицу объема, дает  $\frac{1}{4\pi} \mathbf{H} d\mathbf{B}$ . Мы должны поэтому рассматривать последнюю величину как изменение энергии нашего стержня. Этот результат

находится в соответствии с той величиной для скорости изменения  $\frac{1}{4\pi} \mathbf{H} \dot{\mathbf{B}}$  магнитной энергии, которую мы имели в уравнении (127). Только что разобранный наглядный пример представляет, впрочем, частный случай того общего расчета, который привел к энергетическому уравнению (127). Точнее говоря, здесь дело идет об изменении свободной энергии, так как мы, — правда, совсем не упоминая об этом, — предполагали, что наши процессы — изотермические (ср. значение на стр. 223). Мы вернемся к этому

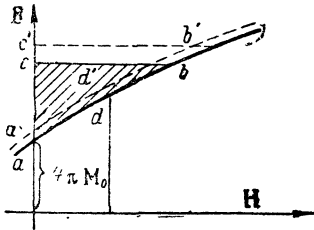


Рис. 45. Кривые намагничивания  $ab$  и  $a'b'$  двух расположенных рядом элементов объема.

в разделе D; для целей настоящего раздела этим обстоятельством можно пренебречь.

\* Предположим теперь, что индукция  $\mathbf{B}$  известна как функция от  $\mathbf{H}$  — например, посредством кривой намагничивания, вид которой показан на рис. 45. Тогда, согласно только что полученному результату, за плотность магнитной энергии надо принять

$$u_m = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbf{H}=0}^{\mathbf{B}} \mathbf{H} d\mathbf{B},$$

что на рис. 45 соответствовало бы заштрихованной поверхности  $adb$ . Выбор нижней границы ( $\mathbf{H} = 0$ ) представляется на первый взгляд произвольным, но последующими рассмотрениями он будет вполне обоснован. Таким образом для полной магнитной энергии поля мы получим выражение

$$U_m = \frac{1}{4\pi} \int dv \int_{\mathbf{H}=0}^{\mathbf{B}} \mathbf{H} d\mathbf{B}, \quad (129b)$$

которое гласит, что для каждого отдельного элемента объема надо принимать в расчет как кривую намагничивания, так и конечное значение  $\mathbf{H}$  или  $\mathbf{B}$ .

Вычислим из выражения (129b) для  $U_m$  прежде всего взаимодействие между токами и магнитами. Для этого рассмотрим самое общее изменение, которое может претерпевать  $U$ . Остановимся на определенном элементе объема  $dv$ . При движении материи в этом элементе изменяются не только  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$ , но также и относящаяся к нему кривая намагничивания, так что, например, заштрихованная на рис. 45



поверхность  $abc$  переходит в соседнюю поверхность  $a'b'c'$ , обозначенную пунктирным контуром. Самое общее бесконечно малое изменение  $\int \mathbf{H} d\mathbf{V}$  составляется из двух полос  $ccb'c'$  и  $abb'a'$ . Мы имеем, следовательно,

$$\int \mathbf{H} d\mathbf{V} = \mathbf{H}\delta\mathbf{V} - \int_{\mathbf{H}=0}^{\mathbf{H}} \delta_{\mathbf{H}} \mathbf{V} d\mathbf{H}.$$

Первое слагаемое содержит действительное изменение  $\mathbf{V}$ , второе обусловлено изменением кривой намагничения;  $\delta_{\mathbf{H}} \mathbf{V}$  означает при этом расстояние ( $dd'$  на рис. 45) между двумя кривыми намагничения, взятое при постоянном  $\mathbf{H}$ . Таким образом мы получаем в сумме:

$$\delta U_{\text{M}} = \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{H}\delta\mathbf{V} dv - \frac{1}{4\pi} \int dv \int_{\mathbf{H}=0}^{\mathbf{H}} \delta_{\mathbf{H}} \mathbf{V} d\mathbf{H}.$$

Для того чтобы не идти слишком далеко, положим, что рассматриваемый участок кривой намагничения прямолинеен, и, следовательно,  $\mathbf{V}$  имеет вид

$$\mathbf{V} = \mu' \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M}_0. \quad (130)$$

Остаточный магнетизм  $\mathbf{M}_0$  и величина  $\mu'$  должны быть каким-нибудь образом даны как функции материала и, значит, в виде функций координат. (Заметим только, что не представило бы затруднений рассматривать и  $\mu'$  как функцию от  $\mathbf{H}$ . Здесь мы этого делать не будем.) Из (130) следует

$$\delta_{\mathbf{H}} \mathbf{V} = \mathbf{H} \delta \mu' + 4\pi \delta \mathbf{M}_0$$

или

$$\int_0^{\mathbf{H}} \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \right)_{\mathbf{H}} d\mathbf{H} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mu'}{\partial t} \mathbf{H}^2 + 4\pi \frac{\partial \mathbf{M}_0}{\partial t} \mathbf{H}.$$

Отсюда

$$\frac{dU_{\text{M}}}{dt} = \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} dv - \frac{1}{8\pi} \int \frac{\partial \mu'}{\partial t} \mathbf{H}^2 dv - \int \frac{\partial \mathbf{M}_0}{\partial t} \mathbf{H} dv. \quad (130a)$$

Предположим, что скорость  $\mathbf{u}$  движения отдельных материальных элементов объема дана и притом весьма мала. Тогда мы должны указать, как вследствие этого в данном месте пространства будут меняться во времени величины  $\mu'$  и  $\mathbf{M}_0$ . В § 39 при вычислении сил в электрическом поле мы допустили вещественное изменение диэлектрической постоянной  $\varepsilon$  [уравнение (102)]. Будем здесь пренебрегать магнетострикцией в химически-однородных средах и соответственно этому примем, что в изучаемой нами частице величина  $\mu'$  не изменяется. Согласно уравнению (102) это равносильно следующему:

$$0 = \frac{\partial \mu'}{\partial t} + (\mathbf{u} \text{ grad } \mu').$$

Положим также, что остаточный магнетизм частиц при движении не изменяется. Кроме того, чтобы не заходить слишком далеко, примем, что те частицы, в которых  $\underline{M}_0$  отлично от нуля, движутся как твердые тела. Последнее допущение практически оправдывается почти всегда. Тогда из постоянства  $\underline{M}_0$  следует, что поток  $\underline{M}_0$  через поверхность, движущуюся вместе с материей, должен быть постоянным. Отсюда по (69a)  $\underline{\dot{M}}_0 = 0$  или

$$\frac{\partial \underline{M}_0}{\partial t} = \text{rot}(\underline{u} \times \underline{M}_0) - \underline{u} \text{div} \underline{M}_0.$$

Подставляя полученные значения для  $\frac{\partial \mu'}{\partial t}$  и  $\frac{\partial \underline{M}_0}{\partial t}$  (в 130a), имеем

$$\begin{aligned} \frac{dU_M}{dt} = & \frac{1}{4\pi} \int \underline{H} \underline{\dot{B}} dv + \frac{1}{8\pi} \int (\underline{u} \text{grad} \mu') \underline{H}^2 dv - \\ & - \int \underline{H} \text{rot}(\underline{u} \times \underline{M}_0) dv + \int \underline{H} \underline{u} \text{div} \underline{M}_0 dv. \end{aligned}$$

Первое и третье слагаемые с правой стороны нужно еще несколько преобразовать. Интегрируя по всей системе и пользуясь (67), мы получим для третьего слагаемого

$$\begin{aligned} \int \underline{H} \text{rot}(\underline{u} \times \underline{M}_0) dv &= \int (\underline{u} \times \underline{M}_0) \text{rot} \underline{H} dv = \\ &= \frac{4\pi}{c} \int (\underline{u} \times \underline{M}_0) \underline{i} dv = - \frac{4\pi}{c} \int \underline{u} (\underline{i} \times \underline{M}_0) dv. \end{aligned}$$

Чтобы вычислить в выражении для  $\frac{dU_M}{dt}$  первое слагаемое, вернемся опять к уравнениям поля

$$\begin{aligned} \text{rot} \underline{H} &= \frac{4\pi}{c} \underline{i} \\ -\text{rot} \underline{E} &= \frac{1}{c} \underline{\dot{B}}. \end{aligned}$$

Умножим первое из них на  $\underline{E} dv$ , второе на  $\underline{H} dv$ , сложим и проинтегрируем по всей системе. Тогда имеющийся слева интеграл по поверхности от  $\underline{E} \times \underline{H}$  обращается в нуль. Остается

$$\int \underline{i} \underline{E} dv = - \frac{1}{4\pi} \int \underline{H} \underline{\dot{B}} dv.$$

Но в материи, движущейся со скоростью  $\underline{u}$ ,

$$\underline{\dot{B}} = \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} - \text{rot}(\underline{u} \times \underline{B}),$$

так что мы получаем

$$\frac{1}{4\pi} \int \underline{H} \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} dv = - \int \underline{i} \underline{E} dv + \frac{1}{4\pi} \int \underline{H} \text{rot}(\underline{u} \times \underline{B}) dv.$$

Здесь по уравнениям (67) и (116a)

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int \underline{H} \text{rot}(\underline{u} \times \underline{B}) dv &= \frac{1}{4\pi} \int (\underline{u} \times \underline{B}) \text{rot} \underline{H} dv = \\ &= \frac{1}{c} \int (\underline{u} \times \underline{B}) \underline{i} dv = - \frac{1}{c} \int \underline{u} (\underline{i} \times \underline{B}) dv. \end{aligned}$$

Соединим теперь все вместе и обозначим еще через

$$\psi = \int \mathbf{iE} dv \quad (131)$$

тепловую и химическую отдачу; обоснование для этого обозначения мы дадим несколько ниже. Тогда для изменения  $U_M$  во времени получается

$$-\frac{dU_M}{dt} = \psi + \int dv (\mathbf{u} \cdot \mathbf{f}_m), \quad (132)$$

где  $\mathbf{f}_m$  означает

$$\mathbf{f}_m = \frac{1}{c} \mathbf{i} \times (\mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}_0) - \frac{1}{8\pi} \mathbf{H}^2 \text{grad } \mu' + \mathbf{H} \text{div} (-\mathbf{M}_0). \quad (132a)$$

Уравнение (132) полностью освещает вопрос относительно нахождения магнитной энергии в квазистационарном поле при любом движении цепей тока и магнитов друг относительно друга: прежде всего за счет  $U_M$  создается тепловая и химическая энергия  $\psi dt$ . В самом деле, в силу

$$\mathbf{i} = \lambda (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{(e)})$$

мы имеем

$$\mathbf{iE} = \frac{i^2}{\lambda} - \mathbf{iE}^{(e)},$$

так что

$$\psi = \int \frac{i^2}{\lambda} dv - \int (\mathbf{iE}^{(e)}) dv \quad (132b)$$

составляется из необратимого Джоулева тепла  $\frac{i^2}{\lambda}$  и работы  $-\mathbf{iE}^{(e)}$ , совершаемой против сторонних полей, — работы, которая проявляется как теплота Пельтье или как повышение свободной энергии аккумуляторов или элементов, находящихся в цепи тока. Наряду с этим потреблением энергии при движении материи появляется еще работа  $\int (\mathbf{u} \cdot \mathbf{f}_m) dv$ , совершаемая полем за одну секунду.

Сила на единицу объема, представляемая (132a), составляется из трех характерных выражений.

а) Прежде всего на элемент объема, по которому проходит ток, действует сила

$$\mathbf{f} = \frac{1}{c} (\mathbf{i} \times \mu' \mathbf{H}) dv,$$

где, согласно (130),  $\mu' \mathbf{H}$  представляет индукцию, за вычетом остаточного магнетизма. Для элемента  $ds$  тока с сечением  $q$  и силой тока  $I$ ,

$$I ds = \mathbf{i} dv = |\mathbf{i}| q ds$$

и, следовательно,

$$\mathbf{F} = \frac{I}{c} (ds \times \mu' \mathbf{H}). \quad (133)$$

Если в месте провода остаточный магнетизм равен нулю, то сила, приходящаяся на элемент  $ds$  проволоки, будет

$$\mathbf{F} = \frac{I}{c} (ds \times \mathbf{B}), \quad (134)$$

что совершенно совпадает с выведенным ранее (129а).

Вторая часть  $\mathbf{f}_m$  вполне аналогична электростатической силе

$$-\frac{1}{8\pi} E^2 \text{grad } \epsilon.$$

В частности, действие этого члена сказывается на поверхности раздела двух веществ с различными  $\mu'$ , где он дает направленное наружу натяжение, приложенное к поверхности материала, намагничивающегося сильнее.

Наконец, третье слагаемое  $\mathbf{H} \text{div} (-\mathbf{M}_0)$  удается формально интерпретировать путем введения „свободного магнетизма“  $\varrho_m = -\text{div } \mathbf{M}_0$ , на который, по аналогии с электростатической силой  $\mathbf{E}\varrho$ , действует сила  $\mathbf{H}\varrho_m$ . В однородно поляризованном магнитном стержне  $\varrho_m$  концентрируется на двух концевых плоскостях, соответственно скачку нормальной составляющей  $\mathbf{M}_0$ .

Максвелловы натяжения в магнитном поле. В § 42 мы видели, что полную силу, действующую в электростатическом поле на некоторый объем, можно представить в виде интеграла, взятого по поверхности, ограничивающей этот объем. Покажем теперь, что наша сила (132а) позволяет сделать вполне аналогичное преобразование. При этом мы получим тензор магнитного напряжения  $T_m$ , который отличается от электрического тензора  $T_e$  [уравнение (108)] только тем, что всюду  $\mathbf{E}$  нужно заменить на  $\mathbf{H}$  и  $\epsilon$  — на введенную в уравнение (130) величину  $\mu'$ . Мы утверждаем, следовательно, что (132а) тождественно с

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{m_x} = & \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mu'}{8\pi} (\mathbf{H}_x^2 - \mathbf{H}_y^2 - \mathbf{H}_z^2) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu'}{4\pi} \mathbf{H}_x \mathbf{H}_y \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\mu'}{4\pi} \mathbf{H}_x \mathbf{H}_z \right). \end{aligned} \quad (135)$$

Прежде всего правая часть этого уравнения при любых  $\mu'$  и  $\mathbf{H}$  тождественна с

$$\frac{1}{4\pi} \mathbf{H}_x \text{div}(\mu' \mathbf{H}) - \frac{1}{8\pi} \mathbf{H}^2 \frac{\partial \mu'}{\partial x} - \frac{1}{4\pi} (\mu' \mathbf{H} \times \text{rot } \mathbf{H})_x, \quad (135a)$$

в чем легко убедиться непосредственным вычислением. Но это выражение действительно полностью совпадает с (132а), если только принять еще во внимание соотношения

$$\text{div}(\mu' \mathbf{H}) + 4\pi \text{div } \mathbf{M}_0 = 0 \text{ и } \text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{i}.$$

Мы можем теперь описание натяжений в электрическом поле, сделанное нами в § 42, дословно применить к магнитному полю: сила,

действующая на произвольно ограниченный объем, эквивалентна системе поверхностных сил

$$\int \mathbf{f}_m dv = \int \mathbf{T}_m dS.$$

При этом величина  $\mathbf{T}_m$  равна

$$|\mathbf{T}_m| = \frac{\mu'}{8\pi} \mathbf{H}^2;$$

направление  $\mathbf{T}_m$  определяется тем, что угол, образуемый с ним внешней нормалью  $\mathbf{n}$ , делится силовой линией поля (направлением  $\mathbf{H}$ ) пополам.

**§ 54. Единицы измерения электромагнитных величин.** Чтобы включить в абсолютную систему мер и электромагнитные единицы, мы воспользуемся, согласно § 1, уравнениями, дающими связь между электромагнитными единицами и единицами, установленными уже ранее. Самым естественным было бы воспользоваться для этой цели выражением для плотности энергии электрического или магнитного поля (или (что мы сделаем для наглядности) выражениями, которые получаются в особо простых случаях для электрических или для магнитных сил, — например, законами Кулона для силы, действующей между двумя точечными электрическими зарядами или магнитными полюсами. Эти соотношения удобны тем, что в них входят либо одни электрические величины, либо одни магнитные.

Законы Кулона при произвольно выбранных единицах будут иметь вид

$$F_e = \frac{h}{c} \frac{e_1 e_2}{r^2},$$

$$F_m = \frac{k}{\mu} \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

( $e_1, e_2$  — электрические заряды,  $m_1, m_2$  — магнитные массы).

Диэлектрическую постоянную  $\epsilon$  и магнитную проницаемость  $\mu$  будем считать здесь за отвлеченные числа, не имеющие размерности; в пустоте их значение равно 1.

Множители пропорциональности  $h$  и  $k$  по своей величине и размерности зависят от величины и размерности единиц, в которых измеряются  $e$  и  $m$ ; если последними единицами можно распоряжаться произвольно, то наиболее просто определить их так, чтобы  $h$  и  $k$  не имели размерности и получили величину 1. Тогда единицами  $e$  и  $m$  будут такой электрический заряд и такая магнитная масса, которые в пустоте ( $\epsilon = 1, \mu = 1$ ) равную им массу, находящуюся на расстоянии одного сантиметра, отталкивают с силой в одну дину. Тогда размерности обеих единиц будут

$$[e] = [m] = \left[ M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1} \right]$$

Основываясь на соотношениях, выведенных в предыдущих главах, можно сразу же из единиц для  $e$  и  $m$  вывести единицы потенциала, напряженности, смещения и т. д. Полученная таким образом система единиц называется Гауссовой системой. Ею мы и будем пользоваться в этой книге.

Итак, считая в обоих законах Кулона множители пропорциональности величинами, не имеющими размерности, и полагая их равными единице, можно: а) исходя из определенной таким образом единицы электрического заряда, установить абсолютные единицы электрических величин, б) исходя из единицы магнитной массы, установить единицы магнитных величин. Пока мы ограничиваемся электростатикой и магнетостатикой, между этими двумя областями нет никакой связи; электростатические и магнетостатические поля могут существовать одновременно в одном и том же месте пространства, не оказывая при этом никакого влияния друг на друга. Но если перейти к электродинамике, то Максвелловы уравнения образуют мост между электрическими и магнитными величинами. Они будут

$$c \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + 4\pi \mathbf{i}$$

$$c \operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

или в интегральной форме:

$$c \oint \mathbf{H} ds = \frac{\partial}{\partial t} \iint \mathbf{D}_n dS + 4\pi \iint \mathbf{i}_n dS$$

$$c \oint \mathbf{E} ds = - \frac{\partial}{\partial t} \iint \mathbf{B}_n dS.$$

Действующие в Гауссовой системе мер связующие уравнения

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

отличаются тем, что в них  $\varepsilon$  и  $\mu$  не имеют размерности;  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$ , а также  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$  одинаковы по размерности, а в пустоте и тождественны.

Итак, исходя из законов Кулона, мы в Гауссовой системе мер распорядились единицами  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$ ; множитель пропорциональности  $c$  (который, как показывает опыт, в обоих уравнениях один и тот же) нельзя уже теперь выбирать произвольно; его нужно определять экспериментально. Так например, если пропускать через согнутый кольцом провод ток  $I = \iint \mathbf{i}_n dS$ , то, измеряя магнитное поле,

создаваемое током  $I$ , можно определить интеграл  $\oint \mathbf{H} ds$  силы магнитного поля вдоль кривой, охватывающей провод; из  $I$  и  $\oint \mathbf{H} ds$  получается первое основное уравнение для  $c$ . Или, например, пусть через поверхность, ограниченную проводом, проходит магнитный поток  $\int \mathbf{B}_n dS = \Phi$ ; если изменять этот поток, то в проводе индуцируется электродвижущая сила  $\oint \mathbf{E} ds$ , величину которой можно измерить, скажем, электростатическим вольтметром. Тогда получается второе основное уравнение для  $c$ . Как уже выше упоминалось, в Гауссовой системе мер все величины  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$  имеют одинаковую размерность, а потому размерность  $c$  определяется тем дифференцированием

по времени и по пространству ( $\text{rot}$ ), которое производится в обоих основных уравнениях; отсюда прямо следует, что размерность  $c$  будет  $[LT^{-1}]$ ;  $c$  называют „критической скоростью“; в следующих главах мы увидим, что с этой скоростью электромагнитные действия распространяются в пустоте. Численное значение  $c$  получается из опытов только что описанного вида, а именно

$$c = 300\,000 \text{ км/сек} = 3 \cdot 10^{10} \text{ см/сек.}$$

Вместо того, чтобы исходить одновременно из законов Кулона и для электрической силы и для магнитной силы, как это было сделано в Гауссовой системе мер, можно использовать зависимость между электрическими и магнитными величинами, даваемую максвелловыми уравнениями; можно установить сначала только электрические или только магнитные единицы, и притом именно так, как в системе Гаусса; но затем нужно определить другие величины, полагая для этого постоянную максвелловых уравнений, скажем, равной единице и считая ее величиной, не имеющей размерности. Так называемая электромагнитная система мер получается, например, следующим образом: в магнитном законе Кулона полагают множитель пропорциональности  $k$  равным 1; тогда для величины — магнитной массы и для остальных магнитных величин получаются как-раз те же единицы, что и в Гауссовой системе мер. При этом электрические единицы определяются тем, что в максвелловых уравнениях множитель пропорциональности  $c$  полагают равным 1; если теперь опять взять кольцеобразный провод, пронизываемый магнитным потоком, то в нем индуцируется электромагнитная единица электродвижущей силы, если при этом величина  $-\frac{\partial\Phi}{\partial t}$  равна 1. Если мы обозначим напряженность электрического поля в Гауссовой системе через  $E$ , а в электромагнитной системе эту же силу через  $E'$ , то, в виду того, что правая (магнитная) сторона второго уравнения Максвелла в обеих системах мер одинакова ( $H = H'$ ), будет правильным уравнение

$$c \text{ rot } E = \text{rot } E',$$

а, следовательно, также

$$cE = E'.$$

Поэтому численное значение электрической напряженности, выраженной в электромагнитных единицах, в  $c$  раз больше, чем численное значение в Гауссовых единицах; следовательно, электромагнитная единица в  $c$  раз меньше, чем Гауссова единица.

Если произведение напряженности на заряд должно давать в обеих системах единиц одну и ту же силу, то в силу того, что численное значение напряженности, выраженной в электромагнитных единицах, в  $c$  раз больше, чем численное значение той же силы, выраженной в Гауссовых единицах, численное значение заряда в электромагнитной системе единиц должно быть, наоборот, в  $c$  раз меньше:

$$e' = \frac{e}{c}.$$

Тогда из

$$\int \int \mathbf{D}_n dS = 4\pi e$$

следует, что также

$$\mathbf{D}' = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon}.$$

Если в первое уравнение Максвелла, левая сторона которого осталась неизменной, подставить  $\mathbf{D} = c\mathbf{D}'$ , то множитель  $c$  с обеих сторон сокращается, т. е. и здесь коэффициент пропорциональности ставится равным единице. Мы видим отсюда, что при переходе к любой системе единиц коэффициенты в Максвелловых уравнениях всегда остаются одинаковыми: правда,  $\mathbf{D}$  видоизменяется противоположно видоизменению  $\mathbf{E}$ ; но  $\mathbf{D}$  стоит в то же время с другой стороны уравнения.

Связь между  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$ , наоборот, изменяется; а именно  $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$  при  $\mathbf{E}' = c\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}' = \frac{\mathbf{D}}{c}$  переходит в

$$\mathbf{D}' = \frac{\epsilon}{c^2} \mathbf{E}'.$$

Часто говорят:  $\frac{\epsilon}{c^2}$  есть „диэлектрическая постоянная“  $\epsilon'$  в электромагнитной системе единиц (на этот раз уже величина, имеющая размерность); тем самым формально спасается связь

$$\mathbf{D}' = \epsilon' \mathbf{E}';$$

конечно, физическое значение  $\epsilon'$  теперь не то, которое имело  $\epsilon$ . Если исходить из электрического закона Кулона и определять затем магнитные единицы, полагая для этого максвелловский множитель равным единице, то получается электростатическая система единиц. Единицы электрических величин этой системы совпадают с соответствующими единицами Гауссовой системы. Но эта система почти никогда не употребляется: если говорят об электрических единицах, измеренных электростатически, то подразумевают электрическую часть Гауссовой системы единиц.

Для практического применения большинство единиц упомянутых систем являются весьма неудобными, так как получающиеся для них численные значения или слишком велики или слишком малы. Перемножая их на подходящие численные множители, получают техническую систему единиц. Важность этой системы заключается в том, что почти все литературные численные данные, а также шкалы большинства измерительных приборов отнесены к ее единицам; чтобы не производить пересчета для каждого отдельного случая, целесообразно сразу же пользоваться формулами, отнесенными к технической системе единиц.

Техническая система единиц получается из Гауссовой системы тем, что

- 1) вместо эрга за единицу электрической работы принимают 1 джоуль =  $10^7$  эрг;
- 2) Гауссова единица напряжения уменьшается в 300 раз; полученную единицу называют вольт-ом.



Если мы обозначим технические численные значения индексом „звездочка“, то тогда

$$E = \frac{1}{300} E^*$$

Так же, как и единица работы, техническая единица силы в  $10^7$  раз больше.

$$F = F^* \cdot 10^7;$$

тем самым из  $F = eE$  получается  $10^7 P^* = \frac{1}{300} \cdot E^* \cdot e$ . Далее, если мы хотим, чтобы было справедливо равенство  $F^* = e^* E^*$ , то должно быть

$$e = 3 \cdot 10^9 e^*;$$

это значит, что техническая единица заряда в  $3 \cdot 10^9$  раз больше Гауссовой единицы или в  $\frac{c}{3 \cdot 10^9} = 10$  раз меньше, чем электромагнитная. Она называется кулоном; единица тока (кулон в секунду) называется ампером. Она связана с Гауссовой единицей тока уравнением

$$I = 3 \cdot 10^9 I^*.$$

Так как в магнитной части Гауссовой системы единиц ничто не изменяется,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{B}$  не изменяются; единицу  $\mathbf{H}$  называют эрстедом, единицу  $\mathbf{B}$  — гауссом; единица магнитного потока (1 гаусс.  $cm^2$ ) называется максвеллом.

Напишем теперь уравнения Максвелла для технических единиц и притом в наиболее употребительном, а именно в интегральном виде. Закон индукции

$$c \oint \mathbf{E} ds = - \frac{\partial}{\partial t} \iint \mathbf{B}_n dS = - \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

будет

$$3 \cdot 10^{10} \cdot \frac{1}{300} \cdot \oint \mathbf{E}^* ds = - \frac{\partial \Phi^*}{\partial t};$$

значит,

$$\oint \mathbf{E}^* ds = - \frac{\partial \Phi^*}{\partial t} \cdot 10^{-8}.$$

Индукированное напряжение в вольтах равно скорости изменения потока индукции в  $\frac{\text{максвелл}}{\text{сек}}$ .

Напишем первое основное уравнение для квазистационарных токов (пренебрегая при этом током смещения):

$$c \oint \mathbf{H} ds = 4\pi \iint \mathbf{i}_n dS = 4\pi I,$$

где  $I$  — полный ток, проходящий вдоль по контуру. Отсюда, полагая  $I = 3 \cdot 10^9 I^*$ , получаем

$$3 \cdot 10^{10} \oint \mathbf{H}^* ds = 4\pi \cdot 3 \cdot 10^9 I^*$$

или

$$\oint \mathbf{H}^* ds = 0,4\pi I^*.$$

Интеграл по контуру вокруг тока от силы магнитного поля равен  $0,4\pi$  от величины тока, охватываемого контуром, в амперах.

Определим еще технические единицы сопротивления, коэффициента самоиндукции и емкости.

Если положить в законе Ома  $E = \frac{1}{300} E^*$  и  $I = 3 \cdot 10^9 I^*$ , то

$$\frac{1}{300} E^* = 3 \cdot 10^9 I^* \cdot R.$$

Следовательно,

$$R^* = 9 \cdot 10^{11} R.$$

Техническая единица сопротивления в  $9 \cdot 10^{11}$  раз меньше Гауссовой единицы; она называется омом.

Коэффициент самоиндукции  $L$  и емкость  $C$  определяются при помощи

$$E = -L \frac{dI}{dt}$$

и

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{C} I.$$

Эти уравнения в отношении размерности построены совершенно аналогично закону Ома, так что прямо можно написать

$$L^* = 9 \cdot 10^{11} L$$

и

$$C^* = \frac{1}{9 \cdot 10^{11}} C.$$

Техническая единица коэффициента самоиндукции называется генри; техническая единица емкости называется фарадой.

Наконец, найдем связь между  $D$  и  $E$  в технической системе единиц. Из

$$E = \frac{1}{300} E^*, \quad e = 3 \cdot 10^9 e^*$$

и

$$\int \int D_n^* dS = 4\pi e^*$$

следует

$$\frac{1}{300} E^* \cdot \varepsilon = 3 \cdot 10^9 D^*;$$

значит,

$$D^* = \frac{\varepsilon}{9 \cdot 10^{11}} E^*.$$

Естественно, что такое определение технической системы единиц для практика дает так же мало, как, например, указание, что  $1 \text{ м}$  равен одной сорокаmillionной части земного меридиана. Систему единиц нужно укрепить путем точного определения некоторых легко воспроизводимых величин. Так, в результате интернационального соглашения установлены единицы сопротивления и электрического тока. Так называемый „международный ом“ есть сопротивление ртутного столба с поперечным

сечением в  $1 \text{ мм}^2$  и длиной  $106,3 \text{ см}$  при  $0^\circ$ ; „международный ампер“ есть ток, который в течение секунды выделяет  $1,118 \text{ мг}$  серебра. „Международный вольт“ прогоняет по проводнику с сопротивлением в  $1 \text{ ом}$  ток в  $1 \text{ ампер}$ .

Эти раз установленные числа из соображений целесообразности остаются неизменными, так же как например, осталась неизменной единица длины, хотя она и не совпадает точно с  $1/20\,000\,000$  частью земного меридиана. Согласно более новым измерениям, значение международной единицы тока является довольно точным; международная единица сопротивления больше теоретической примерно на  $1/2$  промилля. Пока не делается особых оговорок, все литературные данные, а равно градуировка всех измерительных инструментов относятся к международным единицам.

### III. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ ТОКОВ

§ 55. Закон энергии для системы линейных токов. Положения, которые должны быть развиты в этой главе, большую часть уже содержатся в общих теоремах § 53 относительно энергии магнитного поля. В виду большого практического значения тех особых систем, которые мы должны здесь рассмотреть, мы разовьем их теорию совершенно самостоятельно и независимо от указанных более общих соображений.

Рассмотрим некоторое число проводников с токами; пусть они различаются индексами  $1, 2, \dots, k, \dots, n$ . Пусть  $I_1, I_2, \dots, I_n$  — токи, проходящие по этим цепям,  $R_1, R_2, \dots, R_n$  — их омические сопротивления,  $E_1^{(e)}, E_2^{(e)}, \dots, E_n^{(e)}$  — действующие в них сторонние электродвижущие силы (аккумуляторы, термоэлементы, сеть переменного тока и т. п.). Постоянных магнитов пусть в поле не будет. Пусть далее индукция  $\mathbf{B}$  всюду будет пропорциональна напряженности  $\mathbf{H}$ :

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}.$$

Проницаемость  $\mu$  может быть произвольной функцией координат, но не должна уже зависеть от  $\mathbf{H}$ . Тем самым мы вообще исключаем магнитно-твердые ферромагнетики. Если в поле имеются мягкие ферромагнитные вещества, то их намагничение должно находиться на прямолинейной начальной части кривой (рис. 43а). При таких обстоятельствах магнитная энергия поля  $U_M$  дается выражением

$$U_M = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{B} \mathbf{H} \, dv.$$

В силу того, что поле  $\mathbf{B}$  не имеет источников, можно введением векторного потенциала заменить индукцию  $\mathbf{B}$  на  $\text{rot } \mathbf{A}$ , в результате чего получается:

$$\mathbf{B} \mathbf{H} = \mathbf{H} \cdot \text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{H} + \text{div} (\mathbf{A} \times \mathbf{H}).$$

Но  $\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{i}$ . При интегрировании по всей системе происходящий от  $\text{div}$  интеграл по поверхности обращается в нуль, так что получаем

$$U_M = \frac{1}{2c} \int (\mathbf{A} \mathbf{i}) \, dv. \quad (136)$$

Если  $I$  означает силу линейного тока,  $q$  — его сечение,  $ds$  — линейный элемент проводника, то

$$\mathbf{i} dv = \mathbf{j} |q| ds = I ds.$$

Так как во всех местах провода, по которому течет ток,  $I$  имеет одинаковое значение, то энергия поля системы  $n$  цепей тока будет

$$U_M = \frac{1}{2c} \sum_{k=1}^n I_k \oint_k (\mathbf{A} ds). \quad (136a)$$

Интеграл по контуру  $k$ -го контура тока по теореме Стокса будет

$$\oint_k (\mathbf{A} ds) = \int \int \mathbf{B}_n dS = \Phi_k, \quad (136b)$$

где  $\Phi_k$  означает опять поток индукции, охватываемый  $k$ -ым контуром тока.

Тем самым для энергии поля получаем окончательное выражение

$$U_M = \frac{1}{2c} \sum_{k=1}^n I_k \Phi_k. \quad (137)$$

Умножая силу тока  $I_k$   $k$ -го контура на поток индукции, охватываемый этим контуром, и суммируя по всем  $n$  цепям, получаем произведение  $2c$  на магнитную энергию поля.

Наряду с энергетическим уравнением (137), в качестве второго фундаментального положения возьмем закон индукции Фарадея, который для  $k$ -того контура будет даваться выражением:

$$I_k R_k - E_k^{(e)} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi_k}{dt}.$$

Для наших энергетических соображений нам понадобится понятие тепловой и химической отдачи  $\Psi$  [ср. (132b)].

Последняя определяется как

$$\Psi = \sum_{k=1}^n (I_k R_k - I_k E_k^{(e)}) = -\frac{1}{c} \sum_{k=1}^n I_k \frac{d\Phi_k}{dt}. \quad (138)$$

$\Psi$ , следовательно, есть разность между джоулевым теплом  $I_k^2 R_k$ , выделяемым за секунду, и мощностью сторонней силы  $I_k E_k^{(e)}$ . Если, например,  $I_k E_k^{(e)}$  отрицательна, то это значит, что к соответствующему аккумулятору или элементу подводится энергия. Аккумулятор тогда, например, заряжается и за секунду накапливает в форме свободной химической энергии энергию  $-I_k E_k^{(e)}$ .  $\Psi$ , значит, во всяком случае представляет энергию, которая получается за секунду в виде теплоты или химической энергии.

Предположим далее, что отдельные контуры или их части движутся друг относительно друга. Положение движущихся частей в данный

момент пусть характеризуется известными параметрами  $a_1, a_2, \dots, a_s$ . Так, например, если участок провода передвигается параллельно оси  $x$ , то  $a_1$  может быть просто координатой  $x$  определенной точки этого участка. Определим силу  $F_r$ , соответствующую параметру  $a_r$ , следующим образом: если параметр  $a_r$  изменяется на величину  $da_r$ , то при этом в соответствующем участке провода затрачивается работа  $F_r da_r$ . Если, например,  $a_r$  есть длина, то  $F_r$  есть сила в обычном смысле слова. Если, наоборот,  $a_r$  есть угол, то  $F_r$  становится вращающим моментом. Пусть движение нашей системы проводов описывается тем, что  $a_1, a_2, \dots, a_s$  заданы как функции времени. Так как мы все силы кроме сил, создаваемых самим полем, исключаем из рассмотрения, то ежесекундная работа, совершаемая полем при таком движении, будет

$$= \sum_{r=1}^{r=s} F_r \frac{da_r}{dt}. \quad (139)$$

Следовательно,  $A$  представляет количество энергии, которое ежесекундно приобретает нами в виде механической работы.

Энергия видов, отличных от тех, которые даются уравнениями (137), (138), (139), не должна входить в рассмотрение. Тогда принцип сохранения энергии для замкнутой системы будет

$$\frac{dU_M}{dt} + \Psi + A = 0. \quad (140)$$

Мощность теплового, химического или механического вида может происходить только за счет энергии поля  $U_m$ .

Состояние нашей системы во всякий момент однозначно определяется значениями  $I_1, I_2, \dots, I_n$  сил тока и параметрами  $a_1, a_2, \dots, a_s$ , характеризующими положение в пространстве. Мы будем по этому рассматривать энергию  $U_M$  и потоки индукции  $\Phi_k$  как функции этих  $n+s$  величин

$$\left. \begin{aligned} U_M &= U_M(I_1, \dots, I_n, a_1, \dots, a_s) \\ \Phi_k &= \Phi_k(I_1, \dots, I_n, a_1, \dots, a_s) \quad (k = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (141)$$

$\frac{\partial}{\partial I_1}$  означает в дальнейшем дифференцирование по  $I_1$ , причем все остальные  $I$  и величины  $a_1, \dots, a_s$  при дифференцировании по  $I_1$  остаются постоянными.

Рассмотрим прежде всего процессы без получения механической работы. Это значит, что параметры  $a_1, a_2, \dots, a_s$  не изменяются. Кроме того, мы можем ограничиться случаем, когда меняется только ток  $I_1$ , а все остальные величины  $I_2, \dots, I_n, a_1, \dots, a_s$  остаются постоянными. Тогда, согласно (137),

$$\frac{dU_M}{dt} = \frac{\partial U_M}{\partial I_1} \dot{I}_1 = \frac{1}{c} \left\{ \frac{1}{2} \Phi_1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n I_k \frac{\partial \Phi_k}{\partial I_1} \right\} \dot{I}_1$$

и согласно (138)

$$\Psi = -\frac{1}{c} \sum_{k=1}^n I_k \frac{\partial \Phi_k}{\partial I_1} \dot{I}_1.$$

Так как теперь  $A$  равняется нулю, то уравнение (140) с данными значениями  $\frac{dU_M}{dt}$  и  $\Psi$  дает

$$\Phi_1 = \sum_{k=1}^n I_k \frac{\partial \Phi_k}{\partial I_1} \quad \text{и} \quad \frac{\partial U_M}{\partial I_1} = \frac{1}{c} \cdot \Phi_1. \quad (141a)$$

Этот результат дает возможность сделать важное преобразование выражения для изменения энергии во времени в случае процессов, соединенных с получением работы, т. е. уже при любых изменениях  $I_k$  и  $a_r$ . Тогда прежде всего

$$\frac{dU_M}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial U_M}{\partial I_k} \dot{I}_k + \sum_{r=1}^s \frac{\partial U_M}{\partial a_r} \dot{a}_r,$$

а потому по (141a)

$$\frac{dU_M}{dt} = \frac{1}{c} \sum_{k=1}^n \Phi_k \frac{dI_k}{dt} + \sum \frac{\partial U_M}{\partial a_r} \frac{da_r}{dt}. \quad (141b)$$

С другой стороны, как следует непосредственно из (137), во всех случаях

$$2 \frac{dU_M}{dt} = \frac{1}{c} \sum \Phi_k \frac{dI_k}{dt} + \frac{1}{c} \sum I_k \frac{d\Phi_r}{dt}.$$

Вычитание двух последних уравнений друг из друга приводит к

$$\frac{dU_M}{dt} = \frac{1}{c} \sum I_k \frac{d\Phi_k}{dt} - \sum \frac{\partial U_M}{\partial a_r} \frac{da_r}{dt}.$$

Подставляя последнее выражение, а также значение  $\Psi$  из (138) в уравнение энергии (140), получим ежесекундно приобретаемую работу  $A$

$$A = \sum_{r=1}^{r=s} \frac{\partial U_M}{\partial a_r} \cdot \frac{da_r}{dt}.$$

Согласно (139), тем самым определены обобщенные силы  $F_r$ , относящиеся к параметрам  $a_r$ :

$$F_r = \frac{\partial U_M}{\partial a_r}. \quad (141c)$$

Итак, если магнитная энергия  $U_M$  известна, согласно (141), как функция сил тока  $I$  и координат положения  $a$ , то частная производная по  $I_k$  дает поток индукции (141a), охватываемый  $k$ -ым проводником, а частная производная по  $a_r$  — силу (141c), соответствующую координате  $a_r$ .

Особого внимания заслуживает в уравнении (141c) знак. Именно, если в обычной механике потенциальная энергия дается как функция координат положения, то, как известно, силы получаются частным дифференцированием отрицательной энергии (или отрицательного

потенциала) по соответствующей координате. Согласно (141с), отрицательная магнитная энергия играет, следовательно, роль потенциала. В то время как в механике силы действуют в таком направлении, что при этом потенциальная энергия уменьшается („производство работы за счет потенциальной энергии“), наши электродинамические силы показывают обратное поведение: они действуют в таком направлении, что при этом магнитная энергия поля возрастает. Особенно ясным это поведение становится тогда, когда при движении силы тока держатся постоянными, — например, путем соответствующих изменений сторонних сил (включение или выключение аккумуляторов). Тогда  $\frac{dI_k}{dt} = 0$  для всех  $k$ , и мы получаем из (139), (141b), (141с) просто

$$\left(\frac{dU_M}{dt}\right)_{I=\text{const}} = A. \quad (141d)$$

В этом случае энергия поля увеличивается, значит, как раз на величину совершенной работы. Если имеются провода, по которым текут токи, и силы последних поддерживаются постоянными, а сами провода движутся друг относительно друга, так что при этом совершается работа  $A$ , то энергия поля увеличивается на величину, равную  $A$ . Ежесекундно приобретаемая энергия величины  $2A$  уравнивается мощностью сторонних сил, с помощью которых достигается постоянство сил тока. В самом деле, согласно (140):

$$2A = -\dot{\Psi}.$$

А по (138):

$$-\dot{\Psi} = \sum_{r=1}^n (I_k E_k^{(e)} - I_k^2 R_k),$$

$I_k E_k^{(e)}$  есть мощность сторонних сил в  $k$ -ом контуре тока. Значит  $-\dot{\Psi}$  есть действительно разность между мощностью сторонних сил и джоулевым теплом.

Из формулы (137) для  $U_M$  следует, учитывая направление механических сил, что всякий провод, по которому течет ток, стремится охватить возможно больший поток индукции. Количественное значение силы мы уже вывели раньше [уравнение (134)]. Позднее мы вернемся еще к этому после обсуждения уравнения (141а).

