

CURRENT ALGEBRAS  
and Applications to Particle Physics

*Stephen L. Adler*

*Roger F. Dashen*

The Institute for Advanced Study

W. A. BENJAMIN, INC.  
NEW YORK - AMSTERDAM

1968

*С. Адлер,  
Р. Дашен*

# АЛГЕБРЫ ТОКОВ

и их  
применение  
в физике  
частиц

*Перевод с английского*

*под редакцией*

*Л. Д. СОЛОВЬЕВА*

ИЗДАТЕЛЬСТВО „МИР“  
МОСКВА 1970

В книге изложены физические основы и важнейшие приложения нового, бурно развивавшегося в последние годы метода в теории элементарных частиц, позволившего описать нарушенную симметрию частиц и универсальность слабого взаимодействия. С его помощью получено большое число важных соотношений между наблюдаемыми на опыте величинами, характеризующими сильное, слабое и электромагнитное взаимодействия частиц.

Книга написана известными американскими теоретиками, внесшими значительный вклад в развитие этого метода. Книга рассчитана на студентов и аспирантов, изучающих современную теорию частиц. Она будет также полезным справочным пособием для физиков — теоретиков и экспериментаторов, — работающих в области физики высоких энергий и физики частиц. Ее с интересом прочтут все, кто, владея основами квантовой механики и теории поля, интересуется современными проблемами теории частиц.

*Редакция литературы по физике*

## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

В последние годы в теории элементарных частиц возникло и бурно развивалось новое направление — алгебра токов, занимающее в настоящее время важное место среди других направлений этой теории. Основной причиной возникновения алгебры токов явилось открытие большого числа новых частиц и резонансов, все попытки систематизации которых столкнулись с трудностью, состоящей в том, что, хотя частицы и обладают определенными признаками симметрии, эта симметрия довольно сильно нарушена. Потребовалось сформулировать теорию нарушенной симметрии элементарных частиц. С этой целью Гелл-Манн в 1962 г. предположил, что хотя симметрия адронов нарушена, тем не менее адронные токи, участвующие в слабом и электромагнитном взаимодействиях, удовлетворяют тем же коммутационным соотношениям, которым они удовлетворяли бы и в случае точной симметрии. Нарушение симметрии приводит лишь к тому, что эти токи не сохраняются и в коммутационные соотношения явным образом входит время. Те коммутаторы токов, которые не вытекали из теории симметрии, были постулированы исходя из требования универсальности слабого взаимодействия. Однако сначала не было ясно, как практически использовать эти коммутаторы, пока Фубини и Фурлан в 1965 г. не предложили способ извлечения информации из постулированных коммутационных соотношений. Тогда же Адлер и Вайсбергер, воспользовавшись этим способом и гипотезой о частичном сохранении аксиально-векторного тока, получили известное соотношение для константы  $\beta$ -распада, которое хорошо согласовывалось с экспериментом и явилось толчком для бурного развития этого

направления. В результате был получен ряд важных соотношений между наблюдаемыми на опыте величинами, характеризующими сильное, слабое и электромагнитное взаимодействия адронов.

В 1965 г. Н. Н. Боголюбов заметил, что некоторые соотношения алгебры токов могут быть получены без использования одновременных коммутаторов с помощью более общих соображений. Это замечание привело к развитию у нас метода свержходящихся правил сумм. Позже эти правила были получены итальянскими физиками. Данный метод нашел широкое применение в теории частиц как в сочетании с алгеброй токов, так и отдельно от нее.

И алгебра токов, и правила сумм развивались столь стремительно, что уже довольно скоро возникла необходимость их систематического изложения. Этой цели и служит книга С. Адлера и Р. Дашена, перевод которой предлагается вниманию читателя. Ее авторы — молодые американские физики — сами внесли значительный вклад в развитие алгебры токов. Они излагают физические основы и результаты этого метода ясно, доступно и увлеченно. Книга построена так, что авторы не повторяют выкладок журнальных статей, посвященных приложениям алгебры токов. Эти статьи целиком включены в книгу, которая вводит заинтересованного читателя непосредственно в мир журнальных статей, позволяет глубоко овладеть техникой нового метода и познакомиться с важными экспериментальными фактами. В то же время такое построение книги облегчает ее чтение для тех, кто интересуется лишь физическими основами и результатами алгебры токов и хотел бы опустить технические детали.

В американском издании книги помещено 22 статьи, представляющие собой уменьшенные фотокопии журнальных оригиналов. Перевод всех статей вызвал бы заметное увеличение объема книги. Поэтому мы сочли возможным включить в перевод лишь 14 статей, с неохотой опустив те из них, которые либо не имеют непосредственного отношения к приложениям алгебры токов, либо хорошо отражены в тексте, либо излагают программу, не получившую последующего развития. В конце каж-

дой главы приведен полный список статей, включенных авторами в книгу, и мы рекомендуем читателю, желающему глубже овладеть этим методом, прочесть опущенные при переводе статьи в оригинале.

Поскольку в книге отражено развитие алгебры токов и правил сумм до конца 1967 г., в послесловии к переводу дан краткий обзор дальнейшего развития этих методов, а также обсуждение связи алгебры токов с другими направлениями теории частиц.

При переводе были исправлены отдельные ошибки и добавлены необходимые ссылки на советские работы.

Нет сомнения, что книга С. Адлера и Р. Дашена будет весьма полезна студентам и аспирантам, изучающим теорию элементарных частиц. Она будет также полезным справочным пособием для всех физиков — теоретиков и экспериментаторов, — работающих в области физики высоких энергий и физики частиц. Ее с интересом прочтут все, кто, владея основами квантовой механики и теории поля, интересуется современным состоянием теории элементарных частиц.

Перевод книги выполнен М. В. Савельевым (гл. 1 и 6, ст. 9—13), В. И. Савриным (гл. 3 и 4, ст. 1—3), Л. Д. Соловьевым (предисловие, гл. «Обозначения», гл. 2, ст. 5—7) и Н. Е. Тюриным (гл. 5 и 7, ст. 4, 8, 14).

*Л. Д. Соловьев*

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В этой книге мы попытались отразить тот необычайно волнующий прогресс, который был достигнут в физике частиц за последние три года благодаря использованию «алгебры токов» и гипотез «о частичном сохранении аксиально-векторного тока». Книга составлена из наиболее важных журнальных статей, сгруппированных по темам, и написанных нами глав.

Всюду, где это возможно, мы старались объединить в одно целое журнальные статьи с текстом глав. Поэтому мы не повторяем дословно тех выкладок, которые подробно и достаточно ясно изложены в статьях. Вместо этого мы стремились привести основные сведения, необходимые для понимания статей, обсудить важные следствия, которые вытекают из их результатов, и вывести эти результаты с помощью другого, иногда более общего подхода. Кроме того, значительную часть текста составляет новый материал, который нелегко найти в других местах.

Вводная глава книги «Обозначения» позволит легко переходить от обозначений, используемых в статьях, к обозначениям глав.

Выбор статей для книги не был связан с соображениями приоритета. Если на одну и ту же тему было почти одновременно опубликовано несколько статей, мы, как правило, выбирали лишь *одну* из них. Точно так же мы не пытались включить в список литературы все статьи по данной теме, ограничившись ссылками на одну или две характерные статьи, в которых можно найти более подробную библиографию. В книгу включены статьи, опубликованные до осени 1966 г.; более поздние результаты изложены в тексте глав.

Для чтения книги достаточно знать лишь основные понятия теории поля и физики частиц. Для тех читателей, которые хотели бы освежить свои знания по этим предметам или интересуются доказательством ряда утверждений, используемых в тексте, мы предлагаем следующую литературу<sup>1)</sup>:

---

<sup>1)</sup> Литература на русском языке добавлена редактором перевода. — *Прим. ред.*

1. *Теория поля*: Bjorken J. D., Drell S. D., Relativistic Quantum Mechanics, New York, 1964; Relativistic Quantum Fields, New York, 1965.  
Mandl F., Introduction to Quantum Field Theory, New York, 1959.  
Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, М., 1957.  
Швебер С., Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, ИЛ, 1963.
2. *Слабые взаимодействия*: Jackson J. D., в книге Elementary Particle Physics and Field Theory, 1962 Brandeis Lectures, Vol. 1, New York, 1963.  
Treiman S. B., в книге Weak Interactions, 1962 Bergen Lectures, New York, 1963.  
Окунь Л. Б., Слабое взаимодействие элементарных частиц, М., 1963.
3.  $SU_3$ : Gell-Mann M., Ne'eman Y., The Eightfold Way, New York, 1964.  
Боголюбов Н. Н., в сб. «Физика высоких энергий и теория элементарных частиц», Киев, 1967.
4. *Полюса Редже*: Frautschi S. C., Regge Poles and S-Matrix Theory, New York, 1963.

Имея в виду читателей, которые хотели бы опустить технические детали, мы в ряде случаев излагаем одни и те же вопросы дважды: сначала в элементарной, затем в более сложной форме. Например, в § 2 гл. 2 мы даем обзор основных приложений низкоэнергетических теорем для пионов, а в § 3 той же главы некоторые из них обсуждаются более детально. Точно так же гл. 4 посвящена элементарному изложению методов правил сумм, которые еще раз обсуждаются, но в более общей и усложненной форме в гл. 5. В краткий курс, дающий основное представление об изложенном в книге материале, можно включить: гл. 1 и статью Гелл-Манна ([16] в гл. 1); гл. 2, § 1 и 2, статьи 2, 4 и 6 (см. стр. 124, 164 и 191 настоящей книги. — *Ред.*); гл. 3, § 1; гл. 4 и статью Фубини и Фурлана ([5] в гл. 4); гл. 6.

Мы хотели бы поблагодарить многих наших коллег, которые внесли вклад в наше понимание идей, обсуждаемых в этой книге. Мы признательны также проф. Абарбанелу за критическое чтение рукописи.

Стивен Л. Адлер  
Роджер Ф. Дашен

Принстон, Нью-Джерси, ноябрь 1967 г. [



## ОБОЗНАЧЕНИЯ

Введем обозначения, которых мы будем придерживаться в *главах* этой книги. Обозначения включенных в нее журнальных статей, разумеется, довольно разнообразны. Для облегчения ссылок на статьи мы дадим краткий „словарик“, позволяющий переходить от одних обозначений к другим. Во всей книге будут использоваться натуральные единицы ( $\hbar = c = 1$ ).

### § 1. Метрика Бьёркена — Дрелла и $\gamma$ -матрицы

Всюду в тексте глав мы будем использовать метрику и  $\gamma$ -матрицы, которые используются в книгах Бьёркена и Дрелла [1, 2]. Координаты  $t, x, y, z$  будем обозначать контравариантным 4-вектором

$$x^\mu \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (t, x, y, z) = (t, \mathbf{x}).$$

Ковариантный 4-вектор  $x_\mu$  равен

$$x_\mu \equiv (x_0, x_1, x_2, x_3) \equiv (t, -x, -y, -z) = g_{\mu\nu} x^\nu,$$

где метрический тензор  $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$  имеет вид

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Четырехмерный вектор импульса (4-импульс) частицы определяется следующим образом:

$$p^\mu \equiv (E, p_x, p_y, p_z) = [(\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}, \mathbf{p}];$$

отсюда, суммируя по повторяющимся индексам, получаем

$$p^2 \equiv p^\mu p_\mu = m^2.$$

Скалярное произведение двух 4-импульсов равно

$$p_1 \cdot p_2 \equiv p_1^\mu p_{2\mu} = p_{1\mu} p_2^\mu = E_1 E_2 - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = p_1^0 p_2^0 - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2.$$

Точно так же определяется произведение двух произвольных 4-векторов. 4-вектор электромагнитного потенциала определяется выражением

$$A^\mu \equiv (\Phi, \mathbf{A}),$$

где  $\Phi$  и  $\mathbf{A}$  — обычные скалярный и векторный потенциалы. 4-векторы всегда будут обозначаться обычным шрифтом, 3-векторы — полужирным шрифтом.

Для четырехмерного градиента будем использовать обозначения

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu};$$

например, 4-дивергенция  $B^\mu = (B^0, \mathbf{B})$  равна

$$\partial_\mu B^\mu = \partial^\mu B_\mu = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \mathbf{B} + \frac{\partial}{\partial t} B^0.$$

Четырехмерный лапласиан, обозначаемый  $\square_x^2$ , определяется следующим образом:

$$\square_x^2 \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 - \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)^2.$$

Пусть  $P^\mu$  обозначает оператор 4-импульса. Коммутатор произвольного полевого оператора  $F(x)$  с оператором  $P^\mu$  равен

$$[P^\mu, F(x)] = -i \partial^\mu F(x).$$

Это дает полезную формулу сдвига координат

$$F(x) = e^{iP \cdot x} F(0) e^{-iP \cdot x}.$$

Антикоммутиационные соотношения для  $\gamma$ -матриц уравнения Дирака имеют вид

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}.$$

Эти матрицы связаны с матрицами Дирака  $\alpha^r$  и  $\beta$  соотношениями

$$\gamma^r = \beta \alpha^r \quad (r = 1, 2, 3), \quad \gamma^0 = \beta.$$

Мы часто будем использовать комбинации

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu) = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu],$$

$$\gamma_5 = \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3,$$

$$\hat{\partial} = \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \beta \frac{\partial}{\partial t} + \beta\alpha \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}.$$

Стандартное представление для матриц Дирака имеет следующий вид. Пусть  $1$  и  $\sigma^r$  ( $r = 1, 2, 3$ ) обозначают единичную и паулиевские спиновые  $2 \times 2$ -матрицы

$$1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \sigma^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\sigma^2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Тогда  $\alpha^r$  ( $r = 1, 2, 3$ ) и  $\beta$  можно представить  $4 \times 4$ -матрицами

$$\alpha^r = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^r \\ \sigma^r & 0 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

В этом представлении

$$\gamma^r = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^r \\ -\sigma^r & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Как обычно,  $\hat{p}$  обозначает  $p_\mu \gamma^\mu$ .

Спинор  $u(p, s)$ , соответствующий положительной энергии ( $p$  — 4-импульс,  $s$  — спиновая переменная), удовлетворяет уравнению Дирака

$$(\hat{p} - m)u(p, s) = 0;$$

сопряженный же спинор  $\bar{u}(p, s) = u^\dagger(p, s)\gamma^0$  удовлетворяет уравнению

$$\bar{u}(p, s)(\hat{p} - m) = 0.$$

Спинор с положительной энергией нормирован так, что

$$\bar{u}(p, s)u(p, s) = 1,$$

и оператор проектирования на состояния с положительной энергией равен

$$\sum_s u(p, s) \bar{u}(p, s) = \frac{\hat{p} + m}{2m}.$$

Соответствующие формулы для спиноров с отрицательной энергией и полезные тождества с  $\gamma$ -матрицами имеются, например, в приложении А книги [1].

## § 2. Матрицы изоспина и $SU_3$

Изоспиновые матрицы  $\tau_a$  ( $a = 1, 2, 3$ ) и  $\tau_{\pm} = 1/2 (\tau_1 \pm i\tau_2)$  равны

$$\tau_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\tau_+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tau_- = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$SU_3$ -матрицы  $\lambda_k$  ( $k = 1, \dots, 8$ ) имеют вид

$$\lambda_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_8 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-2}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

След, коммутатор и антикоммутатор двух  $\lambda$ -матриц  $\lambda_k$  и  $\lambda_l$  даются выражениями

$$\text{Sp}(\lambda_k \lambda_l) = 2\delta_{kl},$$

$$[\lambda_k, \lambda_l] = 2if_{klm}\lambda_m,$$

$$\{\lambda_k, \lambda_l\} = \frac{4}{3}\delta_{kl} + 2d_{klm}\lambda_m,$$

в которых 1 обозначает единичную  $3 \times 3$ -матрицу и  $d_{klm}$  ( $f_{klm}$ ) полностью симметрично (антисимметрично) по своим индексам. Отличные от нуля элементы  $f_{klm}$  и  $d_{klm}$  равны

$klm$	$f_{klm}$	$klm$	$d_{klm}$
123	1	118	$1/\sqrt{3}$
147	1/2	146	1/2
156	-1/2	157	1/2
246	1/2	228	$1/\sqrt{3}$
257	1/2	247	-1/2
345	1/2	256	1/2
367	-1/2	338	$1/\sqrt{3}$
458	$\sqrt{3}/2$	344	1/2
678	$\sqrt{3}/2$	355	1/2
		366	-1/2
		377	-1/2
		448	$-1/(2\sqrt{3})$
		558	$-1/(2\sqrt{3})$
		668	$-1/(2\sqrt{3})$
		778	$-1/(2\sqrt{3})$
		888	$-1/\sqrt{3}$

### § 3. Суммирование по индексам

Всюду, где это не может привести к недоразумениям, мы будем считать, что по повторяющимся в одной части равенства индексам производится суммирование.

*Греческие индексы*  $\mu, \nu, \lambda, \sigma, \xi, \eta$  обозначают компоненты 4-векторов и суммируются от 0 до 3.

*Латинские индексы*  $r, s, t$  обозначают пространственные компоненты 4-векторов и суммируются от 1 до 3.

Латинские индексы  $a, b, c, j, k, l, m, n$  используются в качестве  $SU_3$ -индексов и суммируются от 1 до 8. (Эти же буквы могут обозначать индексы изоспина, тогда они суммируются от 1 до 3).

Знак полностью антисимметричного трехмерного тензора  $\epsilon^{rst}$  фиксирован условием  $\epsilon^{123} = 1$ ; заметим, что  $\epsilon_{rst} = -\epsilon^{rst}$ . Знак полностью антисимметричного четырехмерного тензора  $\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}$  фиксирован условием  $\epsilon^{0123} = 1$ .

#### § 4. Метрика Паули и „словарик“ для перевода формул

Мы рассмотрим также другую часто употребляемую метрику, так называемую метрику Паули. Эта метрика используется во многих статьях, помещенных в книгу, а также в гл. 2, § 3, п. 2, где рассматриваются выражения, взятые из статьи Чью, Голдбергера, Лоу и Намбу ([11], в гл. 2) по фоторождению (в которой употребляется метрика Паули). В этой метрике используются лишь величины с нижними индексами. Координаты обозначаются 4-вектором  $x_\mu$ :

$$x_\mu \equiv (x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, x_3, ix_0) = \\ = (x, y, z, it) = (x, it).$$

Точно так же определяется 4-импульс частицы

$$p_\mu \equiv (p_1, p_2, p_3, p_4) \equiv (p_x, p_y, p_z, iE),$$

так что

$$p^2 \equiv p_\mu p_\mu \equiv \sum_{\mu=1}^4 p_\mu^2 = -m^2.$$

Скалярное произведение двух 4-векторов равно

$$p_1 \cdot p_2 \equiv p_{1\mu} p_{2\mu} \equiv \sum_{\mu=1}^4 p_{1\mu} p_{2\mu} = \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 - E_1 E_2,$$

оно отличается знаком от скалярного произведения в метрике Бьёркена — Дрелла. 4-вектор электромагнитного потенциала равен  $A_\mu \equiv (\mathbf{A}, i\Phi)$ .

Четырехмерный градиент обозначается символом

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu},$$

четырёхмерная дивергенция  $B_\mu = (\mathbf{B}, iB_0)$  имеет вид

$$\partial_\mu B_\mu = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{B} + \frac{\partial}{\partial x_4} B_4 = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{B} + \frac{\partial}{\partial t} B_0,$$

а четырёхмерный лапласиан

$$\square_x^2 \equiv \partial_\mu^2 = \left( \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right)^2 = \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)^2 - \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^2.$$

Коммутатор полевого оператора  $F(x)$  с оператором 4-импульса  $P_\mu$

$$[P_\mu, F(x)] = i\partial_\mu F(x)$$

даёт формулу для сдвига координат

$$F(x) = e^{-iP \cdot x} F(0) e^{iP \cdot x}.$$

В метрике Паули  $\gamma$ -матрицы удовлетворяют антикомму-  
тационным соотношениям

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}; \quad \mu, \nu = 1, \dots, 4,$$

и следующим образом связаны с матрицами Дирака:

$$\begin{aligned} \gamma_r &= -i\beta\alpha^r = i\alpha^r\beta, \\ \gamma_4 &= \beta. \end{aligned}$$

Комбинации  $\sigma_{\mu\nu}$ ,  $\gamma_5$  и  $\hat{\partial}$  имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{\mu\nu} &= \frac{1}{2i} [\gamma_\mu, \gamma_\nu], \quad \gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4, \\ \hat{\partial} &= \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \gamma_4 \frac{\partial}{\partial x_4} + \boldsymbol{\gamma} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \\ &= -i\beta \frac{\partial}{\partial t} - i\beta\boldsymbol{\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}. \end{aligned}$$

В представлении для  $\alpha^r$  и  $\beta$ , которое было введено выше, мы имеем

$$\begin{aligned} \gamma_r &= \begin{bmatrix} 0 & -i\sigma^r \\ i\sigma^r & 0 \end{bmatrix}, & \gamma_4 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \\ \gamma_5 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Если положить  $\hat{p} = p_\mu \gamma_\mu$ , то спинор с положительной энергией  $u(p, s)$  и сопряженный ему спинор  $\bar{u}(p, s) = u^\dagger(p, s) \gamma_4$  будут удовлетворять соотношениям

$$(-i\hat{p} - m)u(p, s) = (\hat{p} - im)u(p, s) = \bar{u}(p, s)(\hat{p} - im) = 0,$$

$$\bar{u}(p, s)u(p, s) = 1,$$

$$\sum_s u(p, s)\bar{u}(p, s) = \frac{\hat{p} + im}{2im} = \frac{-i\hat{p} + m}{2m}.$$

Заметим, что спинор  $u(p, s)$  не зависит от используемой метрики. Дальнейшие сведения о метрике Паули можно найти в статье Джексона ([3], приложение В) и в книге Мандля ([4], приложение F).

Подытожим теперь процесс перехода от одной метрики к другой.

„СЛОВАРИК“ ДЛЯ ПЕРЕВОДА ФОРМУЛ

Метрика Бьёркена — Дрелла  $\longleftrightarrow$  Метрика Паули

$A \cdot B$	$- A \cdot B$
$\partial_\mu B^\mu$	$\partial_\mu B_\mu$
$\square_x^2$	$-\square_x^2$
$e^{iP \cdot x}$	$e^{-iP \cdot x}$
$\gamma_5$	$-\gamma_5$
$\gamma^r$	$i\gamma_r$
$\gamma^0$	$\gamma_4$
$\hat{\partial}$	$i\hat{\partial}$
$\hat{p}$	$-i\hat{p}$

Литература

1. Bjorken J. D., Drell S. D., Relativistic Quantum Mechanics, New York, 1964 (особенно App. A, p. 281).
2. Bjorken J. D., Drell S. D., Relativistic Quantum Fields, New York, 1965.
3. Jackson J. D., в книге Elementary Particle Physics and Field Theory, 1962 Brandeis Lectures, Vol. 1, New York, 1963.
4. Mandl F., Introduction to Quantum Field Theory, New York, 1959.



# ОСНОВНЫЕ ГИПОТЕЗЫ: АЛГЕБРА ТОКОВ И ДИВЕРГЕНЦИИ ТОКОВ

## § 1. Слабые и электромагнитные токи

Эта книга посвящена главным образом изучению слабых и электромагнитных взаимодействий сильно взаимодействующих частиц (адронов). Взаимодействия обоих типов описываются *токами*. Плотность 4-вектора электромагнитного тока  $J_{EM}^\lambda(x) = (\rho(x), \mathbf{J}(x))$ , где  $\mathbf{J}$  и  $\rho$  — плотности электрического тока и заряда соответственно, хорошо известна. В 1958 г. было установлено, что распады адронов, обусловленные слабыми взаимодействиями, также описываются токами [1]. После открытия приближенной  $SU_3$ -инвариантности сильных взаимодействий оказалось [2], что  $SU_3$ -симметрия представляет собой единую основу для описания как электромагнитных, так и слабых взаимодействий. (Происхождение этой единой картины описано в книге Гелл-Манна и Неемана [14].) Мы будем использовать  $SU_3$ -симметричную картину слабых и электромагнитных взаимодействий как отправную точку в рассмотрении алгебр токов и дивергенций токов.

В  $SU_3$ -инвариантной схеме слабые и электромагнитные взаимодействия описываются октетом векторных токов

$$\mathfrak{F}_j^\lambda(x), \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} j &= \text{индекс унитарного спина} = 1, \dots, 8, \\ \lambda &= \text{пространственный индекс} = 0, 1, 2, 3, \end{aligned}$$

и октетом аксиально-векторных токов

$$\mathfrak{F}_j^{5\lambda}(x). \quad (1.2)$$

Здесь термин *октет* употребляется для описания трансформационных свойств токов при  $SU_3$ -вращениях в воображаемом мире, в котором выключено взаимодействие, нарушающее  $SU_3$ -симметрию. В дальнейшем мы придадим

этому термину более точный смысл, даже в том случае, когда  $SU_3$ -симметрия нарушена. Векторный октет представляет собой обычный октет сохраняющихся токов унитарного спина; первые три его компоненты — ток изотопического спина, а его восьмая компонента пропорциональна току гиперзаряда:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_j^\lambda &= I_j^\lambda = \text{изоспиновой ток, } j = 1, 2, 3, \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \mathfrak{F}_8^\lambda &= Y^\lambda = \text{ток гиперзаряда.} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Компоненты  $\mathfrak{F}_4^\lambda, \dots, 7$ , сохраняющиеся лишь в отсутствие нарушения  $SU_3$ -инвариантности, изменяют странность. Если определить восемь генераторов унитарного спина („заряды векторного октета“)  $F_j$  формулой

$$F_j(x^0) = \int d^3x \mathfrak{F}_j^0(x), \quad (1.4)$$

то операторами изотопического спина и гиперзаряда будут соответственно

$$I_j = F_j, \quad j = 1, 2, 3, \quad Y = \frac{2}{\sqrt{3}} F_8. \quad (1.5)$$

В отсутствие нарушения  $SU_3$ -инвариантности  $F_j$  являются интегралами движения,

$$\frac{d}{dx^0} F_j(x^0) = 0. \quad (1.6)$$

Ниже мы увидим, как модифицируется (1.6), если  $SU_3$ -симметрия нарушается.

Четырехмерный вектор электромагнитного тока  $J_{EM}^\lambda$  строится из компонент векторного октета следующим образом:

$$J_{EM}^\lambda = e \left( \mathfrak{F}_3^\lambda + \frac{1}{\sqrt{3}} \mathfrak{F}_8^\lambda \right). \quad (1.7)$$

Член, пропорциональный  $\mathfrak{F}_3^\lambda$ , является третьей компонентой изотопического вектора, а член, пропорциональный  $\mathfrak{F}_8^\lambda$ , — изотопическим скаляром. Так как

$$Q = \int d^3x J_{EM}^0(x) = e \left( I_3 + \frac{1}{2} Y \right), \quad (1.8)$$

то соотношение Гелл-Манна — Нишиджимы выполняется. Плотность лагранжиана, описывающего взаимодействие электромагнитного поля  $A^\lambda(x)$  с адронами, имеет вид

$$\mathcal{L}_{EM}(x) = -A_\lambda(x) J_{EM}^\lambda(x). \quad (1.9)$$

Этот лагранжиан описывает электромагнитные свойства адронов во всех порядках по электромагнитной константе связи  $e^1$ ).

Мы не имеем в своем распоряжении теории слабых взаимодействий в высших порядках по константе связи и поэтому не можем выписать плотность лагранжиана этого взаимодействия в обычном смысле. Лучшее, что мы можем сделать, это записать *эффективный* лагранжиан, матричные элементы которого непосредственно описывают слабые взаимодействия в низшем порядке теории возмущений. Вся имеющаяся экспериментальная информация (за исключением недавно обнаруженного малого нарушения  $CP$ -инвариантности в каонных распадах [3])<sup>2)</sup> согласуется с эффективным лагранжианом, имеющим вид произведения токов

$$\mathcal{L}_{эфф} = \frac{G}{\sqrt{2}} [J_\lambda^\dagger J^\lambda]_S \equiv \frac{G}{2\sqrt{2}} (J_\lambda^\dagger J^\lambda + J^\lambda J_\lambda^\dagger). \quad (1.10)$$

Здесь  $G \approx 10^{-5}/M_{\text{протон}}^2$  — постоянная Ферми, а слабый ток  $J^\lambda$  есть сумма лептонной и адронной частей

$$J^\lambda = J_l^\lambda + J_h^\lambda. \quad (1.11)$$

Лептонный ток равен

$$J_l^\lambda = \bar{\nu}_\mu \gamma^\lambda (1 - \gamma_5) \mu + \bar{\nu}_e \gamma^\lambda (1 - \gamma_5) e, \quad (1.12)$$

<sup>1)</sup> Чтобы убедиться в правильности свойств лагранжиана (1.9) по отношению к зарядовому сопряжению, заметим, что нейтральные сохраняющие странность члены векторного октета ( $\mathcal{F}_3^\lambda$  и  $\mathcal{F}_8^\lambda$ ) нечетны при зарядовом сопряжении. Соответствующие нейтральные члены аксиально-векторного октета четны при зарядовом сопряжении.

<sup>2)</sup> Эффекты нарушения  $CP$ -инвариантности в книге не рассматриваются.

где  $\mu$  и  $\nu_\mu$  — поля мюона и его нейтрино (и аналогично для  $e$  и  $\nu_e$ ). Адронный ток строится из векторного и аксиально-векторного октетов согласно рецепту

$$J_h^\lambda = (\mathfrak{F}_1^\lambda + i\mathfrak{F}_2^\lambda - \mathfrak{F}_1^{5\lambda} - i\mathfrak{F}_2^{5\lambda}) \cos \theta_c + \\ + (\mathfrak{F}_4^\lambda + i\mathfrak{F}_5^\lambda - \mathfrak{F}_4^{5\lambda} - i\mathfrak{F}_5^{5\lambda}) \sin \theta_c. \quad (1.13)$$

Экспериментальное значение угла Кабиббо  $\theta_c$  приблизительно равно  $15^\circ$ .

Эффективный лагранжиан (1.10) описывает слабые взаимодействия трех основных типов — чисто лептонное, полулептонное и нелептонное:

$$\mathcal{L}_{\text{эфф}} = \mathcal{L}_{\text{эфф}}^l + \mathcal{L}_{\text{эфф}}^{sl} + \mathcal{L}_{\text{эфф}}^{nl}, \quad (1.14a)$$

$$\mathcal{L}_{\text{эфф}}^l = \frac{G}{\sqrt{2}} [J_{i\lambda}^\dagger J_i^\lambda]_S, \quad (1.14б)$$

$$\mathcal{L}_{\text{эфф}}^{sl} = \frac{G}{\sqrt{2}} [J_{i\lambda}^\dagger J_h^\lambda + J_{h\lambda}^\dagger J_i^\lambda]_S, \quad (1.14в)$$

$$\mathcal{L}_{\text{эфф}}^{nl} = \frac{G}{\sqrt{2}} [J_{h\lambda}^\dagger J_h^\lambda]_S \quad (1.14г)$$

(как и в (1.10),  $[ ]_S$  обозначает симметризованное произведение токов). Лептонный эффективный лагранжиан  $\mathcal{L}_{\text{эфф}}^l$  совпадает с обычным лагранжианом, используемым для описания  $\mu$ -распада. Полулептонная часть  $\mathcal{L}_{\text{эфф}}^{sl}$  обеспечивает выполнение известных правил отбора для адронного  $\beta$ -распада. Сохраняющие странность адронные токи

$$(\mathfrak{F}_1^\lambda + i\mathfrak{F}_2^\lambda - \mathfrak{F}_1^{5\lambda} - i\mathfrak{F}_2^{5\lambda}) \cos \theta_c$$

и

$$(\mathfrak{F}_1^\lambda - i\mathfrak{F}_2^\lambda - \mathfrak{F}_1^{5\lambda} + i\mathfrak{F}_2^{5\lambda}) \cos \theta_c$$

являются соответственно  $(1+i2)$ - и  $(1-i2)$ -членами изотопического триплета. Поэтому выражение (1.14в) обеспечивает выполнение правила отбора  $\Delta I = 1$  для полулептонных распадов, сохраняющих странность. Правило  $|\Delta I| = 1/2$  для изменяющих странность лептонных распадов адронов также отражено в (1.14), так как изменяющие странность адронные токи

$$(\mathfrak{F}_4^\lambda \pm i\mathfrak{F}_5^\lambda - \mathfrak{F}_4^{5\lambda} \mp i\mathfrak{F}_5^{5\lambda}) \sin \theta_c$$

являются членами (различных) изоспиновых дублетов. Далее, правило  $\Delta S/\Delta Q = 1$  гарантируется использованием  $(4 \pm i5)$ -компонент токов в  $J_h^\lambda$ . Как показал Кабиббо [2], скорости  $\beta$ -распадов адронов, предсказанные с помощью  $\mathcal{L}_{\text{эфф}}^{sl}$ , находятся в хорошем согласии с экспериментом.

Имеет ли  $\mathcal{L}_{\text{эфф}}^{nl}$  вид произведения токов (1.14г), установлено не столь надежно. Приближенное правило отбора  $|\Delta I| = 1/2$ , обнаруженное в адронных распадах, не является непосредственным следствием лагранжиана (1.14г), который содержит части как с  $|\Delta I| = 1/2$ , так и с  $|\Delta I| = 3/2$ . Существуют, однако, аргументы в пользу того, что динамически доминирующей является часть с  $|\Delta I| = 1/2$  (см., например, [4]).

Внимательный читатель заметит, что мы еще не сказали, как нормирован адронный ток  $J_h^\lambda$ . Для того чтобы фиксировать шкалу слабого тока, мы можем, следуя Гелл-Манну, постулировать „алгебру токов“.

## § 2. Коммутаторы и дивергенции токов в лагранжевой теории поля

Исторически постулаты об алгебрах токов и дивергенциях токов явились обобщением результатов, полученных в теории поля. Поэтому, прежде чем приступить к рассмотрению этих постулатов, кратко обсудим дивергенции и коммутаторы токов в рамках лагранжевой теории поля. Пусть  $\{\Phi(x)\} = \{\Phi_1(x), \Phi_2(x), \dots\}$  и  $\{\partial_\lambda \Phi(x)\}$  означают наборы полей и их пространственно-временных производных<sup>1)</sup>. Взаимодействие полей описывается плотностью лагранжиана

$$\mathcal{L}(x) \equiv \mathcal{L}[\{\Phi\}, \{\partial_\lambda \Phi\}] \quad (1.15)$$

и уравнениями Эйлера — Лагранжа

$$\frac{\delta \mathcal{L}(x)}{\delta \Phi_j(x)} = \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta [(\partial/\partial x^\lambda) \Phi_j(x)]}. \quad (1.16)$$

<sup>1)</sup> Мы используем стандартные обозначения  $\partial_\lambda \equiv \partial/\partial x^\lambda$ ,  $\partial^\lambda \equiv \partial/\partial x_\lambda$ .

Определим канонический импульс  $\Pi_j$  следующим образом:

$$\Pi_j(x) \equiv \frac{\delta \mathcal{L}(x)}{\delta [\partial_0 \Phi_j(x)]}. \quad (1.17)$$

Как обычно, квантование в теории производится путем задания канонических коммутационных (или антикоммутационных) соотношений

$$[\Phi_j(x) \Phi_{j'}(y) \mp \Phi_{j'}(y) \Phi_j(x)]|_{x^0=y^0} =$$

$$= [\Pi_j(x) \Pi_{j'}(y) \mp \Pi_{j'}(y) \Pi_j(x)]|_{x^0=y^0} = 0, \quad (1.18)$$

$$[\Phi_j(x) \Pi_{j'}(y) \mp \Pi_{j'}(y) \Phi_j(x)]|_{x^0=y^0} = i \delta_{jj'} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Соотношение со знаком минус (коммутатор) соответствует случаю, когда один из индексов  $j, j'$  (либо оба) относится к бозону; соотношение со знаком плюс (антикоммутатор) — случаю, когда оба индекса  $j, j'$  относятся к фермионам. Преобразование Лежандра дает плотность гамильтониана

$$\mathcal{H}(x) = \sum_j \Pi_j(x) \partial_0 \Phi_j(x) - \mathcal{L}(x). \quad (1.19)$$

Если в плотности лагранжиана или гамильтониана встречаются произведения операторов полей, то всегда предполагается, что произведения бозонных полей *симметризованы*, а произведения фермионных полей *антисимметризованы*.

Существует простой способ построения физических токов и получения их дивергенций и коммутационных соотношений. Подвергнем поля бесконечно малому локальному калибровочному преобразованию

$$\Phi_j(x) \rightarrow \Phi_j(x) + \Lambda(x) G_j[\{\Phi(x)\}]. \quad (1.20)$$

В первом порядке по бесконечно малой калибровочной функции  $\Lambda$  плотность лагранжиана  $\mathcal{L}$  изменится на

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Lambda} \Lambda + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\alpha \Lambda)} \partial_\alpha \Lambda, \quad (1.21)$$

где

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Lambda} = \sum_j \left\{ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Phi_j} G_j + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\alpha \Phi_j)} \partial_\alpha G_j \right\} \quad (1.22)$$

и

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\alpha \Lambda)} = \sum_j \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\alpha \Phi_j)} G_j. \quad (1.23)$$

Вычислим теперь дивергенцию 4-вектора  $\delta \mathcal{L} / \delta (\partial_\alpha \Lambda)$ .

$$\partial_\alpha \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\alpha \Lambda)} = \sum_j \left\{ \partial_\alpha \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\alpha \Phi_j)} G_j + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\alpha \Phi_j)} \partial_\alpha G_j \right\}. \quad (1.24)$$

С помощью уравнения Эйлера — Лагранжа мы можем исключить величину  $\partial_\alpha \delta \mathcal{L} / \delta (\partial_\alpha \Phi_j)$ ; тогда уравнение (1.24) примет вид

$$\sum_j \left\{ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Phi_j} G_j + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\alpha \Phi_j)} \partial_\alpha G_j \right\} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Lambda}. \quad (1.25)$$

Другими словами, если обозначить через  $J^\alpha$  ток, связанный с калибровочным преобразованием (1.20):

$$J^\alpha \equiv - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\alpha \Lambda)} = - \sum_j \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\alpha \Phi_j)} G_j, \quad (1.26)$$

то его дивергенция равна

$$\partial_\alpha J^\alpha = - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Lambda}. \quad (1.27)$$

Таким образом, выражение для дивергенции через поля можно вывести непосредственно из плотности лагранжиана без использования уравнений движения Эйлера — Лагранжа. В частности, если  $\delta \mathcal{L} / \delta \Lambda = 0$ , то ток  $J^\alpha$  сохраняется. В силу соотношения (1.21) равенство  $\delta \mathcal{L} / \delta \Lambda = 0$  означает, что плотность лагранжиана инвариантна относительно калибровочного преобразования (1.20) при постоянной калибровочной функции ( $\partial_\alpha \Lambda \equiv 0$ ).

Чтобы изучить коммутационные соотношения для токов, мы рассмотрим конкретный случай, когда эти токи отвечают *линейным* калибровочным преобразованиям. Пусть  $J_f^\alpha$  и  $J_g^\alpha$  — два таких тока, отвечающих калибровочным преобразованиям

$$\Phi_j(x) \rightarrow \Phi_j(x) + \Lambda(x) \sum_l f_{jl} \Phi_l(x) \quad (1.28a)$$

и

$$\Phi_j(x) \rightarrow \Phi_j(x) + \Lambda(x) \sum_l g_{jl} \Phi_l(x) \quad (1.28б)$$

соответственно. Из определений токов (1.26) и канонических импульсов (1.17) следует, что временные компоненты токов в этом случае просто билинейны по каноническим полям и импульсам:

$$\begin{aligned} J_f^0(x) &= - \sum_{jl} f_{jl} [\Pi_j(x) \Phi_l(x)]_s, \\ J_g^0(x) &= - \sum_{jl} g_{jl} [\Pi_j(x) \Phi_l(x)]_s. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Мы предполагаем, что матрицы  $f_{jl}$  и  $g_{jl}$  связывают только бозонные поля  $\Phi_l$  с бозонными импульсами  $\Pi_j$  или фермионные поля  $\Phi_l$  с фермионными импульсами  $\Pi_j$ , так что не возникает бозон-фермионных перекрестных членов. Квадратные скобки в (1.29) определяются следующим образом:

$$[\Pi_j(x) \Phi_l(x)]_s = \begin{cases} \frac{1}{2} [\Pi_j(x) \Phi_l(x) + \Phi_l(x) \Pi_j(x)] & \text{(бозоны),} \\ \frac{1}{2} [\Pi_j(x) \Phi_l(x) - \Phi_l(x) \Pi_j(x)] & \text{(фермионы)} \end{cases} \quad (1.30)$$

в соответствии с требованием симметризации или антисимметризации произведений полей.

Вычислим теперь одновременной коммутатор токов  $J_f^0$  и  $J_g^0$ :

$$\begin{aligned} [J_f^0(x), J_g^0(y)]|_{x^0=y^0} &= \\ &= \sum_{jll'} f_{jl} g_{j'l'} [ [\Pi_j(x) \Phi_l(x)]_s, [\Pi_{j'}(y) \Phi_{l'}(y)]_s ]|_{x^0=y^0}. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Используя канонические коммутационные соотношения (1.18), легко найти коммутатор в правой части (1.31):

$$\begin{aligned} [ [\Pi_j(x) \Phi_l(x)]_s, [\Pi_{j'}(y) \Phi_{l'}(y)]_s ]|_{x^0=y^0} &= \\ &= [\Pi_j(x) \Phi_{l'}(x)]_s i\delta_{lj'} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \\ &\quad - [\Pi_{j'}(x) \Phi_l(x)]_s i\delta_{l'j} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (1.32)$$



Подставляя это выражение в (1.31), получаем

$$\begin{aligned}
 [J_f^0(x), J_g^0(y)]|_{x^0=y^0} &= i\delta(x-y) \sum_{j'l'l'} f_{jl} g_{j'l'} \times \\
 &\times \{ \delta_{j'l'} [\Pi_j(x) \Phi_{l'}(x)]_S - \delta_{l'l} [\Pi_{j'}(x) \Phi_l(x)]_S \} = \\
 &= i\delta(x-y) \sum_{jl} \left\{ \sum_{j'm} (f_{jm} g_{ml} - g_{jm} f_{ml}) [\Pi_j(x) \Phi_l(x)]_S \right\} = \\
 &= i\delta(x-y) \sum_{jl} [f, g]_{jl} [\Pi_j(x) \Phi_l(x)]_S = -i\delta(x-y) J_{[f, g]}^0(x).
 \end{aligned}
 \tag{1.33}$$

Другими, словами коммутатор временных компонент токов, построенных с помощью матриц  $f$  и  $g$ , совпадает с временной компонентой тока, построенного с помощью матрицы  $[f, g]$ . Коммутатор не связан с детальной структурой плотности лагранжиана, а определяется исключительно видом калибровочных преобразований, которым соответствуют токи  $J_f^a$  и  $J_g^a$ . Предположим, что мы построили калибровочные преобразования с помощью конечного набора матриц  $f, g, h, \dots, t$ , которые образуют замкнутую алгебру по отношению к операции коммутации. Тогда временные компоненты соответствующих токов образуют замкнутую алгебру по отношению к одно-временной коммутации.

Проиллюстрируем теперь эти общие замечания двумя конкретными примерами.

## 1. КВАРКОВАЯ МОДЕЛЬ

Кварковая модель [5]<sup>1)</sup> является одной из наиболее полезных теоретико-полевых моделей для изучения коммутационных соотношений между токами. Вместо того чтобы вводить поля для наблюдаемых частиц (нуклон, пион и т. п.), мы предположим, что все наблюдаемые частицы представляют собой связанные состояния трех частиц с дробными зарядами — „кварков“. Будем обозначать их символами  $p', n'$  и  $\lambda'$ . Спин кварков равен  $1/2$ , они

<sup>1)</sup> G. Zweig, CERN Reports Nos. 8182/TH. 401 and 8419/TH. 412, 1964, не опубликовано.

преобразуются по низшему представлению группы  $SU_3$  и обладают следующими квантовыми числами:

$$\begin{array}{cccc}
 & Q & Y & B & I \\
 p' & 2/3 & 1/3 & 1/3 & 1/2 \\
 n' & -1/3 & 1/3 & 1/3 & 1/2 \\
 \lambda' & -1/3 & -2/3 & 1/3 & 0
 \end{array} \quad (1.34)$$

( $B$  — барионное число,  $I$  — изотопический спин).

В настоящее время неизвестно, существуют ли кварки, и если существуют, то как взаимодействуют между собой. Возможно, что кварковая модель (даже если кварки не являются физическими частицами) вследствие ее математической простоты правильно предсказывает коммутационные соотношения между токами.

Три четырехкомпонентных кварковых поля мы объединим в один вектор-столбец  $q$

$$q = \begin{pmatrix} p' \\ n' \\ \lambda' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p'_1 \\ \vdots \\ p'_4 \\ n'_1 \\ \vdots \\ n'_4 \\ \lambda'_1 \\ \vdots \\ \lambda'_4 \end{pmatrix} \quad (1.35)$$

подобно тому, как это делается при рассмотрении нуклонного изотопического спина. В качестве плотности лагранжиана возьмем следующее выражение:

$$\mathcal{L} = -\bar{q}(-i\gamma^\alpha \partial_\alpha + m_q + \delta m_q \lambda_8)q - g'(\bar{q}q)(\bar{q}q), \quad (1.36)$$

где  $\lambda_8$  — одна из  $3 \times 3$ -матриц, определенных в главе „Обозначения“. Для иллюстрации мы предположили существование локального четырехфермионного взаимодействия, хотя оно и не приводит к перенормируемой теории. Член  $-\bar{q} \delta m_q \lambda_8 q$  в лагранжиане нарушает  $SU_3$ -симметрию модели, но, как мы увидим, не влияет на

коммутационные соотношения временных компонент векторного и аксиально-векторного токов.

Векторный ток (ток унитарного спина) определяется калибровочным преобразованием

$$q \rightarrow \left(1 + \frac{i}{2} \lambda_k u_k\right) q, \quad (1.37)$$

где  $u_k$  — калибровочная функция, и равен

$$\mathfrak{F}_k^\alpha = - \frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta (\partial_\alpha u_k)} = \bar{q} \gamma^\alpha \frac{1}{2} \lambda_k q, \quad (1.38)$$

причем

$$\partial_\alpha \mathfrak{F}_k^\alpha = - \frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta u_k} = f_{k8m} \bar{q} \delta t_m \lambda_m q. \quad (1.39)$$

Как мы и ожидали, в модели с нарушенной  $SU_3$ -симметрией дивергенция тока унитарного спина отлична от нуля. Аксиально-векторный ток определяется преобразованием

$$q \rightarrow \left(1 + \frac{i}{2} \gamma_5 \lambda_k v_k\right) q \quad (1.40)$$

с другой калибровочной функцией  $v_k$  и имеет вид

$$\mathfrak{F}_k^{5\alpha} = - \frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta (\partial_\alpha v_k)} = \bar{q} \gamma^\alpha \gamma_5 \frac{1}{2} \lambda_k q. \quad (1.41)$$

Применяя соотношение (1.33), мы находим, что по отношению к одновременной коммутации временные компоненты векторного и аксиально-векторного токов в кварковой модели образуют замкнутую алгебру:

$$\begin{aligned} [\mathfrak{F}_k^0(x), \mathfrak{F}_l^0(y)]|_{x^0=y^0} &= i\delta(x-y) f_{klm} \mathfrak{F}_m^0(x), \\ [\mathfrak{F}_k^0(x), \mathfrak{F}_l^{50}(y)]|_{x^0=y^0} &= i\delta(x-y) f_{klm} \mathfrak{F}_m^{50}(x), \\ [\mathfrak{F}_k^{50}(x), \mathfrak{F}_l^{50}(y)]|_{x^0=y^0} &= i\delta(x-y) f_{klm} \mathfrak{F}_m^0(x). \end{aligned} \quad (1.42)$$

Чтобы лучше понять структуру соотношений (1.42), введем киральные токи  $\mathfrak{F}_k^{L\alpha}$  и  $\mathfrak{F}_k^{R\alpha}$  [называемые так из-за присутствия киральных проекционных операторов  $\frac{1}{2}(1 \mp \gamma_5)$ ]

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_k^{L\alpha} &= \frac{1}{2} (\mathfrak{F}_k^\alpha - \mathfrak{F}_k^{5\alpha}) = \bar{q} \gamma^\alpha \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \frac{1}{2} \lambda_k q, \\ \mathfrak{F}_k^{R\alpha} &= \frac{1}{2} (\mathfrak{F}_k^\alpha + \mathfrak{F}_k^{5\alpha}) = \bar{q} \gamma^\alpha \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \frac{1}{2} \lambda_k q. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Одновременные коммутационные соотношения временных компонент киральных токов

$$\begin{aligned} [\mathfrak{F}_k^{L0}(x), \mathfrak{F}_l^{L0}(y)]|_{x^0=y^0} &= i\delta(x-y) f_{klm} \mathfrak{F}_m^{L0}(x), \\ [\mathfrak{F}_k^{R0}(x), \mathfrak{F}_l^{R0}(y)]|_{x^0=y^0} &= i\delta(x-y) f_{klm} \mathfrak{F}_m^{R0}(x), \quad (1.44) \\ [\mathfrak{F}_k^{L0}(x), \mathfrak{F}_l^{R0}(y)]|_{x^0=y^0} &= 0 \end{aligned}$$

показывают, что в данном случае мы имеем две *различные*  $SU_3$ -алгебры. Таким образом, киральные комбинации векторного и аксиально-векторного токов в кварковой модели по отношению к одновременной коммутации образуют алгебру  $SU_3 \times SU_3$ . Соотношения (1.42) — (1.44) иллюстрируют сделанное выше замечание о том, что коммутационные соотношения временных компонент токов зависят только от структуры соответствующих калибровочных преобразований, но не от структуры лагранжиана. В частности, соотношения (1.42) — (1.44) являются точными, несмотря на присутствие в лагранжиане кварковой модели члена  $-\bar{q} \delta m_q \lambda_8 q$ , нарушающего  $SU_3$ -симметрию.