**§ 56. Самоиндукция и взаимная индукция.** Рассмотрим далее энергию

$$U_M = \frac{1}{2c} \sum_{k=1}^n I_k \Phi_k$$

системы проводов, по которым идут токи, при условиях предыдущего параграфа, и остановимся подробнее на потоке индукции

$$\Phi_1 = \int_1 \mathbf{B}_n dS,$$

который пронизывает первый контур. В нашей системе вектор  $\mathbf{B}$  в любом месте однозначно определяется токами  $I_1, \dots, I_n$  в отдельных проводах. Раз мы предполагаем, что  $\mu$  не зависит от  $\mathbf{H}$ , то ясно, что отдельные токи прибавляют к вектору  $\mathbf{B}$  части, пропорциональные соответствующим силам тока. Соответственно этому можно и поток индукции  $\Phi_1$  подразделить на части, создаваемые отдельными токами  $I_1, I_2, \dots$ . Выразим это в виде формулы

$$\frac{1}{c} \Phi_1 = L_{11}I_1 + L_{12}I_2 + \dots + L_{1n}I_n. \quad (142)$$

Значение введенных таким образом величин  $L_{ik}$  состоит в том, что  $c \cdot L_{1k}$  представляет собой тот поток индукции, который пронизывает контур тока № 1, когда в цепи тока  $N_k$  течет ток  $I_k = 1$ , а все остальные токи равны нулю. Очевидно, что  $L_{1k}$  зависит только от взаимного расположения двух контуров тока 1 и  $k$ .

$L_{ik}$  называют коэффициентом взаимной индукции двух контуров  $i$  и  $k$ , если  $i \neq k$ .  $L_{kk}$  называется коэффициентом самоиндукции  $k$ -го контура.

Для каждого из  $n$  контуров мы можем образовать выражение, соответствующее уравнению (142), так что в общем

$$\frac{1}{c} \Phi_i = \sum_{k=1}^n L_{ik} I_k. \quad (142a)$$

Подставляя (142a) в выражение для энергии, получим

$$U_M = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n L_{ik} I_i I_k. \quad (142b)$$

Энергия поля есть однородная квадратичная форма относительно сил тока. Это мы могли бы вывести уже из второго уравнения (141a)

$$\frac{1}{c} \Phi_1 = \frac{\partial U_M}{\partial I_1}.$$

В самом деле, отсюда прямо следует

$$2U_M = \sum I_k \frac{\partial U_M}{\partial I_k}.$$

Но по известной теореме Эйлера это уравнение выражает собой как раз то, что  $U_M$  зависит от  $I_1, I_2, \dots, I_n$  однородно квадратично. Но (142a) позволяет еще, кроме того, сделать очень важное заключение относительно симметрии коэффициентов взаимной индукции. А именно, согласно (142a),

$$L_{ik} = \frac{\partial}{\partial I_k} \left( \frac{1}{c} \Phi_i \right);$$

следовательно, согласно (141a), также

$$L_{ik} = \frac{\partial^2 U_M}{\partial I_k \partial I_i}.$$



Но отсюда следует, что всегда справедливо соотношение симметрии

$$L_{ik} = L_{ki}. \quad (142c)$$

С помощью этого результата преобразуем теперь выражение для силы

$$F_1 = \frac{\partial U_M}{\partial a_1},$$

даваемое уравнением (141b), для случая, когда координата  $a_1$  относится к первому контуру, и когда, следовательно, при изменении  $a_1$  все провода, за исключением первого, остаются в покое. Тогда от  $a_1$  будут зависеть только те  $L_{ik}$ , у которых или  $i = 1$  или  $k = 1$ . Таким образом из (142b) мы получаем прежде всего

$$F_1 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial L_{1k}}{\partial a_1} I_1 I_k + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial L_{i1}}{\partial a_1} I_i I_1.$$

Если во втором слагаемом заменить индекс  $i$  на  $k$ , то соотношение симметрии (142c) дает

$$F_1 = I_1 \sum_{k=1}^n \frac{\partial L_{1k}}{\partial a_1} I_k,$$

а, следовательно, по (142)

$$F_1 = \frac{1}{c} I_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial a_1}. \quad (143)$$

Сила „в направлении“ координаты  $a_1$  только множителем  $\frac{I_1}{c}$  отличается от приращения, которое получит поток индукции  $\Phi_1$  при движении в направлении  $a_1$ , если при этом все силы тока будут поддерживаться постоянными. Поясним этот результат на двух простых примерах:

а) Сила, действующая на элемент  $ds$  проводника, по которому течет ток. Положим, что элемент проводника  $ds$  может с помощью, например, скользящих контактов свободно двигаться в направлении  $\mathbf{r}$ . При передвижении  $ds$  на единичный вектор  $\mathbf{r}_0$ ,  $ds$  описывает поверхность  $\mathbf{r}_0 \times ds$ . Сквозь эту поверхность проходит поток индукции

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_0 \times ds) = \mathbf{r}_0 (ds \times \mathbf{B}).$$

На эту величину увеличивается поток  $\Phi_1$ . Для составляющей по  $\mathbf{r}$  силы, действующей на элемент  $ds$ , уравнение (143) дает

$$F_r = \frac{1}{c} I_1 [\mathbf{r}_0 (ds \times \mathbf{B})],$$

и, следовательно, для самой силы выражение

$$F = \frac{I_1}{c} (ds \times \mathbf{B}), \quad (143a)$$

совпадающее с (134).

б) *Вращательный момент, который действует на плоский контур в однородном поле.* Если  $S$  есть площадь, ограниченная контуром тока,  $\alpha$  — угол между однородным полем  $\mathbf{B}_0$  и нормалью к плоскости, то  $\Phi_0 = S \cdot |\mathbf{B}_0| \cdot \cos \alpha$  есть часть потока индукции, зависящая от  $\mathbf{B}_0$ . Согласно уравнению (143), контур испытывает относительно оси, перпендикулярной к полю, вращательный момент в направлении равный  $a$ ,

$$D_\alpha = \frac{I}{c} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \alpha} = -\frac{IS}{c} \mathbf{B}_0 \sin \alpha.$$

При отсутствии магнитных веществ  $\mathbf{B}_0$  тождественно с  $\mathbf{H}_0$ . Тогда  $D$  совпадает с вращательным моментом, который действовал бы на магнитную стрелку момента  $m = \frac{IS}{c}$ . Этому результату нужно было ожидать на основании эквивалентности токов и магнитных листков (ср. § 48).

§ 57. *Вычисление коэффициентов индукции для некоторых частных случаев.* В § 55 и 56 мы считали, что  $\mu$  произвольно меняется от места к месту. Если теперь область, заполненная магнитным полем, всюду обладает одинаковой проницаемостью, то мы можем указать общую формулу для коэффициента взаимной индукции  $L_{12}$  двух контуров 1 и 2.  $L_{12}I_2$  определяется как разделенный на  $c$  поток индукции, который посылается током  $I_2$ , идущим во втором контуре, через первый контур. Если обозначить через  $ds_1$  линейный элемент первого контура и соответственно через  $ds_2$  — элемент второго контура, то, согласно (136b),

$$L_{12}I_2 = \frac{1}{c} \oint (\mathbf{A} ds_1),$$

где  $\mathbf{A}$  означает векторный потенциал, создаваемый током 2 в месте  $ds_1$ . Но для него мы уже раньше нашли [ср., например, (118a)] значение

$$\mathbf{A} = \frac{\mu I_2}{c} \oint \frac{ds_2}{r},$$

так что мы получаем

$$L_{12} = \frac{\mu}{c^2} \iint \iint \frac{(ds_1 ds_2)}{r_{12}}. \quad (144)$$

Для вычисления коэффициента взаимной индукции надо каждый линейный элемент одного контура скалярно перемножить с каждым элементом другого контура, произведение разделить на расстояние между обоими элементами и просуммировать по обоим контурам.

Условие симметрии  $L_{12} = L_{21}$ , очевидно, соблюдено.

Для примера рассмотрим практически важный случай двух параллельных, коаксиальных круговых токов.

Пусть  $a_1$  и  $a_2$  — радиусы окружностей и  $z$  — их расстояние по нормали к их плоскостям. Для вычисления выберем два линейных элемента  $ds_1$  и  $ds_2$ , которые повернуты друг относительно друга на угол  $\vartheta$ . Их взаимное расстояние будет

$$r_{12} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + z^2 - 2a_1a_2 \cos \vartheta};$$

их скалярное произведение равняется

$$ds_1 ds_2 = ds_1 ds_2 \cos \vartheta.$$

Если произвести интегрирование (144) сначала по второму контуру, то, в силу  $ds_2 = a_2 d\vartheta$ , имеем

$$ds_1 \oint \frac{\cos \vartheta ds_2}{r_{12}} = ds_1 \int_0^{2\pi} \frac{a_2 \cos \vartheta d\vartheta}{\sqrt{z^2 + a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 \cos \vartheta}}.$$

Интегрирование по первому контуру дает просто  $\int ds_1 = 2\pi a_1$ , так что мы получаем

$$L_{12} = \frac{2\pi\mu}{c^2} \int_0^{2\pi} \frac{a_1 a_2 \cos \vartheta d\vartheta}{\sqrt{z^2 + a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 \cos \vartheta}}.$$

Чтобы привести этот интеграл к эллиптическим интегралам, для которых существует таблица, положим

$$k^2 = \frac{4a_1 a_2}{(a_1 + a_2)^2 + z^2} \quad \text{и} \quad \vartheta = \pi - 2\varphi.$$

Тогда

$$\cos \vartheta = -\cos 2\varphi = 2 \sin^2 \varphi - 1$$

и

$$\begin{aligned} r_{12} &= \sqrt{z^2 + a_1^2 + a_2^2 - 4a_1 a_2 \sin^2 \varphi + 2a_1 a_2} = \\ &= \sqrt{z^2 + (a_1 + a_2)^2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}. \end{aligned}$$

Таким образом получаем:

$$L_{12} = \frac{4\pi k\mu}{c^2} \sqrt{a_1 a_2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin^2 \varphi - 1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi.$$

В силу тождества -

$$\frac{2 \sin^2 \varphi - 1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{k^2} \left\{ \frac{2 - k^2}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} - 2 \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \right\}$$

получается, следовательно,

$$L_{12} = \frac{4\pi\mu}{c^2} \sqrt{a_1 a_2} \left\{ \left( \frac{2}{k} - k \right) K - \frac{2}{k} E \right\}. \quad (145)$$

В уравнении (145)

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

и

$$E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \quad (145a)$$

представляют собой полные эллиптические интегралы первого и второго вида, значения которых при данном  $k$  можно взять из таблиц.

Определим еще приближенное значение (145) для случая, когда самое малое расстояние  $b$  между окружностями мало по сравнению с их диаметром. Мы полагаем, следовательно,

$$|a_1 - a_2| \ll a_1 \text{ и } z \ll a_1.$$

Тогда  $k$  становится весьма близким к 1, и мы получаем для  $E$  при-

ближенное значение  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi = 1$ .  $K$ , наоборот, при  $k = 1$  стало бы бесконечным. Чтобы вычислить его для  $k \approx 1$ , заменим прежде всего  $\varphi$  на  $\frac{\pi}{2} - \varphi$  и разложим  $K$  на два слагаемых:

$$K = \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \varphi}} + \int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \varphi}},$$

где  $\varphi_0$  выберем так, что

$$1 - k^2 \ll \varphi_0^2 \ll 1.$$

Тогда в первом приближении в первом слагаемом можно заменить  $\cos^2 \varphi$  первыми членами его разложения  $1 - \varphi^2$ . Во втором слагаемом можно, наоборот, просто заменить  $k^2$  на 1; тогда получим

$$K = \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{(1 - k^2) - k^2 \varphi^2}} + \int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin \varphi}. \quad (145b)$$

Положим еще

$$k'^2 = 1 - k^2 = \frac{(a_1 - a_2)^2 + z^2}{(a_1 + a_2)^2 + z^2} \approx \left(\frac{z}{2a}\right)^2, \quad (145c)$$

где  $b$  означает кратчайшее расстояние окружностей, а  $2a$  — их (почти совпадающий) диаметр. В первом интеграле остающийся еще при  $\varphi^2$  множитель  $k^2$  можно также положить равным единице. Тогда элементарное интегрирование дает

$$K = \ln \frac{\varphi_0 + \sqrt{k'^2 + \varphi_0^2}}{k'} - \ln \left( \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2} \right).$$

В силу  $k'^2 \ll \varphi_0^2$  и  $\varphi_0 \ll 1$ , отсюда получается

$$K = \ln \frac{2\varphi_0}{k'} - \ln \frac{\varphi_0}{2} = \ln \frac{4}{k'} = \ln \frac{8a}{b}.$$

Если мы положим еще в (145)  $k$  также равным единице, то коэффициент взаимной индукции двух коаксиальных окружностей с почти одинаковым радиусом  $a$ , с наикратчайшим расстоянием  $b$ , малым по сравнению с  $a$ , получается равным

$$L_{12} = \frac{4\pi\mu}{c^2} a \left\{ \ln \frac{8a}{b} - 2 \right\}. \quad (145d)$$

Применим этот результат к вычислению самоиндукции кругового провода с радиусом сечения  $r$  и радиусом круга  $R$ , предполагая при этом  $r \ll R$ . При этом проводник нельзя уже считать линейным, так как тогда магнитная энергия поля при конечном токе стала бы бесконечно большой. Мы будем поэтому исходить из более общего уравнения (142b), которое для случая одного контура в поле будет иметь вид

$$\frac{1}{8\pi} \iiint \mathbf{H} \mathbf{H} dv = \frac{1}{2} LI^2.$$

Разделим область интегрирования на две. Первая, внешняя область пусть включает в себя все пространство за исключением провода; пусть она обозначается индексом  $e$ . Вторая, внутренняя область (индекс  $i$ ) соответствует пространству, заполненному самим проводом. В этих двух областях проницаемости ( $\mu_e$  и  $\mu_i$ ) могут быть различны. Соответственно этому представим также и

$$L = L_e + L_i$$

в виде суммы внешней и внутренней самоиндукции:

$$\frac{1}{8\pi} \iiint \mathbf{H} \mathbf{H} dv_e = \frac{1}{2} L_e I^2$$

и

$$\frac{1}{8\pi} \iiint \mathbf{H} \mathbf{H} dv = \frac{1}{2} L_i I^2. \quad (146)$$

Наше предположение  $r \ll R$  позволит пользоваться следующим приближенным способом: во внешней области мы будем производить вычисление так, как если бы ток  $I$  концентрировался на оси провода; внутри провода мы предполагаем поле таким, каким оно было бы в прямолинейном бесконечно длинном проводе.

Для вычисления  $L_e$  по формуле (146) заменим действие тока  $I$  действием магнитного двойного слоя, ограниченного этим током; магнитный потенциал  $\varphi_m$ , создаваемый этим слоем, претерпевает при прохождении через слой скачок, равный  $\frac{4\pi}{c} I$ . Теорема Гаусса дает в этом случае

$$\frac{1}{8\pi} \iiint \mathbf{H} \mathbf{H} dv_e = \frac{I}{2c} \iint \mathbf{B}_n dS.$$

$\frac{1}{c} \iint \mathbf{B}_n dS$  есть разделенный на  $c$  поток индукции, посылаемый линейным круговым током  $I$  радиуса  $R$  через поверхность круга радиуса  $R - r$ . Следовательно,

$$\frac{1}{c} \iint \mathbf{B}_n dS = L_e I,$$

где  $L_e$  совпадает с величиной  $L_{12}$ , даваемой (145d), если заменить в ней  $a$  на  $R$  и  $b$  на  $r$ :

$$L_e = \frac{4\pi\mu_e}{c^2} R \left\{ \ln \frac{8R}{r} - 2 \right\}. \quad (146a)$$

Внутри провода на расстоянии  $y$  от оси поле дается формулой

$$|\mathbf{H}| = \frac{2I}{cr^2} y.$$

А, следовательно, энергия, приходящаяся на единицу длины, будет

$$\frac{\mu_i}{8\pi} \int_0^r |\mathbf{H}|^2 2\pi y dy = \frac{I^2}{2} \cdot \frac{\mu_i}{2c^2}.$$

Умножая на длину провода  $2\pi R$ , получим отсюда согласно уравнению (146),  $\frac{1}{2} L_i I^2$ , и тем самым

$$L_i = \frac{\pi\mu_i}{c^2} R. \quad (146b)$$

Таким образом, весь коэффициент самоиндукции нашего кольцевого провода будет

$$L = L_i + L_e = \frac{4R}{c^2} \left\{ \frac{\mu_i}{4} + \mu_e \left( \ln \frac{8R}{r} - 2 \right) \right\}. \quad (146c)$$

В частности при немагнитном материале ( $\mu_i = \mu_a = 1$ )

$$L = \frac{4\pi R}{c^2} \left\{ \ln \frac{8R}{r} - 1,75 \right\}. \quad (146d)$$

Рассмотрим следующий численный пример:  $R = 5$  см;  $r = 0,5$  мм. Тогда  $\ln \frac{8R}{r} = \ln 800 = 6,68$ ; следовательно,

$$L = \frac{20\tau}{c^2} \{0,25\mu_i + 4,68\mu_e\} \left[ \frac{сМ}{c^2} \right]. \quad (146e)$$

Если бы провод был сделан из ферромагнитного материала и окружен воздухом, то  $\mu_i \approx 500$ ,  $\mu_e = 1$ . В этом случае  $L_i \gg L_e$ ; энергия поля концентрировалась бы главным образом внутри провода. Напротив, при немагнитном материале ( $\mu_i = \mu_e = 1$ ) внутри провода находится только 50% энергии.

Вышеуказанное подразделение  $L$  на  $L_i$  и  $L_e$  имеет физическое значение, когда мы имеем дело с высокочастотными колебаниями. В этом случае плотность тока распределяется по сечению провода неравномерно, как это мы выше предполагали при вычислении  $L_i$ . Рассматриваемый в § 66 скин-эффект приводит к тому, что ток проходит главным образом по поверхности провода, и что точно так же и поле стягивается в тонкий поверхностный слой. Следствием этого является уменьшение  $L_i$ . Что касается  $L_e$ , то оно этим явлением почти не изменяется. Поэтому для достаточно быстрых колебаний  $L_i$  становится равно нулю, и  $L = L_e$ .

Значительно проще вычисление  $L$  для длинной катушки, согнутой в кольцо, при диаметре кольца  $A$  и поперечном сечении катушки  $q$ . Пусть  $n$  — полное число витков, и  $\mu$  — проницаемость сердечника катушки. Тогда внутри катушки

$$2\pi AH = \frac{4\tau}{c} nI;$$

следовательно,

$$\frac{\mu H^2}{8\pi} = \frac{\mu}{2\pi} \frac{n^2 I^2}{c^2 A^2}.$$

Умножение на объем  $q 2\pi A$  пространства, заполненного полем, дает

$$\frac{1}{2} L I^2 = \frac{\mu n^2 q}{c^2 A} I^2;$$

следовательно,

$$L = \frac{2\mu n^2 q}{c^2 A} \left[ \frac{см}{c^2} \right]. \quad (146f)$$

Если в формулах (145) и (146) мы хотим выразить  $L$  в генри, то нужно численное значение, получаемое из этих формул, умножить на  $9 \cdot 10^{11}$ .

Соответственно этому из формул § 26 получаются значения емкости в фарадах, если разделить результат на  $9 \cdot 10^{11}$ .

**§ 58. Цепь тока с сопротивлением и самоиндукцией.** Рассмотрим опять некоторое число замкнутых проводников с омическими сопротивлениями  $R_k$ , сторонними электродвижущими силами  $E_k^{(e)}$  и пронизывающими их контуры потоками индукции  $\Phi_k$ . Тогда изменение сил тока во времени дается общим выражением

$$I_k R_k - E_k^{(e)} = - \frac{1}{c} \frac{d\Phi_k}{dt}.$$

Если соблюдены особые условия § 55, т. е. если проницаемость  $\mu$  всюду является характерной для данного вещества константой, независимой от  $H$ , то  $\Phi_k$  есть линейная функция сил тока, а потому, согласно (142),

$$\frac{1}{c} \Phi_k = \sum_{r=1}^n L_{kr} I_r.$$

Кроме того, в случае неподвижных контуров коэффициенты индукции  $L_{kr}$  являются постоянными. Тогда закон индукции дает  $n$  уравнений

$$I_k R_k + \sum_{r=1}^n L_{kr} \frac{dI_r}{dt} = E_k^{(e)} \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (147)$$

или в более распространенном виде:

$$\begin{aligned} I_1 R_1 + L_{11} \frac{dI_1}{dt} + L_{12} \frac{dI_2}{dt} + \dots + L_{1n} \frac{dI_n}{dt} &= E_1^{(e)} \\ I_2 R_2 + L_{21} \frac{dI_1}{dt} + L_{22} \frac{dI_2}{dt} + \dots + L_{2n} \frac{dI_n}{dt} &= E_2^{(e)}, \\ \dots & \dots \end{aligned}$$

Имеем  $n$  уравнений относительно  $n$  производных  $\frac{dI_k}{dt}$ . Следовательно, если даны значения  $I_k$  и  $E_k^{(e)}$  для момента времени  $t$ , то при помощи

(147) определяются значения  $I_k$  для момента  $t + dt$ . Значит, (147) определяет весь ход во времени, если только сторонние силы  $E_k^{(e)}$  известны как функции времени.

Рассмотрим ближе зависимость тока от времени для некоторых случаев.

Цепь одного тока при отсутствии сторонней силы. Тогда мы имеем только одно уравнение с  $E_k^{(e)} = 0$ :

$$IR + L \frac{dI}{dt} = 0,$$

общее решение которого будет

$$I = I_0 e^{-\frac{t}{\vartheta}}; \quad \vartheta = \frac{L}{R}. \quad (148)$$

Ток, существующий в момент времени нуль, падает экспоненциально таким образом, что по прошествии времени  $\vartheta = \frac{L}{R}$  он уменьшается в  $e$  раз.

Цепь тока с периодической сторонней силой  $E^{(e)} = E_0 \cos \omega t$  ( $E_0$  — амплитуда,  $\omega$  — круговая частота приложенного переменного напряжения). Тогда

$$IR + L \frac{dI}{dt} = E_0 \cos \omega t. \quad (148a)$$

Частное решение этого неоднородного уравнения мы найдем, положив

$$I = I_0 \cos (\omega t - \varphi). \quad (148b)$$

Тем самым (148a) переходит в

$$\begin{aligned} \cos \omega t \{ I_0 [R \cos \varphi + \omega L \sin \varphi] - E_0 \} + \\ + \sin \omega t I_0 \{ R \sin \varphi - \omega L \cos \varphi \} = 0. \end{aligned}$$

Это уравнение должно выполняться в любой момент. Поэтому множители при  $\cos \omega t$  и  $\sin \omega t$  должны равняться нулю. Отсюда для  $I_0$  и  $\varphi$  получаем два уравнения, решение которых дает:

$$I_0 \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = E_0 \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R}. \quad (148c)$$

$\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$  называется кажущимся сопротивлением,  $\varphi$  — разностью фаз в нашей цепи.

**§ 59. Векторная диаграмма.** Вычисление величин переменного тока становится короче и нагляднее, если пользоваться комплексными выражениями и графическим представлением. Мы иллюстрируем это на только что рассмотренном простом примере.

Векторная диаграмма. Представим величины переменного тока в виде векторов в комплексной плоскости. Так например, переменное напряжение  $E^0 e^{i\omega t}$  представляется вектором, длина которого  $E^0$ , и который образует с действительной осью угол  $\omega t$ . Конечная точка этого вектора в течение периода описывает вокруг нулевой точки



окружность. Проекция этого вектора  $OA$  на действительную ось в каждый момент дает вещественное значение напряжения.

Для вычислений с такими комплексными векторами действуют следующие правила: сложить две величины  $Ae^{i\alpha}$  и  $Be^{i\beta}$  значит найти геометрическую сумму соответствующих векторов (параллелограм). Умножить величину  $Ae^{i\alpha}$  на  $Be^{i\beta}$  значит повернуть в положительном направлении (т. е. против часовой стрелки) первую величину на угол  $\beta$  и умножить ее длину на  $B$ . Умножение на мнимую единицу  $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$  означает положительный поворот на  $90^\circ$ .

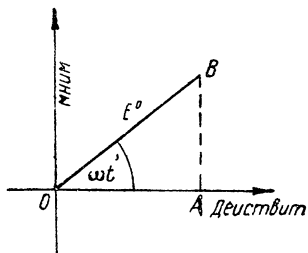


Рис. 46. Комплексное изображение переменного тока.

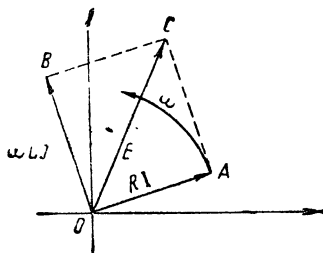


Рис. 47. Векторная диаграмма для цепи тока с сопротивлением  $R$  и самоиндукцией  $L$

Дифференцирование по  $t$  при процессах с циклической частотой  $\omega$  равнозначно умножению на  $\omega i$ , так что наше уравнение переменного тока

$$RI + L \frac{dI}{dt} = E$$

переходит в простое векторное уравнение

$$RI + i\omega LI = E,$$

которое связывает комплексные векторы  $I$  и  $E$  следующим образом: пусть для произвольного значения  $I$  (рис. 47)  $OA$  равняется  $RI$ . Тогда вектор  $i\omega LI$  перпендикулярен к вектору  $RI$  (отрезок  $O \rightarrow B$ ). Из этих двух векторов геометрическим сложением получается  $E = O \rightarrow C$ . Если представить себе всю фигуру вращающейся как неизменное целое вокруг нулевой точки с циклической частотой  $\omega$ , то проекции  $O \rightarrow A$  и  $O \rightarrow C$  на вещественную ось (или также на мнимую ось) в каждый момент времени дают значения тока и напряжения. Уравнения (148с) для кажущегося сопротивления и разности фаз можно непосредственно получить из рис. 47.

Мощность сторонних э. д. с. в каждый момент будет

$$EI = E^0 I^0 \cos \omega t \cos (\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} E^0 I^0 [\cos \varphi + \cos (2\omega t + \varphi)].$$

Средняя мощность за один период будет, следовательно,

$$\overline{EI} = \frac{1}{2} E^0 I^0 \cos \varphi,$$

т. е. равна половине скалярного произведения векторов  $E$  и  $I$ .

Совершенно равнозначное выражение для средней мощности получается непосредственно из положенного в основу вещественного дифференциального уравнения

$$IR + L \frac{dI}{dt} = E^{(e)},$$

а именно

$$E^{(e)} I = I^2 R + \frac{1}{2} L \frac{d(I^2)}{dt}.$$

При процессах, периодических во времени (например, переменный ток), последнее слагаемое в среднем равно нулю, так что

$$\overline{E^{(e)} I} = \overline{I^2 R}.$$

Средняя мощность переменного тока тождественно равна выделяемому Джоулеву теплу.

Эта теорема справедлива, впрочем, также в случае гораздо более общего уравнения (147). Именно, если каждое из уравнений (147) помножить на  $I_k$  и все их сложить, то в силу  $L_{kr} = L_r$  для процессов, периодических во времени, получится

$$\sum_{k=1}^n \overline{I_k^2 R_k} = \sum_{k=1}^n \overline{E_k^{(e)} I_k}.$$

Если умножить уравнение (148а) не на  $I$  а на  $\frac{dI}{dt}$ , то при образовании среднего значения во времени получают

$$\overline{E^{(e)} \frac{dI}{dt}} = \overline{L \left( \frac{dI}{dt} \right)^2};$$

следовательно, деля на  $\omega$ ,

$$\frac{1}{2} E^0 I^0 \sin \varphi = \frac{1}{2} \omega L I^0{}^2.$$

Но здесь справа стоит амплитуда магнитной энергии поля, умноженная на  $\omega$ . В электротехнике переменного тока называют величину

$$\overline{E^{(e)} I} = \frac{1}{2} E^0 I^0 \cos \varphi$$

эффективной мощностью; величину

$$\frac{1}{\omega} \overline{E^{(e)} \frac{dI}{dt}} = \frac{1}{2} E^0 I^0 \sin \varphi,$$

наоборот, безваттной мощностью,

**§ 60. Два контура (трансформатор).** Два контура, в одном из которых действует периодическая  $E_k$  (трансформатор). В этом случае (142) будет иметь вид

$$I_1 R_1 + L_{11} \frac{dI_1}{dt} + L_{12} \frac{dI_2}{dt} = E^{(e)}$$

$$I_2 R_2 + L_{21} \frac{dI_1}{dt} + L_{22} \frac{dI_2}{dt} = 0.$$

Эту систему при переменном напряжении  $E^{(e)} = E^0 e^{i\omega t}$  можно решить аналогично только что разобранному случаю, полагая для этого

$$I_1 = I_1^0 e^{i(\omega t + \varphi_1)} \quad \text{и} \quad I_2 = I_2^0 e^{i(\omega t + \varphi_2)}.$$

Мы ограничимся непосредственным рассмотрением вопроса для случая идеального трансформатора с чисто омической нагрузкой. Он характеризуется исчезающе малым сопротивлением в первичной обмотке ( $R_1 \ll \omega L_{11}$ ) и идеальной связью между первичной и вторичной цепями. Последнее имеет место тогда, когда все линии индукции, пронизывающие один контур, проходят также и через другой. Это достигается с достаточным приближением тем, что обе цепи наматываются на один и тот же замкнутый железный сердечник, в котором тогда сосредоточиваются почти все линии индукции.

Если обозначить через  $\Phi$  поток индукции в этом железном сердечнике, через  $n_1$  и  $n_2$  — число витков первичной и вторичной обмотки, то  $\Phi \cdot n_1$  и, соответственно,  $\Phi \cdot n_2$  суть потоки индукции, пронизывающие наши обе обмотки. При  $R_1 = 0$  имеем, следовательно,

$$\frac{n_1}{c} \frac{d\Phi}{dt} = E^{(e)},$$

$$I_2 R_2 + \frac{n_2}{c} \frac{d\Phi}{dt} = 0.$$

Отсюда следует прежде всего выражение

$$I_2 R_2 = - \frac{n_2}{c} E^{(e)}$$

для действующего во вторичной обмотке напряжения. Но из первого уравнения сразу же видно, что поток индукции  $\Phi$  определяется только первичным напряжением  $E^{(e)}$  (не зависит от нагрузки):

$$i\omega \frac{n_1}{c} \Phi = E^{(e)}.$$

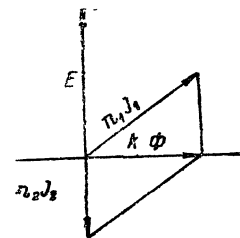


Рис. 49. Векторная диаграмма идеального трансформатора.

С другой стороны, магнитная напряженность, а потому и поток в железном сердечнике в каждый момент пропорциональны сумме  $n_1 I_1 + n_2 I_2$ .

$$n_1 I_1 + n_2 I_2 = k\Phi,$$

где  $k$  есть некоторая вещественная постоянная трансформатора. Отсюда получается векторная диаграмма идеального трансформатора, изображенная на рис. 49: вектор  $E$  первичного напряжения, запаздывающий на  $90^\circ$  вектор  $k\Phi$  и запаздывающий относительно последнего еще на  $90^\circ$  вектор  $n_2 I_2$ . Тогда вектор  $n_1 I_1$  первичного тока получается как геометрическая разность  $k\Phi - n_2 I_2$ . При уменьшающемся  $R_2$  (растущая нагрузка трансформатора)  $n_1 I_1$  поворачивается из направления  $k\Phi$  в положительном

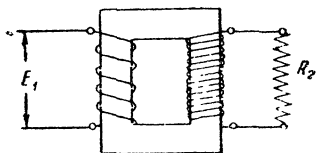


Рис. 48. Схема трансформатора.

направлении, при соответствующем возрастании эффективной мощности в первой цепи. Безваттная мощность последнего, наоборот, не зависит от  $R_2$ .

§ 61. Цепь тока с самоиндукцией, емкостью и сопротивлением. Раз в цепь тока включен конденсатор, у тока появляются источники, так как обкладки конденсатора представляют собой: одна — источник, другая — сток линий тока. Поэтому при вычислении магнитного поля принципиально нужно было бы наряду с током проводимости  $\mathbf{i}$  вводить

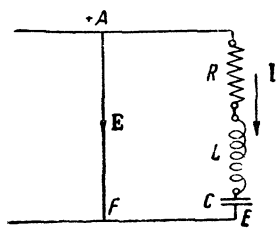


Рис 50. Цепь тока с сопротивлением, самоиндукцией и емкостью.

в рассмотрение также ток смещения  $\frac{1}{4\pi} \mathbf{D}$ . Однако, пока расстояние между пластинками конденсатора мало, можно пренебречь влиянием тока смещения на магнитную энергию поля по сравнению с влиянием, оказываемым током проводимости. Как мы увидим дальше, следствием такого пренебрежения при применении закона индукции является некоторая, — правда практически маловажная, — сомнительность результата. Рассмотрим (рис. 50) последовательное включение омического сопротивления  $R$ , емкости  $C$  и самоиндукции  $L$  при действии переменного напряжения  $E$ , которое пусть включено между точками  $A$  и  $F$ . Вычислим интеграл напряжения на пути  $ARLCEFA$ , который от  $A$  до  $C$  и от  $C$  до  $F$  проходит по проводу и конденсатору, а от  $F$  до  $A$  (между питающими проводами) — в диэлектрике.

Если обозначить через  $\varphi$  разность потенциалов между обкладками конденсатора, то мы получим для указанного интеграла значение  $RI + \varphi - E$ . Но охватываемый нашим контуром поток индукции зависит, очевидно, от того, в каком месте конденсатора мы пойдем при интегрировании.

Полагая, таким образом

$$RI + \varphi - E = -L \frac{dI}{dt} \quad (149)$$

и рассматривая  $L$  как постоянную, мы пренебрегаем влиянием магнитного поля, находящегося между обкладками конденсатора.

Далее, ток  $I$  равен изменению заряда конденсатора во времени. Следовательно, если  $C$  означает емкость конденсатора, то

$$I = C \frac{d\varphi}{dt}. \quad (149a)$$

Поэтому при переменном токе частоты  $\omega$

$$I = i\omega C \varphi;$$

следовательно,

$$RI + i\omega LI - \frac{i}{\omega C} I = E.$$

Это и есть нужная нам связь между  $E$  и  $I$ ; она представлена в векторной диаграмме (рис. 51).

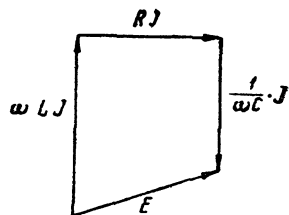


Рис. 51. Векторная диаграмма к системе рис. 50.

Кажущееся сопротивление нашей схемы будет

$$\frac{|E|}{|I|} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Оно имеет при  $\omega^2 = \frac{1}{LC}$  минимум, который при малых значениях  $R$  выражен очень резко. Поэтому если приложенное напряжение  $E$  является результатом наложения всевозможных периодов, то ток главным образом будет содержать только те периоды, которые близки к собственной частоте  $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ . Мы имеем здесь перед собой резонанс между периодом напряжения и периодом собственного колебания цепи тока.

Электрические собственные колебания. Если точки  $A$  и  $F$  соединить накоротко проводом, то  $E$  становится равной нулю, и наши уравнения (149) и (149а) дадут

$$RI + \varphi + L \frac{dI}{dt} = 0; \quad I = C \frac{d\varphi}{dt}.$$

Исключая  $\varphi$ , имеем

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{CL} I = 0. \quad (150)$$

Заметим, при этом, что уравнение, выведенное здесь из закона индукции, легко можно получить непосредственно из закона сохранения энергии. В самом деле, в любой момент времени полная энергия поля  $U$  дается выражением

$$U = U_{эл} + U_{м} = \frac{1}{2} C \varphi^2 + \frac{1}{2} L I^2.$$

Так как внешние электродвижущие силы не действуют, то падение  $U$  всегда должно равняться выделенному джоулеву теплу, т. е.

$$RI^2 = -\frac{dU}{dt} = -C\varphi \frac{d\varphi}{dt} - LI \frac{dI}{dt}. \quad (150a)$$

В виду  $C \frac{d\varphi}{dt} = I$  это уравнение непосредственно переходит в вышеуказанное.

Общее решение уравнения (150) будет (с двумя постоянными интегрирования  $c_1$  и  $c_2$ )

$$I = c_1 e^{k_1 t} + c_2 e^{k_2 t}.$$

При этом

$$k_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{CL}}.$$

Оно дает:

периодический разряд, если  $\frac{R}{2L} < \frac{1}{\sqrt{CL}}$ ;

апериодический разряд, если  $\frac{R}{2L} > \frac{1}{\sqrt{CL}}$ .

Если обозначить для сокращения

$$\delta = \frac{R}{2L} \text{ и } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{CL}}, \quad (150b)$$

то в случае периодического разряда

$$I = Ae^{-\delta t} \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} t + b);$$

при аperiodическом разряде наоборот

$$I = Ae^{-(\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} + Be^{-(\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t}.$$

Особенно важны для применений слабо затухающие колебания. Они имеют место тогда, когда  $\delta$  настолько мало по сравнению с  $\omega_0$ , что можно пренебрегать  $\delta^2$  по сравнению с  $\omega_0^2$ . Тогда имеем

$$I = Ae^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + b).$$

Продолжительность одного колебания равна

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{LC}.$$

Логарифмический декремент  $D$  есть логарифм отношения амплитуд двух друг за другом следующих колебаний; следовательно,

$$D = \ln \frac{e^{-\delta t}}{e^{-\delta(t+T)}} = \delta T = 2\pi \frac{\delta}{\omega_0} = \pi R \sqrt{\frac{C}{L}}, \quad (150c)$$

$\frac{1}{D} = \frac{\omega_0}{2\pi\delta}$  указывает число колебаний, по прошествии которых амплитуда уменьшается в  $e$  раз.

В качестве численного примера рассмотрим лейденскую банку радиуса 5 см, с толщиной стенок 0,2 см и высотой в 20 см; по формуле для плоского конденсатора

$$C = \frac{\epsilon S}{4\pi d}$$

получаем, при  $\epsilon = 5$  (стекло),

$$S = 2\pi \cdot 5 \cdot 20 + \pi \cdot 25 \text{ см}^2$$

$$C = \frac{5 \cdot \pi \cdot 225}{4\pi \cdot 0,2} = 1400 \text{ см} = \frac{1400}{9 \cdot 10^{11}} \text{ фарад.}$$

В качестве замыкающего провода возьмем обыкновенную медную согнутую в кольцо проволоку; размеры пусть будут те же, которые были в уравнении (146e);  $D = 10$  см,  $d = 0,1$  см. Самоиндукция  $L$  провода, согласно (146e), будет

$$L = \frac{20\tau}{c^2} \cdot 4,93 = 344 \cdot 10^{-20} \frac{\text{сек.}^2}{\text{см}} = 344 \cdot 10^{-20} \cdot 9 \cdot 10^{11} \text{ генри.}$$

Для сопротивления  $R$  проволоки возьмем для начала обычное омическое сопротивление

$$R = \frac{\pi \cdot 10 \cdot 4}{0,01 \cdot \pi} \cdot 1,7 \cdot 10^{-6} \text{ ом} = 6,8 \cdot 10^{-3} \text{ ом.}$$

Тогда согласно (150b)

$$\delta = \frac{R}{2L} = 1,1 \cdot 10^3 \text{ сек.}^{-1}$$

и

$$\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}} = 2,3 \cdot 10^6 \text{ сек.}^{-1}.$$

Этой частоте соответствовала бы длина волны  $\lambda = \frac{c}{\nu_0} = 130 \text{ м.}$  Число колебаний до того момента, когда амплитуда становится в  $e$  раз меньше, было бы  $\frac{\nu_0}{\delta} = 2100$ . Если возбуждать колебания при помощи разряда через искровой промежуток, то во всяком случае нужно ожидать большего затухания вследствие увеличения  $R$  сопротивлением искрового промежутка.

Но и без искрового промежутка мы в действительности должны ожидать значительно более высокого значения  $R$  в силу сосредоточения тока в поверхностном слое, которое мы будем рассматривать в § 66. При таких обстоятельствах при вычислении  $R$  нельзя уже подставлять полное поперечное сечение провода, а нужно пользоваться сечением слоя у поверхности провода, заполненного током; толщина последнего в свою очередь является функцией частоты  $\omega_0$ .

Но даже и при этой поправке наше вычисление затухания содержит одну принципиально в высшей степени важную неточность, которая, правда, мало сказывается в нашем численном примере. В нашем колебательном контуре электрический ток начинается и кончается на обкладках лейденской банки. Последние представляют собой сток и источник электрического тока. Вопреки этому до сих пор мы во всех наших рассуждениях относительно магнитного поля клали в основу уравнение для постоянных токов

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{i},$$

которое, очевидно, теряет смысл, когда  $\text{div } \mathbf{i}$  в каком-нибудь месте отлично от нуля. В самом деле,  $\text{div rot } \mathbf{H}$  всюду тождественно равно нулю. При выводе уравнения (149) мы пренебрегли, следовательно, тем обстоятельством, что ток проводимости прерывается диэлектриком конденсатора. При строгом выводе нужно было бы принять во внимание как раз дополнение  $\frac{1}{4\pi} \mathbf{D}$  тока проводимости до Максвелловского полного тока  $\mathbf{c} = \mathbf{i} + \frac{1}{4\pi} \mathbf{D}$ , не имеющего уже нигде источников. Мы рассмотрим подробнее практическое влияние этого члена несколько позднее. Он дает характеризующее вектором Пойнтинга  $\mathbf{S}$  излучение энергии в форме электромагнитных волн. В энергетическом уравнении (150a) мы принимали во внимание в качестве единственной формы энергии, в которую преобразуется энергия поля, Джоулево тепло  $R I^2$ . Наряду с термической отдачей поля имеет, следовательно, место еще мощность излучения, которая при периодических процессах в среднем точно также пропорциональна  $I^2$  и поэтому может быть представлена членом  $R_s \cdot I^2$ . Множитель  $R_s$  называется тогда „сопротивлением излучения“. Таким

образом, для затухания важна сумма  $R + R_s$  омического сопротивления и сопротивления излучения. Если мы при нашем рассмотрении разряда конденсатора могли безнаказанно пренебрегать током смещения и излучением, то мы обязаны этим тому обстоятельству, что, во-первых, расстояние между обкладками конденсатора исчезающе мало по сравнению с размерами замыкающей цепи, и что, во-вторых, размеры конденсатора малы по сравнению с длиной волны волнового излучения, соответствующего его собственной частоте. Только вследствие этих двух обстоятельств мы не допускаем слишком большой ошибки, когда рассматриваем ток в проволоке как квазистационарный, т. е. принимаем, что в любой данный момент через каждое сечение проволоки протекает одинаковый ток. При увеличении расстояний между обкладками конденсатора его емкость может стать настолько малой, что наряду с ней становится заметной емкость проводов. Но тогда мы должны принимать во внимание и те источники и стоки тока, которые распределены по всему проводу, так что в различных м-стах  $I$  наверное будет иметь различные значения. С другой стороны, если размеры замыкающей цепи — порядка длины волны, то следствием конечной скорости распространения является сдвиг фаз токов в различных частях цепи друг относительно друга. Мы познакомимся с этим явлением ближе при рассмотрении волн в проводах и волн Герца.

#### IV. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

**§ 62. Плоские волны в однородном изотропном диэлектрике.** В этой главе мы переходим к рассмотрению таких электромагнитных полей, которые быстро меняются во времени и пространстве, — в частности, займемся рассмотрением электромагнитных волн. В этом случае нельзя считать ток квазистационарным. В основу математической теории электрических волн нужно положить дифференциальные уравнения поля для неподвижных тел (§ 52).

Рассмотрим сначала однородный изотропный диэлектрик; он свободен от сторонних сил,  $\epsilon$  и  $\mu$  суть константы,  $\lambda$  равняется нулю.

Уравнения поля § 52 в этом случае дают

$$\frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \text{rot } \mathbf{H}, \quad (151a)$$

$$-\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot } \mathbf{E}; \quad (151b)$$

так как  $\mu$  является постоянной,

$$\text{div } \mathbf{H} = 0. \quad (151c)$$

К этим уравнениям мы придем, если исключим истинные заряды внутри изолятора:

$$\text{div } \mathbf{E} = 0. \quad (151d)$$

Этой системой уравнений определяется распространение электромагнитных волн в диэлектрике.

Из нее легко можно исключить один из векторов  $\mathbf{E}$  или  $\mathbf{H}$ . Чтобы исключить  $\mathbf{E}$ , нужно взять вихрь от первого уравнения, второе урав-



нение продифференцировать по  $t$ , умножить на множитель  $\frac{\varepsilon}{c}$  и сложить с первым. Тогда получается

$$-\frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = \text{rot rot } \mathbf{H}.$$

Если принять во внимание (151с), то, согласно правилу вычисления (95), это уравнение переходит в

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = \Delta \mathbf{H}. \quad (151e)$$

С другой стороны, можно также исключить  $\mathbf{H}$ , умножая для этого (151a) на  $\frac{\mu}{c}$  и дифференцируя по  $t$ , беря затем вихрь от (151b) и вычитая полученное уравнение из первого. Тогда получается

$$\frac{\varepsilon\mu}{c} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \Delta \mathbf{E}. \quad (151f)$$

Оба вектора  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  удовлетворяют, следовательно, одному и тому же дифференциальному уравнению. Для полей, не изменяющихся во времени, это уравнение переходит в дифференциальное уравнение Лапласа.

Будем искать теперь такие частные решения уравнений поля, которые соответствуют серии плоских однородных волн.

Серию волн называют плоской, если в поле можно провести ряд параллельных плоскостей таким образом, что вдоль каждой такой плоскости электрическая и магнитная сила поля не меняется ни по величине, ни по направлению; эти плоскости называют плоскостями волн, направление их нормали — нормалью волны. Расположим ось  $x$  вдоль нормали волны, так что плоскости волн становятся при этом параллельными плоскости  $(yz)$ . Так как вдоль этих плоскостей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  должны быть постоянными, то частные производные по  $y$  и  $z$  пропадают, и уравнения поля будут:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} &= 0, & -\frac{\mu}{c} \frac{\partial H_x}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} &= -\frac{\partial H_z}{\partial x}, & -\frac{\mu}{c} \frac{\partial H_y}{\partial t} &= -\frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} &= +\frac{\partial H_y}{\partial x}, & -\frac{\mu}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t} &= +\frac{\partial E_y}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (152a)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0. \quad (152b)$$

Согласно (152b) и первому из уравнений (152a), продольные составляющие  $\mathbf{E}_x$  и  $\mathbf{H}_x$  являются постоянными как во времени, так и в пространстве. Если бы они были отличны от нуля, то можно было бы говорить только о статическом поле, накладываемом на волновое поле. Но такое статическое поле не имеет никакого влияния на рас-

пространение волн и не представляет здесь никакого интереса. Мы положим поэтому

$$\mathbf{E}_x = \mathbf{H}_x = 0.$$

Заметим, что четыре последних из уравнений (152a), которые еще нужно удовлетворить, связывают составляющие друг с другом попарно: с одной стороны  $\mathbf{E}_y$ ,  $\mathbf{H}_z$ , с другой стороны  $\mathbf{E}_z$ ,  $\mathbf{H}_y$ . Мы можем поэтому обе пары рассматривать раздельно. Исключая  $\mathbf{E}_y$ ,  $\mathbf{H}_z$  из уравнений

$$\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial t} = - \frac{\partial \mathbf{H}_z}{\partial x}, \quad - \frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}_z}{\partial t} = + \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial x}, \quad (152c)$$

получаем уравнения

$$\frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}_y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{E}_y}{\partial x^2} \quad (152d)$$

$$\frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}_z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{H}_z}{\partial x^2}. \quad (152e)$$

Они следуют непосредственно из (151e, f), если, в согласии с предположением, что волны — однородные и плоские, зачеркнуть производные по  $y$  и  $z$ . Эти частные дифференциальные уравнения известны из теории колебаний струны. Напишем общее решение (152d) в виде

$$\mathbf{E}_y = f(x - wt) + g(x + wt), \quad (153)$$

где

$$w = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}, \quad (153a)$$

а  $f$  и  $g$  представляют собой произвольные функции аргументов  $x - wt$  и  $x + wt$ .

Тогда уравнения (152c) удовлетворяются при

$$\mathbf{H}_z = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \{ f(x - wt) - g(x + wt) \}. \quad (153b)$$

Произвольные функции

$$f(x - wt) \text{ и } g(x + wt)$$

представляют волны, которые распространяются в направлении положительной и, соответственно, отрицательной оси  $x$ -ов.

Мы ограничимся рассмотрением только того частного решения, которое дается функцией

$$f(x - wt).$$

Вид этой функции  $f$  определяется кривой волны в момент  $t=0$ . Эта кривая волны распространяется неискаженной со скоростью  $w$ . Скорость плоской электромагнитной волны не зависит, следовательно, от формы и длины волны. В пустоте, для которой Гауссова система единиц полагает

$$\varepsilon = 1 \text{ и } \mu = 1,$$

скорость дается, согласно (153а), универсальной постоянной  $c$ , значение которой, найденное путем сравнения электростатических и электромагнитных единиц, будет (§ 54)

$$c = 3 \cdot 10^{10} \text{ см/сек.}$$

Это число совпадает со скоростью света в пустоте. Мы видим, следовательно, что в пустоте скорость плоских электромагнитных волн равна скорости света  $c$ .

Световым и электромагнитным волнам присуща не только общая скорость. Электромагнитные волны так же, как и световые, суть волны поперечные. В самом деле, мы нашли, что ни  $\mathbf{E}$ , ни  $\mathbf{H}$  не могут иметь периодически изменяющейся продольной составляющей. Оба вектора перпендикулярны к нормальям волн. Поэтому в пустоте электромагнитные и световые волны обнаруживают совершенно аналогичное поведение.

Именно эти следствия из уравнений Максвелла привели его к созданию электромагнитной теории света. Электромагнитная теория света рассматривает световые и тепловые лучи как электромагнитные волны. Она превосходит старую механическую теорию света тем, что позволяет вычислить значение скорости распространения из чисто электрических измерений, и тем, что с самого начала допускает только поперечные плоские волны света. Старая теория, которая рассматривала свет как волновое движение упругой среды, могла лишь с трудом объяснить отсутствие продольных световых волн. Электромагнитная теория света вообще исключает существование продольных световых волн.

Если свет действительно представляет собой электромагнитный процесс, то все оптические свойства материи должны полностью определяться ее электрическими постоянными. Действительно, как мы сейчас увидим, из теории Максвелла следует, что оптический показатель преломления существенно определяется диэлектрической постоянной, а поглощательная способность — электропроводностью. Эти количественные предсказания теории согласуются с опытом только при достаточно длинных волнах (инфракрасные волны, волны Герца). Здесь необходимое дополнение вносится электронной теорией, которая показывает, что благодаря инерции электронов электрическую поляризацию нужно рассматривать как динамический процесс, при котором решающую роль играет частота падающей световой волны. Только при таком дополнении (зависимость  $\epsilon$  и  $\sigma$  от частоты) Максвеллова теория света может дать исчерпывающее описание оптических явлений.

В диэлектрических телах, у которых диэлектрическая постоянная и магнитная проницаемость отличны от 1, скорость электромагнитных волн дается (153а). Поэтому показатель преломления диэлектрика в общем случае равен

$$n = \frac{c}{w} = \sqrt{\epsilon\mu}. \quad (153c)$$

В частности, для случая, когда  $\mu = 1$ , получается так называемое „соотношение Максвелла“

$$n^2 = \epsilon. \quad (153d)$$

У изоляторов, которые являются или парамагнитными, или диамагнитными, диэлектрическая постоянная должна, согласно электромагнитной теории света, равняться квадрату оптического показателя преломления. Экспериментальное испытание этого вывода позволяет судить с точки зрения электромагнитной теории света, насколько правильно уравнения поля описывают диэлектрическое поведение тел по отношению к этим очень быстрым электрическим колебаниям. Ведь, как было изложено в § 52, уравнения поля для изоляторов получились из общих основных уравнений (I) до (IV) благодаря тому, что соотношение (IV

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

было перенесено с электрических полей на произвольно быстро меняющиеся поля. Справедливость соотношения Максвелла (153d) есть пробный камень для правильности этого допущения.

Для многих газов, как, например, для  $\text{H}_2$ ,  $\text{CO}_2$ ,  $\text{N}_2$ ,  $\text{O}_2$ , соотношение (153d) выполняется сносно даже в видимой области. Оно перестает быть верным для таких газов ( $\text{HCl}$ ,  $\text{NH}_3$ ), относительно которых мы по их химическим свойствам могли бы ожидать, что они состоят из двух ионов противоположного знака, связанных Кулоновским притяжением (дипольные газы). У таких газов инерция при поляризации переменным полем световой волны должна, конечно, сказываться гораздо сильнее, чем у газов, названных ранее, так как в них могут двигаться исключительно электроны. Соотношение Максвелла, как правило, перестает быть верным в области видимого света у таких тел, которые в инфракрасной части показывают избирательные области поглощения. Особенно отчетливо проявляется эта особенность у воды ( $\epsilon = 81$ ,  $n = 1,33$ ).

На вопрос о том, чем определяется плоскость поляризации прямолинейно поляризованного луча: вектором ли  $\mathbf{E}$  или  $\mathbf{H}$ , нельзя ответить на основе развитых до сих пор соображений. Однако, применение электромагнитной теории к кристаллам приводит к основным законам кристаллооптики, если оптическую анизотропию свести к диэлектрической и проводить плоскость поляризации через  $\mathbf{H}$  и нормаль волны. Законы отражения света у поверхностей прозрачных тел (этих законов мы не будем здесь касаться) получаются из электромагнитной теории света в соответствии с формулами Френеля, если плоскость поляризации прямолинейно поляризованного луча принять нормальной к вектору  $\mathbf{E}$ .

Вычислим теперь энергию, которую переносит плоская электромагнитная волна.

$$\mathbf{E}_y = f(x - wt), \quad \mathbf{H}_z = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} f(x - wt).$$

Согласно закону сохранения энергии (127) и (128), ежесекундный перенос энергии через  $1 \text{ см}^2$  плоскости ( $yz$ ) дается вектором излучения  $\mathbf{S}$

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H},$$

т. е.

$$S_x = \frac{c}{4\pi} E_y H_z = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} f^2.$$

С другой стороны, плотность энергии и в нашем волновом поле дается выражением

$$u = \frac{1}{8\pi} (\varepsilon \mathbf{E}^2 + \mu \mathbf{H}^2) = \frac{\varepsilon}{4\pi} f^2.$$

Принимая во внимание значение скорости распространения плоской волны  $w = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ , имеем, следовательно,

$$S_x = uw,$$

т. е. через 1 см<sup>2</sup> плоскости ( $yz$ ) за одну секунду проходит как раз та энергия, которая находится в цилиндре с сечением 1 и длиной  $w$ .

**§ 63. Плоские волны в однородных проводниках.** Если однородное изотропное тело, в котором распространяется электромагнитная волна, одновременно является проводником электричества, то уравнение (151a) нужно обобщить введением тока проводимости. Общие уравнения поля § 52 дают здесь

$$\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \lambda \mathbf{E} = \text{rot } \mathbf{H} \quad (154a)$$

$$- \frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot } \mathbf{E}; \quad (154b)$$

из того, что не существует истинного магнетизма, следует

$$\text{div } \mathbf{H} = 0. \quad (154c)$$

Уравнение (151d), которое выражает отсутствие внутри однородного диэлектрика свободного электричества, остается справедливым. Чтобы убедиться в этом, образуем расхождение от (154a). Мы получим тогда

$$\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \mathbf{E} + \frac{4\pi\lambda}{c} \text{div } \mathbf{E} = 0.$$

Из этого уравнения мы уже в § 44 вывели заключение, что объемная плотность свободного электричества в каждой точке поля падает по закону

$$\varrho' = \frac{1}{4\pi} \text{div } \mathbf{E} = \varrho_0' e^{-\frac{t}{\vartheta}}, \quad \vartheta = \frac{\varepsilon}{4\pi\lambda},$$

где  $\vartheta$  есть так называемое время релаксации. Затухание заданного через  $\varrho_0'$  начального распределения свободного электричества совсем не зависит от электромагнитных возмущений, которые проникают снаружи внутрь однородного проводника. Если, например, предположить, что в момент  $t = 0$  поле внутри проводника было равно нулю, то и  $\varrho_0' = 0$ , и поэтому  $\varrho'$ , плотность свободного электричества, действительно остается равной нулю. Из полученного таким образом уравнения

$$\text{div } \mathbf{E} = 0, \quad (154d)$$

и из (154a, b, c) мы заключаем теперь, так же как в предыдущем параграфе, что внутри однородного проводника могут распространяться только поперечные плоские электромагнитные волны. Так же, как и там, можно совершенно аналогичным образом исключить  $\mathbf{E}$  или  $\mathbf{H}$ .

Это исключение дает для обоих векторов одинаковые дифференциальные уравнения

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\lambda\mu}{c^2} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \Delta \mathbf{H}, \quad (154e)$$

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\lambda\mu}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \Delta \mathbf{E}, \quad (154f)$$

которые заменяют теперь (151e, f).

Будем исследовать опять плоские однородные волны; расположим ось  $x$  вдоль направления распространения и разложим векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , падающие в плоскость волны, на их составляющие. Мы рассматриваем здесь только составляющие  $\mathbf{E}_y$ ,  $\mathbf{H}_z$ , которые, оптически говоря, характерны для прямолинейно поляризованной волны, и притом поляризованной параллельно оси  $z$ . Для  $\mathbf{E}_y$  имеет тогда место дифференциальное уравнение в частных производных

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}_y}{\partial t^2} + \frac{4\pi\lambda\mu}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathbf{E}_y}{\partial x^2}, \quad (154g)$$

которое называют „телеграфным уравнением“. Обоснование этого названия см. в § 69. Тому же самому дифференциальному уравнению должно удовлетворять также  $\mathbf{H}_z$ .

Для плоских волн, у которых направление нормали совпадает с осью  $x$ , получаем из (154a, b)

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial t} + \frac{4\pi\lambda}{c} \mathbf{E}_y &= -\frac{\partial \mathbf{H}_z}{\partial x} \\ -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}_z}{\partial t} &= \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial x}. \end{aligned}$$

Полагая

$$\mathbf{E}_y = a \cdot e^{i\omega\left(t - \frac{n'x}{c}\right)}, \quad \mathbf{H}_z = b \cdot e^{i\omega\left(t - \frac{n'x}{c}\right)}, \quad (155)$$

из предыдущих уравнений получаем для амплитуд  $a$  и  $b$ , а также и показателя преломления  $p$  соотношения

$$(i\omega\varepsilon + 4\pi\lambda) \cdot a = i \cdot \omega \cdot n' \cdot b$$

$$\mu b = n' \cdot a,$$

откуда

$$n'^2 = \varepsilon\mu - i \cdot \frac{4\pi\lambda\mu}{\omega} \quad \text{и} \quad b = \frac{n'}{\mu} \cdot a. \quad (155a)$$

Мы имеем, следовательно, комплексный показатель преломления  $n'$ , т. е. поглощение волны, и комплексное отношение амплитуд  $\frac{b}{a}$ ; это означает сдвиг фазы магнитного вектора по отношению к фазе электрического вектора.

Введем в (155а) период колебания  $\tau$  световой волны и ее длину волны в пустоте  $\lambda_0$  по формуле

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega}; \quad \lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega}$$

и, кроме того, положим

$$n' = n - ik. \quad (155b)$$

Для введенных таким образом постоянных данного вещества  $n$  и  $k$  (155а) дает два уравнения

$$\begin{aligned} n^2 - k^2 &= \epsilon\mu, \\ 2nk &= 2\mu\lambda\tau. \end{aligned}$$

Решая их, получаем для „показателя преломления“  $n$

$$n^2 = \frac{\mu}{2} \{ \sqrt{\epsilon^2 + 4\lambda^2\tau^2} + \epsilon \} \quad (155c)$$

и для „коэффициента поглощения“  $k$

$$k^2 = \frac{\mu}{2} \{ \sqrt{\epsilon^2 + 4\lambda^2\tau^2} - \epsilon \} \quad (155d)$$

Наконец, если написать  $n'$  в виде

$$n' = \sqrt{n^2 + k^2} \cdot e^{-i\gamma},$$

то разность фаз  $\gamma$  определяется уравнением:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{k}{n}. \quad (155e)$$

Если все это подставить в (155), то для вещественной части  $\mathbf{E}_y$  и  $\mathbf{H}_z$  получается

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}_y &= a \cdot e^{-\frac{2\pi k}{\lambda_0} \cdot x} \cdot \cos \left\{ \frac{2\pi t}{\tau} - \frac{2\pi n x}{\lambda_0} \right\} \\ \mathbf{H}_z &= \frac{\sqrt{n^2 + k^2}}{\mu} \cdot a \cdot e^{-\frac{2\pi k}{\lambda_0} \cdot x} \cdot \cos \left\{ \frac{2\pi t}{\tau} - \frac{2\pi n x}{\lambda_0} - \gamma \right\} \end{aligned} \right\} \quad (156)$$

Коэффициент поглощения  $k$  характеризуется, следовательно, тем, что по прохождении волной расстояния  $\frac{\lambda_0}{k}$  амплитуды затухли в  $e^{+2\pi}$  раз. Это расстояние может поэтому также служить наглядной мерой для глубины проникания волны.

Качественное рассмотрение этих уравнений у металлов значительно облегчается тем, что здесь обычно можно считать правильным соотношение

$$2\lambda\tau \gg \epsilon. \quad (157)$$

Для коротковолнового инфракрасного света — длины волны  $1\mu$ , например, —

$$\tau = \frac{\lambda'}{c} = \frac{10^{-4}}{3 \cdot 10^{10}} = 3,3 \cdot 10^{-15}.$$

С другой стороны, для меди  $\lambda = 5,14 \cdot 10^{17}$ , так что здесь

$$2\lambda\tau = 3400.$$

Что касается диэлектрической постоянной  $\epsilon$  металлов, то трудность здесь возникает прежде всего в том, что при ее определении обычные электростатические методы оказываются неприменимыми. Наоборот, можно определить  $\epsilon$  как раз путем применения уравнения (156) к их оптическому поведению. Хотя в этом отношении не существует совершенно однозначных опытов, все же можно сказать, что ни экспериментально, ни теоретически нельзя предполагать для  $\epsilon$  у металлов значений, отличных по своему порядку от значений у изоляторов. Если это так, то в нашем численном примере соотношение (157) действительно выполняется. И оно выполняется, что особенно важно при изучении волн Герца, тем лучше, чем больше длина волны рассматриваемого колебания.

Напротив, при очень коротких волнах (при ультрафиолетовых и в особенности при рентгеновских лучах) (157) становится совсем неверным. В предельном случае исключительно коротких волн  $2\sigma\tau$  становится даже исчезающе малым, так что, наконец, проводимость теряет здесь свое значение.

В области, где справедливо приближенное неравенство (157), согласно (155с) и (155d)

$$n = \kappa = \sqrt{\mu\lambda\tau} \quad \text{и} \quad \gamma = \frac{\pi}{4}. \quad (157a)$$

Таким образом для глубины проникания  $d$  волны имеем

$$d = \frac{\lambda_0}{\kappa} = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \cdot c \cdot \sqrt{\frac{\tau}{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \sqrt{\frac{\lambda_0 c}{\lambda}} \text{ см.} \quad (157b)$$

Для меди ( $\lambda = 5,14 \cdot 10^{17}$ ,  $\mu = 1$ ) получаются, значит, следующие глубины проникновения:

$\lambda_0$	1 см	1 м	100 м	10 км
$d$	$2,4 \cdot 10^{-4}$ см	0,024 мм	0,24 мм	2,4 мм

Одновременно эти числа примерно указывают те толщины листового металла, которые необходимы для экранирования соответствующих длин волн.

Для отношения электрической энергии поля к магнитной (среднего по времени) из (156) и (155с, d) получаем общее выражение

$$\frac{\mu \mathbf{H}_z^2}{\epsilon \mathbf{E}_y^2} = \frac{n^2 + \kappa^2}{\mu \epsilon} = \sqrt{1 + \left(\frac{2\lambda\tau}{\epsilon}\right)^2}. \quad (157c)$$

В изоляторе ( $\lambda = 0$ ) энергия поля состоит на  $50\%$  из электрической энергии и на  $50\%$  — из магнитной. В металле, наоборот, в области,



где справедливо (157), почти вся энергия — исключительно магнитной природы. Как показывает разобранный выше численный пример, уже при  $\lambda_0 = 10^{-4}$  см электрическая энергия составляет примерно только  $\frac{1}{30}$  % полной энергии. При более длинных волнах ее содержание продолжает падать.

Для экспериментального испытания теории проще всего было бы сравнить глубину проникания  $d$  (157b), вычисляемую из проводимости, с опытом. Но для этого в оптической области потребовались бы исключительно тонкие слои (наибольшая толщина  $10^{-6}$  см), а безупречное изготовление и исследование таких слоев является весьма трудной задачей. Вместо непосредственного измерения поглощения, с удобством пользуются измерением коэффициента отражения.

**§ 64. Отражение от металлов.** Пограничные условия. Явления при переходе волны из диэлектрика в металл можно получить наиболее просто, если сначала из уравнений (154a, b) с помощью теоремы Стокса вывести пограничные условия, которым должны при всех обстоятельствах удовлетворять векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . Для этого рассмотрим элемент поверхности  $dS$  раздела между двумя средами (1) и (2), и пусть нормаль к нему будет направлена параллельно положительной оси  $x$  (рис. 52). Вычислим интеграл  $\oint \mathbf{E}_1 ds$  по контуру узкого прямоугольника ширины  $\xi$ ; пусть две продольные стороны его проходят в различных средах, ориентированы вдоль направления  $y$  и имеют длину, равную единице. Тогда из (154a и b) получается

$$\mathbf{H}_{y_1} - \mathbf{H}_{y_2} = \int_x^{x+\xi} \left( \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial t} + \frac{4\pi\lambda}{c} \mathbf{E}_z \right) dx$$

$$\mathbf{E}_{v_1} - \mathbf{E}_{v_2} = - \int_x^{x+\xi} \left( \frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}_z}{\partial t} \right) dx.$$

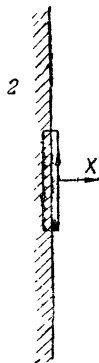


Рис. 52. К выводу пограничного условия.

При конечных значениях  $\varepsilon$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$  в предельном случае, когда  $\xi = 0$ , правые стороны обращаются в нуль, так как ни в коем случае нельзя допустить существования бесконечных сил поля. Отсюда следует: тангенциальные составляющие  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  остаются непрерывными при переходе из одной среды в другую.

Рассмотрим плоскую волну, падающую в пустоте нормально на поверхность металла, принимаемую нами за плоскость  $yz$ . Мы должны, следовательно, для комплексного показателя преломления, введенного в (155) и (155b), положить:

для  $x < 0$ :  $n' = 1$  (пустота),

„  $x > 0$ :  $n' = n - ik$  (металл).

Попадая на металлическую поверхность, падающая волна распадается на отраженную волну, распространяющуюся в пустоте по направлению

отрицательной оси  $x$ , и на волну, проникающую в металл (по направлению положительной оси  $x$ ). Максвелловы уравнения для однородных сред будут удовлетворены выражениями:

$$\left. \begin{aligned} \text{Падающая волна: } \mathbf{E}_y^{(e)} = \mathbf{H}_z^{(e)} = a \cdot e^{i\omega \left(t - \frac{x}{c}\right)}, \\ \text{Отраженная волна: } -\mathbf{E}_y^{(r)} = \mathbf{H}_z^{(r)} = a' \cdot e^{i\omega \left(t + \frac{x}{c}\right)}. \end{aligned} \right\} \text{ в пустоте, } x < 0.$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Прошедшая в металл волна} \\ \text{по (155) и (155a):} \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} \mathbf{E}_y = a'' \cdot e^{i\omega \left(t - \frac{n'x}{c}\right)} \\ \mathbf{H}_z = a'' \cdot \frac{\rho}{\mu} \cdot e^{i\omega \left(t - \frac{n'x}{c}\right)}. \end{aligned} \right\} \text{ в металле, } x > 0.$$

Для того чтобы выполнялись пограничные условия (для  $x = 0$ ), неопределенные вначале амплитуды  $a$ ,  $a'$ ,  $a''$  должны удовлетворять двум соотношениям, а именно:

$$\begin{aligned} \text{непрерывность } \mathbf{E}_y: \quad a - a' = a'', \\ \text{непрерывность } \mathbf{H}_z: \quad a + a' = a'' \cdot \frac{n'}{\mu} \end{aligned}$$

Если, например, дана амплитуда  $a$  падающей волны, то отсюда следует для

$$\text{отраженной волны: } a' = a \cdot \frac{n' - \mu}{n' + \mu}$$

$$\text{и для прошедшей волны: } a'' = a \cdot \frac{2\mu}{n' + \mu}.$$

Интенсивность лучей пропорциональна квадрату абсолютной величины их амплитуды. Коэффициентом отражения  $R$  металла называют отношение интенсивностей отраженной и падающей волны; если обозначить через  $a^*$  и  $a'^*$  комплексные величины, сопряженные с  $a$  и  $a'$ , то

$$R = \frac{a' \cdot a'^*}{a \cdot a^*} = \frac{(n' - \mu)(n'^* - \mu)}{(n' + \mu)(n'^* + \mu)}. \quad (158)$$

Подставляя в (158)  $n' = n - i\kappa$ ,  $n'^* = n + i\kappa$ , имеем

$$R = \frac{(n - \mu)^2 + \kappa^2}{(n + \mu)^2 + \kappa^2}. \quad (158a)$$

В области, для которой имеет место неравенство (157),

$$n = \kappa = \sqrt{\mu\lambda\tau} \gg 1.$$

Для неферромагнитных тел  $\mu = 1$ , так что получаем

$$R = \frac{2\lambda\tau - 2\sqrt{\lambda\tau} + 1}{2\lambda\tau + 2\sqrt{\lambda\tau} + 1} \approx 1 - \frac{2}{\sqrt{\lambda\tau}}. \quad (158b)$$

Гаген и Рубенс при своих опытах в длинноволновой инфракрасной области ( $\lambda'_0 = 25\mu$ ) эту теоретическую формулу подтвердили количественно. Тем самым они до-

казали, что уже в этой области длин волн оптическое поведение металлов определяется электростатически измеренной проводимостью  $\lambda$  в смысле Максвеллова уравнения (158b).

Некоторые из их результатов собраны в приведенной ниже таблице. При этом проводимость измерена в обратных омах на метр длины и квадратный миллиметр поперечного сечения.

Для измеренной таким образом проводимости, обозначаемой через  $\kappa$ ,

$$\lambda = \kappa \cdot 9 \cdot 10^{15}.$$

Длина волны  $\lambda'_0$  измеряется в  $\mu$ , так что  $\lambda'_0 = \lambda_{\mu 0} \cdot 10^{-4}$ . Коэффициент отражения выражается в процентах; следовательно,  $R\% = 100 R$ . Подставляя эти числа в (158b), получаем формулу Гагена-Рубенса

$$(100 - R\%) \cdot \sqrt{\kappa} = \frac{36,5}{\sqrt{\lambda_{\mu 0}}}.$$

Величина  $(100 - R) \sqrt{\kappa}$  не должна зависеть от материала и имеет значение, указанное в последней строке таблицы:

	$\kappa$	$\lambda_0 = 4\mu$		$\lambda_0 = 8\mu$		$\lambda_0 = 12\mu$	
		100 - R	$(100 - R) \sqrt{\kappa}$	100 - R	$(100 - R) \sqrt{\kappa}$	100 - R	$(100 - R) \sqrt{\kappa}$
Серебро . . . . .	61,4	1,9	14,9	1,25	9,8	1,15	9,0
Медь . . . . .	57,2	2,7	20,6	1,4	10,6	1,6	12,1
Никель . . . . .	8,5	8,2	23,9	4,65	13,6	4,1	12,0
Висмут . . . . .	0,84	24,8	22,7	18,5	16,9	17,8	16,3
36,5 : $\sqrt{\lambda_{\mu 0}}$	—	—	19,4	—	13,0	—	11,0

Для более коротких волн наблюдаемый коэффициент отражения значительно меньше, чем вычисляемый по формуле (158b). Качественно именно такого результата нужно ожидать по электронной теории: в силу своей инерции электроны не могут теперь вполне следовать за быстро изменяющимся полем, а поэтому электрический ток уже не будет в каждый момент времени достигать величины  $\lambda \cdot E$ . И на самом деле эти отклонения таковы, как если бы при более коротких волнах металл имел меньшую проводимость. Еще отчетливей это действие инерции проявляется у электролитов, которые (например,  $H_2SO_4$  в воде) в статических опытах обладают превосходной проводимостью, но несмотря на это оказываются вполне прозрачными. В этом случае носителями тока являются ионы, масса которых в несколько тысяч раз превышает массу электронов. Поэтому вполне понятно, что электролиты ведут себя по отношению к электрическому полю световой волны как изоляторы.

§ 65. Вектор Пойнтинга в стационарном поле и в поле периодическом во времени. В § 52 мы познакомились с вектором Пойнтинга

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

как с потоком энергии. Для области, ограниченной произвольной замкнутой поверхностью, уменьшение во времени энергии, содержащейся в этой области, было равно тепловой и химической отдаче плюс потоку энергии через эту ограничивающую поверхность, даваемому вектором  $\mathbf{S}$ . В стационарном поле энергия поля является постоянной во времени. Отсюда следует, что в этом случае поток энергии  $-\int \mathbf{S}_n dS$ , втекающий в рассматриваемую область, в точности равен тепловой и химической отдаче в этой области. Напротив, в поле, периодическом во времени, величина энергии изменяется, но, однако, только таким образом, что она колеблется около некоторого среднего значения. Поэтому среднее значение энергии поля за один период будет иметь и здесь постоянное значение, так что и в этом случае вектор Пойнтинга непосредственно укажет Джоулево тепло, выделяемое в замкнутой области.

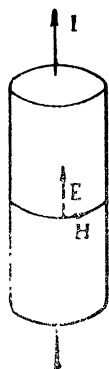


Рис. 53. Положение  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  на поверхности провода, по которому течет ток.

Рассмотрим сначала стационарную линейную цепь тока, поддерживаемого сторонними силами. Если  $q$  есть поперечное сечение провода в каком-либо месте, то прежде всего для полного тока  $I$ , согласно § 45, имеет место общее уравнение

$$I = \int i_n dq = \int \lambda (\mathbf{E}_n + \mathbf{E}_n^{(e)}) dq.$$

При „линейном“ токе мы считаем  $\lambda$ ,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{E}^{(e)}$  во всем сечении постоянными. Мы можем далее ограничиваться составляющими  $\mathbf{E}_a$  и  $\mathbf{E}_a^{(e)}$ , параллельными направлению оси провода. Обозначим через

$$R_0 = \frac{1}{q\lambda}$$

омическое сопротивление, приходящееся на единицу длины пути тока. Мы имеем

$$R_0 I = \mathbf{E}_a + \mathbf{E}_a^{(e)}.$$

Вычислим поток энергии Пойнтинга через цилиндрическую поверхность длины  $l$ , лежащую в пустоте, но тесно охватывающую провод.  $\mathbf{E}$  проходит параллельно оси провода,  $\mathbf{H}$  перпендикулярно к ней; следовательно,  $\mathbf{S}$  направлено нормально к поверхности провода. Величина потока энергии  $\mathbf{S}$  внутрь рассматриваемого цилиндра будет, следовательно,

$$|\mathbf{S}| = \frac{c}{4\pi} \int \mathbf{E}_a \cdot \mathbf{H}_s \cdot ds = \mathbf{E}_a \cdot I,$$

так как ведь  $\int \mathbf{H}_s ds = \frac{4\pi}{c} \cdot I$ . Энергия, входящая в провод на протяжении каждого сантиметра его длины, будет поэтому

$$|\mathbf{S}| = R_0 I^2 - E_a^{(e)} \cdot I.$$

Следовательно, в местах, где действуют сторонние силы, энергия течет от провода в поле; там же, где выделяется Джоулево тепло, энергия течет обратно от поля в провод. Полный поток энергии, взятый по всему пути тока, равен, конечно, нулю, что в силу безвихревого характера  $\mathbf{E}$  непосредственно получается также из уравнения  $\mathbf{S} = E_a I$ . Если сторонние силы отсутствуют, то  $\mathbf{S}$  непосредственно равняется Джоулеву теплу  $Q$ , выделяемому в участке, длина которого равняется единице.

При полях, периодических во времени, связь между средними по времени значениями  $\mathbf{S}$  и  $Q$  сохраняет тот же вид. Представим этот факт в несколько иной форме, удобной для некоторых применений; для этого ограничимся строго синусоидальным ходом изменения во времени и будем пользоваться при этом комплексными выражениями. Тогда самую общую функцию подобного рода  $f(x, y, z, t)$  с циклической частотой  $\omega$  можно написать в виде

$$\begin{aligned} f &= a(x, y, z) \cdot \cos(\omega t + b(x, y, z)), \\ &= \text{вещественной части от } a \cdot e^{ib} \cdot e^{i\omega t}, \\ f &= \text{вещественной части от } \mathbf{a}(x, y, z) \cdot e^{i\omega t}, \end{aligned}$$

где, следовательно,  $\mathbf{a} = a \cdot e^{ib}$  является комплексной функцией одних координат. Обозначим теперь горизонтальной чертой среднее по времени значение, звездочкой — переход к сопряженной комплексной величине. Тогда, в силу  $\overline{\cos(\omega t)} = 0$ ;  $\overline{\cos^2(\omega t)} = \frac{1}{2}$ , имеем:

$$\begin{aligned} \overline{f} &= 0, \\ \overline{f^2} &= \frac{1}{2} a^2 = \frac{1}{2} \mathbf{a} \mathbf{a}^*. \end{aligned}$$

Если теперь две функции

$$g = a \cdot e^{ib} \cdot e^{i\omega t} \quad \text{и} \quad G = A \cdot e^{iB} \cdot e^{i\omega t}$$

представлены в комплексной форме, то в дальнейшем нам понадобится произведение соответствующих вещественных величин. Обозначим через „ $\text{Re } g$ “ вещественную часть от  $g$ ; тогда

$$\text{Re } g = \frac{1}{2} (g + g^*), \quad \text{Re } G = \frac{1}{2} (G + G^*),$$

и мы получаем

$$\text{Re } g \cdot \text{Re } G = \frac{1}{4} (gG + g^*G^* + gG^* + g^*G);$$

при образовании среднего значения по времени  $\overline{gG} = 0$  и  $\overline{g^*G^*} = 0$ . Далее,  $g^*G$  является сопряженной с комплексной величиной  $gG^*$ , так что мы имеем

$$\overline{\text{Re } g \cdot \text{Re } G} = \frac{1}{2} \text{Re}(gG^*); \quad \overline{(\text{Re } g)^2} = \frac{1}{2} (gg^*). \quad (\alpha)$$

При полях, периодически изменяющихся во времени с циклической частотой  $\omega$ , комплексные выражения являются весьма удобными для вычислений, потому что тогда все дифференцирования по  $t$ , появляющиеся в линейных уравнениях, могут быть заменены умножением на соответствующую степень от  $i\omega$ :

$$\frac{\partial g}{\partial t} = i\omega g; \quad \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = -\omega^2 g \text{ и т. д.}$$

Тогда уравнения Максвелла будут иметь вид

$$\text{rot } \mathbf{H} = \left( \frac{i\omega\epsilon}{c} + \frac{4\pi\lambda}{c} \right) \mathbf{E} \quad (\beta)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{i\omega\mu}{c} \mathbf{H}. \quad (\gamma)$$

Чтобы применить к комплексным векторам  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  правило (α), напишем (β) в сопряженно комплексной форме (заменяя  $i$  на  $-i$ )

$$\text{rot } \mathbf{H}^* = \left( -\frac{i\omega\epsilon}{c} + \frac{4\pi\lambda}{c} \right) \mathbf{E}^*. \quad (\beta')$$

Если теперь умножить (β') на  $\frac{c}{8\pi} \mathbf{E}$ , а (γ) на  $-\frac{c}{8\pi} \mathbf{H}^*$ , то, согласно правилу (67), получается

$$\begin{aligned} -\frac{c}{4\pi} \text{div } \frac{1}{2} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) &= \lambda \cdot \frac{1}{2} \mathbf{E} \mathbf{E}^* + \\ &+ 2i\omega \left[ \frac{\mu}{8\pi} \cdot \frac{1}{c} \mathbf{H} \mathbf{H}^* - \frac{\epsilon}{8\pi} \cdot \frac{1}{2} \mathbf{E} \mathbf{E}^* \right]. \end{aligned} \quad (159)$$

Следовательно, если образовать комплексный вектор Пойнтинга

$$\mathbf{S}' = \frac{c}{4\pi} \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^*, \quad (159a)$$

то вещественная часть от  $-\text{div } \mathbf{S}'$  дает выделяемое Джоулево тепло, так как  $\frac{1}{2} \mathbf{E} \mathbf{E}^*$  представляет собой, согласно (2), среднее по времени от квадрата (действительной) силы поля. Но, кроме того, благодаря (159), мнимая часть от  $\mathbf{S}'$  тоже получает конкретное значение: именно она дает разность между средней магнитной энергией и средней электрической энергией, умноженную на  $2\omega$ . Отсюда для замкнутой области

$$\int \mathbf{S}'_n dS = Q + 2i\omega [\bar{U}_{\text{магн}} - \bar{U}_{\text{эл}}], \quad (159b)$$

где  $Q$  означает джоулево тепло, выделяемое в этой области,  $U$  — среднее значение содержащейся в ней энергии поля магнитной и соответственно электрической природы.

В следующем параграфе мы применим эту теорему ко внутренней части провода, в котором ток распределен уже неравномерно по сечению (скин-эффект). Так как здесь, согласно (157с),  $U_{эл}$  всегда исчезающе мало по сравнению с  $U_{магн}$ , то вещественная часть от (159а) дает джоулево тепло, а, следовательно, и омическое сопротивление; при этом мнимая часть даст магнитную энергию поля, а, значит, — ту часть самоиндукции, которая приходится на внутреннюю часть провода.

**§ 66. Скин-эффект.** Рассмотрим прямой провод круглого сечения радиуса  $r_0$ , по которому пусть течет переменный ток частоты  $\omega$ . Тогда на его поверхности имеется электрическое поле, направленное по его оси, и магнитное поле, перпендикулярное  $\mathbf{E}$ , но также параллельное поверхности. Качественно это дает соотношения, одинаковые с теми, которые мы рассмотрели выше (§ 63) для случая световой волны, проникающей в металл. Действительно, на поверхности металла мы имели бы аналогичное распределение поля, если бы направили нормально к поверхности провода световую волну частоты  $\omega$ , поляризованную перпендикулярно к направлению оси провода.

Для такой волны мы вычислили выше [ур-ние (157b)] для случая плоской металлической поверхности ту глубину проникания, при которой амплитуда ослабляется в  $e^{2\pi}$  раз. В целях упрощения примем в этом параграфе за меру глубины проникания не точно величину, данную в (157b), а  $2\pi\sqrt{2}$ -ую часть от нее, — следовательно, подставляя  $\mu = 1$ ,

$$\frac{c}{2\pi \cdot \sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{\tau}{\lambda}} = \frac{c}{\sqrt{4\pi\omega\lambda}}$$

Хотя, конечно, расчет при цилиндрической поверхности провода в некоторых частностях сложнее, чем при плоской поверхности, но качественно мы можем с самого начала предвидеть следующие два предельные случая:

1. Радиус провода  $r_0$  мал по сравнению с  $\frac{c}{\sqrt{4\pi\omega\lambda}}$ : переменное поле при проникании до оси провода ослабляется незначительно. Плотность тока будет распределена по сечению провода равномерно.

2.  $r_0 \gg \frac{c}{\sqrt{4\pi\omega\lambda}}$ : переменное поле полностью затухнет прежде, чем успеет распространиться вовнутрь на заметную часть радиуса провода. Поэтому плотность тока заметно отличается от нуля лишь в очень тонком поверхностном слое („оболочке“). Во всей внутренней части провода поля практически нет.

Это проникание переменного поля в металл следует тому же закону, что и проникание температурных колебаний в тело, поверхность которого попеременно согревается и охлаждается. Так как в металле можно пренебречь током смещения по сравнению с током проводимости [ур-ние (157)], то колебательное уравнение (154f) для внутренней части металла принимает вид

$$\frac{4\pi\lambda\mu}{c^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \Delta \mathbf{E}. \quad (160)$$

С другой стороны, для материала с теплоемкостью  $\gamma$  (относящейся к единице объема), теплопроводностью  $\lambda'$  и температурой  $\vartheta$  передача тепла определяется уравнением

$$\frac{\partial (\gamma\vartheta)}{\partial t} = \text{div} (\lambda' \text{grad } \vartheta) \text{ или } \frac{\gamma}{\lambda'} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \Delta \vartheta.$$

Возрастание скин-эффекта с растущей частотой  $\omega$  нужно поэтому понимать так же, как тот факт, что суточные температурные колебания проникают в почву менее глубоко, чем годовые колебания.