## 2. $\sigma$ -МОДЕЛИ

Гелл-Манн и Леви [15] предложили интересную модель, описывающую взаимодействие нуклона, пиона и гипотетического скалярного мезона  $\sigma'$ , который имеет отличное от нуля вакуумное среднее  $\langle \sigma' \rangle_0$ . Временные компоненты векторного и аксиально-векторного токов в этой модели удовлетворяют алгебре  $SU_2 \times SU_2$ , а дивергенция аксиально-векторного тока пропорциональна пионному полю. Мы кратко рассмотрим октетное обобщение этой модели<sup>1)</sup>. Помимо трех кварковых полей, введем унитарный синглет — скалярный мезон  $\sigma'$  (причем  $\langle \sigma' \rangle_0 = A \neq 0$ ), октет скалярных мезонов  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_8)$ ,

<sup>1)</sup> Эта модель была предложена Леви [6]; см также работу Гелл-Манна [16].

унитарный синглет — псевдоскалярный мезон  $\pi$  и октет псевдоскалярных мезонов  $\pi$ . Плотность лагранжиана <sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} = & -\bar{q} \left[ -i\gamma^\alpha \partial_\alpha - \right. \\ & \left. -g_0 \left( \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma' + \sqrt{\frac{2}{3}} i\pi\gamma_5 + \sigma \cdot \lambda + i\pi \cdot \lambda\gamma_5 \right) \right] q + \\ & + \frac{1}{2} [\partial_\alpha \sigma' \partial^\alpha \sigma' + \partial_\alpha \pi \partial^\alpha \pi + \partial_\alpha \sigma \cdot \partial^\alpha \sigma + \partial_\alpha \pi \cdot \partial^\alpha \pi] - \\ & - \frac{1}{2} \mu_0^2 [(\sigma')^2 + \pi^2 + \sigma \cdot \sigma + \pi \cdot \pi] - \\ & - \lambda_0 [(\sigma')^2 + \pi^2 + \sigma \cdot \sigma + \pi \cdot \pi - A^2]^2 + \mu_0^2 A \sigma' \end{aligned} \quad (1.45)$$

приводит к ренормируемой теории поля. Векторный ток

$$\mathfrak{F}_k^\alpha = \bar{q} \gamma^\alpha \frac{1}{2} \lambda_k q + f_{klm} (\pi_l \partial^\alpha \pi_m + \sigma_l \partial^\alpha \sigma_m) \quad (1.46)$$

сохраняется, поскольку лагранжиан инвариантен относительно  $SU_3$ -группы. Аксиально-векторный ток соответствует калибровочному преобразованию

$$\begin{aligned} \sigma' & \rightarrow \sigma' + \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\pi}, \\ \pi_k & \rightarrow \pi_k - \sqrt{\frac{2}{3}} v_k \sigma' - d_{klm} v_l \sigma_m, \\ \pi & \rightarrow \pi - \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \\ \sigma_k & \rightarrow \sigma_k + \sqrt{\frac{2}{3}} v_k \pi + d_{klm} v_l \pi_m, \\ q & \rightarrow \left( 1 + \frac{i}{2} \gamma_5 \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{v} \right) q \end{aligned} \quad (1.47)$$

и равен

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_k^{5\alpha} = & - \frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta (\partial_\alpha v_k)} = \bar{q} \gamma^\alpha \gamma_5 \frac{1}{2} \lambda_k q - \\ & - \sqrt{\frac{2}{3}} (\partial^\alpha \sigma' \pi_k - \sigma' \partial^\alpha \pi_k + \partial^\alpha \sigma_k \pi - \sigma_k \partial^\alpha \pi) - \\ & - d_{klm} (\partial^\alpha \sigma_l \pi_m - \sigma_l \partial^\alpha \pi_m). \end{aligned} \quad (1.48)$$

<sup>1)</sup> В последующих выражениях  $\sigma \cdot \lambda$  есть кратная запись суммы

$\sum_{k=1}^8 \sigma_k \lambda_k$  и т. д.

Дивергенция аксиально-векторного тока пропорциональна пионному октету

$$\partial_a \mathfrak{S}_k^{5a} = - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta v_k} = - \mu_0^2 A \sqrt{\frac{2}{3}} \pi_k. \quad (1.49)$$

Мы предоставляем читателю в качестве упражнения показать, что временные компоненты векторного и аксиально-векторного токов в этой модели удовлетворяют коммутационным соотношениям (1.42) модели кварков. Указание. Для доказательства того, что мезонные члены в  $[\mathfrak{S}_k^0, \mathfrak{S}_l^0]$ ,  $[\mathfrak{S}_k^0, \mathfrak{S}_l^{50}]$  и  $[\mathfrak{S}_k^{50}, \mathfrak{S}_l^{50}]$  имеют правильный вид, следует использовать тождества

$$\begin{aligned} \text{а) } & f_{pkm} f_{mlq} - f_{plm} f_{mkq} = f_{klm} f_{pmq}, \\ \text{б) } & f_{pkm} d_{mlq} - d_{plm} f_{mkq} = f_{klm} d_{pmq}, \\ \text{в) } & d_{pkm} d_{mlq} - d_{plm} d_{mkq} + \frac{2}{3} (\delta_{kp} \delta_{lq} - \delta_{kq} \delta_{lp}) = - f_{klm} f_{pmq}, \end{aligned} \quad (1.50)$$

которые получаются из тождеств для следов

$$\begin{aligned} \text{а) } & \text{Sp}([\lambda_p, \lambda_k][\lambda_l, \lambda_q] - [\lambda_p, \lambda_l][\lambda_k, \lambda_q]) = \\ & = \text{Sp}([\lambda_k, \lambda_l][\lambda_q, \lambda_p]), \\ \text{б) } & \text{Sp}([\lambda_p, \lambda_k]\{\lambda_l, \lambda_q\} - \{\lambda_p, \lambda_l\}[\lambda_k, \lambda_q]) = \\ & = \text{Sp}([\lambda_k, \lambda_l]\{\lambda_q, \lambda_p\}), \\ \text{в) } & \text{Sp}(\{\lambda_p, \lambda_k\}\{\lambda_l, \lambda_q\} - \{\lambda_p, \lambda_l\}\{\lambda_k, \lambda_q\}) = \\ & = \text{Sp}([\lambda_k, \lambda_l][\lambda_q, \lambda_p]). \end{aligned} \quad (1.51)$$

Одновременный коммутатор дивергенции аксиально-векторного тока с временной компонентой аксиально-векторного тока также имеет простой вид в октетной  $\sigma$ -модели. Из выражений (1.48) и (1.49) непосредственным вычислением получаем

$$\begin{aligned} & [\partial_a \mathfrak{S}_k^{5a}(x), \mathfrak{S}_l^{50}(y)]|_{x^0=y^0} = \\ & = -i\delta(x-y) \mu_0^2 A \sqrt{\frac{2}{3}} \left( \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma' \delta_{kl} + d_{klm} \sigma_m \right). \end{aligned} \quad (1.52)$$

Правая часть соотношения (1.52) упрощается при  $1 \leq k, l \leq 3$ , так как для индексов, пробегающих эти значения,  $d_{klm} = 3^{-1/2} \delta_{kl} \delta_{m3}$ . Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} & [\partial_\alpha \mathfrak{F}_k^{5\alpha}(x), \mathfrak{F}_l^{50}(y)]|_{x^0=y^0} = \\ & = -i\delta(x-y) \delta_{kl} \mu_0^2 A \sqrt{\frac{2}{3}} \left( \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma' + \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_8 \right) = \\ & = \delta_{kl} \times \text{Изоскаляр}, \quad 1 \leq k, l \leq 3. \end{aligned} \quad (1.53)$$

### § 3. Гипотеза алгебры токов

#### 1. АЛГЕБРА ВРЕМЕННЫХ КОМПОНЕНТ

Почти все статьи в этой книге базируются на гипотезе Гелл-Манна [16] об алгебре токов. Эта гипотеза утверждает, что временные компоненты *физических* векторного и аксиально-векторного октетов [т. е. октетов, которые могут быть измерены в электромагнитных и слабых взаимодействиях адронов; см. (1.1) – (1.14)] удовлетворяют одновременным коммутационным соотношениям кварковой модели

$$[\mathfrak{F}_k^{50}(x), \mathfrak{F}_l^{50}(y)]|_{x^0=y^0} = i\delta(x-y) f_{klm} \mathfrak{F}_m^{50}(x), \quad (1.54a)$$

$$[\mathfrak{F}_k^{50}(x), \mathfrak{F}_l^{50}(y)]|_{x^0=y^0} = i\delta(x-y) f_{klm} \mathfrak{F}_m^{50}(x), \quad (1.54b)$$

$$[\mathfrak{F}_k^{50}(x), \mathfrak{F}_l^{50}(y)]|_{x^0=y^0} = i\delta(x-y) f_{klm} \mathfrak{F}_m^{50}(x). \quad (1.54b)$$

Определим восемь „зарядов аксиального октета“  $F_j^5$

$$F_j^5(x^0) = \int d^3x \mathfrak{F}_j^{50}(x); \quad (1.55)$$

тогда из соотношения (1.54) следует, что  $F_j^5$  и  $F_j$  из (1.4) удовлетворяют одновременным коммутационным соотношениям

$$[F_k(x^0), F_l(x^0)] = if_{klm} F_m(x^0), \quad (1.56a)$$

$$[F_k(x^0), F_l^5(x^0)] = if_{klm} F_m^5(x^0), \quad (1.56b)$$

$$[F_k^5(x^0), F_l^5(x^0)] = if_{klm} F_m^5(x^0). \quad (1.56b)$$

Проинтегрированные коммутационные соотношения (1.56) являются более общим вариантом гипотезы Гелл-Манна,

чем (1.54), так как даже если бы в правой части соотношений (1.54), кроме членов с  $\delta$ -функцией, присутствовали члены с производными, то соотношения (1.56) и тогда остались бы справедливыми.

Существует ряд соображений в пользу гипотезы Гелл-Манна. Приведем два наиболее важных.

1) Соотношения (1.54) и (1.56) определяют, в каком смысле  $SU_3$ -симметрия является точным, а не приближенным свойством природы. Как мы видели в § 1, физически наблюдаемые заряды векторного октета отождествляются с унитарными генераторами. Соотношение (1.56a) постулирует следующее: несмотря на то что гамильтониан сильного взаимодействия ввиду нарушения  $SU_3$ -симметрии не коммутирует со всеми генераторами, при коммутировании между собой генераторы *в точности* удовлетворяют алгебре  $SU_3$ . Далее, однократно проинтегрированное соотношение (1.54б)

$$[F_k(x^0), \mathfrak{F}_l^{50}(x)] = if_{klm} \mathfrak{F}_m^{50}(x) \quad (1.57)$$

дает даже в случае нарушения  $SU_3$ -симметрии точный смысл утверждению о том, что временные компоненты аксиальных токов  $\mathfrak{F}_l^{50}$  образуют октет. Вообще октетом  $O_l(x)$  называется набор восьми величин, удовлетворяющих коммутационным соотношениям

$$[F_k(x^0), O_l(x)] = if_{klm} O_m(x). \quad (1.58)$$

Тензорное произведение двух октетов  $T_{lm}(x)$  удовлетворяет соотношению

$$[F_k(x^0), T_{lm}(x)] = if_{kln} T_{nm}(x) + if_{kmn} T_{ln}(x) \quad (1.59)$$

и т. д. Эта классификация тензоров по коммутационным соотношениям с  $F_k$  аналогична обычной классификации тензорных операторов в теории углового момента.

2) Еще более важным, чем предыдущее соображение, является то, что постулат алгебры токов фиксирует шкалу слабых токов и допускает новую точную формулировку гипотезы универсальности силы слабых взаимодействий. Напомним, что принцип универсальности в своей прежней формулировке утверждает, что слабые взаимодействия, вызывающие распад мюона и нейтрона,



имеют одну и ту же величину. Это отражается в записи эффективного лагранжиана в виде (1.10), где  $J_l^\lambda$  дается выражением (1.12) и

$$J_h^\lambda = \bar{p}\gamma^\lambda(1 - \gamma_5)n + \text{Мезонные члены.} \quad (1.60)$$

Другими словами, предполагается, что лептонный член

$$\bar{\nu}_\mu\gamma^\lambda(1 - \gamma_5)\mu + \bar{\nu}_e\gamma^\lambda(1 - \gamma_5)e$$

и нуклонный член  $\bar{p}\gamma^\lambda(1 - \gamma_5)n$  входят в полный слабый ток  $J^\lambda$  с одним и тем же коэффициентом. Вследствие эффектов перенормировки сильных взаимодействий физические константы нейтронного распада не будут, вообще говоря, совпадать с коэффициентом при  $\bar{p}\gamma^\lambda(1 - \gamma_5)n$  в  $J_h^\lambda$ . Однако Фейнман и Гелл-Манн [7] заметили, что если мезонные члены устроены так, что векторная часть  $J_h^\lambda$  сохраняется, то векторная константа связи нейтронного распада останется неперенормированной<sup>1)</sup>. Таким образом, гипотеза универсальности и гипотеза сохранения векторного тока (CVC) вместе объясняют тот экспериментальный факт, что константа  $G_\mu$  мюонного распада и векторная константа связи  $G_n$  нейтронного распада почти совпадают.

К сожалению, прежняя форма универсальности имеет некоторые серьезные недостатки. Прежде всего если мы предположим эту форму универсальности силы слабого взаимодействия и для распадов странных частиц

$$J_h^\lambda = \bar{p}\gamma^\lambda(1 - \gamma_5)n + \bar{p}\gamma^\lambda(1 - \gamma_5)\Lambda + \dots, \quad (1.61)$$

то получим скорости распадов странных частиц, которые почти в 10 раз превышают экспериментально наблюдаемые значения. Во-вторых, невозможно будет объяснить наблюдаемое расхождение в несколько процентов между значениями  $G_n$  и  $G_\mu$ . Наконец, обнаружение  $SU_3$ -симметрии сильных взаимодействий делает особенно нежелательным выражение универсальности посредством разбиения  $J_h^\lambda$  на члены, относящиеся к различным полям сильно взаимодействующих частиц. Например, если

<sup>1)</sup> Это обстоятельство было ранее замечено С. С. Герштейном и Я. Б. Зельдовичем [18]. — *Прим. ред.*

включить в выражение для тока лишь поля стабильных частиц, то необходимо будет взять нуклон, пион,  $\Omega^-$  и т. д. Однако, если мы включим  $\Omega^-$ , не должны ли мы также включить нестабильную частицу  $N^*(1238)$ , которая проявляется как резонанс в пион-нуклонном рассеянии, но которая также связана с  $\Omega^-$ -гипероном  $SU_3$ -симметрией? А если мы включим частицу  $N^*(1238)$ , то не посчитаем ли мы ее дважды? Другими словами, маловероятно, чтобы те фундаментальные поля, через которые можно просто выразить  $J_h^\lambda$ , непосредственно соответствовали известным сейчас стабильным частицам. (Они могли бы быть кварковыми полями, если бы кварки существовали.) Ясно, что нужна такая формулировка гипотезы универсальности, которая не требовала бы явной записи  $J_h^\lambda$  через поля частиц.

Для получения этой формулировки Гелл-Манн ввел гипотезу алгебры токов. Сначала он заметил, что для фиксирования шкалы лептонной и адронной частей слабого тока требуется нелинейное соотношение, например такое, как коммутатор компонент тока. Чтобы угадать правильное соотношение, он рассмотрел сначала лептонный ток  $J_l^\lambda$ . Определим лептонный заряд

$$W_{l+} = \frac{1}{2} \int d^3x J_l^0 = \frac{1}{2} \int d^3x [\nu_\mu^\dagger (1 - \gamma_5) \mu + \nu_e^\dagger (1 - \gamma_5) e] \quad (1.62)$$

и ему сопряженный

$$W_{l-} = W_{l+}^\dagger = \frac{1}{2} \int d^3x [\mu^\dagger (1 - \gamma_5) \nu_\mu + e^\dagger (1 - \gamma_5) \nu_e]. \quad (1.63)$$

Одновременный коммутатор  $W_{l+}$  и  $W_{l-}$  равен

$$[W_{l+}, W_{l-}] = 2W_{I3}, \quad (1.64)$$

где

$$W_{I3} = \frac{1}{4} \int d^3x [\nu_\mu^\dagger (1 - \gamma_5) \nu_\mu - \mu^\dagger (1 - \gamma_5) \mu + \nu_e^\dagger (1 - \gamma_5) \nu_e - e^\dagger (1 - \gamma_5) e]. \quad (1.65)$$

Далее, коммутатор  $W_{I3}$  и  $W_{l\pm}$  равен

$$[W_{I3}, W_{l\pm}] = \pm W_{l\pm}. \quad (1.66)$$

Таким образом, операторы  $W_{1\pm}$  и  $W_{13}$  образуют при одновременной коммутации замкнутую алгебру  $SU_2$ . В формулировке универсальности Гелл-Манна постулируется, что *адронные заряды*

$$W_{h+} = \frac{1}{2} \int d^3x J_h^0, \quad W_{h-} = W_{h+}^\dagger \quad (1.67)$$

*удовлетворяют тем же коммутационным соотношениям алгебры  $SU_2$ , что и лептонные заряды*

$$\begin{aligned} [W_{h+}, W_{h-}] &= 2W_{h3}, \\ [W_{h3}, W_{h\pm}] &= \pm W_{h\pm}. \end{aligned} \quad (1.68)$$

Предполагая, что адронный ток дается формулой (1.13), и используя проинтегрированную алгебру (1.56), находим, что соотношения (1.68) удовлетворяются, если

$$\begin{aligned} W_{h\pm} &= \frac{1}{2} (F_1 \pm iF_2 - F_1^5 \mp iF_2^5) \cos \theta_C + \\ &+ \frac{1}{2} (F_4 \pm iF_5 - F_4^5 \mp iF_5^5) \sin \theta_C \end{aligned} \quad (1.69)$$

и

$$\begin{aligned} W_{h3} &= \frac{1}{4} (1 + \cos^2 \theta_C) (F_3 - F_3^5) + \frac{1}{4} \sqrt{3} \sin^2 \theta_C (F_8 - F_8^5) - \\ &- \frac{1}{2} \sin \theta_C \cos \theta_C (F_6 - F_6^5). \end{aligned} \quad (1.70)$$

В том, что выражения (1.69) и (1.70) действительно удовлетворяют соотношениям (1.68), можно убедиться непосредственной, но трудоемкой проверкой, которую мы предоставляем читателю. Таким образом, определение слабого тока (1.13) и постулированные коммутационные соотношения (1.56) достаточны для того, чтобы обеспечить универсальность в смысле соотношений (1.68). Обратное, Гелл-Манн и Неeman [8] показали, что если слабый ток представляет собой произвольную комбинацию векторного и аксиально-векторного октетов, то из универсальности *следуют* алгебра (1.56) и выражение (1.13) для слабого тока.

Постулат универсальности не фиксирует угол  $\theta_C$ . Экспериментально фактор  $\operatorname{tg} \theta_C \approx 0,27$ , соответствующий значению угла Кабиббо  $\theta_C \approx 0,26 \text{ рад}$  ( $15^\circ$ ), объясняет

подавление распадов с изменением странности относительно распадов, в которых странность сохраняется [9]. При этом фактор  $\cos \theta_C \approx 0,97$  также может объяснить различие между  $G_n$  и  $G_\mu$ !

Заметим, что адронные заряды можно переписать в виде  $W_{h\pm} = W_{h\pm}(\theta_C)$ , где

$$W_{h\pm}(\theta) = e^{-2i\theta F_7} \frac{1}{2} (F_1 \pm iF_2 - F_1^5 \mp iF_2^5) e^{2i\theta F_7}. \quad (1.71)$$

В этом проще всего убедиться с помощью дифференциального уравнения  $W''_{h\pm}(\theta) = -W_{h\pm}(\theta)$  и граничных условий

$$W_{h\pm}(0) = \frac{1}{2} (F_1 \pm iF_2 - F_1^5 \mp iF_2^5)$$

и

$$W'_{h\pm}(0) = \frac{1}{2} (F_4 \pm iF_5 - F_4^5 \mp iF_5^5),$$

которые полностью определяют  $W_{h\pm}(\theta)$ . Таким образом,  $W_{h\pm}$  получается из

$$W_{h\pm}(0) = \frac{1}{2} (F_1 \pm iF_2 - F_1^5 \mp iF_2^5)$$

вращением в пространстве  $SU_3$ . Легко проверить, что  $W_{h\pm}(0)$  удовлетворяет (1.68), поэтому мы получаем простое доказательство того, что  $W_{h\pm}(\theta)$  также удовлетворяет (1.68) для любого  $\theta$  (показатели экспонент в коммутаторах сокращаются). Формула (1.71) позволяет уточнить смысл угла Кабиббо  $\theta_C$ . Поскольку заряд сохраняется, а лептонный ток изменяет заряд, то, следовательно, адронный слабый ток должен переносить единицу заряда. Наиболее общее выражение для векторного и аксиально-векторного токов, принадлежащих к октету и переносящих единицу заряда, получается (с точностью до несущественных фаз) вращением вокруг 7-й оси тока, направленного по  $(1 \pm i2)$ -оси. Универсальность требует, чтобы углы вращения для векторного и аксиально-векторного токов были одинаковы, но не определяет этого общего угла. Фактически в любой теории, которая не позволяет явно вычислять нарушение  $SU_3$ -симметрии, нет способа фиксировать угол  $\theta$ . Дело в том, что этот

угол определяется лишь после выделения  $(1 \pm i2)$ -направления в  $SU_3$ -пространстве. Единственное же физическое отличие направления  $(1 \pm i2)$  от направления  $(4 \pm i5)$  или от линейной комбинации этих двух направлений состоит в том, что при учете нарушения  $SU_3$ -симметрии ток  $\mathfrak{F}_1^\lambda \pm i\mathfrak{F}_2^\lambda$  остается сохраняющимся, а  $\mathfrak{F}_4^\lambda \pm i\mathfrak{F}_5^\lambda$  — нет. Поэтому, чтобы построить теорию, фиксирующую  $\theta$ , нужно найти связь между слабым током и взаимодействием, ответственным за нарушение  $SU_3$ -симметрии.

## 2. ОБОБЩЕНИЕ ГИПОТЕЗЫ

Существует естественное и полезное обобщение гипотезы алгебры токов, которое определяет коммутаторы зарядов векторного и аксиально-векторного октетов с пространственными компонентами векторного и аксиально-векторного токов. Выше отмечалось, что октет  $O_l(x)$  определяется коммутационными соотношениями (1.58) с зарядом  $F_k$  векторного октета. Так как мы хотим, чтобы токи  $\mathfrak{F}_k^\lambda$  и  $\mathfrak{F}_k^{5\lambda}$ , а не только их временные компоненты образовывали октеты, то мы должны постулировать коммутационные соотношения

$$\begin{aligned} [F_k(x^0), \mathfrak{F}_l^\lambda(x)] &= if_{klm} \mathfrak{F}_m^\lambda(x), \\ [F_k(x^0), \mathfrak{F}_l^{5\lambda}(x)] &= if_{klm} \mathfrak{F}_m^{5\lambda}(x). \end{aligned} \quad (1.72)$$

Чтобы сохранить полную симметрию между векторными и аксиально-векторными токами, которую мы имеем в соотношениях (1.54) и (1.56), мы постулируем дополнительно соотношения<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Соотношения (1.72) и (1.73) можно вывести из (1.54), если предположить, что коммутаторы дивергенций векторного и аксиально-векторного октетов не слишком сингулярны. Пусть  $A^\lambda$ ,  $B^\lambda$  и  $C^\lambda$  — 4-векторы, и пусть во всех лоренцевых системах

$$\left[ \int d^3x A^0(x), B^0(0) \right] \Big|_{x^0=0} = C^0(0).$$

Тогда инфинитезимальное преобразование Лоренца и интегрирование

$$\begin{aligned} [F_k^5(x^0), \mathfrak{F}_l^\lambda(x)] &= if_{klm} \mathfrak{F}_m^{5\lambda}(x), \\ [F_k^5(x^0), \mathfrak{F}_l^{5\lambda}(x)] &= if_{klm} \mathfrak{F}_m^\lambda(x). \end{aligned} \quad (1.73)$$

С точки зрения рассмотренной выше киральной группы  $SU_3 \times SU_3$ , соотношения (1.72) и (1.73) позволяют высказать естественное утверждение о том, что киральные токи  $\mathfrak{F}_k^{L\lambda}$  и  $\mathfrak{F}_k^{R\lambda}$  удовлетворяют октетным коммутационным соотношениям с киральными генераторами  $F_k^L$  и  $F_k^R$ , т. е.

$$\begin{aligned} [F_k^L(x^0), \mathfrak{F}_l^{L\lambda}(x)] &= if_{klm} \mathfrak{F}_m^{L\lambda}(x), \\ [F_k^R(x^0), \mathfrak{F}_l^{R\lambda}(x)] &= if_{klm} \mathfrak{F}_m^{R\lambda}(x), \\ [F_k^L(x^0), \mathfrak{F}_l^{R\lambda}(x)] &= [F_k^R(x^0), \mathfrak{F}_l^{L\lambda}(x)] = 0. \end{aligned} \quad (1.74)$$

При написании соотношений (1.72) — (1.74) мы всегда заботились о том, чтобы в коммутаторы с пространственными компонентами входили *проинтегрированные* временные компоненты токов. Непроинтегрированный вариант соотношений (1.72) — (1.74)

$$[\mathfrak{F}_k^0(x), \mathfrak{F}_l^r(y)] \Big|_{x^0=y^0} = i\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) f_{klm} \mathfrak{F}_m^r(y), \quad (1.75)$$

строго говоря, не верен для  $r = 1, 2, 3$ . Как мы покажем в гл. 3 (стр. 224), к правой части соотношения (1.75) нужно добавить член, пропорциональный градиенту  $\delta$ -функции (так называемый швингеровский член):

$$\begin{aligned} [\mathfrak{F}_k^0(x), \mathfrak{F}_l^r(y)] \Big|_{x^0=y^0} &= i\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) f_{klm} \mathfrak{F}_m^r(y) + \\ &+ i(\nabla_x)_i [\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) S_{kl}^{ir}(y)]. \end{aligned} \quad (1.76)$$

С этими швингеровскими членами было много путаницы. Можно строго показать, что для некоторых индексов

по частям приводят к соотношению

$$\left[ \int d^3x A^0(x), \mathbf{B}(0) \right] \Big|_{x^0=0} - \mathbf{C}(0) = \int d^3x x [\partial_\lambda A^\lambda(x), B^0(0)] \Big|_{x^0=0}.$$

Если коммутатор  $[\partial_\lambda A^\lambda(x), B^0(0)] \Big|_{x^0=0}$  содержит только дельта-функцию  $\delta(\mathbf{x})$  и не содержит ее градиентов, то мы получаем

$$\left[ \int d^3x A^0(x), \mathbf{B}(0) \right] \Big|_{x^0=0} = \mathbf{C}(0).$$

вакуумное ожидание оператора  $S_{kl}^{tr}$  не может быть равно нулю. Имеются две возможности, согласующиеся с условием  $\langle S_{kl}^{tr} \rangle_0 \neq 0$ : 1) оператор  $S_{kl}^{tr}$  является  $c$ -числом, при этом только его диагональные матричные элементы не равны нулю, или 2)  $S_{kl}^{tr}$  является оператором. Если использовать лишь обычные аксиомы теории поля и свойства коммутаторов, например тождество Якоби, то невозможно сделать выбор между этими возможностями. Дело в том, что существуют удовлетворяющие аксиомам теории свободных полей, в которых токи удовлетворяют соотношениям (1.72) и (1.73) и в которых  $S_{kl}^{tr}$  может быть как (бесконечным)  $c$ -числом (теория свободных кварков), так и оператором ( $\sigma$ -модель с выключенным взаимодействием). Поэтому, чтобы узнать что-либо о  $S_{kl}^{tr}$ , нужно изучить теорию, которая явно содержит взаимодействия, и единственный известный нам способ, как это сделать, состоит в том, чтобы использовать теорию возмущений. Однако исследования швингеровских членов в теории возмущений не дали определенных результатов [10]. В частности, решение вопроса о том, являются ли швингеровские члены  $c$ -числами или операторами, по-видимому, зависит от типа взаимодействия.

Резюмируя можно сказать, что свойства швингеровских членов столь сильно зависят от модели, что нет какого-либо естественного основания для постулирования их вида. К счастью, швингеровские члены *не* влияют на приложения, которые рассматриваются в последующих главах.

Используя соотношения (1.72) и (1.73), можно получить коммутаторы октетов зарядов  $F_k$  и  $F_k^5$  с лагранжианом  $\mathcal{L}_{\text{эфф}}^{nl}$  нелептонного слабого распада. Для этого введем

$$\begin{aligned} T_{lk}^{PC} &= T_{kl}^{PC} = [\mathfrak{F}_{k\lambda} \mathfrak{F}_l^\lambda + \mathfrak{F}_{k\lambda}^5 \mathfrak{F}_l^{5\lambda}]_S, \\ T_{lk}^{PV} &= T_{kl}^{PV} = [\mathfrak{F}_{k\lambda} \mathfrak{F}_l^{5\lambda} + \mathfrak{F}_{k\lambda}^5 \mathfrak{F}_l^\lambda]_S \end{aligned} \quad (1.77)$$

( $PC$  и  $PV$  означают „сохраняющий четность“ и „нарушающий четность“ соответственно) и, используя выражения (1.13) и (1.14г), запишем  $\mathcal{L}_{\text{эфф}}^{nl}$  в виде

$$\mathcal{L}_{\text{эфф}}^{nl} = \mathcal{L}_{\text{эфф}}^{nlPC} - \mathcal{L}_{\text{эфф}}^{nlPV}, \quad (1.78)$$

где

$$\mathcal{Q}_{\text{эфф}}^{nlPC} = \frac{G}{\sqrt{2}} [\cos^2 \theta_C (T_{11}^{PC} + T_{22}^{PC}) + \sin^2 \theta_C (T_{44}^{PC} + T_{55}^{PC}) + 2 \sin \theta_C \cos \theta_C (T_{14}^{PC} + T_{25}^{PC})]. \quad (1.79)$$

Нарушающая четность часть  $\mathcal{Q}_{\text{эфф}}^{nlPV}$  получается из (1.79) заменой  $PC$  на  $PV$ . Обобщенная алгебра токов определяет коммутационные соотношения  $F_k$  и  $F_k^5$  с различными тензорными членами в  $\mathcal{Q}_{\text{эфф}}^{nl}$

$$[F_k(x^0), T_{lm}^{PC}(x)] = if_{kln} T_{nm}^{PC}(x) + if_{kmn} T_{ln}^{PC}(x),$$

$$[F_k(x^0), T_{lm}^{PV}(x)] = if_{kln} T_{nm}^{PV}(x) + if_{kmn} T_{ln}^{PV}(x), \quad (1.80a)$$

$$[F_k^5(x^0), T_{lm}^{PC}(x)] = if_{kln} T_{nm}^{PV}(x) + if_{kmn} T_{ln}^{PV}(x),$$

$$[F_k^5(x^0), T_{lm}^{PV}(x)] = if_{kln} T_{nm}^{PC}(x) + if_{kmn} T_{ln}^{PC}(x). \quad (1.80б)$$

Как и следовало ожидать, соотношения (1.80a) суть не что иное, как коммутаторы тензорных произведений ( $T_{lm}^{PC}$  или  $T_{lm}^{PV}$ ) двух октетов с унитарным генератором  $F_k$ . Соотношения (1.80б) отражают тот интересный факт, что коммутаторы  $T_{lm}^{PC}$  и  $T_{lm}^{PV}$  с  $F_k^5$  и  $F_k$  совпадают, если сделать замену  $PC \leftrightarrow PV$  в правой части, которая необходима из-за псевдоскалярной природы  $F_k^5$ . Сравнивая (1.80a) и (1.80б), мы видим, что

$$[F_k^5(x^0), T_{lm}^{PC}(x)] = [F_k(x^0), T_{lm}^{PV}(x)],$$

$$[F_k^5(x^0), T_{lm}^{PV}(x)] = [F_k(x^0), T_{lm}^{PC}(x)]. \quad (1.81)$$

Поскольку  $\mathcal{Q}_{\text{эфф}}^{nlPC}$  и  $\mathcal{Q}_{\text{эфф}}^{nlPV}$  строятся из *одинаковых* линейных комбинаций тензоров  $T_{kl}^{PC}$  и  $T_{kl}^{PV}$  соответственно, то

$$[F_k^5(x^0), \mathcal{Q}_{\text{эфф}}^{nlPC}(x)] = [F_k(x^0), \mathcal{Q}_{\text{эфф}}^{nlPV}(x)],$$

$$[F_k^5(x^0), \mathcal{Q}_{\text{эфф}}^{nlPV}(x)] = [F_k(x^0), \mathcal{Q}_{\text{эфф}}^{nlPC}(x)], \quad (1.82)$$

$$[F_k(x^0) + F_k^5(x^0), \mathcal{Q}_{\text{эфф}}^{nl}(x)] = 0.$$



Ясно также, что коммутация с  $F_k^5$  ( $k = 1, 2, 3$ ) не меняет изоспинового характера различных частей  $\mathcal{Q}_{\text{эфф}}^{nl}$ . Поэтому для  $k = 1, 2, 3$  коммутатор  $[F_k^5, (\mathcal{Q}_{\text{эфф}}^{nlPC})_{|\Delta I|=1/2}]$  соответствует  $|\Delta I| = 1/2$ , а коммутатор  $[F_k^5, (\mathcal{Q}_{\text{эфф}}^{nlPC})_{|\Delta I|=3/2}]$  соответствует  $|\Delta I| = 3/2$ ; то же самое справедливо и для  $PV$ -частей. Как будет показано в гл. 2 (стр. 103), этот факт позволяет получить, используя алгебру токов, полезную информацию об изоспиновой структуре матричных элементов  $\mathcal{Q}_{\text{эфф}}^{nlPC}$  и  $\mathcal{Q}_{\text{эфф}}^{nlPV}$ .

При рассмотрении множественного рождения мягких пионов (см. гл. 2) встречаются коммутаторы вида

$$[\partial_\lambda \mathfrak{F}_k^{5\lambda}(x), \mathfrak{F}_l^{50}(y)]|_{x^0=y^0}, \quad 1 \leq k, l \leq 3. \quad (1.83)$$

На основании результатов, полученных в октетной  $\sigma$ -модели, Вайнберг (ст. 3) постулировал следующий вид этого коммутатора:

$$[\partial_\lambda \mathfrak{F}_k^{5\lambda}(x), \mathfrak{F}_l^{50}(y)]|_{x^0=y^0} = iM_\pi^2 \delta_{kl} \delta(x-y) \Sigma(y), \quad 1 \leq k, l \leq 3, \quad (1.84)$$

где оператор  $\Sigma(x)$  является лоренцевским скаляром и изоскаляром. Множитель  $M_\pi^2$  явно выделен для напоминания о том, что в  $\sigma$ -модели правая часть (1.84) пропорциональна квадрату затравочной массы пиона. При рассмотрении процессов рождения мягких пионов необходимо знать лишь вид соотношения (1.84) и трансформационные свойства  $\Sigma$ ; явный вид  $\Sigma$  оказывается несущественным. Интересно отметить, что, используя тождество Якоби

$$[\mathfrak{F}_m^{50}(z), [\partial_\lambda \mathfrak{F}_k^{5\lambda}(x), \mathfrak{F}_l^{50}(y)]] + [\partial_\lambda \mathfrak{F}_k^{5\lambda}(x), [\mathfrak{F}_l^{50}(y), \mathfrak{F}_m^{50}(z)]] + [\mathfrak{F}_l^{50}(y), [\mathfrak{F}_m^{50}(z), \partial_\lambda \mathfrak{F}_k^{5\lambda}(x)]] = 0 \quad (1.85)$$

и локальную алгебру Гелл-Манна, из соотношения (1.84) можно получить одновременный коммутатор  $\Sigma(x)$  с временной компонентой аксиального вектора  $\mathfrak{F}_m^{50}(z)$ . Этот коммутатор получается из соотношения (1.85) непосред-

ственными алгебраическими преобразованиями и имеет следующий вид <sup>1)</sup>:

$$[\mathfrak{F}_m^{50}(z), M_{\pi\Sigma}^2(x)]|_{z^0=x^0} = i\delta(z-x) \partial_\lambda \mathfrak{F}_m^{5\lambda}(x). \quad (1.86)$$

Иногда предполагают, что все компоненты физических векторного и аксиально-векторного токов удовлетворяют коммутационным соотношениям токов модели кварков; это предположение можно назвать „гипотезой кваркового тока“. При этом коммутатор двух пространственных компонент векторного октета имеет вид <sup>2)</sup>

$$[\mathfrak{F}_k^r(x), \mathfrak{F}_l^s(y)]|_{x^0=y^0} = -i\delta(x-y) \left[ g^{rsf}{}_{klm} \mathfrak{F}_m^0(y) + e^{rst} \left( \sqrt{\frac{2}{3}} \delta_{kl} \mathfrak{F}_{0t}^5(y) + d_{klm} \mathfrak{F}_{mt}^5(y) \right) \right] \quad (1.87)$$

и т. д. [При получении (1.87) полезно использовать тождество  $\gamma^r \gamma^s = g^{rs} + i\epsilon^{rst} \gamma^0 \gamma_t \gamma_5$ .] Соотношение (1.87) характерно для кварковой модели. Оно, например, не имеет места в октетной  $\sigma$ -модели, в чем читатель легко может убедиться. Следствия из „гипотезы кваркового тока“ обсуждаются Бьетти ([5] в гл. 4) и Бьёркенем (ст. 14).

#### § 4. Дивергенции токов

Для большинства применений алгебры токов, рассматриваемых в этой книге, нужно знать также *дивергенции* векторного и аксиально-векторного октетов. Обсудим гипотезы о дивергенциях токов.

<sup>1)</sup> Гелл-Манн [16] постулирует те же коммутационные соотношения (1.84) и (1.86), однако он делает и более сильное предположение о том, что оператор  $\Sigma$  связан с нарушающей  $SU_3$ -симметрию плотностью гамильтониана  $\mathcal{H}_8$ . Это предположение не является необходимым для рассмотрения процессов с испусканием мягких пионов, рассматриваемых в гл. 2.

<sup>2)</sup>  $\mathfrak{F}_0^\lambda$  и  $\mathfrak{F}_0^{5\lambda}$  — унитарно-синглетные аналоги октетных токов. В кварковой модели они даются формулами (1.38) и (1.41) с  $\lambda_0 = \sqrt{2/3}$ .

## 1. ГИПОТЕЗА О СОХРАНЕНИИ ВЕКТОРНОГО ТОКА ДЛЯ ВЕКТОРНОГО ОКТЕТА <sup>1)</sup>

Как обычно, мы предположим, что гамильтониан сильного взаимодействия имеет вид

$$H = H_0 + gH_8 = H_0 + g \int d^3x \mathcal{H}_8, \quad (1.88)$$

где свободный гамильтониан  $H_0$  инвариантен относительно группы  $SU_3$ , а  $H_8$  — восьмая компонента октета. Тогда октетное обобщение гипотезы о сохранении векторного тока можно записать в следующей локальной форме (при условии что нарушающая симметрию часть плотности лагранжиана не содержит производных полей):

$$\partial_\lambda \mathcal{F}_k^\lambda(x) = g f_{k8m} \mathcal{H}_m(x). \quad (1.89a)$$

Согласно формуле (1.89a), токи  $\mathcal{F}_{1,2,3,8}^\lambda$  сохраняются (это токи изотопического спина и гиперзаряда), тогда как дивергенции токов  $\mathcal{F}_{4,5,6,7}^\lambda$  пропорциональны параметру  $g$  нарушения  $SU_3$ -симметрии. Как было отмечено в § 1, если бы  $SU_3$ -симметрия была точной ( $g = 0$ ), все компоненты  $\mathcal{F}_k^\lambda$  были бы сохраняющимися. Нарушение симметрии приводит к замене уравнения (1.6) для  $(d/dx^0) F_k(x^0)$  на

$$\frac{d}{dx^0} F_k(x^0) = g f_{k8m} H_m. \quad (1.896)$$

## 2. ГИПОТЕЗА О ЧАСТИЧНОМ СОХРАНЕНИИ АКСИАЛЬНО-ВЕКТОРНОГО ТОКА ДЛЯ АКСИАЛЬНО-ВЕКТОРНОГО ОКТЕТА <sup>2)</sup>

Происхождение гипотезы о дивергенции аксиально-векторного октета связано с замечательным соотношением для амплитуды распада заряженного пиона, полученным Гольдбергером и Триманом [11]. Напомним, что

<sup>1)</sup> В английской литературе для термина «сохраняющийся векторный ток» часто используется сокращение *CVC*. — *Прим. перев.*

<sup>2)</sup> Для термина «частично сохраняющийся аксиально-векторный ток» в английской литературе используется сокращение *PCAC*. — *Прим. перев.*

константа  $f_\pi$  распада заряженного пиона определяется формулой<sup>1)</sup>

$$(2q^0)^{1/2} \langle \pi^+(q) | (\mathfrak{S}_1^{5\lambda} + i\mathfrak{S}_2^{5\lambda}) | 0 \rangle = - \frac{iq^\lambda f_\pi}{M_\pi^2}. \quad (1.90)$$

Соотношение Гольдбергера — Тримана

$$f_\pi \approx \frac{\sqrt{2} M_N M_\pi^2 g_A}{g_r} \quad (1.91)$$

( $M_N$  — масса нуклона,  $M_\pi$  — масса пиона) связывает  $f_\pi$  с нуклонной аксиально-векторной константой связи  $g_A$  ( $g_A \approx 1,18$ ), определяемой равенством

$$\begin{aligned} & \left( \frac{q_2^0 q_1^0}{M_N^2} \right)^{1/2} \langle p(q_2) | \mathfrak{S}_1^{5\lambda} + i\mathfrak{S}_2^{5\lambda} | n(q_1) \rangle = \\ & = \bar{u}_p(q_2) [g_A ((q_2 - q_1)^2) \gamma^\lambda \gamma_5 + (q_2 - q_1)^\lambda h_A ((q_2 - q_1)^2) \gamma_5] u_n(q_1), \\ & \quad g_A \equiv g_A(0), \end{aligned} \quad (1.92)$$

и с пион-нуклонной константой связи  $g_r$  ( $g_r^2/4\pi \approx 14,6$ ).

Гипотеза о частичном сохранении аксиально-векторного тока дает простое объяснение соотношения (1.91). Существуют две эквивалентные формулировки этой гипотезы, которые можно назвать „полологической“ и „полевой“. Мы получим соотношение (1.91) в каждой из них. Если  $\langle \beta(q_2) |$  и  $| \alpha(q_1) \rangle$  — произвольные состояния, то гипотеза о частичном сохранении аксиально-векторного тока для матричного элемента

$$\langle \beta(q_2) | \mathfrak{S}_1^{5\lambda} + i\mathfrak{S}_2^{5\lambda} | \alpha(q_1) \rangle$$

состоит в следующем.

*Полологическая формулировка* [12]. Постулируем, что матричный элемент дивергенции сохраняющего странность аксиально-векторного тока

$$\langle \beta(q_2) | \partial_\lambda (\mathfrak{S}_1^{5\lambda} + i\mathfrak{S}_2^{5\lambda}) | \alpha(q_1) \rangle$$

<sup>1)</sup> Ширина распада  $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$  равна  $\Gamma_\pi = G^2 \cos^2 \theta_C (M_\mu^2/M_\pi^3) \times \times (1 - M_\mu^2/M_\pi^2)^2 f_\pi^2 / (8\pi)$ . Из эксперимента следует, что  $f_\pi \approx 0,96 M_\pi^3$ , тогда как соотношение Гольдбергера — Тримана (1.91) предсказывает  $f_\pi \approx 0,83 M_\pi^3$ .

удовлетворяет дисперсионному соотношению по переменной  $q^2 = (q_2 - q_1)^2$  без вычитания и что в интервале  $0 < q^2 < M_\pi^2$  в этом дисперсионном соотношении доминирует пионный полюс.

*Полевая формулировка* (Гелл-Манн и Леви [15]). Постулируем, что дивергенция аксиально-векторного тока совпадает с точностью до нормировочной постоянной с интерполирующим пионным полем  $\Phi_{\pi^+}^+$

$$\partial_\lambda (\mathfrak{F}_1^{5\lambda} + i\mathfrak{F}_2^{5\lambda}) = c\Phi_{\pi^+}^+ = c\Phi_{\pi^-}^- \quad (1.93)$$

Постулируем, что матричный элемент соответствующего пионного тока

$$\langle \beta(q_2) | (\square^2 + M_\pi^2) \Phi_{\pi^+}^+ | \alpha(q_1) \rangle$$

является медленно меняющейся функцией  $q^2$  в интервале  $0 < q^2 < M_\pi^2$ .

Чтобы получить соотношение Гольдбергера — Тримана, положим  $\alpha = n$ ,  $\beta = p$ .

*Полологическая формулировка.* Рассмотрим соотношение

$$\begin{aligned} \left( \frac{q_2^0 q_1^0}{M_N^2} \right)^{1/2} \langle p(q_2) | \partial_\lambda (\mathfrak{F}_1^{5\lambda} + i\mathfrak{F}_2^{5\lambda}) | n(q_1) \rangle = \\ = iD(q^2) \bar{u}_p(q_2) \gamma_5 u_n(q_1), \quad (1.94) \\ D(q^2) \equiv 2M_N g_A(q^2) + q^2 h_A(q^2). \end{aligned}$$

Нетрудно показать, что функция  $D(q^2)$  аналитична в плоскости  $q^2$ , за исключением разреза вдоль вещественной оси от  $9M_\pi^2$  до  $\infty$  и пионного полюса при  $q^2 = M_\pi^2$  (фиг. 1.1). Если мы предположим, что дисперсионное соотношение по  $q^2$  справедливо без вычитаний, то мы можем написать

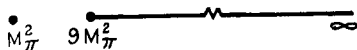
$$D(q^2) = \frac{\sqrt{2} g_{r\pi}}{M_\pi^2 - q^2} + \frac{1}{\pi} \int_{9M_\pi^2}^{\infty} \frac{d(m^2) \rho(m^2)}{m^2 - q^2}. \quad (1.95)$$

Член с пионным полюсом соответствует диаграмме, изображенной на фиг. 1.2; пион-нуклонной вершине соот-

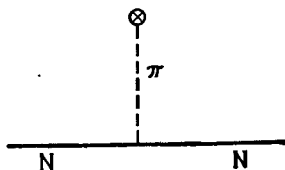
ветствует множитель  $\sqrt{2} g_r$ , а аннигиляция пиона оператором  $\partial_\lambda (\delta_1^{5\lambda} + i\delta_2^{5\lambda})$  дает множитель  $f_\pi$ . Из формулы (1.94) следует, что

$$D(0) = 2M_N g_A. \quad (1.96)$$

Если мы предположим, что в дисперсионном соотношении для  $D(0)$  доминирует вклад пионного полюса (это предположение правдоподобно, так как начало разреза



Фиг. 1.1. Сингулярности  $D(q^2)$  в комплексной плоскости  $q^2$ .



Фиг. 1.2. Диаграмма, соответствующая пионному полюсу в  $D(q^2)$ .

Символ  $\otimes$  соответствует аннигиляции пиона оператором  $\partial_\lambda (\delta_1^{5\lambda} + i\delta_2^{5\lambda})$ .

отстоит в 9 раз дальше от точки  $q^2 = 0$ , чем пионный полюс), то получим:

$$f_\pi \approx \frac{\sqrt{2} M_N M_\pi^2 g_A}{g_r}, \quad (1.97)$$

т. е. соотношение Гольдбергера — Тримана.

*Полевая формулировка.* Будем нормировать  $\Phi_{\pi^+}$  стандартным образом

$$(2q^0)^{1/2} \langle \pi^+(q) | \Phi_{\pi^+}^\dagger | 0 \rangle = 1. \quad (1.98)$$

Чтобы фиксировать постоянную  $c$ , возьмем матричный элемент соотношения (1.93) между состояниями протона и нейтрона, используя формулу

$$\begin{aligned} \langle p(q_2) | (\square^2 + M_\pi^2) \Phi_{\pi^+}^\dagger | n(q_1) \rangle &= \\ &= (-q^2 + M_\pi^2) \langle p(q_2) | \Phi_{\pi^+}^\dagger | n(q_1) \rangle \equiv \\ &\equiv \left( \frac{M_N^2}{q_2^0 q_1^0} \right)^{1/2} i \sqrt{2} g_r(q^2) \bar{u}_p(q_2) \gamma_5 u_n(q_1), \end{aligned} \quad (1.99)$$

которая определяет вне массовой поверхности пион-ну-клонную константу связи  $g_r(q^2)$ , соответствующую нашему выбору интерполирующего пионного поля. Как обычно,  $g_r(M_\pi^2) = g_r$ . Мы находим, что

$$2M_{Ng_A}(q^2) + q^2 h_A(q^2) = c(M_\pi^2 - q^2)^{-1} \sqrt{2} g_r(q^2),$$

и, беря  $q^2 = 0$ , получаем

$$c = \frac{\sqrt{2} M_N M_\pi^2 g_A}{g_r(0)}. \quad (1.100)$$

Чтобы связать  $c$  с константой пионного распада, умножим соотношение (1.90) на  $i q_\lambda$ ; это дает

$$f_\pi = (2q^0)^{1/2} \langle \pi^+(q) | \partial_\lambda (\mathfrak{F}_1^{5\lambda} + i\mathfrak{F}_2^{5\lambda}) | 0 \rangle. \quad (1.101)$$

Из соотношений (1.93), (1.98) и (1.100) получаем

$$f_\pi = c = \frac{\sqrt{2} M_N M_\pi^2 g_A}{g_r(0)}. \quad (1.102)$$

Если постулировать, что матричный элемент

$$\langle p(q_2) | (\square^2 + M_\pi^2) \Phi_{\pi^+}^\dagger | n(q_1) \rangle$$

является медленно меняющейся функцией  $q^2$ , то

$$g_r(0) \approx g_r \quad (1.103)$$

и соотношение (1.102) переходит в соотношение Гольдбергера — Тримана.