Для количественного рассмогрения скин-эффекта мы должны проинтегрировать ур-ние (160) по поперечному сечению провода. Но прежде применим к нашему случаю вектор Пойнтинга (159а). Ограничимся сейчас случаем, когда ток, а, значит, и поле всюду параллельны оси провода. Отложим ось  $z$  в направлении оси провода и положим  $\mathbf{E}_z = E$ . Интегрирование по единице длины провода при пренебрежении электрической частью энергии поля дает

$$\frac{c}{8\pi} \cdot \oint \mathbf{E} \mathbf{H}_s^* ds = \lambda \int \frac{1}{2} EE^* dq + 2i\omega \cdot \frac{\mu}{8\pi} \int \frac{1}{2} \mathbf{H} \mathbf{H}^* dq. \quad (161)$$

Введем полный ток

$$I = \int idq = \lambda \int Edq. \quad (161a)$$

Среднее значение по времени квадрата действительного тока по (а) (§ 65) будет

$$\overline{(\text{Re } I)^2} = \frac{1}{2} II^*.$$

Сопротивление  $R$  и „внутреннюю“ самоиндукцию  $L_i$  мы определим уравнениями

$$\frac{1}{2} R II^* = \lambda \int \frac{1}{2} EE^* dq$$

и

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} L_i II^* = \frac{\mu}{8\pi} \int \frac{1}{2} \mathbf{H} \mathbf{H}^* dq.$$

Это значит, что  $R \cdot \overline{(\text{Re } I)^2}$  должно дать тепло, выделяемое током за секунду, а  $\frac{1}{2} L_i \overline{(\text{Re } I)^2}$  — среднюю магнитную энергию поля, содержащуюся внутри провода. Если принять еще во внимание равенство

$$\frac{1}{4\pi} \oint \mathbf{H}_s ds = I^*,$$

то (161) дает

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} (E)_{\text{поверх}} I^* &= \frac{1}{2} R II^* + 2i\omega \frac{1}{2} L_i II^* \\ \text{или} \quad (E)_{\text{поверх}} &= RI + i\omega L_i I. \end{aligned} \right\} \quad (162)$$

Напряженность на поверхности провода составляется, следовательно, из омической части  $RI$  и ин-



дуктивной части  $\omega L_i I$ , фаза которой сдвинута относительно фазы первой части на  $90^\circ$ .

Чтобы действительно вычислить теперь значения  $R$  и  $\omega L_i$  из уравнения (162), мы должны еще выразить  $I$  через  $E$ . Согласно (160)

$$i \cdot \frac{4\pi\lambda\omega\mu}{c^2} E = \operatorname{div} \operatorname{grad} E.$$

Интегрированием по поперечному сечению, в силу  $\int \lambda E dq = I$  получается:

$$i \cdot \frac{4\pi\omega\mu}{c^2} \cdot I = \left( \frac{\partial E}{\partial r} \right)_{r=r_0} \cdot 2\pi r_0.$$

Полагая для сокращения глубину проникания

$$d = \frac{c}{\sqrt{4\pi\omega\lambda\mu}} \quad (162a)$$

и сопротивление постоянного тока

$$R_0 = \frac{1}{\lambda\pi r^2},$$

из (162) получаем

$$\frac{R + i\omega L_i}{R_0} = \frac{i}{2} \cdot \frac{r_0}{d^2} \cdot \left( \frac{E}{\frac{\partial E}{\partial r}} \right)_{r=r_0} \quad (163)$$

Интегрируя дифференциальное уравнение (160) и подставляя найденное значение  $E$  в (163), получим технически важные величины  $\frac{R}{R_0}$  и  $\omega L_i$ , т. е., следовательно, повышение сопротивления, вызываемое скин-эффектом, и внутреннюю самоиндукцию. Уравнение (160) для случая цилиндрической симметрии при замене  $\frac{\partial}{\partial t} = i\omega$  дает ( $r$  — расстояние от оси провода):

$$iE = d^2 \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial E}{\partial r} \right), \quad (164)$$

где  $d = \frac{c}{\sqrt{4\pi\omega\lambda\mu}}$  означает определенную выше глубину проникания.

Это уравнение в общем виде решается при помощи Бесселевой функции нулевого порядка от комплексного аргумента  $\sqrt{i} \frac{r}{d}$ . Мы ограничимся приближенным решением, которое в обоих выше упомянутых предельных случаях ( $r_0 \gg d$  и  $r_0 \ll d$ ) можно отыскать непосредственно.

Особенно простую форму имеет второй предельный случай: сильный скин-эффект;  $r_0 \gg d$ . В этом случае все процессы разыгрываются вблизи поверхности ( $r \approx r_0$ ), так что под знаком производной появляющееся явно  $r$  можно считать постоянным (поверхность может рассматриваться как плоскость).

Тогда

$$\frac{i}{d^2} E = \frac{\partial^2 E}{\partial r^2},$$

а, следовательно,

$$E = E_0 e^{\sqrt{i} \cdot \frac{r}{d}}; \quad \frac{\partial E}{\partial r} = \frac{\sqrt{i}}{d} \cdot E_0 \cdot e^{\sqrt{i} \frac{r}{d}},$$

и поэтому по (163)

$$\frac{R + i\omega L_i}{R_0} = \frac{i}{2} \cdot \frac{r_0}{d \cdot \sqrt{i}} = \frac{r_0}{2\sqrt{2}d} (1 + i).$$

Омическое сопротивление увеличилось, следовательно, по отношению к случаю постоянного тока, в  $\frac{r_0}{2\sqrt{2} \cdot d}$  раз.

Слабый скин-эффект;  $r_0 \ll d$ . Введем в (164) независимую переменную

$$y = \frac{r}{d}; \quad y_0 = \frac{r_0}{d}$$

и разложим в уравнении

$$iE = \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left( y \frac{\partial E}{\partial y} \right)$$

искомую функцию  $E$  по степеням  $y^2$

$$E = (\alpha_0 + \alpha_1 y^2 + \alpha_2 y^4 + \alpha_3 y^6 + \dots).$$

Тогда для определения коэффициентов  $\alpha_\nu$  получается уравнение

$$i \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu \cdot y^{2\nu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} (2\nu)^2 \alpha_\nu y^{2\nu-2},$$

а из него рекурсионная формула

$$\alpha_\nu = \frac{i\alpha_{\nu-1}}{(2\nu)^2}.$$

Следовательно,

$$\alpha_1 = \alpha_0 \cdot \frac{i}{2^2}; \quad \alpha_2 = \alpha_0 \cdot \frac{i^2}{2^2 \cdot 4^2}; \quad \alpha_3 = \alpha_0 \cdot \frac{i^3}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2};$$

$$\dots \alpha_\nu = \alpha_0 \cdot \frac{i^\nu}{(2^\nu \cdot \nu!)^2}.$$

Эти коэффициенты дают теперь, согласно (163),

$$\frac{R + i\omega L_i}{R_0} = \frac{i}{2} y_0 \cdot \left( \frac{\partial E}{\partial y} \right)_{y=y_0} = \frac{i}{2} \frac{\sum_0^{\infty} \alpha_\nu \cdot y_0^{2\nu}}{\sum_{\nu=1}^{\infty} 2\nu \cdot \alpha_\nu \cdot y_0^{2\nu-2}}.$$

Если теперь снова разложить правую часть по  $y_0$  и подставить для  $\alpha_1, \alpha_2 \dots$  полученные значения, то получается

$$\frac{R + i\omega L_i}{R_0} = 1 + i \left( \frac{y_0}{2\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{y_0}{2\sqrt{2}} \right)^4 + \dots$$

Обозначим для простоты силу скин-эффекта числом

$$z = \frac{r_0}{2\sqrt{2} \cdot d} = \frac{r_0 \sqrt{\pi\omega\lambda}}{\sqrt{2} \cdot c} = \pi r_0 \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{c \cdot \lambda_0}} = \sqrt{\frac{\pi}{R_0 c \lambda_0}}; \quad (164a)$$

тогда

$$\left. \begin{array}{l} \text{для малых } z: \frac{R}{R_0} = 1 + \frac{1}{3} z^4 + \dots; \quad L_i = \frac{1}{2c^2}, \\ \text{для больших } z: \frac{R}{R_0} = \frac{\omega L_i}{R_0} = z. \end{array} \right\} \quad (164b)$$

Таким образом мы получаем представленную на рис. 54 зависимость величины  $\frac{R}{R_0}$  от  $z$ . Значения  $z$  для медной проволоки различных радиусов и для различных длин волн  $\lambda$  даны в нижеследующей таблице. Для ее вычисления мы исходили из численного значения  $\pi \sqrt{\frac{\lambda}{c}}$  для меди  $= 4,2 \cdot 10^3 \text{ см}^{-1/2}$ . Согласно (164a) это дает

$$z = \frac{4,2 \cdot 10^3 \cdot r}{\sqrt{\lambda_0}}$$

$r$	1	0,1	0,01	Периодов в сек. $\frac{c}{\lambda_0}$
$\lambda_0 = 6 \cdot 10^8 \text{ см}$	0,17	0,017	0,0017	50
$\lambda_0 = 6 \cdot 10^6 \text{ см}$	1,7	0,17	0,017	5000
$\lambda_0 = 6 \cdot 10^4 \text{ см}$	17	1,7	0,17	$5 \cdot 10^5$
$\lambda_0 = 6 \text{ см}$	1700	170	17	$5 \cdot 10^9$

Величина скин-эффекта для медной проволоки радиуса 1 см, 0,1 см и 0,01 см при различных длинах волн  $\lambda_0$ .

Явление, весьма родственное скин-эффекту, имеет место при так называемом высокочастотном нагревании цилиндрических стержней. Это явление состоит в том, что нагреваемый стержень помещают в продольное переменное магнитное поле высокой частоты. Это поле

создает в стержне электрическое поле, силовые линии которого окружают ось стержня кольцами. Джоулево тепло индуцированных таким образом круговых токов вызывает желаемое повышение температуры. В этом случае мы имеем, следовательно, на поверхности стержня опять то же самое электромагнитное состояние, которое создала бы линейно поляризованная волна, падающая на поверхность нормально; только теперь эта волна поляризована перпендикулярно к оси провода. По сравнению со скин-эффектом электрическая и магнитная силы поля поменялись, следовательно, своими ролями; в частности, уравнение (164) относится теперь к прониканию в нагреваемый стержень магнитного поля  $H$ . По его интегрировании и здесь комплексный вектор Пойнтинга непосредственно дает Джоулево тепло и магнитную энергию поля в стержне

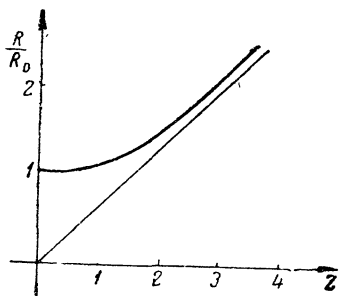


Рис. 54. Скин-эффект. Возрастание омического сопротивления  $R$  с величиной  $z$ , даваемой уравнением (164а).

§ 67. Самоиндукция и емкость двойного провода. Перед тем как перейти к изложению теории волн вдоль провода, рассмотрим стационарное поле двойного провода.

Пусть имеется два прямых цилиндрических и друг другу параллельных проводника, длина которых очень велика по сравнению с их взаимным расстоянием; например, два параллельных провода (двойной провод в собственном смысле) или провод, покрытый изолирующей оболочкой и проведенный в воде (кабель). В последнем случае одним проводником служил бы провод, другим — вода. Предположим, что оба проводника электростатически заряжены один противоположно другому, и что, кроме того, по ним текут равные по величине, но противоположные по направлению токи. Сопротивление проводов на первый раз пусть будет равно нулю, чтобы не было падения напряжения вдоль проводов. Тогда и электрическое поле  $E$  статического поверхностного заряда и магнитное поле  $H$  токов всюду перпендикулярны к оси провода. Следовательно, если провести плоскость  $xz$  нормально к длине проводки, то  $E_z = H_z = 0$ .

Вычислим поле в изоляторе ( $\epsilon, \mu$ ); пусть последний будет однороден в пространстве между обоими проводниками.

Электрическое поле не имеет вихрей и, следовательно, может быть выведено из потенциала  $\Phi(x, y)$ :

$$E_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}. \quad (165)$$

Магнитное поле не имеет источников и потому может быть выведено из векторного потенциала  $A$ , у которого, в силу того, что все токи проходят параллельно оси  $z$ , только составляющая по  $z$ ,  $A_z = \mu \Psi(x, y)$  может отличаться от нуля. Следовательно,  $\mu H = \text{rot } A$ , или

$$H_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad H_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (165a)$$

Введенные таким образом в плоскости сечения функции  $\Phi$  и  $\Psi$  должны удовлетворять следующим условиям: так как в изоляторе нет ни зарядов, ни токов, то в нем  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$  и  $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$ , т. е.

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0. \quad (166)$$

Обозначим затем через  $+e$  заряд единицы длины проводника 1, через  $I$  — ток (в направлении  $z$ ) в проводнике 1. Если далее  $ds$  есть элемент пути, по которому производится интегрирование, и который охватывает первый проводник, но не охватывает второго, то  $4\pi e = \varepsilon \oint \mathbf{E}_n dS$  и  $\frac{4\pi}{c} I = \oint (\mathbf{H} ds)$ . При этом нормаль  $n$  направлена от проводника наружу. Элемент длины  $ds$  величины  $ds$  с составляющими  $dx$ ,  $dy$  связан с составляющими  $n_x$  и  $n_y$  единичного вектора  $\mathbf{n}$  следующим образом:

$$dx = -ds n_y \quad \text{и} \quad dy = ds n_x. \quad (166a)$$

Поэтому

$$(\mathbf{H} ds) = H_x dx + H_y dy = -ds \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} n_x + \frac{\partial \Psi}{\partial y} n_y \right) = -ds \frac{\partial \Psi}{\partial n}.$$

Так как, с другой стороны,  $\mathbf{E}_n = -\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ , то мы имеем дальнейшие условия

$$\frac{4\pi e}{\varepsilon} = - \int_1 \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds, \quad \frac{4\pi I}{c} = - \int_1 \frac{\partial \Psi}{\partial n} ds \quad (167)$$

и соответственно для пути интегрирования, охватывающего второй проводник,

$$\frac{4\pi e}{\varepsilon} = \int_2 \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds, \quad \frac{4\pi}{c} I = \int_2 \frac{\partial \Psi}{\partial n} ds. \quad (167a)$$

В уравнениях (166) и (167) бросается в глаза аналогия между функциями  $\Phi$  и  $\Psi$ . Чтобы сделать эту аналогию совсем полной, введем ограничивающее предположение, что на поверхности проводника магнитное поле имеет чисто тангенциальное направление. При однородном кабеле с круглыми и концентрическими поперечными сечениями это предположение вследствие симметрии явно удовлетворяется. При двойном проводе оно выполняется приближенно, когда расстояние между проводами велико по сравнению с их диаметром. Мы впоследствии применим наши результаты к быстро меняющимся полям. При таких полях, пока проводник можно рассматривать как идеальный, это предположение выполняется строго при всех обстоятельствах: вследствие того, что переменное поле в такой проводник не проникает, и имея в виду, что  $\mathbf{H}$  источников не имеет, нормальная составляющая  $\mathbf{H}$  должна на поверхности обратиться в нуль. Так как линии поля  $\mathbf{H}$  совпадают с кривыми  $\Psi = \text{const}$ , то наше предположение равносильно тому, что на поверхностях проводников 1 и 2  $\Psi$  принимает постоянные значения  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$ .

Соответствующее уравнение, конечно, всегда имеет место для электростатического потенциала  $\Phi$ . Следовательно,

$$\left. \begin{array}{l} \Psi = \text{const} \\ \Phi = \text{const} \end{array} \right\} \text{ на поверхностях проводников 1 и 2.} \quad (168)$$

Тремя уравнениями (166), (167), (168)  $\Phi$  и  $\Psi$  определяются однозначно вплоть до неимеющей значения аддитивной постоянной. Так как, кроме того, обе функции, если не обращать внимания на численные значения, появляющиеся в (167), должны удовлетворять одинаковым условиям, то они могут отличаться друг от друга только численным множителем. И притом, согласно (167),

$$\Psi(x, y) = \frac{\varepsilon I}{ce} \Phi(x, y). \quad (169)$$

Векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  взаимно перпендикулярны. Их величины находятся в постоянном численном отношении

$$|\mathbf{H}| = |\mathbf{E}| \frac{\varepsilon I}{a}. \quad (169a)$$

Для выяснения физического значения  $\Psi$  из уравнения (165a) можно почерпнуть следующее. Рассмотрим произвольную кривую  $\int_a^b ds$ , соединяющую две точки  $a$  и  $b$  в плоскости  $xy$ . Пусть ей соответствует по (166a) нормаль  $\mathbf{n}$ . Сместим эту кривую параллельно оси  $z$  на  $1$  см и подсчитаем поток сил  $\int_a^b \mathbf{H}_n ds$ , проходящий через полосу  $abb'a'$ , покрываемую кривой при таком смещении. Очевидно, согласно (165a) и (166a),

$$\mathbf{H}_n ds = \mathbf{H}_x n_x ds + \mathbf{H}_y n_y ds = \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Psi}{\partial z} dz = \frac{\partial \Psi}{\partial s} ds;$$

следовательно

$$\int_a^b \mathbf{H}_n ds = \Psi_b - \Psi_a.$$

Представим себе теперь, что такая полоса с шириной  $1$  положена на боковые поверхности обоих проводников, и определим, как „коэффициент внешней самоиндукции“  $L_e$  единицы длины нашего двойного провода, разделенный на  $c$  поток индукции, который проходит через эту полосу при силе тока  $I = 1$ . Следовательно,

$$\frac{\mu}{c} \int_2^1 \mathbf{H}_n ds = \frac{\mu}{c} (\Psi_1 - \Psi_2) = L_e \cdot I. \quad (170a)$$

(Выражение „коэффициент внешней самоиндукции“ и индекс  $\epsilon$  должны указывать на то, что для вычисления полной самоиндукции  $L$  нужно было бы принять во внимание еще величину  $L_i$ , прибавляемую магнитным полем, проходящим внутри проводников).

С другой стороны, определим емкость  $C$ , приходящуюся на единицу длины двойного провода, по уравнению:

$$e = C \cdot (\Phi_1 - \Phi_2). \quad (170b)$$

Согласно (169)

$$\frac{\Phi_1 - \Phi_2}{e} = \frac{\Psi_1 - \Psi_2}{I} \cdot \frac{c}{\epsilon}.$$

Но отсюда

$$\frac{1}{C} = L_a \cdot \frac{c^2}{\mu \epsilon},$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{C \cdot L_e}} = \frac{c}{\sqrt{\mu \epsilon}} = w. \quad (171)$$

Величина, обратная произведению емкости и коэффициента внешней самоиндукции, равна квадрату скорости света  $w$  в окружающей среде.

К этому же результату мы придем, если будем определять  $C$  и  $L_e$  при помощи энергии поля, накапливаемой в изоляторе (всегда на  $1 \text{ см}$  двойного провода):

$$U_{\text{магн}} = \frac{1}{2} L_e I^2; \quad U_{\text{эл.}} = \frac{1}{2C} \cdot e^2. \quad (172)$$

Из (169a) следует, с другой стороны,

$$\frac{U_{\text{эл.}}}{U_{\text{магн.}}} = \frac{\epsilon \int |\mathbf{E}|^2 dS}{\mu \int |\mathbf{H}|^2 dS} = \frac{\epsilon}{\mu} \cdot \frac{c^2 e^2}{\epsilon^2 I^2} = \frac{c^2}{\mu \epsilon} \cdot \frac{e^2}{I^2}.$$

(При этом опять остается не учтенной часть магнитной энергии поля  $(\frac{1}{2} L_i I^2)$ , сосредоточенная внутри проводника).

Совместно с (172) это дает непосредственно уравнение (171).

Вектор Пойнтинга в нашей схеме всюду параллелен оси  $z$ , и притом по (165) и (165a):

$$\mathbf{S}_z = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E}_x \mathbf{H}_y - \mathbf{E}_y \mathbf{H}_x) = + \frac{c}{4\pi} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right).$$

В силу (166) для полного потока энергии  $S$  через плоскость  $xu$  теорема Грина дает

$$S = \int \mathbf{S}_z dx dy = - \frac{c}{4\pi} \int_1 \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} ds - \frac{c}{4\pi} \int_2 \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} ds.$$

В силу постоянства  $\Phi$  на поверхности обоих проводников второе уравнение (167) и (167а) дают

$$S = (\Phi_1 - \Phi_2) \cdot I.$$

Но это есть как раз то Джоулево тепло, которое выделяется при замыкании двойного провода, не имеющего сопротивления, омическим сопротивлением величины

$$R = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{I}.$$

В заключение укажем еще значения  $C$  для двух простых случаев.

Собственно двойная проводка. Расстояние  $d$  между проводами велико по сравнению с их радиусом  $b$ . Тогда для любой точки наблюдения (ср., например, рис. 41)

$$\Phi = -\frac{2e}{\varepsilon} \ln r_1 + \frac{2e}{\varepsilon} \ln r_2.$$

На поверхности первого провода  $r_1 = b$ ; при этом в силу  $d \gg b$   $r_2 \approx d$ , откуда

$$\Phi_1 = \frac{2e}{\varepsilon} \ln \frac{d}{b} \quad \text{и} \quad \Phi_2 = -\frac{2e}{\varepsilon} \ln \frac{d}{b}.$$

Поэтому

$$C = \frac{e}{\Phi_1 - \Phi_2} = \frac{\varepsilon}{4 \cdot \ln \frac{d}{b}} \quad (\text{двойной провод } d \gg b). \quad (173a)$$

При кабеле (медная проволока радиуса  $a$ , изолятор радиуса  $b$ ; снаружи  $r = b$  вода в качестве второго проводника) в изоляторе

$$\Phi = -\frac{2e}{\varepsilon} \cdot \ln r,$$

отсюда

$$\Phi_1 = -\frac{2e}{\varepsilon} \ln a; \quad \Phi_2 = -\frac{2e}{\varepsilon} \cdot \ln b,$$

а, следовательно,

$$C = \frac{e}{\Phi_1 - \Phi_2} = \frac{\varepsilon}{2 \cdot \ln \frac{b}{a}} \quad (\text{кабель}). \quad (173b)$$

В выражениях (173а) и (173b) нужно обратить внимание на то, что  $C$  является отвлеченным числом, и что порядок его величины в практических установках лежит примерно между 1 и  $\frac{1}{10}$ . Соответственно порядок величины  $L_e$ , согласно (171), лежит между  $10^{-21}$  до  $10 \cdot 10^{-21}$ .

**§ 68. Волны вдоль идеальных проводников.** Рассмотрим тот же двойной провод предыдущего параграфа; пусть, как и в предыдущем случае, поле будет поперечным, но зависит как от  $t$ , так и  $z$ .



Напишем сначала общие уравнения Максвелла для изолятора, для случая, когда  $\mathbf{H}_z = \mathbf{E}_z = 0$ .

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\varepsilon}{c} \dot{\mathbf{E}} = \text{rot } \mathbf{H} \text{ или } \left\{ \begin{array}{l} \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{\partial H_y}{\partial z} \quad (a) \\ \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{\partial H_x}{\partial z} \quad (b) \\ 0 = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \quad (c) \end{array} \right. \\ \\ \frac{\mu}{c} \dot{\mathbf{H}} = -\text{rot } \mathbf{E} \text{ или } \left\{ \begin{array}{l} \frac{\mu}{c} \frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial z} \quad (d) \\ \frac{\mu}{c} \frac{\partial H_y}{\partial t} = -\frac{\partial E_x}{\partial z} \quad (e) \\ 0 = \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \quad (f) \end{array} \right. \\ \\ \text{div } \mathbf{E} = 0 \text{ или } \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \quad (g) \\ \\ \text{div } \mathbf{H} = 0 \text{ или } \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} = 0. \quad (h) \end{array} \right\} \quad (174)$$

Что касается зависимости от  $x$  и  $y$  (174 *c, f, g, h*), то эти уравнения ничем не отличаются от случая стационарности. Мы можем, значит, и здесь ввести функции  $\Phi$  и  $\Psi$ , которые теперь, кроме как от  $x$  и  $y$ , зависят еще от  $t$  и  $z$ .

Четыре уравнения (*c, f, g, h*) будут тогда удовлетворяться выражениями:

$$\left. \begin{array}{l} E_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad H_z = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ E_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad H_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{array} \right\} \quad (175a)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0. \quad (175b)$$

Пусть  $+e$  и  $-e$  опять будут заряды проводников в рассматриваемом поперечном сечении, рассчитанные на единицу длины, а  $I$  и  $-I$  — силы тока;  $e$  и  $I$  теперь будут функциями  $z$  и  $t$ ; тогда  $\Phi$  и  $\Psi$  должны удовлетворять всем поставленным в предыдущем параграфе условиям (166), (167), (168). Условия (168) теперь, при переменном поле, соблюдаются даже строго, так как поле внутри идеального проводника должно равняться нулю; в самом деле, тангенциальная слагающая  $\mathbf{E}$  проходит через поверхность проводника непрерывно; то же относится к нормальной слагающей  $\mathbf{H}$  (тангенциальная составляющая  $\mathbf{H}$  при идеальном проводнике, наоборот, ввиду сосредоточения тока в тонком поверхностном слое, вообще говоря, испытывает здесь разрыв). Поэтому, если обозначить индексом  $o$  вычисленные в предыдущем

параграфе четыре соответствующих друг другу значения  $\Psi_0$ ,  $\Phi_0$ ,  $I_0$ ,  $e_0$ , то решение (175а и б) теперь будет

$$\left. \begin{aligned} \Phi(x, y, z, t) &= \frac{\Phi_0(x, y)}{e_0} \cdot e(z, t) \\ \Psi(x, y, z, t) &= \frac{\Psi_0(x, y)}{I_0} \cdot I(z, t) \end{aligned} \right\} \quad (175c)$$

Но по уравнению (169)

$$\frac{\Psi_0}{I_0} = \frac{\varepsilon}{c} \cdot \frac{\Psi_0}{e_0},$$

а потому

$$\Psi(x, y, z, t) = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\Phi_0(x, y)}{e_0} \cdot I(z, t). \quad (175d)$$

Теперь мы должны еще удовлетворить четыре оставшихся уравнения (174а, б, д, е). Если ввести величины  $\Phi$  и  $\Psi$  по (175а, с, д), то из (174а), а также (174б) получается

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial z} = 0 \quad (176a)$$

$$\frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial e}{\partial z} = 0. \quad (176b)$$

Исключение  $I$  или  $e$  для каждой из указанных двух величин дает волновое уравнение вида:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\mu\varepsilon} \cdot \frac{\partial^2 I}{\partial z^2}.$$

Вводя скорость волны

$$w = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}},$$

получим, следовательно, общее решение в виде

$$e = f\left(t - \frac{z}{w}\right) + g\left(t + \frac{z}{w}\right), \quad (176c)$$

$$I = wf\left(t - \frac{z}{w}\right) - wg\left(t + \frac{z}{w}\right), \quad (176d)$$

где  $g$  и  $f$  — произвольные функции.

Если воспользоваться понятиями „коэффициента самоиндукции“ и „емкости“, то основные уравнения (176а и б) волн вдоль провода можно получить также следующим образом.

Заряд, находящийся на участке  $dz$  провода, может измениться только вследствие того, что входящий ток отличен от выходящего. Это дает „уравнение непрерывности“  $\frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{\partial I}{\partial z}$  в соответствии с (176а).

Применим далее закон индукции к контуру, приложенному между обоими проводниками, ширины  $dz$  (поверхность  $abcd$  рис. 55). Поток индукции через эту полосу, умноженный на  $\frac{1}{c}$ , согласно определению  $L_e$  (170а), равен  $L_e \cdot I \cdot dz$ .

Интеграл по этому контуру  $\int_{abcd} \mathbf{E}_s ds$  будет

$$(\Phi_a - \Phi_b) - (\Phi_d - \Phi_c) = \frac{\partial (\Phi_1 - \Phi_2)}{\partial z} \cdot dz.$$

Последнее равно уменьшению магнитного потока; поэтому

$$\frac{\partial (\Phi_1 - \Phi_2)}{\partial z} = -L_e \cdot \frac{\partial I}{\partial t}.$$

Вводя емкость  $C = \frac{e}{\Phi_1 - \Phi_2}$ , получаем отсюда

$$\frac{1}{C} \frac{\partial e}{\partial z} + L_e \cdot \frac{\partial I}{\partial t} = 0.$$

Если принять еще во внимание выведенное в предыдущем параграфе соотношение  $C \cdot L_e = \frac{\mu \epsilon}{c^2}$ , то последнее уравнение станет тождественно с (176b).

Рассмотрим в частности волну частоты  $\omega$ , распространяющуюся по направлению положительной оси  $z$ ; тогда (176c, d) дают решение

$$\Phi = \Phi_0 \cdot \sin \omega \left( t - \frac{z}{w} \right)$$

$$I = C \cdot w \cdot \Phi_0 \cdot \sin \omega \cdot \left( t - \frac{z}{w} \right),$$

где для сокращения положено  $\Phi_1 - \Phi_2 = \Phi$ . Выводимое отсюда поле  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  отличается от плоской волны в однородной среде только тем, что в плоскости волны (плоскость  $xu$ ) как направление поляризации, так и напряженность оказываются функциями координат; напряженность чувствительно отличается от нуля только около самых проводов; на поверхности провода электрический вектор всюду нормален к этой поверхности. Мы имеем картину волны, скользящей вдоль двойного провода. Вид поля в плоскости волны был показан ранее на рис. 42.

Из разнообразных применений волн вдоль проводов рассмотрим вкратце лишь следующий случай.

Пусть двойной провод простирается от плоскости  $z = -l$  до  $z = 0$ . Здесь она замыкается омическим сопротивлением  $R$ . Пусть ее начало ( $z = -l$ ) соединено с „источником переменного тока“ частоты  $\omega$ . Чтобы определить результирующее распределение напряжения и токов, напишем сначала, основываясь на (176c) и (176d), общее решение для частоты  $\omega$ :

$$\Phi = a \cdot e^{i\omega \left( t - \frac{z}{w} \right)} + b' \cdot e^{i\omega \left( t + \frac{z}{w} \right)}$$

$$\frac{I}{Cw} = a \cdot e^{i\omega \left( t - \frac{z}{w} \right)} - b' \cdot e^{i\omega \left( t + \frac{z}{w} \right)},$$

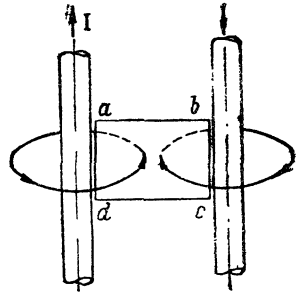


Рис. 55. Применение закона индукции к двойному проводу.

где  $a$  и  $b'$  — произвольные комплексные числа. Мы можем, однако, не нарушая общности, взять  $a$  вещественным и положить  $b' = b \cdot e^{i\beta}$ , где  $b$  и  $\beta$  — также вещественные числа. Положим, далее, для сокращения

$$\frac{2\omega z}{w} = \frac{4\pi \cdot z}{\lambda_0} = \zeta,$$

т. е. мы измеряем наш двойной провод в  $\zeta$ , если за единицу взято  $\frac{\lambda_0}{4\pi}$ ;  $\zeta$  возрастает на  $2\pi$ , когда  $z$  увеличивается на полволны. Теперь наше решение будет иметь вид

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= e^{i\omega \left(t - \frac{z}{w}\right)} \cdot (a + b \cdot e^{i(\beta + \zeta)}) \\ \frac{I}{C \cdot w} &= e^{i\omega \left(t - \frac{z}{w}\right)} \cdot (a - b \cdot e^{i(\beta + \zeta)}) \end{aligned} \right\} \quad (177)$$

Мы можем по этим выражениям построить векторную диаграмму  $\Phi$  и  $I$  для любого поперечного сечения  $z$ . При этом общий фазовый множитель  $e^{i\omega \left(t - \frac{z}{w}\right)}$  не имеет никакого значения. Значение же констант  $a$ ,  $b$ ,  $\beta$  видно из рис. 56: вокруг конечной точки  $B$  отрезка  $OB = a$  опишем окружность радиуса  $b$ ;  $B$  есть центр круга, не обозначенный на рис. 56. Диаметр круга  $GH$ , лежащий в направлении  $a$ , повернем затем на угол  $\beta + \zeta$ . Вследствие этого он займет положение  $FE$  (на рисунке  $\zeta$ , соответственно нашему примеру, отрицательно). Тогда, согласно уравнению (177), отрезками  $OF$  и  $OE$  определяются как по амплитуде, так и по разности фаз величины  $\Phi$  и  $\frac{I}{Cw}$  для поперечного сечения  $z = \frac{\zeta \cdot \lambda_0}{4\pi}$ . Таким образом, состояние вдоль всей проводки определяется весьма просто соответствующим поворотом диаметра. Эту общую картину нужно уточнить для условий, предписанных на конце проводов; в частности, в нашем примере: сопротивление — омическое, равное  $R$ ; следовательно, при  $\zeta = 0$ ,  $\Phi = I \cdot R$ . Равенство фаз  $\Phi$  и  $I$  при  $\zeta = 0$  требует  $\beta = 0$ . Согласно (177), при таком краевом условии в месте  $\zeta = 0$  следует далее

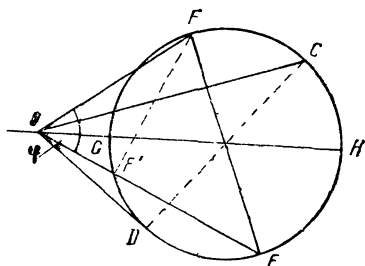


Рис. 56. Векторная диаграмма идеального двойного провода. Каждому поперечному сечению двойного провода соответствует диаметр окружности. Векторы, проведенные из начальной точки к конечным точкам диаметра, дают значения тока и напряжения в соответствующем сечении.

в месте  $\zeta = 0$  следует далее

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{I}{\Phi \cdot C \cdot w} = \frac{1}{R \cdot C \cdot w}.$$

Тем самым определено также отношение отрезка  $OG$  к  $OH$ , а следовательно, вплоть до численного множителя, и состояние на всей системе проводов.

Нужно обратить внимание на следующие предельные случаи для  $R$   
 $R = \infty$ . Провода на конце разомкнуты. Тогда  $b = a$ ; окружность проходит через точку  $O$ ;  $\Phi$  и  $I$  всюду имеют разность фаз в  $90^\circ$ . В местах  $z = 0, \frac{\lambda_0}{2}, 2 \frac{\lambda_0}{2} \dots I = 0$  и в местах  $z = \frac{\lambda_0}{4}, 3 \frac{\lambda_0}{4}, 5 \frac{\lambda_0}{4} \dots \Phi = 0$ . Стоячие волны.

$R = \frac{1}{Cw} = L \cdot w$ . Это дает  $b = 0$ . Отраженная волна совершенно отсутствует, сопротивление нацело поглощает падающую волну;  $\frac{1}{Cw}$  и  $\Phi$  всюду имеют одинаковую величину и одинаковую фазу.

$R = 0$ . На конце провода замкнуты накоротко.  $b = -a$ . Этот случай отличается от  $R = \infty$  только тем, что в данной там картине следует переставить местами  $I$  и  $\Phi$ .

Перенос энергии на проводах для всех сечений имеет, конечно, одинаковое значение, как это непосредственно видно также из рис. 56. Именно, вплоть до численного множителя  $\frac{C \cdot w}{2}$  он определяется уравнением:

$$OF \cdot OE \cos \varphi = OF' \cdot OE = OG \cdot OH.$$

Он, например, всегда равен нулю, когда конец проводов замкнут только на самоиндукцию или емкость без омического сопротивления. В самом деле, тогда на конце проводов угол между фазами составляет  $+90^\circ$  или  $-90^\circ$ , что возможно только при  $|b| = a$ . Окружность в нашей диаграмме в этом случае всегда проходит через начальную точку  $O$ .

\* § 69. Волны вдоль проводов при конечном сопротивлении последних. Для практической телеграфии чрезвычайную важность представляет вопрос, какое изменение претерпевает описанное в предыдущем параграфе распространение волн в идеальных проводниках, если учитывать имеющееся во всех случаях омическое сопротивление проводов. Само собой ясно, что следствием выделения Джоулева тепла в проводе будет затухание волн. Кроме того, как мы увидим дальше, как затухание, так и скорость волны будет зависеть от частоты, и вместе с тем будет происходить искажение сигналов (например, разговора), передаваемых по проводам.

С точки зрения теории Максвелла, омическое сопротивление в проводнике означает появление продольной составляющей электрического поля;  $E_z$  нельзя теперь полагать равной нулю. Поэтому из восьми уравнений (174) предыдущего параграфа а), б), в), г) остаются неизменными только четыре уравнения, остальные же четыре нужно дополнить членом с одной из производных от  $E_z$  по  $x, y, z, t$ . Кроме того, поле теперь проникает в проводник, а потому теперь нельзя уже ограничиваться рассмотрением поля изолятора. Вследствие этого задача настолько усложняется, что строгого и общего решения дать нельзя. К счастью, во всех практически важных случаях задачу можно несколько упростить, вводя соответственные предположения относительно порядка величины  $E_z$ . Эти предположения можно выразить в кратком, хотя и не совсем правильном виде следующим образом:

Электрическое поперечное поле в изоляторе  $\gg$  продольного поля  $\gg$  поперечного поля в металле. (178)

Это соотношение нужно понимать так:

а) Так как уравнения (174 f, h) остаются справедливыми, то мы можем поперечное поле представить, как и раньше, уравнениями (относительно предположения  $\mathbf{H} = 0$ , см. ниже п. в):

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial\Phi}{\partial x}, & H_z &= \frac{\partial\Psi}{\partial y} \\ E_y &= -\frac{\partial\Phi}{\partial y}, & H_z &= -\frac{\partial\Psi}{\partial x}. \end{aligned}$$

Но тогда

$$\left. \begin{aligned} \text{div } \mathbf{E} &= 0 & \text{или} & \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \text{и} & & & \\ \text{rot } \mathbf{H} &= \frac{\varepsilon}{c} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial t} & \text{или} & \quad -\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}\right) = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (179)$$

$\Phi$  и  $\Psi$  уже не удовлетворяют, значит, уравнению (175b) предыдущего параграфа. Однако, если  $\frac{\partial E_z}{\partial z}$  и  $\frac{\partial E_z}{\partial t}$  достаточно малы, то, несмотря на это, в дальнейшем можно производить вычисление практически на основании этих уравнений.

Мы будем рассматривать задачу сначала в таком приближении и уже затем с помощью полученного решения дополнительно покажем, что предположение (178) в этом смысле действительно выполняется (см. дальше уравнение (183)).

б) Второе предположение (178):  $E_z \gg$  поперечного поля в металле необходимо, если, как мы всегда будем делать, мы желаем положить  $\mathbf{H}_z = 0$ . Дело в том, что в противном случае ток проводимости также имел бы поперечную составляющую, которая, со своей стороны, вызвала бы продольную составляющую  $\mathbf{H}$ .

Так как уравнение (167) для заряда  $e$  единицы длины проводов и тока  $I$  соблюдается здесь во всяком случае, то пренебрежение в (179) величинами  $\frac{\partial E_z}{\partial z}$  и  $\frac{\partial E_z}{\partial t}$  означает, что поперечное поле в изоляторе вполне соответствует вычисленному нами в § 67 полю для стационарного случая. В частности, мы можем тогда и здесь пользоваться без изменения введенными там величинами  $C$  и  $L_e$ . Следовательно,

$$IC(\Phi_1 - \Phi_2) = e$$

по прежнему означает заряд и

$$cL_e I = \mu(\Psi_1 - \Psi_2)$$

— поток индукции, проходящий через полосу, приложенную с обеих сторон у проводов, ширины 1. Совершенно так же, как в предыдущем параграфе (рис. 55), мы можем теперь вывести с помощью уравнения непрерывности и уравнения индукции закон распространения. Но при

обходе прямоугольника  $abcd$  теперь и стороны  $bc$  и  $da$  прибавляют свою часть к интегралу, а именно —  $E_{z_2}$  и  $E_{z_1}$ , так что мы получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial(\Phi_1 - \Phi_2)}{\partial z} + E_{z_1} - E_{z_2} &= -L_a \frac{\partial I}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (180)$$

$E_{z_1}$  и  $E_{z_2}$  представляют собой при этом значения  $E_z$  на поверхности проводника, а, значит, в силу непрерывности тангенциальной составляющей  $E$ , — и значения  $u$  поверхности внутри металла. До сих пор не говорилось о поле внутри провода. Учитывая его, мы должны исключить из последнего уравнения величины  $E_{z_1}$  и  $E_{z_2}$ . Для этого заметим, что внутри провода общая картина такова же, как (см. § 66) при скин-эффекте. Мы можем поэтому непосредственно воспользоваться выведенным там уравнением (162)

$$E_{z_1} = R_1 I + L_{i_1} \frac{\partial I}{\partial t}.$$

Конечно, величины  $R$  и  $L_i$  уже не являются теперь постоянными, но существенно зависят от частоты  $\omega$  переменного тока, как было показано. Поэтому наше решение имеет значение также только для синусоидального переменного поля.

Если обозначить теперь через

$$R_1 + R_2 = R \text{ и } L_{i_1} + L_{i_2} = L_i$$

омическое сопротивление и „коэффициент внутренней самоиндукции нашей двойной петли, то наше второе уравнение (180) получит вид

$$\frac{1}{C} \frac{\partial e}{\partial z} + R \cdot I + L_i \frac{\partial I}{\partial t} = -L_e \frac{\partial I}{\partial t}$$

и совместно с первым уравнением (180) даст

$$\frac{\partial^2 I}{\partial z^2} = CR \frac{\partial I}{\partial t} + C(L_i + L_e) \frac{\partial^2 I}{\partial t^2}. \quad (181)$$

Если обозначить полный коэффициент самоиндукции через  $L$

$$L_i + L_e = L,$$

то для волны с частотой  $\omega$  уравнение приобретет вид

$$\frac{\partial^2 I}{\partial z^2} = (i\omega CR - \omega^2 CL) I.$$

Это уравнение можно удовлетворить, положив  $I = I_0 \cdot e^{i(\omega t - \gamma z)}$ , что дает для  $\gamma$  значение

$$\gamma^2 = \omega^2 CL - i\omega CR. \quad (182)$$

Если разложить  $\gamma$  на вещественную часть  $\alpha$  и мнимую  $\beta$ :

$$\gamma = \alpha - i\beta, \quad (182a)$$

то

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\alpha}{\omega}\right)^2 &= \frac{CL}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(CL)^2 + \left(\frac{CR}{\omega}\right)^2}, \\ \left(\frac{\beta}{\omega}\right)^2 &= -\frac{CL}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(CL)^2 + \left(\frac{CR}{\omega}\right)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (182b)$$

При этих значениях наше решение будет иметь вид

$$I = I_0 \cdot e^{-\beta z} \cdot e^{i(\omega t - \alpha z)}.$$

$\frac{\omega}{\alpha}$  есть, следовательно, фазовая скорость нашей волны, а  $\frac{1}{\beta}$  — тот путь, по прохождении которого амплитуда волны ослабляется в  $e$  раз.

Чтобы ясней показать влияние поля, проникающего в металл, разложим в (182)  $L$  опять на  $L_e + L_i$  и воспользуемся соотношением

$$C \cdot L_e = \frac{1}{w^2},$$

которое остается справедливым и здесь; при этом  $w$  есть скорость света в диэлектрике. Тогда (182) позволяет написать

$$\left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2 = \frac{1}{w^2} \left\{ 1 + \frac{L_i}{L_e} - i \frac{R}{\omega L_e} \right\}. \quad (182c)$$

Числами

$$l = \frac{L_i}{L_e} \quad \text{и} \quad r = \frac{R}{\omega L_e} = \frac{R \cdot C \cdot w^2}{\omega} \quad (182d)$$

можно характеризовать „индуктивное“ и „омическое“ участие внутреннего поля металла в полном поле. Если обе величины малы по сравнению с единицей, то разложение в ряд

$$\sqrt{1 + l - ir} = 1 + \frac{1}{2} (l - ir) - \frac{1}{8} (l - ir)^2 + \dots$$

для слагающих  $\alpha$  и  $\beta$  от  $\gamma = \alpha - i\beta = \frac{\omega^2}{w^2} (1 + l - ir)$  дает

$$\frac{\alpha}{\omega} = \frac{1}{w} \left\{ 1 + \frac{l}{2} + \frac{r^2 - l^2}{8} + \dots \right\},$$

$$\frac{\beta}{\omega} = \frac{1}{w} \left\{ \frac{r}{2} + \frac{lr}{4} \right\}.$$

В первом приближении процентное запаздывание распространения волны равно  $\frac{l}{2}$  или  $\frac{r^2}{8}$ , в зависимости от того, которое из этих двух чисел больше;  $r$  же имеет то значение, что по прохождении одной длины волны  $\lambda_0 = \frac{w \cdot 2\pi}{\omega}$  амплитуды ослабляются в  $e^{r\pi}$  раз.

Рассмотрим еще порядок величины числа  $r$ , играющего решающую роль для затухания.

$$r = \frac{R}{\omega L_e} = \frac{R \cdot C \cdot w^2}{\omega}.$$



Если  $\lambda_0$  есть длина волны  $= \frac{w \cdot 2\pi}{\omega}$ , то, если  $R$  измерять в  $\frac{\text{ом}}{\text{см}}$  и положить  $w = 3 \cdot 10^{10} \text{ см/сек}$ ,

$$r = \frac{\lambda_{0\text{см}}}{2\pi} \cdot C \cdot \frac{R_{\text{ом/см}}}{9 \cdot 10^{11}} \cdot 3 \cdot 10^{10} = \frac{C}{2\pi} \cdot \lambda_{0\text{см}} \cdot R_{\text{ом/см}} \cdot \frac{1}{30},$$

Для медного провода с поперечным сечением в  $1 \text{ мм}^2$  при пренебрежении скин-эффектом:

$$R = 2 \cdot 0,00017 = 34 \cdot 10^{-5};$$

следовательно,

$$r = \frac{C}{2\pi} \cdot 1,1 \lambda_{0\text{км}},$$

где  $\lambda_{0\text{км}} = \lambda_{0\text{см}} \cdot 10^{-5}$  дает длину волны, измеренную в километрах. Так как порядок величины  $C$  — единица, то, например, при разговорных частотах  $\left(\frac{\omega}{2\pi} \sim 3000; \lambda_0 \approx \frac{3 \cdot 10^{10}}{3 \cdot 10^8} = 10^7 = 100 \text{ км}\right)$ , величина  $r$  вовсе не м а л а, но, напротив, так велика по сравнению с 1, что в этом случае можно пренебречь 1 и  $\frac{L_i}{L_e}$ . Поэтому мы имеем приближение  $r \gg 1$  или

$$\frac{\gamma}{\omega} = \frac{\sqrt{r}}{w} \cdot \sqrt{-i} = \sqrt{\frac{RC}{2\omega}} (1 - i) = \frac{\alpha - \beta i}{\omega}.$$

Следовательно,

$$\frac{\alpha}{\omega} = \sqrt{\frac{RC}{2\omega}} \quad \text{и} \quad \beta = \sqrt{\frac{\omega RC}{2}},$$

что можно также вывести непосредственно из (182a) и (182b) для случая  $L\omega \ll R$ .

Поэтому, если длина волны значительно больше, чем  $1 \text{ км}$ , то

$$\text{фазовая скорость} = \frac{\omega}{\alpha} = \sqrt{\frac{2\omega}{RC}}$$

$$\text{и дальность пробега} \quad \frac{1}{\beta} = \sqrt{\frac{2}{\omega RC}}.$$

После того, как решение

$$I = I_0 \cdot e^{i(\omega t - \gamma z)}$$

нашей задачи найдено, мы должны дополнительно исследовать границы его применимости. Для этого мы должны оценить порядок величины ошибки, допущенной нами вследствие пренебрежения правой стороной в уравнении (179). Зная  $I$ , мы тем самым на основании (180) знаем и величины  $e$  и  $E_{z_1} - E_{z_2}$ :

$$e = \frac{\gamma}{\omega} I$$

$$E_{z_1} - E_{z_2} = I \left[ -i\omega L_a + i \frac{\gamma^2}{\omega C} \right],$$

или, в силу  $L_e C = \frac{1}{\omega^2}$  и полученного из (182с) и (182d) значения  $\gamma$

$$\frac{\gamma^2 \omega^2}{\omega^2} = 1 + l - ir,$$

$$E_{z_1} - E_{z_2} = I \cdot i\omega L_e (l - ir).$$

Обратимся еще раз к уравнению (179) и рассмотрим значения  $\int \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds$  и  $\int \frac{\partial \Psi}{\partial n} ds$  для кривой, охватывающей первый проводник на расстоянии  $a$ . Для первой величины получается

$$\int \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds = \frac{4\pi}{\varepsilon} \cdot e + \int \frac{\partial E_{z_2}}{\partial z} dS,$$

если  $dS$  означает элемент поверхности, ограниченной этой кривой.  $E_z$  достигает своего наибольшего значения  $E_{z_1}$  на поверхности провода. Площадь  $\int dS$  по порядку своей величины равна  $a^2$ . Член, вносимый величиной  $\frac{\partial E_z}{\partial z}$  в поток сил  $\int \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds$ , можно, следовательно, считать незначительным, когда

$$e \gg a^2 \cdot \frac{\partial E_{z_1}}{\partial z},$$

где  $a$  указывает поперечный размер двойной проводки — скажем, расстояние между проводами. С другой стороны,  $\frac{c}{4\pi} \int \frac{\partial \Psi}{\partial n} ds = \frac{c}{4\pi} \int (\mathbf{H}ds)$  определяется суммой тока проводимости  $I$  и полного тока смещения  $\frac{\varepsilon}{4\pi} \int \frac{\partial E_z}{\partial t} dS \cdot A$ , следовательно, пренебрежение током смещения в (179) будет справедливо тогда, когда

$$I \gg a^2 \cdot \frac{\partial E_{z_1}}{\partial t}.$$

Если поставить в оба уравнения значения, полученные выше для  $e$  и  $E_{z_1}$ , то оба условия дают одно и то же требование

$$1 \gg a^2 \omega^2 L_e (ir - l), \quad (183)$$

или также, имея в виду величины  $r$  и  $l$ ,

$$1 \gg a^2 \omega R \quad \text{и} \quad 1 \gg a^2 \omega^2 L_i.$$

Рассмотрим первое из этих двух условий при невыгодном допущении относительно  $R$ , т. е. для случая сильного скин-эффекта. Пусть  $b$  — радиус провода; тогда согласно (164а) и (164б),

$$R = R_0 \cdot \frac{b \sqrt{\pi \omega \lambda}}{c \sqrt{2}}; \quad R_0 = \frac{1}{\pi b^2 \lambda}.$$

Наше условие, следовательно, гласит:

$$1 \gg \sqrt{\frac{\omega}{\lambda}} \cdot \frac{\omega}{c} \cdot \frac{a^2}{b}.$$

Оно могло бы быть нарушено исключительно большими значениями  $\omega$  (слишком короткие волны) или слишком малым радиусом  $b$  проводов. При коротких электрических волнах  $\omega \approx 10^7$  сек.<sup>-1</sup>;  $\lambda$  у металлов  $\approx 10^{17}$  сек.<sup>-1</sup>. Но тогда

$$\sqrt{\frac{\omega}{\lambda}} \cdot \frac{\omega}{c} \approx 10^{-5} \cdot \frac{10^{-3}}{3} \approx 3 \cdot 10^{-9} \text{ 1/см.}$$

При расстоянии между проводами  $a = 10$  см получается тогда условие для  $l$

$$\frac{l}{a^2} \gg 3 \cdot 10^{-9} \frac{1}{\text{см}}$$

$$b \gg 3 \cdot 10^{-7} \text{ см,}$$

которое нарушить невозможно по техническим основаниям.

\* § 70. **Комплексный вектор Пойнтинга в телеграфном уравнении.** Рассмотрим задачу предыдущего параграфа еще в другом виде; мы предположим, что для всех величин поля зависимость от  $t$  и  $z$  с самого начала задается множителем

$$e^{i(\omega t - \gamma z)}$$

Положим в уравнениях Максвелла опять  $\mathbf{H}_z = 0$ ; далее, для всякой функции поля  $\varphi$ , появляющейся в этой задаче, имеют место уравнения

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = i\omega \varphi \quad \text{и} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -i\gamma \varphi.$$

Мы не будем, однако, ограничивать наши уравнения случаем изолятора, а потому будем принимать во внимание также член  $\frac{4\pi}{c} \lambda \mathbf{E}$  для тока проводимости.

Тогда у нас имеются уравнения:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{a) } i\gamma \mathbf{H}_y = \frac{4\pi\lambda + i\varepsilon\omega}{c} \mathbf{E}_x; & \text{d) } \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial y} + i\gamma \mathbf{E}_y = -\frac{i\mu\omega}{c} \mathbf{H}_x \\ \text{b) } -i\gamma \mathbf{H}_x = \frac{4\pi\lambda + i\varepsilon\omega}{c} \mathbf{E}_y; & \text{e) } -i\gamma \mathbf{E}_x - \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial x} = -\frac{i\mu\omega}{c} \mathbf{H}_y \\ \text{c) } \frac{\partial \mathbf{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{H}_x}{\partial y} = \frac{4\pi\lambda + i\varepsilon\omega}{c} \mathbf{E}_z; & \text{f) } \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial y} = 0. \end{array} \right\} (184)$$

С помощью всего одной функции  $\Phi$  f), a) и b) удовлетворяются выражениями:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{E}_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \mathbf{H}_x = \frac{\varepsilon\omega - 4\pi i\lambda}{\gamma c} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ \mathbf{E}_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \mathbf{H}_y = -\frac{\varepsilon\omega - 4\pi i\lambda}{\gamma c} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} \end{array} \right\} (185)$$

Для  $\mathbf{E}_z$  получаются тогда два различных уравнения. Одно из c):

$$\mathbf{E}_z = -\frac{1}{i\gamma} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) \quad (186a)$$

и второе из d) и e). Введем для краткости для материальной постоянной величину  $w'$  по формуле:

$$w'^2 = \frac{c^2}{\mu\epsilon - 4\pi i \mu \frac{\lambda}{\omega}}. \quad (186b)$$

Тогда второе уравнение получит вид

$$E_z = -\frac{1}{i\gamma} \left( \gamma^2 - \left\{ \frac{\omega}{w'} \right\}^2 \right) \cdot \Phi. \quad (186c)$$

Из (186a) и (186c) для комплексной функции  $\Phi$  следует тогда дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \left\{ \gamma^2 - \left( \frac{\omega}{w'} \right)^2 \right\} \Phi, \quad (186d)$$

интегрирование которого, при соответствующих граничных условиях, могло бы дать комплексное „число волн“  $\gamma$ . Это интегрирование при произвольных заданных численных значениях  $w'$  для изолятора и металла натаскивается, однако, на большие трудности. Приближение, данное в предыдущем параграфе, сводится к тому, что в изоляторе полагают правую сторону (186d) = 0, в металле же, соответственно теории скин-эффекта § 66, считают  $\gamma^2$  малой по сравнению с  $\left( \frac{\omega}{w'} \right)^2$ . Тогда  $\gamma$  вообще отсутствует в дифференциальном уравнении. Оно получается дополнительно из пограничных условий (непрерывность тангенциальных составляющих  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ ).

Покажем еще, как можно непосредственно прийти к результатам предыдущего параграфа, пользуясь теоремой о комплексном векторе Пойнтинга

$$\mathbf{S}' = \frac{c}{8\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)$$

(ср. (159a) и (159b)). Для его составляющей по  $z$  получаем из (184a и b) непосредственно

$$S_z = \frac{c}{8\pi} \{ \mathbf{E}_x \mathbf{H}_y^* - \mathbf{E}_y \mathbf{H}_x^* \} = \frac{c}{8\pi} \cdot \frac{i\gamma c}{4\pi\sigma + i\epsilon\omega} (\mathbf{H}_x \mathbf{H}_x^* + \mathbf{H}_y \mathbf{H}_y^*).$$

Но  $\frac{1}{8\pi} (\mathbf{H}_x \mathbf{H}_x^* + \mathbf{H}_y \mathbf{H}_y^*)$  равняется удвоенной магнитной энергии  $U_{\text{магн}}$ . Беря интеграл  $S_z$  по поверхности, проведенной нормально к проводам, получим, следовательно, соотношение между полным потоком  $S'$  вектора Пойнтинга в направлении проводов и магнитной энергией поля, проходящей на сантиметр проводов. Так как в металле нужно положить  $\epsilon = 0$ , а в изоляторе  $\lambda = 0$ , то это соотношение будет

$$S' = \int S_z dS = \frac{\gamma c^2}{\epsilon\omega} \cdot 2U_{\text{магн. в изолят.}} + \frac{i\gamma c^2}{4\pi\lambda} 2U_{\text{магн. в металле.}} \quad (187)$$

Рассмотрим теперь два поперечных сечения наших проводов, находящиеся друг от друга на расстоянии в 1 см. Тогда  $-\frac{\partial S'}{\partial z}$  предста-

влетает собой часть „комплексного потока энергии“  $S'$ , сосредоточенную между двумя сечениями. И согласно (159b)

$$-\frac{\partial S'}{\partial z} = \text{джоулеву теплу} + 2i\omega (\text{маг. энерг. поля} - \text{эл. энерг. поля}) \quad (187a).$$

Найдем на основании этого уравнения приближенное значение „числа волн“, для чего поступим следующим образом.

При вычислении электрической энергии поля пренебрежем продольной составляющей  $E_z$  от  $E$ . Тогда согласно (184a и б)

$$\epsilon \mathbf{E} \mathbf{E}^* = \frac{\epsilon \gamma \gamma^* c^2}{(\epsilon \omega)^2 + (4\pi \lambda)^2} \mathbf{H} \mathbf{H}^*.$$

Мы можем даже ограничиться при учете электрической энергии поля одним изолятором и поэтому имеем

$$U_{el} = \frac{\gamma \gamma^* \cdot c^2}{\epsilon \omega^2} \cdot U_{\text{магн. в изоляторе}}$$

Кроме того, введем сопротивление, а также коэффициенты внешней и внутренней самоиндукции посредством уравнений

$$\text{джоулево тепло} = \frac{1}{2} R I I^*$$

$$U_{\text{магн. в и оляторе}} = \frac{1}{4} L_e I I^*$$

$$U_{\text{магн. в металле}} = \frac{1}{4} L_i I I^*.$$

Затем в (187a) нам нужна производная по  $z$ ;  $S'$  зависит от  $z$  посредством множителя

$$e^{-iyz} \cdot e^{iy^*z} = e^{-i(\gamma - \gamma^*)z},$$

так что

$$-\frac{\partial S'}{\partial z} = i(\gamma - \gamma^*) \cdot S'.$$

Здесь мы должны подставить  $S'$  из (187). При этом мы можем пренебречь второй частью (относящейся к металлу). Тогда из (187a) по сокращении на  $\frac{1}{2} I I^*$  получается

$$i\gamma(\gamma - \gamma^*) \cdot \frac{c^2}{\epsilon \omega} L_e = R + i\omega \left\{ L_i + L_e - \frac{\gamma \gamma^* \cdot c^2}{\epsilon \omega^2} \cdot L_e \right\}$$

или также

$$\frac{c^2}{\epsilon \omega^2} L_e \{ \gamma(\gamma - \gamma^*) + \gamma \gamma^* \} = -\frac{iR}{\omega} + L_i + L_e;$$

отсюда

$$\gamma^2 = \frac{\epsilon \omega^2}{c^2} \left\{ 1 + \frac{L_i}{L_e} - i \frac{R}{\omega L_e} \right\}$$

что находится в полном согласии с результатом, полученным и разобранным в предыдущем параграфе (уравнение (182c)).

**§ 71. Общие электродинамические потенциалы.** В этом и следующих параграфах мы ставим себе задачу вычислить поле, которое создается заданным распределением заряда и тока. Итак, пусть плотность тока  $\mathbf{i}(x, y, z, t)$  и плотность заряда  $\rho(x, y, z, t)$  даны как функции координат и времени. Мы ограничимся при этом распространением поля в пустоте, т. е. положим всюду  $\epsilon = \mu = 1$ .

Тогда поле определяется уравнениями

$$\left. \begin{array}{ll} \text{a) } \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{E}} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{i}; & \text{c) } \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{H}} = 0 \\ \text{b) } \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho; & \text{d) } \operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \end{array} \right\} \quad (188)$$

Из а) и б) прежде всего следует, что  $\mathbf{i}$  и  $\rho$  не могут быть заданы вполне произвольно, так как всюду и во всякое время должно удовлетворяться уравнение непрерывности

$$\operatorname{div} \mathbf{i} + \dot{\rho} = 0.$$

Мы удовлетворим (188d) тождественно, введя векторный потенциал  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (189a)$$

Но (188c) означает, что  $\mathbf{E} + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}}$  не имеет вихря; поэтому и (188c) удовлетворяется, если положить

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}} - \operatorname{grad} \varphi. \quad (189b)$$

Подставляя эти значения для  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}$ , из а) и б) получим

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{A}} + \frac{1}{c} \operatorname{grad} \dot{\varphi} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{i}, \\ -\frac{1}{c} \operatorname{div} \dot{\mathbf{A}} - \Delta\varphi &= 4\pi\rho. \end{aligned}$$

Уравнением (189a) дают только вихри вектора  $\mathbf{A}$ . Источниками же его мы можем еще распорядиться произвольно. Потребуем, чтобы

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = -\frac{1}{c} \dot{\varphi}. \quad (189c)$$

Вследствие этого последние уравнения в силу (65) получают простой вид:

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{i} \quad (190a)$$

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho. \quad (190b)$$

Для случая стационарного поля эти уравнения непосредственно переходят в подробно разобранные раньше уравнения электростатики и уравнения стационарного распределения токов (ср. для этого §§ 14 и 18). Распространение поля во времени учитывается в (190) тем, что

известный из статики оператор  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  дополняется членом  $-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ .

Общий интеграл (190а и б) тоже удается привести к виду, весьма сходному с выражением, имеющим место для стационарных полей. Этот вид, как мы сейчас убедимся, будет таков:

$$A(x, y, z, t) = \frac{1}{c} \iiint \frac{i(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{c})}{r} d\xi d\eta d\zeta \quad (191a)$$

$$\varphi(x, y, z, t) = \iiint \frac{e(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{c})}{r} d\xi d\eta d\zeta \quad (191b)$$

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}.$$

Эти уравнения показывают, что величина, вносимая элементом объема  $d\xi d\eta d\zeta$  в величину потенциала в точке наблюдения  $x, y, z$ , отличается от статического случая исключительно тем, что для плотности тока  $i$  и плотности заряда  $e$  нужно подставить те значения, которые были в  $d\xi, d\eta, d\zeta$  в момент времени  $t - \frac{r}{c}$ . Члены  $\frac{i}{cr}$  и  $\frac{e}{r}$ , вносимые точечным источником в величину потенциала в точке наблюдения, попадают туда только спустя время  $\frac{r}{c}$ . По этой причине  $A$  и  $\varphi$  называют также запаздывающими потенциалами.

Мы должны теперь еще убедиться в том, что (191) действительно представляет решение (190). Достаточно привести это доказательство для (191b). Разложим для этого область интегрирования на две части  $V_1$  и  $V_2$ , где  $V_1$  означает очень малый объем, содержащий точку  $x, y, z$ , а  $V_2$  — всю остальную область. Соответственно разложим

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \int_{V_1} \frac{1}{r} \cdot e_{t - \frac{r}{c}} \cdot dV + \int_{V_2} \frac{1}{r} \cdot e_{t - \frac{r}{c}} \cdot dV.$$

Но при интегрировании по очень малой области  $V_1$  запаздывание, очевидно, не играет никакой роли, так что в первом интеграле можно заменить  $e_{t - \frac{r}{c}}$  просто на  $e_t$ . Но тогда он не отличается больше ничем

от статического случая. Мы получаем таким образом  $\Delta\varphi_1 = -4\pi e(x, y, z, t)$ . Далее, для величины, зависящей только от  $r$ , согласно § 20 справедливо вообще

$$\Delta f(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rf),$$

а, следовательно,

$$\Delta\varphi_2 = \int_{V_2} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} e\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{c}\right) d\xi d\eta d\zeta.$$

Но для всякой функции  $f$  от  $t - \frac{r}{c}$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} f = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

Таким образом

$$\Delta \varphi_2 = \frac{1}{c^2} \int \int \int \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho \left( \xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{c} \right) d\xi d\eta d\zeta = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2},$$

так как  $\frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2}$  при переходе к пределу  $V_1 \rightarrow 0$  обращается в нуль.

Следовательно, действительно

$$\Delta \varphi = \Delta \varphi_1 + \Delta \varphi_2 = -4\pi \rho + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

Таким образом, даваемая уравнением (191b) функция  $\varphi$  действительно удовлетворяет дифференциальному уравнению (190b).

В следующем параграфе мы подробно рассмотрим данное здесь вполне общее решение Максвелловых уравнений в применении к частному случаю, именно — к сферическим волнам, испускаемым колеблющимся диполем.

**§ 72. Решение Герца.** Рассмотрим в этом параграфе специально поле, которое создается такими токами и зарядами, изменяющимися во времени, при которых вся эта система (передатчик) сосредоточена в весьма малой области около начала координат. Физически это означает следующее: размеры передатчика должны быть малы по сравнению с длиной волны  $\lambda_0$  производимого им излучения, а также малы по сравнению с расстоянием  $r$ , на котором мы исследуем поле передатчика. Тогда для потенциалов  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$ , из которых по (189a и b) выводится поле, всюду, за исключением лишь области, непосредственно примыкающей к началу координат, справедливы уравнения

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0 \quad (192a)$$

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (192b)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \dot{\varphi} = 0. \quad (192c)$$

Простейшее решение, пригодное для нашей цели, мы получим, если потребуем, чтоб  $\mathbf{A}$  зависело только от расстояния  $r$  от начала координат, и чтобы этот вектор всюду имел одинаковое направление. Выберем за ось  $z$  это направление и попробуем положить

$$A_x = 0, \quad A_y = 0, \quad \Delta A_z - \frac{1}{c^2} \ddot{A}_z = 0.$$

Так как  $A_z$  должно зависеть только от  $r$ , то

$$\Delta A_z = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r A_z)}{\partial r^2}$$



и решение его:

$$\mathbf{A}_x = \mathbf{A}_y = 0; \quad \mathbf{A}_z = \frac{\dot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{c \cdot r}, \quad (193)$$

где  $\dot{p}$  означает функцию аргумента  $t - \frac{r}{c}$ , остающуюся пока произвольной. Тогда в силу (192с) оказывается по существу определенным и  $\varphi$ :

$$\frac{1}{c} \dot{\varphi} = -\operatorname{div} \mathbf{A} = -\frac{\partial \mathbf{A}_z}{\partial z}.$$

Но

$$\frac{\partial \mathbf{A}_z}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{A}_z}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial z} = -\left(\frac{\ddot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{c^2 r} + \frac{\dot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{c r^2}\right) \cdot \frac{z}{r}.$$

Отсюда мы получаем

$$\varphi = \left(\frac{\dot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{c r} + \frac{p\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r^2}\right) \cdot \frac{z}{r}. \quad (193a)$$

Тем самым удовлетворяется и (192b).

Чтобы понять, далее, физический смысл этого решения, рассмотрим его для области, столь близкой к передатчику, что можно пренебречь запаздыванием ( $\frac{r}{c}$  по сравнению с  $t$ ) и членом с  $r$  в знаменателе по сравнению с членом с  $r^2$  в знаменателе. Если, например, как это большей частью имеет место в приложениях,  $p$  меняется во времени периодически, и, значит,

$$p = p_0 \cdot \sin 2\pi\nu\left(t - \frac{r}{c}\right) = p_0 \sin 2\pi\left(\nu t - \frac{r}{\lambda_0}\right).$$

то, согласно (193a),

$$\varphi = p_0 \left(\frac{2\pi\nu \cos 2\pi\left(\nu t - \frac{r}{\lambda_0}\right)}{c r} + \frac{\sin 2\pi\left(\nu t - \frac{r}{\lambda_0}\right)}{r^2}\right) \cdot \frac{z}{r}$$

$$\varphi = \frac{p_0}{r \cdot \lambda_0} \left\{ 2\pi \cos 2\pi\left(\nu t - \frac{r}{\lambda_0}\right) + \frac{\lambda}{r} \cdot \sin 2\pi\left(\nu t - \frac{r}{\lambda_0}\right) \right\} \cdot \frac{z}{r}.$$

Если выбрать здесь  $r \ll \lambda_0$ , то, действительно, можно зачеркнуть, во-первых,  $\frac{r}{\lambda_0}$  в тригонометрических функциях, во-вторых, член  $2\pi \cos$ .

Вблизи передатчика ( $r \ll \lambda_0$ ) наше решение будет, значит

$$\mathbf{A} = \frac{\dot{p}}{c r}; \quad \varphi = \frac{p}{r^2} \cdot \frac{z}{r}.$$

Но  $\frac{p}{r^2} \cdot \frac{z}{r} = -p \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r}\right)$  представляет собой электростатический потенциал электрического диполя, момент которого  $p$  направлен вдоль положительной оси  $Z$ . С другой стороны,  $\mathbf{A}$ , согласно закону Био-

Савара, является векторным потенциалом элемента тока  $Ids = \dot{p}$ . Следовательно, если представить себе на расстоянии  $ds$  два металлических шара с зарядами  $+e$  и соответственно  $-e$ , то они эквивалентны диполю момента  $eds$ . Если заряд изменится вследствие того, что шары будут соединены через искровой промежуток или проволокой, то в соединяющем участке  $ds$  пробежит ток  $I = \frac{de}{dt}$ .

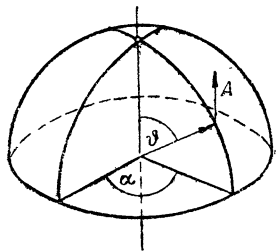


Рис. 57. Векторный потенциал линейного осциллятора. ▼

Таким образом, условие  $Ids = \dot{p}$  в этой схеме выполняется.

Если теперь мы разберем наше решение (193) и (193а) для любых значений  $r$ , то тем самым мы получим излучение волн диполя момента  $p = p(t)$ , находящегося в начале координат и ориентированного по оси  $z$ .

Для обсуждения значений  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , вычисляемых по (189а и б), введем полярные координаты  $r, \vartheta, \alpha$  и отложим ось  $z$  вдоль направления  $\vartheta = 0$ . Тогда прежде всего

$$\left. \begin{aligned} A_r &= \frac{\dot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{cr} \cos \vartheta \\ A_\vartheta &= -\frac{\dot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{c \cdot r} \sin \vartheta \\ A_\alpha &= 0 \\ \varphi &= \left\{ \frac{\dot{p}' t - \frac{r}{c}}{cr} + \frac{p\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r^2} \right\} \cos \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (193b)$$

Но согласно (189а)  $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$ , а потому по правилам § 20

$$\left. \begin{aligned} H_r &= 0, \quad H_\vartheta = 0 \\ H_\alpha &= \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r A_\vartheta) - \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (194a)$$

или

$$H_\alpha = \frac{\sin \vartheta}{r} \left\{ \frac{\ddot{p}}{c^2} + \frac{\dot{p}}{cr} \right\}.$$

Далее, для  $\mathbf{E}$  по (189б) имеем

$$E_r = -\frac{\ddot{p}}{c^2 r} \cos \vartheta + \left\{ \frac{\ddot{p}}{c^2 r} + \frac{2\dot{p}}{cr^2} + \frac{2p}{r^3} \right\} \cos \vartheta$$

или

$$\left. \begin{aligned} E_r &= 2 \cos \vartheta \left( \frac{\dot{p}}{cr^2} + \frac{p}{r^3} \right) \\ E_\vartheta &= \frac{\dot{p}}{c^2 r} \sin \vartheta + \left\{ \frac{\dot{p}}{cr^2} + \frac{p}{r^3} \right\} \sin \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (194b)$$

Это и есть поле нашего передатчика на любых расстояниях. Разберем его для двух предельных случаев  $r \ll \lambda_0$  и  $r \gg \lambda_0$ .

Вблизи передатчика ( $r \ll \lambda_0$ ) перевешивают члены с высшей степенью  $r$  в знаменателе, и потому

$$\mathbf{H}_a = \frac{\dot{p}}{cr^2} \sin \vartheta; \quad \mathbf{E}_r = \frac{2p}{r^3} \cos \vartheta; \quad \mathbf{E}_\vartheta = \frac{p}{r^3} \sin \vartheta. \quad (194c)$$

Как и следовало ожидать, согласно данному выше приближенному вычислению, это есть магнитное поле элемента тока  $Ids = \dot{p}$  и статическое поле диполя момента  $p$ .

На больших расстояниях от передатчика ( $r \gg \lambda_0$ ) действительными оказываются, наоборот, только члены с  $\frac{1}{r}$ . Это есть область волновой зоны, для которой, следовательно.

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{H}_r &= 0 & \mathbf{E}_r &= 0 \\ \mathbf{H}_\vartheta &= 0 & \mathbf{E}_\vartheta &= \frac{\ddot{p}}{rc^2} \sin \vartheta \\ \mathbf{H}_a &= \frac{\ddot{p}}{rc^2} \sin \vartheta, & \mathbf{E}_a &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (195)$$

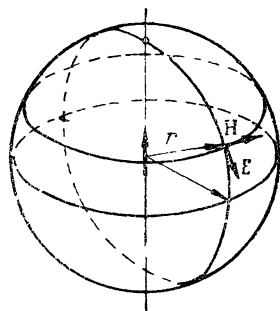


Рис. 58. Электрическое и магнитное напряжение в волновой зоне линейного осциллятора.

Поэтому в волновой зоне векторы  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}$  имеют одинаковую величину; они перпендикулярны друг к другу и к радиусу-вектору  $\mathbf{r}$ . Их величина падает от экватора к полюсу как  $\sin \vartheta$ . Но это — картина линейно поляризованного волнового излучения, которое распространяется от передатчика в направлении  $\mathbf{r}$ . Электрический вектор колеблется по касательной в меридианной плоскости, магнитный — по параллели.

Вычислим еме излучение  $|\mathbf{S}|$ , т. е. энергию, которая переносится данной в (195) сферической волной через поверхность сферы радиуса  $r$  за одну секунду. Между двумя широтами  $\vartheta$  и  $\vartheta + d\vartheta$  лежит площадь  $dS = 2\pi r^2 \sin \vartheta d\vartheta$ . Вводя вектор Пойнтинга

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \frac{c}{4\pi} \left( \frac{\ddot{p}}{rc^2} \right)^2 \sin^2 \vartheta,$$

получим

$$|\mathbf{S}_r| = \frac{c}{4\pi} \int \mathbf{S}_n dS = \frac{c}{4\pi} \cdot \left( \frac{\ddot{p}}{rc^2} \right)^2 \cdot 2\pi r^2 \int_0^\pi \sin^2 \vartheta \cdot \sin \vartheta d\vartheta.$$

Этот интеграл при подстановке  $\cos \vartheta = x$  дает

$$\int_{-1}^{+1} (1-x^2) dx = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3},$$

и, следовательно,

$$|\mathbf{S}_r| = \frac{2}{3 \cdot c^3} \cdot (\dot{p})^2_{t - \frac{r}{c}} \quad (196)$$

$|\mathbf{S}_r|$  зависит от радиуса  $r$  лишь постольку, поскольку излучение  $|\mathbf{S}_r|$  в момент времени  $t$  определяется состоянием передатчика в момент времени  $t - \frac{r}{c}$ .

Замечательно, что запаздывание в выражении (193) для  $\mathbf{A}$  совершенно необходимо для того, чтобы волна (195) получилась сферической. Сферическая волна получается как раз тогда, когда при дифференцировании по  $r$  принимают  $r$  во внимание только в комбинации  $t - \frac{r}{c}$ , а „кулоновское  $r$ “ в знаменателе рассматривают как постоянную. Наоборот, действие вблизи передатчика получается тогда, когда дифференцируют только по Кулоновскому  $r$ , рассматривая „Максвеллово  $r$ “ в числителе как постоянную.

**§ 73. Излучение линейного осциллятора.** При периодических процессах особенный интерес представляет среднее за время одного периода значение излучения. Очевидно, что для этого среднего значения запаздывание не играет никакой роли. При вычислении среднего по времени  $|\bar{\mathbf{S}}|$  передатчик можно рассматривать либо как осциллирующий диполь, либо как элемент тока. Представление диполя отвечает преимущественно требованиям атомной физики, где дипольный момент отдельных атомов является естественным исходным пунктом для вычисления их излучения. Наоборот, представление о передатчике, как об элементе тока, является более естественным при рассмотрении обычных антенн беспроводной телеграфии.

Если  $\nu$  есть циклическая частота колебаний диполя и  $p_0$  их амплитуда, то

$$p = p_0 \cdot \sin 2\pi\nu t$$

и

$$(\overline{\dot{p}})^2 = \frac{1}{2} p_0^2 \cdot (2\pi\nu)^4. \quad (197a)$$

С другой стороны, если  $l$  означает длину диполя, а потому также длину прямолинейного элемента тока, соединяющего полюсы, то, как мы видели выше,

$$\dot{p} = I \cdot l.$$

Поэтому, если ток пульсирует с амплитудой  $I_0$ :

$$I = I_0 \cdot \cos 2\pi\nu t; \quad \overline{I^2} = \frac{1}{2} I_0^2,$$

то

$$\ddot{p} = -2\pi\nu I_0 l \sin 2\pi\nu t,$$

откуда

$$(\dot{p})^2 = (2\pi\nu)^2 l^2 I^2. \quad (197b)$$

Это дает для  $|\bar{S}|$  два эквивалентных выражения

$$|\bar{S}| = \frac{p_0^2 \cdot (2\pi\nu)^4}{3c^3} \quad (198a)$$

и

$$|\bar{S}| = \frac{2}{3c^3} \cdot (2\pi\nu)^2 I^2 \bar{r}^2 = \frac{8\pi^2 I^2}{3c\lambda_0^3} \cdot \bar{r}^2. \quad (198b)$$

Для беспроводной телеграфии (198b) дает излучение антенны длины  $l$  при длине волны  $\lambda_0$  и эффективном токе антенны  $\sqrt{I^2}$ . Генератор колебаний должен кроме этого излучения доставлять еще выделяющееся в антенне Джоулево тепло

$$Q = R \cdot \bar{I}^2.$$

Поэтому в (198b) множитель при  $\bar{I}^2$  называют сопротивлением излучения антенны  $R_s$ . Тогда полная мощность генератора дается  $(R + R_s)\bar{I}^2$ , где  $R$  означает омическое сопротивление (с учетом скин-эффекта), а  $R_s$  дается выражением

$$R_s = \frac{8\pi^2}{3c} \cdot \frac{l^2}{\lambda_0^3} \text{ С. Г. С. единиц}$$

или

$$R_s = 790 \frac{l^2}{\lambda_0^3} \text{ ом } (l \text{ и } \lambda \text{ в см}).$$

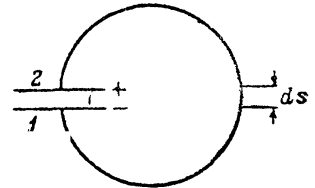


Рис. 59. Излучение замкнутого колебательного контура, согласно уравнению (200a), определяется расстоянием между пластинами 1 и 2 конденсатора.

При излучении света атомами, где нельзя говорить о непрерывном пополнении энергии, (198a) дает связанное с излучением ежесекундное уменьшение энергии и тем самым затухание испускаемого излучения, которое со своей стороны спектроскопически обнаруживается в виде расширения спектральной линии („ширина затухания“). Одновременно (198a) дает время затухания испускания света отдельного атома — величину, которая в квантовой теории имеет огромное значение, как средняя продолжительность возбужденных состояний атома.

До сих пор мы рассматривали лишь частное решение (193) общего колебательного уравнения (192). Для элемента тока  $I(t) ds$  оно будет

$$A = \frac{I \left( t - \frac{r}{c} \right) ds}{c \cdot r}. \quad (199)$$

Но, возвращаясь к общим выражениям (191) для  $A$  и  $\varphi$ , мы легко увидим, что в отношении процессов в волновой зоне это решение имеет гораздо более общее значение, если только сохраняется соотношение порядков величин

$$\text{размеры передатчика} \ll \lambda_0 \ll r. \quad (200)$$

Если проводник передатчика состоит из согнутой некоторым образом проволоки с поперечным сечением  $q$  и направлением оси  $ds$ , то в (191a)  $id\xi d\eta d\zeta = I \cdot ds$ , и мы получаем

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{I(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{c})}{r} ds.$$

Но если (200) выполняется, то как в числителе, так и в знаменателе можно заменить  $r$  на расстояние  $r_0$  точки наблюдения от начала координат; тогда получаем

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cr_0} \cdot \left\{ \int I ds \right\}_{t - \frac{r_0}{c}}.$$

Предположим в частности, что передатчик состоит из двух металлических тел 1 и 2, соединенных произвольно согнутой проволокой, и пусть емкость этих тел велика по сравнению с емкостью проводов. Тогда во всякий момент времени ток в различных сечениях проволоки имеет одинаковую величину. Поэтому

$$\mathbf{A}(x, y, z, t) = \frac{I(t - \frac{r_0}{c}) \cdot \int_1^2 ds}{cr_0}. \quad (200a)$$

Но это выражение отличается от (199) только тем, что вместо имеющегося там элемента  $ds$  здесь фигурирует вектор  $l = \int_1^2 ds$ , прямолинейно соединяющий начало и конец провода. Следовательно, только один этот вектор и определяет собой произвольное излучение. Наибольшее значение он имеет при прямых антеннах беспроводной телеграфии (разомкнутые колебательные цепи). Он исчезающе мал, когда проводящая ток проволока соединяет друг с другом обкладки конденсатора обычной конструкции (замкнутая колебательная цепь).

Этими позднейшими замечаниями оправдываются наши действия, когда мы, рассматривая (§ 61) цепь тока, состоящую из емкости и самоиндукции, пренебрегли излучением. С помощью последней формулы можно в каждом конкретном случае оценить ошибку, которую мы допускаем, когда пренебрегаем излучением по сравнению с выделением Джоулева тепла.

## Д. ОБ ЭНЕРГИИ И СИЛАХ В МАКСВЕЛЛОВОЙ ТЕОРИИ

### 1. ТЕРМОДИНАМИКА ЭНЕРГИИ ПОЛЯ

§ 74. Энергия поля как свободная энергия. В наших прежних соображениях (§§ 39 и 53) относительно связи между энергией поля и пондеромоторными силами мы принимали, что при достаточно медленном изменении энергии поля получаемая механическая и электрическая работа равна уменьшению энергии поля. Именно из этого допущения, а также из выражения

$$\frac{1}{8\pi} \mathbf{E}d\mathbf{D} + \frac{1}{8\pi} \mathbf{H}d\mathbf{B}$$

для изменения плотности энергии в рассматриваемом объеме мы могли вывести как пондеромоторные силы, так и закон индукции. При таком балансе энергии выделение тепла появлялось лишь в виде связанной с токами проводимости тепловой и химической отдачи — скажем, в виде Джоулева тепла или тепла Пельтье. Остановимся теперь подробнее на том, что происходит внутри не проводящего диэлектрика. В наших прежних выводах нигде не говорилось о выделении тепла в таком изоляторе. При таких обстоятельствах выводы эти остаются правильными только в том случае, когда к отдельным элементам объема при изменении их диэлектрической поляризации не подводилось и когда у них не отнималось энергии в виде тепла. Но необходимо считаться с возможностью, что, вообще говоря, температура термически изолированного материального объема может при его поляризации измениться. На первый взгляд для нашего прежнего баланса энергии отсюда не возникает никаких принципиальных трудностей. В самом деле, баланс можно было бы восстановить, если ввести добавочное требование, чтобы все электрические (а также магнитные) изменения состояния производились адиабатно. Правда, для этого пришлось бы при неоднородном поле положить теплопроводность вещества равной нулю, так как различно поляризованные элементы объема могут принять различные температуры. Но на деле такая попытка насильственного спасения прежней теории была бы в высшей степени нецелесообразна, и провести ее было бы чрезвычайно трудно. Прежде всего, в действительности все вещества обладают конечной теплопроводностью. Поэтому эксперименты, предпринимаемые для проверки теории, никогда не проводятся адиабатно, но, наоборот, по возможности изотермически, т. е. с полным выравниванием могущих появиться разностей температур. Но кроме того нужно отметить еще следующее. Диэлектрическая постоянная  $\epsilon$  в общем случае зависит от температуры. Обычно она падает с возрастанием температуры. Поэтому, если во время процесса температура меняется, то при вычислении энергии поля

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^E \epsilon E dE$$

никак нельзя уже рассматривать  $\epsilon$  как постоянную, даже если, при поддержании температуры постоянной, векторы  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$  будут друг другу строго пропорциональны. Основное выражение  $\frac{\epsilon}{8\pi} \mathbf{E}^2$  Максвелловой теории для плотности энергии не может, следовательно, ни в коем случае претендовать на общее значение. Но, с другой стороны, все наши представления относительно пондеромоторных сил базируются как раз на этом выражении.