Чтобы сравнить предположения, сделанные в обеих формулировках гипотезы о частичном сохранении аксиально-векторного тока, рассмотрим соотношение, вытекающее из формул (1.93) — (1.95), (1.99) и (1.102):

$$\begin{aligned} \sqrt{2} g_r(q^2) f_\pi &= (M_\pi^2 - q^2) D(q^2) = \\ &= \sqrt{2} g_r f_\pi + (M_\pi^2 - q^2) \frac{1}{\pi} \int_{9M_\pi^2}^{\infty} \frac{d(m^2) \rho(m^2)}{m^2 - q^2}. \end{aligned} \quad (1.104)$$

Пионный полюс дает в  $g_r(q^2)$  постоянный вклад, зависимость  $g_r$  от  $q^2$  проистекает лишь от спектрального интеграла. Поэтому предположения о том, что зави-

симостью  $g_r$  от  $q^2$  можно пренебречь, и о том, что в  $D(q^2)$  доминирует пионный полюс, полностью эквивалентны. Отметим, что без предположения о медленном изменении формула

$$\partial_\lambda (\delta_1^{5\lambda} + i\delta_2^{5\lambda}) = c\Phi_\pi^+$$

бессодержательна, так как она тогда просто *определяет* выбор интерполирующего пионного поля. Значение  $\sigma$ -моделей, рассмотренных выше, состоит в том, что в них дивергенция аксиального тока совпадает с *каноническим* пионным полем. В этом случае следует ожидать, что предположение о медленном изменении выполняется.

Важно отметить, что при выводе соотношения Гольдбергера — Тримана из полологической формулировки мы *не* приравниваем вычеты пионного полюса в обеих частях соотношения (1.95). Дело в том, что вклад диаграммы пионного полюса, изображенной на фиг. 1.2, в  $h_A(q^2)$  равен

$$\frac{\sqrt{2} g_A f_\pi}{M_\pi^2} (M_\pi^2 - q^2)^{-1},$$

в то время как  $g_A(q^2)$  пионного полюса не имеет. Поэтому приравнивание вычетов пионного полюса в обеих частях соотношения (1.95) приводит лишь к тривиальному тождеству. Чтобы получить соотношение Гольдбергера — Тримана, необходимо рассмотреть точку, расположенную на некотором малом расстоянии от пионного полюса, например точку  $q^2 = 0$ .

Ясно, что так как утверждения о „медленном изменении“ или о „доминировании полюса“ не являются точными, то гипотеза о частичном сохранении аксиально-векторного тока не является точно определенной. В тех случаях, когда состояния  $\alpha$  или  $\beta$  содержат более одной частицы, имеется дополнительная неоднозначность, связанная с зависимостью матричных элементов

$$\langle \beta | \partial_\lambda (\delta_1^{5\lambda} + i\delta_2^{5\lambda}) | \alpha \rangle$$



от дополнительных, отличных от  $q^2$  переменных, таких, как энергия или передаваемый импульс. Далее, в этом случае не ясно, какая линейная комбинация переменных должна оставаться фиксированной, когда делается предположение о медленном изменении по  $q^2$  (или о доминировании полюса). Например, если  $\beta = N(p_2) + \pi(k)$  и  $\alpha = N(p_1)$ , то мы можем записать матричный элемент как функцию  $s$ ,  $t$ ,  $q^2$  или  $u$ ,  $t$ ,  $q^2$  (или  $c_1 s + c_2 u$ ,  $t$ ,  $q^2$  и т. д.), где  $s$ ,  $t$  и  $u$  — мандельштамовские переменные:

$$s = (p_2 + k)^2, \quad t = (k - q)^2, \quad u = (p_2 - q)^2. \quad (1.105)$$

Так как соотношение между  $s$  и  $u$  содержит  $q^2$ :

$$s + t + u = 2M_N^2 + M_\pi^2 + q^2, \quad (1.106)$$

то предположение о медленном изменении амплитуды по  $q^2$  при фиксированных  $s$  и  $t$  не совпадает с предположением о медленном изменении по  $q^2$  при фиксированных  $u$  и  $t$ . Возможный способ решения этой проблемы предложен Вайсбергером [17].

Можно также постулировать гипотезу о частичном сохранении аксиально-векторного тока для изменяющегося странность аксиально-векторного тока  $\mathfrak{S}_4^{5\lambda} + i\mathfrak{S}_5^{5\lambda}$ . Положительная формулировка утверждает тогда, что матричные элементы дивергенции  $\partial_\lambda (\mathfrak{S}_4^{5\lambda} + i\mathfrak{S}_5^{5\lambda})$  удовлетворяют дисперсионным соотношениям по переменной  $q^2$  без вычитаний, в которых при  $0 < q^2 < M_K^2$  доминирует вклад каонного полюса. К сожалению, гипотеза о частичном сохранении аксиально-векторного тока в этом случае, по-видимому, не является таким же хорошим приближением, как в случае  $\mathfrak{S}_1^{5\lambda} + i\mathfrak{S}_2^{5\lambda}$ , так как начало непрерывного спектра  $(M_K + 2M_\pi)^2$ , в этом случае расположено ненамного дальше от точки  $q^2 = 0$ , чем каонный полюс.

Подытоживая, мы видим, что гипотеза о частичном сохранении аксиально-векторного тока позволяет приближенно, как это указано выше, заменить матричные элементы дивергенции аксиально-векторного октета соответствующими матричными элементами, содержащими псевдоскалярные мезоны. Для различных членов

аксиально-векторного октета имеется следующее соответствие (мы опускаем нормировочные множители):

$$\begin{aligned} \partial_\lambda (\mathfrak{F}_1^{5\lambda} + \mathfrak{F}_2^{5\lambda}) &\rightarrow \Phi_{\pi^+}^\dagger, & \partial_\lambda (\mathfrak{F}_1^{5\lambda} - i\mathfrak{F}_2^{5\lambda}) &\rightarrow \Phi_{\pi^-}^\dagger, \\ \partial_\lambda \mathfrak{F}_3^{5\lambda} &\rightarrow \Phi_{\pi^0}^\dagger, \\ \partial_\lambda (\mathfrak{F}_4^{5\lambda} + i\mathfrak{F}_5^{5\lambda}) &\rightarrow \Phi_{K^+}^\dagger, & \partial_\lambda (\mathfrak{F}_4^{5\lambda} - i\mathfrak{F}_5^{5\lambda}) &\rightarrow \Phi_{K^0}^\dagger, & (1.107) \\ \partial_\lambda (\mathfrak{F}_6^{5\lambda} + i\mathfrak{F}_7^{5\lambda}) &\rightarrow \Phi_{K^0}^\dagger, & \partial_\lambda (\mathfrak{F}_6^{5\lambda} - i\mathfrak{F}_7^{5\lambda}) &\rightarrow \Phi_{K^+}^\dagger, \\ \partial_\lambda \mathfrak{F}_8^{5\lambda} &\rightarrow \Phi_\eta^\dagger. \end{aligned}$$

### § 5. Экспериментальные проверки гипотез

Подтверждает ли эксперимент рассмотренные нами гипотезы об алгебре токов и дивергенциях токов? Ниже, в главах, посвященных приложениям, мы увидим, что эти гипотезы позволили сделать много успешных предсказаний. Здесь же мы обсудим лишь первые проверки гипотез, которые исторически послужили для их „утверждения“ и стимулировали многие последующие приложения.

Как мы уже указывали, гипотеза о частичном сохранении сохраняющего странность аксиально-векторного тока была предложена для того, чтобы объяснить соотношение Гольдбергера — Тримана для пионного распада. Таким образом, первое важное подтверждение предшествовало гипотезе и указывало на то, что эта гипотеза (для  $\Delta S = 0$ ) дает, по-видимому, правильные результаты с ошибкой порядка 10%. В настоящее время еще не ясно, с какой точностью справедлива эта гипотеза в случае изменения странности.

Что же касается алгебры токов, то в пределе точной  $SU_3$ -симметрии из проинтегрированного коммутационного соотношения (1.56а), содержащего только векторные заряды  $F_k$ , следует, что векторные заряды являются генераторами группы  $SU_3$ . Это означает, что если бы  $SU_3$ -симметрия не была нарушена, то матричные элементы типа  $\langle \Sigma^- | F_4 - iF_5 | n \rangle$ , описывающие гиперонные  $\beta$ -распады, были бы просто коэффициентами Клебша — Гордана группы  $SU_3$ . Это значило бы, что векторные

части матричных элементов распадов типа  $\Sigma^- \rightarrow n + e^- + \bar{\nu}_e$  можно вычислить точно. Когда же  $SU_3$ -симметрия нарушается, эти матричные элементы перенормируются и перестают быть точно известными.

Однако теорема Адемолло — Гатто (см. [6] в гл. 4) устанавливает, что матричные элементы изменяющихся странность векторных зарядов перенормируются только во *втором порядке* по нарушению  $SU_3$ -симметрии. Так как поправки второго порядка по нарушению  $SU_3$ -симметрии должны быть малыми для барионного октета, то соотношение (1.56а) алгебры токов позволяет сделать определенные предсказания относительно векторных частей матричных элементов гиперонных  $\beta$ -распадов. (Имеются также предсказания для каонных распадов типа  $K^+ \rightarrow \pi^0 + e^+ + \nu_e$ , но в этом случае могут оказаться важными даже эффекты нарушения  $SU_3$ -симметрии во *втором порядке*.)

Анализ Кабиббо полулептонных распадов убедительно подтверждает эти предсказания. Из проинтегрированного коммутационного соотношения (1.56б) между векторными зарядами и аксиально-векторными зарядами следует, что аксиально-векторные заряды образуют октет. Это также подтверждается анализом Кабиббо, хотя экспериментальные данные в этом случае менее определенные, чем для векторных зарядов. Дело в том, что для аксиально-векторных зарядов не существует аналога теоремы Адемолло — Гатто, и потому нет причин считать, что эффекты нарушения  $SU_3$ -симметрии в первом порядке не должны быть существенными.

Проинтегрированный коммутатор (1.56в) двух аксиально-векторных зарядов *не вытекает* из октетного свойства  $F_k^5$  и не проверяется непосредственно анализом Кабиббо, Первой экспериментальной проверкой этого постулата было правило сумм для аксиально-векторной константы связи  $\beta$ -распада, полученное Адлером (ст. 1) и Вайсбергером [17] из коммутатора

$$[F_1^5 + iF_2^5, F_1^5 - iF_2^5] = 2F_3 = 2I_3. \quad (1.108)$$

Следуя предложению Фубини и Фурлана ([6] в гл. 4), Адлер и Вайсбергер рассмотрели матричный элемент соотношения (1.108) между протонными состояниями и

воспользовались гипотезой о частичном сохранении аксиально-векторного тока для того, чтобы связать левую часть соотношения (1.108) с интегралом от сечения пион-нуклонного рассеяния. В результате было получено следующее правило сумм (которое мы будем называть правилом сумм для  $g_A$ ):

$$1 - \frac{1}{g_A^2} = \frac{4M_N^2}{g_r(0)^2} \frac{1}{\pi} \int_{M_N+M_\pi}^{\infty} \frac{W dW}{W^2 - M_N^2} [\sigma_0^+(W) - \sigma_0^-(W)], \quad (1.109)$$

где  $\sigma_0^\pm$  — полное сечение рассеяния  $\pi^\pm$ -мезонов с нулевой массой на протоне с энергией  $W$  в системе центра масс. Это правило сумм хорошо согласуется с экспериментом. Подобный анализ коммутатора <sup>1)</sup>

$$[F_4^5 + iF_5^5, F_4^5 - iF_5^5] = F_3 + \sqrt{3} F_8 \quad (1.110)$$

был выполнен Вайсбергером [17], Аматти с сотр. [13] и другими авторами. Результат этого анализа находится в разумном согласии с аксиально-векторными константами связи гиперонных распадов (которые определяются из анализа Кабиббо). Таким образом, для всех проинтегрированных коммутационных соотношений, постулированных Гелл-Манном, имеется подтверждение.

<sup>1)</sup> Хотя при получении правил сумм для гиперонных аксиально-векторных констант связи из соотношения (1.110) используется гипотеза о частичном сохранении изменяющего странность аксиально-векторного тока, окончательные правила сумм могут оказаться нечувствительными к большим ошибкам, которые можно ожидать при применении гипотезы о частичном сохранении в этом случае. Дело в том, что сечения и константы связи вне массовой поверхности входят в правила сумм лишь в виде отношения

$$\frac{\sigma_{KN}(M_K=0)}{g_{KAN}^2(M_K=0)}. \quad (a)$$

Во всех диаграммах для матричного элемента каон-нуклонного рассеяния в каждой вершине, в которой  $K$ -мезон нулевой массы соединяется с барионной линией или барионной петлей, имеется множитель  $g_{K \text{ барион барион}}(M_K=0)$ . Так как каон-нуклонное сечение  $\sigma_{KN}(M_K=0)$  есть квадрат матричного элемента, то даже если числитель и знаменатель выражения (a) заметно отличаются от своих значений на массовой поверхности, их отношение может быть довольно близко к отношению  $\sigma_{KN}/g_{KAN}^2$  на массовой поверхности.

Современное положение дел с непроинтегрированными коммутационными соотношениями для временных компонент (1.54) и подробности, касающиеся метода правил сумм, мы рассмотрим в гл. 4 и 5.

### Литература

1. Goldhaber M., Proceedings of the 1958 International Conference on High Energy Physics at CERN, p. 233, review talk.
2. Cabibbo N., Phys. Rev. Letters, **10**, 531 (1963).
3. Christianson J. H., Cronin J. W., Fitch V. L., Turlay R., Phys. Rev. Letters, **13**, 138 (1964).
4. Dashen R., Frautschi S. C., Sharp D. H., Phys. Rev. Letters, **13**, 777 (1964).
5. Gell-Mann M., Phys. Letters, **8**, 214 (1964).
6. Lévy M., Nuovo Cimento, **52A**, 23 (1967).
7. Feynman R. P., Gell-Mann M., Phys. Rev., **109**, 193 (1958).
8. Gell-Mann M., Ne'eman Y., Ann. of Phys., **30**, 360 (1964).
9. Cabibbo N., Proceedings of the XIII International Conference on High Energy Physics at Berkeley, September, 1966, p. 29, rapporteur's talk.
10. Johnson K., Low F. E., Progr. Theoret. Phys. (Kyoto) Suppl., **37**, 38, 74 (1966).  
Hamprecht B., Nuovo Cimento, **47A**, 770 (1967).  
Nagyliki T., Phys. Rev., **158**, 1534 (1967).
11. Goldberger M., Treiman S., Phys. Rev., **110**, 1178 (1958).
12. Nambu Y., Phys. Rev. Letters, **4**, 380 (1960).  
Bernstein J., Fubini S., Gell-Mann M., Thirring W., Nuovo Cimento, **17**, 757 (1960).
13. Amati D., Bouchiat C., Nuyts J., Phys. Lett., **19**, 59 (1965).
14. Gell-Mann M., Ne'eman Y., The Eightfold Way, N. Y., 1964.
15. Gell-Mann M., Lévy M., Nuovo Cimento, **16**, 705 (1960).
16. Gell-Mann M., Physics, **1**, 63 (1964).
17. Weisberger W. I., Phys. Rev., **143**, 1302 (1966).
18. Герштейн С. С., Зельдович Я. Б., ЖЭТФ, **29**, 698 (1955).

### ОСНОВНЫЕ СТАТЬИ

- Gell-Mann M., Lévy M., Nuovo Cimento, **16**, 705 (1960) (оригинал, стр. 53)<sup>1)</sup>.  
The Axial Vector Current in Beta Decay.
- Gell-Mann M., Physics, **1**, 63 (1964) (оригинал, стр. 74).  
The Symmetry Group of Vector and Axial-Vector Currents.
- Adler S. L., Phys. Rev., **140**, B736 (1965) (ст. 1 настоящей книги).  
Sum Rules for the Axial-Vector Coupling-Constant Renormalization in  $\beta$ -Decay.
- Weisberger W. I., Phys. Rev., **143**, 1302 (1966).  
Unsubtracted Dispersion Relations and the Renormalization of the Weak Axial-Vector Coupling Constants.

<sup>1)</sup> Помета в скобках означает, что данная статья Гелл-Манна имеется также в качестве репринта в английском издании, но не вошла в русское издание. — Прим. ред.

# ПРАВИЛА СУММ ДЛЯ ПЕРЕНОРМИРОВКИ АКСИАЛЬНО-ВЕКТОРНОЙ КОНСТАНТЫ СВЯЗИ $\beta$ -РАСПАДА <sup>1)</sup>

С. Адлер\*

Adler S. L., Phys. Rev., 140, B736 (1965); Errata 149, 1294 (1966);  
Errata 175, 2224 (1969)

На основе алгебры аксиально-векторных токов, предложенной Гелл-Манном, и гипотезы о частичном сохранении аксиально-векторного тока выводится правило сумм, связывающее  $1 - g_A^{-2}$  с полными сечениями пион-протонного рассеяния вне массовой поверхности. В результате численного расчета получено теоретическое предсказание:  $g_A = 1,24$ , которое находится в хорошем согласии с экспериментом. Аналогичное же правило сумм для пион-пионного рассеяния может выполняться лишь в том случае, если сечение пион-пионного рассеяния в  $S$ -состоянии с  $I=0$  при низких энергиях велико. Предложены способы проверки алгебры Гелл-Манна для октетов векторных и аксиально-векторных токов в нейтринных реакциях при высоких энергиях.

## Введение

В течение двух лет после открытия несохранения четности в слабых взаимодействиях были выяснены основные черты  $\beta$ -распада [1]. Было обнаружено, что в  $\beta$ -распаде присутствуют только векторный и аксиально-векторный типы связи. Векторная константа связи оказалась равной векторной константе связи  $\mu$ -распада, в то время как аксиально-векторная константа связи отличается множителем  $g_A \approx 1,2$  от значения, ожидаемого в случае чистого  $V - A$ -взаимодействия. Совпадение векторных констант связи в  $\beta$ - и  $\mu$ -распадах удалось вскоре объяснить с помощью гипотезы о сохранении векторного

<sup>1)</sup> Сокращенный вариант вычисления  $g_A$  содержится в работе [29]. После того как это вычисление было завершено, я узнал об аналогичной работе Вайсбергера [12].

\* Lyman Laboratory of Physics, Harvard University, Cambridge, Massachusetts.

тока [2]. Величина же аксиально-векторной константы связи оставалась загадочной<sup>1)</sup>.

В настоящей статье мы предлагаем теорию перенормировки аксиально-векторной константы связи, в основе которой лежат алгебра аксиально-векторных токов, предложенная Гелл-Манном [4], и гипотеза о частичном сохранении аксиально-векторного тока [5, 6]. В § 1 мы обсуждаем исходные предположения. В § 2 даны два вывода правила сумм, связывающего  $1 - g_A^{-2}$  с полными сечениями пион-нуклонного рассеяния вне массовой поверхности. В результате численного расчета, проведенного в § 3, получено теоретическое предсказание  $g_A = 1,24$ . В § 4 мы выводим правило сумм, связывающее  $2g_A^{-2}$  с пион-пионным рассеянием; оказывается, что это правило сумм справедливо только в том случае, если сечение пион-пионного рассеяния в  $S$ -состоянии с  $I = 0$  при низких энергиях велико. В заключительном параграфе мы предлагаем способы проверки алгебры Гелл-Манна [4] для октетов векторных и аксиально-векторных токов в нейтринных экспериментах при высоких энергиях. Эти способы проверки не связаны с предположением о частичном сохранении токов.

## § 1. Предположения

Обсуждаемые ниже правила сумм для  $g_A$  получены из следующих предположений.

А) Адронный ток, описывающий лептонные распады с  $\Delta S = 0$ , имеет вид

$$J_\lambda = G_V \cos \theta (J_\lambda^{V1} + iJ_\lambda^{V2} + J_\lambda^{A1} + iJ_\lambda^{A2}), \quad (1)$$

где  $G_V$  — константа связи Ферми ( $G_V \approx 1,02 \cdot 10^{-5}/M_N^2$ ), а  $\theta$  — угол Каббиво [7]. Здесь  $J_\lambda^{Va}$  — векторный ток, который, как мы предполагаем, совпадает с изоспино-

<sup>1)</sup> Перенормировке аксиально-векторной константы связи посвящены работы [3].

вым током, а  $J_\lambda^{Aa}$  — аксиально-векторный ток. В теории Ферми мы имели бы

$$J_\lambda^{Va} = i : \bar{\psi}_N \gamma_\lambda \frac{1}{2} \tau^a \psi_N : , \quad (2a)$$

$$J_\lambda^{Aa} = i : \bar{\psi}_N \gamma_\lambda \gamma_5 \frac{1}{2} \tau^a \psi_N : . \quad (2b)$$

На самом деле известно, что в этих выражениях должны присутствовать мезонные и другие члены. К счастью, в дальнейшем нам не придется делать каких-либо предположений о том, как выражаются  $J_\lambda^V$  и  $J_\lambda^A$  через поля частиц.

Так как векторный ток сохраняется, то векторная константа связи не перенормировывается. Перенормированная аксиально-векторная константа связи  $g_A$  определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle N(q) | J_\lambda | N(q) \rangle &= \\ &= \frac{M_N}{q_0} G_V \cos \theta \bar{u}_N(q) (\gamma_\lambda + g_A \gamma_\lambda \gamma_5) \tau^+ U_N(q). \end{aligned} \quad (3)$$

Б) Аксиально-векторный ток частично сохраняется, т. е.

$$\partial_\lambda J_\lambda^{Aa} = \frac{M_N M_\pi^2 g_A}{g_r K^{NN\pi}(0)} \varphi_\pi^a, \quad (4)$$

где  $g_r$  — перенормированная пион-нуклонная константа связи в рациональных единицах ( $g_r^2/4\pi \approx 14,6$ ),  $K^{NN\pi}(0)$  — пионный формфактор нуклона, нормированный так, что  $K^{NN\pi}(-M_\pi^2) = 1$ , и  $\varphi_\pi^a$  — перенормированное поле пиона. В соответствии с соотношением (4) киральности

$$\chi^\pm(t) = -i \int d^3x (J_4^{A1} \pm iJ_4^{A2})$$

удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d}{dt} \chi^\pm(t) = \frac{\sqrt{2} M_N M_\pi^2 g_A}{g_r K^{NN\pi}(0)} \int d^3x \varphi_{\pi^\pm}. \quad (5)$$



В) Аксиально-векторный ток удовлетворяет следующим одновременным коммутационным соотношениям:

$$[J_4^{Aa}(x), J_4^{Ab}(y)]|_{x_0=y_0} = -\delta(x-y) \varepsilon^{abc} J_4^{Vc}(x). \quad (6)$$

Отсюда следует, что киральности удовлетворяют соотношению

$$[\chi^+(t), \chi^-(t)] = 2I^3, \quad (7)$$

где  $I^3$  — третья компонента изотопического спина.

Предположения А являются обычными предположениями теории лептонных распадов. Векторно-аксиально-векторная форма лагранжиана лептонных слабых взаимодействий в настоящее время твердо установлена [1]. Существует также большое число экспериментальных данных, подтверждающих гипотезу о совпадении слабого векторного тока  $J_\lambda^{Va}$  с изоспиновым током [8].

Гипотеза Б о частичном сохранении аксиально-векторного тока была предложена Гелл-Манном и Леви [5] и Намбу [5], чтобы объяснить соотношение Гольдбергера—Тримана [9] для распада заряженного пиона. Кроме соотношения Гольдбергера—Тримана, из гипотезы о частичном сохранении вытекает выполняющееся в эксперименте соотношение между амплитудой пион-нуклонного рассеяния  $A^{\pi N(+)}$  и пион-нуклонной константой связи  $g_r$ , полученное в работе [6].

Коммутационные соотношения В играют существенную роль в дальнейших расчетах. [Заметим, что соотношение (6) является более сильным предположением, чем (7), так как, даже если бы в правой части соотношения (6) присутствовали пространственные производные от  $\delta$ -функции, интеграл от них в соотношении (7) равнялся бы нулю. Для приведенного ниже вывода необходимо только соотношение (7).] Гипотеза о точном выполнении соотношения (6) или (7) была выдвинута Гелл-Манном [4]. Гелл-Манн и Неeman [10] подчеркнули, что соотношение (7) представляет собой наиболее естественный способ придать смысл идее об универсальности силы слабых взаимодействий для лептонов и барионов, не используя явного выражения для  $J_\lambda^A$  через поля

частиц. Гелл-Манн [11] указал также, что с помощью соотношения (7), фиксирующего шкалу аксиально-векторного тока по отношению к векторному току, можно в принципе определить перенормированную аксиально-векторную константу связи  $g_A$ .

Итак, соотношения (1), (3), (5) и (7) являются исходными гипотезами при вычислении  $g_A$ . Они совместны в том смысле, что существует перенормированная теория полей ( $\sigma$ -модель Гелл-Манна и Леви [5]), в которой эти соотношения выполняются точно.

## § 2. Вывод правила сумм

В настоящем параграфе мы даем два различных вывода правила сумм, выражающего  $g_A$  через полные сечения пион-протонного рассеяния вне массовой поверхности. Третий вывод был дан Вайсбергером [12].

### 1. МЕТОД ФУБИНИ И ФУРЛАНА

Наиболее простой вывод основан на методе, предложенном недавно Фубини и Фурланом [13]. Возьмем матричный элемент от соотношения (7) между протонными состояниями  $\langle p(q) |$  и  $| p(q') \rangle$ . В правой части получаем

$$\langle p(q) | 2I^3 | p(q') \rangle = 2\pi^3 \delta(q - q'). \quad (8)$$

В матричном элементе коммутатора воспользуемся разложением по полному набору промежуточных состояний, выделив одноклонный член (в который дает вклад только нейтрон):

$$\begin{aligned} \langle p(q) | [\chi^+(t), \chi^-(t)] | p(q') \rangle &= \\ &= \sum_{\text{Спин}} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \langle p(q) | \chi^+(t) | n(k) \rangle \langle n(k) | \chi^-(t) | p(q') \rangle + \\ &+ \sum_{j \neq N} \langle p(q) | \chi^+(t) | j \rangle \langle j | \chi^-(t) | p(q') \rangle - (\chi^+ \leftrightarrow \chi^-). \quad (9) \end{aligned}$$

Вклад нейтронного состояния легко вычислить, используя соотношение (3). Он равен

$$\begin{aligned} \sum_{\text{Спин}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \langle p(q) | \chi^+(t) | n(k) \rangle \langle n(k) | \chi^-(t) | p(q') \rangle = \\ = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta(q - k) (2\pi)^3 \delta(k - q') \times \\ \times \left( \frac{M_N}{q_0} \frac{M_N}{k_0} \right) g_A^2 \bar{u}(q) \gamma_4 \gamma_5 \left( \frac{k + iM_N}{2lM_N} \right) \gamma_4 \gamma_5 u(q') = \\ = (2\pi)^3 \delta(q - q') g_A^2 \left( 1 - \frac{M_N^2}{q_0^2} \right). \quad (10) \end{aligned}$$

В сумме по высшим промежуточным состояниям воспользуемся соотношением (5); это дает

$$\left[ \frac{\sqrt{2} M_N M_\pi^2 g_A}{g_r K^{NN\pi}(0)} \right]^2 \sum_{j \neq N} \frac{\langle p(q) | \int d^3x \varphi_{\pi^+} | j \rangle \langle j | \int d^3x \varphi_{\pi^-} | p(q') \rangle}{(q_0 - q_{j0})^2} - \\ - (\pi^+ \leftrightarrow \pi^-). \quad (11)$$

Из выражений (10) и (11) нетрудно видеть, что существует семейство правил сумм, в котором  $q_0$  является параметром. Правило сумм для  $1 - g_A^{-2}$  получается в пределе, когда  $q^0$  стремится к бесконечности. Предположим, что предельный переход можно совершить *под знаком суммы* по промежуточным состояниям в выражении (11). Полезно записать эту сумму в виде

$$\sum_{j \neq N} = \int \frac{d^3q_j}{(2\pi)^3} \int_{M_N + M_\pi}^{\infty} dW \sum_{\substack{j \neq N \\ \text{внут}}} \delta(W - M_j), \quad (12)$$

где  $\mathbf{q}_j$  — полный импульс, а „внут“ означает внутренние переменные системы  $j$ . Через  $M_j$  мы обозначили массу системы. Интегрирования по  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{q}_j$  можно выполнить явно, в результате чего получим множитель  $(2\pi)^3 \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}')$  и условие  $\mathbf{q}_j = \mathbf{q}$ . Напишем

$$\langle j | \varphi_{\pi^\pm}(0) | p(q) \rangle = \left( \frac{M_N}{q_0} \frac{M_j}{q_{j0}} \right)^{1/2} F_j^\pm, \quad (13)$$

где  $F_j^\pm$  — лоренцевский скаляр. Тогда для суммы по высшим промежуточным состояниям имеем

$$(2\pi)^3 \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}') \left[ \frac{\sqrt{2} M_N M_\pi^3 g_A}{g_r K^{NN\pi}(0)} \right]^2 \times \\ \times \int_{M_N + M_\pi}^{\infty} dW \sum_{\substack{l \neq N \\ \text{внут}}} \delta(W - M_l) \frac{M_N}{q_0} \frac{M_l}{q_{l0}} (q_0 - q_{l0})^{-2} \times \\ \times [ |F_j^-|^2 - |F_j^+|^2 ]. \quad (14)$$

Если воспользоваться соотношениями

$$q_{l0} = (q_0^2 + M_l^2 - M_N^2)^{1/2}, \quad (15a)$$

$$(q_0 - q_{l0})^{-2} = \frac{(q_0 + q_{l0})^2}{(M_l^2 - M_N^2)^2}, \quad (15b)$$

то предел выражения (14) при  $q_0 \rightarrow \infty$  примет вид

$$\left[ \frac{\sqrt{2} M_N g_A}{g_r K^{NN\pi}(0)} \right]^2 (2\pi)^3 \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}') \int_{M_N + M_\pi}^{\infty} dW \frac{M_N W}{(W^2 - M_N^2)^2} \times \\ \times \lim_{q_0 \rightarrow \infty} \left\{ \frac{[q_0 + (q_0^2 + W^2 - M_N^2)^{1/2}]^2}{q_0 (q_0^2 + W^2 - M_N^2)^{1/2}} \right\} \times \\ \times \lim_{q_0 \rightarrow \infty} [K^- [W, (q - q_l)^2] - K^+ [W, (q - q_l)^2]]; \quad (16)$$

здесь мы ввели величину  $K^\pm [W, (q - q_l)^2]$ , определяемую равенством

$$K^\pm [W, (q - q_l)^2] = \sum_{\substack{l \neq N \\ \text{внут}}} \delta(W - M_l) M_\pi^4 |F_j^\pm|^2. \quad (17)$$

Заметим, что функция  $K^\pm$  может зависеть только от явно выписанных переменных, потому что 1)  $K^\pm$  является лоренцевским скаляром и 2) по всем внутренним переменным проведено суммирование<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Усреднение по спину начального протона подразумевается, хотя и не показано явно.

Теперь нетрудно вычислить указанные пределы. Предел выражения в фигурных скобках равен 4, а предел квадрата переданного импульса

$$(q - q_j)^2 = - [q_0 - (q_0^2 + W^2 - M_N^2)^{1/2}]^2$$

равен 0. Таким образом, правило сумм принимает вид

$$1 - \frac{1}{g_A^2} = \frac{2M_N^2}{g_f^2 K^{NN\pi}(0)^2} \int_{M_N + M_\pi}^{\infty} \frac{4M_N W dW}{(W^2 - M_N^2)^2} \times \\ \times [K^+(W, 0) - K^-(W, 0)]. \quad (18)$$

Для завершения вывода нужно выразить  $K^\pm(W, 0)$  через сечения пион-протонного рассеяния. Пусть  $\sigma_0^\pm(W)$  обозначает полное сечение рассеяния  $\pi^\pm$ -мезона с *равной нулю массой* на протоне при энергии  $W$  в системе центра масс. Прежде всего вычислим  $\sigma_0^\pm(W)$  в системе центра масс. Если  $k$  и  $q$  — соответственно 4-импульсы пиона и протона в начальном состоянии, то

$$\sigma_0^\pm(W) \cdot \text{Поток} = (2\pi)^4 \sum_{j \neq N} \frac{|\langle j | J_{\pi^\mp}(0) | p(q) \rangle|^2}{2k_0} \delta^4(q_j - q - k) = \\ = (2\pi)^4 \int \frac{d^3 q_j}{(2\pi)^3} \sum_{\substack{j \neq N \\ \text{внут}}} \frac{|\langle j | J_{\pi^\pm}(0) | p(q) \rangle|^2}{2k_0} \delta^4(q_j - q - k) = \\ = 2\pi \sum_{\substack{j \neq N \\ \text{внут}}} \frac{|\langle j | J_{\pi^\pm}(0) | p(q) \rangle|^2}{2k_0} \delta(q_{j0} - q_0 - k_0). \quad (19)$$

Имея в виду то, что пион в начальном состоянии обладает нулевой массой ( $k^2 = 0$ ), можно получить следующие соотношения в системе центра масс:

$$q_0 + k_0 = W, \quad q_{j0} \equiv M_j, \quad (20a)$$

$$\text{Поток} = \frac{|\mathbf{k}|}{k_0} + \frac{|\mathbf{k}|}{q_0} = \frac{W}{q_0}, \quad (20б)$$

$$k_0 = \frac{W^2 - M_N^2}{2W}, \quad (20в)$$

$$\langle j | J_{\pi^\pm}(0) | p(q) \rangle = M_\pi^2 \langle j | \Phi_{\pi^\pm}(0) | p(q) \rangle = M_\pi^2 \left( \frac{M_N}{q_0} \right)^{1/2} F_j^\pm. \quad (20г)$$

Комбинируя соотношения (19) и (20), имеем

$$\begin{aligned}\sigma_0^\pm(W) &= \frac{2\pi M_N}{W^2 - M_N^2} \sum_{\substack{j \neq N \\ \text{внут}}} \delta(W - M_j) M_\pi^4 |F_j^\pm|^2 = \\ &= \frac{2\pi M_N}{W^2 - M_N^2} K^\pm(W, 0).\end{aligned}\quad (21)$$

Подставляя это выражение в соотношение (18), мы получаем простое и точное правило сумм

$$1 - \frac{1}{g_A^2} = \frac{4M_N^2}{g_F^2 K^{NN\pi}(0)^2} \frac{1}{\pi} \int_{M_N + M_\pi}^{\infty} \frac{W dW}{W^2 - M_N^2} [\sigma_0^+(W) - \sigma_0^-(W)]. \quad (22)$$

Этот вывод весьма прост, однако он обладает недостатком: для его справедливости необходимо дополнительное предположение о том, что предел при  $q_0 \rightarrow \infty$  можно внести под знак суммы по промежуточным состояниям в выражении (11). Другой рассмотренный ниже вывод проясняет смысл этого предположения.

## 2. МЕТОД, ОСНОВАННЫЙ НА УСЛОВИЯХ САМОСОГЛАСОВАННОСТИ, ВЫТЕКАЮЩИХ ИЗ ГИПОТЕЗЫ О ЧАСТИЧНОМ СОХРАНЕНИИ

В двух ранее опубликованных статьях [6, 14]<sup>1)</sup> мы показали, что гипотеза о частичном сохранении аксиально-векторного тока приводит к условиям самосогласованности, содержащим амплитуды рассеяния сильно взаимодействующих частиц. Исползованный там метод является общим. Предположим, что мы имеем локальные полевые операторы  $j_\lambda(x)$  и  $d(x)$ , удовлетворяющие уравнению

$$\partial_\lambda j_\lambda(x) = d(x). \quad (23)$$

Беря матричный элемент от этого уравнения между состояниями  $\langle \beta(k_F) |$  и  $| \alpha(k_I) \rangle$ , получаем уравнение

$$-i(k_F - k_I)_\lambda \langle \beta(k_F) | j_\lambda(0) | \alpha(k_I) \rangle = \langle \beta(k_F) | d(0) | \alpha(k_I) \rangle. \quad (24)$$

<sup>1)</sup> См. также связанные с ними работы [15].

Рассмотрим теперь, что происходит, когда  $(k_F - k_I) \rightarrow 0$ . В этом пределе в левую часть соотношения (24) будут давать вклад только полюсные члены матричного элемента

$$\langle \beta(k_F) | j_\lambda(0) | \alpha(k_I) \rangle,$$

которые ведут себя как  $(k_F - k_I)^{-1}$ . Как показано в [14], эти сингулярности возникают только за счет вставок вершин, соответствующих току  $j_\lambda$ , во *внешние* линии диаграмм, соответствующих матричному элементу  $\langle \beta | \alpha \rangle$ . Далее, в пределе  $(k_F - k_I) \rightarrow 0$  эти вставки оставляют внешние частицы на массовой поверхности. Таким образом, мы получаем условие самосогласованности, выражающее

$$\lim_{(k_F - k_I) \rightarrow 0} \langle \beta(k_F) | d(0) | \alpha(k_I) \rangle \quad (25)$$

через физический матричный элемент  $\langle \beta | \alpha \rangle$ . Ясно, что тот же метод можно применить к величинам

$$j(t) = \int d^3x j_4(\mathbf{x}, t) \quad \text{и} \quad d(t) = \int d^3x d(\mathbf{x}, t),$$

удовлетворяющим уравнению

$$\frac{dj(t)}{dt} = id(t). \quad (26)$$

Разумеется, полученные при этом формулы не будут явно ковариантными. В работе [14] подробно изучен случай, когда оператор  $j(t)$  представляет собой просто киральность  $\chi^a(t)$ . Чтобы вывести правило сумм для  $g_A$ , применим теперь тот же метод к несколько более сложному объекту:

$$j(x_0) = \int dy_0 e^{-ik_0 y_0} \langle N(q) | T[\chi^a(x_0) \chi^b(y_0)] | N(q) \rangle. \quad (27)$$

Рассмотрим величину  $T$ , определяемую следующим образом:

$$\begin{aligned} T &= \int dx_0 e^{ik_0 x_0} \int dy_0 e^{-ik_0 y_0} \langle N(q) | T[\chi^a(x_0) \chi^b(y_0)] | N(q) \rangle = \\ &= \int dx_0 e^{ik_0 x_0} j(x_0). \quad (28) \end{aligned}$$

Кроме того, определим величину  $P^a(x)$  с помощью равенства

$$\partial_\lambda J_\lambda^{Aa}(x) = P^a(x), \quad (29)$$

так что киральность  $\chi^a(x_0)$  будет удовлетворять соотношению

$$\frac{d}{dx_0} \chi^a(x_0) = \int d^3x P^a(x). \quad (30)$$

Предположение о том, что  $P^a(x) \sim \varphi_\pi^a(x)$ , будет сделано на более поздней стадии вычислений.

В силу инвариантности относительно сдвигов во времени

$$j(x_0) = e^{-ik_0x_0} \times \text{const.} \quad (31)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} -ik_0 j(x_0) &= \frac{d}{dx_0} j(x_0) = \\ &= \int dy_0 e^{-ik_0y_0} \langle N(q) | \frac{d}{dx_0} T[\chi^a(x_0) \chi^b(y_0)] | N(q) \rangle = \\ &= e^{-ik_0x_0} \langle N(q) | [\chi^a(x_0), \chi^b(x_0)] | N(q) \rangle + \\ &+ \int dy_0 \int d^3x e^{-ik_0y_0} \langle N(q) | T[P^a(x) \chi^b(y_0)] | N(q) \rangle. \end{aligned} \quad (32)$$

Поскольку второй член в правой части соотношения (32) пропорционален  $\exp(-ik_0x_0)$ , его можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{-k_0^2 + M_\pi^2} \int dy_0 \int d^3x e^{-ik_0y_0} \times \\ \times (-\square_x + M_\pi^2) \langle N(q) | T[P^a(x) \chi^b(y_0)] | N(q) \rangle. \end{aligned} \quad (33)$$

Мы предположили, что можно интегрировать по частям по *пространственным* переменным  $x$ ; это предположение можно оправдать, вводя волновые пакеты<sup>1)</sup>. Используя формулы (28), (32) и (33) и меняя порядок интегрирования по  $x_0$  и  $y_0$ , получаем

$$-ik_0 T = \int dx_0 e^{i(t_0 - k_0)x_0} \langle N(q) | [\chi^a(x_0), \chi^b(x_0)] | N(q) \rangle +$$

<sup>1)</sup> Мы никогда не будем интегрировать по частям по времени.



$$\begin{aligned}
& + \int dx_0 e^{i l_0 x_0} \frac{1}{M_\pi^2 - k_0^2} \int dy_0 \int d^3 x e^{-i k_0 y_0} (-\square_x + M_\pi^2) \times \\
& \times \langle N(q) | T [P^a(x) \chi^b(y_0)] | N(q) \rangle = \\
& = 2\pi\delta(l_0 - k_0) \langle N(q) | [\chi^a(0), \chi^b(0)] | N(q) \rangle + \\
& \quad + \frac{1}{M_\pi^2 - k_0^2} \int dy_0 e^{-i k_0 y_0} j_1(y_0), \quad (34)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
j_1(y_0) & = \int d^4 x e^{i l_0 x_0} (-\square_x + M_\pi^2) \langle N(q) | T [P^a(x) \chi^b(y_0)] | N(q) \rangle = \\
& = e^{i l_0 y_0} \times \text{const.} \quad (35)
\end{aligned}$$

Поступая с  $j_1(y_0)$  точно так же, как с  $j(x_0)$ , получаем

$$\begin{aligned}
i l_0 j_1(y_0) & = M_\pi^2 \int d^3 x e^{i l_0 y_0} \langle N(q) | [\chi^b(y_0), P^a(x, y_0)] | N(q) \rangle + \\
& + \frac{1}{M_\pi^2 - l_0^2} \int d^4 x \int d^3 y e^{i l_0 x_0} (-\square_x + M_\pi^2) (-\square_y + M_\pi^2) \times \\
& \quad \times \langle N(q) | T [P^a(x) P^b(y)] | N(q) \rangle. \quad (36)
\end{aligned}$$

Итак, мы получили тождество

$$\begin{aligned}
& -i k_0 \int dx_0 e^{i l_0 x_0} \int dy_0 e^{-i k_0 y_0} \langle N(q) | T [\chi^a(x_0) \chi^b(y_0)] | N(q) \rangle = \\
& = 2\pi\delta(l_0 - k_0) \left\{ \langle N(q) | [\chi^a(0), \chi^b(0)] | N(q) \rangle + \right. \\
& \quad \left. + \frac{M_\pi^2}{M_\pi^2 - k_0^2} \frac{1}{i l_0} \int d^3 x \langle N(q) | [\chi^b(0), P^a(x, 0)] | N(q) \rangle \right\} + \\
& + \frac{1}{(M_\pi^2 - k_0^2)(M_\pi^2 - l_0^2)} \frac{1}{i l_0} \int d^4 x \int d^4 y e^{i l_0 x_0 - i l_0 y_0} \times \\
& \quad \times (-\square_x + M_\pi^2) (-\square_y + M_\pi^2) \times \\
& \quad \times \langle N(q) | T [P^a(x) P^b(y)] | N(q) \rangle. \quad (37)
\end{aligned}$$

Мы выведем правило сумм для  $g_A$  из той части соотношения (37), которая антисимметрична по  $a$  и  $b$ , и потому опустим все симметричные по этим индексам члены. Поскольку  $[\chi^a(x_0), \chi^b(x_0)] = i e^{abc} I^c$ , а  $dI^c/dx_0 = 0$ , мы имеем  $d[\chi^a(x_0), \chi^b(x_0)]/dx_0 = 0$ . Другими словами,

$$\int d^3 x [P^a(x, x_0), \chi^b(x_0)] = \int d^3 x [P^b(x, x_0), \chi^a(x_0)], \quad (38)$$

что означает симметрию при перестановке  $a$  и  $b$ . Таким образом, можно опустить член, пропорциональный

$$\langle N(q) | [\chi^b(0), P^a(\mathbf{x}, 0)] | N(q) \rangle.$$

Рассмотрим теперь антисимметричную часть соотношения (37) при малых  $k_0$ . В конце всех вычислений мы устремим  $k_0$  к нулю. В левой части, как показано в [14], вклад нулевого порядка по  $k_0$  будут давать только те диаграммы, у которых вершина  $\chi^a$  вставлена во внешние нуклонные линии. В этом можно убедиться непосредственно, разлагая хронологическое произведение по полному набору промежуточных состояний:

$$\begin{aligned} & \int dx_0 \int dy_0 e^{il_0 x_0 - ik_0 y_0} \langle N(q) | T[\chi^a(x_0) \chi^b(y_0)] | N(q) \rangle = \\ & = \int dx_0 \int dy_0 e^{il_0 x_0 - ik_0 y_0} \sum_j [\langle N(q) | \chi^a(x_0) | j \rangle \times \\ & \times \langle j | \chi^b(y_0) | N(q) \rangle \theta(x_0 - y_0) + \\ & + \langle N(q) | \chi^b(y_0) | j \rangle \langle j | \chi^a(x_0) | N(q) \rangle \theta(y_0 - x_0)] = \\ & = \sum_j [\langle N(q) | J_4^{Aa}(0) | j \rangle \langle j | J_4^{Ab}(0) | N(q) \rangle i(k_0 - \Delta_j)^{-1} - \\ & - \langle N(q) | J_4^{Ab}(0) | j \rangle \langle j | J_4^{Aa}(0) | N(q) \rangle i(k_0 + \Delta_j)^{-1}] \times \\ & \quad \times 2\pi \delta(l_0 - k_0) (2\pi)^6 \delta(\mathbf{0}) \delta(\mathbf{q}_f - \mathbf{q}), \quad (39) \end{aligned}$$

где

$$\Delta_j \equiv (q_0^2 + M_j^2 - M_N^2)^{1/2} - q_0. \quad (40)$$

Ясно, что только вклад однонуклонного промежуточного состояния ( $j = N$ ,  $\Delta_j \equiv 0$ ) имеет сингулярное поведение типа  $k_0^{-1}$ . Вычисление суммы по спиновым переменным, аналогичной сумме в соотношении (10), приводит к следующему выражению для левой части равенства (37):

$$(2\pi)^4 \delta(\mathbf{0}) \delta(l_0 - k_0) g_A^2 i e^{abc} \left\langle \frac{1}{2} \tau^c \right\rangle \left( 1 - \frac{M_N^2}{q_0^2} \right) + O(k_0), \quad (41)$$

где  $O(k_0)$  — члены, стремящиеся к нулю при  $k_0 \rightarrow 0$ .

Вычислим теперь слагаемые в правой части равенства (37). Коммутатор киральностей найти несложно.

Используя соотношение (6), получаем

$$2\pi\delta(l_0 - k_0) \langle N(q) | [\chi^a(0), \chi^b(0)] | N(q) \rangle = \\ = (2\pi)^4 \delta(0) \delta(l_0 - k_0) i\epsilon^{abc} \left\langle \frac{1}{2} \tau^c \right\rangle. \quad (42)$$

Для оценки последнего слагаемого в (37) воспользуемся гипотезой о частичном сохранении аксиально-векторного тока

$$P^a(x) = \frac{M_N M_\pi^2 g_A}{g_r K^{NN\pi}(0)} \varphi_\pi^a(x); \quad (43)$$

это дает

$$\left( \frac{M_\pi^2}{M_\pi^2 - k_0^2} \right) \left( \frac{M_\pi^2}{M_\pi^2 - l_0^2} \right) \left[ \frac{M_N g_A}{g_r K^{NN\pi}(0)} \right]^2 \frac{1}{i l_0} \int d^4x \int d^4y e^{i l_0 x_0 - i k_0 y_0} \times \\ \times (-\square_x + M_\pi^2) (-\square_y + M_\pi^2) \times \\ \times \langle N(q) | T [\varphi_\pi^a(x) \varphi_\pi^b(y)] | N(q) \rangle. \quad (44)$$

С точностью до множителей это выражение совпадает с амплитудой пион-нуклонного рассеяния. В самом деле, амплитуды пион-нуклонного рассеяния вне массовой поверхности

$$A^{\pi N(-)}(\mathbf{v}, \mathbf{v}_B, M_\pi^i, M_\pi^f) \quad \text{и} \quad B^{\pi N(-)}(\mathbf{v}, \mathbf{v}_B, M_\pi^i, M_\pi^f),$$

где  $M_\pi^i$  и  $M_\pi^f$  — массы пионов в начальном и конечном состояниях соответственно, определяются следующим образом [16]:

$$\int d^4x \int d^4y e^{-i l \cdot x + i k \cdot y} (-\square_x + M_\pi^2) (-\square_y + M_\pi^2) \times \\ \times \langle N(q_2) | T [\varphi_\pi^a(x) \varphi_\pi^b(y)] | N(q) \rangle \equiv \\ \equiv -i(2\pi)^4 \delta(q_1 + k - q_2 - l) \left( \frac{M_N}{q_{10}} \frac{M_N}{q_{20}} \right)^{1/2} \times \\ \times \bar{u}_N(q_2) \left\{ \left[ A^{\pi N(-)}(\mathbf{v}, \mathbf{v}_B, M_\pi^i, M_\pi^f) - \right. \right. \\ \left. \left. - i k B^{\pi N(-)}(\mathbf{v}, \mathbf{v}_B, M_\pi^i, M_\pi^f) \right] \frac{1}{2} [\tau^a, \tau^b] + \right. \\ \left. + \text{Симметричный по изоспиновым индексам член} \right\} u_N(q_1), \quad (45a)$$

$$\mathbf{v}_B = \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{l}}{2M_N}, \quad \mathbf{v} = -\frac{\mathbf{k} \cdot (\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)}{2M_N}. \quad (45b)$$

Амплитуду  $B$  можно разбить на полюсной член [16] и неполюсную часть, которую мы обозначим символом  $\bar{B}$ :

$$B^{\pi N(-)} = \frac{g_r^2}{2M_N} K^{NN\pi} [-(M_\pi^i)^2] K^{NN\pi} [(-M_\pi^i)^2] \times \\ \times ((v_B - v)^{-1} + (v_B + v)^{-1}) + \bar{B}^{\pi N(-)}. \quad (46)$$

Интеграл в выражении (44) совпадает с выражением (45), где

$$l = (0, il_0) = k = (0, ik_0), \quad M_\pi^i = M_\pi^f = k_0, \\ v_B = -\frac{k_0^2}{2M_N}, \quad v = \frac{q_0 k_0}{M_N}. \quad (47)$$

Комбинируя формулы (44)–(47), получаем, что выражение (44) равно

$$(2\pi)^4 \delta(0) \delta(l_0 - k_0) i\epsilon^{abc} \left\langle \frac{1}{2} \tau^c \right\rangle \left\{ -\frac{g_A^2 M_N^2}{q_0^2} - \right. \\ \left. - \frac{2M_N^2}{g_r^2 K^{NN\pi}(0)^2} g_A^2 \frac{1}{v} [A^{\pi N(-)}(v, 0, 0, 0) + \right. \\ \left. + v\bar{B}^{\pi N(-)}(v, 0, 0, 0)] \right\} + O(k_0^2), \quad (48)$$

где  $v = q_0 k_0 / M_N$ . Член, пропорциональный  $-g_A^2 M_N^2 / q_0^2$ , получается из борновского члена в соотношении (46), если подставить туда выражения (47), и в точности сокращается с аналогичным членом в (41). Таким образом, в пределе  $k_0 \rightarrow 0$  мы получаем из тождества (37) лоренц-инвариантное равенство

$$1 - \frac{1}{g_A^2} = -\frac{2M_N^2}{g_r^2 K^{NN\pi}(0)^2} G(0), \quad (49)$$

где

$$G(v) = v^{-1} [A^{\pi N(-)}(v, 0, 0, 0) + v\bar{B}^{\pi N(-)}(v, 0, 0, 0)] = \\ = v^{-1} [A^{\pi N(-)}(v, 0, 0, 0) + vB^{\pi N(-)}(v, 0, 0, 0)]. \quad (50)$$

Мы можем теперь не писать черту над  $B$ , потому что борновский член  $(v_B - v)^{-1} + (v_B + v)^{-1}$  тождественно равен нулю при  $v_B = 0$ .