Единственно разумный выход из этой трудности состоит в том, чтобы признать, что  $\frac{\epsilon}{8\pi} \mathbf{E}^2$  вообще представляет собой не плотность энергии, а плотность свободной энергии в термодинамическом смысле этого слова. Необходимо привести эту величину в соответствие со вторым началом термодинамики. Только тогда возможно

вообще оправдать в полном объеме сделанные ранее выводы. Итак, откажемся от предложенного выше дополнительного требования, чтобы прежние выводы относились к адиабатным процессам. Примем, наоборот, что появляющаяся в них электрическая (и магнитная) поляризация происходит и з о т е р м и ч е с к и. Тогда всюду, где поле изменяется, как у отдельных элементов объема, так и у всей системы, как целого, будут длительно отниматься или к ним будут подводиться те количества тепла, которые необходимы для постоянства температуры.

Рассмотрим особо, в связи с § 36, кубический сантиметр диэлектрика между пластинками конденсатора. К нему можно подвести энергию двояким образом: либо производя электрическую работу  $\frac{1}{4\pi} \mathbf{E}d\mathbf{D}$  (изменение заряда, находящегося на обкладках конденсатора), либо подведением тепла  $d'Q$ . Если не происходит каких-либо других изменений, то мы увеличили бы при этом энергию  $U$  системы конденсатора и диэлектрика на величину

$$dU = d'Q + \frac{1}{4\pi} \mathbf{E}d\mathbf{D}. \quad (201)$$

При адиабатном процессе ( $d'Q = 0$ ) мы пришли бы, конечно, к рассмотренному выше соотношению  $dU = \left(\frac{1}{4\pi} \mathbf{E}d\mathbf{D}\right)_{\text{адiab.}}$ . Согласно второму началу термодинамики, существует функция состояния  $S$ , называемая э н т р о п и е й, — функция такого рода, что при обратимых процессах

$$d'Q = TdS; \quad (201a)$$

иными словами при сообщении системе малого количества тепла  $d'Q$   $S$  увеличивается на величину  $\frac{d'Q}{T}$ .

Вследствие тождества

$$TdS = d(ST) - SdT$$

уравнение (201) можно написать в виде

$$d(U - TS) = -SdT + \frac{1}{4\pi} \mathbf{E}d\mathbf{D}. \quad (201b)$$

Если теперь мы зарядим конденсатор и з о т е р м и ч е с к и ( $dT = 0$ ), то мы, значит, изменяем свободную энергию

$$F = U - TS$$

на величину  $\frac{1}{4\pi} \mathbf{E}d\mathbf{D}$ . В случае  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$  получим

$$F = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\mathbf{E}} \mathbf{E}d\mathbf{D} = \frac{\epsilon}{8\pi} \mathbf{E}^2, \quad (201c)$$

где  $\epsilon$  может быть теперь любой функцией температуры.



Обобщим теперь (201). Назовем —  $d'A$  работу, затрачиваемую на систему при малом изменении. Тогда согласно первому началу

$$dU = d'Q + d'A. \quad (201d)$$

Согласно второму началу при обратимых процессах  $d'Q = TdS$ ; поэтому

$$d(U - TS) = -SdT + d'A. \quad (201e)$$

Отсюда следует, что при адиабатных процессах  $d'A = dU$ ; наоборот, при изотермических  $d'A = dF$ . В том смысле свободная энергия играет для изотермических обратимых процессов такую же роль, какую сама энергия играет при адиабатических процессах.

Этими соображениями наши прежние выводы получают оправдание; нужно только иметь в виду что они дают не баланс энергии вообще, а только баланс свободной энергии, и что общим принципом, служащим им основой, является не первое, а второе начало термодинамики.

С таким общим результатом в руках можно поставить себе задачу: действительно определить количество тепла, появляющееся при электрической и магнитной поляризации. Особенно интересует нас вопрос о том, каким образом собственно меняется при наших изотермических процессах величина самой энергии  $U$ , раз мы знаем, что все выводы, сделанные нами до сих пор, отосились лишь к свободной энергии.

**§ 75. Термические эффекты при постоянном объеме.** Применим основные уравнения (201d) и (201e) термодинамики к кубическому сантиметру вещества, энергия которого может изменяться, во-первых, благодаря подводу тепла  $d'Q$  и, во-вторых, благодаря совершению электрической или магнитной работы. Примем, что при этом удельный объем вещества заметно не меняется. Ограничимся далее случаем, когда векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$  во всяком месте друг другу параллельны; то же относится к  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{B}$ , так что с самого начала мы можем при вычислении говорить только об абсолютных величинах  $E, D, H, B$ . Тогда согласно первому началу (201d) принимает вид

$$dU = d'Q + \frac{1}{4\pi} E \cdot dD \text{ в случае электрического поля}$$

$$dU = d'Q + \frac{1}{4\pi} HdB \text{ в случае магнитного поля.}$$

На элементарных случаях плоского конденсатора § 30 и замкнутой катушки § 48 можно убедиться в том, что в написанных выше выражениях для энергии мы действительно имеем выражения для технической измеряемой, например, в ватт-секундах работы, в которых о виде функций  $B = B(H)$  и  $D = D(E)$  еще не сделано никаких допущений. Мы ограничимся в дальнейшем случае электрической поляризации, так как формулы, справедливые для аннигиляции, получаются простым изменением обозначения ( $H, B, \mu$  вместо  $E, D, \varepsilon$ ).

Введем еще вместо  $D$  электрическую поляризацию  $P$ , пользуясь уравнением:

$$D = E + 4\pi P;$$

тогда мы имеем

$$dU = d'Q + d \left( \frac{1}{8\pi} E^2 \right) + EdP.$$

Для упрощения разложим полную энергию на „вакуумную часть“  $\frac{1}{8\pi} E^2$  и на часть  $U'$ , принадлежащую веществу диэлектрика:

$$U = \frac{1}{8\pi} E^2 + U'. \quad (202a)$$

Тогда, следовательно,

$$dU' = TdS + EdP. \quad (202b)$$

Сначала мы не будем пользоваться предположением, что  $P$  прямо пропорциональна напряженности  $E$ ; пусть, напротив, вещество характеризуется тем, что поляризация

$$P = P(E, T)$$

известна из измерений как функция  $E$  и  $T$ . Наш вопрос состоит теперь в том, чтобы установить, какой вид имеет тогда функция

$$U' = U'(E, T).$$

Если решить (202b) относительно  $dS$  и представить себе, что  $U'$  и  $P$  выражены через  $E$  и  $T$ , то

$$dS = \frac{1}{T} \left( \frac{\partial U'}{\partial T} - E \frac{\partial P}{\partial T} \right) dT + \frac{1}{T} \left( \frac{\partial U'}{\partial E} - E \frac{\partial P}{\partial E} \right) dE. \quad (202c)$$

Для того, чтобы правая сторона представляла собой полный дифференциал функции  $S = S(E, T)$ , необходимо, чтобы выполнялось тождество

$$\frac{\partial}{\partial E} \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right) = \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\partial S}{\partial E} \right),$$

где  $\frac{\partial S}{\partial T}$  и  $\frac{\partial S}{\partial E}$  даются множителями при  $dT$  и  $dE$  с правой стороны последнего уравнения. Вычислением этого „условия интегрируемости“ получаем непосредственно:

$$\frac{\partial U'}{\partial E} - E \frac{\partial P}{\partial E} = T \cdot \frac{\partial P}{\partial T}. \quad (202d)$$

Этим уравнением вопрос об изменении  $U'$  при изотермическом изменении  $E$  решается в общем виде, так как функцию  $P(E, T)$  нужно рассматривать как данную эмпирически.

В частности, если функция  $P$  линейна относительно  $E$ , т. е. если

$$P(E, T) = \chi(T) \cdot E, \quad (202e)$$

то мы имеем вещество, у которого коэффициент электризации зависит от  $T$ , но не зависит от  $E$ . Это соответствует поведению большинства жидкостей. Тогда из (202d) получается

$$\frac{1}{E} \cdot \frac{\partial U'}{\partial E} = \chi + T \cdot \frac{d\chi}{dT} = \frac{d(\chi \cdot T)}{dT}. \quad (202f)$$

Здесь правая сторона не зависит от  $E$ . В силу

$$\frac{1}{E} \frac{\partial U'}{\partial E} \equiv 2 \cdot \frac{\partial U'}{\partial E^2}$$

получается

$$U'(E, T) = f(T) + \frac{1}{2} E^2 \left\{ \chi + T \cdot \frac{d\chi}{dT} \right\}, \quad (202g)$$

где  $f$  является совершенно неизвестной заранее функцией одной температуры; в частности она еще будет содержать теплоемкость вещества. Для полной плотности энергии мы получаем таким образом согласно (202a)

$$U = f(T) + \frac{1}{8\pi} E^2 \left\{ 1 + 4\pi\chi + T \cdot \frac{d(4\pi\chi)}{dT} \right\}$$

или, вводя диэлектрическую постоянную

$$\varepsilon = 1 + 4\pi\chi,$$

$$U = f(T) + \frac{\varepsilon}{8\pi} E^2 \left\{ 1 + \frac{T}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dT} \right\}. \quad (202h)$$

Пока мы рассматриваем только изотермические изменения, остающаяся еще неизвестной функция температуры  $f(T)$  не играет никакой роли. Следовательно, тогда плотность энергии в  $1 + \frac{T}{\varepsilon} \cdot \frac{d\varepsilon}{dT}$  раз больше плотности свободной энергии  $\frac{\varepsilon}{8\pi} E^2$ . Поэтому только в том случае, когда диэлектрическая постоянная не зависит от температуры,  $\frac{\varepsilon}{8\pi} E^2$  может рассматриваться как плотность энергии вообще.

У многих веществ коэффициент электризации обратно пропорционален  $T$ , т. е.  $\chi(T) = \frac{C}{T}$ . У таких тел  $\chi \cdot T$ , значит, не зависит от температуры. В этом случае согласно (202f)  $U'$  становится независимой от  $E$ . Плотность электрической энергии  $U - f(T)$  становится тогда равной не  $\frac{\varepsilon}{8\pi} E^2$ , а просто  $\frac{1}{8\pi} E^2$ !

Спрашивается теперь, какое количество тепла  $d'Q = TdS$  необходимо подводить к веществу, чтобы при изменении  $E$  сохранялось постоянство температуры. Оно получается непосредственно из (202c), если в нём положить  $dT = 0$  и принять во внимание уравнение (202d):

$$d'Q = T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_E \cdot dE. \quad (202i)$$

Следовательно, при справедливости уравнения (202e)

$$d'Q = \frac{1}{2} T \cdot \frac{d\chi}{dT} d(E^2).$$

При изотермическом увеличении поля от 0 до  $E$  единицей объема поглощается таким образом тепло

$$Q = \frac{1}{2} E^2 \cdot T \cdot \frac{d\chi}{dT}. \quad (202k)$$

Итак, если  $\chi$  при возрастании температуры падает, то электрическая поляризация связана с положительным тепловым эффектом, т. е. вещество выделяет теплоту.

Теплоемкости. Мы можем нагревать диэлектрик либо при постоянной поляризации  $P$  (не меняя, значит, его электрического состояния), либо при постоянной напряженности  $E$ . Последний случай экспериментально осуществляется наиболее просто, так как для этого достаточно лишь поддерживать постоянной разность потенциалов пластин конденсатора. Разность соответствующих теплоемкостей  $\gamma_P$  и  $\gamma_E$  определяется до конца, раз известна функция  $P(E, T)$ . Для вычисления  $\gamma_P$  нужно рассматривать  $U'$  в (202b) как функцию  $P$  и  $T$ . Тогда

$$d'Q = TdS = \left(\frac{\partial U'}{\partial T}\right)_P dT + \left\{ \left(\frac{\partial U'}{\partial P}\right)_T - E \right\} dP. \quad (202i)$$

При  $dP = 0$  получается, следовательно,

$$\gamma_P = \left(\frac{TdS}{dT}\right)_P = \left(\frac{\partial U'}{\partial T}\right)_P.$$

С другой стороны, из (202c) для  $dE = 0$  следует

$$\gamma_E = \left(\frac{\partial U'}{\partial T}\right)_E - E \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_E.$$

Но если в  $U' = U'(P, T)$  считать  $P$  функцией  $E$  и  $T$ , то

$$\left(\frac{\partial U'}{\partial T}\right)_E = \left(\frac{\partial U'}{\partial T}\right)_P + \left(\frac{\partial U'}{\partial P}\right)_T \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_E.$$

Отсюда

$$\gamma_E = \gamma_P + \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_E \left\{ \left(\frac{\partial U'}{\partial P}\right)_T - E \right\}.$$

Из (202i) следует далее как условие интегрируемости

$$\left(\frac{\partial U'}{\partial P}\right)_T - E = -T \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_P,$$

а потому

$$\gamma_E = \gamma_P - T \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_E \cdot \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_P. \quad (202m)$$

Если функция  $P(E, T)$  дана, то для остающейся еще неизвестной производной получается

$$\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_P = -\frac{\frac{\partial P}{\partial T}}{\frac{\partial P}{\partial E}},$$

так что окончательно имеем

$$\gamma_E = \gamma_P + T \cdot \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)^2}{\frac{\partial P}{\partial E}}. \quad (202n)$$

Полагая в частности

$$P = \chi(T) \cdot E$$

получаем

$$\gamma_E = \gamma_P + \frac{T}{\chi} \left(\frac{d\chi}{dT}\right)^2 \cdot E^2.$$

Если теперь, уточняя дальше, положить коэффициент электризации  $\chi$  обратно пропорциональным абсолютной температуре, т. е.

$$\chi = \frac{C}{T},$$

то

$$\frac{d\chi}{dT} = -\frac{C}{T^2} = -\frac{\chi}{T}$$

и

$$\gamma_E = \gamma_P + \frac{\chi}{T} \cdot E^2.$$

**§ 76. Термодинамическая теория электрострикции.** В этом параграфе мы применим оба начала термодинамики к схеме, представленной на рис. 35, стр. 99. Две пластинки  $A$  и  $B$  конденсатора соединены с полюсами гальванической батареи так, что между ними существует определенное однородное поле величины  $E$ . Пластинки частично погружены в диэлектрическую жидкость, которая, со своей стороны, помимо неподвижных стенок, ограничена поршнем, находящимся между пластинками; на него действует давление  $p'$ ; второй поршень с давлением  $p_0$  находится в пространстве, где поля нет. Пусть вся схема находится в термическом контакте с большим резервуаром тепла, с абсолютной температурой  $T$ . Тогда четыре указанные величины  $E$ ,  $p'$ ,  $p_0$ ,  $T$  очевидно не могут в состоянии равновесия быть независимыми друг от друга. Легко сообразить, что три из этих величин могут быть выбраны произвольно (например,  $E$ ,  $p_0$  и  $T$ ), но тогда возможно только одно значение для  $p'$ , если мы не хотим, чтобы вся жидкость ушла из конденсатора или, наоборот, вся в него втянулась. Следовательно, между четырьмя названными величинами может существовать одно и только одно соотношение. Найти это соотношение и является нашей целью в настоящем параграфе.

Введем следующие обозначения:

$$\left. \begin{array}{l} V_1 \text{—полный объем} \\ v_1 \text{—удельный объем} \\ m_1 \text{—масса} \end{array} \right\} \text{ части диэлектрика, находящейся между пластинками конденсатора.}$$

и  $V_0$ ,  $v_0$ ,  $m_0$ —для соответствующих величин части диэлектрика, в которой поля нет.

Пусть  $U$ ,  $S$ ,  $M$ —энергия, энтропия и масса всего диэлектрика. Тогда очевидно

$$V_1 = m_1 v_1; V_0 = m_0 v_0; M = m_1 + m_0. \quad (203a)$$

Пусть физическая природа диэлектрика определяется электрическим и термическим уравнениями состояния. Это значит, что известна зависимость поляризации  $P$  от напряженности, удельного объема и температуры, и аналогично зависимость давления  $p$  в свободной от поля части диэлектрика от удельного объема и температуры. Таким образом мы знаем две функции

$$P = P(E, v_1, T) \quad (203b)$$

и

$$p = p(v, T). \quad (203c)$$

Для обратимого изменения  $U$  общее уравнение (201d) теперь будет

$$dU = TdS + Ed(V_1P) - p'dV_1 - p_0dV_0. \quad (203d)$$

Замкнутая система находится в равновесии тогда, когда ее энтропия имеет наибольшее из всех возможных значений. Если, поэтому,  $S$  есть энтропия нашего диэлектрика,  $S^*$  при этом энтропия остальных систем, участвующих в нашей схеме (т. е. резервуара тепла, электрической батареи и приспособлений для поддержания давления  $p'$  и  $p_0$ ), то мы имеем равновесие, когда при заданных значениях  $T$ ,  $E$ ,  $p'$ ,  $p_0$  величина  $S + S^*$  имеет максимум, т. е. она больше, чем в случае, если жидкость вытечет из конденсатора или войдет в конденсатор. Такое движение означает изменение масс  $m_1$  и  $m_2$ , причем, однако, все время  $m_1 + m_2 = M$ . Мы имеем, следовательно, условие равновесия

$$\delta S + \delta S^* = 0 \quad (203e)$$

при

$$\delta m_1 = -\delta m_2 \text{ и } \delta T = \delta E = \delta p' = \delta p_0 = 0.$$

Рассматривая систему, обозначенную звездочкой, получим

$$T\delta S^* = -\delta U + E\delta(V_1P) - p'\delta V_1 - p_0\delta V_0.$$

В самом деле, как изменение энергии, так и отдельные величины работы всегда имеют у этой системы знак, противоположный знаку соответствующих величин диэлектрика при том же процессе.

Если подставить это выражение для  $\delta S^*$  в условие равновесия (203e), умножив последнее на  $-T$  и принять еще во внимание, что, в силу добавочного условия  $\delta T = \delta E = \delta p' = \delta p_0 = 0$ , эти четыре величины можно вносить под знак вариации  $\delta$ , то для указанной в (203e) вариации получается

$$\delta(U - TS - EV_1P + p'V_1 + p_0V_0) = 0. \quad (203f)$$

Величина, варьруемая по (203f), называется термодинамическим потенциалом  $\psi$ . Согласно (203d), для любого изменения  $\psi$  при обратимых изменениях  $T$ ,  $E$ ,  $p'$ ,  $p_0$  имеет место

$$d\psi = -SdT - V_1PdE + V_1dp' + V_0dp_0. \quad (203g)$$

С другой стороны, мы можем написать  $S$  в виде

$$S = m_1s_1 + m_0s_0,$$

где  $s_1$  и  $s_0$  означают энтропию единицы массы в поле и вне поля; в силу (203a) мы получаем тогда;

$$d\psi = m_1[-s_1dT - v_1PdE + v_1dp'] + m_0[-s_0dT + v_0dp_0].$$

Введем здесь потенциалы, относящиеся к единице массы (удельные)

$$\left. \begin{aligned} d\psi_1 &= -s_1dT - v_1PdE + v_1dp'; & \psi_1 &= \psi_1(T, E, p') \\ d\psi_0 &= -s_0dT + v_0dp_0; & \psi_0 &= \psi_0(T, p_0). \end{aligned} \right\} \quad (203h)$$

Тогда мы получаем для термодинамического потенциала выражение

$$\psi \equiv \psi(m_1, m_0, T, E, p', p_0) = m_1\psi_1 + m_0\psi_0$$

в виде функции шести переменных  $m_1, m_0, T, E, p'$  и  $p_0$ . Полный дифференциал этой функции от шести переменных совпадает с формулой (203g), справедливой для равновесных процессов только в том случае, если постоянно

$$\frac{\partial\psi}{\partial m_1} \delta m_1 + \frac{\partial\psi}{\partial m_2} \delta m_2 = 0$$

при

$$\delta m_1 + \delta m_2 = 0,$$

Но это дает

$$\psi_1(T, E, p') = \psi_0(T, p_0). \quad (203i)$$

Это уравнение содержит искомую общую связь между четырьмя переменными  $T, E, p'$  и  $p_0$ .

Рассмотрим теперь (203i) особо для изотермических изменений  $E, p', p_0$ . Другими словами, будем считать  $T$  заданной постоянной и рассмотрим связь между  $E, p'$  и  $p_0$ , даваемую (203i). В дифференциальной форме эта связь будет

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial E} dE + \frac{\partial\psi_1}{\partial p'} dp' = \frac{\partial\psi_0}{\partial p_0} dp_0$$

или, если подставить для фигурирующих здесь частных производных значения из (203h), то

$$-v_1 P \cdot dE + v_1 dp' = v_0 dp_0. \quad (203k)$$

Это простое уравнение описывает как электрострикцию (§ 40), так и электрические поверхностные силы (§ 41). Заметим прежде всего, что правую сторону в (203k), на основании термического уравнения состояния (203c), можно написать в виде полного дифференциала некоторой функции

$$f(v_0) = \int^v v \cdot \frac{\partial p}{\partial v} dv. \quad (203l)$$

С другой стороны,  $p'$  должно однозначно определяться через  $v_1$  и  $E$ , а, следовательно,

$$dp' = \frac{\partial p'}{\partial v_1} dv_1 + \frac{\partial p'}{\partial E} dE,$$

и поэтому, согласно (203k)

$$\left[ -v_1 P + v_1 \frac{\partial p'}{\partial E} \right] dE + v_1 \frac{\partial p'}{\partial v_1} dv_1 = df(v_0). \quad (203m)$$

Для того чтобы левая сторона также представляла полный дифференциал, необходимо, чтобы выполнялось условие интегрируемости

$$\frac{\partial}{\partial v_1} \left( -v_1 P + v_1 \frac{\partial p'}{\partial E} \right)_E = \frac{\partial}{\partial E} \left( v_1 \frac{\partial p'}{\partial v_1} \right)_{v_1},$$

а потому

$$\frac{\partial p'}{\partial E} = \frac{\partial (v_1 P)}{\partial v_1}. \quad (203n)$$

Возьмем электрическое уравнение (203b) в особом виде

$$P(E, T, v_1) = \chi(T, v_1) \cdot E. \quad (203o)$$

Тогда (203n) принимает вид

$$\frac{\partial p'}{\partial (E^2)} = \frac{1}{2} \frac{\partial v_1 \chi}{\partial v_1}$$

или, интегрируя,

$$p' = p(v_1) + \frac{1}{2} E^2 \cdot \frac{\partial (v_1 \chi)}{\partial v_1}, \quad (203p)$$

в полном согласии с результатами электродинамической теории § 41;  $p(v_1)$  представляет здесь давление, которое, согласно уравнению (203c), диэлектрик оказывал бы на стенку сосуда при отсутствии поля  $E$  и при удельном объеме  $v_1$ .

Если подставить в (203m) значения для  $P$  из (203o) и для  $p'$  из (203p), то имеем

$$\frac{1}{2} v_1 \left\{ -\chi + \frac{\partial (v_1 \chi)}{\partial v_1} \right\} d(E^2) + \left\{ v_1 \frac{\partial p(v_1)}{\partial v_1} + \frac{1}{2} E^2 \cdot v_1 \cdot \frac{\partial^2 (v_1 \chi)}{\partial v_1^2} \right\} dv_1 = d\{f(v_0)\},$$

или также [согласно (203l)]

$$d\left(\frac{1}{2} v_1^2 \cdot \frac{\partial \chi}{\partial v_1} \cdot E^2\right) + d\{f(v_1)\} = df(v_0).$$

Таким образом, для частного случая (203o) интегрирование (203k) выполнено до конца. Ибо очевидно, что

$$f(v_1) - f(v_0) = \int_{v_0}^{v_1} v \cdot \frac{\partial p}{\partial v} dv;$$

отсюда получается формула электрострикции

$$\int_{v_0}^{v_1} v \frac{\partial p'}{\partial v} dv = -\frac{1}{2} E^2 \cdot v_1^2 \cdot \frac{\partial \chi}{\partial v_1}, \quad (203q)$$

в полном согласии с выведенной ранее (104c) и подробно разобранный формулой. Вместо удельного объема  $v$  мы пользуемся там обратной плотностью ( $v = \frac{1}{\delta}$ ) и вместо коэффициента электризации  $\chi$  диэлектрической постоянной ( $\epsilon = 1 + 4\pi\chi$ ).

## II. ДЕЙСТВИЯ СИЛ ПРИ ПОЛЯХ, ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ ВО ВРЕМЕНИ

**§ 77. Максвелловы натяжения и принцип действия и противодействия.** При рассуждениях §§ 39, 53 относительно механических сил мы ограничивались неподвижными телами, находящимися в стационарном электромагнитном поле. В §§ 42 и 52 силовое воздействие,



которое оказывают две системы зарядов и материальных тел друг на друга, удалось представить в виде поверхностных сил на произвольно проведенной поверхности раздела. При этих силах требуемое третьим законом Ньютона равенство действия и противодействия выполняется несомненно, ибо при изменении направления нормали к элементу поверхности на обратное поверхностная сила, выводимая из тензора натяжений, также меняет свой знак.

Но что происходит с этими силами при быстро переменных полях? — Теория Максвелла-Герца принимает, что и при сколь угодно быстро переменном электромагнитном поле полную силу, действующую на ограниченную область, можно попрежнему представить поверхностной силой, выводимой из максвелловского тензора натяжений:

$$\mathbf{F} = \int dS \{ \mathbf{T}_{\text{эл.}} + \mathbf{T}_{\text{магн.}} \}. \quad (204a)$$

Если  $n$  означает направление внешней нормали  $dS$ , то составляющие  $\mathbf{T}_{\text{эл.}}$  и  $\mathbf{T}_{\text{магн.}}$  по  $x$  даются выражениями:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{T}_{\text{эл.}x} &= \frac{\varepsilon}{8\pi} \{ \mathbf{E}_x^2 - \mathbf{E}_y^2 - \mathbf{E}_z^2 \} \cos(\mathbf{n}, x) + \frac{\varepsilon}{4\pi} \mathbf{E}_x \mathbf{E}_y \cos(\mathbf{n}, y) + \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{4\pi} \mathbf{E}_x \mathbf{E}_z \cos(\mathbf{n}, z) \\ \text{и} \\ \mathbf{T}_{\text{магн.}x} &= \frac{\mu}{8\pi} \{ \mathbf{H}_x^2 - \mathbf{H}_y^2 - \mathbf{H}_z^2 \} \cos(\mathbf{n}, x) + \frac{\mu}{4\pi} \mathbf{H}_x \mathbf{H}_y \cos(\mathbf{n}, y) + \\ &\quad + \frac{\mu}{4\pi} \mathbf{H}_x \mathbf{H}_z \cos(\mathbf{n}, z) \end{aligned} \right\} \quad (204b)$$

Исследуем теперь, какие следствия вытекают из этого предположения для силы  $\mathbf{f}$ , отнесенной к единице объема; далее мы положим:

$$\mathbf{F} = \int \mathbf{f} dv. \quad (204c)$$

Пользуясь тождеством (135) и (135a), мы прежде всего получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{E}) - \frac{1}{8\pi} \mathbf{E}^2 \operatorname{grad} \varepsilon + \frac{1}{4\pi} (\operatorname{rot} \mathbf{E}) \times \varepsilon \mathbf{E} + \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \mathbf{H} \operatorname{div}(\mu \mathbf{H}) - \frac{1}{8\pi} \mathbf{H}^2 \operatorname{grad} \mu + \frac{1}{4\pi} (\operatorname{rot} \mathbf{H}) \times \mu \mathbf{H}. \end{aligned}$$

Эта сила  $\mathbf{f}$ , отнесенная к единице объема, составляется теперь очевидно из трех различных частей. А именно, принимая во внимание уравнения Максвелла.

$$\operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{E}) = 4\pi \rho; \operatorname{div}(\mu \mathbf{H}) = 0; \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\mu}{c} \dot{\mathbf{H}}; \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{i} + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{E}},$$

получаем

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_{\text{эл.}} + \mathbf{f}_{\text{магн.}} + \mathbf{f}_s, \quad (204d)$$

где

$$\mathbf{f}_{\text{эл.}} = \rho \mathbf{E} - \frac{1}{8\pi} \mathbf{E}^2 \operatorname{grad} \varepsilon \quad (204e)$$

$$\mathbf{f}_{\text{магн.}} = \frac{1}{c} \mathbf{i} \times \mathbf{B} - \frac{1}{8\pi} \mathbf{H}^2 \operatorname{grad} \mu \quad (204f)$$

$$\mathbf{f}_s = \frac{\varepsilon \mu}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}). \quad (204g)$$

Из этих трех составных частей для силы, отнесенной к единице объема, две первые известны из прежних выводов. Они отличны от нуля только там, где имеется материя или заряды. Таким образом, величину  $\mathbf{f}_{\text{эл.}} + \mathbf{f}_{\text{магн.}}$  можно действительно считать силой, приложенной к материи, как это мы и предполагали раньше. Новой, наоборот, является третья часть  $\mathbf{f}_s$ , характерная для полей переменных во времени. Она теснейшим образом связана с вектором потока энергии Пойнтинга

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}.$$

А именно

$$\mathbf{f}_s = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t}.$$

Особенность этой силы состоит в том, что она не связана с наличием материи. Максвелловы натяжения дают движущую силу, действующую на пустоту, где однако нет материи, которая могла бы прийти в движение.

Этот результат получил основное значение для дальнейшего развития теории. Первоначально (во времена Максвелла и Герца)  $\mathbf{f}_s$  интерпретировали как действительную силу, действующую на эфир. В то время, когда световой эфир и без того привыкли наделять механическими свойствами, такое объяснение не казалось странным. Третий закон Ньютона удовлетворяется выражением 204а. Закон о действии и противодействии для одной материи уже не справедлив.

Обратное действие эфира на материю можно непосредственно проверить на опыте, а именно на опыте с световым давлением. Пусть от источника света по направлению к зеркалу излучается ограниченная серия волн. Пусть расстояние от источника до зеркала настолько велико, что ранее, чем первая волна дойдет до зеркала, вся серия волн уже выйдет из источника. В то время как зеркало будет испытывать световое давление, определяемое величиной  $\mathbf{f}_s$ , источник света вообще уже перестанет действовать.

Таким образом, мы в самом деле имеем силу, действующую со стороны пустоты на зеркало, и вследствие равенства действия и противодействия такую же силу, действующую со стороны зеркала на пустоту.

С нашими современными представлениями понятие о вещественном эфире и о силах, к нему приложенных, несовместимо. Теории, принимаемые в современной физике (электронная теория и теория относительности), признают только такие силы, которые приложены к материи. Соответственно этому они приводят к отличному от (204) выражению для силы  $\mathbf{f}$ , отнесенной к единице объема. Различие состоит именно в том, что вычитается как раз та часть, которая только что давала нам силу, действующую на пустоту. Если обозначить результирующую силу (на единицу объема) индексом мат., то по теории относительности

$$\mathbf{f}_{\text{мат.}} = \mathbf{f}_{\text{эл.}} + \mathbf{f}_{\text{магн.}} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t}; \quad (205)$$

стоящее еще рядом с  $\mathbf{f}_{\text{эл.}} + \mathbf{f}_{\text{магн.}}$  слагаемое  $\frac{\epsilon\mu - 1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t}$  в пустоте обращается в нуль. При экспериментальном определении  $\mathbf{f}_{\text{мат.}}$  им, по причине его малости, всегда можно пренебречь. Для результирующей силы  $\mathbf{F}_{\text{мат.}}$ , которая по (205) действует на ограниченный объем, получается таким образом

$$\mathbf{F}_{\text{мат.}} = \int dS (\mathbf{T}_{\text{эл.}} + \mathbf{T}_{\text{магн.}}) - \frac{d}{dt} \int \frac{1}{c^2} \mathbf{S} dv, \quad (205a)$$

Если обозначить через  $\mathbf{G}_{\text{мат.}}$  количество движения (импульс) материи, содержащейся в рассматриваемом объеме, и через  $\mathbf{g}_{\text{мат.}}$  импульс на единицу объема, то

$$\mathbf{G}_{\text{мат.}} = \int \mathbf{g}_{\text{мат.}} dv.$$

Смысл  $\mathbf{F}_{\text{мат.}}$  состоит в том, что она определяет изменение во времени  $\mathbf{G}_{\text{мат.}}$ :

$$\mathbf{F}_{\text{мат.}} = \frac{d\mathbf{G}_{\text{мат.}}}{dt}$$

Подставляя сюда (205a), мы получим

$$\int dS (\mathbf{T}_{\text{эл.}} + \mathbf{T}_{\text{магн.}}) = \frac{d}{dt} \int dv \left( \mathbf{g}_{\text{мат.}} + \frac{1}{c^2} \mathbf{S} \right).$$

Применим это уравнение к полной системе, т. е. к такой системе, электромагнитное поле которой всюду находится на конечном расстоянии. Если теперь проинтегрировать по столь большому объему, что на его поверхности поле всюду равно нулю, то получим

$$\int \mathbf{g}_{\text{мат.}} dv + \int \frac{1}{c^2} \mathbf{S} dv = \text{const.} \quad (205b)$$

Но третий закон Ньютона гласит, что количество движения замкнутой системы не изменяется во времени. Если держаться этого положения, то согласно последнему уравнению величину

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_{\text{мат.}} + \frac{1}{c^2} \mathbf{S}$$

необходимо рассматривать как импульс в единице объема. Мы встречаемся здесь с важным результатом теории относительности, которая утверждает, что всякий поток энергии  $\mathbf{S}$  связан с распределенным в объеме импульсом

$$\mathbf{g}_s = \frac{1}{c^2} \mathbf{S} \quad (206)$$

(эквивалентность инертной массы и энергии).

Всякое электромагнитное излучение несет с собой импульс, определяемый уравнением (206).

Назовем  $\mathbf{g}_s$  приходившимся на единицу объема импульсом излучения и

$$\mathbf{G}_s = \int \mathbf{g}_s dv$$

полным импульсом излучения, содержащегося в  $v$ . Тогда согласно (205b) закон количества движения принимает вид:

Сумма

$$G_{\text{мат.}} + G_{\text{с}}$$

материального импульса и импульса излучения в замкнутой системе не изменяется во времени.

## Е. ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

### 1. ЗАДАЧИ ПО ВЕКТОРНОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ

1. Длина вектора  $A$   $|A|=5$ ; с осью  $Z$  он составляет угол в  $30^\circ$ ; его проекция на плоскость  $XU$  образует с осью  $X$  угол  $45^\circ$ . Проекция вектора  $B$  на ось  $Z$  будет  $B_z=4$ . Его проекция на плоскость  $XU$  имеет длину  $\delta$  и образует с осью  $X$  угол  $+120^\circ$ . Найти  $A+B$ . Найти длину этого вектора, его составляющие в декартовой системе и его углы с координатными осями.

2. Точка приложения силы  $F=(5, 10, 15)$  см передвигается из точки  $(1, 0, 3)$  см в точку  $(3, -1, -6)$  см. Какую работу совершает при этом  $F$ ?

3. Определить скалярное произведение двух пространственных диагоналей куба с ребром, равным единице. Какой угол образуют эти диагонали?

4. На единичных векторах  $i, j, k$  прямоугольной системы координат, как на ребрах, построен куб с объемом, равным единице. Образовать скалярное и векторное произведения двух диагоналей граней; обе диагонали исходят из начала координат; какой угол образуют они друг с другом? Какова величина одной из плоскостей тетраэдра, вписанного в этот куб?

5. Найти составляющие по прямоугольным осям вектора длины 3, который с отрицательной осью  $X$ , положительной осью  $Y$  и отрицательной осью  $Z$  образует равные углы; в октант, указанный ему этими условиями, он идет из начала координат.

6. Пусть  $A$  — вектор, проведенный из начала координат, и  $a_0$  — соответствующий единичный вектор. Пусть, далее,  $r$  — вектор, проведенный из начала координат в переменную точку  $P$ .

Показать, что

$$a_0 \cdot r = |A|$$

представляет собой уравнение той плоскости, которая проходит через конечную точку  $A$  и нормальна к  $A$ .

7. Нормаль, опущенная из начала координат на плоскость  $E$ , есть  $r=(2, 4, 6)$ . Через начало проходит прямая с направляющими косинусами  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ .

Найти координаты точки ее пересечения с плоскостью  $P$ .

8. Пусть  $e$  — единичный вектор и  $A$  — некоторый произвольный вектор; доказать формулу

$$A = e(A \cdot e) + e \times (A \times e)$$

и показать, что она дает разложение  $A$  на составляющие, из которых одна параллельна  $e$ , а другая перпендикулярна  $e$ .

9. Из начала координат проведен вектор  $(2, 2, 5)$ ; найти вектор, который проведен из точки  $P=(1, 2, 1)$  перпендикулярно к первому вектору.

10. Даны векторы  $a=(2, 1, 1)$  и  $b=(-1, 3, 2)$ . Найти составляющие осей той прямоугольной левой системы координат, у которой ось  $X$  имеет направление  $a$ , а ось  $Y$  лежит в плоскости  $a-b$ , с той же стороны от  $a$ , как и  $b$ .

11. Определить составляющие вектора  $r=(5, 8, 10)$  в координатной системе, определенной в предыдущей задаче.

12. Конечные точки трех векторов  $a, b, c$ , проведенных из начала координат, определяют некоторую плоскость. Каково ее расстояние от начала координат?

(Сначала надо составить скалярные произведения  $a, b$  и  $c$  с нормалью к плоскости, которые в отдельности равны искомому расстоянию, и затем,

пользуясь теоремой Крамера, решить эти уравнения относительно составляющих единичного вектора нормали к плоскости).

Каков геометрический смысл окончательной формулы?

*Указание.* Объем тетраэдра, образуемого тремя ребрами параллелепипеда, равен  $\frac{1}{6}$  объема параллелепипеда.

13. Тело вращается вокруг неподвижной оси; вектор поворота есть  $\mathbf{u} = (-50, +80, +100)$ ; скорость  $\mathbf{v}$  точки  $\mathbf{r} = (4, 5, 6)$  имеет при этом составляющую по  $X$   $v_x = 20$  и составляющую по  $Y$   $v_y = 30$ . Найти кратчайшее расстояние оси вращения от начала координат.

14. Твердое тело делает 300 оборотов в минуту вокруг оси, которая образует с осью  $X$  угол  $50^\circ$ , с осью  $Y$  угол  $70^\circ$  и направлена из начала координат в первый октант. Какова скорость точки  $\mathbf{r} = (4, 5, 6)$  см?

15. Конечные точки трех векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ , лежащих в одной плоскости и проведенных из начала координат, определяют треугольник. Какова его площадь, если  $\mathbf{a} = (5, 1)$ ;  $\mathbf{b} = (8, 6)$ ;  $\mathbf{c} = (2, 10)$ ?

16. Векторы  $\mathbf{a} = (6, 3, 1)$ ,  $\mathbf{b} = (3, 6, 1)$  и  $\mathbf{c} = (1, 3, 6)$  исходят из начала координат. Какова площадь треугольника, образованного их конечными точками?

17. По теореме Адамара для всякого детерминанта

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (a_{ik} \text{ вещественные})$$

справедливо неравенство

$$D^2 \leq \prod_{i=1}^n \left( \sum_{k=1}^n a_{ik}^2 \right) = (a_{11}^2 + a_{12}^2 + \dots + a_{1n}^2) (a_{21}^2 + a_{22}^2 + \dots + a_{2n}^2) \dots (a_{n1}^2 + a_{n2}^2 + \dots + a_{nn}^2).$$

Рассмотреть случай детерминанта с тремя строками, принимая элементы строки за составляющие некоторого вектора. Что тогда выражает собой это неравенство геометрически? Какую теорему геометрии на плоскости представляет оно собой, если его написать для детерминанта с двумя строками?

18. Сопоставим каждой точке пространственной кривой единичный вектор  $\mathbf{t}$ , который при прохождении кривой в определенном направлении имеет направление скорости. Он указывает, следовательно, одновременно направление касательной. Доказать, что  $\mathbf{t} \frac{d\mathbf{t}}{ds} = 0$  ( $s$  — длина дуги кривой, отсчитываемая от произвольной точки). Каков геометрический смысл  $\frac{d\mathbf{t}}{ds}$ ?

19. Пусть  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, проведенный из начала координат, и  $\mathbf{a}$  — постоянный вектор. Вычислить градиент скалярного произведения  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{r}$ .

20. Доказать формулу

$$\int_{(S)} \int (\text{grad } \varphi \times \text{grad } \psi) dS = \oint \varphi d\psi \quad (\text{по огр. кривой}).$$

*Указание.* Применить теорему Стокса и положить  $\mathbf{A} = \varphi \text{ grad } \psi$ .

21. Круговой диск вращается в плоскости  $P$  вокруг неподвижной точки с угловой скоростью  $\omega$ . Этим вращением каждой точке плоскости, лежащей внутри круга, сопоставляется вектор скорости  $\mathbf{v}$ . Какова величина  $\text{rot } \mathbf{v}$ ?

22. Точки плоскости вращаются вокруг некоторой неподвижной точки с угловыми скоростями, которые зависят от расстояния от центра вращения:  $\omega = \omega(r)$ . Каков должен быть вид функции,  $\omega = \omega(r)$ , чтобы поле скоростей было безвихревым?

23. Плоское центральное поле задано уравнением  $\mathbf{A} = \hat{r} \cdot f(|\mathbf{r}|) = rf(r)$ . Определить  $f(r)$  таким образом, чтобы в поле не было ни вихрей, ни источников.

24. Пространственное центральное поле дано вектором  $\mathbf{A} = r\mathbf{f}(|\mathbf{r}|) = r \cdot f(r)$ . Определить  $f(r)$  таким образом, чтобы в поле не было ни вихрей ни источников.

25. Прямоугольные составляющие вектора суть

$$A_x = y \frac{\partial f}{\partial z} - z \frac{\partial f}{\partial y}; \quad A_y = z \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial z}; \quad A_z = x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x},$$

где  $f$  есть заданная функция координат  $x, y, z$ . Представить  $\mathbf{A}$  в виде векторного произведения двух векторов и показать, что

$$\text{rot } \mathbf{A} = 0 \text{ и } \mathbf{A} \text{ grad } f = 0.$$

## II. ЗАДАЧИ ПО ЭЛЕКТРОСТАТИКЕ

26. С какой силой притягивались бы два равные и противоположные заряда, каждый в один кулон, на расстоянии в 1 км?

27. Положительное количество электричества  $+e$  равномерно распределено внутри шара радиуса  $a$ . Внутри этого роя зарядов находится отрицательный точечный заряд  $-e$ ; определить силу, действующую на этот точечный заряд, как функцию расстояния от центра шара.

28. Вычислить работу, которую нужно затратить, чтобы диполь  $\mathbf{m}$  из точки с напряженностью  $\mathbf{E}$  удалить в бесконечность. Пусть  $\alpha$  — угол между  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{m}$ . В частности, какую работу нужно затратить, чтобы удалить в бесконечность свободно вращающийся диполь?

29. Точечный заряд в 0,5 электростатических единиц находится на расстоянии в 1 см от большого куска вещества с плоской границей, и притом из: а) металла (проводящая плоскость); б) стекла, с диэлектрической постоянной 7. Какова в этих случаях сила, действующая на заряд?

30. В однородном электрическом поле  $\mathbf{E}$  находится металлический шар радиуса  $a$ . Как распределится на его поверхности индуцированный заряд? Каково было бы распределение свободного поверхностного заряда на изолирующем шаре с диэлектрической постоянной  $\epsilon$ ?

31. Какова величина силы, действующей между металлическим шаром радиуса  $R$ , с зарядом  $E$ , и малым телом с зарядом  $e$ , находящимся на расстоянии  $r$  от центра шара? — Показать, что шар и тело при некоторых обстоятельствах могут притягиваться и в том случае, когда  $E$  и  $e$  имеют одинаковый знак.

32. Какой заряд можно подвести к металлическому шару с диаметром в 10 см, если диэлектрическая прочность воздуха равна 20 000 вольт/см?

33. Какой минимальный радиус кривизны необходимо придать на углах проводящему стержню, заряженному до 10 000 вольт, если диэлектрическая прочность воздуха равна 20 000 вольт/см? Можно принять, что падение потенциала на поверхности приблизительно равно падению на шаре. Падение потенциала на поверхности ребра длины  $l$  ( $\gg r$ ), закругленного с радиусом  $r$ , принимается приближенно равным падению в центре эллипсоида вращения длины  $l$  и с малой полуосью  $\cdot r$ ; показать, что напряженность на ребре меньше, чем на угле закругленном с тем же радиусом.

34. Какова величина поверхностной плотности электрического заряда на поверхности земли в месте, где падение потенциала составляет 250 вольт/м? Какова величина силы, действующей здесь на 1 м<sup>2</sup> земной поверхности?

35. Висящий на трубке мыльный пузырь при открытой трубке стягивается под влиянием поверхностного натяжения, которое составляет 50 э/см<sup>2</sup>. Можно ли путем сильного заряжения пузыря предотвратить его от полного сжатия? При этом следует иметь в виду ограниченную диэлектрическую прочность воздуха 20 000 вольт/см. Если да, то при каком диаметре останется пузырь?

36. Замкнутый мыльный пузырь с диаметром 6,0 см заряжается индукционной машиной до 27 000 вольт, благодаря чему его диаметр увеличивается до 8,0 см. Какова величина поверхностного натяжения нашего мыльного раствора?

37. Очень длинный тонкий стержень с диэлектрической постоянной  $\epsilon$  помещается в однородное поле  $E_0$  параллельно направлению поля. Каковы величины  $E$  и  $D$  внутри стержня?

38. В протяженном диэлектрике с диэлектрической постоянной  $\epsilon$  имеется однородное поле; пусть напряженность  $= E$ . Какова величина напряженности в полости, если последняя: а) имеет форму очень длинного тонкого цилиндра, параллельного линиям поля; б) форму тонкой пластинки, нормальной к направлению поля; в) шарообразна (ср. § 34).

39. В плоский конденсатор (расстояние пластин  $d$ ), который соединен с батареей в  $V$  вольт, вдвигают стеклянные пластинки различных толщин (диэлектрическая постоянная  $\epsilon$ ). Как зависят напряженности в стекле и в остающемся воздушном слое, а также емкость конденсатора от толщины  $x$  стеклянной пластинки? Какова величина обеих напряженностей, если конденсатор сначала отделяется от батареи и только тогда вдвигается стеклянная пластинка?

40. а) С какой силой (на  $1 \text{ см}^2$ ) притягиваются обкладки плоского конденсатора при напряжении в 1000 вольт и расстоянии между пластинками в 1 мм? б) Какова величина силы, если после заряжения конденсатор отделить от батареи (1000 вольт) и наполнить керосином ( $\epsilon = 2,0$ )? в) Какова величина силы, если конденсатор сначала заполнить керосином и затем зарядить?

41. а) Какова величина силы, действующей на пластинки конденсатора предыдущей задачи, если после заряжения конденсатор отделить от батареи и вдвинуть парафиновую пластинку ( $\epsilon = 2,0$ ) толщины 1 мм, не соприкасаясь с обкладками? б) Определить силу, если сначала вдвинуть парафиновую пластинку, а затем зарядить конденсатор.

42. В Гауссовой системе мер источники электрического поля определяются соотношением  $\text{div } E = 4 \pi \rho$ . Единицы системы мер Heaviside-Lorentz'a (так называемой „рациональной“) определяются так, что множитель  $4\pi$  из этого соотношения выпадает; следовательно,  $\text{div } E_r = \rho_r$ . Каков будет в рациональной системе мер множитель пропорциональности в законе Кулона? Как связаны рациональные единицы заряда, напряженности, напряжения и емкости с Гауссовыми единицами?

43. Два конденсатора емкости которых  $C_1 = 0,5 \mu F$  и  $C_2 = 0,2 \mu F$ , соединяются последовательно и подключаются к постоянному напряжению 220 вольт. Какой заряд находится на их обкладках, и какова величина напряжений на обоих конденсаторах?

44. Два равные незаряженные в начале воздушные конденсатора соединяются последовательно и подключаются к батарее с напряжением  $V$  вольт. На какую величину изменится потенциал проволоки, соединяющей оба конденсатора, если один конденсатор заполнить жидкостью с диэлектрической постоянной  $\epsilon$ ?

45. Два незаряженные вначале конденсатора с емкостями  $C_1 = 1 \mu F$  и  $C_2 = 10 \mu F$  соединяются последовательно и подключаются к батарее, полюса которой по отношению к земле имеют потенциалы +100 вольт и -100 вольт. Провод, соединяющий оба конденсатора, заземляется. Какое количество электричества протекает при этом через заземленный провод?

46. Вычислить емкость единицы длины цилиндрического конденсатора (два очень длинные по сравнению с их радиусами концентрические цилиндры; радиус внутреннего цилиндра  $a$ , внешнего —  $b$ ). Исходить из того факта, что поверхности уровня равномерно покрытой зарядами прямой суть концентрические цилиндры.

47. Пусть для двух бесконечно длинных цилиндрических металлических тел задача о потенциале решена, т. е. найден потенциал  $\phi(x, y)$ , который на поверхности цилиндров принимает постоянные значения и всюду в промежуточном пространстве удовлетворяет уравнению Лапласа  $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$ . Как найти емкость системы двух цилиндров?

48. Для плоской задачи даны поперечные сечения двух цилиндрических проводников, и изображено семейство эквипотенциальных линий, так что между каждыми двумя соседними линиями имеется одна и та же разность потенциалов. Как вычислить из этого изображения взаимную емкость этих двух тел (с той степенью точности, которая возможна при ограниченном числе эквипотенциальных линий)?

49. Посредством функции  $w = u + iv = f(z)$  комплексной переменной  $z = x + iy$  каждой точке плоскости  $xy$  сопоставляется одно значение  $u = u(x, y)$  и одно значение  $v = v(x, y)$ . Показать: если существует

$$\lim_{z_1 \rightarrow z} \frac{f(z_1) - f(z)}{z_1 - z} = \frac{dw}{dz}$$

и, значит, что особенно важно, не зависит от пути, на котором  $z_1$  приближается к  $z$ , то как  $u(x, y)$ , так и  $v(x, y)$  удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

и то же соответственно для  $v$ .

Это значит: если 1 и 2 суть кривые, на которых, например,  $u$  принимает постоянные значения  $u_1$  и  $u_2$ , то  $u$  есть решение задачи о потенциале для плоского (цилиндрического) поля, которое создается двумя цилиндрическими металлическими телами с поперечными сечениями 1 и соответственно 2, когда последние имеют друг относительно друга напряжение  $u_1 - u_2$ . Если  $u$  умножить на соответствующую постоянную, то получается распределение потенциала для заданной разности потенциалов между 1 и 2.

50. Посредством комплексной функции  $w = u + iv = F(z) = F(u + iy)$  (для которой мы принимаем, что она имеет производную  $\frac{dw}{dz} \neq 0$ , ср. зад. 49)

каждой точке  $(x, y)$  плоскости  $z$  сопоставляется точка  $(u, v)$  плоскости  $w$ . В плоскости  $w$  дана система  $B$  проводников (точнее говоря, сечений цилиндрических проводников) и для этого случая решена задача о потенциале, т. е. найдена функция  $\varphi$  от  $u, v$ , которая на определенных линиях  $B$  принимает постоянные значения и удовлетворяет уравнению Лапласа. Пусть  $\varphi$  есть вещественная часть функции  $f(w) = \varphi + i\psi$ . Пусть, далее, в плоскости  $z$  дана система  $A$ , и для нее ищется решение задачи о потенциале. Показать: если известна функция  $F(z)$ , которая отражает плоскость  $z$  на плоскость  $w$  таким образом, что при этом фигура  $A$  переходит в фигуру  $B$ , то вещественная часть от  $f[F(z)] = \varphi[F(x + iy)]$  есть искомая потенциальная функция для системы  $A$ . — В каком соотношении находятся емкость двух проводников в  $A$  и емкость соответствующих им в  $B$ ?

51. Определить емкость (на сантиметр) двойного провода, т. е. двух параллельных цилиндров с радиусом  $r$  и расстоянием между центрами  $d (> r)$ ; для этого с помощью функции  $w = \frac{1}{z}$ , при подходящем выборе нулевой точки отображения перенесем концентрический цилиндрический конденсатор в такой двойной провод.

Емкость сантиметра длины цилиндрического конденсатора есть  $\frac{1}{2 \ln \frac{b}{a}}$ ,

если  $a$  и  $b$  суть радиусы внутреннего и соответственного наружного цилиндра. (При отображении посредством  $\frac{1}{z}$  из всех окружностей, которые не проходят через начало, получаются окружности; из окружностей, проходящих через начало координат, получаются прямые).

52. Так как  $\frac{1}{r}$  представляет собой решение уравнения потенциала  $\Delta\varphi = 0$ , то решениями  $\Delta\varphi = 0$  должны быть также функции

$$f = a \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right)$$

$$g = b \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{1}{r} \right)$$

$$h = c \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{1}{r} \right)$$



( $a, b, c$  суть постоянные). При каком расположении точечных зарядов вблизи начала координат создаются на большом расстоянии потенциалы  $f, g, h$ ?

*Указание.* Два точечных заряда для  $f$ , четыре точечных заряда для  $g$  и  $h$ .

### III. ЗАДАЧИ ПО ПОСТОЯННОМУ ТОКУ

53. Какова длина вольфрамовой нити в лампочке накаливания, если при 220 вольтах лампа потребляет 50 ватт, и диаметр нити составляет  $25 \mu$ ? Удельное сопротивление вольфрама приблизительно следует принять пропорциональным абсолютной температуре; при  $18^\circ\text{C}$  оно равняется  $0,056 \text{ ом}\cdot\text{см}$ . Температура нити пусть будет  $2500^\circ\text{abc}$ .

54. Какова величина тока в первый момент после включения вольфрамовой лампы на 50 ватт при 220 вольтах? Во сколько раз он больше рабочего тока? (необходимы данные см. в предыдущей задаче). Температура окружающего пространства пусть будет  $18^\circ\text{C}$ .

55. В медный провод с поперечным сечением  $1 \text{ мм}^2$  поставлен предохранитель из серебряной проволоки диаметром  $0,2 \text{ мм}$ . Вычислить приблизительно (пренебрегая теплоотдачей), сколько пройдет времени до момента, когда предохранитель расплавится, если при коротком замыкании идет ток в 20 ампер; каково будет нагревание медного провода в этот момент? Теплоемкость серебра  $0,055 \text{ кал/г } ^\circ\text{C}$ ; удельное сопротивление равно  $0,016 \cdot 10^{-4} \text{ ом}\cdot\text{см}$ ; точка плавления лежит при  $916^\circ\text{C}$ . Медь имеет теплоемкость  $0,091 \text{ кал/г } ^\circ\text{C}$  и удельное сопротивление  $0,017 \cdot 10^{-4} \text{ ом}\cdot\text{см}$ .

56. От 220-вольтового генератора идет к месту потребления, где одновременно горят две 100-ваттные лампы, двойная проводка длины 300 м с поперечным сечением меди  $2 \times 1 \text{ мм}^2$ . На сколько упадет напряжение на лампах, если включить утюг, потребляющий мощность 500 ватт?

57. К 220-вольтовой сети приключены: 6 лампочек накаливания на 220 вольт, 50 ватт; лампа накаливания на 8 вольт и 6 амперов с соответствующим добавочным сопротивлением и мотор, который при 220 вольтах дает  $\frac{1}{6} \text{ л. с.}$  и имеет

коэффициент полезного действия 75%. Какова величина сопротивления всей нагрузки, величина общего тока и общей мощности? Какова величина добавочного сопротивления восьмивольтовой лампы?

58. В электрическом чайнике при 220 вольтах и 3 амперах литр воды, имеющий первоначальную температуру  $18^\circ\text{C}$ , закипает в 11 минут. Каков его коэффициент полезного действия, т. е. сколько процентов подведенной энергии затрачивается на нагревание воды?

59. а) Амперметр имеет внутреннее сопротивление  $R$ . Каковы должны быть сопротивления шунтов, которые дают возможность увеличить область измерения в  $n$  раз? б) Вольтметр имеет внутреннее сопротивление  $R$ . Какую величину должны иметь добавочные сопротивления, позволяющие увеличить область измерения в  $n$  раз?

60. Имеется  $n$  аккумуляторов с внутренним сопротивлением  $R_i$  и электродвижущей силой  $V$ ; каждые  $k$  аккумуляторов соединяются последовательно, и полученные  $\frac{n}{k}$  групп соединяются параллельно. Чему должно быть равно  $k$ , чтобы в сопротивлении нагрузки  $R$  получить наибольшую мощность, и какова величина этой мощности?

61. Отброс гальванометра с вращающейся катушкой пропорционален току и числу витков  $n$  вращающейся катушки. Так как для катушки вращающейся катушки отведен определенный объем, то можно получить немного витков из толстой проволоки или много витков из тонкой проволоки; произведение из числа витков  $n$  и поперечного сечения вращающейся катушки  $q$  является приблизительно постоянным:  $n \cdot q = F$ . Какова должна быть обмотка вращающейся катушки, чтобы при данной электродвижущей силе  $V$  и внешнем сопротивлении  $R_a$  отброс гальванометра был максимальным?

62. Пусть известна емкость  $C$  системы из двух металлических тел произвольной формы (или емкость металлического тела, когда оно в поле одно). Пусть все пространство вне металлических тел будет заполнено средой с удельным сопротивлением  $\rho \text{ ом}\cdot\text{см}$ ; пусть  $\rho$  много больше, чем удельное

сопротивление металла, так что падением напряжения в металлических электродах можно пренебречь. Каково сопротивление  $R$  системы при прохождении тока от одного металлического тела к другому?

63. Аппарат заземлен с помощью полушарообразного металлического электрода радиуса  $r = 10$  см; шар опущен в землю так, что большой круг лежит на поверхности земли. Удельное сопротивление земли в данном месте пусть  $10\,000$  ом·см. Каково сопротивление заземления?

64. Элемент Даниэля состоит из двух концентрических цилиндров, медного и цинкового, с радиусами  $a$  и  $b$ ; пусть высота будет  $h$ . Удельное сопротивление кислого раствора медного купороса пусть будет  $\rho$  ом·см; каково „внутреннее сопротивление“ элемента? Емкость каждого сантиметра длины цилиндрического конденсатора  $\frac{1}{2 \ln \frac{b}{a}}$ , где  $a$  и  $b$  — радиусы внутреннего и соот-

ветственно наружного цилиндров.

65. Внутренность плоского конденсатора с расстоянием между пластинками  $d$  состоит из двух слоев, которые имеют толщины  $d_1$  и  $d_2$ , диэлектрические постоянные  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ , проводимости  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ ;  $d_1 + d_2 = d$ . К пластинам приложено напряжение  $V$ . Какова величина напряженностей  $E_1$  и  $E_2$  и смещений  $D_1$  и  $D_2$ ? Какова поверхностная плотность истинного и свободного заряда на плоскости раздела обоих слоев? Какова величина силы тока, проходящего через конденсатор? Рассмотреть предельный случай  $\lambda_1 = 0$ .

66. Плоский конденсатор заполнен веществом с проводимостью  $\lambda$  и диэлектрической постоянной  $\epsilon$ . При соприкосновении с клеммами батареи он мгновенно заряжается до напряжения  $V$ . Найти время релаксации, т. е. время, по истечении которого заряд (или напряжение) конденсатора уменьшится в  $e$  раз.

67. Уравнение  $\rho = \rho_0 e^{-\frac{4\pi\lambda}{\epsilon} t}$  (ст. 110), как видно по его выводу, справедливо вообще, если только в рассматриваемой области пространства  $\lambda$  и  $\epsilon$  постоянны. Если, например, определенное количество электричества в момент времени  $t=0$  концентрировалось внутри очень малой сферы, в то время как остальные места проводящей сферы не имели никаких зарядов, то это условие гласит, что все места, не заряженные вначале — даже пространство, непосредственно окружающее малую заряженную область, — во время затухания заряда в сфере постоянно будут оставаться электрически нейтральными. Если бы в сфере в момент времени  $t=0$  содержалось некоторое количество тепла, оно вело бы себя совсем иначе: оно растеклось бы по соседним местам в то время как первоначальный электрический заряд с т я н е т с я, так сказать, во внутрь себя, не заряжая соседних мест. Объяснить, в чем дело.

68. Очень большой шар с проводимостью  $\lambda$  и диэлектрической постоянной  $\epsilon$  находится в пустоте; пусть в его центре, как в предыдущей задаче, в момент времени  $t=0$  имеется определенный заряд внутри очень малого шара. Так как общий заряд всей системы должен оставаться постоянным, то заряд, экспоненциально исчезающий в центре, начинает появляться на поверхности большого уже в первый момент, независимо от величины радиуса. Требуется показать, что это явление (согласно теории относительности) все же нельзя использовать для того, чтобы передавать сигналы с бесконечно большой скоростью.

69. Большой шар радиуса  $b$  состоит из материала с проводимостью  $\lambda$  и диэлектрической постоянной  $\epsilon$ . На поверхности концентрического с ним малого шара с радиусом  $a$  распределен равномерно в момент времени  $t=0$  заряд  $Q$ . Вычислить выделяющееся джоулево тепло при растекании этого заряда и показать, что оно равно уменьшению электростатической энергии, происходящему вследствие растекания заряда.

#### IV. ЗАДАЧИ ПО ПОСТОЯННОМУ МАГНЕТИЗМУ

70. Вычислить напряженность, создаваемую диполем  $\mathbf{m}$  в конечной точке радиуса вектора  $\mathbf{r}$ , проведенного из диполя.

71. Магнитное поле земли можно с достаточным приближением представить как поле магнитного диполя. Какова величина момента этого диполя,

если за среднее значение горизонтальной напряженности на магнитной широте  $45^\circ$  принять  $H = 0,23$  эрстед? Каково должно быть отношение между горизонтальной напряженностью на магнитном экваторе и вертикальной напряженностью на магнитных полюсах?

72. Показать (при том же предположении, как и в предыдущей задаче), как зависит наклонение  $i$  от магнитной широты  $\beta$ ?

73. Молекулы парамагнитного газа представляют собой малые магнитные диполи момента  $\mu$ . В однородном магнитном поле  $H$  они установились бы в направлении поля, если бы им не мешало тепловое движение. Вследствие теплового движения в каждый момент времени имеются молекулы любой ориентации, но только число тех молекул, направление которых сильно отклоняется от направления поля, меньше. Распределение диполей вокруг направления поля дается формулой Максвелла-Больцмана

$$dn = A \cdot e^{-\frac{E}{kT}} d\omega.$$

Здесь  $dn$  есть число тех диполей, направления которых лежат внутри телесного угла  $d\omega$ ;  $E$  есть энергия такого диполя, который с полем  $H$  составляет угол  $\alpha$  ( $E = -\mu H \cos \alpha$ );  $k$  есть постоянная Больцмана  $= 1,36 \cdot 10^{-16}$  эв/°С; множитель пропорциональности  $A$  определяется тем, что интегрирование  $dn$  по всем направлениям пространства (по полному телесному углу  $4\pi$ ) должно дать общее число всех молекул. Какова величина магнитного насыщения

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{\text{магнитный момент}}{\text{магнитный момент 1 г газа, если все диполи}} \rightarrow \frac{1 \text{ г газа}}{\text{ориентированы по направлению поля}}$$

при температуре  $T$  и напряженности  $H$ ?

74. Результатом предыдущей задачи была „формула Ланжевена“

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = \text{ctg h } a - \frac{1}{a},$$

где

$$a = \frac{\mu H}{kT}.$$

Найти предельные значения  $\frac{\sigma}{\sigma_0}$  для  $a \ll 1$  и для  $a \gg 1$  и показать, что

формула Кюри  $\frac{\chi}{\delta} = \frac{C}{T}$  [уравнение (119b)] является хорошим приближением формулы Ланжевена для малых  $a$ . Как связаны  $\mu$  и  $\sigma_0$  с „постоянной Кюри  $C$ “? Вычислить магнитный момент грамм-молекулы из постоянной Кюри.

75. Пусть железный шар с радиусом  $a = 5$  см однородно намагничен до насыщения (идеально твердый магнит; для железа  $4\pi M_\infty = 22\,000$ ). Какова величина его дипольного момента? Каковы величины  $B$  и  $H$  в шаре? Как распределены на поверхности шара поверхностное расхождение  $M$  и плотность свободного тока? Каково наивысшее значение свободного тока в ампер/см?

76. Вычислить во внешнем пространстве поле железного шара, упомянутого в предыдущей задаче.

77. От диполя  $m_1$  к диполю  $m_2$  проведен радиус-вектор  $r$ . Какова величина энергии сосуществования обоих диполей?

78. Магнитная стрелка момента  $|m| = 100$  магнетостатических единиц плавает в горизонтальном положении на пробке в океане. Где она будет находиться в устойчивом равновесии и где в неустойчивом? Какова величина разности энергии между этими двумя положениями? Ответить на этот вопрос также для случая, когда магнитная стрелка воткнута в пробку вертикально. Магнитное поле земли нужно рассматривать, как и раньше, как поле диполя, момент которого равняется  $8,3 \cdot 10^{25}$  магнетостатических единиц.

79. От диполя  $m_1$  к диполю  $m_2$  проведен радиус-вектор  $r$ . Какая сила действует на  $m_2$ ? Как зависит сила, действующая между двумя малыми свободноподвижными магнитными стрелками, от расстояния между ними?

## V. ЗАДАЧИ ПО ЭЛЕКТРОМАГНИТИЗМУ

80. На железное кольцо с диаметром  $d = 20$  см и поперечным сечением  $q = 10$  см<sup>2</sup> намотано 600 витков; какова величина потока индукции  $\int B_n dS$  в кольце, если через обмотки идет ток  $i = 1,0$  А? Пусть  $\mu$  будет равно 500.

81. Железное кольцо предыдущей задачи имеет междужелезный слой ширины  $\delta$  см, однако не настолько широкий, чтобы нужно было в нашей задаче учитывать рассеяние силовых линий в слое. Как зависит поток индукции от  $\delta$ ? Какова его величина при  $\delta = 0,1, 1$  и  $5$  мм?

82. Вычислить энергию поля в железе, энергию поля в междужелезном пространстве, полную энергию поля и коэффициент самоиндукции (в генри) железного кольца с прорезом, указанного в предыдущей задаче, для трех указанных там прорезов.

83. С какой силой притягиваются полюса прорезанного железного кольца задачи 80? Разобрать баланс энергии при сближении полюсов (упругая энергия в железе при этом не учитывается).

84. С какой силой (на 1 см) отталкиваются провода двойной проводки, находящиеся на расстоянии 30 см, при токе в 50 А?

85. Гальванометр с вращающейся катушкой имеет квадратную катушку с размером сторон 2 см и 100 витками; катушка вращается вокруг вертикальной оси. Крутящий момент подвеса равен  $10^{-2}$  э вес·см/град. угла. Вертикальные стороны катушки находятся в поле 1000 эрстед, которое по отношению к оси вращения направлено радиально. Какова величина углового отклонения на миллиампер? Какому току соответствует отклонение в 1 мм на шкале, удаленной на 2 м, если инструмент используют как зеркальный гальванометр?

86. Струнный гальванометр состоит из вертикально натянутой тонкой, проводящей ток проволоки, находящейся в однородном горизонтальном магнитном поле. Отклонение оси проволоки в направлении, перпендикулярном к силовым линиям, наблюдается с помощью микроскопа. Каково это отклонение, если сила тока  $I = 1$  мА, длина проволоки = 5 см, (упругое) натяжение проволоки = 0,2 э веса и напряженность магнитного поля  $H = 500$  эрстед? Проводящая ток проволока имеет форму параболы с уравнением относительно вершины:  $y = \frac{p}{2Z} x^2$ , где  $p$  есть поперечная нагрузка на единицу длины, а  $Z$  — продольное натяжение.

87. Прямой провод длины и направления  $s$  движется со скоростью  $u$  в магнитном поле  $B$ . Его концы соединены посредством подвижных контактов с неподвижным проводником, который вместе с ним образует замкнутую цепь. Какова величина индуцированной электродвижущей силы в этой цепи (в вольтах)?

88. Железнодорожные рельсы изолированы друг от друга и от земли (например, посредством пропитанных маслом шпал) и соединены через милливольтметр. Каково будет показание инструмента, если по рельсам проходит поезд со скоростью 100 км/час? Вертикальное напряжение магнитного поля земли пусть равно 0,15 эрстед; расстояние между рельсами при нормальной колее равно 1435 мм.

89. Кольцо из медной проволоки с диаметром в 20 см и поперечным сечением проволоки в 1 мм<sup>2</sup> вращается в поле земли вокруг вертикальной оси с 300 об/мин. Сколько джоулева тепла выделяется в минуту? Какова величина среднего момента, необходимого для вращения кольца, и какова величина максимального момента вращения?

90. Как зависит сила тока в медном кольце предыдущей задачи от угла  $\omega t$  между нормалью к кольцу и полем земли? Определить величину силы поля, создаваемой этим током в центре кольца, как функцию  $\omega t$ . Найти величину  $m$  направления результирующей напряженности в центре кольца в зависимости от  $\omega t$ . На какой угол отклонится помещенная здесь магнитная стрелка?

91. Для гальванометра с вращающейся катушкой известны: 1) сопротивление  $R$ , ширина  $b$ , высота  $l$  и число витков  $n$  вращающейся катушки; 2) напряженность  $H$  (радиальная) в воздушном промежутке; 3) полупериод колебания при разомкнутых клеммах; 4) отклонение  $C$  в угловых градусах, отнесенное к 1 амперу. Какое внешнее сопротивление  $R_a$  необходимо для предельно-аперриодических отклонений гальванометра?

92. Дроссельная катушка без сердечника с самоиндукцией 0,3 генри и действующим сопротивлением 20 ом присоединится к переменному напряжению 220 вольт (эффект.) и частотой 50 герц. Какое количество тепла (в калориях) выделится в минуту в катушке?

93. Сопротивление в 10 ом, катушка с самоиндукцией в 0,5 генри и конденсатор с емкостью 0,5 микрофард присоединены последовательно к синусоидально-переменному напряжению, эффективное значение которого — 220 вольт а частота — 50 герц. Какова величина эффективного тока, каков сдвиг фазы тока относительно напряжения, какова величина эффективной и безваттной мощности?

94. Напряжение генератора переменного тока не является чисто синусоидальным, но наряду с основным колебанием частоты  $\nu$  содержит еще гармоническое колебание третьего и седьмого порядка (частоты которых, следовательно,  $3\nu$  и  $7\nu$ ). Пусть амплитуда гармонического колебания третьего порядка составляет 5%, амплитуда колебания седьмого порядка — 1% амплитуды основного колебания. Каковы амплитуды двух гармонических колебаний высшего порядка (выраженные в процентах основной амплитуды) у тока, который возникнет, если замкнуть генератор: а) через дроссельную катушку с ничтожным омическим сопротивлением и б) через конденсатор?

95. а) Три проводника соединены друг с другом звездочкой; по ним идут синусоидально-переменные токи одинаковой частоты и амплитуды, но фаза у каждого проводника по отношению к предшествующему сдвинута на  $\frac{2\pi}{3}$  („соединение звездой“ трехфазной системы). Показать, что сумма токов, сходящихся в точке соединения, во всякий момент равна нулю. б) Три катушки расположены звездообразно, симметрично относительно центра, в котором пересекаются их оси. По ним идут токи трехфазной системы. Каждая катушка создает в центре звезды синусоидально-переменное во времени магнитное поле с амплитудой  $H$ ; направление поля совпадает с осью катушки; поля, создаваемые тремя катушками, по своей величине во времени и по своему направлению в пространстве сдвинуты каждое относительно других на  $\frac{2\pi}{3}$ . Как меняется во времени результирующая напряженность в центре „звезды“?

96. Дроссельная катушка с коэффициентом самоиндукции  $L = 1$  генри и сопротивлением  $R = 1$  ому приключается в момент времени  $t = 0$  к батарее с постоянной электродвижущей силой  $V$ . Определить, как ток будет изменяться во времени. Сколько пройдет времени до момента, когда ток разойдется до 1%?

97. Резонатор (какие раньше часто применялись для обнаружения электрических колебаний) состоит из кольца радиуса  $R = 5$  см из медной проволоки (диаметр  $2r = 1$  мм); в кольце сделан прорез, и к обоим концам проволоки приделаны круглые параллельные металлические пластинки (с диаметром  $a = 5$  см), которые в качестве обкладок плоского конденсатора представляют емкость цепи. Если резонатор находится в переменном поле, частота которого примерно совпадает с частотой собственных колебаний резонатора, то в малом искровом промежутке, находящемся между пластинками, будут проскакивать искры. Каково должно быть расстояние между пластинками, чтобы обнаружить электрические волны с длиной волны  $\lambda = 10$  м?

98. а) Энергия солнечной радиации, попадающая в 1 минуту на площадку земной поверхности, нормальную к лучу, величиной в  $1$  см<sup>2</sup>, составляет примерно 2,2 кал (солнечная постоянная\*). Вычислить среднее квадратичное значение электрической (в вольт/см) и магнитной напряженностей ( $\cdot$  эрстедах) в солнечном свете. б) Каково среднее квадратичное значение электрической и магнитной напряженностей в излучении 10-ваттной лампы на расстоянии 1 м, если предположить, что лампа всю подводенную к ней энергию отдает в виде лученспускания?

99. Кольцо, по которому проходит ток, создает на большом расстоянии такое же поле, как „магнитный диполь“. Требуется, основываясь на этой эквивалентности и применив уравнения Максвелла, вычислить из формул для колеблющегося электрического диполя поле, которое создается на большом расстоянии катушкой, по которой проходит переменный ток (излучение рамочной антенны).

100. Плоская волна

$$E_y = a \sin 2\pi\nu \left( t - \frac{x}{c} \right)$$

$$H_z = a \sin 2\pi\nu \left( t - \frac{x}{c} \right)$$

падает при  $x=0$  на нормальную к оси  $X$  плоскую поверхность проводника, простирающегося вправо до бесконечности. Каково производимое ею световое давление? Какое давление (в  $\text{кг}/\text{см}^2$ ) производит солнечная радиация на земную поверхность (при нормальном падении и пренебрежении отражением)?

Указание. Значение постоянной солнечной радиации см. в задаче 97.

101. Внутри поглощающего тела вектор  $\mathbf{E}$  световой волны создает плотность тока  $\mathbf{j}$ , которая совместно с вектором  $\mathbf{H}$  вызывает силу, на единицу объема,  $\mathbf{F} = \frac{1}{c} (\mathbf{j} \times \mathbf{H})$ . Показать, что световое давление  $p$ , упомянутое в предыдущей задаче, на основании уравнений Максвелла тождественно с интегралом

$$\text{от } \mathbf{F} \text{ по объему } \left( p = \int_0^{\infty} F_x dx = \frac{a^2}{8\pi} \right).$$

### РЕШЕНИЯ

$$\begin{aligned} 1. \quad & (\mathbf{A} + \mathbf{B})_x = -1,23; & \alpha &= 96,5^\circ \\ & (\mathbf{A} + \mathbf{B})_y = +6,97; & \beta &= 50,4^\circ \\ & (\mathbf{A} + \mathbf{B})_z = +8,33; & \gamma &= 40,3^\circ \\ & |\mathbf{A} + \mathbf{B}| &= 10,9; \end{aligned}$$

2.  $A = -135$  *кг. см.*, т. е. при перемещении против силы  $\mathbf{F}$  должна быть затрачена работа  $135$  *кг. см.*

$$\begin{aligned} 3. \quad & |\mathbf{ab}| = 1, \\ & \alpha = 70,5^\circ. \end{aligned}$$

4. Скалярное произведение равно 1; угол  $60^\circ$ ; шесть векторных произведений, которые можно образовать из трех диагоналей, лежащих в гранях, будут

$$\begin{aligned} & \pm (-\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}); \\ & \pm (\mathbf{i}, -\mathbf{j}, \mathbf{k}); \\ & \pm (\mathbf{i}, \mathbf{j}, -\mathbf{k}); \end{aligned}$$

площадь грани тетраэдра равна половине абсолютной величины векторного произведения, т. е.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

$$5. -\sqrt{3}, +\sqrt{3}, -\sqrt{3}.$$

6. Уравнение представляет плоскость, потому что оно линейно относительно координат  $P$ ; плоскость проходит через конечную точку вектора  $\mathbf{a}$ , потому что уравнение удовлетворяется при  $\mathbf{r} = \mathbf{a}$ ; эта плоскость нормальна к  $\mathbf{a}$ , потому что все другие векторы, которые удовлетворяют уравнению, но не имеют направление  $\mathbf{a}_0$ , должны быть длиннее, чтобы скалярный потенциал получил заданную величину.

$$7. (9,3; 9,3; 0). \quad 8. \text{ Сразу же получается из формулы } \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}).$$

$$9. -\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, +\frac{2}{3}.$$

10. Единичные векторы суть

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (0,817, 0,409, 0,409) \\ \mathbf{e}_2 &= (-0,566, 0,707, 0,425) \\ \mathbf{e}_3 &= (0,115, 0,579, -0,809). \end{aligned}$$

11. (11,4; 7,1; -2,9);

12. Расстояние равно

$$d = \frac{D}{\sqrt{k^2 + l^2 + m^2}},$$

где

$$D = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

$$k = (\mathbf{b}_y \mathbf{c}_z - \mathbf{b}_z \mathbf{c}_y) + (\mathbf{c}_y \mathbf{a}_z - \mathbf{c}_z \mathbf{a}_y) + (\mathbf{a}_y \mathbf{b}_z - \mathbf{a}_z \mathbf{b}_y)$$

$$l = (\mathbf{b}_z \mathbf{c}_x - \mathbf{b}_x \mathbf{c}_z) + (\mathbf{c}_z \mathbf{a}_x - \mathbf{c}_x \mathbf{a}_z) + (\mathbf{a}_z \mathbf{b}_x - \mathbf{a}_x \mathbf{b}_z)$$

$$m = (\mathbf{b}_x \mathbf{c}_y - \mathbf{b}_y \mathbf{c}_x) + (\mathbf{c}_x \mathbf{a}_y - \mathbf{c}_y \mathbf{a}_x) + (\mathbf{a}_x \mathbf{b}_y - \mathbf{a}_y \mathbf{b}_x);$$

геометрически эта формула равнозначна вычислению высоты тетраэдра по объему и площади основания (ср. задачи 15 и 16).

13. 0,63. 14.  $\mathbf{v} = (-43,1; -35,0; +58,1)$  см/сек.

15.  $I = 21$ . 16.  $I = 13$ .

17. Из всех параллелепипедов с данными длинами ребер наибольший объем имеет прямоугольный. Из всех треугольников с двумя заданными сторонами наибольшую площадь имеет тот, у которого эти две стороны образуют прямой угол.

18. Из  $t^2 = 1$  следует  $(t \frac{dt}{ds}) = 0$ ;  $\frac{dt}{ds}$  есть кривизна кривой, т. е. вектор, который направлен к центру кривизны, и величина которого равна обратной величине радиуса кривизны.

19.  $\text{grad}(\mathbf{ar}) = \mathbf{a}$ .

20. Выходит непосредственно, если в теорему Стокса подставить

$$\text{rot}(\varphi \text{ grad } \psi) = (\text{grad } \varphi) \times (\text{grad } \psi).$$

21.  $\text{rot } \mathbf{v} = 2\omega$ . 22.  $\omega = \frac{k}{r^2}$ . 23.  $f(r) = \frac{\text{const}}{r^2}$ .

24.  $f(r) = \frac{\text{const}}{r^3}$ .

25.  $\mathbf{A} = \mathbf{r} \times \text{grad } \varphi$ , откуда непосредственно следуют оба предложения.

26. 917 кг. 27.  $-\frac{e^2}{a^3} r$ .

28.  $|\mathbf{m}| \cdot |\mathbf{E}| \cdot \cos \alpha$ . Если диполь свободноподвижен, то в этой формуле  $\cos \alpha = 1$ .

29. а)  $6,4 \cdot 10^{-5}$  з, б)  $4,8 \cdot 10^{-5}$  з.

30. Металлический шар:  $\sigma = \frac{E_0}{4\pi} \cos \vartheta$ ;

диэлектрический шар:  $\sigma_{\text{своб.}} = \frac{E_0}{4\pi} \cdot \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} \cos \vartheta$ .

31.  $\kappa = \frac{e^2 R^3}{d^3} \cdot \frac{2d^2 - R^2}{(d^2 - R^2)^2} - \frac{Ee}{R^2}$ .

32.  $Q = 1\,667 \text{ CGSE} = 5,56 \cdot 10^{-7}$  кулонам.

33.  $r = 5$  см. Если  $V$  есть напряжение, то напряженность на углу  $\frac{V}{r}$ , на ребре же (в центре эллипсоида вращения)  $\frac{V}{r} \cdot \frac{1}{\ln \frac{l}{r}}$  ( $l \gg r$ ).

34.  $\sigma = 6,6 \cdot 10^{-4} \text{ CGSE/cm}^2$ ;  $F = 2,8 \cdot 10^{-2} \text{ дн/см}^2$ .

35.  $r = 11 \text{ мм}$ . 36.  $\alpha = 46 \text{ э/см}^2$ . 37.  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0$ ;  $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}_0$ .

38. а)  $\mathbf{E}$ ; б)  $\varepsilon \mathbf{E} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}$ ; в)  $\frac{3\varepsilon}{1+2\varepsilon} \mathbf{E} = \mathbf{E} + \frac{1}{1+2\varepsilon} 4\pi \mathbf{P}$ .

39. В стекле  $\mathbf{E} = \frac{V}{x+(d-x)\varepsilon}$ ; в воздухе  $\mathbf{E} = \frac{\varepsilon V}{x+(d-x)\varepsilon}$

$$C = \frac{S}{4\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{x+(d-x)\varepsilon}.$$

Если вдвигать стеклянную пластинку после отключения конденсатора от батареи, то в стекле  $\mathbf{E} = \frac{V}{\varepsilon d}$ ; в воздухе  $\mathbf{E} = \frac{V}{d}$ .

40. а) Сила  $= F = 44,3 \text{ дн/см}^2$ ; б) сила  $= \frac{F}{2} = 22,2 \text{ дн/см}^2$ , в) сила  $= 2F = 88,6 \text{ дн/см}^2$ .

41. а) Сила  $= F = 44,3 \text{ дн/см}^2$ ; б) сила  $= 4F = 177,2 \text{ дн/см}^2$ .

42. Коэффициент пропорциональности  $= \frac{1}{4\pi}$ .

Рациональная единица заряда	равна	$\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$	Гауссовой единицы;
"	"	напряженности	" "
"	"	напряжения	" "
"	"	емкости	" "

43.  $Q = 3,15 \cdot 10^{-5} \text{ кулонам} = 945\,000 \text{ CGSE}$ .  
 $V_1 = 63 \text{ вольтам}$ ;  $V_2 = 157 \text{ вольтам}$ .

44. На  $\frac{1}{2} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} V$ .

45.  $9 \cdot 10^{-4} \text{ кулонов} = 2,7 \cdot 10^6 \text{ CGSE}$ .

46.  $C = \frac{1}{2 \ln \frac{b}{a}}$ .

47.  $C = \frac{1}{4\pi(\varphi_2 - \varphi_1)} \cdot \int |\text{grad } \varphi| dS$ .

Интеграл нужно распространить по окружности цилиндра.

48. Из  $4\pi\sigma = \left| \frac{\partial \rho}{\partial n} \right| \approx \left| \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|$  получается следующее построение: силовые линии (траектории, ортогональные к эквипотенциальным линиям) нужно изобразить так, чтобы в каждом месте расстояние между двумя соседними линиями равнялось расстоянию между эквипотенциальными линиями на том же самом месте (чтобы, следовательно, сеть обоих семейств линий состояла из ячеек, длина и ширина которых друг другу равны). Если рассматривать участок цилиндрической системы, длина которого равна  $l \text{ см}$ , то поверхность пересечения силовой трубки, определяемой двумя силовыми линиями, с поверхностью одного проводника равна ширине  $b$  силовой трубки в месте ее окончания. Следовательно, заряд на этой поверхности пересечения будет  $\frac{l}{4\pi} \cdot \left| \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right| \cdot b = \frac{\delta \varphi}{4\pi}$ ; если от проводника исходит  $m$  силовых трубок, то полный его заряд на  $l \text{ см}$  длины  $\frac{m \cdot \delta \varphi}{4\pi}$ ; если, кроме того, напряжение  $V$  между проводниками посредством  $n - 1$  эквипотенциальных линий разделено на  $n$  „слоев“  $\delta \varphi = \frac{V}{n}$ , то емкость  $C = \frac{l}{4\pi} \cdot \frac{m}{n}$  электростатическим единицам.



49. Нужно найти предельное значение: а) с вещественным и б) с чисто мнимыми  $z_1 - z$  и приравнять эти два выражения друг к другу. Это дает так называемые дифференциальные уравнения Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Если продифференцировать их по  $x$  и соответственно по  $y$  и сложить, то для  $u$  получается уравнение Лапласа; совершенно аналогично получают его и для  $v$ .

50. Что касается первой части заряда, то, здесь достаточно заметить, что при требуемых предположениях  $f[F(z)]$  также является функцией от  $z$  с необходимыми свойствами регулярности, и что ее вещественная часть постоянна также на соответствующих линиях  $A$ . Емкости отображенного и первоначального расположения равны; мы докажем это следующим образом: всякое комплексное число, а значит также и производную  $\frac{dF}{dz}$  отображающей функции  $F(z)$  в точке  $P$  плоскости  $z$  мы можем написать в виде:

$$dF = r \cdot e^{i\varphi} \cdot dz.$$

Это выражает тогда собой то, что изображение  $dF$  каждого бесконечно малого отрезка  $dz$ , проходящего через точку  $P$ , получается из  $dz$  путем растяжения его длины в  $r$  раз и поворота на угол  $\varphi$ . Угол между двумя линейными элементами, проходящими через точку  $P$ , а также отношение их длин остаются неизменными; поэтому это отображение посредством имеющей производную комплексной функции называют „конформным“. Из ортогональной квадратной сети эквипотенциальных и силовых линий в  $A$  получается такая же сеть в  $B$ ; число эквипотенциальных и силовых линий, конечно, также останется неизменным; предположение следует из этих двух фактов, если принять еще во внимание задачу 47.