Равенство (49), которое следует только из предположений § 1, представляет собой наш окончательный результат. Известно, что вследствие свойств перекрестной симметрии и аналитичности амплитуд  $A^{\pi N(-)}$  и  $B^{\pi N(-)}$  функция  $G(v)$  является четной функцией  $v$  и аналитична в комплексной  $v$ -плоскости с разрезами, идущими от  $\pm [M_\pi + M_\pi^2/(2M_N)]$  до  $\pm \infty$ . Предположим, что  $G(v)$  удовлетворяет дисперсионному соотношению без вычитаний по переменной  $v$ . Тогда можно написать

$$G(0) = \frac{2}{\pi} \int_{M_\pi + M_\pi^2/2M_N}^{\infty} \frac{dv}{v} \operatorname{Im} G(v). \quad (51)$$

Легко проверить, что

$$\operatorname{Im} G(v) = \frac{1}{2} (\sigma_0^- - \sigma_0^+). \quad (52)$$

Переходя от переменной интегрирования  $v$  к энергии в системе центра масс  $W$

$$v = \frac{W^2 - M_N^2}{2M_N}$$

и комбинируя соотношения (49), (51) и (52), получаем правило сумм (22). Таким образом, предположение о возможности предельного перехода  $q_0 \rightarrow \infty$  под знаком суммы по промежуточным состояниям в методе Фубини и Фурлана эквивалентно предположению о том, что функция  $G(v)$  удовлетворяет дисперсионному соотношению без вычитаний.

Существуют указания на то, что дисперсионное соотношение без вычитаний для  $G(v)$  справедливо. Во-первых, если теорема Померанчука верна, то интеграл (22) сходится. Во-вторых, Амблард и др. [17] и Хёлер и др. [18] показали, что амплитуда рассеяния вперед с перезарядкой

$$A^{\pi N(-)}\left(v, -\frac{M_\pi^2}{2M_N}, M_\pi, M_\pi\right) + v B^{\pi N(-)}\left(v, -\frac{M_\pi^2}{2M_N}, M_\pi, M_\pi\right)$$

удовлетворяет дисперсионному соотношению без вычитаний. Было бы удивительно, если бы этот результат изменился при изменении массы пиона от значения  $M_\pi$  к 0. Ясно, что если вычитание было бы необходимо, то правило сумм для  $g_A$  было бы бесполезным.

Записав дисперсионное соотношение для последнего члена в (37) и *не используя* гипотезу о частичном сохранении, мы получим правило сумм, связывающее  $1 - g_A^{-2}$  с сечениями, которые могут быть измерены в нейтринных экспериментах при высоких энергиях. Это правило сумм обсуждается в § 5.

### § 3. Численный расчет

Так как соотношение (22) содержит сечения пион-протонного рассеяния вне массовой поверхности, то необходимо сделать некоторые выкладки, прежде чем сравнивать его с экспериментом. Разобьем правую часть соотношения (22) на три члена

$$1 - g_A^{-2} = \frac{4M_N^2}{g_r^2} (R_1 + R_2 + R_3), \quad (53)$$

где

$$\begin{aligned} R_1 &= -\frac{1}{\pi} \int_{M_\pi}^{\infty} \frac{d\nu}{\nu} \operatorname{Im} G \left( \nu, -\frac{M_\pi^2}{2M_N}, M_\pi, M_\pi \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{M_\pi}^{\infty} \frac{d\nu}{\nu^2} (\nu^2 - M_\pi^2)^{1/2} [\sigma^+(\nu) - \sigma^-(\nu)], \quad (54a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_2 &= \frac{1}{\pi} \int_{M_\pi}^{\infty} \frac{d\nu}{\nu} \operatorname{Im} G \left( \nu, -\frac{M_\pi^2}{2M_N}, M_\pi, M_\pi \right) - \\ &- \frac{1}{\pi} \int_{M_\pi + M_\pi^2/(2M_N)}^{\infty} \frac{d\nu}{\nu} \operatorname{Im} G (\nu, 0, M_\pi, M_\pi), \quad (54b) \end{aligned}$$

$$R_3 = \frac{1}{\pi} \int_{M_\pi + M_\pi^2 / (2M_M)}^{\infty} \frac{dv}{v} \operatorname{Im} \left[ G(v, 0, M_\pi, M_\pi) - \frac{G(v, 0, 0, 0)}{K^{NN\pi(0)^2}} \right], \quad (54B)$$

$$G(v, v_B, M_\pi^i, M_\pi^f) \equiv v^{-1} \left[ A^{\pi N(-)}(v, v_B, M_\pi^i, M_\pi^f) + v_B^{\pi N(-)}(v, v_B, M_\pi^i, M_\pi^f) \right]. \quad (54Г)$$

Такое разбиение выбрано не случайно. Численно оказывается, что  $|R_1| > |R_2| > |R_3|$ . Основной член  $R_1$  включает только сечения  $\sigma^\pm$  физического пион-нуклонного рассеяния и может быть надежно определен. Слагаемые  $R_2$  и  $R_3$  представляют собой поправки, учитывающие то, что в правило сумм входит амплитуда рассеяния вперед с перезарядкой, когда оба внешних пиона имеют равные нулю массы. Член  $R_2$  можно вычислить, используя фазы пион-нуклонного рассеяния. Поскольку основной вклад в него дает (3,3)-резонанс, этот член может быть вычислен достаточно надежно. Член  $R_3$  определить сложнее, потому что в этом случае требуется модель для вычисления парциальных амплитуд вне массовой поверхности.

Мы получаем следующие численные результаты <sup>1)</sup>:

$$\frac{4M_N^2}{g_r^2} R_1 = 0,254, \quad \frac{4M_N^2}{g_r^2} R_2 = 0,155, \quad \frac{4M_N^2}{g_r^2} R_3 = -0,061, \quad (55)$$

откуда

$$g_A^{\text{теор}} = 1,24. \quad (56)$$

Оценка возможной ошибки этого расчета, основанная на использовании различных способов вычисления  $R_2$  и  $R_3$ , обсуждаемых ниже, дает значение  $\pm 0,03$ . Наиболее точное экспериментальное значение равно <sup>2)</sup>

$$g_A^{\text{эксп}} = 1,18 \pm 0,02. \quad (57)$$

<sup>1)</sup> Для пион-нуклонной константы связи мы использовали значение  $f^2 = g_r^2 M_\pi^2 / (16\pi M_N^2) = 0,081 \pm 0,002$ , приведенное в докладе Вулкока [19].

<sup>2)</sup> С. S. W и, частное сообщение.

Таким образом, правило сумм согласуется с экспериментом в пределах 5%.

Интересно отметить, что пион-нуклонные резонансы вблизи 600 и 900 Мэв дают существенный вклад в правило сумм. Если учесть вклад только (3,3)-резонанса, то мы получим  $g_A = 1,44$ . Другими словами, учет одного (3,3)-резонанса еще не достаточен для выполнения правила сумм.

Остальная часть этого параграфа посвящена деталям численного расчета.

### 1. ВЫЧИСЛЕНИЕ $R_1$

Как указано выше,  $R_1$  вычисляется непосредственно из полных сечений  $\sigma^\pm$  физического пион-нуклонного рассеяния. Для определения значений  $\sigma^\pm$  в интервале от 0 до 110 Мэв были использованы кривые, полученные Клепиковым и др. [20] в результате обработки экспериментальных данных. В интервале от 110 до 4950 Мэв мы использовали таблицы, составленные Амблардом и др. [17]<sup>1)</sup>. Выше 4950 Мэв мы использовали асимптотическую формулу  $\sigma^- - \sigma^+ = 7,73 \text{ мбарн} \times [k/(\text{Гэв}/c)]^{-0,7}$ , предложенную фон Дарделом и др. [21]. Их формула хорошо согласуется с экспериментальными данными вплоть до 20 Гэв/с. Использование этой формулы за пределами 20 Гэв/с является экстраполяцией современных экспериментальных данных и дает

$$\frac{4M_N^2}{g_r^2} \frac{1}{2\pi} \int_{20 \text{ Гэв}}^{\infty} \frac{dv}{v^2} (v^2 - M_\pi^2)^{1/2} (\sigma^+ - \sigma^-) \approx -0,011. \quad (58)$$

Таким образом, если асимптотическое поведение  $[k/(\text{Гэв}/c)]^{-0,7}$  не слишком далеко от истинного, то область выше 20 Гэв/с дает вклад, составляющий всего несколько процентов от  $1 - g_A^{-2}$ .

<sup>1)</sup> В. Amblard et al., частное сообщение.



2. ВЫЧИСЛЕНИЕ  $R_2$ 

Удобно представить  $R_2$  в виде однократного интеграла по энергии  $W$  в системе центра масс от выражения, равного разности значений некоторой функции в точках  $v_B = 0$  и  $v_B = -M_\pi^2/(2M_N)$ . Угол рассеяния в системе центра масс определяется следующим образом:

$$y \equiv \cos \varphi = 1 + \frac{M_\pi^2}{|k|^2} \quad \text{при } v_B = 0, \quad (59)$$

$$y \equiv \cos \varphi = 1 \quad \text{при } v_B = -\frac{M_\pi^2}{2M_N},$$

где  $|k|$  — импульс пиона в системе центра масс. Таким образом, получаем

$$R_2 = -16 \int_{M_N+M_\pi}^{\infty} dW \Delta(W),$$

$$\Delta(W) = \frac{W^2}{(W^2 - M_N^2)^2} \left[ f_1 \left( W, 1 + \frac{M_\pi^2}{|k|^2} \right) \frac{(W + M_N)^2}{(W + M_N)^2 - M_\pi^2} + \right. \\ \left. + f_2 \left( W, 1 + \frac{M_\pi^2}{|k|^2} \right) \frac{(W - M_N)^2}{(W - M_N)^2 - M_\pi^2} \right] - \\ - \frac{W^2}{(W^2 - M_N^2 - M_\pi^2)^2} [f_1(W, 1) + f_2(W, 1)], \quad (60)$$

где  $f_1(W, y)$  и  $f_2(W, y)$  — обычные амплитуды пион-ну-клонного рассеяния в системе центра масс. Поскольку  $f_1$  и  $f_2$  являются аналитическими функциями  $y$  в эллипсе с фокусами в точках  $\pm 1$  и большой полуосью, равной  $1 + 2M_\pi^2/|k|^2$ , мы вправе использовать разложения по парциальным волнам при вычислении  $f_1$  и  $f_2$  в обоих членах выражения (60). Интеграл быстро сходится, так как оба члена в  $\Delta(W)$  сокращаются друг с другом в пределе высоких энергий.

Число  $(4M_N^2/g^2)R_2 = 0,155$  в (55) было получено с помощью фазового анализа Ропера [22]<sup>2)</sup> при  $l_m = 3$ . При

<sup>1)</sup> Это утверждение предполагает справедливость представления Мандельштама.

<sup>2)</sup> L. D. Roper, частное сообщение.

этом интегрирование обрывалось в точке  $W = 11,20M_\pi$ . (За пределами этой энергии фазовый анализ в настоящее время не проделан.) Основной вклад в интеграл дает (3,3)-резонанс; интегрируя *только* по области (3,3)-резонанса, мы получаем значение  $(4M_N^2/g_r^2)R_2 = 0,166$ . При третьем способе вычисления использовались простые брейт-вигнеровские формулы для (3,3)-резонанса и резонансов вблизи 600 и 900 Мэв и не учитывались остальные парциальные волны. При этом получается  $(4M_N^2/g_r^2)R_2 = 0,156$ , если интегрирование обрывается при энергии  $11,20M_\pi$ , и  $(4M_N^2/g_r^2)R_2 = 0,145$ , если верхний предел интегрирования равен  $W \approx 17M_\pi$ . Довольно точное совпадение приведенных чисел указывает на то, что величина  $R_2$  нечувствительна к спорным моментам фазового анализа Ропера, таким, как предсказание резонанса в  $P_{11}$ -волне.

### 3. ВЫЧИСЛЕНИЕ $R_3$

Слагаемое  $R_3$ , учитывающее поправки, связанные с выходом внешних пионов за массовую поверхность, нельзя вычислить непосредственно из экспериментальных данных. Чтобы оценить этот член, необходимо построить модель для определения парциальной амплитуды  $f_{III}(W, M_\pi^i, M_\pi^f)$  вне массовой поверхности. (Здесь  $l$  — орбитальный момент,  $J$  — полный момент и  $I$  — изоспин.)

Фактически, чтобы вычислить  $R_3$ , нам нужно знать только мнимую часть  $f_{III}(W, M_\pi^i, M_\pi^f)$ . Ниже порога неупругих процессов  $W = M_N + 2M_\pi$  в силу обобщенной унитарности имеем

$$\begin{aligned} \text{Im } f_{III}(W, M_\pi^i, M_\pi^f) = \\ = |\mathbf{k}| f_{III}(W, M_\pi^i, M_\pi) f_{III}(W, M_\pi^i, M_\pi)^*. \end{aligned} \quad (61)$$

Пион в промежуточном состоянии, разумеется, находится на массовой поверхности. Поскольку выход за массовую поверхность внешних пионов существенно сказывается только при энергиях в районе (3,3)-резонанса,

то достаточно изучить амплитуду  $f_{III}(W, M_\pi^i, M_\pi)$  и затем использовать условие упругой унитарности (31) для нахождения  $\text{Im} f_{III}(W, M_\pi^i, M_\pi^f)$ .

При построении модели мы используем следующую информацию о  $f_{III}$ .

1) *Пороговое поведение.* Из кинематических соображений следует, что вблизи порога при  $W = M_N + M_\pi$  амплитуда  $f_{III}(W, M_\pi^i, M_\pi^f)$  равна величине  $(|k^i| |k^f|)^i$ , умноженной на медленно меняющиеся множители, где

$$|k^{i, f}| = [(k_0^{i, f})^2 - (M_\pi^{i, f})^2]^{1/2}, \quad k_0^{i, f} = \frac{W^2 - M_N^2 + (M_\pi^{i, f})^2}{2W}. \quad (62)$$

Здесь  $|k^i|$  и  $|k^f|$  — импульсы пионов в начальном и конечном состояниях в системе центра масс. Если  $M_\pi^i = 0$  ( $M_\pi$ ), то мы будем обозначать  $|k^i|$  через  $|k^0|$  ( $|k|$ ).

2) *Унитарность.* Полагая массу  $M_\pi^i$  или  $M_\pi^f$  равной  $M_\pi$  в (61), мы видим, что  $f_{III}(W, M_\pi^i, M_\pi)$  имеет ту же фазу  $\delta_{III}$ , что и парциальная амплитуда  $f_{III}(W, M_\pi, M_\pi)$  реального пион-нуклонного рассеяния.

3) *Сингулярности в левой полуплоскости.* Изменение массы внешнего пиона изменяет сингулярности парциальной амплитуды  $f_{III}(W, M_\pi^i, M_\pi^f)$  в левой полуплоскости. Ближайшие к физической области сингулярности в этой полуплоскости возникают за счет коэффициента  $f_{II}^B(W, M_\pi^i, M_\pi^f)$ , парциального разложения борновского приближения (полюсного члена) в выражении (46). Соотношение (46) показывает, что  $f_{III}^B(W, M_\pi^i, M_\pi^f)$  содержит множитель  $K^{NN\pi} [-(M_\pi^i)^2] K^{NN\pi} [-(M_\pi^f)^2]$ , возникающий вследствие изменения силы взаимодействия внешних пионов с нуклонами в случае, когда масса внешних пионов отличается от своего физического значения.

Простая модель, учитывающая соображения 1–3, состоит в выборе парциальной амплитуды в виде

$$f_{III}(W, M_\pi^i, M_\pi) \approx \frac{f_{III}^B(W, M_\pi^i, M_\pi)}{f_{III}^B(W, M_\pi, M_\pi)} f_{III}(W, M_\pi, M_\pi). \quad (63)$$

В соотношении (63) амплитуда  $f_{III}(W, M_\pi^i, M_\pi)$  имеет такую же фазу, как и  $f_{III}(W, M_\pi, M_\pi)$ . Умножение

физической амплитуды  $f_{JJ}$  на отношение борновских приближений дает правильное пороговое поведение для  $f_{JJ}$  вне массовой поверхности и приблизительно верные ближайшие сингулярности в левой полуплоскости. Вторая модель состоит в выборе для амплитуды следующего выражения:

$$f_{JJ}(W, M_\pi^i, M_\pi) \approx \left( \frac{|k^i|}{|k|} \right)^l K^{NN\pi} [- (M_\pi^i)^2] f_{JJ}(W, M_\pi, M_\pi), \quad (64)$$

в которое мы включили только множитель, исправляющий пороговое поведение, и постоянный множитель  $K^{NN\pi} (- (M_\pi^i)^2)$ , учитывающий изменение коэффициента при ближайших сингулярностях в левой полуплоскости. В соответствии с соотношением (61) первая модель дает

$$\text{Im } f_{JJ}(W, 0, 0) = \left[ \frac{f_{JJ}^B(W, 0, 0)}{f_{JJ}^B(W, M_\pi, M_\pi)} \right]^2 \text{Im } f_{JJ}(W, M_\pi, M_\pi), \quad (65)$$

в то время как вторая дает

$$\text{Im } f_{JJ}(W, 0, 0) = \left( \frac{|k^0|}{|k|} \right)^{2l} K^{NN\pi}(0)^2 \text{Im } f_{JJ}(W, M_\pi, M_\pi). \quad (66)$$

Хотя соотношение (61) справедливо лишь в области энергий ниже неупругого порога, мы будем пользоваться соотношениями (65) и (66) как ниже неупругого порога, так и выше него.

Численный расчет по формуле (54в) дает величину  $(4M_N^2/g_r^2)R_3 = -0,061$  в случае модели (65) и величину  $(4M_N^2/g_r^2)R_3 = -0,051$  в модели (66). В обоих случаях использовался фазовый анализ Ропера, а интегрирование обрывалось при  $W = 11,20M_\pi$ . Используя соотношение (65) и интегрируя по энергии лишь в районе (3,3)-резонанса, получаем  $(4M_N^2/g_r^2)R_3 = -0,066$ . Вычисление интеграла с помощью брейт-вигнеровской формулы для низко лежащих резонансов приводит к аналогичным результатам. Таким образом, указанное значение  $R_3$ ,

хотя и зависит от модели, используемой для выхода за массовую поверхность, нечувствительно к спорным моментам фазового анализа.

#### 4. ЗАМЕЧАНИЯ

Члены  $R_2$  и  $R_3$ , основной вклад в которые дают энергии в районе (3,3)-резонанса, составляют вместе 0,094, в то время как член  $R_1$  равен 0,254. На первый взгляд может показаться удивительным, что эффект поправок  $R_2$  и  $R_3$  так велик, однако это легко понять. Из соотношения (66) видно, что основная часть этого эффекта обусловлена умножением  $\sigma_{3,3}$ , т. е. вклада (3,3)-резонанса в подынтегральное выражение в  $R_1$ , на величину

$$\frac{|k^0|^2}{|k|^2}. \quad (67)$$

В точке (3,3)-резонанса этот множитель составляет 1,27. Поскольку вклад (3,3)-резонанса в  $R_1$  равен 0,43, то можно ожидать, что  $R_1$  возрастет на величину порядка

$$0,27 \times 0,43 \approx 0,12, \quad (68)$$

что приближенно согласуется с величиной суммы  $R_2$  и  $R_3$

#### § 4. Правило сумм для пион-пионного рассеяния

В § 2 мы взяли матричный элемент от соотношения (7) между протонными состояниями и вывели правило сумм, связывающее  $g_A$  с сечениями пион-протонного рассеяния. Теперь возьмем матричный элемент от соотношения (7) между состояниями  $\pi^+$ -мезонов. Те же выкладки, которые использовались в случае протонных состояний, теперь приводят к правилу сумм

$$\frac{2}{g_A^2} = \frac{4M_N^2}{g_r^2 K^{NN\pi}(0)^2} \frac{1}{\pi} \int_{2M_\pi}^{\infty} \frac{W dW}{W^2 - M_\pi^2} [\sigma_{0\pi}^-(W) - \sigma_{0\pi}^+(W)], \quad (69)$$

где  $\sigma_{0\pi}^\pm(W)$  — полное сечение рассеяния  $\pi^\pm$ -мезона с нулевой массой на физическом  $\pi^+$ -мезоне при энергии  $W$ , измеренной в системе центра масс. Соотношение (69)

содержит  $g_A^{-2}$ , а не  $g_A^{-2} - 1$ , поскольку вклад однопионного промежуточного состояния равен нулю из-за сохранения четности. Множитель 2 в левой части соотношения (69) появляется вследствие того, что

$$\langle \pi^+(q) | 2I^3 | \pi^+(q') \rangle = 2 \cdot (2\pi)^3 \delta(q - q').$$

Мы не имеем, разумеется, прямых данных по пион-пионному рассеянию, однако существует достаточное количество информации о пион-пионных резонансах, позволяющей произвести сравнение соотношения (69) с экспериментом. Прежде всего отметим, что сечение  $\sigma_{0\pi}^+(W)$  отлично от нуля только за счет рассеяния в состоянии с  $I=2$ . В то время как в сечениях рассеяния при низких энергиях в состояниях с  $I=0$  и  $I=1$  наблюдаются резонансы, сечение рассеяния с  $I=2$ , по-видимому, мало. Таким образом, правая часть соотношения (69) положительна, и ее знак совпадает со знаком левой части.

Произведем теперь количественный анализ. В соответствии с формулой (57) левая часть соотношения (69) равна

$$\frac{2}{g_A^2} = 1,43. \quad (70)$$

Запишем правую часть соотношения (69) с помощью переменной  $s = W^2$ . Получаем

$$\frac{4M_N^2}{g_r^2 K^{NN\pi}(0)^2} \frac{1}{2\pi} \int_{4M_\pi^2}^{\infty} \frac{ds}{s - M_\pi^2} [\sigma_{0\pi}^-(s) - \sigma_{0\pi}^+(s)]. \quad (71)$$

Равенство нулю масс внешнего пиона учтем точно так же, как в случае пион-протонного рассеяния, написав<sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} \sigma_{0\pi}^{l,l}(s) &= K^{NN\pi}(0)^2 \left( \frac{|\mathbf{k}^0|}{|\mathbf{k}|} \right)^{2l-1} \sigma_\pi^{l,l}(s) = \\ &= K^{NN\pi}(0)^2 \left[ \frac{(s - M_\pi^2)^2}{s(s - 4M_\pi^2)} \right]^{l-1/2} \sigma_\pi^{l,l}(s), \quad (72) \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> См. примечание на стр. 74. — Прим. ред.

где  $l$  — орбитальный момент,  $I$  — изоспин и  $\sigma_{\pi}^{l, I}(s)$  — парциальное сечение на массовой поверхности. Таким образом, выражение (71) принимает вид

$$\frac{4M_N^2}{g_r^2} \frac{1}{2\pi} \int_{4M_{\pi}^2}^{\infty} \frac{ds [s(s-4M_{\pi}^2)]^{1/2}}{(s-M_{\pi}^2)^2} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{\substack{l=0 \\ l \text{ четные}}}^{\infty} \left[ \frac{(s-M_{\pi}^2)^2}{s(s-4M_{\pi}^2)} \right]^l \frac{2}{3} \left[ \sigma_{\pi}^{l, 0}(s) - \frac{5}{2} \sigma_{\pi}^{l, 2}(s) \right] + \right.$$

$$\left. + \sum_{\substack{l=1 \\ l \text{ нечетные}}}^{\infty} \left[ \frac{(s-M_{\pi}^2)^2}{s(s-4M_{\pi}^2)} \right]^l \sigma_{\pi}^{l, 1}(s) \right\}. \quad (73)$$

Вычислим сначала вклады двух известных  $\pi$ -резонансов:  $\rho$ -резонанса с  $l=I=1$  и  $f^0$ -резонанса с  $l=2$ ,  $I=0$ . Представим  $\sigma_{\pi}^{1, 1}$  и  $\sigma_{\pi}^{2, 0}$  в виде [23]

$$\sigma_{\pi}^{1, 1}(s) = \frac{12\pi v_{\rho}^2 v^2 / (v + M_{\pi}^2)}{(s_{\rho} - s)^2 + v_{\rho}^2 v^3 / (v + M_{\pi}^2)}, \quad (74)$$

$$\sigma_{\pi}^{2, 0}(s) = \frac{20\pi v_f^2 v^4 / (v + M_{\pi}^2)}{(s_f - s)^2 + v_f^2 v^5 / (v + M_{\pi}^2)}, \quad v = \frac{1}{4} s - M_{\pi}^2.$$

Приведенные ширины  $v_{\rho}^2$  и  $v_f^2$  следующим образом связаны с экспериментальными полными ширинами  $\Gamma_{\rho}$  и  $\Gamma_f$ , измеренными между точками, соответствующими половине максимума:

$$v_{\rho}^2 = \frac{v_{\rho} + M_{\pi}^2}{v_{\rho}^3} s_{\rho} \Gamma_{\rho}^2, \quad v_f^2 = \frac{v_f + M_{\pi}^2}{v_f^5} s_f \Gamma_f^2, \quad (75)$$

$$v_{\rho, f} = \frac{1}{4} s_{\rho, f} - M_{\pi}^2.$$

Используя экспериментальные значения [24]  $s_{\rho} = 29,7M_{\pi}^2$ ,  $\Gamma_{\rho} = 0,755M_{\pi}$ ,  $s_f = 80,0M_{\pi}^2$ ,  $\Gamma_f = 0,716M_{\pi}$  для вкладов  $\rho$  и  $f^0$  в выражение (73), получаем

$$\rho\text{-вклад} = 0,42, \quad f^0\text{-вклад} = 0,11. \quad (76)$$

Для проверки мы вычислили также  $\rho$ - и  $f^0$ - вклады в приближении узких резонансов. В результате мы получили 0,35 для  $\rho$ -вклада и 0,09 для  $f^0$ -вклада, откуда следует, что поправки за счет формы резонансов не изменяют существенно чисел в (76).

Вклад  $\rho$ - и  $f^0$ -резонансов, равный 0,53, составляет только 37% величины 1,43 — полного вклада, необходимого для выполнения правила сумм. Поскольку вклад  $f^0$ -резонанса мал, а резонансов с  $l \geq 3$  в низкоэнергетической области, по-видимому, нет [24], то разумно пренебречь в выражении (73) вкладом членов с  $l \geq 3$ . Преобразовав соответствующим образом соотношение (69), получаем

$$\begin{aligned} & \frac{4M_N^2}{g_r^2} \frac{1}{2\pi} \int_{4M_\pi^2}^{\infty} \frac{ds [s(s-4M_\pi^2)]^{1/2}}{(s-M_\pi^2)^2} \frac{2}{3} \sigma_{\pi^0}^{0,0}(s) = \\ & = \frac{4M_N^2}{g_r^2} \frac{1}{2\pi} \int_{4M_\pi^2}^{\infty} \frac{ds [s(s-4M_\pi^2)]^{1/2}}{(s-M_\pi^2)^2} \frac{5}{3} \left\{ \sigma_{\pi^2}^{0,2}(s) + \right. \\ & \left. + \left[ \frac{(s-M_\pi^2)^2}{s(s-4M_\pi^2)} \right]^2 \sigma_{\pi^2}^{2,2}(s) \right\} + 1,43 - 0,42 - 0,11 \geq 0,9. \quad (77) \end{aligned}$$

Таким образом, правило сумм для пион-пионного рассеяния справедливо только в том случае, если сечение пион-пионного рассеяния при низких энергиях в  $S$ -состоянии с  $l=0$  велико.

Чтобы представить себе, насколько велико должно быть сечение рассеяния в  $S$ -состоянии с  $l=0$ , удовлетворяющее правилу сумм (77), оценим левую часть соотношения (77), используя простую параметризацию фазы рассеяния в  $S$ -состоянии с  $l=0$  в приближении длины рассеяния [25]:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{v}{v+M_\pi^2} \right)^{1/2} \operatorname{ctg} \delta^{0,0} = \frac{1}{a_0} + H(v), \\ & H(v) = \frac{2}{\pi} \left( \frac{v}{v+M_\pi^2} \right)^{1/2} \ln \left[ \left( \frac{v}{M_\pi^2} \right)^{1/2} + \left( \frac{v}{M_\pi^2} + 1 \right)^{1/2} \right], \quad (78) \end{aligned}$$



откуда

$$\sigma_{\pi}^{0,0} = \frac{4\pi a_0^2}{a_0^2 v + (v + M_{\pi}^2) [1 + a_0 H(v)]^2}. \quad (79)$$

Мы получаем, что правило сумм (77) может выполняться только в том случае, если  $a_0 > 1,3$  или если  $a_0 < -0,85$ . Интересно отметить, что при изучении пион-нуклонного рассеяния при низких энергиях [26] и  $K_{14}$ -распадов [27] были получены указания на то, что длина рассеяния в  $S$ -состоянии с  $l=0$  по порядку величины также равна комптоновской длине волны пиона. Разумеется, параметризация, выбранная в соотношении (78), не является единственно возможной<sup>1)</sup>.

### § 5. Способы проверки алгебры токов в нейтринных реакциях при высоких энергиях

Правила сумм, рассмотренные в предыдущих трех параграфах, получены из двух основных предположений: коммутационных соотношений для аксиально-векторных токов (7) и гипотезы о частичном сохранении аксиально-векторного тока (5). В настоящем параграфе мы обсудим правило сумм, вытекающее исключительно из алгебры аксиально-векторных токов, независимо от того, справедлива гипотеза о частичном сохранении или нет. Мы выведем также правила сумм, соответствующие коммутационным соотношениям алгебры токов, изменяющих странность.

<sup>1)</sup> В оригинальной статье в формулах (72)–(74) были допущены неточности, которые исправлены в данном тексте. В результате всех исправлений ни один из выводов § 4 не меняется, но возрастает величина длины рассеяния  $a_0$ , необходимая для насыщения правила сумм. (Граничные значения 1,3 и  $-0,85$ , приведенные в тексте, соответствуют неточным формулам и, следовательно, занижены по модулю.) Однако работа Вайнберга [30] указывает на то, что большая длина рассеяния  $a_0$ , по-видимому, не может служить механизмом насыщения правила сумм (69). Заключение Вайнберга о малости величины  $a_0$  указывает на то, что правильным механизмом насыщения скорее являются высокоэнергетические вклады, которыми мы пренебрегли в § 4, или широкий низкоэнергетический пл-резонанс в  $S$ -состоянии с  $l=0$  и с малой длиной рассеяния, или комбинация обоих механизмов.

Сделаем сначала краткий обзор теории слабых лептонных взаимодействий адронов. Согласно Гелл-Манну [4] и Кабиббо [7], адронный слабый ток имеет вид<sup>1)</sup>

$$J_{\lambda}^h = (\mathfrak{F}_{1\lambda} + i\mathfrak{F}_{2\lambda} + \mathfrak{F}_{1\lambda}^5 + i\mathfrak{F}_{2\lambda}^5) G_V \cos \theta + \\ + (\mathfrak{F}_{4\lambda} + i\mathfrak{F}_{5\lambda} + \mathfrak{F}_{4\lambda}^5 + i\mathfrak{F}_{5\lambda}^5) G_V \sin \theta, \quad (80)$$

где  $G_V$  — константа связи Ферми, а  $\theta$  — угол Кабиббо. Векторные токи  $\mathfrak{F}_{j\lambda}$  и аксиальные токи  $\mathfrak{F}_{j\lambda}^5$  ( $j = 1, \dots, 8$ ) образуют два различных  $SU_3$ -октета. Обобщение гипотезы о сохранении векторного тока в случае симметрии  $SU_3$  состоит в предположении о том, что токи  $\mathfrak{F}_{j\lambda}$  равны токам унитарного спина, причем

$$\mathfrak{F}_{a\lambda} = I_{\lambda}^a, \quad a = 1, 2, 3; \quad \mathfrak{F}_{8\lambda} = \frac{1}{2} \sqrt{3} Y_{\lambda}, \quad (81)$$

где  $I_{\lambda}^a$  — ток изотопического спина, а  $Y_{\lambda}$  — ток гиперзаряда. В наших новых обозначениях токи, введенные в § 1, имеют вид

$$J_{\lambda}^{Va} = \mathfrak{F}_{a\lambda}, \quad J_{\lambda}^{Aa} = \mathfrak{F}_{a\lambda}^5, \quad a = 1, 2, 3. \quad (82)$$

Определим векторный и аксиально-векторный „заряды“  $F_j$  и  $F_j^5$  следующим образом:

$$F_j = -i \int d^3x \mathfrak{F}_{j4}, \quad F_j^5 = -i \int d^3x \mathfrak{F}_{j4}^5. \quad (83)$$

Гелл-Мани [4] постулировал, что даже в присутствии нарушающего  $SU_3$ -симметрию взаимодействия справедливы следующие коммутационные соотношения:

$$[F_i, F_j] = if_{ijk} F_k, \\ [F_i, F_j^5] = if_{ijk} F_k^5, \\ [F_i^5, F_j^5] = if_{ijk} F_k. \quad (84)$$

Коммутационное соотношение для киральностей (7) является, конечно, лишь частным случаем соотношений (84):

$$[F_1^5 + iF_2^5, F_1^5 - iF_2^5] = 2F_3. \quad (85)$$

<sup>1)</sup> В этом параграфе мы используем обозначения для токов, принятые в работе [4].

Кроме того, из (84) мы получаем следующее коммутационное соотношение для „заряда“, соответствующего изменяющей странность части тока  $J_\lambda^h$ :

$$\begin{aligned} [F_4 + iF_5 + F_4^5 + iF_5^5, F_4 - iF_5 + F_4^5 - iF_5^5] = \\ = 2\sqrt{3}F_8 + 2F_3 + 2\sqrt{3}F_8^5 + 2F_3^5. \end{aligned} \quad (86)$$

Предположив, что по пространственным переменным  $x$  можно интегрировать по частям, мы можем выразить временные производные „зарядов“ через дивергенции соответствующих токов:

$$\frac{d}{dt} F_I = \int d^3x \partial_\lambda \mathfrak{F}_{I\lambda}, \quad \frac{d}{dt} F_I^5 = \int d^3x \partial_\lambda \mathfrak{F}_{I\lambda}^5. \quad (87)$$

Выведем теперь правила сумм, позволяющие проверить коммутационные соотношения (85) и (86). Рассмотрим сначала случай с сохранением странности [соотношение (85)]. Действуя точно так же, как и в § 2, возьмем матричный элемент от соотношения (85) между протонными состояниями. Единственная разница состоит в том, что теперь мы *не предполагаем*, что дивергенция  $\partial_\lambda \mathfrak{F}_{a\lambda}^5$  пропорциональна полю пиона.

В результате получаем правило сумм

$$1 = g_A^2 + \int_{M_N + M_\pi}^{\infty} \frac{4M_N W dW}{(W^2 - M_N^2)^2} [N_\rho^-(W) - N_\rho^+(W)], \quad (88)$$

где

$$\begin{aligned} N_\rho^\pm(W) = \sum_{\substack{j \neq N \\ \text{внут}}} \delta(W - M_j) |\mathfrak{F}_j^\pm|^2 |_{(q-q_j)^2=0} \\ \langle j | \partial_\lambda \mathfrak{F}_{1\lambda}^5 \pm i \partial_\lambda \mathfrak{F}_{2\lambda}^5 | p(q) \rangle = \left( \frac{M_N}{q_0} \frac{M_j}{q_{j0}} \right)^{1/2} \mathfrak{F}_j^\pm. \end{aligned} \quad (89)$$

Другими словами, величина  $\mathfrak{F}_j^\pm$  равна матричному элементу от дивергенции аксиально-векторного тока; правило сумм (88) содержит этот матричный элемент только при нулевом значении квадрата переданного 4-импульса  $(q - q_j)^2$ .

Матричный элемент, необходимый для вычисления правой части соотношения (88), можно непосредственно

измерить в нейтринных реакциях при высоких энергиях. Рассмотрим неупругий процесс

$$\nu_l + N \rightarrow l + j, \quad (90)$$

где  $\nu_l$  — нейтрино,  $l$  — лептон,  $N$  — нуклон, а  $j$  — система сильно взаимодействующих частиц с  $M_j \neq M_N$ . В ранее опубликованной работе [28] мы показали, что если лептон вылетает в направлении, параллельном направлению движения падающего нейтрино, а массой лептона можно пренебречь, то матричный элемент процесса (90) зависит только от *дивергенций* адронных токов. Ясно, что при этих предположениях квадрат переданного импульса  $(q - q_j)^2$  равен нулю, так что мы измеряем как раз матричный элемент, входящий в (88). (В случае  $\Delta S = 0$  дивергенция векторного тока равна нулю.) Суммируя по конечным состояниям  $j$  с нулевой странностью ( $S = 0$ ), для вылетающего вперед лептона получаем соотношения

$$\frac{d^2\sigma[\nu + p \rightarrow l^- + (S=0)]}{d\Omega_l dE_l} = G_V^2 \cos^2 \theta f(W) N_p^+(W),$$

$$\frac{d^2\sigma[\bar{\nu} + p \rightarrow l^+ + (S=0)]}{d\Omega_l dE_l} = G_V^2 \cos^2 \theta f(W) N_p^-(W), \quad (91)$$

где

$$f(W) = \frac{1}{2\pi^2} \left[ \frac{M_N^2 + 2M_N E - W^2}{W^2 - M_N^2} \right]^2. \quad (92)$$

Здесь  $E$  — энергия падающего нейтрино,  $E_l$  — энергия лептона в конечном состоянии и  $\Omega_l$  — телесный угол рассеяния лептона (все в лабораторной системе отсчета, где протон в начальном состоянии покоится).  $E_l$  выражается через  $W$  и  $E$  следующим образом:

$$E_l = \frac{M_N^2 + 2M_N E - W^2}{2M_N}. \quad (93)$$

Тот же метод можно применить к коммутатору токов, изменяющих странность (86)<sup>1)</sup>. В результате получим два правила сумм:

<sup>1)</sup> Матричный элемент аксиально-векторных членов в правой части соотношения (86) между нуклонными состояниями обращается в нуль при усреднении по спину нуклона.

$$4 = \int \frac{4M_N W dW}{(W^2 - M_N^2)^2} [S_p^-(W) - S_p^+(W)], \quad (94a)$$

$$2 = \int \frac{4M_N W dW}{(W^2 - M_N^2)^2} [S_n^-(W) - S_n^+(W)]. \quad (94b)$$

Соотношение (94a) содержит вклады двух дискретных состояний при  $W = M_\Lambda$  и  $W = M_\Sigma$  и интеграл по непрерывному спектру от  $W = M_\pi + M_\Lambda$  до  $\infty$ . Соотношение (94b) включает вклад дискретного состояния при  $W = M_\Sigma$  и интеграл по непрерывному спектру от  $W = M_\pi + M_\Lambda$  до  $\infty$ . Функции  $S_{p,n}^\pm$  можно измерить в нейтринных реакциях с изменением странности при высоких энергиях, поскольку для летящего вперед лептона

$$\frac{d^2\sigma [v + (p, n) \rightarrow l^- + (S = +1)]}{d\Omega_l dE_l} = G_V^2 \sin^2 \theta f(W) S_{(p,n)}^+(W),$$

$$\frac{d^2\sigma [\bar{\nu} + (p, n) \rightarrow l^+ + (S = -1)]}{d\Omega_l dE_l} = G_V^2 \sin^2 \theta f(W) S_{(p,n)}^-(W). \quad (95)$$

Таким образом, соотношения (88), (91), (94) и (95) можно использовать для непосредственной проверки алгебры Гелл-Манна для векторных и аксиально-векторных токов.

### Л и т е р а т у р а

1. Goldhaber M., Proceedings of the 1958 Annual International Conference on High Energy Physics, CERN, Geneva, 1958, p. 233.
2. Feynman R. P., Gell-Mann M., Phys. Rev., 109, 193 (1958).
3. Blin-Stoyle R. J., Nuovo Cimento, 10, 132 (1958).  
Okubo S., Nuovo Cimento 13, 292 (1959).  
Bernstein J., Gell-Mann M., Michel L., Nuovo Cimento, 16, 560 (1960).  
Balachandran A. P., Nuovo Cimento, 23, 428 (1962).  
Banerjee H., Nuovo Cimento, 23, 1168 (1962).  
Mathur V. S., Nath R., Saxena R. P., Nuovo Cimento, 31, 874 (1964).  
Kim Y. S., Nuovo Cimento, 36, 523 (1965).  
Nambu Y., Jona-Lasinio G., Phys. Rev., 124, 246 (1961).  
Nguyen-Van-Hieu, Nucl. Phys., 42, 129 (1963).
4. Gell-Mann M., Physics 1, 63 (1964).
5. Gell-Mann M., Lévy M., Nuovo Cimento, 16, 705 (1960).  
Nambu Y., Phys. Rev. Letters, 4, 380 (1960).
6. Adler S. L., Phys. Rev., 137, B1022 (1965).

7. Cabibbo N., Phys. Rev. Lett., **10**, 531 (1963).
8. Wu C. S., Rev. Mod. Phys., **36**, 618 (1964).
9. Goldberger M. L., Treiman S. B., Phys. Rev., **109**, 193 (1958).
10. Gell-Mann M., Ne'eman Y., Ann. of Phys., **30**, 360 (1964).
11. Gell-Mann M., Phys. Rev., **125**, 1067 (1962).
12. Weisberger W. I., Phys. Rev. Lett., **14**, 1047 (1965).
13. Fubini S., Furlan G., Physics, **1**, 229 (1965).
14. Adler S. L., Phys. Rev., **B139**, 1638 (1965) (ст. 2 настоящей книги).
15. Nambu Y., Lurié D., Phys. Rev., **125**, 1429 (1962).  
Nambu Y., Shrauner E., Phys. Rev., **128**, 862 (1962).
16. Chew G. F., Goldberger M. L., Low F. E., Nambu Y., Phys. Rev., **106**, 1337 (1957).
17. Amblard B. et al., Phys. Lett., **10**, 138 (1964).
18. Høhler G., Ebel G., Giesecke J., Zs. Physik, **180**, 430 (1964).
19. Woolcock W. S., Proceedings of the Aix-en-Provence International Conference on Elementary Particles., Vol. 1, 1961, p. 459.
20. Клепиков Н. П. и др., препринт Д-584, Дубна, 1960.
21. Von Dardel G. et al., Phys. Rev. Lett., **8**, 173 (1962).
22. Roper L. D., Phys. Rev. Lett., **12**, 340 (1964).
23. Balázs L. A. P., Phys. Rev., **129**, 872 (1963).
24. Rosenfeld A. H. et al., Rev. Mod. Phys., **36**, 977 (1964).
25. Chew G. F., Mandelstam S., Phys. Rev., **119**, 467 (1960).
26. Hamilton J., Strong Interactions and High Energy Physics (Scottish Universities' Summer School, 1963), ed. R. G. Moorhouse, New York, 1964.
27. Kacser C., Singer P., Truong T., Phys. Rev., **137**, B1605 (1965).
28. Adler S. L., Phys. Rev., **135**, B963 (1964).
29. Adler S. L., Phys. Rev. Lett., **14**, 1051 (1965).
30. Weinberg S., Phys. Rev. Lett., **17**, 616 (1966) (ст. 4 настоящей книги).

## НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ПИОНОВ

Формулировка низкоэнергетических теорем для процессов с участием мягких пионов является одним из наиболее плодотворных приложений алгебры токов и гипотезы о частичном сохранении аксиально-векторного тока. Эти теоремы позволяют выразить матричный элемент процесса с испусканием пиона с нулевым (или малым) 4-импульсом через матричный элемент соответствующего процесса без испускания пиона и через одновременные коммутаторы токов. В этой главе мы обсудим статьи, посвященные общему формализму и некоторым полезным результатам.

### § 1. Общий формализм

Впервые формулы для испускания мягких пионов (т. е. пионов с нулевым или малым 4-импульсом) были получены Намбу и Лурье [24]. Они рассмотрели теорию взаимодействия нуклонов с пионами нулевой массы. В этой теории дивергенция аксиально-векторного тока равна нулю и, следовательно, полная киральность

$$\chi(x^0) = \int d^3x [\mathfrak{S}_1^{50}(x) + i\mathfrak{S}_2^{50}(x)] = F_1^5(x^0) + iF_2^5(x^0) \quad (2.1)$$

сохраняется. Используя это обстоятельство, Намбу и Лурье показали, что в процессах рассеяния изменение киральности нуклона должно компенсироваться изменением пионной киральности, т. е. испусканием мягких пионов. (Это пионный аналог хорошо известного явления испускания мягких фотонов при рассеянии заряженных частиц, когда электромагнитный ток в начальном и конечном состояниях различен.) Киральный подход можно использовать и в более реалистическом случае,

когда масса пиона отлична от нуля и аксиально-векторный ток частично сохраняется, т. е. когда

$$\frac{d\chi(x^0)}{dx^0} = \frac{\sqrt{2} M_N M_\pi^2 g_A}{g_r(0)} \int d^3x \Phi_{\pi^+}^+ \quad (2.2a)$$

Получающиеся при этом результаты по существу совпадают с результатами Намбу и Лурье. Поскольку приведенный в разделе IV их статьи [24] вывод является довольно сжатым, мы в приложении А подробно рассматриваем киральный подход как в случае отличной от нуля массы пиона, так и для нулевой массы.

Эти результаты об испускании мягких пионов можно получить и другим, несколько более удобным методом, рассмотренным в ст. 2. Идея этого метода состоит в том, чтобы использовать непосредственно уравнение частичного сохранения аксиально-векторного тока

$$\partial_\lambda (\mathfrak{F}_1^{5\lambda} + i\mathfrak{F}_2^{5\lambda}) = \frac{\sqrt{2} M_N M_\pi^2 g_A}{g_r(0)} \Phi_{\pi^+}^+ \quad (2.2b)$$

не совершая в (2.2b) интегрирования по пространству, приводящего к уравнению (2.2a). Беря матричный элемент от обеих частей этого уравнения между адронными состояниями<sup>1)</sup>  $\langle \beta(q_2) |$  и  $| \alpha(q_1) \rangle$ , получаем соотношение

$$\begin{aligned} i q_\lambda \langle \beta(q_2) | \mathfrak{F}_1^{5\lambda} + i\mathfrak{F}_2^{5\lambda} | \alpha(q_1) \rangle = \\ = \frac{\sqrt{2} M_N g_A}{g_r(0)} \frac{M_\pi^2}{M_\pi^2 - q^2} \langle \beta(q_2) | (\square^2 + M_\pi^2) \Phi_{\pi^+}^+ | \alpha(q_1) \rangle, \quad (2.3) \end{aligned}$$

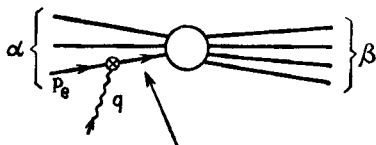
$$q = q_2 - q_1.$$

При  $q \rightarrow 0$  правая часть соотношения (2.3) стремится к произведению  $\sqrt{2} M_N g_A / g_r(0)$  на матричный элемент процесса испускания пиона с нулевым 4-импульсом в реакции  $\alpha \rightarrow \beta$ . Благодаря множителю  $q_\lambda$  в левую часть соотношения (2.3) дают вклад лишь те члены в  $\langle \beta(q_2) | \mathfrak{F}_1^{5\lambda} + i\mathfrak{F}_2^{5\lambda} | \alpha(q_1) \rangle$ , которые ведут себя как  $q^{-1}$  при  $q \rightarrow 0$ .

<sup>1)</sup> Состояния  $\langle \beta(q_2) |$  и  $| \alpha(q_1) \rangle$  следовало бы обозначать символами  ${}_{\text{out}} \langle \beta(q_2) |$  и  $| \alpha(q_1) \rangle_{\text{in}}$ , но мы будем опускать индексы in и out.



Эти сингулярные члены возникают тогда, когда вершина, соответствующая оператору  $\mathfrak{S}_1^{5\lambda} + i\mathfrak{S}_2^{5\lambda}$ , вставлена во внешнюю линию диаграммы реакции  $\alpha \rightarrow \beta$ . Чтобы убедиться в этом, вставим вершину  $\mathfrak{S}_1^{5\lambda} + i\mathfrak{S}_2^{5\lambda}$  во внешнюю линию, которой соответствует 4-импульс  $P_e$  (и масса  $M_e$ ), как это показано на фиг. 2.1. Тогда линии,



Фиг. 2.1. Диаграмма со вставкой во внешнюю линию.

Линия, указанной стрелкой, соответствует функции распространения

$$[(P_e + q)^2 - M_e^2]^{-1} = [2P_e \cdot q + q^2]^{-1} \sim q^{-1}.$$

следующей за аксиально-векторной вершиной, соответствует функция распространения, пропорциональная

$$[(P_e + q)^2 - M_e^2]^{-1} = [2P_e \cdot q + q^2]^{-1} \sim q^{-1}, \quad (2.4)$$

поскольку  $P_e^2 - M_e^2 = 0$ . В ст. 2 подробно показано, что соотношение (2.3) приводит к правилу, позволяющему выразить член нулевого порядка по  $q$  матричного элемента процесса с испусканием мягкого пиона через сумму „вставок“ во внешние линии процесса  $\alpha \rightarrow \beta$ ; для вычисления этих вставок достаточно знать лишь матричный элемент  $S$ -матрицы  $\langle \beta | \alpha \rangle$ . Члены порядка  $q$ ,  $q^2$ , ... в матричном элементе испускания мягкого пиона при этом *не определяются*. Уравнение частичного сохранения аксиального тока  $\partial_\lambda (\mathfrak{S}_1^{5\lambda} + i\mathfrak{S}_2^{5\lambda}) = c\Phi_{\pi^+}$  напоминает градиентную связь пионов, поэтому не удивительно, что полученное с его помощью правило для матричного элемента испускания одного мягкого пиона совпадает с тем, которое можно получить в модели градиентной связи пионов с барионами. Результаты Намбу и Лурье

полученные с помощью кирального формализма, вытекают из правила вставок, если *сначала* положить  $q = 0$  это соответствует интегрированию  $\mathfrak{F}_1^{50} + i\mathfrak{F}_2^{50}$  по всему пространству в определении киральности (2.1)], а *затем* устремить  $q^0$  к нулю.

Выше мы отмечали, что киральный формализм дает по существу одни и те же результаты как для нулевой, так и для отличной от нуля массы пиона. В ст. 2 показано, что то же самое справедливо и для метода, основанного на соотношении (2.26). Когда масса пиона равна нулю, соотношение (2.26) сводится к  $\partial_\lambda (\mathfrak{F}_1^{5\lambda} + i\mathfrak{F}_2^{5\lambda}) = 0$ , а формула (2.3) принимает вид

$$iq_\lambda \langle \beta(q_2) | \mathfrak{F}_1^{5\lambda} + i\mathfrak{F}_2^{5\lambda} | \alpha(q_1) \rangle = 0. \quad (2.5a)$$

Хотя соотношение (2.5a) внешне отличается от (2.3), оно приводит к тем же следствиям. Как и прежде, при  $q \rightarrow 0$  только члены порядка  $q^{-1}$  в  $\langle \beta(q_2) | \mathfrak{F}_1^{5\lambda} + i\mathfrak{F}_2^{5\lambda} | \alpha(q_1) \rangle$  дают вклад в выражение (2.5a). Когда  $M_\pi = 0$ , эти члены включают не только вставки  $\mathfrak{F}_1^{5\lambda} + i\mathfrak{F}_2^{5\lambda}$  во внешние линии, но также и член с пионным полюсом, соответствующий диаграмме (подобной диаграмме на фиг. 1.2), в которой вершина  $\mathfrak{F}_1^{5\lambda} + i\mathfrak{F}_2^{5\lambda}$  расположена в конце виртуальной пионной линии, выходящей из вершины  $\pi\beta$ . Вклад этой диаграммы в матричный элемент аксиально-векторного тока равен

$$\frac{iq^\lambda}{q^2} \frac{\sqrt{2} M_{NgA}}{g_r(0)} \langle \beta(q_2) | \square^2 \Phi_{\pi^+}^+ | \alpha(q_1) \rangle.$$

Это означает, что при  $q \rightarrow 0$  соотношение (2.5a) принимает вид

$$iq_\lambda \langle \beta(q_2) | \mathfrak{F}_1^{5\lambda} + i\mathfrak{F}_2^{5\lambda} | \alpha(q_1) \rangle_{\text{вставки во внешние линии}} - \frac{\sqrt{2} M_{NgA}}{g_r(0)} \langle \beta(q_2) | \square^2 \Phi_{\pi^+}^+ | \alpha(q_1) \rangle = 0. \quad (2.56)$$

Видно, что оно совпадает с соотношением (2.3), если массу пиона устремить к нулю. Диаграмма с пионным полюсом присутствует, разумеется, и при ненулевой массе пиона, однако ее вклад в левую часть соотношения (2.3) пропорционален  $i q_\lambda [q^\lambda / (q^2 - M_\pi^2)]$  и исчезает при  $q \rightarrow 0$ . Вайнберг в ст. 3 рассматривает испускание многих мягких пионов с помощью гипотезы о частичном сохранении аксиально-векторного тока при нулевой массе пиона. В остальных статьях и далее в этой главе масса пиона считается отличной от нуля.

Разумеется, пион с нулевым 4-импульсом не является физической частицей. Поэтому при сравнении результатов пионных низкоэнергетических теорем с экспериментом нужно делать допущение о медленном изменении матричных элементов (подобное тому, которое использовалось в гл. 1 при обсуждении частичного сохранения аксиально-векторного тока).

Выше мы рассмотрели испускание одного мягкого пиона в процессах с сильным взаимодействием. Однако для приложений пионных низкоэнергетических теорем наиболее важны не сами эти результаты, а их обобщения на случай испускания многих мягких пионов или испускания мягких пионов в присутствии слабого или электромагнитного возмущения. Оба эти обобщения основаны на одном элементарном свойстве хронологического произведения. Напомним, что хронологическим произведением операторов  $A(t)$  и  $B(0)$  называется выражение

$$T(A(t)B(0)) = \theta(t)A(t)B(0) + \theta(-t)B(0)A(t),$$

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0; \end{cases} \quad (2.6)$$

иными словами, оператор  $T$  располагает сомножители так, что оператор, соответствующий более позднему моменту времени, стоит слева. Продифференцируем выражение (2.6) по времени:

$$\frac{d}{dt} T(A(t)B(0)) = T\left(\frac{d}{dt}A(t)B(0)\right) + \delta(t)[A(0), B(0)], \quad (2.7a)$$

где член с  $\delta$ -функцией возник при дифференцировании  $\theta(t)$ . Если  $A^\lambda(x)$  — 4-вектор, то ковариантной формой равенства (2.7а) будет <sup>1)</sup>

$$\partial_\lambda T(A^\lambda(x) B(0)) = T(\partial_\lambda A^\lambda(x) B(0)) + \delta(x^0) [A^0(x), B(0)]. \quad (2.7б)$$

Таким образом, когда мы вносим производную по времени или четырехмерную дивергенцию под знак хронологического произведения, мы получаем одновременной коммутатор. Именно благодаря этому обстоятельству алгебра токов оказывается существенной при рассмотрении пионных низкоэнергетических теорем.

Формализм для случая рождения многих мягких пионов был развит Вайнбергом (ст. 3 и 4). Чтобы проиллюстрировать его метод, рассмотрим простейший пример — упругое рассеяние мягкого пиона на частице мишени  $t$ . Обозначим начальное и конечное состояния мишени через  $t_i$  и  $t_f$ , тогда матричный элемент процесса будет пропорционален <sup>2)</sup>

$$\int d^4x e^{iq \cdot x} \int d^4y e^{-ik \cdot y} \langle t_f | T(\Phi_{\pi^j}(x) \Phi_{\pi^l}(y)) | t_i \rangle. \quad (2.8)$$

<sup>1)</sup> Формулы, аналогичные (2.7) и (2.10), остаются справедливыми, если в них всюду заменить хронологические произведения на запаздывающие коммутаторы.

<sup>2)</sup> Выражение (2.8) получается с помощью стандартной редукционной техники, описанной, например, в гл. 16 книги Бьёркена и Дрелла ([2] в главе „Обозначения“). Редукционная формула дает выражение

$$\int d^4x e^{iq \cdot x} \int d^4y e^{-ik \cdot y} (\square_x^2 + M_\pi^2) (\square_y^2 + M_\pi^2) \times \\ \times \langle t_f | T(\Phi_{\pi^j}(x) \Phi_{\pi^l}(y)) | t_i \rangle.$$

Если начальный и конечный пионы находятся вне массовой поверхности, то, интегрируя по частям, получаем

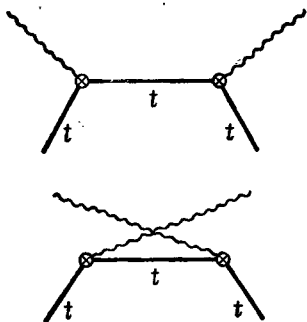
$$(M_\pi^2 - q^2)(M_\pi^2 - k^2) \int d^4x e^{iq \cdot x} \int d^4y e^{-ik \cdot y} \langle t_f | T(\Phi_{\pi^j}(x) \Phi_{\pi^l}(y)) | t_i \rangle.$$

В пределе  $q, k \rightarrow 0$  множитель  $(M_\pi^2 - q^2)(M_\pi^2 - k^2)$  переходит в  $M_\pi^4$  и сокращается с множителем  $M_\pi^{-4}$  из  $c^2$  в выражении (2.9). Поэтому множитель  $M_\pi^{-4}$ , входящий в (2.9), в окончательном ответе исчезает. Мы опускаем в формулах множитель  $(M_\pi^2 - q^2)(M_\pi^2 - k^2)$  ради экономии места.

Используя уравнение частичного сохранения аксиально-векторного тока  $\partial_x \mathfrak{F}_I^{5\lambda} = (c/\sqrt{2}) \Phi_{\pi I}$ , перепишем выражение (2.8) в виде

$$\frac{2}{c^2} \int d^4x e^{iq \cdot x} \int d^4y e^{-ik \cdot y} \times \\ \times \langle t_f | T \left( \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \mathfrak{F}_I^{5\lambda}(x) \frac{\partial}{\partial y^\sigma} \mathfrak{F}_I^{5\sigma}(y) \right) | t_i \rangle. \quad (2.9)$$

Для того чтобы упростить это выражение при  $q, k \rightarrow 0$ , нужно вывести производные  $\partial/\partial x^\lambda$  и  $\partial/\partial y^\sigma$  из под знака



Фиг. 2.2. Вставки во внешние линии (полюсные диаграммы), дающие вклад в процесс с двумя мягкими пионами.

Символ  $\otimes$  означает вершину с аксиально-векторным током,  $t$  соответствует частице мишени.

хронологического произведения. Это можно сделать с помощью следующего тождества, которое получается двукратным применением равенства (2.7б):

$$T \left( \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \mathfrak{F}_I^{5\lambda}(x) \frac{\partial}{\partial y^\sigma} \mathfrak{F}_I^{5\sigma}(y) \right) = \quad (2.10)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \frac{\partial}{\partial y^\sigma} + \frac{\partial}{\partial y^\sigma} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \right) T \left( \mathfrak{F}_I^{5\lambda}(x) \mathfrak{F}_I^{5\sigma}(y) \right) - \quad (A)$$

$$- \frac{1}{2} \delta(x^0 - y^0) \left\{ \left[ \mathfrak{F}_I^{50}(x), \frac{\partial}{\partial y^\sigma} \mathfrak{F}_I^{5\sigma}(y) \right] + \right.$$

$$\left. + \left[ \mathfrak{F}_I^{50}(y), \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \mathfrak{F}_I^{5\lambda}(x) \right] \right\} - \quad (B)$$

$$- \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial y^\sigma} (\delta(x^0 - y^0) [\mathfrak{F}_I^{50}(x), \mathfrak{F}_I^{5\sigma}(y)]) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial x^\lambda} (\delta(x^0 - y^0) [\mathfrak{F}_I^{50}(y), \mathfrak{F}_I^{5\lambda}(x)]) \right\}. \quad (B)$$

Подставляя член (А) в выражение (2.9) и дважды интегрируя по частям, получаем

$$\frac{2}{c^2} q_\lambda k_\sigma \int d^4x e^{iq \cdot x} \int d^4y e^{-ik \cdot y} \langle t_f | T(\mathfrak{F}_j^{5\lambda}(x) \mathfrak{F}_l^{5\sigma}(y)) | t_i \rangle. \quad (2.11)$$

Если при  $q, k \rightarrow 0$  мы пренебрежем членами порядка  $qk$  и выше, то в выражение (2.11) дадут вклад лишь вставки во внешние линии. Эти вставки в данном случае сводятся к обычным полюсным диаграммам, изображенным на фиг. 2.2. Для их вычисления достаточно знать лишь аксиально-векторный матричный элемент частиц мишени  $\langle t_f | \mathfrak{F}_m^{5\lambda} | t_i \rangle$ . Подставляя член (В) в выражение (2.9) и один раз интегрируя по частям, получаем

$$(B) = O(qk) + \frac{2}{c^2} \frac{i}{2} q_\lambda \langle t_f | \int d^4x [F_l^5(x^0), \mathfrak{F}_j^{5\lambda}(x)] | t_i \rangle - \\ - \frac{2}{c^2} \frac{i}{2} k_\sigma \langle t_f | \int d^4y [F_j^5(y^0), F_l^{5\sigma}(y)] | t_i \rangle. \quad (2.12)$$

Входящие сюда коммутаторы совпадают с однократно проинтегрированными коммутаторами алгебры Гелл-Манна. Воспользовавшись равенствами (1.73), имеем

$$(B) = O(qk) - \frac{1}{c^2} (q_\lambda + k_\lambda) \langle t_f | \varepsilon^{l'm} \int d^4x \mathfrak{F}_m^\lambda(x) | t_i \rangle. \quad (2.13)$$

Другими словами, член (В) пропорционален векторному матричному элементу частиц мишени  $\langle t_f | \mathfrak{F}_m^\lambda | t_i \rangle$ .

Наконец, мы должны рассмотреть член (Б), который содержит коммутатор временной компоненты аксиально-векторного тока с дивергенцией аксиально-векторного тока. Этот коммутатор *не определяется* гипотезой Гелл-Манна об алгебре токов. Как мы отмечали в гл. 1, Вайнберг постулировал для него выражение, полученное в  $\sigma$ -модели:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial y^\sigma} \mathfrak{F}_l^{5\sigma}(y), \mathfrak{F}_j^{5\sigma}(x) \right] \Big|_{x^0=y^0} = i M_\pi^2 \delta_{lj} \delta(y-x) \Sigma(x), \\ [\mathfrak{F}_j^{5\sigma}(x), M_\pi^2 \Sigma(y)] \Big|_{x^0=y^0} = i \delta(x-y) \frac{\partial}{\partial y^\sigma} \mathfrak{F}_j^{5\sigma}(y). \quad (2.14)$$

Видно, что член с  $\Sigma$  в (2.14) дает поправку порядка массы пиона по сравнению с членами (А) и (В). Если поло-

жить массу пиона равной нулю, как это сделано в ст. 3, то такие  $\Sigma$ -члены вообще не возникают. На практике  $\Sigma$ -членом можно, по-видимому, пренебречь, если он действует на барионные состояния. Если же он действует на пионные состояния, то его следует учитывать. В ст. 4, посвященной пион-пионному рассеянию, Вайнберг показал, что матричный элемент  $\langle \pi | \Sigma | \pi \rangle$  определяется гипотезой о частичном сохранении аксиально-векторного тока и алгеброй токов. Подытоживая, мы видим, что равенство (2.10) позволяет связать матричный элемент рассеяния мягкого пиона на мишени  $t$  с вершинами  $\langle t_f | \mathfrak{F}_m^{5\lambda} | t_i \rangle$ ,  $\langle t_f | \mathfrak{F}_m^{\lambda} | t_i \rangle$  и  $\langle t_f | \Sigma | t_i \rangle^1$ .

Этот метод легко обобщить на случай испускания произвольного числа  $N$  мягких пионов, хотя формулы при этом становятся довольно сложными. Вместо равенства (2.10) нужно использовать тождество

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial x_1^{\lambda_1}} \frac{\partial}{\partial x_2^{\lambda_2}} \dots \frac{\partial}{\partial x_n^{\lambda_n}} \right) T \left( \mathfrak{F}_{I_1}^{5\lambda_1}(x_1) \dots \mathfrak{F}_{I_n}^{5\lambda_n}(x_n) \right) = \\ = T \left( \frac{\partial}{\partial x_1^{\lambda_1}} \mathfrak{F}_{I_1}^{5\lambda_1}(x_1) \dots \frac{\partial}{\partial x_n^{\lambda_n}} \mathfrak{F}_{I_n}^{5\lambda_n}(x_n) \right) + \\ + \text{Одновременные коммутаторы,} \end{aligned} \quad (2.15)$$

которое получается повторным применением равенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1^{\lambda_1}} T \left( \mathfrak{F}_{I_1}^{5\lambda_1}(x_1) \dots \mathfrak{F}_{I_n}^{5\lambda_n}(x_n) \right) = \\ = T \left( \frac{\partial}{\partial x_1^{\lambda_1}} \mathfrak{F}_{I_1}^{5\lambda_1}(x_1) \dots \mathfrak{F}_{I_n}^{5\lambda_n}(x_n) \right) + \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Если  $t$  — нуклон  $N$ , то из (2.10) получается следующая низкоэнергетическая теорема для нечетной по изоспину части амплитуды:

$$1 - \frac{1}{g_A^2} = - \frac{2M_N^2}{g_r(0)^2} \frac{\partial T^{\pi N(-)}}{\partial q^0} \Bigg|_{q=k=0},$$

где  $T^{\pi N(-)}$  — нечетная по изоспину часть амплитуды пион-нуклонного рассеяния вперед. Эта формула, полученная в ст. 1 и работе Вайсбергера ([17] в гл. 1), представляет собой низкоэнергетическую формулировку правила сумм для  $g_A$ .

$$\begin{aligned}
& + T(\delta(x_1^0 - x_2^0) [\mathfrak{F}_{j_1}^{50}(x_1), \mathfrak{F}_{j_2}^{5\lambda_2}(x_2)] \times \\
& \times \mathfrak{F}_{j_3}^{5\lambda_3}(x_3) \dots \mathfrak{F}_{j_n}^{5\lambda_n}(x_n) + \dots \\
& \dots + \mathfrak{F}_{j_2}^{5\lambda_2}(x_2) \dots \mathfrak{F}_{j_{n-1}}^{5\lambda_{n-1}}(x_{n-1}) \times \\
& \times \delta(x_1^0 - x_n^0) [\mathfrak{F}_{j_1}^{50}(x_1), \mathfrak{F}_{j_n}^{5\lambda_n}(x_n)]). \quad (2.16)
\end{aligned}$$

Член с одновременными коммутаторами состоит из цепочек коммутаторов вида

$$[\mathfrak{F}_{l_1}^{50}, [\mathfrak{F}_{l_2}^{50}, \dots, [\mathfrak{F}_{l_{m-1}}^{50}, \mathfrak{F}_{l_m}^{5\lambda_m}] \dots]] \quad (2.17)$$

или

$$[\mathfrak{F}_{l_1}^{50}, [\mathfrak{F}_{l_2}^{50}, \dots, [\mathfrak{F}_{l_{m-1}}^{50}, \partial_{\lambda_m} \mathfrak{F}_{l_m}^{5\lambda_m}] \dots]], \quad (2.18)$$

где  $l_1, \dots, l_m$  — некоторая часть набора  $j_1, \dots, j_n$ . Обе эти цепочки коммутаторов можно вычислить, используя алгебру токов и равенство (2.14). Это позволяет, как и в случае с двумя пионами, выразить матричный элемент с  $n$  мягкими пионами через матричные элементы аксиально-векторного тока, векторного тока и оператора  $\Sigma$ . Абарбанела и Нуссинов [1] с помощью соответствующей комбинаторики свели равенство (2.15) к набору правил для вычисления матричного элемента испускания многих мягких пионов. Вайнберг [2] предложил изящное каноническое преобразование, сводящее эту задачу к построению эффективного лагранжиана, из которого непосредственно видны правила для вычислений.

Какую ошибку можно ожидать при вычислениях вероятностей испускания многих мягких пионов? Чтобы ответить на этот вопрос, допустим, что масса пиона равна нулю, так что  $\Sigma$ -члены отсутствуют. Рассмотрим два примера

$$N + \pi_1 + \dots + \pi_k \rightarrow N + \pi_{k+1} + \dots + \pi_n, \quad (2.19a)$$

$$A + N + \pi_1 + \dots + \pi_k \rightarrow B + N + \pi_{k+1} + \dots + \pi_n. \quad (2.19б)$$

По сравнению с процессом (2.19a)

$$(\text{Мягкие пионы}) + N \rightarrow (\text{Мягкие пионы}) + N$$

процесс без мягких пионов сводится к тривиальному переходу  $N \rightarrow N$ . Выражение (2.19б), напротив, описывает



испускание  $n$  мягких пионов в том случае, когда без мягких пионов мы имеем нетривиальный процесс рассеяния  $A + N \rightarrow B + N$ . Запишем 4-импульсы  $n$  мягких пионов в виде

$$q_1 = \xi Q_1, \dots, q_n = \xi Q_n, \quad (2.20)$$

так что  $\xi \rightarrow 0$  соответствует переходу к пределу мягких пионов. В этом пределе матричный элемент процесса (2.19а) является величиной порядка  $\xi$ . [Например, матричный элемент испускания одного пиона с нуклонной линии пропорционален  $\bar{u}(p_2) \gamma_{5u}(p_1) = -\xi Q_{1\sigma} \bar{u}(p_2) \gamma_5 \gamma^{\sigma u}(p_1) / (2M_N)$ , где  $q_{1\sigma} = \xi Q_{1\sigma} = (p_2 - p_1)_\sigma$ .] Правила Вайнберга для многих пионов определяют главный член порядка  $\xi$  и не определяют членов порядка  $\xi^2$  и выше. С другой стороны, при  $\xi \rightarrow 0$  матричный элемент процесса (2.19б) есть величина порядка 1; его главный член также определяется правилами Вайнберга, члены же порядка  $\xi$  и выше остаются неопределенными. В обоих примерах все градиентные вставки и цепочки коммутаторов дают вклады одного и того же порядка по  $\xi$  (основные вклады).

Рассмотрим теперь испускание одного мягкого пиона в присутствии внешнего электромагнитного или слабого возмущения. Обобщение на случай испускания многих мягких пионов производится так же, как это было сделано выше. Воспользуемся тождеством

$$\frac{\partial}{\partial x^\lambda} T(\mathfrak{F}_j^{5\lambda}(x) \mathfrak{L}(0)) = T\left(\frac{\partial}{\partial x^\lambda} \mathfrak{F}_j^{5\lambda}(x) \mathfrak{L}(0)\right) + \delta(x^0) [\mathfrak{F}_j^{50}(x), \mathfrak{L}(0)], \quad (2.21)$$

где  $\mathfrak{L}$  — лагранжиан электромагнитного, полулептонного или нелептонного взаимодействия. Беря матричный элемент этого равенства между  $\langle \beta | \int d^4x e^{iq \cdot x}$  и  $|\alpha\rangle$  и интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} \langle \beta | \int d^4x e^{iq \cdot x} T\left(\frac{\partial}{\partial x^\lambda} \mathfrak{F}_j^{5\lambda}(x) \mathfrak{L}(0)\right) | \alpha \rangle = \\ = -iq_\lambda \langle \beta | \int d^4x e^{iq \cdot x} T(\mathfrak{F}_j^{5\lambda}(x) \mathfrak{L}(0)) | \alpha \rangle - (A) \\ - \langle \beta | \int d^4x e^{iq \cdot x} \delta(x^0) [\mathfrak{F}_j^{50}(x), \mathfrak{L}(0)] | \alpha \rangle. \quad (B) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Благодаря частичному сохранению аксиально-векторного тока левая часть равенства (2.22) пропорциональна матричному элементу испускания пиона в процессе  $\alpha \rightarrow \beta$  в присутствии возмущения  $\mathcal{L}$ . При  $q \rightarrow 0$  в член (А) дают вклад лишь вставки  $\mathfrak{F}_j^{5\lambda}$  во внешние линии амплитуды  $\langle \beta | \mathcal{L} | \alpha \rangle$  без пиона. Наконец, член (Б) при  $q \rightarrow 0$  переходит в одновременный коммутатор аксиального заряда  $F_j^5$  с лагранжианом возмущения

$$(Б) = - \langle \beta | [F_j^5(0), \mathcal{L}(0)] | \alpha \rangle + O(q). \quad (2.23)$$

Как видно из приведенных в гл. 1 выражений для электромагнитного, слабого полулептонного и слабого нелептонного лагранжианов, алгебра токов позволяет вычислить (2.23) для всех этих случаев. Подытоживая, мы видим, что матричный элемент испускания мягкого пиона в присутствии возмущения  $\mathcal{L}$  может быть выражен через матричные элементы  $\langle \beta | \mathcal{L} | \alpha \rangle$  и  $\langle \beta | [F_j^5, \mathcal{L}] | \alpha \rangle$ . Обобщение кирального формализма на случай присутствия внешнего возмущения было проделано Намбу и Шраунером [3]. Они предвосхитили многие результаты, которые позже были получены с помощью равенства (2.22).

Оценка ошибки при вычислении испускания пиона в присутствии возмущения делается так же, как и в рассмотренном выше случае сильного взаимодействия, и мы не будем на этом подробно останавливаться. Мы лишь подчеркнем одно обстоятельство, которое кажется очевидным, но на которое часто не обращают внимания. Если матричный элемент испускания  $n$  мягких пионов по кинематическим причинам является величиной порядка  $q_1 \dots q_n$ , то непосредственное применение алгебры токов не дает о нем никакой информации. Это следует из того, что при применении алгебры токов мы пренебрегаем неполюсными членами в выражении

$$q_{1\lambda_1} \dots q_{n\lambda_n} \langle \beta | T \left( \mathfrak{F}_{j_1}^{5\lambda_1}(x_1) \dots \mathfrak{F}_{j_n}^{5\lambda_n}(x_n) \mathcal{L}(0) \right) | \alpha \rangle. \quad (2.24)$$

Рассмотрим для иллюстрации две ситуации, в которых возникает эта проблема <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> См. также [4].

*Один мягкий пион.* Рассмотрим процесс  $\pi^0(q) \rightarrow \gamma(k_1) + \gamma(k_2)$ , где в скобках указаны 4-импульсы. Пусть  $e_1$  и  $e_2$  — векторы поляризации фотонов. Матричный элемент этого процесса

$$A e_{\mu\nu\lambda\sigma} k_1^\mu k_2^\nu e_1^{*\lambda} e_2^{*\sigma} = A e_{\mu\nu\lambda\sigma} q^\mu k_2^\nu e_1^{*\lambda} e_2^{*\sigma} \quad (2.25)$$

есть величина порядка  $q$ .

*Два мягких пиона.* Рассмотрим процесс  $\eta(q) \rightarrow \pi^+(q_1) + \pi^-(q_2) + \gamma(k)$  и обозначим через  $e$  поляризацию фотона. Матричный элемент этого процесса

$$A e_{\mu\nu\lambda\sigma} q_1^\mu q_2^\nu k^\lambda e^{*\sigma} \quad (2.26)$$

является величиной порядка  $q_1 q_2$ . В обоих этих случаях мы можем получить сведения о реакции только в результате исследования неполюсных членов в выражении (2.24), используя для этого кинематические соображения или привлекая модели.

## § 2. Краткий обзор приложений

Прежде чем переходить к детальному обсуждению статей, в которых используются рассмотренные выше методы, сделаем краткий обзор их наиболее важных приложений. Мы приведем здесь ссылки лишь на те статьи, которые *не обсуждаются* в следующем параграфе. В этом и следующем параграфах под „предсказаниями алгебры токов“ мы будем понимать только те предсказания, которые не зависят от моделей, т. е. при получении которых в выражении (2.24), в члене (A) равенства (2.10) и т. д. можно пренебречь неполюсными членами.

### 1. КЛАССИЧЕСКАЯ ПИОННАЯ ФИЗИКА

Процессы низкоэнергетического пион-нуклонного рассеяния и фоторождения пионов интенсивно изучались в течение последних десяти лет с помощью статической модели и дисперсионных соотношений. Интересно, что метод алгебры токов и частично сохраняющегося аксиально-векторного тока позволяет получить новую инфор-

мацию об этих процессах, недоступную „классическим“ методам. В случае  $\pi N$ -рассеяния алгебра токов предсказывает для  $S$ -волновых длин рассеяния следующие значения:

$$a_{1/2} = \frac{0,20}{M_\pi}, \quad a_{3/2} = -\frac{0,10}{M_\pi}, \quad (2.27)$$

которые хорошо согласуются с экспериментальными данными

$$a_{1/2} = \frac{0,171 \pm 0,005}{M_\pi}, \quad a_{3/2} = -\frac{0,088 \pm 0,004}{M_\pi}. \quad (2.28)$$

Следует отметить, что этот результат является первым чисто теоретическим предсказанием  $a_{1/2}$  и  $a_{3/2}$ . С помощью алгебры токов не удастся получить предсказаний для  $P$ -волн, поскольку по порядку величины ( $qq$ ) они совпадают с ошибкой в низкоэнергетической теореме. Таким образом, алгебра токов и статическая модель или метод дисперсионных соотношений дополняют друг друга: последний из них позволяет вычислять  $P$ -волны, но перестает быть надежным для  $S$ -волн.

В случае фоторождения,  $\gamma(k) + N \rightarrow \pi(q) + N$ , алгебра токов дает два новых предсказания, которые можно сформулировать как предсказания амплитуд процессов  $\gamma + p \rightarrow p + \pi^0$  и  $\gamma + n \rightarrow n + \pi^0$  в пределе, когда 4-импульс  $\pi^0$ -мезона  $q$  стремится к нулю. Эти результаты не следуют ни из известной теоремы Кролла — Рудермана, которая дает матричный элемент фоторождения в (другом) предельном случае  $k \rightarrow 0$ , ни из статической модели или теории дисперсионных соотношений. Для того чтобы по-настоящему проверить предсказания алгебры токов, нужно экстраполировать физическую амплитуду фоторождения к нулевой энергии пиона с помощью дисперсионных соотношений. Получающиеся при этом „правила сумм“ выполняются очень хорошо. Относительно же самой физической амплитуды можно высказать лишь качественное утверждение о том, что амплитуда процесса  $\gamma + p \rightarrow p + \pi^0$  у порога должна быть меньше (в 2–3 раза), чем соответствующее борновское приближение. Грубо это согласуется с экспериментом.

Метод алгебры токов и частично сохраняющегося аксиально-векторного тока применялся [5] также к реакции  $\pi + N \rightarrow \pi + \pi + N$ . Вычисленное полное сечение

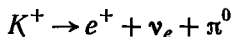
хорошо согласуется с экспериментом для кинетической энергии налетающего пиона примерно до 300 Мэв. При этих энергиях оба пиона находятся в  $S$ -состоянии (относительно нуклона, отдачей которого можно пренебречь), так что образование  $N^*$  (1238) в обоих каналах



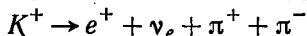
запрещено законом сохранения углового момента. При более высоких энергиях, когда возникают состояния с высшими угловыми моментами и начинает преобладать образование резонансов, расчеты с помощью алгебры токов перестают быть применимыми, однако в этой области применимы дисперсионные теории, основанные на резонансной poloлогии. Мы видим, что и в этом случае оба подхода дополняют друг друга. Наконец, алгебра токов применялась [6]<sup>1)</sup> к процессу  $\gamma + N \rightarrow \pi + \pi + N$ , однако в этом случае она позволяет лишь воспроизвести прежние результаты статической модели (способствуя тем не менее их обоснованию).

## 2. КАОННАЯ ФИЗИКА

Большим успехом алгебры токов явилось установление связи между различными модами распада  $K$ -мезона. С ее помощью комбинация формфакторов лептонного  $K_{e3}$ -распада



может быть связана с матричным элементом  $K_{e2}$ -распада  $K^+ \rightarrow e^+ + \nu_e$ . Это соотношение находится в хорошем согласии с экспериментом. Следует, однако, заметить, что это соотношение было бы тождеством при точной  $SU_3$ -симметрии. По-видимому, более впечатляющим является то, что алгебра токов позволяет выразить по существу весь матричный элемент  $K_{e4}$ -распада



через единственный параметр, определяемый из  $K_{e3}$ -распада. Согласие с экспериментом превосходное. Для не-

<sup>1)</sup> W. I. Weisberger, не опубликовано.

лептонных распадов алгебра токов утверждает <sup>1)</sup>, что, во-первых, из правила  $|\Delta I| = 1/2$  для одного из распадов  $K \rightarrow 2\pi$  или  $K \rightarrow 3\pi$  следует правило  $|\Delta I| = 1/2$  для другого. Экспериментально, разумеется, оба они удовлетворяют правилу  $|\Delta I| = 1/2$ . Если принять правило  $|\Delta I| = 1/2$  и сделать дальнейшее предположение о том, что матричный элемент  $K \rightarrow 3\pi$  линеен по энергиям пионов, то для описания нелептонных распадов  $K$ -мезона останется три независимых параметра, в качестве которых можно взять ширины  $\Gamma(K_1^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-)$  и  $\Gamma(K_2^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0)$  и величину, обычно обозначаемую  $a(+ - 0)$ , которая характеризует энергетическую зависимость распада  $K_2^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0$ . Алгебра токов предсказывает величину отношения  $\Gamma(K_2^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0) / \Gamma(K_1^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-)$  и значение параметра  $a(+ - 0)$ , которые хорошо согласуются с экспериментом. Здесь мы имеем дело с явным успехом метода алгебры токов, особенно если учесть, что с помощью других методов в понимании каонных распадов был достигнут лишь очень незначительный прогресс.

### 3. НЕЛЕПТОННЫЕ РАСПАДЫ ГИПЕРОНОВ В S-ВОЛНЕ

Алгебра токов менее эффективна в области гиперонных распадов, однако и здесь она дает два интересных и правильных предсказания. Одно из них состоит в том, что S-волновые части амплитуд распадов  $\Lambda \rightarrow \pi N$  и  $\Xi \rightarrow \pi \Lambda$  должны подчиняться правилу  $|\Delta I| = 1/2$ , несмотря на то что исходное взаимодействие  $\mathcal{L}_{\text{эфф}}^{nl}$  содержит, по-видимому, части как с  $|\Delta I| = 1/2$ , так и с  $|\Delta I| = 3/2$ . Другое предсказание состоит в том, что S-волновая амплитуда распада  $\Sigma^+ \rightarrow n + \pi^+$  должна обращаться в нуль тогда и только тогда, когда для всех распадов в S-состоянии имеет место „октетная доминантность“. (Октетная доминантность предполагает выполнение правила  $|\Delta I| = 1/2$  для всех распадов и соотношения треугольника Ли — Сугавары, связывающие амплитуды

<sup>1)</sup> Это непосредственно следует из рассуждений после формулы (1.82).

распадов  $\Lambda \rightarrow \pi N$ ,  $\Sigma \rightarrow \pi N$  и  $\Xi \rightarrow \pi \Lambda$ .) Экспериментально мы наблюдаем, по-видимому, и октетную доминантность и отсутствие  $S$ -волны в распаде  $\Sigma^+ \rightarrow n + \pi^+$ . Относительно  $P$ -волновых амплитуд гиперонных распадов алгебра токов не дает никаких предсказаний. Поэтому мы еще не можем утверждать, что полностью понимаем гиперонные распады, в особенности правило  $|\Delta I| = 1/2$  для  $P$ -волн.

#### 4. ДРУГИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

1) Алгебра токов позволяет вычислять длины  $\pi\pi$ -рассеяния. Они оказываются очень малыми в соответствии с тем, что для каонных распадов получаются хорошие предсказания без учета эффектов пион-пионного взаимодействия в конечном состоянии.

2) Используя аналог гипотезы о частичном сохранении аксиально-векторного тока для каонов, можно рассчитывать эффекты типа длины  $KN$ -рассеяния [7]. Согласие с экспериментом для этих длин рассеяния оказывается только удовлетворительным, к тому же не ясно, насколько справедлива гипотеза о частичном сохранении аксиально-векторного тока для каонов.

3) Единственное явное противоречие метода алгебры токов возникает при рассмотрении электромагнитного распада второго порядка  $\eta \rightarrow 3\pi$ . Вычисление матричного элемента этого распада, подобное тому, которое было проделано для распада  $K_2^0 \rightarrow 3\pi$ , ведет к грубому противоречию. Причина этой неудачи до сих пор неизвестна.

### § 3. Применения

#### 1. ДЛИНЫ РАССЕЯНИЯ ПИОНОВ

Вайнберг (ст. 4) применил метод множественного рождения мягких пионов к рассеянию мягкого пиона на мишени  $t$ . (Аналогичные результаты были получены ранее Томадзавой [7].) Благодаря тому что вставками во внешние линии [выражение (2.11)] *у порога* можно пренебречь, для  $S$ -волновых длин рассеяния  $\pi$  на  $t$  получается очень простая формула. Вайнберг далее рассмотрел более сложный случай пион-пионного рассеяния,

когда все четыре присутствующие частицы являются мягкими пионами. Он показал, что длины пион-пионного рассеяния в  $S$ -волне  $a_0$  и  $a_2$  могут быть определены, и предсказал для них малые значения (см. также [8]). Длину  $a_0$  можно измерить, изучая  $K_{e4}$ -распад [9].

При вычислении длин рассеяния Вайнбергу пришлось рассмотреть влияние  $\Sigma$ -члена, который дает неизвестную константу  $M^{(0)}$  в его выражении (6) для  $\pi t$ -рассеяния. В случае тяжелой мишени  $t$  Вайнберг приводит следующее соображение. Для того чтобы условия, налагаемые на  $\pi t$ -рассеяние частичным сохранением аксиально-векторного тока в случае одного мягкого пиона и в случае двух мягких пионов, согласовывались друг с другом,  $\Sigma$ -член должен быть малым. Пренебрегая этим членом, он получил предсказания для  $\pi N$ -рассеяния, которые хорошо согласуются с экспериментом. Случай  $\pi\pi$ -рассеяния является исключением, поскольку для него члены порядка  $M_\pi^2$  существенны. В этом случае  $\Sigma$ -член следует учитывать.

## 2. РОЖДЕНИЕ МЯГКИХ ПИОНОВ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПРОЦЕССАХ

Фубини, Фурлан и Росетти (ст. 5, § 4, п. 3) рассмотрели фоторождение мягких пионов. Их результаты получаются прямым вычислением, исходя из соотношения (2.22) при  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{EM}$ . Мы рассмотрим эти результаты для того, чтобы выяснить их связь с известной теоремой Кролла — Рудермана [10] для фоторождения пионов.

Реакция фоторождения  $\gamma(k) + N(p_1) \rightarrow \pi(q) + N(p_2)$  в обозначениях Чью, Гольдбергера, Лоу и Намбу (см. [11]) описывается амплитудой

$$H = AM_A + BM_B + CM_C + DM_D, \quad (2.29)$$

где

$$\begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \\ M_C \\ M_D \end{Bmatrix} = \bar{u}(p_2) \begin{Bmatrix} -\frac{i}{2} \gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \\ -i\gamma_5 (p_1 + p_2)_\mu q_\nu \\ -\gamma_5 \gamma_\mu q_\nu \\ -\gamma_5 \gamma_\mu (p_1 + p_2)_\nu + iM_N \gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \end{Bmatrix} u(p_1) F_{\mu\nu} \quad (2.30)$$



и где  $F_{\mu\nu} = k_\mu e_\nu - k_\nu e_\mu$  есть фотонное электромагнитное поле. Чтобы избежать путаницы, мы используем (только в этом пункте) метрику Паули, которую использовали Чью, Гольдбергер, Лоу и Намбу<sup>1)</sup>. Обозначим через  $b$  изотопический индекс выходящего пиона. Тогда инвариантные амплитуды  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  будут иметь структуру

$$A = \chi_2^+ \left[ A^{(+)} \delta_{b3} + A^{(-)} \frac{1}{2} [\tau_b, \tau_3] + A^{(0)} \tau_b \right] \chi_1, \quad (2.31)$$

$$D = \chi_2^+ \left[ D^{(+)} \delta_{b3} + D^{(-)} \frac{1}{2} [\tau_b, \tau_3] + D^{(0)} \tau_b \right] \chi_1,$$

где  $\chi_1$  и  $\chi_2$  — изоспиноры начального и конечного нуклонов. Введем переменные  $\nu$  и  $\nu_1$

$$\nu = - \frac{(p_1 + p_2) \cdot k}{2M_N} = - \frac{(p_1 + p_2) \cdot q}{2M_N}, \quad (2.32)$$

$$\nu_1 = - \frac{q \cdot k}{2M_N}.$$

Если одна из переменных  $q$  и  $k$  стремится к нулю, то обе переменные  $\nu$  и  $\nu_1$  стремятся к нулю. Обозначим через  $H_j$  любую из амплитуд  $A^{(\pm 0)}, \dots, D^{(\pm 0)}$  и разобьем ее на борновский член  $H_j^B$  (соответствующий диаграммам с одной частицей в промежуточном состоянии; фиг. 2.3) и оставшуюся часть  $\bar{H}_j$ ,  $H_j = H_j^B + \bar{H}_j$ . Борновский член

$$H_j^B = R_j \left( \frac{1}{\nu_1 - \nu} \pm \frac{1}{\nu_1 + \nu} \right) \quad (2.33)$$

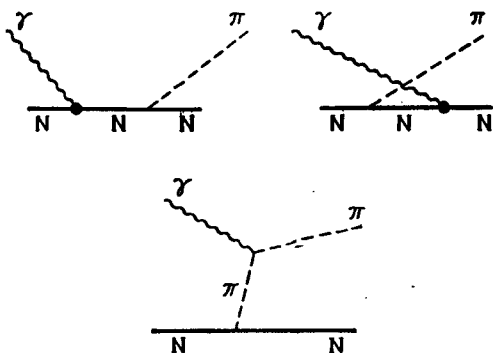
сингулярен, когда  $q$  или  $k \rightarrow 0$ . (Знак  $\pm$  определяется перекрестной симметрией  $H_j$ , коэффициенты  $R_j$  приведены в работе Чью, Гольдбергера, Лоу и Намбу.)

Рассмотрим теперь предельный случай, когда 4-импульс фотона  $k$  стремится к нулю. Поскольку все  $M_A, \dots, D$  порядка  $k$  (из-за наличия  $k$  в тензоре  $F_{\mu\nu}$ ), неборновские части амплитуд  $\bar{H}_j$  (которые имеют порядок  $k^0$ ) дают вклад в  $H$  порядка  $k$ . Таким образом, члены амплитуды фоторождения порядка  $k^0$  определяются только борновскими членами. Это и есть теорема

<sup>1)</sup> Выбор метрик см. в главе „Обозначения“.

Кролла — Рудермана, к которой мы еще вернемся в гл. 3.

Фубини и др. (ст. 5 настоящей книги), напротив, рассматривают предельный случай, когда к нулю стремится 4-импульс пиона. Инварианты  $M_B$ ,  $M_C$  и  $M_D$  имеют при этом порядок  $q$ , но  $M_A$  не исчезает при  $q \rightarrow 0$ . Как показали Фубини и др., соотношение (2.22)



Ф и г. 2.3. Диаграммы борновского приближения для фоторождения пионов.

Жирная точка соответствует полной вершине  $\gamma NN$ , включающей аномальный магнитный момент нуклона.

позволяет найти  $\bar{A}|_{q=0}$ . Это дает следующее выражение для амплитуды фоторождения<sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned} \bar{A}^{(+)}|_{q=0} &= \frac{g_r(0) \mu^V}{4M_N^2}, \\ \bar{A}^{(0)}|_{q=0} &= \frac{g_r(0) \mu^S}{4M_N^2}, \\ \bar{A}^{(-)}|_{q=0} &= 0, \\ H &= H^B + M_A \bar{A}|_{q=0} + O(q), \end{aligned} \tag{2.34}$$

<sup>1)</sup> Соотношение для  $\bar{A}^{(-)}|_{q=0}$  представляет собой тривиальное следствие перекрестной симметрии, поэтому, как было указано в § 2, алгебра токов дает в этом случае два нетривиальных предсказания.

где  $g_r(0)$  определяется равенством (1.99), а  $\mu'^V = 3,70$  и  $\mu'^S = -0,12$  — изовекторный и изоскалярный аномальные магнитные моменты нуклона. Используя дисперсионные соотношения для  $\bar{A}^{(+)}|_{q=0}$  и  $\bar{A}^{(0)}|_{q=0}$ , Фубини и др. (ст. 5) выразили этот результат в виде правил сумм. Детальные вычисления [12] с учетом имеющихся данных по фоторождению показывают, что правило сумм для  $\bar{A}^{(+)}|_{q=0}$  выполняется с точностью примерно 15%.

### 3. РОЖДЕНИЕ МЯГКИХ ПИОНОВ В ПОЛУЛЕПТОННЫХ СЛАБЫХ ПРОЦЕССАХ

Кэллан и Триман (ст. 6) применили соотношение (2.22) с  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{эфф}}^{\text{sl}}$  [равенство (1.14в)] к полулептонным распадам  $K$ -мезона и получили простое соотношение, связывающие  $K_{e3}$ -распад ( $K^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \pi^0$ ) с  $K_{e2}$ -распадом ( $K^+ \rightarrow e^+ + \nu_e$ ) и  $K_{e4}$ -распад ( $K^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \pi^+ + \pi^-$ ) с  $K_{e3}$ -распадом. Вайнберг (ст. 7) показал, что обнаруженное Кэлланом и Триманом быстрое изменение третьей амплитуды  $K_{e4}$ -распада  $F_3$  вызвано присутствием полюсного члена. Амплитуды  $F_1$  и  $F_2$  этого распада, которые дают основной вклад в его ширину, не имеют подобного полюса, поэтому можно допустить, что они являются медленно меняющимися функциями 4-импульса мягкого пиона. В результате Вайнберг показал, что предсказание Кэллана и Тримана хорошо согласуется с экспериментом.

### 4. РОЖДЕНИЕ МЯГКИХ ПИОНОВ В НЕЛЕПТОННЫХ СЛАБЫХ ПРОЦЕССАХ

Для описания рождения мягких пионов в нелептонных распадах нужно использовать соотношение (2.22) с  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{эфф}}^{\text{nl}}$  [равенство (1.14г)] и коммутационные соотношения (1.80) — (1.82). Судзуки (ст. 8) и Сугавара [13] рассмотрели нелептонные распады гиперонов в  $S$ -волне, описываемые матричными элементами

$$\langle N\pi^I | \mathcal{L}_{\text{эфф}}^{\text{nlPV}} | (\Sigma, \Lambda) \rangle, \quad \langle \Lambda\pi^I | \mathcal{L}_{\text{эфф}}^{\text{nlPV}} | \Xi \rangle. \quad (2.35)$$

В пределе мягких пионов эти матричные элементы с помощью алгебры токов можно выразить через более простые матричные элементы

$$\begin{aligned} \langle N | [F_j^5, \mathcal{L}_{\text{эфф}}^{nIPV}] | (\Sigma, \Lambda) \rangle &\sim \langle N | \mathcal{L}_{\text{эфф}}^{nIPC} | (\Sigma, \Lambda) \rangle, \\ \langle \Lambda | [F_j^5, \mathcal{L}_{\text{эфф}}^{nIPV}] | \Xi \rangle &\sim \langle \Lambda | \mathcal{L}_{\text{эфф}}^{nIPC} | \Xi \rangle. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Одним из основных достижений Судзуки и Сугавары является вывод из алгебры токов правила  $|\Delta I| = 1/2$  для  $S$ -волн в распадах  $\Lambda \rightarrow N + \pi$  и  $\Xi \rightarrow \Lambda + \pi$  даже в том случае, когда  $\mathcal{L}_{\text{эфф}}^{nIPV}$  содержит часть с  $|\Delta I| = 3/2$  [как, например, лагранжиан (1.14г), представляющий собой произведение тока на ток]. Это правило следует из соотношения (2.36), если учесть, что системы  $\bar{\Lambda}N$  и  $\bar{\Xi}\Lambda$  с необходимостью имеют  $I = 1/2$ , так что матричные элементы

$$\langle N | (\mathcal{L}_{\text{эфф}}^{nIPC})_{|\Delta I|=3/2} | \Lambda \rangle, \quad \langle \Lambda | (\mathcal{L}_{\text{эфф}}^{nIPC})_{|\Delta I|=3/2} | \Xi \rangle \quad (2.37)$$

в правой части соотношения (2.36) должны обращаться в нуль. Поскольку, как мы видели в гл. 1, изотопические свойства различных частей  $\mathcal{L}_{\text{эфф}}^{nIPV}$  при коммутировании с  $F_j^5$  сохраняются, то в пределе мягких пионов матричные элементы

$$\langle N\pi^I | (\mathcal{L}_{\text{эфф}}^{nIPV})_{|\Delta I|=3/2} | \Lambda \rangle, \quad \langle \Lambda\pi^I | (\mathcal{L}_{\text{эфф}}^{nIPV})_{|\Delta I|=3/2} | \Xi \rangle \quad (2.38)$$

также должны обращаться в нуль.