51. Чтобы найти нулевую точку того отображения, которое переводит поперечные сечения двух параллельных проводников в концентрические окружности цилиндрического конденсатора, построим окружность, которая окружности параллельных проводов в каждом двух точках пересечет под прямыми углами. Точка пересечения этой вспомогательной окружности с прямой, соединяющей центры проводников, обладает требуемым свойством: если принять ее за нулевую точку отображения  $\frac{1}{z}$ , она переводит эту вспомогательную окружность в прямую, которая в силу правильного отображения углов должна пересекать отображения обеих окружностей под прямыми углами. Из соображений симметрии следует, что две отображенные окружности должны быть концентрическими. Емкость двойной проводки получается равной  $\frac{1}{4 \ln \frac{d}{r}} CGSE/cm$ .

52.  $f$  создается одним диполем ( $+e$  при  $x=0$  и  $-e$  при  $x=l$ , так что  $e \cdot l = a$ );  $g$  — двумя противоположно ориентированными диполями, лежащими на оси  $x$ , момент которых  $a$  и расстояние между которыми  $d$ , так что  $a \cdot d = b$ ; подобным же образом  $g$  создается двумя диполями, перпендикулярными к оси  $x$ .

53.  $\approx 1$  м.

54.  $I = 1,95$  амперам; он в 8,6 раз больше рабочего тока.

55. 0,35 сек.; нагревание медной проволоки составляет  $0,7^\circ$  С.

56. На 23,8 вольт.

57. Полный ток  $I = 8,1$  амперам; полное сопротивление — 27,2 ом; полная мощность — 1780 ватт; добавочное сопротивление к 8-вольтовой лампе равняется 35,4 омам.

58. 79%.

59. а) сопротивление шунта равно  $\frac{R}{n-1}$ ; б) добавочное сопротивление равно  $(n-1)R$ .

$$60. k = \sqrt{\frac{nR}{R_i}}$$

61. Сопротивление вращающейся катушки должно равняться внешнему сопротивлению  $R_a$ .

$$62. R = \frac{\rho}{4\pi C}. \quad 63. 159 \text{ ом}. \quad 64. R = \frac{\rho \ln \frac{b}{a}}{2\pi h}.$$

$$65. E_1 = V \frac{\lambda_2}{d_1\lambda_2 + d_2\lambda_1}; \quad E_2 = V \frac{\lambda_1}{d_1\lambda_2 + d_2\lambda_1}.$$

$$D_1 = V \frac{\varepsilon_1\lambda_2}{d_1\lambda_2 + d_2\lambda_1}; \quad D_2 = V \frac{\varepsilon_2\lambda_1}{d_1\lambda_2 + d_2\lambda_1}.$$

$$I = V \frac{\lambda_1\lambda_2}{d_1\lambda_2 + d_2\lambda_1}.$$

$$\sigma = \pm \frac{1}{4\pi} V \frac{\varepsilon_1\lambda_2 - \varepsilon_2\lambda_1}{d_1\lambda_2 + d_2\lambda_1} \quad (\text{знак в зависимости от полярности пластин}).$$

$$\sigma_{\text{своб.}} = \pm \frac{1}{4\pi} V \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{d_1\lambda_2 - d_2\lambda_1}.$$

Если проводимость  $\lambda_1$  слоя 1 равна нулю, то другой слой становится свободным от поля, и лежащая на нем пластинка конденсатора — свободной от зарядов; тогда у нас имеется конденсатор с расстоянием между пластинами  $d_1$  и диэлектрической постоянной  $\varepsilon_1$ , к которой приложено все напряжение  $V$ .

$$66. \frac{\varepsilon}{4\pi\lambda}.$$

67. Если  $e$  есть заряд, сконцентрированный в момент времени  $i=0$  в малой сфере, то он создает на расстоянии  $r$  силу поля  $\frac{e}{r^2}$ , которая вызы-

вает плотность тока  $i = \frac{\sigma e}{r^2}$ ;  $i$  направлена радиально. Поток электричества не имеет источников; электроны проводимости нигде не сгущаются и не разрежаются, а потому нигде не возникает зарядов. В то время как при распространении тепла или диффузии распространяющаяся субстанция „расходится“ на больший объем, дальное действие электрического заряда отодвигает находящиеся на различных расстояниях электроны проводимости как раз с такой силой, что среди них не возникает никакого сгущения. С математической точки зрения сила, создающая поток, при распространении тепла или при диффузии есть градиент плотности текущей субстанции; в случае электричества, наоборот плотность дается применением операции градиента к движущей силе  $E$  ( $\varepsilon \operatorname{div} E = 4\pi\rho$ ).

68. Чтобы передать сигнал в определенный момент времени, мы должны перед этим заряд, сконцентрированный в малом шаре, предохранить от растекания посредством изолирующей оболочки, которая в данный момент убирается. Но уже перед этим на внешней поверхности оболочки появился бы индуцированный заряд, равный и противоположный заряду шара, в то время как одновременно на внешней поверхности большого шара возник бы индуцированный заряд, равный первоначальному заряду. Устранение изолирующей оболочки не дало бы ничего, кроме соединения зарядов, существующих на ее двух сторонах.

$$69. \frac{Q^2}{2\varepsilon} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right). \quad 70. E = 3 \frac{(m \cdot r)}{r^5} \cdot r - \frac{m}{r^3}.$$

$$71. |m| = 8,37 \cdot 10^{25}. \quad 72. \operatorname{tg} i = 2 \operatorname{tg} \beta.$$

$$73. \text{См. задачу 74.} \quad 74. \text{Для } a \gg 1, \quad \frac{\sigma}{\sigma_0} \approx 1 - \frac{1}{a}.$$

$$a \ll 1, \quad \frac{\sigma}{\sigma_0} \approx \frac{a}{3}.$$

$C = \sigma_0 \cdot \frac{\mu}{3k}$ ; магнитный момент грамм-молекулы равен  $\sqrt{3MRC}$  ( $M$  — молекулярный вес,  $R$  — газовая постоянная).

75.  $|m| = 916\,000,$   
 $H = -7\,350,$   
 $B = 14\,700.$

Поверхностное расхождение  $M$  („поверхностная плотность магнетизма“) есть  $M \cos \vartheta$ ; поверхностная плотность свободного тока  $i = cM \sin \vartheta$ , где  $\vartheta$  угол между направлением намагничения и соответствующим местом шаровой поверхности. Максимум свободного тока будет 17 500 ампер/см.

76.  $\varphi = \frac{4\pi}{3} a^3 M \frac{\cos \vartheta}{r^2}$ ;  $H_r = \frac{8\pi}{3} a^3 M \frac{\cos \theta}{r^3}$ ;  $H_\vartheta = \frac{4\pi}{3} a^3 M \frac{\sin \vartheta}{r^3}$ .

77.  $\frac{m_1 m_2}{r^3} - \frac{3(m_1 r)(m_2 r)}{r^5}$ .

78. Горизонтально плывущая стрелка на магнитном экваторе находится в устойчивом, на магнитных полюсах — в неустойчивом равновесии. Разность энергий между этими двумя положениями равна 32,3 эрг. Вертикальная стрелка на одном полюсе находится в устойчивом, на другом полюсе в неустойчивом равновесии; разность энергии для нее будет 129,2 эрг.

79.  $\frac{3}{r^5} \left[ (m_1 r) m_2 + (m_2 r) m_1 + (m_1 m_2) r - 5 \frac{(m_1 r)(m_2 r)}{r^2} r \right]$ .

Сила между двумя свободно вращающимися магнитными стрелками будет

$$-\frac{6m_1 m_2}{r^4}.$$

80. 60 000 максвелл.

81.  $\int B_n dS = \frac{0,4\pi n i}{\pi d + (\mu - 1) \delta} \cdot q \cdot \mu.$

82. Для  $\delta = 0,1; 1; 5$  мм  $\int B_n dS = 55\,500; 33\,400; 12\,000.$

$\delta$	0,1 мм	1 мм	5 мм	
Энергия в железе . . . . .	0,154	0,055	0,007	Джоулей
Энергия в междужелезном пространстве . . . . .	0,023	0,044	0,029	Джоулей
Полная энергия . . . . .	0,177	0,099	0,036	Джоулей
Коэффициент самоиндукции . . . . .	0,354	0,198	0,072	Генри

83. Для  $\delta = 0,1; 1; 5$  мм, сила = 12,5; 4,5; 0,6 кг. Если удалять полюса друг от друга таким образом, что коэффициент самоиндукции  $L$  прорезанного кольца уменьшится на  $\Delta L$ , то энергия поля при поддержании тока  $I$  постоянным уменьшится на  $\frac{1}{2} \Delta L I^2$ . Поток индукции уменьшится на  $\Delta \Phi = c \Delta L I$ ; вследствие этого возникает направленная противоположно току э. д. с. самоиндукции  $V = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}$ , полная работа которой  $\int I \cdot V \cdot dt = \frac{1}{c} \Delta \Phi \cdot I = \Delta L I^2$  подводится к батарее, питающей кольцевую катушку. Механическая работа, затрачиваемая во время процесса, будет, следовательно,  $\frac{1}{2} \Delta L \cdot I^2$ ; ее величина равна уменьшению энергии поля; к батарее переносится удвоенное количество энергии.

84.  $1,67 \text{ дн/см}$ . 85.  $\alpha = 4,1^\circ$ ;  $1 \text{ мм на шкале} = 0,031 \text{ мА}$ .

86.  $7,8 \mu$  87.  $V = s [\text{В}] \cdot 10^{-8} \text{ В}$ . 88.  $0,6 \text{ мВ}$ .

89. Выделение тепла  $5,6 \cdot 10^{-7} \text{ кал/сек}$ ; средний момент вращения  $7,6 \cdot 10^{-4} \text{ Т см}$ ; максимальный момент вращения  $15,2 \cdot 10^{-4} \text{ Т см}$ .

90. Если  $R$  означает сопротивление проволочного кольца, то

$$I = \frac{\omega \pi r^2 H}{R} \cdot 10^{-8} \sin \omega t = 20,6 \sin \omega t \text{ мА}.$$

Сила поля, направленная нормально к плоскости кольца, будет

$$H' = \frac{2\pi^2 \omega r H}{R} \cdot 10^{-9} \sin \omega t = 1,3 \cdot 10^{-3} \sin \omega t \text{ эрстед};$$

составляющая результирующей напряженности в центре кольца, параллельная земному полю, будет

$$H \left( 1 + \frac{2\pi^2 \omega r}{R} \cdot 10^{-9} \sin \omega t \cos \omega t \right);$$

нормальная составляющая

$$H \cdot \frac{2\pi^2 \omega r}{R} \cdot 10^{-9} \sin^2 \omega t.$$

Магнитная стрелка, помещенная в центре кольца, отклоняется на угол  $\alpha \cong 1'$  в направлении вращения кольца.

91.  $R_a = \frac{\pi^2 C}{360\tau} b \cdot l \cdot n \cdot H \cdot 10^{-8} - R \text{ ом}$ .

92.  $1490 \text{ кал/мин}$ .

93.  $I_{\text{эфф}} = 0,354 \text{ А}$ ;  $\varphi = 89^\circ 54,5'$  (фаза тока впереди); рабочая мощность =  $0,0125 \text{ W}$ ; безваттная мощность =  $6,77 \text{ W}$ .

94. а)  $1,7\%$ ,  $0,14\%$ ; б)  $15\%$ ,  $7\%$ .

95. а) Следует разложить  $\sin \left( \omega t + \frac{2\pi}{3} \right)$  и  $\sin \left( \omega t + \frac{4\pi}{3} \right)$ ; б) величина напряженности остается постоянной; ее направление вращается с угловой скоростью  $\omega$ .

96.  $I = I_0 \left( 1 - l^{-\frac{t}{\vartheta}} \right)$ ;  $I_0 = \frac{V}{R}$ ;  $\vartheta = \frac{L}{R}$ .

Искомое время:  $6,9 \text{ сек}$ .

97.  $d = 3,7 \text{ мм}$ .

98. а)  $7,5 \text{ В/см}$ ;  $2,5 \cdot 10^{-2} \text{ эрстед}$ ; б)  $0,39 \text{ В/см}$ ,  $1,3 \cdot 10^{-3} \text{ эрстед}$ .

99. Если  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  суть решения уравнений Максвелла для пустоты, то эти уравнения удовлетворяются также векторами

$$\mathbf{E}^* = -\mathbf{H} \text{ и } \mathbf{H}^* = \mathbf{E}.$$

Если в уравнениях 194а, б, с и 195 заменить вектор  $\mathbf{E}$  вектором  $\mathbf{H}$  и вектор  $\mathbf{H}$  вектором  $-\mathbf{E}$ , то получается излучение магнитного диполя  $p$ . В случае плоской катушки с числом витков  $n$ , площадью  $S$  и током  $I$ ,  $p = \frac{nSI}{c}$ .

100. Световое давление будет  $\frac{a^2}{8\pi}$ ; для солнечного излучения оно составляет на земной поверхности  $\approx 5 \cdot 10^{-11} \text{ кг/см}^2 \approx 5 \cdot 10^{-5} \text{ дн/см}^2$ .

101. Из  $\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t}$  и  $\frac{\partial H_z}{\partial x} = -\frac{4\pi}{c} j_y - \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t}$

следует

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_x &= \frac{1}{c} \mathbf{j}_y H_z = -\frac{1}{4\pi} \left[ H_z \frac{\partial H_z}{\partial x} + \frac{1}{c} H_z \frac{\partial E_y}{\partial t} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial H_z^2}{\partial x} - \frac{1}{c} E_y \frac{\partial H_z}{\partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (H_z H_y) \right]; \end{aligned}$$

следовательно, в среднем по времени

$$\bar{\mathbf{F}}_x = -\frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial x} (H_z^2 + E_y^2)$$

и т. д.

## Г. СВОДКА ФОРМУЛ И ОБОЗНАЧЕНИЙ

### А. Векторы и векторные поля

Векторы всюду обозначены жирным шрифтом, как  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{v}$  и т. д. Их составляющие по координатным осям обозначены через  $\mathbf{A}_x$ ,  $\mathbf{A}_y$ ,  $\mathbf{A}_z$ , их величины через  $|\mathbf{A}|$ ,  $|\mathbf{v}|$  или также через  $A$ ,  $v$ . Скалярное произведение пишется  $\mathbf{A}\mathbf{B}$ . Векторное произведение изображается посредством  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ .

### 1. ВЕКТОРЫ

$$\mathbf{a}_s = \mathbf{a}_x \cos(s, x) + \mathbf{a}_y \cos(s, y) + \mathbf{a}_z \cos(s, z) \quad (9)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{A}_x \mathbf{B}_x + \mathbf{A}_y \mathbf{B}_y + \mathbf{A}_z \mathbf{B}_z. \quad (14)$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -(\mathbf{B} \times \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \mathbf{A}_x & \mathbf{A}_y & \mathbf{A}_z \\ \mathbf{B}_x & \mathbf{B}_y & \mathbf{B}_z \end{vmatrix}. \quad (20)$$

Объем параллелепипеда, построенного на трех векторах  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ , будет

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_x & \mathbf{A}_y & \mathbf{A}_z \\ \mathbf{B}_x & \mathbf{B}_y & \mathbf{B}_z \\ \mathbf{C}_x & \mathbf{C}_y & \mathbf{C}_z \end{vmatrix} \quad (23)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\mathbf{B})$$

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt}. \quad (32)$$

### II. ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ.

Градиент:

$$\text{grad } \varphi = \mathbf{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (34)$$

$$\int_1^2 (\text{grad } \varphi \cdot d\mathbf{s}) = \varphi_2 - \varphi_1. \quad (35a)$$

Расхождение:

$$\text{div } \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}. \quad (41a)$$

## В. Электродинамика

Уравнения Максвелла для неподвижных тел (§ 52), имеющие всеобщее значение:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{i} + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{D}} \quad (\text{I})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}} \quad (\text{II})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho \quad (\text{III})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (\text{IV})$$

$\mathbf{H}$  — напряженность магнитного поля,

$\mathbf{E}$  — напряженность электрического поля,

$\mathbf{D}$  — диэлектрическое смещение,

$\mathbf{B}$  — индукция,

$\mathbf{i}$  — плотность тока,

$\rho$  — плотность (истинного) заряда.

При векторах:

$\mathbf{P}$  — диэлектрическая поляризация,

$\mathbf{M}$  — интенсивность намагничивания,

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}, \quad (86)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}. \quad (120)$$

Следовательно, согласно (III)

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi(\rho - \operatorname{div} \mathbf{P}). \quad (32)$$

Явления в изотропных веществах характеризуются постоянными этих веществ

$$\mathbf{i} = \lambda(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{(e)}), \quad (\text{V})$$

$$\mathbf{P} = \chi_{\text{эл.}} \mathbf{E}; \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (\text{VI})$$

$\lambda$  — электропроводность,

$\mathbf{E}^{(e)}$  — сторонняя сила,

$\chi_{\text{эл.}}$  — коэффициент электризации,

$\varepsilon = 1 + 4\pi\chi_{\text{эл.}}$  — диэлектрическая постоянная.

В неферромагнитных веществах:

$$\mathbf{M} = \kappa_m \cdot \mathbf{H}; \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (\text{VII})$$

$\kappa_m$  — магнитная восприимчивость,

$\mu = 1 + 4\pi\kappa_m$  — проницаемость.

Уравнение энергии. Из (I) до (VII) следует

$$-\frac{d}{dt} \frac{1}{8\pi} (\varepsilon \mathbf{E}^2 + \mu \mathbf{H}^2) = \operatorname{div} \mathbf{S} + (\mathbf{iE}). \quad (127a)$$

Теорема Гаусса:

$$\int_0 \int_0 \mathbf{v}_n dS = \int_0 \int_0 \int_0 \operatorname{div} \mathbf{v} dv. \quad (40)$$

Теорема Грина:

$$\int \int \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = \int \int \int dv \{ \psi \Delta \varphi + (\text{grad } \psi \cdot \text{grad } \varphi) \} \quad (44)$$

$$\int \int \left( \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS = \int \int (\psi \Delta \varphi - \varphi \Delta \psi) dv. \quad (45)$$

Потенциал точечных источников с отдачи  $4\pi e_i$ :

$$\varphi = \sum \frac{e_i}{r_i}; \quad \mathbf{v} = -\text{grad } \varphi. \quad (48)$$

Двойной источник момента  $\mathbf{m}$ :

$$\varphi = - \left( \mathbf{m} \cdot \text{grad}_a \frac{1}{r} \right) = \frac{\mathbf{m} \mathbf{r}}{r^3} = \frac{|\mathbf{m}| \cdot \cos \vartheta}{r^2}. \quad (52)$$

Поверхность разрыва:

$$\varphi = \int \int \frac{\omega}{r} dS_{12} - \int \int \tau \left( \mathbf{n} \cdot \text{grad}_a \frac{1}{r} \right) dS_{12}. \quad (57)$$

Равномерный двойной слой:

$$\mathbf{v} = \tau \oint \frac{d\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^3}. \quad (58a)$$

Вихрь:

$$\text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{i} \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right). \quad (60b)$$

Теорема Стокса:

$$\oint \mathbf{v} ds = \int \int (\text{rot } \mathbf{v})_n df. \quad (63)$$

Вычисление  $\mathbf{v}$  из его источников  $\varrho$  и вихрей  $\mathbf{c}$ :

$$\mathbf{v} = -\text{grad} \int \int \int \frac{\varrho dv}{r} + \text{rot} \int \int \int \frac{\mathbf{c} dv}{r}. \quad \S 18$$

Правила вычисления:

$$\text{div } \varphi \mathbf{A} = \varphi \text{div } \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \text{grad } \varphi$$

$$\text{rot } \varphi \mathbf{A} = \varphi \text{rot } \mathbf{A} + (\text{grad } \varphi) \times \mathbf{A}$$

$$\text{div } (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \text{rot } \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{B}$$

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}$$

$$\text{rot } (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \text{grad}) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \text{grad}) \mathbf{B} + \mathbf{A} \text{ div } \mathbf{B} - \mathbf{B} \text{ div } \mathbf{A}.$$

Плотность энергии поля:

$$u = \frac{1}{8\pi} (\varepsilon \mathbf{E}^2 + \mu \mathbf{H}^2). \quad (127b)$$

Вектор Пойнтинга:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \quad (128)$$

Химическая и тепловая отдача:

$$\mathbf{iE} = \frac{\mathbf{i}^2}{\lambda} - (\mathbf{iE}^{(e)}). \quad (132b)$$

Волновое уравнение. Для однородной, незаряженной среды ( $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\lambda$  постоянны в пространстве,  $\mathbf{E}^{(e)} = 0$ ,  $\rho = 0$ ):

$$\frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\lambda\mu}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \Delta \mathbf{E}. \quad (154\text{f})$$

Отсюда для изоляторов:

$$\text{скорость распространения поля } w = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}, \quad (153\text{a})$$

$$\text{показатель преломления } n = \sqrt{\epsilon\mu} \quad (153\text{c})$$

В проводниках:

$$\text{глубина проникания } d = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \cdot \sqrt{\frac{\lambda_0 c}{\lambda}}. \quad (157\text{d})$$

### С. Дальнейшая детализация уравнений (I—VII)

Квазистационарные поля. Пренебрежение в уравнении I членом  $\frac{1}{c} \dot{\mathbf{D}}$  равнозначно допущению  $\text{div } \dot{\mathbf{i}} = 0$  и допущению бесконечно большой скорости распространения  $w$  (теория технических переменных токов §§ 55 до 61). Для квазистационарного тока  $I$  коэффициент самоиндукции  $L$  определяется магнитной энергией поля

$$U_{\text{магн.}} = \frac{1}{8\pi} \int \mu \mathbf{H}^2 dv = \frac{1}{2} LI^2.$$

Стационарные поля:

$$\dot{\mathbf{D}} = 0, \quad \dot{\mathbf{B}} = 0.$$

$\mathbf{E}$  не имеет вихрей, а потому может быть выражено через потенциал  $\varphi$

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{i} + \mathbf{c} \cdot \text{rot } \mathbf{M}). \quad (\S 43 \text{ до } 48)$$

Статические поля:

$$\dot{\mathbf{D}} = 0; \quad \dot{\mathbf{B}} = 0; \quad \dot{\mathbf{i}} = 0.$$

Ни поле  $\mathbf{E}$ , ни поле  $\mathbf{H}$  не имеют вихрей и существуют независимо друг от друга:

$$\left. \begin{array}{l} \text{магнетостатика: } \text{div } \mathbf{H} = -4\pi \text{ div } \mathbf{M} \\ \text{электростатика: } \text{div } (\epsilon \mathbf{E}) = 4\pi \rho \end{array} \right\} \quad (\S 47)$$

В однородных изоляторах ( $\epsilon$  не изменяется от точки к точке)

$$-\text{div } \mathbf{E} = \Delta \varphi = -\frac{4\pi}{\epsilon} \rho.$$

Потенциал точечного заряд  $e$  на расстоянии  $r$  равен

$$\varphi = \frac{e}{\epsilon r}.$$

Потенциал прямой с зарядом  $e$  на 1 см на расстоянии  $a$ :

$$\varphi = -\frac{2e}{\epsilon} \ln a. \quad (\S 48)$$



## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

### А

- Абсолютная электростатическая система единиц 57
- Аксиальный вектор 54
- Ампер (единица силы тока) 149
- Ампера гипотеза круговых токов 131
- Антисимметричный тензор 49
- Апериодический разряд 169

### Б

- Барометрическая формула 95
- Безваттная мощность 166
- Безвихревое векторное поле, нигде не имеющее источников и исчезающее в бесконечности 29
- Безвихревое поле 18, 27
- Беспроволочная телеграфия 216, 217
- Био-Савара закон 122
- Больцмана постоянная 95

### В

- Вековое уравнение 51
- Вектор 7
- Вектор аксиальный 54
- Вектор единичный 9
- Вектор излучения 137
- Вектор Пойнтинга 137
- Вектор полярный 54
- Вектор основной 11
- Вектора составляющие 10
- Векторная диаграмма (переменных токов) 164
- Векторная диаграмма двойного провода 200
- Векторное поле 17
- — вычисление его по его источникам и вихрям 40
- Векторное произведение векторов 13
- Векторный потенциал 41, 120, 122 123
- Векторы 7
- Векторы, вычитание 8, внешнее произведение 13, внутреннее произведение 12
- Векторы, их равнодействующая 8
- Векторы, сложение 8
- Взаимной индукции коэффициент 156, 158, 161
- Вихрь 35

- Вихрь векторного поля 35
- Внешнее произведение векторов 13
- Внутреннее произведение векторов 12
- Волны вдоль идеальных проводников 196
- Волны вдоль проводов при конечном сопротивлении последних 201
- Волны электромагнитные в однородном диэлектрике 172
- Волны электромагнитные в однородных проводниках 177
- Вращение твердого тела 15
- Вращения момент 14
- Вольт (единица напряжения) 148
- Восприимчивость магнитная 125
- Время релаксации 110, 177
- Высокочастотное нагревание 191
- Вычитание векторов 8

### Г

- Гальваническая цепь 115
- Гаусса метод 118
- Гаусса система единиц 145
- Гаусса теорема 22
- Генри (единица самоиндукции) 150
- Герца решение 212
- Гидродинамическое изображение векторного поля 17
- Гистерезиса петля 128
- Главная диагональ матрицы 49
- Глубина проникания волны в проводник 189
- Градиент 18, 27
- Грина теорема 23

### Д

- Двойной слой 30, 32
- Двойной слой магнитный 120, 121
- Двойной слой однородный 34
- Двойные источники 26
- Двойные слои, расположенные по поверхности 30
- Декремент логарифмический 170
- Детерминантная форма векторного умножения 14
- Деформация симметричная 52
- Джоуля закон 107
- Джоуля тепло 107
- Диамagnetизм 126

Дистрибутивный закон скалярного умножения 14  
Дифференцирование векторов 17  
Дифференцирование по координатам точечного источника 27  
— — — точки наблюдения 27  
Диэлектрики 69  
Диэлектрическая постоянная 69, 73

## Е

Единичные векторы 9  
Единицы измерения электромагнитных величин 145  
Емкость двойного провода 192, 195  
Емкость плоского конденсатора 61  
Емкость шарового конденсатора 61  
Емкость эллипсоида 62, 65

## З

Заряд истинный 73  
Заряд свободный 73  
Заряд электрический 55  
Затухание излучения 217  
Земной индуктор 133

## И

Избирательное поглощение 176  
Излучение атомов 217  
Излучение осциллятора 216  
Излучения вектор 137  
Изображения сила 66  
Изолятор 59  
Импульс излучения 231  
Индуктор земной 133  
Индукции закон Фарадея 132, 135  
Индукция магнитная 129  
Индукция электрическая 66  
Интеграл по кривой 18  
Искажение (в телефонии) 201  
Истинный заряд 73  
Источники 21  
Источники двойные 26  
Источники, расположенные по поверхности 30  
Источники точечные 23

## К

Квазистационарные процессы 138  
Клаузиуса-Мосотти формула 94, 98  
Количество электричества 55  
Коммутативный закон скалярного умножения 12  
Конденсатор плоский 61  
Конденсатор шаровой 61, 75  
Концентрационная цепь 113  
Координаты полярные, векторные формулы для них 46  
Координаты цилиндрические 45  
Кососимметричный тензор 49

Коэрцитивная сила 128  
Коэффициент поглощения 179  
Коэффициент взаимной индукции 156, 158, 161  
Коэффициент электризации 73  
Криволинейные ортогональные координаты 43  
Кулон (единицы заряда) 149  
Кулона закон 56, 57, 145  
Кюри-Вейса закон 129  
Кюри закон 126, 128  
Кюри точка 128

## Л

Лапласа оператор 23  
Лапласа уравнение 25, 41, 78  
Логарифмический декремент 170  
Линии поля двойной проводки 123, 124  
Линии поля идеально-жесткого цилиндрического магнита 129, 130

## М

Магнетизм остаточный 128  
Магнитная восприимчивость 125  
Магнитная индукция 129  
Магнитная проницаемость 131  
Магнитное насыщение 127  
Магнитное поле в пустоте 117, 119  
Магнитное поле постоянных токов 119  
Магнитный двойной слой 120, 121  
Магнитный момент 117, 118  
Магнитострикция 141  
Максвелл (единица магнитного потока) 149  
Максвелла натяжения 100, 101, 144  
Максвелла натяжения в магнитном поле 144  
Максвелла соотношение 176  
Максвелла тензор 102, 144  
Максвелла уравнение для неподвижных тел 134, 136  
Матрица 94  
Матрица антисимметричная 53  
Матрица квадратичная 52  
Матрица симметричная 52  
Международные единицы 150  
Механическая сила на поверхности диэлектрика 101  
Механические силы в поле 89  
Момент вращения 15  
Момент электрический двойного слоя 32  
Момент электрический диэлектрического шара в однородном поле 78  
Момент электрический роя зарядов 87  
Момент электрический шарового проводника в однородном поле 69  
Момент системы источников 26  
Мощность переменного тока 165, 166

## Н

Намагниченность 125  
Насыщение магнитное 127  
Напряженное электрическое по кон-  
туру 134  
Напряженность электрическая 56  
Натяжения Максвелла 100, 144

## О

Ом (единица сопротивления) 150  
Ома закон 105, 107  
Оптический показатель преломления  
176  
Основные векторы 11  
Остаточный магнетизм 128  
Осциллятор 214  
Отдача поля 22

## П

Парамагнетизм 126  
Периодический разряд 169  
Плоская величина 13  
Плоскость поляризации электромаг-  
нитной волны 176  
Плотность зарядов 58  
Плотность тока 107  
Поверхностная плотность 30  
Поверхностное расхождение вектора 31  
Поверхностный вихрь 130  
Поверхность разрыва 32  
Поглощение избирательное 176  
Поглощения коэффициент 179  
Пойнтинга вектор 137, 184  
Пойнтинга вектор комплексный 207  
Показатель преломления в провод-  
нике 179  
Показатель преломления диэлектрика  
175  
Показатель преломления оптический  
176  
Поле электрическое 54  
Поляризация диэлектрика 71  
Поляризация диэлектрического шара  
в однородном поле 78, 87  
Поляризация магнитная 117  
Поляризация проводящего шара  
в однородном поле 69  
Полярный вектор 54  
Постоянный ток 105  
Потенциал запаздывающий 211  
Потенциал логарифмический 123  
Потенциал однородного двойного слоя  
34  
Потенциал поверхности разрыва 30,  
31  
Потенциал системы источников 24  
Потенциала скачок у двойного слоя 30  
Потенциал скорости 20  
Потенциал электродинамический 210  
Потенциал электростатический 58

Поток вектора через движущуюся по-  
верхность 42  
Поток электрических сил 56  
Преломление линий тока 108  
Преломление силовых линий 74  
Пробная катушка 132  
Пробное тело 55  
Проводники электричества 59  
Произведение трех векторов 15

## Р

Равнодействующая векторов 8  
Размерность 7  
Разность фаз (электромагнитной вол-  
ны в проводниках) 178  
Расхождение поля 22  
Резонанс (в контуре переменного  
тока) 169

## С

Савара-Био закон 122  
Самоиндукция 155  
— внешняя 161  
— внутренняя 161  
— двойного провода 192  
— кругового провода 161  
— коэффициент 162  
Свободный заряд 73  
Свободный ток 131  
Система единиц абсолютная 145  
Система единиц Гаусса 145  
Система единиц техническая 148  
Система единиц электромагнитная 147  
Система единиц электростатическая 148  
Сила 7  
Сила, действующая на единицу объема  
в магнитном поле 143  
Сила, действующая на единицу объема  
в электростатическом поле 92  
Сила, действующая на элемент тока  
139, 157  
Сила изображения 66  
Сила сторонняя 112  
Сила электростатическая 89  
Симметричная деформация 52  
Симметричный тензор 51  
Скаляр 7  
Скалярное произведение векторов 12  
Скачок потенциала 31  
— — у двойного слоя 32  
— нормальной составляющей у по-  
верхностного источника 31  
Скин-эффект 187  
Скорость света 175  
Сложение векторов 8  
— тензоров 50  
Смещение электрическое 73  
Сопротивление удельное 106  
— кажущееся 164  
— излучения 171  
Стоки 21

Стокса теорема 35, 39  
Сторонняя разность потенциалов 116  
Сторонняя сила 112

## Т

Тангенс-буссоль 121  
Телеграфное уравнение 178  
Тензор 46  
Тензор антисимметрический 49  
Тензор деформации 49  
Тензор кососимметрический 49  
Тензор Максвелла 101, 144  
Тензор напряжений 47, 101, 103  
Тензор симметричный 48  
Тензор составляющие 48  
Тензор составляющие сумма 50  
Теплоемкость 224  
Термодинамика электрострикции 225  
Термодинамика энергии поля 218  
Техническая система единиц 148  
Ток непостоянный 109  
Ток поляризации 108  
Ток постоянный 108  
Ток проводимости 108  
Ток смещения 108, 111  
Томсона теорема 85  
Точечный заряд вблизи проводящей плоскости 65  
Точечный заряд и шаровой проводник 67  
Точечный заряд около плоской границы диэлектрического слоя бесконечной толщины 76  
Трансформатор 166

## У

Удельное сопротивление 106  
Удельная электропроводность 106  
Уравнение состояния магнитное 128

## Ф

Фарада (единица емкости) 150  
Фарадея закон индукции 132  
Ферромагнетизм 126

## Ц

Цепь тока с самоиндукцией, емкостью и сопротивлением 168  
Цепь тока с сопротивлением и самоиндукцией емкостью 163

## Ш

Шар диэлектрический в неоднородном поле 87  
Шар диэлектрический в однородном поле 78  
Шаровой конденсатор 61  
Шаровой конденсатор слоистый 75  
Ширина затухания 217

## Э

Электризации коэффициент 73  
Электрическая индукция 66  
Электрические собственные колебания 169  
Электрический заряд 55  
Электродвижущая сила 111, 116  
Электромагнитная система единиц 147  
Электропроводность удельная 106  
Электростатическая система единиц 148  
Электростатический потенциал 58  
Электрострикция 92, 94  
Электрострикция термодинамическая теория 225  
Эллипсоида вращения емкость 62, 65  
Энергия магнитная 138  
Энергия электростатического поля 80  
Энергия электростатического поля при наличии изоляторов 82  
Энергия свободная 220  
Энергия точечных зарядов 80  
Энергия плотность в электрическом поле 82  
Энергия плотность в электромагнитном поле 137  
Энтропия 220  
Эффективная мощность 166

## ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр:
Предисловие к восьмому изданию . . . . .	3
Предисловие к девятому изданию . . . . .	4
Предисловие ко второму изданию перевода . . . . .	4
Введение . . . . .	5

### А. ВЕКТОРЫ И ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

#### I. Векторы

§ 1. Определение вектора . . . . .	7
§ 2. Сложение и вычитание векторов . . . . .	8
§ 3. Единичные и основные векторы, составляющие . . . . .	9
§ 4. Внутреннее, или скалярное произведение . . . . .	12
§ 5. Внешнее, или векторное произведение . . . . .	13
§ 6. Произведения трех векторов . . . . .	15
§ 7. Дифференцирование векторов по времени . . . . .	17

#### II. Векторные поля

§ 8. Гидродинамическое изображение . . . . .	17
§ 9. Безвихревое поле. Градиент и интеграл по кривой . . . . .	18
§ 10. Отдача поля источников, теорема Гаусса и расхождение вектора . . . . .	20
§ 11. Теоремы Грина . . . . .	23
§ 12. Точечные источники . . . . .	24
§ 13. Двойные источники . . . . .	26
§ 14. Вычисление безвихревого векторного поля из поля источников . . . . .	27
§ 15. Источники и двойные слои, расположенные по поверхности . . . . .	30
§ 16. Однородный двойной слой . . . . .	34
§ 17. Вихрь и теорема Стокса . . . . .	35
§ 18. Вычисление векторного поля по его источникам и вихрям . . . . .	40
§ 19. Изменение со временем потока через движущийся элемент поверхности . . . . .	42
§ 20. Криволинейные ортогональные координаты . . . . .	43
§ 21.* Тензоры. Полярные и аксиальные векторы . . . . .	46

### В. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

#### I. Электростатическое поле в пустоте

§ 22. Напряженность электрического поля . . . . .	54
§ 23. Поток электрических сил . . . . .	56
§ 24. Электростатический потенциал . . . . .	58
§ 25. Распределение электричества на проводниках . . . . .	59
§ 26. Емкость шарового и плоского конденсатора . . . . .	61
§ 27. Вытянутый эллипсоид вращения . . . . .	62
§ 28. Точечный заряд вблизи проводящей плоскости . . . . .	65
§ 29. Точечный заряд и шаровой проводник . . . . .	67

\* Параграфы, обозначенные звездочкой могут быть при первом чтении книги опущены.

## II. Диэлектрики

§ 30. Плоский конденсатор с диэлектрическим промежуточным слоем . . . . .	69
§ 31. Диэлектрическая поляризация . . . . .	71
§ 32. Максвелловский вектор смещения $\mathbf{D}$ . . . . .	73
§ 33. Шаровой конденсатор. Диэлектрический слой бесконечной толщины . . . . .	75
§ 34. Диэлектрический шар в однородном поле . . . . .	78

## III. Энергия и механические силы в электростатическом поле

§ 35. Заряды и металлические проводники в пустоте . . . . .	79
§ 36. Энергия поля при наличии изоляторов . . . . .	82
§ 37. Теорема Томсона . . . . .	85
§ 38. Диэлектрический шар в неоднородном поле . . . . .	87
§ 39. Механические силы в электростатическом поле . . . . .	89
§ 40. Электрострикция в химически-однородных жидкостях и газах . . . . .	92
§ 41. Механическая сила на поверхности диэлектрика . . . . .	97
§ 42. Максвелловы натяжения . . . . .	100

## IV. Постоянный электрический ток

§ 43. Законы Ома и Джоуля . . . . .	105
§ 44. Ток проводимости. Ток смещения. Ток поляризации . . . . .	108
§ 45. Сторонние силы и электродвижущая сила . . . . .	111
§ 46. Гальваническая цепь . . . . .	115

## C. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

### I. Магнитные векторы

§ 47. Напряженность магнитного поля в пустоте . . . . .	117
§ 48. Магнитное поле постоянных токов . . . . .	119
§ 49. Намагничение и магнитная восприимчивость . . . . .	125
§ 50. Магнитная индукция . . . . .	129
§ 51. Закон индукции Фарадея . . . . .	132

### II. Электродинамика неподвижных сред

§ 52. Максвелловы уравнения для неподвижных тел . . . . .	135
§ 53.* Магнитная энергия поля и Максвелловы натяжения магнитного поля . . . . .	138
§ 54. Единицы измерения электромагнитных величин . . . . .	145

### III. Электродинамика квазистационарных токов

§ 55. Закон энергии для системы линейных токов . . . . .	151
§ 56. Самоиндукция и взаимная индукция . . . . .	155
§ 57. Вычисление коэффициентов индукции для некоторых частных случаев . . . . .	158
§ 58. Цепь тока с сопротивлением и самоиндукцией . . . . .	163
§ 59. Векторная диаграмма . . . . .	164
§ 60. Два контура (трансформатор) . . . . .	166
§ 61. Цепь тока с самоиндукцией, емкостью и сопротивлением . . . . .	168

### IV. Электромагнитные волны

§ 62. Плоские волны в однородном изотропном диэлектрике . . . . .	172
§ 63. Плоские волны в однородных проводниках . . . . .	177

	Стр.
§ 64. Отражение от металлов . . . . .	181
§ 65. Вектор Пойнтинга в стационарном поле и в поле периодическом во времени . . . . .	184
§ 66. Скин-эффект . . . . .	187
§ 67. Самоиндукция и емкость двойного провода . . . . .	192
§ 68. Волны вдоль идеальных проводников . . . . .	196
§ 69.* Волны вдоль проводов при конечном сопротивлении, после них . . . . .	201
§ 70.* Комплексный вектор Пойнтинга в телеграфном уравнении . . . . .	207
§ 71. Общие электродинамические потенциалы . . . . .	210
§ 72. Решение Герца . . . . .	212
§ 73. Излучение линейного осциллятора . . . . .	216

## D. ОБ ЭНЕРГИИ И СИЛАХ В МАКСВЕЛЛОВОЙ ТЕОРИИ

### I. Термодинамика энергии поля

§ 74. Энергия поля как свободная энергия . . . . .	218
§ 75. Термические эффекты при постоянном объеме . . . . .	221
§ 76. Термодинамическая теория электрострикции . . . . .	225

### II. Действие сил при полях, изменяющихся во времени

§ 77. Максвелловы натяжения и принцип действия и противодействия . . . . .	228
--	-----

## E. ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

I. Задачи по векторному исчислению . . . . .	232
II. Задачи по электростатике . . . . .	234
III. Задачи по постоянному току . . . . .	237
IV. Задачи по постоянному магнетизму . . . . .	238
V. Задачи по электромагнетизму . . . . .	240
Решения . . . . .	242

## F. СВОДКА ФОРМУЛ И ОБОЗНАЧЕНИЙ

A. Векторы и векторные поля . . . . .	249
B. Электродинамика . . . . .	250
C. Дальнейшая дегализация уравнений I—VII . . . . .	252
Предметный указатель . . . . .	253

### ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать	По чьей вине
21	8 снизу	в единицу времени	в промежуток времени $dt$	Переводчика
72	11 снизу	$\left( \text{rad } \frac{1}{r} \right)$	$\left( \text{P} \cdot \text{grad } \frac{1}{r} \right)$	Типографии
83	8 снизу	$\int D_n ds$	$\int D_n dS$	Переводчика

Абрагам — Беккер, Теория электричества.

Ответственный редактор *Т. П. Кравец.*

Технический редактор *С. Водолагина.*

Сдано в набор 16/IX 1938 г. Подписано к печати 29/XI 1938 г. Тираж 7000. Формат бумаги  $62 \times 94^{1/16}$ . Уч.-авт. лист. 19. Автор. лист. 18,73. Печ. лист.  $16^{1/4}$ . Бум. лист.  $8^{1/8}$  + вкл. Колич. печ. зн. в бум. листе 100 000. Индекс Т-45-5-4. Заказ № 724. Лениоблгорлит № 4940. Отпечатано на бумаге Окуловской ф-ки

4-я тип. ГОНТИ НКТП СССР „Кр. Печати.“, Ленинград, Международный, пр., 75-а