Это рассуждение не применимо к распадам  $\Sigma$ -гиперона, поскольку система  $\bar{\Sigma}N$  может иметь  $I = 3/2$ . В этом случае Судзуки и Сугавара показали, что соотношение треугольника, соответствующее  $|\Delta I| = 1/2$ , выполняется тогда и только тогда, когда параметр распада  $\Sigma^+ \rightarrow n + \pi^+$  в  $S$ -волне [обозначаемый  $S(\Sigma^+)$ ] обращается в нуль. Это же условие обеспечивает выполнение соотношения треугольника Ли — Сугавары. Таким образом, алгебра токов связывает между собой следующие экспериментальные факты: 1)  $\Sigma$ -распады в  $S$ -волне подчиняются правилу  $|\Delta I| = 1/2$ , 2) выполняется соотношение

треугольника Ли — Сугавары для  $S$ -волны и  
 3)  $S(\Sigma_+^+) \approx 0$ . Поскольку из анализа Судзуки и Сугавары следует, что

$$S(\Sigma_+^+) \sim \langle N | (\mathcal{Q}_{\text{эфф}}^{nIPC})_{27\text{-плет}} | \Sigma \rangle, \quad (2.39)$$

то их результат для  $\Sigma$ -распадов можно сформулировать в другом, эквивалентном виде: если с самого начала *предположить* существование октетной доминантности в  $\mathcal{Q}_{\text{эфф}}^{nI}$ , то в дополнение к обычным предсказаниям (правило  $|\Delta I| = 1/2$  и соотношение треугольника Ли — Сугавары) мы получим новое, удовлетворяющее эксперименту предсказание  $S(\Sigma_+^+) \approx 0$ .

Из сравнения соотношений Судзуки для параметров  $S$ -волновых распадов с экспериментом следует, что отношение  $D/F$  для матричного элемента

$$\langle \begin{array}{c} \text{барионный} \\ \text{октет} \end{array} | (\mathcal{Q}_{\text{эфф}}^{nIPC})_{\text{октет}} | \begin{array}{c} \text{барионный} \\ \text{октет} \end{array} \rangle \quad (2.40)$$

равно приблизительно  $-0,4$ , что почти совпадает со значением  $-0,32$  этого отношения для матричного элемента расщепления масс барионов

$$\langle \begin{array}{c} \text{барионный} \\ \text{октет} \end{array} | \mathcal{H}_8 | \begin{array}{c} \text{барионный} \\ \text{октет} \end{array} \rangle. \quad (2.41)$$

Другими словами, матричные элементы лагранжиана  $(\mathcal{Q}_{\text{эфф}}^{nIPC})_{\text{октет}}$  для *барионного октета* численно пропорциональны соответствующим матричным элементам оператора  $\mathcal{H}_6$ , являющегося членом того же октета, что и  $\mathcal{H}_8$ , и соответствующего  $\Delta Q = 0$ ,  $|\Delta S| = 1$  и положительной зарядовой четности:

$$\begin{aligned} & \langle \begin{array}{c} \text{барионный} \\ \text{октет} \end{array} | (\mathcal{Q}_{\text{эфф}}^{nIPC})_{\text{октет}} | \begin{array}{c} \text{барионный} \\ \text{октет} \end{array} \rangle \approx \\ & \approx \kappa \langle \begin{array}{c} \text{барионный} \\ \text{октет} \end{array} | \mathcal{H}_6 | \begin{array}{c} \text{барионный} \\ \text{октет} \end{array} \rangle. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Анализ, подобный проделанному Судзуки, может быть применен к нарушающим четность распадам  $K \rightarrow 2\pi$ . Он позволяет связать матричные элементы этих распадов с матричным элементом  $\langle K | \mathcal{Q}_{\text{эфф}}^{nIPC} | \pi \rangle$ . Сравнение

с экспериментом показывает [14], что с точностью до множителя 1,5

$$\left\langle \begin{array}{c} \text{псевдоскалярный} \\ \text{октет} \end{array} \left| \left( \mathcal{Q}_{\text{эфф}}^{nIPC} \right)_{\text{октет}} \right| \begin{array}{c} \text{псевдоскалярный} \\ \text{октет} \end{array} \right\rangle \approx \approx \kappa \left\langle \begin{array}{c} \text{псевдоскалярный} \\ \text{октет} \end{array} \left| \mathcal{H}_6 \right| \begin{array}{c} \text{псевдоскалярный} \\ \text{октет} \end{array} \right\rangle, \quad (2.43)$$

где  $\kappa$  — та же константа, что и в равенстве (2.42).

Простейшим объяснением равенств (2.42) и (2.43) было бы допущение, что сами операторы  $(\mathcal{Q}_{\text{эфф}}^{nIPC})_{\text{октет}}$  и  $\mathcal{H}_6$ , а не только их матричные элементы между состояниями барионных и псевдоскалярных октетов пропорциональны между собой

$$(\mathcal{Q}_{\text{эфф}}^{nIPC})_{\text{октет}} = \kappa \mathcal{H}_6. \quad (2.44)$$

Однако Коулман и Глэшоу [15] показали, что если бы выполнялось равенство (2.44), то не было бы сохраняющих странность нелептонных распадов гиперонов. В самом деле, если полный гамильтониан имеет вид (мы опускаем нарушающую четность часть гамильтониана)

$$H = H_0 + gH_8 + \kappa H_6 + H_{EM}, \quad (2.45)$$

где  $H_6$  и  $H_8$  принадлежат одному октету, то, совершая  $SU_3$ -вращение, мы можем преобразовать  $H$  к виду

$$H = H_0 + g' H'_8 + H_{EM}. \quad (2.46)$$

При этом новые операторы гиперзаряда и изоспина  $Y'$  и  $I'_3$ , получающиеся из старых операторов  $Y$  и  $I_3$   $SU_3$ -вращением, сохраняются, и, следовательно, в отсутствие нарушающих четность распадов гипероны должны быть стабильными.

Кэллан <sup>1)</sup> привел другое соображение, близкое к тем, которые используются в методе алгебры токов. Он заметил, что из соотношений (2.44) и (1.896) следует равенство

$$\int d^3x (\mathcal{Q}_{\text{эфф}}^{nIPC})_{\text{октет}} = \kappa \int d^3x \mathcal{H}_6 = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\kappa}{g} \frac{d}{dx^0} F_7(x^0), \quad (2.47)$$

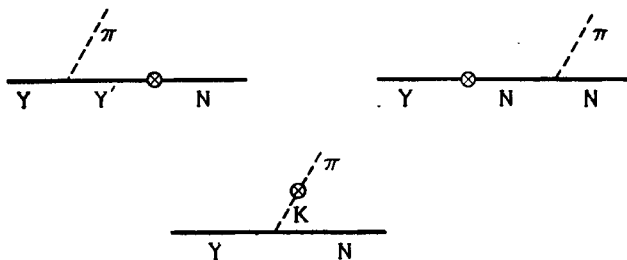
<sup>1)</sup> С. Г. Саллап, не опубликовано.

откуда

$$\langle N\pi(E_f) | \int d^3x (\mathcal{L}_{\text{эфф}}^{nIPC})_{\text{октет}} | Y(E_i) \rangle \sim \\ \sim (E_f - E_i) \langle N\pi(E_f) | F_7 | Y(E_i) \rangle = 0, \quad (2.48)$$

поскольку энергия при распаде сохраняется и матричный элемент оператора  $F_7$  не сингулярен. Таким образом, гипотеза (2.44) не выдерживает критики. В настоящее время мы не имеем удовлетворительного объяснения равенств (2.42) и (2.43).

В отличие от распадов гиперонов в  $S$ -волне, для которых алгебра токов дает определенные предсказания,



Фиг. 2.4. Полюсные диаграммы, дающие вклад в распады  $\Sigma$ - или  $\Lambda$ -гиперонов в  $P$ -волне.

$Y$  и  $Y'$  обозначают гипероны, а символ  $\otimes$  — вершину с нелептонным слабым лагранжианом  $\mathcal{L}_{\text{эфф}}^{nI}$ .

она не дает никаких предсказаний для распадов в  $P$ -волне. Для изучения  $P$ -волн приходится использовать модели. Простейшей является полюсная модель, в которой учитываются лишь диаграммы с гиперонным, нуклонным и каонным полюсами, изображенные на фиг. 2.4. К несчастью, равенство (2.44), которое приближенно выполняется для октетов барионов и псевдоскалярных мезонов, приводит к катастрофическим последствиям для этой модели. Дело в том, что для вычисления вычетов в полюсах нужно знать лишь матричные элементы оператора  $(\mathcal{L}_{\text{эфф}}^{nIPC})_{\text{октет}}$  для барионов и псевдоскалярных мезонов, а также константы связи барионов с псевдоскалярными мезонами. Равенства же (2.42) и (2.43) приводят к тому, что в главном порядке

по нарушению  $SU_3$  полюсные члены взаимно сокращаются и не дают вклада в  $P$ -волновые распады гиперонов. Это сокращение является следствием теоремы Коулмана — Глэшоу: только полюсные члены имеют порядок (нарушение  $SU_3$ )<sup>-1</sup> (из-за разности масс мезонов и барионов в функциях распространения), поэтому их вклады должны сокращаться друг с другом. Если пренебречь мезонными полюсами (как это сделано в работах Хара, Намбу и Шехтера [17], а также Брауна и Соммерфильда [18]), то сокращение будет неполным. В этом случае должна обращаться в нуль лишь одна  $P$ -волновая амплитуда  $P(\Sigma_+^+)$ , в которую мезонный полюс не дает вклада. Подытоживая, мы видим, что результаты, полученные с помощью алгебры токов для нарушающих четность распадов  $K$ -мезонов и гиперонов, усложняют задачу объяснения распадов гиперонов в  $P$ -волне.

### 5. ПРОБЛЕМА РАСПАДОВ $K \rightarrow 3\pi$ И $\eta \rightarrow 3\pi$

Кэллан и Триман (ст. 6) рассмотрели нелептонные распады  $K \rightarrow 3\pi$  в пределе, когда 4-импульс одного из пионов равен нулю. Они обнаружили, что результат зависит от того, какой из пионов взят вне массовой поверхности. Например, амплитуда распада  $K_2^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0$  обращается в нуль, когда один из заряженных пионов имеет нулевой 4-импульс, однако она равна  $A[K_2^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0; q(\pi^0) = 0] =$

$$= \frac{g_r(0)}{2M_N g_A} A(K_1^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-), \quad (2.49)$$

когда равен нулю 4-импульс  $\pi^0$ . Ясно, что такое поведение несовместимо с предположением о медленном изменении матричного элемента  $A(K_2^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0)$  как функции 4-импульсов пионов. Однако из эксперимента следует, что амплитуда  $K_2^0 \rightarrow 3\pi$  не является константой на диаграмме Далица и изменяется следующим образом:

$$A[K_2^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0] \approx \bar{A}_K \left[ 1 - \frac{a(+ - 0)}{M_\pi^2} (S_0 - \bar{S}_K) \right], \quad (2.50)$$



где

$$S_0 = [q(K) - q(\pi^0)]^2, \quad S_{\pm} = [q(K) - q(\pi^{\pm})]^2, \\ \bar{S}_K = \frac{1}{3}(S_0 + S_+ + S_-) = M_{\pi}^2 + \frac{1}{3}M_K^2. \quad (2.51)$$

Если допустить, что выражение (2.50) можно экстраполировать в область вне диаграммы Далица вплоть до точек, в которых 4-импульсы различных пионов обращаются в нуль, то мы сможем сравнить предсказания алгебры токов с экспериментом [20]. В точке, где обращается в нуль 4-импульс одного из заряженных пионов,  $S_0 = M_{\pi}^2$ , и алгебра токов предсказывает, что

$$0 = \bar{A}_K \left[ 1 - \frac{a(+ - 0)}{M_{\pi}^2} \left( M_{\pi}^2 - M_{\pi}^2 - \frac{1}{3}M_K^2 \right) \right], \quad (2.52)$$

откуда

$$a(+ - 0)_{\text{теор}} = - \frac{3M_{\pi}^2}{M_K^2} = -0,24, \quad (2.53)$$

что хорошо согласуется с экспериментальным значением [19]

$$a(+ - 0)_{\text{эксп}} = -0,24 \pm 0,02. \quad (2.54)$$

В точке, где  $q(\pi^0) = 0$ , алгебра токов с учетом (2.49) предсказывает

$$\frac{!g_r(0)}{2M_N g_A} A(K_1^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-) = \bar{A}_K \left[ 1 - \frac{a(+ - 0)}{M_{\pi}^2} (M_K^2 - \bar{S}_K) \right], \quad (2.55)$$

что позволяет предсказать отношение ширины

$$\frac{\Gamma(K_2^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0)}{\Gamma(K_1^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-)},$$

которое согласуется с экспериментом [20, 23]<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> С. Г. Саллап, не опубликовано. Абарбанел [23] применил к распаду  $K_2^0 \rightarrow 3\pi$  метод многих мягких пионов Вайнберга и рассмотрел случай, когда два пиона являются мягкими одновременно. Он пришел к интересному выводу о том, что изменение матричного элемента на диаграмме Далица можно объяснить присутствием полюсных диаграмм, которые дают быстро меняющийся вклад.

Интересно применить этот анализ [21] к электромагнитному распаду второго порядка  $\eta \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0$ , матричный элемент которого, как следует из эксперимента, имеет тот же вид (2.50) [22]

$$A[\eta \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0] \approx \bar{A}_\eta \left[ 1 - \frac{a(\eta)}{M_\pi^2} (S_0 - \bar{S}_\eta) \right],$$

$$S_0 = [q(\eta) - q(\pi^0)]^2, \quad \bar{S}_\eta = M_\pi^2 + \frac{1}{3} M_\eta^2, \quad (2.56)$$

$$a(\eta)_{\text{эксп}} = -0,19 \pm 0,02 \left( \approx \frac{-3M_\pi^2}{M_\eta^2} \right).$$

Когда 4-импульс нейтрального пиона равен нулю, матричный элемент  $\eta$ -распада пропорционален

$$\langle \pi^+ \pi^- | \int d^4x \int d^4y T(\Phi_{\pi^0}(x) J_{EM}^\lambda(0) J_{EM}^\sigma(y)) D_{\lambda\sigma}(-y) | \eta \rangle, \quad (2.57)$$

где  $D_{\lambda\sigma}$  — фотонная функция распространения. Используя равенство (2.22), можно показать, что амплитуда  $A[\eta \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0; q(\pi^0) = 0]$  пропорциональна матричным элементам одновременных коммутаторов  $[F_3^5, J_{EM}^\lambda]$  и  $[F_3^5, J_{EM}^\sigma]$ , которые равны нулю. Таким образом,

$$A[\eta \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0; q(\pi^0) = 0] = 0, \quad (2.58)$$

Неполосная часть матричного элемента изменяется медленно. Однако приближение двух мягких пионов в распаде  $K \rightarrow 3\pi$  связано с большей неопределенностью, чем приближение одного мягкого пиона: когда один пион имеет нулевой 4-импульс, два остальных пиона могут все еще быть на массовой поверхности, поскольку распад  $K \rightarrow 2\pi$  является физическим процессом. Если же два пиона имеют нулевые 4-импульсы, то из-за сохранения 4-импульса третий пион имеет  $q^2 = M_K^2$  и, следовательно, находится далеко от массовой поверхности. Для того чтобы третий пион оставался на массовой поверхности, нужно экстраполировать матричный элемент за пределы энергетической поверхности, допуская, что гамильтониан нелептонного распада может уносить избыточную энергию перехода  $M_K - M_\pi$ . Эта же проблема возникает в случае распада  $K \rightarrow 2\pi$ , когда один пион имеет нулевой 4-импульс. Эта трудность означает, что предсказания алгебры токов в данных случаях имеют менее полное обоснование, чем приложения, рассматриваемые в тексте.

в то время как экстраполяция выражения (2.56) к точке, где  $q(\pi^0) = 0$ , дает

$$A[\eta \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0; q(\pi^0) = 0] \approx 2,8\bar{A}_\eta. \quad (2.59)$$

Причина этой неудачи алгебры токов до сих пор не выяснена. Одно из возможных объяснений состоит в том, что в конечном состоянии имеется сильное взаимодействие, которое делает непригодной линейную экстраполяцию. Но если это так, то трудно понять, почему при расчете распадов  $K \rightarrow 3\pi$  и  $K_{e4}$  пренебрежение взаимодействиями в конечном состоянии приводит к хорошим результатам.

### ПРИЛОЖЕНИЕ А

Выведем низкоэнергетические теоремы для пионов с помощью кирального формализма. Сначала будем предполагать частичное сохранение аксиально-векторного тока, а затем кратко поясним, почему Намбу и Лурье [16] получили те же результаты в случае нулевой массы пиона и сохраняющегося аксиально-векторного тока. Напомним, что „киральностью“  $\chi(t)$  называется величина

$$\chi(t) = \int d^3x [\mathfrak{S}_1^{50}(x) + i\mathfrak{S}_2^{50}(x)] = F_1^5(t) + iF_2^5(t). \quad (A.1)$$

Ее производная по времени в силу соотношений (1.93) и (1.100) равна

$$\frac{d\chi(t)}{dt} = \frac{V\sqrt{2} M_N M_\pi^2 g_A}{g_r(0)} \int d^3x \Phi_{\pi^+}^+ = \frac{V\sqrt{2} M_N M_\pi^2 g_A}{g_r(0)} \int d^3x \Phi_{\pi^-}. \quad (A.2)$$

Определим  $\chi^{\text{out}}$  и  $\chi^{\text{in}}$

$$\chi^{\text{out}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \chi(t), \quad \chi^{\text{in}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \chi(t). \quad (A.3)$$

Интегрируя равенство (A.2) от  $-\infty$  до  $\infty$ , получаем

$$\begin{aligned} \chi^{\text{out}} - \chi^{\text{in}} &= \frac{V\sqrt{2} M_N g_A}{g_r(0)} \int d^4x M_\pi^2 \Phi_{\pi^-} = \\ &= \frac{V\sqrt{2} M_N g_A}{g_r(0)} \int d^4x (\square_x^2 + M_\pi^2) \Phi_{\pi^-} = \\ &= \frac{V\sqrt{2} M_N g_A}{g_r(0)} \int d^4x J_{\pi^-}. \end{aligned} \quad (A.4)$$

(Мы использовали тот факт, что  $\int d^4x \square_x^2 \Phi_{\pi^-} = 0$ .) Рассмотрим матричный элемент выражения (А.4) между состояниями  $\langle \beta(q_2) |$  и  $| \alpha(q_1) \rangle$ <sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} \langle \beta(q_2) | \chi^{\text{out}} - \chi^{\text{in}} | \alpha(q_1) \rangle &= \\ &= \frac{\sqrt{2} M_N g_A}{g_r(0)} \int d^4x e^{i(q_2 - q_1) \cdot x} \langle \beta(q_2) | J_{\pi^-}(0) | \alpha(q_1) \rangle = \\ &= \frac{\sqrt{2} M_N g_A}{g_r(0)} (2\pi)^4 \delta^4(q_2 - q_1) \langle \beta(q_2) | J_{\pi^-}(0) | \alpha(q_1) \rangle. \end{aligned} \quad (\text{A. 5})$$

Правая часть этого равенства представляет собой матричный элемент испускания пиона с нулевым 4-импульсом в процессе  $\alpha \rightarrow \beta$ . Покажем, что левая часть равенства (А.5) может быть выражена через матричный элемент  $S$ -матрицы  $\langle \beta(q_2) | \alpha(q_1) \rangle$ , описывающий процесс без испускания мягкого пиона.

Рассмотрим для этого вклад  $\chi^{\text{out}}$  (вклад  $\chi^{\text{in}}$  получается аналогичным образом). Мы знаем, что 1)  $\chi^{\text{out}}$  представляет собой пространственный интеграл от локального оператора и 2)  $\chi^{\text{out}}$  не зависит от времени [осциллирующие члены в  $\chi(t)$  исчезают в пределе  $t \rightarrow \infty$ ]. Предположим, что  $\chi^{\text{out}}$  можно представить в виде

$$\chi^{\text{out}} = \int d^3x \mathcal{P}[\{\Phi^{\text{out}}\}], \quad (\text{A. 6})$$

где  $\mathcal{P}$  — полином (возможно, бесконечный) по аут-полям всех имеющихся частиц. Рассмотрим член в  $\mathcal{P}$ , соответствующий произведению  $N$  аут-полей. Он зависит от времени как  $\exp(-i\Omega t)$ , где

$$\Omega = \sum_{j=1}^N \epsilon_j (\mathbf{p}_j^2 + M_j^2)^{1/2}; \quad (\text{A. 7})$$

$\epsilon_j = \pm 1$  и импульсы  $\mathbf{p}_j$  из-за интегрирования по  $\mathbf{x}$  удовлетворяют условию

$$\sum_{j=1}^N \mathbf{p}_j = 0. \quad (\text{A. 8})$$

<sup>1)</sup> Как и выше, мы опускаем у состояний индексы in и out.

Если нет частиц с нулевой массой, то нетрудно показать, что при этом условии  $\Omega$  тождественно обращается в нуль тогда и только тогда, когда  $N=2$ ,  $M_1=M_2$  и  $\varepsilon_1=-\varepsilon_2$ . Другими словами, независимость от времени требует, чтобы выражение для  $\chi^{\text{out}}$  было билинейным по ауто-полям и им сопряженным

$$\chi^{\text{out}} = \sum_j \int d^3x \Phi_j^{\text{out}(+)}(x)^\dagger O_j^{(+)} \Phi_j^{\text{out}(+)}(x) + \sum_j \int d^3x \Phi_j^{\text{out}(-)}(x)^\dagger O_j^{(-)} \Phi_j^{\text{out}(-)}(x). \quad (\text{A. 9})$$

Верхние индексы (+), (-) в этом выражении относятся к положительно- и отрицательно-частотным частям ауто-полей соответственно, а суммирование ведется по всем стабильным частицам.

Матрицы  $O_j^{(\pm)}$  определяются 1) лоренцевской ковариантностью и четностью ( $\chi^{\text{out}}$  — аксиально-векторный заряд), 2) изотопическим спином ( $\chi^{\text{out}}$  — увеличивающий изоспин член изотопического триплетта) и 3) определением  $\chi^{\text{out}}$  как предела  $\lim_{t \rightarrow \infty} \chi(t)$ . Например, условия 1

и 2 требуют, чтобы нуклонный член в  $\chi^{\text{out}}$  имел вид

$$g^{(+)} \int d^3x \bar{\psi}_p^{\text{out}(+)}(x) \gamma^0 \gamma_5 \psi_n^{\text{out}(+)}(x) = g^{(+)} \int d^3x \bar{\psi}_N^{\text{out}(+)}(x) \tau_+ \gamma^0 \gamma_5 \psi_N^{\text{out}(+)}(x). \quad (\text{A. 10})$$

Для определения  $g^{(+)}$  воспользуемся условием (3), которое означает, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle p(q_2) | \chi(t) | n(q_1) \rangle = \langle p(q_2) | \chi^{\text{out}} | n(q_1) \rangle. \quad (\text{A. 11})$$

Матричный элемент  $\langle p(q_2) | \chi(t) | n(q_1) \rangle$  на самом деле не зависит от времени, поскольку  $n$  и  $p$  имеют равные массы. Преобразуя его с помощью соотношения (1.92), представим левую часть равенства (A.11) в виде

$$\left( \frac{M_N^2}{q_2^0 q_1^0} \right)^{1/2} \bar{u}_p(q_2) g_A \gamma^0 \gamma_5 u_n(q_1) (2\pi)^3 \delta^3(q_2 - q_1). \quad (\text{A. 12})$$

Из выражения же (A.10) следует, что правая часть равенства (A.11) равна

$$\left(\frac{M_N^2}{q_2 q_1^0}\right)^{1/2} \bar{u}_p(q_2) g^{(+)} \gamma^0 \gamma_5 u_n(q_1) (2\pi)^3 \delta^3(q_2 - q_1). \quad (\text{A.13})$$

Таким образом,  $g^{(+)} = g_A$  и

$$\begin{aligned} \chi^{\text{out}} = g_A \int d^3x \bar{\psi}_N^{\text{out}(+)}(x) \tau_+ \gamma^0 \gamma_5 \psi_N^{\text{out}(+)}(x) + \\ + \text{Отрицательно-частотная часть} + \\ + \text{Члены, соответствующие остальным частицам.} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Ясно, что оператор  $\chi^{\text{out}}$ , действуя на состояние уходящей частицы, переводит его в состояние той же частицы с тем же импульсом, но с измененными спином и изотопическим спином. Выражение для  $\chi^{\text{in}}$  получается из выражения (A.14) заменой всех индексов out на in.

С помощью соотношения (A.14) мы можем выразить матричный элемент  $\langle \beta(q_2) | \chi^{\text{out}} | \alpha(q_1) \rangle$  через  $\langle \beta(q_2) | \alpha(q_1) \rangle$ . Соотношение (A.14) соответствует сумме „вставок“ в линии всех выходящих частиц, имеющих в состоянии  $\langle \beta(q_2) |$ . Пусть  $\langle \beta | = \langle \zeta, \dots |$ , тогда вклад частицы  $\zeta$  равен

$$\begin{aligned} \langle \beta | \chi^{\text{out}} | \alpha \rangle_{\zeta} &= \langle \zeta, \dots | \chi^{\text{out}} | \alpha \rangle_{\zeta} = \\ &= \sum_{\substack{\text{Спин, изоспин} \\ \text{частицы } \zeta'}} \int \frac{d^3q_{\zeta'}}{(2\pi)^3} \langle \zeta | \chi^{\text{out}} | \zeta' \rangle \langle \zeta', \dots | \alpha \rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

При этом полный матричный элемент равен

$$\langle \beta | \chi^{\text{out}} | \alpha \rangle = \sum_{\zeta \in \beta} \langle \beta | \chi^{\text{out}} | \alpha \rangle_{\zeta}. \quad (\text{A.16})$$

Рассмотрим для иллюстрации конечную нуклонную линию. Мы имеем

$$\begin{aligned} \langle \beta(q_2) | \alpha(q_1) \rangle &= \delta_{\beta, \alpha} + (2\pi)^4 i \delta^4(q_2 - q_1) T(\alpha \rightarrow \beta), \\ T(\alpha \rightarrow \beta) &= \left(\frac{M_N}{q_N^0}\right)^{1/2} i \bar{u}_N(q_N) \mathfrak{M}. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Тогда вклад конечного нуклона  $N$  в

$$\langle \beta(q_2) | \chi^{\text{out}} | \alpha(q_1) \rangle$$

равен <sup>1)</sup>

$$(2\pi)^4 i \delta^4(q_2 - q_1) \left( \frac{M_N}{q_N^0} \right)^{1/2} i \bar{u}_n(g_N) g_A \tau_+ \gamma^0 \gamma_5 \left( \frac{q_N + M_N}{2q_N^0} \right) \mathfrak{M}, \quad (\text{A.18})$$

т. е. действие  $\chi^{\text{out}}$  сводится к замене

$$\bar{u}_N(q_N) \rightarrow \bar{u}_N(q_N) g_A \tau_+ \gamma^0 \gamma_5 \left( \frac{q_N + M_N}{2q_N^0} \right) \quad (\text{A.19})$$

в выражении (A.17). Сравнивая этот результат с соотношением (A.5), мы видим, что вклад конечного нуклона  $N$  в  $\langle \beta | J_{\pi^-} | \alpha \rangle$  равен

$$-\left( \frac{M_N}{q_N^0} \right)^{1/2} \bar{u}_N(q_N) \frac{g_r(0)}{\sqrt{2} M_N} \tau_+ \gamma^0 \gamma_5 \left( \frac{q_N + M_N}{2q_N^0} \right) \mathfrak{M}. \quad (\text{A.20})$$

Полное выражение для  $\langle \beta | J_{\pi^-} | \alpha \rangle$  будет суммой членов типа (A.20), соответствующих всем выходящим частицам в состоянии  $\langle \beta |$  и всем входящим частицам в состоянии  $| \alpha \rangle$ .

Кратко рассмотрим теперь, почему Намбу и Лурье [16] получили эти же правила вставок в случае пиона нулевой массы. Как видно из равенства (A.2), при  $M_\pi = 0$  киральность сохраняется:

$$\frac{d\chi_{M_\pi=0}}{dt} = 0. \quad (\text{A.21})$$

Это значит, что  $\chi_{M_\pi=0}^{\text{out}} - \chi_{M_\pi=0}^{\text{in}} = 0$ , т. е. в соотношении (A.4) теперь отсутствует член, пропорциональный  $\int d^3x J_{\pi^-}$ . Однако в случае пиона нулевой массы асимптотическая киральность  $\chi^{\text{out}}$ , кроме билинейных чле-

<sup>1)</sup> Чтобы сравнить выражение (A.18) с результатом ст. 2 (стр. 134), в которой используется метрика Паули, нужно заменить  $q_N$  на  $-i q_N$ . Определение метрики см. в главе „Обозначения“.

нов (А. 9), содержит также не зависящий от времени член, пропорциональный  $\int d^3x (\partial/\partial x^0) \Phi_{\pi^-}^{\text{out}}(x)$ . Этот член соответствует тому, что при  $M_{\pi} = 0$  испускание пиона с нулевым 4-импульсом является физическим, а не виртуальным процессом. (Производная  $\partial/\partial x^0$  нужна для того, чтобы получить пространственный интеграл от временной компоненты аксиального вектора.) Нетрудно убедиться, что

$$\chi_{M_{\pi}=0}^{\text{out}} = \chi_{\text{билин}}^{\text{out}} - \frac{V\sqrt{2}M_N g_A}{g_r(0)} \int d^3x \frac{\partial}{\partial x^0} \Phi_{\pi^-}^{\text{out}}(x). \quad (\text{A. 22})$$

Подобное выражение справедливо и для  $\chi_{M_{\pi}=0}^{\text{in}}$ . Таким образом, равенство  $\chi_{M_{\pi}=0}^{\text{out}} - \chi_{M_{\pi}=0}^{\text{in}} = 0$  означает, что

$$\begin{aligned} \langle \beta(q_2) | \chi_{\text{билин}}^{\text{out}} - \chi_{\text{билин}}^{\text{in}} | \alpha(q_1) \rangle = \\ = \frac{V\sqrt{2}M_N g_A}{g_r(0)} \left[ \langle \beta(q_2) | \int d^3x \frac{\partial}{\partial x^0} \Phi_{\pi^-}^{\text{out}}(x) | \alpha(q_1) \rangle - \right. \\ \left. - \langle \beta(q_2) | \int d^3x \frac{\partial}{\partial x^0} \Phi_{\pi^-}^{\text{in}}(x) | \alpha(q_1) \rangle \right]. \quad (\text{A. 23}) \end{aligned}$$

Матричные элементы в правой части этого равенства можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} - \langle \beta(q_2) | \int d^3x \frac{\partial}{\partial x^0} \Phi_{\pi^-}^{\text{in}}(x) | \alpha(q_1) \rangle = \\ = \langle \beta(q_2) | \int d^3x \frac{\partial}{\partial x^0} \Phi_{\pi^-}^{\text{out}}(x) | \alpha(q_1) \rangle = \\ = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \left[ \langle 0 | \int d^3x \frac{\partial}{\partial x^0} \Phi_{\pi^-}^{\text{out}}(x) | \pi^-(q) \rangle \right] \times \\ \times \{ \langle \pi^-(q) \beta(q_2) | \alpha(q_1) \rangle \} = \\ = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} [(2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{q}) (2q^0)^{-1/2} (-iq^0)] \times \\ \times \{ (2\pi)^4 i \delta^4(q_2 + q - q_1) (2q^0)^{-1/2} \langle \beta(q_2) | J_{\pi^-}(0) | \alpha(q_1) \rangle \} = \\ = \frac{1}{2} (2\pi)^4 \delta^4(q_2 - q_1) \langle \beta(q_2) | J_{\pi^-}(0) | \alpha(q_1) \rangle. \quad (\text{A. 24}) \end{aligned}$$



В результате равенство (А. 23) принимает вид

$$\langle \beta(q_2) | \chi_{\text{били}}^{\text{out}} - \chi_{\text{били}}^{\text{in}} | \alpha(q_1) \rangle = \\ = \frac{V^2 M_{NGA}}{g_r(0)} (2\pi)^4 \delta^4(q_2 - q_1) \langle \beta(q_2) | J_{\pi^-}(0) | \alpha(q_1) \rangle. \quad (\text{А. 25}).$$

Ему соответствуют те же правила вставок, которые были получены из равенства (А. 5).

### Л и т е р а т у р а

1. Abarbanel H. D. I., Nussinov S., Ann. of Phys., **42**, 467 (1967).
2. Weinberg S., Phys. Rev. Letters, **18**, 188 (1967).
3. Nambu Y., Shrauner E., Phys. Rev., **128**, 862 (1962).
4. Rubenstein H. R., Veneziano G., Phys. Rev. Letters, **18**, 411 (1967).
5. Chang L. N., Phys. Rev., **162**, 1497 (1967).
6. Carruthers P., Huang H. W., Phys. Letters, **24B**, 464 (1967).
7. Tomazawa Y., Nuovo Cimento, **46A**, 707 (1966).
8. Khuri N. N., Phys. Rev., **153**, 1477 (1967).  
Meiere F. T., Sugawara M., Phys. Rev., **153**, 1702 (1967).
9. Cabibbo N., Maksymowicz A., Phys. Rev., **137**, B438 (1967).
10. Kroll N., Ruderman M. A., Phys. Rev., **93**, 233 (1954).
11. Chew G. F., Goldberger M. L., Low F. E., Nambu Y., Phys. Rev., **106**, 1345 (1957).
12. Adler S. L., Gilman F. J., Phys. Rev., **152**, 1460 (1966).
13. Sugawara H., Phys. Rev. Letters, **15**, 870, 997(E) (1965).
14. Rosenfeld A. H. et al., Rev. Mod. Phys., **39**, 1 (1967).
15. Coleman S., Glashow S. L., Phys. Rev., **134**, B671 (1964), Section IIB.
16. Nambu Y., Lurié D., Phys. Rev., **125**, 1429 (1962).
17. Hara L. S., Nambu Y., Schechter J., Phys. Rev. Letters, **16**, 380 (1966).
18. Brown L. S., Sommerfield C. M., Phys. Rev. Letters, **16**, 751 (1966).
19. Trilling G. H., Proceedings of the International Conference on Weak Interactions at Argonne National Laboratory (ANL-7130, 1965), p. 137.
20. Hara Y., Nambu Y., Phys. Rev. Letters, **16**, 875 (1966).  
Elias D. K., Taylor J. C., Nuovo Cimento, **44A**, 518 (1966).
21. Sutherland D. G., Phys. Letters, **23**, 384 (1966).
22. Columbia et al., Phys. Rev., **149**, 1044 (1966).
23. Abarbanel H. D. I., Phys. Rev., **153**, 1547 (1967).

## ОСНОВНЫЕ СТАТЬИ

- Nambu Y., Lurié D., Phys. Rev., **125**, 1429 (1962) (оригинал, стр. 149).  
Chirality Conservation and Soft Pion Production.
- Adler S. L., Phys. Rev., **139**, B1638 (1965) (ст. 2 настоящей книги).  
Consistency Conditions of the Strong Interaction Implied by a Partially Conserved Axial-Vector Current II.
- Weinberg S., Phys. Rev. Letters, **16**, 879 (1966) (ст. 3 настоящей книги).  
Current-Commutator Theory of Multiple Pion Production.
- Weinberg S., Phys. Rev. Letters, **17**, 616 (1966) (ст. 4 настоящей книги).  
Pion Scattering Lengths.
- Fubini S., Furlan G., Rossetti C., Nuovo Cimento, **40**, 1171 (1965) (ст. 5 настоящей книги).  
A Dispersion Theory of Symmetry Breaking.
- Callan C. G., Treiman S. B., Phys. Rev. Letters, **16**, 153 (1966) (ст. 6 настоящей книги).  
Equal Time Commutators and  $K$ -Meson Decays.
- Weinberg S., Phys. Rev. Letters, **17**, 336 (1966) (ст. 7 настоящей книги).  
Current Commutator Calculation of the  $K_{14}$  Form Factors.
- Suzuki M., Phys. Rev. Letters, **15**, 986 (1965) (ст. 8 настоящей книги).  
Consequences of Current Commutation Relations in the Nonleptonic Hyperon Decays.

# УСЛОВИЯ САМОСОГЛАСОВАННОСТИ ДЛЯ СИЛЬНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ, ВЫТЕКАЮЩИЕ ИЗ ГИПОТЕЗЫ О ЧАСТИЧНОМ СОХРАНЕНИИ АКСИАЛЬНО-ВЕКТОРНОГО ТОКА. II

С. Адлер\*

S. L. Adler, Phys. Rev., 139, B1638 (1965)

В статье изучаются следствия гипотезы о частичном сохранении аксиально-векторного тока. Получены простые правила, связывающие матричный элемент любого процесса сильного взаимодействия с матричным элементом соответствующего процесса, в котором рождается или поглощается дополнительный пион с массой и энергией, равными нулю. Эти правила обобщены на процессы с участием электромагнитного взаимодействия, учитываемого в низших порядках по константе связи. Сформулирована и доказана теорема об изменении уравнения типа  $\partial_\lambda J_\lambda = D$  при включении минимального электромагнитного взаимодействия.

## Введение

В ранее опубликованной статье [1] мы показали, что гипотеза о частичном сохранении аксиально-векторного тока с  $\Delta S = 0$  приводит к условиям самосогласованности для процессов с участием только сильного взаимодействия. Было показано, что одно из этих условий, связывающее амплитуду пион-нуклонного рассеяния  $A^{\pi N(+)}$  с пион-нуклонной константой связи  $g_r$ , согласуется с экспериментом в пределах 10%. В настоящей статье мы дадим более простой и более общий вывод условий самосогласованности, вытекающих из гипотезы о частичном сохранении. Мы получим ряд простых правил, связывающих матричный элемент любого процесса сильного взаимодействия или процесса с участием электромагнитного взаимодействия, учитываемого в первом порядке по константе связи, с матричным элементом соответствующего процесса, в котором

\* Lyman Laboratory of Physics, Harvard University, Cambridge, Massachusetts.

рождается или поглощается дополнительный пион с равными нулю массой и энергией. Эти правила тесно связаны с формулами Намбу, Лурье и Шраунера, полученными из предположения о сохранении киральности.

Сначала напомним некоторые определения из работы [1]. Обозначим через  $J_\lambda^A$  слабый аксиальный ток, не изменяющий странность. Гипотеза о частичном сохранении аксиально-векторного тока означает, что

$$\partial_\lambda J_\lambda^A = - \frac{i\sqrt{2} M_N M_\pi^2 g_A^N(0)}{g_r K^{NN\pi}(0)} \Phi_\pi + R, \quad (1)$$

где  $M_N$  — масса нуклона,  $M_\pi$  — масса пиона,  $g_A^N(0)$  — аксиально-векторная константа связи  $\beta$ -распада [ $g_A^N(0) \approx \approx 1,2 \cdot 10^{-5}/M_N^2$ ],  $g_r$  — перенормированная пион-нуклонная константа связи в рациональных единицах ( $g_r^2/4\pi \approx 14,6$ ) и  $\Phi_\pi$  — перенормированный оператор поля, описывающий рождение  $\pi^+$ -мезона. Величина  $K^{NN\pi}(0)$  представляет собой пионный формфактор нуклона, вычисленный при равном нулю значении массы виртуального пиона; формфактор  $K^{NN\pi}$  нормирован так, что  $K^{NN\pi}(-M_\pi^2) = 1$ . Чтобы придать смысл равенству (1), мы должны сформулировать свойства оператора  $R$ . Предположим, что матричный элемент оператора  $R$  между состояниями  $\langle \beta(p_F) |$  и  $| \alpha(p_I) \rangle$ , для которых  $\langle \beta | \Phi_\pi | \alpha \rangle \neq 0$  в области значений квадрата переданного импульса, лежащих вблизи значения  $-M_\pi^2$ , соответствующего пионному полюсу [например, когда  $-M_\pi^2 < (p_F - p_I)^2 < M_\pi^2$ ], много меньше матричного элемента от слагаемого, содержащего поле пиона. Другими словами, мы постулируем, что если  $\langle \beta | \Phi_\pi | \alpha \rangle \neq 0$  и  $|(p_F - p_I)^2| < M_\pi^2$ , то

$$\frac{|\langle \beta | R | \alpha \rangle|}{[\sqrt{2} M_N M_\pi^2 g_A^N(0) / g_r K^{NN\pi}(0)] |\langle \beta | \Phi_\pi | \alpha \rangle|} \ll 1. \quad (2)$$

Ниже мы выведем равенства, которые строго выполняются, если оператор  $R$  равен нулю. Если же оператор  $R$  не равен нулю, но удовлетворяет неравенству (2),

то знаки равенства следует заменить на знаки приближенного равенства.

Для дальнейшего полезно ввести ряд обозначений и сокращений. Обозначим через  $k$  переданный импульс  $p_F - p_I$ . Введем изотопические векторы  $J_\lambda^{Aa}$  и  $\varphi_\pi^a$  ( $a = 1, 2, 3$ ), через которые  $J_\lambda^A$  и  $\varphi_\pi$  выражаются следующим образом:

$$J_\lambda^A = \frac{1}{2} (J_\lambda^{A1} + iJ_\lambda^{A2}), \quad \varphi_\pi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_\pi^1 + i\varphi_\pi^2). \quad (3)$$

Обозначим произведение  $g_r K^{NN\pi}(0)$  через  $g_r^{\pi N}(0)$ . Тогда обобщение соотношения (1) на случай всех трех изотопических компонент  $J_\lambda^{Aa}$  имеет вид (мы пренебрегаем  $R$ )

$$\partial_\lambda J_\lambda^{Aa} = -i \frac{2M_N M_\pi^2 g_A^N(0)}{g_r^{\pi N}(0)} \varphi_\pi^a. \quad (4)$$

Удобно ввести изотопические волновые функции для  $\Sigma$ - и  $\Xi$ -частиц, аналогичные тем, которые обычно используются для описания нуклона  $N$ . Введем изоспиноры и изовекторы следующим образом:

$$\begin{aligned} \Xi^0 &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \Xi^- &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \\ \Sigma^+ &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, & \Sigma^0 &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & \Sigma^- &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5)$$

Под  $u_\Xi$  или  $u_\Sigma$  мы будем подразумевать обычный дираковский спинор для данного гиперона, умноженный на изоспинор или изовектор соответственно. Пусть  $\tau^a$  — обычные матрицы Паули, а  $t^{Na}$ ,  $t^{\Xi a}$ ,  $t^{\Sigma a}$  — матрицы, определяемые соотношениями

$$t^{Na} = t^{\Xi a} = \tau^a, \quad (6)$$

$$[t^{\Sigma a}]_{bc} = i\epsilon_{bca}. \quad (7)$$

Тогда можно записать матричные элементы  $J_\lambda^{Aa}$  и  $J_\pi^a = (-\square + M_\pi^2) \varphi_\pi^a$  между барионными состояниями следующим образом (мы опускаем в  $J_\lambda^{Aa}$  члены, соответ-

ствующие индуцированной псевдоскалярной связи, так как ниже они рассмотрены отдельно; см. примечания на стр. 130 и 131):

$$\begin{aligned} \langle B(p_F) | J_\lambda^{Aa} | B(p_I) \rangle &= \left( \frac{M_B}{p_{F0}} \frac{M_B}{p_{I0}} \right)^{1/2} \bar{u}_B(p_F) g_{A\lambda}^B \gamma_\lambda \gamma_5 t^{Ba} u_B(p_I), \\ \langle B(p_F) | J_\pi^a | B(p_I) \rangle &= \left( \frac{M_B}{p_{F0}} \frac{M_B}{p_{I0}} \right)^{1/2} \bar{u}_B(p_F) i g_r^{\pi B} \gamma_5 t^{Ba} u_B(p_I), \end{aligned} \quad (8)$$

где  $B$  означает  $N$ ,  $\Sigma$  или  $\Xi$ .

Используя эти определения констант связи и соотношение (4), нетрудно убедиться, что

$$\frac{M_N g_A^N(0)}{g_r^{\pi N}(0)} = \frac{M_\Sigma g_A^\Sigma(0)}{g_r^{\pi \Sigma}(0)} = \frac{M_\Xi g_A^\Xi(0)}{g_r^{\pi \Xi}(0)}. \quad (9)$$

Равенство (9) позволит нам исключить аксиально-векторные константы связи  $g_A^N$ ,  $g_A^\Sigma$  и  $g_A^\Xi$  из условий самосогласованности, полученных в следующем параграфе.

## § 1. Вывод условий самосогласованности

Возьмем матричный элемент от обеих частей соотношения (4) между состояниями  $\langle \beta(p_F)^{\text{out}} |$  и  $| \alpha(p_I)^{\text{in}} \rangle$ , где  $\beta$  и  $\alpha$  — любые системы сильно взаимодействующих частиц:

$$\begin{aligned} k_\lambda \langle \beta(p_F)^{\text{out}} | J_\lambda^{Aa} | \alpha(p_I)^{\text{in}} \rangle &= \\ &= \frac{2M_N M_\pi^2 g_A^N(0)}{g_r^{\pi N}(0)} \langle \beta(p_F)^{\text{out}} | \Phi_\pi^a | \alpha(p_I)^{\text{in}} \rangle = \\ &= \frac{2M_N g_A^N(0)}{g_r^{\pi N}(0)} \frac{M_\pi^2}{M_\pi^2 + k^2} \langle \beta(p_F)^{\text{out}} | J_\pi^a | \alpha(p_I)^{\text{in}} \rangle. \end{aligned} \quad (10)$$

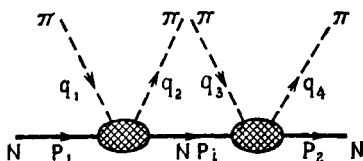
Рассмотрим, что происходит в пределе  $k \rightarrow 0$  ( $p_F \rightarrow p_I$ ). Правая часть соотношения (10) в большинстве случаев стремится к конечному пределу, так как выражение

$$\lim_{p_F \rightarrow p_I} \langle \beta(p_F)^{\text{out}} | J_\pi^a | \alpha(p_I)^{\text{in}} \rangle \quad (11)$$

в точности совпадает с матричным элементом процесса  $\alpha \rightarrow \beta +$  (пион с нулевой массой и энергией) и в общем случае не равно нулю<sup>1</sup>). Таким образом, матричный элемент

$$\langle \beta(p_F)^{\text{out}} | J_\lambda^{Aa} | \alpha(p_I)^{\text{in}} \rangle$$

должен содержать полюсный член, который ведет себя как  $1/k$ , чтобы скалярное произведение этого матричного элемента на импульс  $k$  обладало конечным пределом. Ясно, что если удастся сформулировать простые



Фиг. 1. Пример диаграммы, которая может дать сингулярный вклад в  $\langle \beta^{\text{out}} | \alpha^{\text{in}} \rangle$ .

Когда  $p_I^2 = (p_1 + q_1 - q_2)^2 = -M_N^2$ , вклад этой диаграммы обращается в бесконечность, потому что обращается в бесконечность нуклонная функция распространения, которая соответствует линии, соединяющей два блока. В общем случае такие бесконечности могут возникать за счет полюсных диаграмм, дающих вклад в  $\langle \beta^{\text{out}} | \alpha^{\text{in}} \rangle$ . (Полюсные диаграммы — это такие диаграммы, которые можно разбить на две несвязанные части, разорвав одну внутреннюю линию.) В тексте мы ограничиваемся только такими значениями 4-импульсов внешних частиц, для которых вклады всех полюсных диаграмм в  $\langle \beta^{\text{out}} | \alpha^{\text{in}} \rangle$  не имеют сингулярностей.

правила для вычисления этих полюсных членов, то мы сможем вычислить матричный элемент

$$\langle \beta(p_F)^{\text{out}} | J_\pi^a | \alpha(p_I)^{\text{in}} \rangle$$

в нулевом порядке по  $k$ .

Оказывается, что вычисление полюсных членов в

$$\langle \beta(p_F)^{\text{out}} | J_\lambda^{Aa} | \alpha(p_I)^{\text{in}} \rangle$$

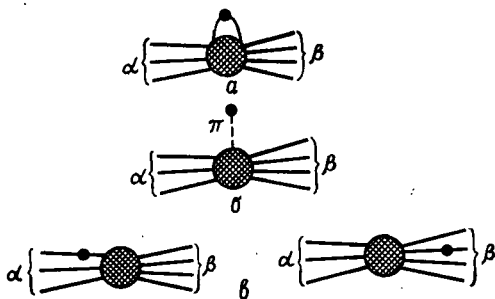
не представляет труда. Ограничимся значениями им-

<sup>1</sup>) Заметим, что предельное значение в общем случае зависит от направления, по которому вектор  $k$  стремится к нулю.

пульсов частиц в состояниях  $\alpha$  и  $\beta$ , для которых матричный элемент  $\langle \beta^{\text{out}} | \alpha^{\text{in}} \rangle$  не имеет сингулярностей. (Пример случая, который мы хотим исключить, изображен на фиг. 1.) Перенормированный матричный элемент

$$\langle \beta(p_F)^{\text{out}} | J_{\lambda}^{Aa} | \alpha(p_I)^{\text{in}} \rangle$$

получается следующим образом<sup>1)</sup>. Сначала рассмотрим полный набор неприводимых, или скелетных, диаграмм



Фиг. 2. Различные способы вставок собственной вершины  $J_{\lambda}^A$ , обозначенной жирной точкой.

Собственную вершину можно вставить:  $a$  — во внутреннюю линию,  $b$  — в конец внешней пионной линии,  $v$  — в середине внешней линии.

для этого матричного элемента. Затем произведем ряд вставок в неприводимые диаграммы. Каждую свободную функцию распространения заменим перенормированной, каждую затравочную вершину, соответствующую сильному взаимодействию, — перенормированной собственной вершиной, а каждую затравочную вершину, соответствующую току  $J_{\lambda}^A$ , — перенормированной

<sup>1)</sup> Напомним некоторые определения. *Скелетной* диаграммой называют диаграмму, которая получается, если заменить все вершины затравочными вершинами и убрать все собственно-энергетические части функций распространения, оставляя лишь свободные функции распространения. Скелетную диаграмму называют также *неприводимой*. *Собственная* вершина — это вершинная диаграмма, которую нельзя разбить на две несвязанные диаграммы, разорвав только одну внутреннюю линию.



собственной вершиной,  $J_\lambda^A$ ). Полученные таким образом диаграммы можно разделить на три типа в соответствии с тем, куда вставлена собственная вершина  $J_\lambda^A$ : а) собственная вершина  $J_\lambda^A$  вставлена во *внутреннюю* пионную линию (фиг. 2, а); б) собственная вершина  $J_\lambda^A$  вставлена в конец *внешней* пионной линии (фиг. 2, б); в) собственная вершина  $J_\lambda^A$  вставлена в *середицу внешней* линии (фиг. 2, в).

В соответствии с этим разделением можно написать

$$\begin{aligned} \langle \beta(p_F)^{\text{out}} | k_\lambda J_\lambda^{Aa} | \alpha(p_I)^{\text{in}} \rangle = & \langle \beta(p_F)^{\text{out}} | k_\lambda J_\lambda^{Aa} | \alpha(p_I)^{\text{in}} \rangle^{\text{внут}} + \\ & + \langle \beta(p_F)^{\text{out}} | k_\lambda J_\lambda^{Aa} | \alpha(p_I)^{\text{in}} \rangle^{\text{пион}} + \\ & + \langle \beta(p_F)^{\text{out}} | k_\lambda J_\lambda^{Aa} | \alpha(p_I)^{\text{in}} \rangle^{\text{внеш}}. \quad (12) \end{aligned}$$

Проанализируем теперь по очереди каждое из слагаемых, входящих в (12).

а) Сначала рассмотрим случай, когда собственная вершина  $J_\lambda^A$  вставлена во внутреннюю линию. Каждая диаграмма, дающая вклад в матричный элемент

$$\langle \beta(p_F)^{\text{out}} | J_\lambda^A | \alpha(p_I)^{\text{in}} \rangle^{\text{внут}},$$

соответствует диаграмме для  $\langle \beta^{\text{out}} | \alpha^{\text{in}} \rangle$ , но имеет дополнительную внутреннюю функцию распространения. Предположение об отсутствии сингулярностей в матричном элементе  $\langle \beta^{\text{out}} | \alpha^{\text{in}} \rangle$  означает, что либо все внутренние импульсы лежат вне массовой поверхности, либо по этим импульсам проводится интегрирование. Таким образом, дополнительная функция распространения не может привести к неограниченному возрастанию мат-

1) Заметим, что основная часть члена, соответствующая индуцированной псевдоскалярной связи, проистекает из тех диаграмм, которые дают однопионный полюсный член в теории дисперсионных соотношений. Эти диаграммы не являются собственными, если их рассматривать как вершины типа барион  $-J_\lambda^A$ , и потому не входят в число собственных барионных вершин  $J_\lambda^A$ .

ричного элемента при  $k \rightarrow 0$ , и, следовательно, величина

$$\langle \beta(p_F)^{\text{out}} | k_\lambda J_\lambda^A | \alpha(p_I)^{\text{in}} \rangle_{\text{внут}}$$

имеет порядок  $k^1$ ).

б) Сумма вкладов всех диаграмм, на которых собственная вершина  $J_\lambda^A$  вставлена в конец внешней пионной линии, пропорциональна

$$\langle \beta(p_F)^{\text{out}} | J_\pi^c | \alpha(p_I)^{\text{in}} \rangle \frac{1}{k^2 + M_\pi^2} \langle \pi^c | J_\lambda^{Aa} | 0 \rangle. \quad (13)$$

Вычисляя  $\langle \pi^c | J_\lambda^{Aa} | 0 \rangle$  с помощью соотношения (4), получаем следующий результат:

$$\begin{aligned} \langle \beta(p_E)^{\text{out}} | k_\lambda J_\lambda^{Aa} | \alpha(p_I)^{\text{in}} \rangle_{\text{пион}} &= \\ &= - \frac{k^2}{k^2 + M_\pi^2} \frac{2M_N g_A^N(0)}{g_r^{\pi N}(0)} \langle \beta(p_F)^{\text{out}} | J_\pi^a | \alpha(p_I)^{\text{in}} \rangle. \end{aligned} \quad (14)$$

Это выражение порядка  $k^2$ , и им можно пренебречь<sup>2)</sup>.

1) Мы, разумеется, предполагаем, что ни одна из собственных вершин  $J_\lambda^A$  не имеет сингулярностей при  $k \rightarrow 0$ .

2) Эти диаграммы дают основной вклад в член, соответствующий индуцированной псевдоскалярной связи. Относительно них можно сформулировать утверждение, более сильное, чем то, что их вклад порядка  $k^2$ . Заметим, что правую часть соотношения (10) можно записать в виде

$$\frac{2M_N g_A^N(0)}{g_r^{\pi N}(0)} \left( 1 - \frac{k^2}{k^2 + M_\pi^2} \right) \langle \beta(p_F)^{\text{out}} | J_\pi^a | \alpha(p_I)^{\text{in}} \rangle.$$

Член, пропорциональный  $k^2/(k^2 + M_\pi^2)$ , в точности сокращается с вкладом (14) диаграмм, на которых собственная вершина  $J_\lambda^A$  вставлена в конец внешней пионной линии. Далее, величина  $k^2/(k^2 + M_\pi^2)$  обладает следующим свойством:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0} \lim_{M_\pi^2 \rightarrow 0} \frac{k^2}{k^2 + M_\pi^2} &= 1, \\ \lim_{M_\pi^2 \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k^2}{k^2 + M_\pi^2} &= 0, \end{aligned}$$

в) Рассмотрим теперь диаграммы, на которых собственная вершина  $J_\lambda^A$  вставлена в середину внешней линии (фиг. 2, в). (Мы ограничимся внешними линиями, соответствующими частицам из октетов псевдоскалярных мезонов или барионов). Эти диаграммы можно разбить на два типа в соответствии с тем, изменяется или не изменяется масса внешней частицы в результате вставки собственной вершины  $J_\lambda^A$  в линию, соответствующую этой частице<sup>1)</sup>. Масса частицы изменяется лишь тогда, когда вершина  $J_\lambda^A$  соединяет линию внешней  $\Sigma$ -частицы с линией  $\Lambda$ -частицы или линию внешней  $\Lambda$ -частицы с линией  $\Sigma$ -частицы. Обе эти возможности дают вклад в матричный элемент

$$\langle \beta(p_F)^{\text{out}} | k_\lambda J_\lambda^{Aa} | \alpha(p_I)^{\text{in}} \rangle^{\text{внеш}}$$

порядка  $k$ , так как функция распространения, соответствующая внутренней линии, выходящей из собственной вершины  $J_\lambda^A$ , ведет себя как  $(M_\Sigma^2 - M_\Lambda^2)^{-1}$  при  $k \rightarrow 0$  и потому несингулярна. Наконец, мы покажем, что диаграммы, на которых собственная вершина  $J_\lambda^A$  вставлена

в то время как предельные значения слагаемых в соотношении (12), отмеченных индексами „внут“ и „внеш“, не зависят от порядка предельных переходов:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0} \lim_{M_\pi^2 \rightarrow 0} \langle \beta(p_F)^{\text{out}} | k_\lambda J_\lambda^{Aa} | \alpha(p_I)^{\text{in}} \rangle^{\text{внут, внеш}} = \\ = \lim_{M_\pi^2 \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} \langle \beta(p_F)^{\text{out}} | k_\lambda J_\lambda^{Aa} | \alpha(p_I)^{\text{in}} \rangle^{\text{внут, внеш}}. \end{aligned}$$

Следовательно, взаимное сокращение членов, пропорциональных  $k^2 / (k^2 + M_\pi^2)$ , означает, что предел условий самосогласованности (24) при  $M_\pi^2 \rightarrow 0$  совпадает с условиями самосогласованности, которые получились бы в теории, где с самого начала масса пиона положена равной нулю. Отметим, что в силу соотношения (4) аксиально-векторный ток в такой теории сохранялся бы точно.

<sup>1)</sup> Мы пренебрегаем электромагнитным взаимодействием, поэтому все частицы внутри одного и того же изотопического мультиплетта имеют равные массы.

в середину внешней линии и не меняет массы соответствующей частицы, дают вклад порядка  $k^{-1}$ . Вставка вершины  $J_\lambda^A$  в линию псевдоскалярного мезона запрещена законом сохранения четности; вставка вершины  $J_\lambda^A$  в линию  $\Lambda$ -частицы запрещена законом сохранения изоспина. Таким образом, необходимо рассмотреть вставки вершины  $J_\lambda^A$  только в линии  $N$ -,  $\Sigma$ - и  $\Xi$ -частиц. Вклад, соответствующий вставке вершины  $J_\lambda^A$  в линию бариона  $B$  в конечном состоянии с 4-импульсом  $p_B$ , равен

$$\left(\frac{M_B}{p_{B0}}\right)^{1/2} \bar{u}_B(p_B) g_A^B \gamma_\lambda \gamma_5 t^{Ba} \frac{1}{\hat{p}_B - \bar{k} - iM_B} \mathfrak{M}. \quad (15)$$

где  $\mathfrak{M}$  — матричный элемент процесса  $\alpha \rightarrow \beta$  с виртуальным барионом  $B$  в конечном состоянии. Так как  $p_B^2 = -M_B^2$ , функцию распространения можно записать в виде

$$\frac{1}{\hat{p}_B - \bar{k} - iM_B} = \frac{\hat{p}_B - \bar{k} + iM_B}{-2p_B \cdot k + k^2}, \quad (16)$$

откуда следует, что мы действительно имеем сингулярность при  $k \rightarrow 0$ . В низшем порядке по  $k$  при вычислении  $\mathfrak{M}$  можно положить  $k$  равным нулю и в выражении (16) оставить только член порядка  $k^{-1}$ . При этом вклад вставки принимает вид

$$\left(\frac{M_B}{p_{B0}}\right)^{1/2} \bar{u}_B(p_B) g_A^B \gamma_\lambda \gamma_5 t^{Ba} \frac{\hat{p}_B + iM_B}{-2p_B \cdot k} \mathfrak{M}(k=0). \quad (17)$$

Вычисление  $\mathfrak{M}$  при  $k=0$  означает, что соответствующий барион  $B$  в конечном состоянии находится на массовой поверхности. Далее, величина  $\hat{p}_B + iM_B$  представляет собой положительно-частотный проекционный оператор для бариона  $B$ , обладающий свойством

$$(\hat{p}_B + iM_B) p_B = (\hat{p}_B + iM_B) iM_B. \quad (18)$$

Обозначим через  $\mathfrak{M}^c$  матричный элемент, который получается при перенесении всех импульсов  $\hat{p}_B$  в  $\mathfrak{M}(k=0)$

налево и замене их на  $iM_B$ . Тогда вклад вставки принимает следующий окончательный вид:

$$\left(\frac{M_B}{\rho_{B0}}\right)^{1/2} \bar{u}_B(p_B) g_A^B \gamma_\lambda \gamma_5 t^{Ba} \frac{\beta_B + iM_B}{-2\rho_B \cdot k} \mathfrak{M}^c. \quad (19)$$

Решающим моментом здесь является то, что матричный элемент

$$\langle \beta^{\text{out}} | \alpha^{\text{in}} \rangle = \delta_{\beta\alpha} + (2\pi)^4 i \delta(p_F - p_I) \mathfrak{M}(\alpha \rightarrow \beta), \quad (20a)$$

$$-i\mathfrak{M}(\alpha \rightarrow \beta) = \left(\frac{M_B}{\rho_{B0}}\right)^{1/2} \bar{u}_B(p_B) \mathfrak{M}^c \quad (20b)$$

описывает процесс сильного взаимодействия  $\alpha \rightarrow \beta$  в случае, когда все частицы находятся на массовой поверхности. Таким образом, величина  $\mathfrak{M}^c$  может быть измерена экспериментально. С помощью аналогичных аргументов можно показать, что вставка вершины  $J_\lambda^A$  в линию начального бариона дает вклад

$$\left(\frac{M_B}{\rho_{B0}}\right)^{1/2} \mathfrak{M}^c \frac{\beta_B + iM_B}{2\rho_B \cdot k} g_A^B \gamma_\lambda \gamma_5 t^{Ba} u_B(p_B), \quad (21)$$

где

$$-i\mathfrak{M}(\alpha \rightarrow \beta) = \left(\frac{M_B}{\rho_{B0}}\right)^{1/2} \mathfrak{M}^c u_B(p_B). \quad (22)$$

Итак, мы проанализировали поведение каждого из членов в выражении (12). Суммируем полученные результаты:

$$\begin{aligned} & \frac{2M_N g_A^N(0)}{g_r^{\pi N}(0)} \langle \beta(p_F)^{\text{out}} | J_\pi^a | \alpha(p_I)^{\text{in}} \rangle + O(k^2) = \\ & = O(k) + O(k^2) + \sum_{\text{Внешние}} [\text{Вставки в } -i\mathfrak{M}(\alpha \rightarrow \beta)] + O(k). \quad (23) \\ & \text{линии} \end{aligned}$$

Три слагаемых в правой части соотношения (23) относятся соответственно к вставкам вершины  $J_\lambda^A$  во внутренние линии, в концы внешних пионных линий и в середины внешних линий. Умножая соотношение (23) на  $g_r^{\pi N}(0)/[2M_N g_A^N(0)]$  и используя равенство (9), чтобы

выразить отношения  $g_A^\Sigma(0)/g_A^N(0)$  и  $g_A^\Xi(0)/g_A^N(0)$  через константы связи сильных взаимодействий, получаем следующий набор правил:

$$\langle \beta(p_F)^{\text{out}} | J_\pi^a | \alpha(p_I)^{\text{in}} \rangle = \\ = O(k) + \sum_{\text{Внешние}} [\text{Вставки в } -i\mathcal{M}(\alpha \rightarrow \beta)]. \quad (24)$$

линии

Рассмотрим вклады различных вставок. Вклад вставок во внешние линии  $\pi$ -,  $K$ -,  $\eta$ - и  $\Lambda$ -частиц равен нулю. Вклады вставок во внешние линии  $N$ -,  $\Sigma$ - и  $\Xi$ -частиц, обозначенных буквой  $B$ , имеют вид:

*в конечном состоянии*

$$\bar{u}_B(p_B) \rightarrow \bar{u}_B(p_B) \left[ \frac{g_r^{\pi B}(0)}{2M_B} k \gamma_5 t^{Ba} \right] \frac{\hat{p}_B + iM_B}{-2p_B \cdot k}, \quad (25a)$$

*в начальном состоянии*

$$u_B(p_B) \rightarrow \frac{\hat{p}_B + iM_B}{2p_B \cdot k} \left[ \frac{g_r^{\pi B}(0)}{2M_B} k \gamma_5 t^{Ba} \right] u_B(p_B). \quad (25b)$$

Эти правила являются обобщением на произвольные процессы условий самосогласованности, полученных в [1]. Интересно отметить, что точно такие же правила получились бы в теории, в которой эффективная пион-барионная связь для пионов с 4-импульсом, близким к нулю, была бы псевдовекторной, а не псевдоскалярной. Эта тесная связь между гипотезой о частичном сохранении и теориями с градиентной связью впервые была замечена Фейнманом [2]<sup>1)</sup>.

Для иллюстрации полученных правил рассмотрим частный случай. Пусть  $\alpha$  обозначает нуклон с 4-импульсом  $p_1$  и произвольное число пионов; аналогично  $\beta$  — нуклон с 4-импульсом  $p_2$  и произвольное число пионов. Тогда можно написать

$$\mathcal{M}(\alpha \rightarrow \beta) = \left( \frac{M_N^2}{p_{10} p_{20}} \right)^{1/2} \bar{u}_N(p_2) \mathcal{M} u_N(p_1). \quad (26)$$

<sup>1)</sup> Я очень признателен доктору Вельтману (M. Veltman) за то, что он обратил мое внимание на эту работу и подчеркнул связь между гипотезой о частичном сохранении и градиентной связью пионов.

В соответствии с полученными выше правилами

$$\begin{aligned} \langle \beta(p_F)^{\text{out}} | J_\pi^a | \alpha(p_I)^{\text{in}} \rangle = \\ = O(k) - \left( \frac{M_N^2}{p_{10} p_{20}} \right)^{1/2} i \bar{u}_N(p_2) \left\{ \left[ \frac{g_r^{\pi N}(0)}{2M_N} \bar{k} \gamma_5 \tau^a \right] \times \right. \\ \left. \times \left[ \frac{\hat{p}_2 + iM_N}{-2p_2 \cdot k} \right] \mathfrak{M} + \mathfrak{M} \left[ \frac{\hat{p}_1 + iM_N}{2p_1 \cdot k} \right] \left[ \frac{g_r^{\pi N}(0)}{2M_N} \bar{k} \gamma_5 \tau^a \right] \right\} u(p_1). \quad (27) \end{aligned}$$

Легко видеть, что соотношение (27) эквивалентно формуле сохранения киральности, полученной Намбу и Лурье [3, 4] в теории, где масса пиона равна нулю и аксиально-векторный ток сохраняется точно (см. примечание на стр. 131). Намбу и Шраунер [4, 5] применили соотношение (27) к случаю, когда  $\alpha, \beta = \pi + N$ , и получили результаты, не противоречащие эксперименту. Более простой случай  $\alpha = N, \beta = \pi^b + N$  был изучен в работе [1]. В этом случае матричный элемент  $\mathfrak{M}$  просто равен пион-нуклонной вершине  $ig_r \tau^b \gamma_5$ , а

$$\langle (\pi^b N)^{\text{out}} | J_\pi^a | N^{\text{in}} \rangle$$

представляет собой амплитуду пион-нуклонного рассеяния. Вводя обычные переменные для энергии и переданного импульса в пион-нуклонном рассеянии  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{v}_B$ ,

$$p_1 \cdot k = -M_N(\mathbf{v} - \mathbf{v}_B), \quad p_2 \cdot k = -M_N(\mathbf{v} + \mathbf{v}_B), \quad (28)$$

из равенства (27) получаем

$$\begin{aligned} \langle (\pi^b N)^{\text{out}} | J_\pi^a | N^{\text{in}} \rangle = \left( \frac{M_N^2}{p_{10} p_{20}} \right)^{1/2} K^{NN\pi}(0) \bar{u}_N(p_2) \times \\ \times \left\{ \frac{g_r^2}{M_N} \delta_{ab} - i\bar{k} \frac{g_r^2}{2M_N} \left[ \frac{\tau^b \tau^a}{\mathbf{v}_B - \mathbf{v}} - \frac{\tau^a \tau^b}{\mathbf{v}_B + \mathbf{v}} \right] \right\} u_N(p_1). \quad (29) \end{aligned}$$

Член, содержащий  $(g_r^2/M_N)\delta_{ab}$ , приводит к условию самосогласованности

$$\frac{A^{\pi N(+)}(\mathbf{v}=0, \mathbf{v}_B=0, k^2=0)}{K^{NN\pi}(0)} = \frac{g_r^2}{M_N}, \quad (30)$$

которое было подробно рассмотрено в работе [1].

## § 2. Учет электромагнитного взаимодействия

Интересно выяснить, как изменяются полученные в § 1 правила при учете электромагнитных взаимодействий. Поскольку при наличии электромагнитного взаимодействия изоспин перестает быть хорошим квантовым числом, мы будем рассматривать только поля и токи, обладающие определенными зарядами. Мы заменим три соотношения (4) следующими:

$$\partial_\lambda J_\lambda^{A(\pm)} = C\varphi_\pi^{(\pm)}, \quad \partial_\lambda J_\lambda^{A(0)} = \sqrt{2} C \varphi_\pi^{(0)}, \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} J_\lambda^{A(\pm)} &= \frac{1}{2} (J_\lambda^{A1} \mp iJ_\lambda^{A2}), & J_\lambda^{A(0)} &= J_\lambda^{A3}, \\ \varphi_\pi^{(\pm)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_\pi^1 \mp i\varphi_\pi^2), & \varphi_\pi^{(0)} &= \varphi_\pi^3, \\ C &= - \frac{i\sqrt{2} M_N M_\pi^2 g_A^N(0)}{g_\tau K^{NN\pi}(0)} \end{aligned} \quad (32)$$

[индекс  $(\pm)$  относится к уничтожаемому заряду]. В приложении показано, что в первом порядке по электрическому заряду  $e$  ( $e > 0$ ) уравнения (31) в присутствии электромагнитных взаимодействий изменяются следующим образом:

$$(\partial_\lambda \mp ieA_\lambda) J_\lambda^{A(\pm)} = C\varphi_\pi^{(\pm)}, \quad \partial_\lambda J_\lambda^{A(0)} = \sqrt{2} C\varphi_\pi^{(0)}. \quad (33)$$

Как обычно,  $A_\lambda$  обозначает электромагнитное поле. Поскольку электромагнитные поправки к массам и константам связи имеют второй порядок по  $e$ , то при вычислении  $C$  можно использовать массу как заряженного, так и нейтрального пиона.

Уравнения (33) позволяют сформулировать простые правила для вычисления (вплоть до членов, линейных по 4-импульсу дополнительного пиона) матричных элементов

$$\langle \beta^{\text{out}} | J_\pi^{(\pm 0)} | (\alpha\gamma)^{\text{in}} \rangle,$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — произвольные системы сильно взаимодействующих частиц, а фотон  $\gamma$  в начальном состоянии может быть как реальным, так и виртуальным. Членам  $\partial_\lambda J_\lambda^{A(\pm 0)}$  в уравнениях (33) отвечают вставки во внешние



барионные линии диаграмм матричного элемента  $-i\mathcal{M}(\alpha\gamma \rightarrow \beta)$ , вклад которых дается выражениями (25), где следует изменить изоспиновые множители, поскольку мы используем теперь поля и токи с определенным зарядом. Кроме того, мы должны прибавить к  $\langle \beta^{\text{out}} | J_{\pi}^{(\pm)} | (\alpha\gamma)^{\text{in}} \rangle$  выражение

$$\pm \frac{eg_r^{\pi N}(0)}{\sqrt{2} M_{Ng_A}^N(0)} \langle \beta^{\text{out}} | A_{\lambda} J_{\lambda}^{A(\pm)} | (\alpha\gamma)^{\text{in}} \rangle, \quad (34)$$

получающееся из члена  $A_{\lambda} J_{\lambda}^{A(\pm 0)}$  в соотношении (33). Используя стандартные редукционные формулы, мы получаем в низшем порядке

$$\begin{aligned} \langle \beta^{\text{out}} | A_{\lambda}(y) J_{\lambda}^{A(\pm)}(y) | (\alpha\gamma)^{\text{in}} \rangle = \\ = \frac{e^{ik' \cdot y}}{(2k'_0)^{1/2}} \langle \beta^{\text{out}} | \varepsilon_{\lambda} J_{\lambda}^{A(\pm)}(y) | \alpha^{\text{in}} \rangle, \end{aligned} \quad (35)$$

где  $k'$  есть 4-импульс, а  $\varepsilon_{\lambda}$  — 4-вектор поляризации фотона  $\gamma$ . Формулы (33) — (35) позволяют вычислить матричный элемент испускания пиона с нулевой энергией и нулевой массой в реакциях фото- и электророждения. Они эквивалентны результатам, полученным в работе Намбу и Шраунера [4], в которой рассмотрено приложение этих результатов к реакции  $e + N = e + N + \pi$ .

### Приложение

Мы рассмотрим здесь в общем виде вопрос о том, как изменяются уравнения типа

$$\partial_{\lambda} J_{\lambda} = D \quad (\text{П.1})$$

в присутствии электромагнитных взаимодействий. Сформулируем результат в виде теоремы<sup>1)</sup>.

*Теорема.* Пусть  $\psi_j$  — неперенормированное поле частицы с зарядом  $e_j$ . Рассмотрим теорию сильных взаимодействий с лагранжианом  $\mathcal{L}[\{\psi\}, \{\partial_{\sigma}\psi\}]$ , где  $\{\psi\}$  — набор  $\psi_j$ . Пусть  $J_{\lambda}$  — ток с определенными зарядовыми трансфор-

<sup>1)</sup> Я признателен проф. С. Коулману за помощь в доказательстве этой теоремы.

мационными свойствами (с зарядом  $e_j$ ), полученный с помощью инфинитезимального калибровочного преобразования полей следующим образом [6]:

$$\begin{aligned}\psi_j &\rightarrow \psi'_j = \psi_j + \Lambda F_j [\{\psi\}], \\ \mathfrak{L} &\rightarrow \mathfrak{L}' = \mathfrak{L} [\{\psi'\}, \{\partial_\sigma \psi'\}], \\ J_\lambda &= \left[ \frac{\delta \mathfrak{L}'}{\delta (\partial_\lambda \Lambda)} \right]_{\Lambda=0}.\end{aligned}\quad (\text{П.2})$$

Тогда:

1) В отсутствие электромагнитных взаимодействий ток  $J_\lambda$  удовлетворяет уравнению

$$\partial_\lambda J_\lambda = D, \quad (\text{П.3})$$

где  $J_\lambda$  и  $D$  — функции только от  $\psi_j$  и  $\partial_\sigma \psi_j$ :

$$J_\lambda = J_\lambda [\{\psi\}, \{\partial_\sigma \psi\}], \quad D = D [\{\psi\}, \{\partial_\sigma \psi\}]. \quad (\text{П.4})$$

2) Включение электромагнитного взаимодействия с минимальной электромагнитной связью изменяет уравнение (П.3) и (П.4) следующим образом:

$$(\partial_\lambda - ie_j A_\lambda) J_\lambda [\{\psi\}, \{\pi_\sigma\}] = D [\{\psi\}, \{\pi_\sigma\}], \quad (\text{П.5})$$

где через  $\pi_{j\sigma}$  обозначена величина  $(\partial_\sigma - ie_j A_\sigma) \psi_j$ .

*Доказательство.* Мы будем рассуждать так, как если бы поля были классическими, игнорируя вопросы о коммутации и антикоммутации. Сперва рассмотрим случай, когда электромагнитное взаимодействие отсутствует. Уравнение движения Лагранжа для поля  $\psi_j$  имеет вид

$$\frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta \psi_j} = \partial_\sigma \frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta (\partial_\sigma \psi_j)}. \quad (\text{П.6})$$

При калибровочном преобразовании

$$\psi_j \rightarrow \psi'_j = \psi_j + \Lambda F_j [\{\psi\}] \quad (\text{П.7})$$

производные  $\partial_\sigma \psi_j$  и лагранжиан  $\mathfrak{L}$  изменяются следующим образом:

$$\begin{aligned}\partial_\sigma \psi_j &\rightarrow \partial_\sigma \psi'_j = \partial_\sigma \psi_j + (\partial_\sigma \Lambda) F_j + \Lambda (\partial_\sigma F_j), \\ \mathfrak{L} \rightarrow \mathfrak{L}' &= \mathfrak{L} [\{\psi'\}, \{\partial_\sigma \psi'\}] = \\ &= \mathfrak{L} [\{\psi + \Lambda F\}, \{\partial_\sigma \psi + (\partial_\sigma \Lambda) F + \Lambda (\partial_\sigma F)\}].\end{aligned}\quad (\text{П.8})$$

Из соотношения (П.8) мы находим первые вариационные производные

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{Q}'}{\delta \Lambda} &= \sum_j \left[ \frac{\delta \mathcal{Q}'}{\delta \psi_j'} F_j + \frac{\delta \mathcal{Q}'}{\delta (\partial_\sigma \psi_j')} \partial_\sigma F_j \right], \\ \frac{\delta \mathcal{Q}'}{\delta (\partial_\lambda \Lambda)} &= \sum_j \frac{\delta \mathcal{Q}'}{\delta (\partial_\lambda \psi_j')} F_j. \end{aligned} \quad (\text{П.9})$$

Из соотношения (П.8) следует также, что

$$\left[ \frac{\delta \mathcal{Q}'}{\delta \psi_j'} \right]_{\Lambda=0} = \frac{\delta \mathcal{Q}}{\delta \psi_j}, \quad \left[ \frac{\delta \mathcal{Q}'}{\delta (\partial_\lambda \psi_j')} \right]_{\Lambda=0} = \frac{\delta \mathcal{Q}}{\delta (\partial_\lambda \psi_j)}. \quad (\text{П.10})$$

Из соотношений (П.6), (П.9) и (П.10) вытекает, что

$$\partial_\lambda \left[ \frac{\delta \mathcal{Q}'}{\delta (\partial_\lambda \Lambda)} \right]_{\Lambda=0} = \left[ \frac{\delta \mathcal{Q}'}{\delta \Lambda} \right]_{\Lambda=0}. \quad (\text{П.11})$$

Определим величины

$$J_\lambda \equiv \left[ \frac{\delta \mathcal{Q}'}{\delta (\partial_\lambda \Lambda)} \right]_{\Lambda=0}, \quad D \equiv \left[ \frac{\delta \mathcal{Q}'}{\delta \Lambda} \right]_{\Lambda=0}, \quad (\text{П.12})$$

которые, очевидно, являются функциями только от  $\{\psi\}$  и  $\{\partial_\sigma \psi\}$ .

Включим теперь электромагнитное взаимодействие. В соответствии с гипотезой о минимальной электромагнитной связи лагранжиан при этом изменится следующим образом:

$$\mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q}^{EM} = \mathcal{Q}[\{\psi\}, \{\pi_\sigma\}] + \mathcal{Q}^{EM0}, \quad (\text{П.13})$$

где  $\mathcal{Q}^{EM0}$  — лагранжиан свободного электромагнитного поля  $A_\sigma$ , а  $\pi_{j\sigma}$  равно  $(\partial_\sigma - ie_j A_\sigma) \psi_j$ . Новое уравнение Лагранжа для поля  $\psi_j$  имеет вид

$$\partial_\sigma \left( \frac{\delta \mathcal{Q}^{EM}}{\delta (\partial_\sigma \psi_j)} \right) = \frac{\delta \mathcal{Q}^{EM}}{\delta \psi_j}. \quad (\text{П.14})$$

Будем теперь при взятии вариационных производных от  $\mathcal{Q}^{EM}$  считать независимыми переменными  $\psi_j$  и  $\pi_{j\sigma}$ , а не  $\psi_j$  и  $\partial_\sigma \psi_j$ . Тогда уравнение Лагранжа примет вид

$$\partial_\sigma \frac{\delta \mathcal{Q}^{EM}}{\delta \pi_{j\sigma}} = \frac{\delta \mathcal{Q}^{EM}}{\delta \psi_j} - ie_j A_\sigma \frac{\delta \mathcal{Q}^{EM}}{\delta \pi_{j\sigma}}. \quad (\text{П.15})$$

Сделаем далее калибровочное преобразование  $\psi_j \rightarrow \psi'_j = \psi_j + \Lambda F_j$ . Величина  $\pi_{j\sigma}$  и лагранжиан  $\mathcal{L}^{EM}$  преобразуются по формулам

$$\begin{aligned} \pi_{j\sigma} &\rightarrow \pi'_{j\sigma} = \pi_{j\sigma} - ie_j A_\sigma \Lambda F_j + (\partial_\sigma \Lambda) F_j + \Lambda (\partial_\sigma F_j), \\ \mathcal{L}^{EM} &\rightarrow \mathcal{L}^{EM'} = \mathcal{L}[\{\psi'\}, \{\pi'_{j\sigma}\}] + \mathcal{L}^{EM0} = \\ &= \mathcal{L}[\{\psi + \Lambda F\}, \{\pi_{j\sigma} - ie_j A_\sigma \Lambda F + (\partial_\sigma \Lambda) F + \Lambda (\partial_\sigma F)\}] + \mathcal{L}^{EM0}. \end{aligned} \quad (\text{П.16})$$

Первые вариационные производные равны

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{L}^{EM'}}{\delta \Lambda} &= \sum_j \left[ \frac{\delta \mathcal{L}^{EM'}}{\delta \psi'_j} F_j + \frac{\delta \mathcal{L}^{EM'}}{\delta \pi'_{j\sigma}} (\partial_\sigma F_j - ie_j A_\sigma F_j) \right], \\ \frac{\delta \mathcal{L}^{EM'}}{\delta (\partial_\lambda \Lambda)} &= \sum_j \left[ \frac{\delta \mathcal{L}^{EM'}}{\delta \pi'_{j\lambda}} F_j \right]. \end{aligned} \quad (\text{П.17})$$

Используя уравнение Лагранжа (П.15), получаем

$$\partial_\lambda \left[ \frac{\delta \mathcal{L}^{EM'}}{\delta (\partial_\lambda \Lambda)} \right]_{\Lambda=0} = \left[ \frac{\delta \mathcal{L}^{EM'}}{\delta \Lambda} \right]_{\Lambda=0}. \quad (\text{П.18})$$

Воспользуемся тем, что ток  $J_\lambda$  обладает определенными зарядовыми трансформационными свойствами. Поскольку  $\delta \mathcal{L} / \delta (\partial_\lambda \psi_j)$  преобразуется как поле с зарядом  $-e_j$ , из соотношений (П.9) и (П.12) следует, что величина  $F_j$  должна преобразовываться как поле с зарядом  $e_j + e_j$ . Таким образом,

$$F_j [\bar{\psi}_1 e^{ie_1 t}, \psi_2 e^{ie_2 t}, \dots] = \exp [i(e_j + e_j)t] F_j [\psi_1, \psi_2, \dots]. \quad (\text{П.19})$$

Беря производную по  $t$ , получаем тождество

$$\sum_l \frac{\delta F_j}{\delta \psi_l} e_l \psi_l = (e_j + e_j) F_j. \quad (\text{П.20})$$

Следовательно, используя равенство

$$\partial_\sigma F_j = \sum_l (\delta F_j / \delta \psi_l) \partial_\sigma \psi_l,$$

мы получаем

$$\partial_\sigma F_j - i(e_j + e_j) A_\sigma F_j = \sum_l \frac{\delta E_j}{\delta \psi_l} (\partial_\sigma - ie_l A_\sigma) \psi_l = \sum_l \frac{\delta F_j}{\delta \psi_l} \pi_{l\sigma}. \quad (\text{П.21})$$

Другими словами, величина  $\partial_\sigma F_j - i(e_j + e_j) A_\sigma F_j$  представляет собой такую же функцию от переменных  $\{\psi\}$ ,  $\{\pi_\sigma\}$ , как и величина  $\partial_\sigma F_j$  от переменных  $\{\psi\}$ ,  $\{\partial_\sigma \psi\}$ . Отсюда, сравнивая соотношения (П.9) и (П.17), нетрудно увидеть, что

$$\left[ \frac{\delta \mathcal{L}^{EM'}}{\delta (\partial_\lambda \Lambda)} \right]_{\Lambda=0} = J_\lambda [\{\psi\}, \{\pi_\sigma\}],$$

$$\sum_j \left\{ \left[ \frac{\delta \mathcal{L}^{EM'}}{\delta \psi'_j} \right]_{\Lambda=0} F_j + \left[ \frac{\delta \mathcal{L}^{EM'}}{\delta \pi'_{j\sigma}} \right]_{\Lambda=0} \times \right. \\ \left. \times [\partial_\sigma F_j - i(e_j + e_j) A_\sigma F_j] \right\} = D [\{\psi\}, \{\pi_\sigma\}]. \quad (\text{П.22})$$

Таким образом, равенство (П.18) можно переписать в виде

$$(\partial_\lambda - ie_j A_\lambda) J_\lambda [\{\psi\}, \{\pi_\sigma\}] = D [\{\psi\}, \{\pi_\sigma\}], \quad (\text{П.23})$$

что и завершает доказательство.

Уравнение (П.23) содержит только перенормированные величины и является *точным*. В случае гипотезы о частичном сохранении, рассмотренной в тексте,  $D = C'' \varphi_\pi$ , где индекс у величины  $C''$  означает, что она перенормирована. Нетрудно перейти от уравнения (П.23) к уравнению (33) текста, которое включает только перенормированные величины, если учитывать электромагнитное взаимодействие в низшем порядке по константе связи  $e$ . Все эффекты перенормировки за счет электромагнитных взаимодействий имеют второй порядок по  $e$ , и ими можно пренебречь. Все эффекты перенормировки за счет сильных взаимодействий содержатся в отношении  $C/C''$ , где  $C$  — перенормированная константа, входящая в соотношение (32) текста.

### Литература

1. Adler S. L., Phys. Rev., 137, B1022 (1965).
2. Feynman R. P., Proceedings of the Aix-en-Provence International Conference on Elementary Particles (Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay, Seine et Oise), Vol. 2, 1961, p. 210.
3. Nambu Y., Lurié D., Phys. Rev., 125, 1429 (1962).
4. Nambu Y., Shrauner E., Phys. Rev., 128, 862 (1962).
5. Shrauner E., Phys. Rev., 131, 1847 (1963).
6. Gell-Mann M., Lévy M., Nuovo Cimento, 16, 705 (1960).

КОММУТАТОРЫ ТОКОВ В ТЕОРИИ  
МНОЖЕСТВЕННОГО РОЖДЕНИЯ ПИОНОВ

С. Вайнберг\*

S. Weinberg, Phys. Rev. Letters, 16, 879 (1966)

Несколько лет назад Намбу [1] указал, что гипотеза о частичном сохранении аксиально-векторного тока приводит к формуле, выражающей матричный элемент любого процесса с испусканием дополнительного мягкого пиона через матричный элемент исходного процесса. Эта формула становится точной в пределе равных нулю массы и энергии пиона. Затем Адлер [2] показал, что, добавляя мягкий пион к „процессу“  $\pi + N \rightarrow N$ , можно вывести условие самосогласованности для пион-нуклонного рассеяния. Позднее Вайсбергер [3] и Адлер [4] независимо получили формулу, связывающую матричный элемент рождения двух мягких пионов в „процессе“  $N \rightarrow N$  с перенормированной аксиально-векторной константой связи. (Обычно ее рассматривают как формулу, выражающую отношение  $g_A/g_V$  через амплитуды  $\pi N$ -рассеяния при низких энергиях или через дисперсионный интеграл от сечений  $\pi N$ -рассеяния, но в данном случае нам удобнее рассматривать ее как формулу, выражающую амплитуды рассеяния через величину  $g_A/g_V$ .) В этой статье мы покажем, что гипотеза о частичном сохранении вместе с коммутационными отношениями для токов позволяет вычислить матричный элемент испускания произвольного числа мягких пионов в любом процессе.

Точные результаты легче сформулировать, чем приближенные, поэтому мы ограничимся рассмотрением воображаемого мира, в котором пион имеет нулевую массу, а векторный и аксиально-векторный токи сохраняются:

$$\partial_\mu V_\alpha^\mu(x) = \partial_\mu A_\alpha^\mu(x) = 0. \quad (1)$$

(Здесь  $\alpha$  — изотопический индекс, пробегающий значения 1, 2, 3, а  $\mu$  — индекс, пробегающий значения 1, 2,

\* Department of Physics, University of California, Berkeley, California.

3, 0.) При этих предположениях, зная коммутационные соотношения токов, можно получить *точные* формулы для матричного элемента, соответствующего испусканию  $n$  пионов в произвольном процессе, когда энергии всех  $n$  пионов стремятся к нулю. В реальном случае эти же методы дают соответствующие результаты вне массовой поверхности.

Определим матричный элемент<sup>1)</sup> произвольного процесса  $i \rightarrow f$  с испусканием  $n$  аксиально-векторных шпурионов с импульсами  $q_1, \dots, q_n$ , изоспинами  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  и пространственно-временными индексами  $\mu_1, \dots, \mu_n$  и  $m$  пионов с импульсами  $k_1, \dots, k_m$  и изоспинами  $\beta_1, \dots, \beta_m$  с помощью равенства

$$(2\pi)^{-3n/2} (2k_1^0)^{-1/2} \dots (2k_m^0)^{-1/2} \times \\ \times M_{fi}^{\mu_1 \dots \mu_n} (q_1 \alpha_1, \dots, q_n \alpha_n; k_1 \beta_1, \dots, k_m \beta_m) \times \\ \times \delta^4(p_f - p_i + q_1 + \dots + q_n + k_1 + \dots + k_m) \equiv \\ \equiv \int d^4x_1 \dots d^4x_n \exp\{-iq_1 \cdot x_1 - \dots - iq_n \cdot x_n\} \times \\ \times \langle f, k_1 \beta_1, \dots, k_m \beta_m, \text{out} | T \{ A_{\alpha_1}^{\mu_1}(x_1), \dots, A_{\alpha_n}^{\mu_n}(x_n) \} | i, \text{in} \rangle. \quad (2)$$

(Предполагается, что состояния  $i$  и  $f$  не содержат дополнительных мягких пионов.) Диаграммы, дающие вклад в  $M$ , можно классифицировать в соответствии с числом однопионных полюсов по импульсам аксиально-векторных шпурионов  $q_1, \dots, q_n$ :

$$M_{fi}^{\mu_1 \dots \mu_n} (q_1 \alpha_1, \dots, q_n \alpha_n; k_1 \beta_1, \dots, k_m \beta_m) = \\ = N_{fi}^{\mu_1 \dots \mu_n} (q_1 \alpha_1, \dots, q_n \alpha_n; k_1 \beta_1, \dots, k_m \beta_m) - \\ - iF \frac{q_1^{\mu_1}}{q_1^2} N_{fi}^{\mu_2 \dots \mu_n} (q_2 \alpha_2, \dots, q_n \alpha_n; q_1 \beta_1, k_1 \beta_1, \dots, k_m \beta_m) + \\ + \text{Перестановки} - F^2 \frac{q_1^{\mu_1} q_2^{\mu_2}}{q_1^2 q_2^2} \times$$

<sup>1)</sup> Всюду, где не оговорено противное, мы используем те же метрику, обозначение дираковских матриц и т. д., как и в книге [5]. Исключение составляет использование матрицы  $\gamma_5$ , удовлетворяющей условию  $\gamma_5^2 = +1$ .

$$\begin{aligned} & \times N_{fi}^{\mu_3 \dots \mu_n}(q_3 \alpha_3, \dots, q_n \alpha_n; q_1 \alpha_1, q_2 \alpha_2, k_1 \beta_1, \dots, k_m \beta_m) + \\ & + \text{Перестановки} + \dots + (-iF)^n \frac{q_1^{\mu_1} q_2^{\mu_2} \dots q_m^{\mu_n}}{q_1^2 q_2^2 \dots q_n^2} \times \\ & \times M_{fi}(q_1 \alpha_1, \dots, q_n \alpha_n, k_1 \beta_1, \dots, k_m \beta_m). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $F$  — обычная инвариантная амплитуда пионного распада, причем однопионные полюсы соответствуют диаграммам, на которых вершина аксиально-векторного тока расположена в конце пионной линии. Матричные элементы  $N$  определяются как суммы вкладов остальных диаграмм, т. е. всех членов в  $M$ , которые не имеют однопионных полюсов. Величина  $M$  в последнем слагаемом в выражении (3) представляет собой матричный элемент процесса с испусканием  $m+n$  пионов.

Нетрудно обратить соотношение (3) и получить формулу, выражающую величины  $N$  через  $M$ . Как только эта проблема будет решена, нам будет достаточно рассмотреть результат лишь при  $m=0$

$$\begin{aligned} N_{fi}^{\mu_1 \dots \mu_n}(q_1 \alpha_1, \dots, q_n \alpha_n) &= M_{fi}^{\mu_1 \dots \mu_n}(q_1 \alpha_1, \dots, q_n \alpha_n) + \\ & + iF \frac{q_1^{\mu_1}}{q_1^2} M_{fi}^{\mu_2 \dots \mu_n}(q_2 \alpha_2, \dots, q_n \alpha_n; q_1 \alpha_1) + \\ & + \text{Перестановки} - F^2 \frac{q_1^{\mu_1} q_2^{\mu_2}}{q_1^2 q_2^2} M_{fi}^{\mu_3 \dots \mu_n}(q_3 \alpha_3, \dots, q_n \alpha_n; q_1 \alpha_1, q_2 \alpha_2) + \\ & + \text{Перестановки} + \dots + (iF)^n \frac{q_1^{\mu_1} q_2^{\mu_2} \dots q_n^{\mu_n}}{q_1^2 q_2^2 \dots q_n^2} \times \\ & \times M_{fi}(q_1 \alpha_1, \dots, q_n \alpha_n). \end{aligned} \quad (4)$$

Умножая на  $(iF)^{-n} q_{1\mu_1} \dots q_{n\mu_n}$ , мы получаем для матричного элемента процесса с испусканием пионов следующее выражение:

$$\begin{aligned} M_{fi}(q_1 \alpha_1, \dots, q_n \alpha_n) &= \\ & = G_{fi}(q_1 \alpha_1, \dots, q_n \alpha_n) + C_{fi}(q_1 \alpha_1, \dots, q_n \alpha_n), \end{aligned} \quad (5)$$



где

$$G_{fi}(q_1\alpha_1, \dots, q_n\alpha_n) \equiv \\ \equiv (iF)^{-n} q_{1\mu_1} \dots q_{n\mu_n} N_{fi}^{\mu_1 \dots \mu_n}(q_1\alpha_1, \dots, q_n\alpha_n), \quad (6)$$

$$C_{fi}(q_1\alpha_1, \dots, q_n\alpha_n) \equiv \\ \equiv -(iF)^{-n} q_{1\mu_1} \dots q_{n\mu_n} M_{fi}^{\mu_1 \dots \mu_n}(q_1\alpha_1, \dots, q_n\alpha_n) - \\ - (iF)^{-n+1} q_{2\mu_2} \dots q_{n\mu_n} M_{fi}^{\mu_2 \dots \mu_n}(q_2\alpha_2, \dots, q_n\alpha_n; q_1\alpha_1) + \\ + \text{Перестановки} - (iF)^{-n+2} q_{3\mu_3} \dots q_{n\mu_n} \times \\ \times M_{fi}^{\mu_3 \dots \mu_n}(q_3\alpha_3 \dots q_n\alpha_n; q_1\alpha_1, q_2\alpha_2) + \text{Перестановки} + \dots \\ \dots + (iF)^{-1} q_{n\mu_n} M_{fi}^{\mu_n}(q_n\alpha_n; q_1\alpha_1, \dots, q_{n-1}\alpha_{n-1}). \quad (7)$$

Теперь перейдем к пределу  $q \rightarrow 0$  (для всех  $q$  сразу). В этом пределе в сумму  $N^{\mu_1 \dots \mu_n}$ , не имеющую однопионных полюсов, основной вклад дают члены, соответствующие диаграммам, на которых вершины аксиального тока вставлены во внешние барионные линии, поскольку только они обладают  $n$  барионными полюсами. Вершинная функция, соответствующая испусканию аксиального шпуриона с нулевой энергией из внешней линии, равна  $ig_A \gamma_5 \gamma^{\mu} \tau_a$ ; следовательно, в пределе низких энергий пиона соотношение (6) дает величину  $G_{fi}$  в виде суммы вкладов диаграмм, на которых мягкие пионы испускаются только из внешних барионных линий, причем вершинная функция для испускания каждого из пионов равна [5]

$$\frac{g_A}{F} \gamma_5 \hat{q} \tau_a = \frac{G_\pi}{2M} \gamma_5 \hat{q} \tau_a \quad (8)$$

где  $G_\pi$  — перенормированная пион-барионная константа связи,  $M$  — масса нуклона, и мы воспользовались соотношением Гольдбергера — Тримана  $F = 2Mg_A/G_\pi$ . Другими словами, величина  $G_{fi}$  в соотношении (5) в пределе низких энергий пионов в точности совпадает с тем, что получилось бы в модели с градиентной связью, аналогичной модели, рассмотренной Намбу [1], Гелл-Манном и Леви [6] и другими. Важно то, что вели-

чина  $G_{fi}$  в этом пределе известна точно. Например, если начальное и конечное состояния содержат только по одному бариону с  $I \neq 0$  (в частности, процесс  $i \rightarrow f$  может быть рассеянием  $\Lambda^0$  или жесткого пиона на нуклоне), то  $G_{fi}$  имеет вид

$$\begin{aligned} & \langle p', \zeta' \text{ и т. д.} | G(q_1 \alpha_1, \dots, q_n \alpha_n) | p, \zeta \text{ и т. д.} \rangle \rightarrow \\ & \rightarrow G_{\pi}^n \sum_{\mathcal{P}} \sum_{r=0}^n (-2p' \cdot q_1)^{-1} [-2p' (q_1 + q_2)]^{-1} \dots \\ & \dots [-2p' (q_1 + \dots + q_r)]^{-1} [2p (q_{r+1} + \dots + q_n)]^{-1} \dots \\ & \dots (2p \cdot q_n)^{-1} \sum_{\zeta'' \zeta'''} L(p'; q_1 \alpha_1, \dots, q_r \alpha_r)_{\zeta' \zeta''} \times \\ & \times \langle p', \zeta'' \text{ и т. д.} | S | p, \zeta''' \text{ и т. д.} \rangle \times \\ & \times L(p, q_{r+1} \alpha_{r+1}, \dots, q_n \alpha_n)_{\zeta''', \zeta''} \quad (9) \end{aligned}$$

где  $p$  — импульс нуклона;  $\zeta$  — индекс спина и изоспина, принимающий 4-значения; „и т. д.“ относится к другим частицам в состояниях  $i, f$  (например, к  $\Lambda^0$ -частицам или жестким мезонам);  $\sum_{\mathcal{P}}$  означает суммирование по  $n!$  перестановкам индексов мягких пионов;  $S$  означает  $S$ -матрицу (без  $\delta$ -функции) для исходного процесса без испускания мягких пионов, а  $L$  является  $4 \times 4$ -матрицей вида

$$\begin{aligned} & L(p; q_1 \alpha_1, \dots, q_n \alpha_n)_{\zeta \zeta'} \equiv \\ & \equiv \bar{u}(p, \zeta') \gamma_5 \hat{q} \tau_{\alpha_1} \frac{-i\beta + M}{2M} \dots \frac{-i\beta + M}{2M} \gamma_5 \hat{q}_n \tau_{\alpha_n} u(p, \zeta), \quad (10) \end{aligned}$$

где  $u$  — восьмикомпонентная дираковская и изоспиновая волновая функция.

Остается рассмотреть второй член  $C_{fi}$  в соотношении (5). Из предположения о точном сохранении аксиально-векторного тока следует, что дивергенция хронологического произведения в выражении (2) определяется только многократными одновременными коммутаторами  $A_a^0$  с  $A_{\beta}^{\mu}$ . В первоначальной модели с градиентной связью [1, 5] все эти коммутаторы равны нулю, что дает  $C_{fi} = 0$  и  $M_{fi} = G_{fi}$  для всех  $n$ , как и

следовало ожидать. Однако успех расчетов Адлера и Вайсбергера показывает, что модель градиентной связи ошибочна, причем правильные коммутаторы должны иметь вид

$$\delta(x^0 - y^0)[A_\alpha^0(x), A_\beta^v(y)] = ig_V \delta^4(x - y) \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} V_\gamma^v(x). \quad (11)$$

Тем не менее существуют два важных частных случая, когда величина  $C_{fi}$  равна нулю и матричный элемент  $M_{fi}$  для процесса с испусканием мягких пионов определяется выражением  $G_{fi}$ , соответствующим теории с градиентной связью.

1) В случае  $n=1$  величина  $C_{fi}(q, \alpha)$  совпадает с матричным элементом от  $\partial_\mu A_\alpha^\mu$  и поэтому равна нулю. Этот вывод о том, что теория с градиентной связью дает правильный результат в случае рождения *одного* пиона с нулевой энергией, представляется очень удобным способом формулировки результатов Намбу и др. [1], а также условия самосогласованности Адлера [4]. [Более общее утверждение состоит в том, что для любого  $n$  последний член в соотношении (7) всегда отсутствует.]

2) Если все  $n$  пионов имеют одинаковые заряды, то все коммутаторы (11) равны нулю. Следовательно, если мы верим в правильность соотношения (11), то величину  $G_{fi}$ , полученную из теории с градиентной связью, можно использовать для расчетов матричных элементов рождения любого числа мягких пионов с одинаковыми зарядами. (Наиболее важным применением этого правила был бы расчет матричных элементов рождения нейтральных пионов.)

Даже в тех случаях, когда величина  $C_{fi}$  не равна нулю, ее можно вычислить точно в пределе  $q \rightarrow 0$ , зная коммутаторы токов. Например, для  $n=2$  из соотношений (1), (7) и (11) получаем

$$\begin{aligned} C_{fi}(q_1\alpha_1, q_2\alpha_2) &= F^{-2} q_{1\mu_1} q_{2\mu_2} M_{fi}^{\mu_1\mu_2}(q_1\alpha_1; q_2\alpha_2) = \\ &= \frac{G_\pi^2}{4M^2} \left(\frac{g_V}{g_A}\right)^2 \sum_\alpha \varepsilon_{\alpha_1\alpha_2\alpha} q_{2\mu} M_{fi}^\mu(q_1 + q_2, \bar{\alpha}), \quad (12) \end{aligned}$$

где чертой отмечены индексы, относящиеся к векторному, а не к аксиально-векторному току:

$$\delta^4(p_f - p_i + q) g_V M_{fi}^\mu(q, \bar{\alpha}) \equiv \int d^4x e^{-iq \cdot x} \langle f, \text{out} | V_\alpha^\mu(x) | i, \text{in} \rangle. \quad (13)$$

В пределе  $q \rightarrow 0$  в матричном элементе  $M_{fi}^\mu(q, \bar{\alpha})$  преобладает вклад диаграмм, на которых вершина векторного тока вставлена во внешнюю барионную или мезонную линию, так что этот матричный элемент принимает вид<sup>1)</sup>

$$M_{fi}^\mu(q, \bar{\alpha}) \xrightarrow{q \rightarrow 0} - \langle f, \text{out} | \left( \sum_N \frac{2p_N^\mu T_{N, \alpha}}{p_N \cdot q} \right) S - S \left( \sum_N \frac{2p_N^\mu T_{N, \alpha}}{p_N \cdot q} \right) | i, \text{in} \rangle, \quad (14)$$

где  $S$  —  $S$ -матрица,  $T_{N, \alpha}$  — матрица изотопического спина  $T_\alpha$  для  $N$ -й частицы в начальном или конечном состоянии, а  $p_N$  — ее импульс. [Заметим, что выражение (12) антисимметрично по  $q_1$  и  $q_2$  в соответствии с требованием статистики Бозе.] Например, если нуклон рассеивается частицей (типа  $\Lambda^0$  или  $d$ ) с нулевым изоспином, то матричный элемент для этого процесса с испусканием двух мягких пионов имеет вид

$$\begin{aligned} & \langle p', \zeta' \text{ и т. д.} | C(q_1 \alpha_1, q_2 \alpha_2) | p, \zeta \text{ и т. д.} \rangle \rightarrow \\ & \rightarrow \frac{-G_\pi^2}{4M^2} \left( \frac{g_V}{g_A} \right)^2 \sum_\alpha \varepsilon_{\alpha, \alpha_1 \alpha_2} \sum_{\zeta'' \zeta'''} \left[ \frac{p' \cdot q_2}{p' \cdot (q_1 + q_2)} \right] (\tau_\alpha)_{\zeta', \zeta''} \delta_{\zeta''', \zeta} - \\ & - \left[ \frac{p \cdot q_2}{p \cdot (q_1 + q_2)} \right] (\tau_\alpha)_{\zeta''', \zeta} \delta_{\zeta', \zeta''} \} \times \\ & \times \langle p', \zeta'' \text{ и т. д.} | S | p, \zeta''' \text{ и т. д.} \rangle. \quad (15) \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Это прямой аналог известной формулы для внутреннего тормозного излучения фотона (см. [5], стр. 392).

Обозначения здесь такие же, как и в соотношении (9), которое в случае рождения двух пионов дает матричный элемент  $G$ -матрицы в виде

$$\begin{aligned} & \langle p', \zeta' \text{ и т. д.} | G(q_1 \alpha_1, q_2 \alpha_2) | p, \zeta \text{ и т. д.} \rangle \rightarrow \\ & \rightarrow \frac{1}{4} G_\pi^2 \sum_{\mathcal{P}} \sum_{\zeta'' \zeta'''} \left[ \frac{L(p'; q_1 \alpha_1, q_2 \alpha_2)_{\zeta' \zeta''} \delta_{\zeta''', \zeta}}{(p' \cdot q_1) [p \cdot (q_1 + q_2)]} - \right. \\ & \left. - \frac{L(p'; q_1 \alpha_1)_{\zeta', \zeta''} L(p; q_2 \alpha_2)_{\zeta''', \zeta}}{(p' \cdot q_1) (p \cdot q_2)} + \frac{L(p; q_1 \alpha_1, q_2 \alpha_2)_{\zeta''', \zeta} \delta_{\zeta', \zeta''}}{[p \cdot (q_1 + q_2)] (p \cdot q_2)} \right] \times \\ & \times \langle p', \zeta'' \text{ и т. д.} | S | p, \zeta''' \text{ и т. д.} \rangle, \quad (16) \end{aligned}$$

а полный матричный элемент равен сумме выражений (15) и (16). Не представляет труда вычислить  $C_{fi}$  в случае рождения любого числа мягких пионов. [Однако при  $n \geq 3$  возникает небольшое усложнение. Для  $n = 3$  соотношение (7) сводится к следующему:

$$\begin{aligned} C_{fi}(q_1 \alpha_1, q_2 \alpha_2, q_3 \alpha_3) = \\ = - (iF)^{-3} q_{1\mu_1} q_{2\mu_2} q_{3\mu_3} M_{fi}^{\mu_1 \mu_2 \mu_3}(q_1 \alpha_1, q_2 \alpha_2, q_3 \alpha_3) - \\ - (iF)^{-2} q_{2\mu_2} q_{3\mu_3} M_{fi}^{\mu_2 \mu_3}(q_2 \alpha_2, q_3 \alpha_3; q_1 \alpha_1) + \text{Перестановки.} \end{aligned}$$

Первое слагаемое можно вычислить, зная одновременный коммутатор  $[V_\alpha^0, A_\beta^\mu]$ , а также коммутатор  $[A_\alpha^0, A_\beta^\mu]$ . Второе слагаемое равно

$$\begin{aligned} F^{-2} q_{2\mu_2} q_{3\mu_3} M_{fi}^{\mu_2 \mu_3}(q_2 \alpha_2, q_3 \alpha_3; q_1 \alpha_1) = \\ = \frac{G_\pi^2}{4M^2} \left( \frac{g_V}{g_A} \right)^2 \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha} q_{3\mu} M_{fi}^{\mu}(q_2 + q_3, \bar{\alpha}; q_1 \alpha_1). \quad (17) \end{aligned}$$

Если  $q_1$  и  $q_2 + q_3$  стремятся к нулю одновременно, то матричный элемент  $M_{fi}^{\mu}(q_2 + q_3, \bar{\alpha}; q_1 \alpha_1)$  от векторного тока нельзя вычислить непосредственно из соотношения (14). Вместо этого мы должны рассмотреть аналог формулы (4) с одним векторным и одним аксиально-векторным токами, взять дивергенцию по индексам только аксиально-векторного тока и, используя полученное соотношение, выразить слагаемое (17) через величины, известные в пределе низких энергий. Этот прием можно использовать для любого  $n$ .]

Можно надеяться, что приведенные выше формулы для пионов с нулевой массой применимы к реальным процессам, когда скалярное произведение  $p \cdot q$  импульса  $q$  любого мягкого пиона на любой другой импульс  $p$  удовлетворяет неравенству

$$s \gg |p \cdot q| \gg m_{\pi}^2, \quad (18)$$

где  $s$  — обычный инвариантный квадрат энергии, характеризующий исходный процесс  $i \rightarrow f$ . Однако необходимо подчеркнуть, что даже в этом пределе матричный элемент  $M_{fi}$  для процесса с испусканием мягких пионов не сводится к константе, а содержит сложную зависимость от направлений движения рожденных пионов<sup>1)</sup>.

Полученные результаты далеки от законченной теории множественного рождения, так как они справедливы только в пределе, когда энергия каждого из  $n$  пионов стремится к нулю. Возможно, эти результаты лучше всего применять для нормировки формул феноменологических теорий, претендующих на более полное описание. В любом случае предстоит затратить немало труда, чтобы сравнить теорию с экспериментом. Сейчас же ограничимся лишь отдельными замечаниями.

1) Даже для пионов с нулевой массой ни одна теория не приводит к пионным инфракрасным расходимостям, поэтому нельзя ожидать, что мягкие виртуальные пионы будут играть такую же важную роль, как мягкие фотоны при вычислении радиационных поправок в квантовой электродинамике.

---

<sup>1)</sup> Это справедливо также для амплитуды  $\pi N$ -рассеяния, которая при  $q^{\mu} \rightarrow 0$ , где  $q^{\mu}$  — импульс пиона, не стремится к константе, а зависит от угла рассеяния и обращается в нуль вместе с  $q^{\mu}$ . При том способе вывода условия самосогласованности, который использует Адлер [2], это обстоятельство остается в тени, поскольку такое поведение вытекает из взаимного сокращения  $A$  и  $B$ . Причина того, что амплитуда  $\pi N$ -рассеяния стремится к нулю при  $q^{\mu} \rightarrow 0$ , в то время как амплитуда процесса с испусканием двух мягких пионов, вообще говоря, стремится к константе, состоит просто в том, что переход  $N \rightarrow N$  не является „процессом“ в рассматриваемом здесь смысле и добавление к нему двух мягких пионов приводит к появлению лишь одного полюса во вкладе нуклонной линии.

2) Вопреки ожиданиям [7] существует сильная корреляция между мягкими пионами, связанная с тем, что благодаря некоммутативности членов  $\gamma_5 \hat{q} \tau_a$  нуклонные полюсы не факторизуются. Множественное рождение пионов неизбежно намного сложнее внутреннего тормозного излучения фотонов или гравитонов.

3) Испускание мягких пионов из нуклона, рассеянного в направлении вперед без изменения спиральности или изоспина, полностью отсутствует. Например, если положить, что матричный элемент  $\langle p', \zeta' | S | p, \zeta \rangle$  пропорционален  $\delta_{\zeta', \zeta}$ , то два члена в соотношении (15) и три члена в (16) сократятся между собой. Это не просто кинематический результат, поскольку пионы с нулевой энергией могут рождаться, если у нуклона изменяется  $I_z$ , как, например, при  $n-p$ -рассеянии назад.

### Л и т е р а т у р а

1. Nambu Y., Lurié D., Phys. Rev., **125**, 1429 (1962).  
Nambu Y., Shrauner E., Phys. Rev., **128**, 862 (1962).
2. Adler S. L., Phys. Rev., **137**, B1022 (1965).
3. Weisberger W. I., Phys. Rev. Letters, **14**, 1047 (1965).
4. Adler S. L. Phys. Rev. Letters, **14**, 1051 (1965); Phys. Rev., **139**, B1638 (1965) (ст.2 настоящей книги).
5. Jauch J. M., Rohrlich F., Theory of Photons and Electrons, Reading, Massachusetts, 1955.
6. Gell-Mann M., Lévy M., Nuovo Cimento, **16**, 705 (1960).
7. Kastrop H. A., в печати.

### С т а т ь я 4

## ДЛИНЫ РАССЕЯНИЯ ПИОНОВ

С. Вайнберг\*

S. Weinberg, Phys. Rev. Letters, **17**, 616 (1966)

Коммутаторы токов [1] и гипотеза о частичном сохранении аксиально-векторного тока (PCAC) [2, 3] дают возможность вычислить матричные элементы испускания и поглощения любого числа мягких пионов [4] и, в частности, определить длину рассеяния

\* Department of Physics, University of California, Berkeley, California,

пиона на любой частице-мишени. В этой статье мы выведем простую формулу для рассеивания пиона на любой частице, за исключением пиона<sup>1)</sup>, а затем обобщим этот результат на более сложный случай пион-пионного рассеяния.

Вычисление матричных элементов между состояниями, содержащими мягкие пионы, удобно провести в три этапа.

Этап I. Продолжим  $S$ -матрицу за массовую поверхность, используя для пионного поля выражение, пропорциональное дивергенции аксиально-векторного тока. Мы определим инвариантную амплитуду рассеяния пиона  $\langle f, qb | M | i, ka \rangle$  вне массовой поверхности при помощи соотношения

$$\int d^4x d^4y \langle f | T \{ \partial_\mu A_b^\mu(x), \partial_\nu A_a^\nu(y) \} | i \rangle e^{-iq \cdot x} e^{ik \cdot y} \equiv \\ \equiv \frac{i(2\pi)^4 \delta^4(p_f + q - p_i - k) F_\pi^2 m_\pi^4}{(q^2 + m_\pi^2)(k^2 + m_\pi^2)(2\pi)^3 (4E_i E_f)^{1/2}} \langle f, qb | M | i, ka \rangle, \quad (1)$$

где  $k^\mu$  и  $q^\mu$  — начальный и конечный импульсы пиона,  $a$  и  $b$  — изовекторные индексы (пробегающие значения 1, 2, 3) начального и конечного пионов,  $i$  и  $f$  обозначают начальное и конечное состояния частицы-мишени,  $A_a^\mu(x)$  — аксиально-векторный ток и  $F_\pi$  — амплитуда распада пиона, определяемая соотношением

$$\langle 0 | \partial_\nu A_a^\nu(0) | \pi_{qb} \rangle \equiv F_\pi m_\pi^2 \delta_{ab} (2q^0)^{-1/2} (2\pi)^{-3/2}. \quad (2)$$

Заметим, что соотношение (1) является *определением*, а не теоремой или предположением, однако с помощью формализма Лемана — Симанзика — Циммермана [5] можно показать (без привлечения гипотезы о частичном

<sup>1)</sup> Подготавливая эту статью, я узнал, что Томодзава [16] ранее вычислил длины  $\pi N$ -,  $\pi K$ - и пион-гиперонного рассеяния и получил результаты, согласующиеся с нашей общей формулой (9). После этого аналогичные результаты были также получены в работах Хампрехта [17], Рамана и Сударшана [18], Балачандрана, Гундзика и Никодемн [19]. Тем не менее я решил привести здесь вывод соотношения (9), уделяя больше внимания деталям перехода на массовую поверхность, отчасти чтобы объяснить применимость соотношения (9) к рассеянию пиона на *всех* элементарных частицах, за исключением пионов, и отчасти потому, что оно служит основой для расчета  $\pi\pi$ -рассеяния, которое перечисленные выше авторы не рассматривают.



сохранении аксиально-векторного тока), что  $S$ -матрица выражается через матрицу  $M$  на массовой поверхности следующим образом:

$$\langle f, qb | S | i, ka \rangle = - \frac{i(2\pi)^4 \delta^4(p_i + k - p_f - q)}{(2\pi)^6 (16q^0 k^0 E_i E_f)^{1/2}} \times \\ \times [\langle f, qb | M | i, ka \rangle]_{q^2 = k^2 = -m_\pi^2}. \quad (3)$$

Этап II. Воспользуемся коммутаторами токов и докажем точную теорему о поведении матричного элемента в пределе, когда 4-импульс пиона стремится к нулю. В нашем случае оказывается удобным фиксировать импульс  $p_i^\mu = p^\mu$  и стремиться к нулю  $q^\mu$  и  $k^\mu$  вместе, так что  $p_f^\mu \rightarrow p^\mu$ . (Так как  $p_f^2 = -m_\pi^2$ , мы должны потребовать, чтобы в первом порядке  $p \cdot k = p \cdot q$ , но выполнение равенства  $q^\mu = k^\mu$  для нас необязательно.) Мы воспользуемся коммутационными соотношениями, которые выполняются в  $\sigma$ -модели [3, 6]<sup>1)</sup> и в модели свободных кварков:

$$\delta(x^0 - y^0) [A_a^0(y), A_b^\mu(x)] = 2ig_v \varepsilon_{abc} V_c^\mu(x) \delta^4(x - y) + \text{S. T.}, \quad (4)$$

$$\delta(x^0 - y^0) [A_b^0(x), \partial_\nu A_a^\nu(y)] = ig_v \sigma_{ab}(x) \delta^4(x - y) + \text{S. T.}, \quad (5)$$

где  $V_c^\mu(x)$  — векторный ток,  $\sigma_{ab}(x)$  — некоторое скалярное поле, которое может иметь (но может и не иметь) отношение к реальному  $\pi\pi$ -резонансу, или пику в состоянии  $0^+$ , и S. T. означает возможные швингеровские члены. Мы будем предполагать, что швингеровские члены являются либо  $c$ -числами, которые совсем не дают вклада в связную часть  $M$ , либо операторами, содержащими производные, которые не дают вклада в первом порядке по  $q$  и  $k$ . Наша теорема утверждает, что, когда  $q^\mu$  и  $k^\nu$

<sup>1)</sup> Используя тождество Якоби и сохранение векторного тока  $V_c^\mu(x)$ , можно показать, что поле  $\sigma_{ab}(x)$  всегда симметрично по  $a$  и  $b$ ; в  $\sigma$ -модели или в модели свободных кварков оно просто пропорционально  $\sigma_{ab}$ . Только в случае  $\pi\pi$ -рассеяния мы должны различать разные формы этого коммутатора.

стремятся к нулю, связанная часть  $M$  ведет себя следующим образом:

$$\langle f, qb | M | i, ka \rangle \rightarrow M_{fb, ia}^{(0)} - 8 \left( \frac{g_V}{F_\pi} \right)^2 (p \cdot q) (T_\pi)_{ba} \cdot (T_t)_{fi} + \\ + \text{Полюсы} + O(qq, qk, kk). \quad (6)$$

Здесь  $M^{(0)}$  — неизвестная константа, пропорциональная  $\langle f | \sigma_{ab}(0) | i \rangle$ , где  $p_f = p_i = p$ ;  $T_\pi$  и  $T_t$  — изоспиновые матрицы пиона и мишени, причем  $(T_\pi)_{ba} = ie_{abc}$ . „Полюсы“ в (6) должны вычисляться из борновских членов в теории с градиентной связью [4]. Например, в  $\pi\pi$ -,  $\pi K$ - или  $\pi\Lambda$ -рассеянии полюсов нет, а для  $\pi N$ -рассеяния полюсные члены в (6) имеют следующий вид:

$$\text{Полюсы} = \left( \frac{g_A}{F_\pi} \right)^2 \left( \frac{m_N}{p \cdot q} \right) \bar{u}_f [\gamma_5 \hat{q} (-i\hat{p} + m_N) \gamma_5 \hat{k} \tau_b \tau_a + \\ + \gamma_5 \hat{k} (-i\hat{p} + m_N) \gamma_5 \hat{q} \tau_a \tau_b] u_i. \quad (7)$$

Доказательство проводится стандартным образом. Левая часть соотношения (1) тождественно равна

$$\int d^4x d^4y e^{ik \cdot y} e^{-iq \cdot x} \{ -\delta(x^0 - y^0) \langle f | [A_b^0(x), \partial_\nu A_a^\nu(y)] | i \rangle - \\ - iq_\mu \delta(x^0 - y^0) \langle f | [A_a^0(y), A_b^\mu(x)] | i \rangle + \\ + q_\mu k_\nu \langle f | T [A_b^\mu(x), A_a^\nu(y)] | i \rangle \}. \quad (8)$$

Используя коммутаторы (4), (5) и известные матричные элементы тока  $V_c^\mu(x)$  при нулевом передаваемом импульсе, можно показать, что три члена в выражении (8) приводят соответственно к первым трем членам в соотношении (6). Заметим, что первый член выражения (8) не ведет к дополнительному члену первого порядка в соотношении (6), так как в силу равенства (5) он зависит только от  $p \cdot (q - k)$  и  $(q - k)^2$ , а  $p \cdot (q - k) = 0$ . Полюсные члены можно отождествить с полным вкладом первого порядка от последнего члена в выражении (8).

Этап III. Воспользуемся точной теоремой, доказанной на этапе II, для оценки матричного элемента на массовой поверхности. Именно здесь мы впервые должны воспользоваться гипотезой о частичном сохранении аксиально-векторного тока, под которой мы

понимаем, что амплитуда  $M$ , определенная на этапе I, является гладкой функцией  $q^\mu$  и  $k^\nu$  подобно тому, как это получается при вычислении по теории возмущений в лагранжевой теории поля, в которой  $\partial_\mu A_a^\mu(x)$  пропорционально пионному полю. (Утверждение о том, что величина  $\partial_\mu A_a^\mu(x)$  пропорциональна пионному полю, само по себе бессодержательно.) Здесь мы будем трактовать эту довольно двусмысленную гипотезу следующим образом. Если под полюсными членами в соотношении (6) подразумевать полюсы *вблизи*  $q = k = 0$  (такие, как  $3-3$ -резонанс в  $\pi N$ -рассеянии), равно как и полюсы при  $q = k = 0$  (такие, как сам  $N$ -полюс), то коэффициенты при квадратичных членах в соотношении (6) будут порядка  $G_\pi^2/m_i^2$ , где  $m_i$  — некоторая большая внутренняя масса, имеющая по предположению величину порядка  $m_N$ . Следовательно, когда компоненты импульсов  $q^\mu$  и  $k^\nu$  в системе покоя частицы-мишени по порядку величины равны  $m_\pi$ , то квадратичные члены в (6) имеют порядок  $G_\pi^2 m_\pi^2/m_i^2$ . С другой стороны, соотношение Голдбергера — Тримана показывает, что линейные члены по порядку величины составляют  $G_\pi^2 m_\pi m_i/m_N^2$ , где  $m_i$  — масса частицы-мишени. Следовательно, *если масса мишени много больше пионной массы, то мы можем получить хорошее приближение для элемента  $S$ -матрицы между состояниями, содержащими мягкие пионы, используя соотношение (6), в котором опущены квадратичные члены и члены более высоких порядков.* Мы приведем три соображения, которые показывают, что можно не учитывать также и член  $M^{(0)}$ .

1) Условие самосогласованности Адлера [7]<sup>1)</sup> показывает, что все вклады в амплитуду  $M$ , за исключением

<sup>1)</sup> Адлер получает формулу для одной из двух функций  $A$ , входящих в симметричную амплитуду  $\pi N$ -рассеяния вперед, и использует дисперсионное соотношение, чтобы сравнить ее с экспериментом. Непосредственно из формулы Адлера для функции  $A$  следует, что полная симметричная амплитуда обращается в нуль на пороге, поскольку  $A$  сокращается с полюсом в другой функции  $B$ . (Это прямо следует из того, что амплитуда  $M$  обращается в нуль при  $q \rightarrow 0$  в теории с градиентной связью [3], которая удовлетворяет предположению о частичном сохранении аксиально-векторного тока.) Ре-

вклада полюсов, должны обращаться в нуль, когда  $q^\mu = 0$  и  $k^2 = -m_\pi^2$ . Следовательно, в этой точке член  $M^{(0)}$  имеет тот же порядок, что и квадратичные члены, т. е.  $G_\pi^2 m_\pi^2 / m_i^2$ , и поэтому пренебрежимо мал. [Это замечание можно уточнить, если выделить одно- и двухпионные полюсные вклады в последний член соотношения (8), как это сделано в работе [4]. При этом мы получим для  $M$  выражение, аналогичное (6), но  $M^{(0)}$  умножится на  $(q^2 + k^2 + m_\pi^2) / m_\pi^2$ . Такой член автоматически обращается в нуль при  $q^\mu = 0$ ,  $k^2 = -m_\pi^2$ , и мы видим, что если бы величина  $M^{(0)}$  была большой, то она давала бы в амплитуду  $M$  вклад, являющийся быстро меняющейся функцией  $q^\mu$  и  $k^\nu$ , что противоречит существованию гипотезы о частичном сохранении аксиально-векторного тока.]<sup>1)</sup>

2) В  $\sigma$ -модели [3] величина  $M^{(0)}$  имеет порядок  $G_\pi^2 m_\pi^2 / m_\sigma^2$ ; этой величиной можно пренебречь, если  $m_\pi / m_i \ll (m_\sigma / m_N)^2$ .

3) С помощью метода работы [4] можно показать, что если  $m_\pi = 0$  и  $\partial_\mu A_\alpha^\mu = 0$ , то амплитуда  $M$  удовлетворяет предельной формуле (6), в которой член  $M^{(0)}$  отсутствует. Следовательно, появление члена  $M^{(0)}$  можно рассматривать только как следствие необращения в нуль *внутренних* пионных масс.

Мы должны еще рассмотреть полюсные члены, однако в большинстве случаев они отсутствуют в  $s$ -волновой части амплитуды рассеяния. (Это справедливо, например, для нуклонного и  $3-3$ -резонансного полюсов в  $\pi N$ -рассеянии,  $K^*$ -полюсов в  $\pi K$ -рассеянии и т. д.)

---

зультат становится более ясным, если иметь дело с полной амплитудой вместо того, чтобы разделять ее на части  $A$  и  $B$ , и, конечно, проще работать у порога, где нуклонный и  $3-3$ -резонансный полюсы не дают вклада, чем использовать дисперсионную теорию для учета их вклада ниже порога. Чью напомнил мне, что, например, соотношение  $f_{1/2} = -2f_{3/2}$ , которое прекрасно выполняется на пороге для амплитуд рассеяния вперед, совсем перестает выполняться в области значительно ниже порога — вероятно, потому, что из-за  $3-3$ -резонанса вклад  $p$ -волны велик везде, кроме порога.

<sup>1)</sup> К подобным выводам пришли также Голдбергер и Триман (частное сообщение).

Следовательно, чтобы получить элемент  $S$ -матрицы с  $l=0$  вблизи порога, достаточно учесть в соотношении (6) только член, содержащий  $p \cdot q$ , т. е.

$$\langle f, qb | S | i, ka \rangle_{l=0} \approx -\frac{i(g_V/F_\pi)^2}{2\pi^2} (T_\pi)_{ba} (T_t)_{ft} \times \\ \times \left( -\frac{p \cdot q}{m_\pi m_t} \right) \delta^4(p_i + k - p_f - q).$$

Длина рассеяния  $a_T$  определяется как произведение  $-2i\pi$  на приведенную массу и на коэффициент при  $\delta$ -функции в  $S$ -матрице на пороге, т. е.

$$a_T = -L \left( \frac{1+m_\pi}{m_t} \right)^{-1} [T(T+1) - T_t(T_t+1) - 2], \quad (9)$$

где  $T_t$  — изотопический спин мишени,  $T$  — полный изоспин и  $L$  — характерная длина, которую с помощью соотношения Голдбергера — Тримана можно представить в виде

$$L \equiv \frac{g_V^2 m_\pi}{2\pi F_\pi^2} \approx \frac{G_\pi^2 m_\pi}{8\pi m_N^2} \left( \frac{g_V}{g_A} \right)^2 = 0,11 m_\pi^{-1}. \quad (10)$$

В соответствии со сделанными приближениями поправку на приведенную массу  $(1+m_\pi/m_t)^{-1}$  в соотношении (9) вполне можно опустить, однако мы сохраним ее, поскольку она явно связана с определением величины  $a_T$ .

Для  $\pi N$ -рассеяния из формулы (9) получаем следующие результаты:

$$a_{1/2} = 2L \left( \frac{1+m_\pi}{m_N} \right)^{-1} = 0,20 m_\pi^{-1}, \\ a_{3/2} = -L \left( \frac{1+m_\pi}{m_N} \right)^{-1} = -0,10 m_\pi^{-1}, \quad (11)$$

которые очень хорошо согласуются с экспериментальными значениями [8]  $a_{1/2} m_\pi = 0,171 \pm 0,005$  и  $a_{3/2} m_\pi = -0,088 \pm 0,004$ . Используя полученный результат  $a_{1/2} - a_{3/2} = 3L(1+m_\pi/m_N)^{-1}$  вместе с правилом сумм Голдбергера — Миядзава — Оэме [9] для  $a_{1/2} - a_{3/2}$ , мы можем получить правило сумм для отношения  $g_A/g_V$ , которое отличается от соответствующего правила сумм Адлера —

Вайсбергера [10]<sup>1)</sup> только членами порядка  $m_\pi^2/m_N^2$ ; однако это правило сумм справедливо, только если нечетная часть амплитуды рассеяния удовлетворяет дисперсионному соотношению без вычитаний, тогда как при выводе выражений для длин рассеяния (11) мы не делаем никаких предположений о высокоэнергетическом поведении амплитуд. Предсказание о том, что  $a_{1/2} + 2a_{3/2}$  равно 0, можно рассматривать как пороговый вариант условия самосогласованности Адлера [7], поскольку если бы величиной  $M^{(0)}$  нельзя было пренебречь, то сумма  $a_{1/2} + 2a_{3/2}$  была бы пропорциональна  $M^{(0)}$ . Какую бы форму предсказаний (11) мы ни выбрали, их успех, по-видимому, исключает присутствие сильного низкоэнергетического лл-взаимодействия, поскольку наш вывод был бы несправедлив, если бы амплитуда  $M$  имела сильную сингулярность в  $t$ -канале при массе около  $2m_\pi$ .

Соотношение (9) можно использовать также для вычисления длин лК- и пион-гиперонного рассеяний, однако ни одна из них не измерена экспериментально. Измерено несколько длин рассеяния пиона на ядрах<sup>2)</sup>, но они плохо согласуются с формулой (9) — по-видимому, из-за того, что энергия 140 Мэв является столь высокой энергией возбуждения для ядер, что мы не можем считать пион на пороге мягким. В частности, соотношение (9) содержит действительные величины, тогда как на самом деле из-за аннигиляции пиона величина  $a_T$  комплексна. Этот вопрос в настоящее время изучается.

Мы вывели соотношение (9) в предположении, что мишень гораздо тяжелее, чем пион, поэтому формулу (9) нельзя использовать для пион-пионного рассеяния.

<sup>1)</sup> В некоторых выводах правила сумм Адлера—Вайсбергера вначале получается формула для антисимметричной части амплитуды пион-нуклонного рассеяния вперед при  $s = m_N^2$  и нулевой массе внешнего пиона; см., например, соотношения (49) работы [11]. Первоначально считали, что сравнение этой формулы с экспериментом может проводиться только с помощью правила сумм, для получения которого она и используется; мы же считаем, что ее можно обратить в формулу для  $a_{1/2} - a_{3/2}$  прямым использованием гипотезы о частичном сохранении аксиально-векторного тока.

<sup>2)</sup> См. работу Секи и Кромера [20].

Например из соотношения (9) получается ненулевая длина рассеяния при  $T = 1$ , что противоречит статистике Бозе. Для того чтобы вычислить длины лл-рассеяния, мы должны сохранить член  $M^{(0)}$  и члены, содержащие  $qq$ ,  $qk$  и  $kk$ , потому что теперь у порога они столь же велики, как и член, содержащий  $pq$ .

Прежде всего заметим, что перекрестная симметрия, сохранение изоспина и статистика Бозе требуют, чтобы разложение амплитуды лл-рассеяния вне массовой поверхности до второго порядка по импульсам имело вид <sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Разложение (12), конечно, не имеет места в физической области значительно выше порога, так как из условия унитарности следует, что амплитуда  $M$  должна содержать нечетные степени величины  $i(s - 4m_\pi^2)^{1/2}$ . Однако длины рассеяния, которые мы вычислим, очень малы, так что предположение о том, что точка ветвления, следующая из унитарности, является слабой особенностью, которая не мешает нам использовать разложение (12) вплоть до порога и даже несколько выше его, будет по крайней мере самосогласованным. Известно, что подобное разложение хорошо работает в аналогичном случае  $\tau$ -распада. (Относительно строгих результатов об аналитичности по  $s$ ,  $t$  и  $u$ , когда все внешние массы равны, см. работу Мингуцци [12].) Даже там, где разложение (12) начинает серьезно противоречить соотношению унитарности, представляется совершенно естественным применять его к действительной части инвариантного матричного элемента. Эти соображения в принципе могут быть проверены путем измерения длины рассеяния  $p$ -волны  $a_1$  и эффективных радиусов  $s$ -волны  $r_0$  и  $r_2$ , определяемых соотношением  $k^{2l+1} \text{ctg } \delta_T \rightarrow a_T + 1/2 k^2 r_T$ .

В физической области разложение (12) определяет матричный элемент через два параметра  $A + 4m_\pi^2 B$  и  $B - C$ ; следовательно, без каких-либо дополнительных предположений мы получаем, что если разложение (12) выполняется вплоть до порога, то длины рассеяния должны удовлетворять соотношению, которое можно записать в виде  $18m_\pi^2 a_1 = 2a_0 - 5a_2$ . Если мы также предположим, что разложение (12) для действительной части амплитуды  $M$  имеет место несколько выше порога, то мы, кроме того, получим, что

$$6m_\pi^2 a_0^2 (a_0 + 1/2 r_0) = a_0 + 10a_2 \quad \text{и} \quad 6m_\pi^2 a_2^2 (a_2 + 1/2 r_2) = 5a_0 - 5a_2$$

Аналогичные замечания были сделаны Чью и Мандельштамом [13]. Заметим, что если в разложении (12) учесть лишь член нулевого порядка  $A$ , то  $a_0/a_2 = 5/2$  и  $a_1 = 0$ . Однако такое приближение было бы очень плохим, поскольку, как показывают соотношения (19) и (20), коэффициент  $A$  того же порядка, что и величины  $m_\pi^2 B$  и  $m_\pi^2 C$ .

$$\langle ld, qb | M | pc, ka \rangle = \delta_{ab} \delta_{cd} [A + B(s + u) + Ct + \dots] + \\ + \delta_{ad} \delta_{cb} [A + B(s + t) + Cu + \dots] + \\ + \delta_{ac} \delta_{bd} [A + B(u + t) + Cs + \dots], \quad (12)$$

где

$$s \equiv -(p + k)^2, \quad t \equiv -(k - q)^2, \quad u \equiv -(p - q)^2.$$

$A$ ,  $B$  и  $C$  — постоянные коэффициенты, а символ „+ ...“ обозначает члены четвертого и более высоких порядков по 4-импульсам  $p$ ,  $k$ ,  $l$ ,  $q$  пионов. Важнейшим свойством разложения (12) является то обстоятельство, что амплитуда  $M$  не может содержать линейных по массам  $-p^2$ ,  $-l^2$ ,  $-q^2$ ,  $-k^2$  членов, кроме тех, которые пропорциональны  $s$ ,  $t$  и  $u$ .

Гипотеза о частичном сохранении аксиально-векторного тока утверждает, что если  $M$  определяется по аналогии с соотношением (1) как величина, пропорциональная преобразованию Фурье вакуумного среднего от хронологического произведения четырех дивергенций аксиально-векторного тока, то квадратичный член и члены более высокого порядка в амплитуде  $M$  малы, когда  $p^\mu$ ,  $l^\mu$ ,  $k^\mu$  и  $q^\mu$  порядка  $m_\pi$  или меньше. Физический порог находится при  $s = 4m_\pi^2$ ,  $t = u = 0$ , так что длины  $\pi\pi$ -рассеяния имеют вид

$$a_0 \approx -\frac{1}{32\pi m_\pi} (5A + 8m_\pi^2 B + 12m_\pi^2 C), \quad (13)$$

$$a_2 \approx -\frac{1}{32\pi m_\pi} (2A + 8m_\pi^2 B). \quad (14)$$

Из соотношения (6) вытекает, что если импульс  $p^\mu = l^\mu$  находится на массовой поверхности, а  $q^\mu = k^\mu \rightarrow 0$ , то матричный элемент стремится к величине

$$\langle ld, qb | M | pc, ka \rangle \rightarrow M_{db, ca}^{(0)} - 8 \left( \frac{g_V}{F_\pi} \right)^2 (p \cdot q) (\delta_{da} \delta_{bc} - \delta_{bd} \delta_{ac}). \quad (15)$$

(В данном случае нет полюсов.) В этом пределе  $t = 0$ ,  $s \rightarrow m_\pi^2 - 2p \cdot q$  и  $u \rightarrow m_\pi^2 + 2p \cdot q$ , поэтому, сравнивая соотношения (15) и (12), получаем

$$B - C = 4 \left( \frac{g_V}{F_\pi} \right)^2, \quad (16)$$



$$M_{db, ca}^{(0)} = \delta_{ab}\delta_{cd}(A + 2m_\pi^2 B) + (\delta_{ad}\delta_{bc} + \delta_{bd}\delta_{ac})(A + m_\pi^2 C + m_\pi^2 B). \quad (17)$$

Из соотношений (13), (14), (16) и (10) следует, что <sup>1)</sup>

$$2a_0 - 5a_2 = 6L = 0,69m_\pi^{-1}. \quad (18)$$

Условие самосогласованности Адлера [7] показывает, что амплитуда  $M$  обращается в нуль, когда один из четырех импульсов пионов равен нулю, а три других находятся на массовой поверхности, т. е.  $M = 0$ , когда  $s = t = u = m_\pi^2$ , поэтому

$$A = -m_\pi^2(2B + C). \quad (19)$$

Чтобы использовать этот результат для получения другого соотношения для длин рассеяния, нужно привлечь немного новой физической информации. Если мы предположим, что  $\partial_\mu A_a^\mu$  является частью кирального квадруплета, в который входит также скалярное поле (как в  $\sigma$ -модели или модели свободных кварков), то выражение (5) и, следовательно,  $M_{db, ca}^{(0)}$  будут пропорциональны  $\delta_{ba}$ . Тогда из соотношения (17) будем иметь

$$A = -m_\pi^2(B + C). \quad (20)$$

Из соотношений (19) и (20) получаем равенства

$$B = 0, \quad A = -m_\pi^2 C, \quad (21)$$

которые при учете определений (13) и (14) дают

$$\frac{a_0}{a_2} = -\frac{7}{2}. \quad (22)$$

Из соотношений (18) и (22) следует, что

$$a_0 = \frac{7}{4}L = 0,20m_\pi^{-1}, \quad a_2 = -\frac{1}{2}L = -0,06m_\pi^{-1}, \quad (23)$$

<sup>1)</sup> Аналогичный результат получен Менром и Сугаварой [14], однако они не обосновали пренебрежение членами, возникающими из-за экстраполяции по массам. Они полагают  $a_2 = 0$  и в результате получают значение  $a_0$ , в 2 раза превышающее наше.

а весь матричный элемент  $\pi\pi$ -рассеяния при низких энергиях имеет вид

$$\langle ld, qb | M | pc, ka \rangle = 4 \left( \frac{g_V}{F_\pi} \right)^2 [(m_\pi^2 - t) \delta_{ab} \delta_{cd} + (m_\pi^2 - u) \delta_{ad} \delta_{bc} + (m_\pi^2 - s) \delta_{ac} \delta_{bd}]. \quad (24)$$

Поразительной особенностью нашего результата (23) является, конечно, то, что  $a_0$  получается гораздо меньше, чем все ожидали. Поэтому представляется целесообразным привести в заключение некоторые соображения о правдоподобности этого результата с теоретической и экспериментальной точек зрения.

1) В  $\sigma$ -модели [3] учет члена  $\lambda F_\pi^4$  и трех диаграмм с обменом одной  $\sigma$ -частицей приводит к длинам рассеяния, которые точно совпадают с выражениями (23) в пределе  $m_\sigma^2 \gg m_\pi^2$ , за исключением того, что  $L$  выражается через неперенормированные константы связи.

2) Если нечетная часть амплитуды  $\pi\pi$ -рассеяния вперед удовлетворяет дисперсионному соотношению без вычитаний, то с помощью нашего результата (18) можно вывести правило сумм Адлера [11] для полных сечений  $\pi\pi$ -рассеяния. (Мы уже делали подобное замечание при обсуждении  $\pi N$ -рассеяния о том, что наше предсказание значения величины  $a_{1/2} - a_{3/2}$  по существу эквивалентно соотношению Адлера - Вайсбергера.) Это правило сумм, по-видимому, требует, чтобы либо  $a_0$  было большим, либо существовал сильный  $\pi\pi$ -резонанс.  $\sigma$ -модель дает пример того, когда именно резонанс (произвольной массы), а не большая длина рассеяния приводит к насыщению правил сумм.

3) Мы уже отмечали, что успех нашего предсказания (11) длин  $\pi N$ -рассеяния (в частности, равенство  $a_{1/2} + 2a_{3/2} = 0$ ) было бы трудно понять, если бы существовало сильное  $\pi\pi$ -взаимодействие при низких энергиях. Точно так же успех недавнего вычисления [15] двух формфакторов  $K_{e4}$  служит дополнительным экспериментальным подтверждением того, что длины  $\pi\pi$ -рассеяния очень малы.

4) Эксперименты по  $\tau$ - и  $\eta$ -распаду и „периферическому“ двухпионному рождению при высоких

энергиях не дают однозначных результатов, так как неясно, насколько обнаруженные эффекты связаны с  $\pi\pi$ -взаимодействием. Кроме того, в эксперименте по двухпионному рождению, даже если оно периферическое, измеряется  $\pi\pi$ -амплитуда с одним из пионов вне массовой поверхности, а условия (19) и (20) показывают, что это обстоятельство очень сильно влияет на амплитуду  $M$ . Желательно вновь проанализировать эти эксперименты, используя формулы (12) или (24) для  $\pi\pi$ -амплитуды вне массовой поверхности.

5) Сильное  $\pi\pi$ -взаимодействие при низких энергиях оказало бы большое влияние на процесс  $\pi + N \rightarrow 2\pi + N$  у порога, где все три пиона являются мягкими. В настоящее время совместно с Чангом проводится расчет этого процесса.

### Литература

1. Gell-Mann M., *Physics*, **1**, 63 (1964).
2. Nambu Y., *Phys. Rev. Letters*, **4**, 380 (1960).
3. Gell-Mann M., Lévy M., *Nuovo Cimento*, **16**, 705 (1960).
4. Weinberg S., *Phys. Rev. Letters*, **16**, 879 (1966) (ст. 3 настоящей книги).
5. Lehmann H., Symanzik K., Zimmermann W., *Nuovo Cimento*, **1**, 205 (1955).
6. Schwinger J., *Ann. of Phys.*, **2**, 407 (1957).
7. Adler S., *Phys. Rev.*, **137**, B1022 (1965); **139**, B1638 (1965) (ст. 2 настоящей книги).
8. Hamilton J., Woolcock W., *Rev. Mod. Phys.*, **35**, 737 (1963).
9. Goldberger M., Miyazawa H., Oehme R., *Phys. Rev.*, **99**, 986 (1955).
10. Adler S., *Phys. Rev. Letters*, **14**, 1051 (1965).  
Weisberger W., *Phys. Rev. Letters*, **14**, 1047 (1965).
11. Adler S., *Phys. Rev.*, **140**, B736 (1965) (ст. 1 настоящей книги).
12. Minguzzi A., *Journ. Math. Phys.*, **7**, 679 (1966).
13. Chew G., Mandelstam S., *Nuovo Cimento*, **19**, 752 (1960).
14. Meiere F. T., Sugawara M., *Phys. Rev.*, **153**, 1702 (1967).
15. Weinberg S., *Phys. Rev. Letters*, **17**, 336 (1966) (ст. 7 настоящей книги).
16. Готогава У., в печати.
17. Нампрехт В., в печати.
18. Раман К., Сударшан Е., в печати.
19. Балачандран А., Гундзик М., Никодемиди Ф., в печати.
20. Сэки Р., Стонер А., в печати.

ДИСПЕРСИОННАЯ ТЕОРИЯ  
НАРУШЕННЫХ СИММЕТРИЙ

С. Фубини \*, Дж. Фурлан \*\*, К. Росетти \*\*\*

S. Fubini, G. Furlan, C. Rossetti, Nuovo Cimento, 40,  
1171 (1965).

Предложен новый релятивистский подход к проблеме нарушенных симметрий, являющийся ковариантным обобщением нерелятивистских правил сумм, рассмотренных в предыдущих работах. В результате получены дисперсионные правила сумм, в которых полюсные члены соответствуют приближенно точной симметрии, а вклады разрезов соответствуют поправкам за счет нарушения симметрии. Метод применен к нарушенным  $SU_3$ - и киральной  $SU_3 \times SU_3$ -симметрии; получены весьма удовлетворительные результаты и предсказания.

## § 1. Введение

Одним из наиболее перспективных направлений в физике элементарных частиц является использование групп симметрии, позволяющих классифицировать частицы и находить связи между ними.

При этом очень часто мы находим такие симметрии, которые, с одной стороны, являются сильно нарушенными, а с другой — дают удивительно хорошие результаты. Поэтому одной из важных проблем является разработка метода, который позволил бы рассматривать нарушенные симметрии, исходя из общих соображений и не используя частных моделей.

Первые соображения в этом направлении были высказаны Гелл-Манном [1], который заметил, что одновременные коммутаторы зарядов и токов в теории поля образуют алгебру группы симметрии, хотя эта симметрия фактически может быть сильно нарушена.

Недавно был предложен метод, позволяющий использовать эти коммутационные соотношения вместе с

\* Istituto di Fisica dell'Università, Torino; CERN, Geneva.

\*\* Istituto di Fisica dell'Università, Trieste; Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, Sottosezione di Trieste.

\*\*\* CERN, Geneva. Постоянный адрес: Istituto di Fisica dell'Università, Torino.

постулатом полноты [2, 3]. В этих статьях было показано, что результатам теории групп соответствуют одночастичные вклады, в то время как многочастичные члены (которые непосредственно связаны с нарушением симметрии) дают поправки к этим результатам. Наиболее существенные из этих поправок могут быть выражены через наблюдаемые величины типа констант связи и разностей масс подобно тому, как это делается в теории дисперсионных соотношений. Учет этих поправок привел к очень разумным результатам.

Вместе с тем, как показано в работах [2, 3], использование этого метода затруднено тем, что разделение различных вкладов не лоренц-инвариантно, и, в частности, одночастичный член имеет кинематический множитель, который стремится к единице в пределе точной симметрии. Хотя для правильной интерпретации этих результатов был дан весьма разумный рецепт, полностью ковариантный подход, разумеется, дал бы значительное преимущество.

В данной работе мы хотим предложить релятивистское обобщение этого метода, которое позволяет однозначно выделять одночастичный и многочастичные вклады.

Основная идея нашего подхода состоит в существенном использовании локальной коммутативности для получения релятивистских правил сумм, аналогичных хорошо известным дисперсионным соотношениям при фиксированном переданном импульсе. Этот ковариантный подход особенно полезен в случае динамических групп, включающих не только изоспин и гиперзаряд, но также спин и четность [4]. Известной трудности релятивистской интерпретации этих групп в ранее предложенном методе [2, 3] соответствовала очень критическая зависимость от кинематических множителей, сильно затрудняющая однозначную интерпретацию.

В § 2 дано общее рассмотрение дисперсионного подхода. § 3 посвящен результатам, относящимся к перенормировке векторных токов, массовым формулам, формфакторам и т. д. в нарушенной  $SU_3$ -симметрии. В § 4 исследуются общие принципы обобщения метода на динамические группы. В качестве приложения простым образом выведено очень красивое правило сумм

для перенормировки аксиально-векторного тока, полученное Адлером и Вайсбергером [5]. Кроме того, получены два правила сумм для изовекторного и изоскалярного магнитных моментов нуклона, позволяющие по-новому представить электромагнитную структуру нуклона.

## § 2. Общий метод

Как упоминалось в предыдущем параграфе, группа симметрии и ее алгебра могут быть заданы одновременными коммутационными соотношениями между физическими зарядами  $Q_\alpha$ , являющимися генераторами группы. В случае нарушенной  $SU_3$ -симметрии, который мы будем рассматривать в этом параграфе, заряды  $Q_\alpha$  определяются как пространственные интегралы от четвертых компонент октета токов  $J_\mu^{(\alpha)}(x)$ . Чтобы получить правила сумм для любой величины, представляющей физический интерес, нужно рассмотреть матричный элемент от одновременного коммутатора генератора  $Q_\alpha(t)$  с некоторым локальным оператором, имеющим определенные трансформационные свойства относительно группы,

$$[Q_\alpha(0), t_\beta(\mathbf{x}, 0)] = f_{\alpha\beta}^\gamma t_\gamma(\mathbf{x}, 0). \quad (1)$$

Константы  $f$  определяются из алгебры группы. В практически интересном случае, когда операторы  $t_\beta$  образуют октет, константы  $f$  совпадают со структурными константами алгебры.

2.1. Чтобы получить релятивистски инвариантные правила сумм, найдем ковариантное представление для матричного элемента коммутатора (1). Воспользуемся соотношением

$$\begin{aligned} Q_\alpha(t) &= \int J_0^{(\alpha)}(\mathbf{x}, t) d^3x = \int_{\sigma(t)} J^{(\alpha)} \cdot n d\sigma = \\ &= \int D_\alpha(x) \theta(t - x_0) d^4x + \int_{\sigma(-\infty)} J^{(\alpha)} \cdot n d\sigma, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$D_\alpha(x) = \partial_\mu J_\mu^{(\alpha)}(x) \quad (3)$$

обращается в нуль в пределе точной симметрии. При этом ясно, что в случае диагонального генератора (т. е. заряда, соответствующего точно сохраняющемуся току) соотношение (2) дает известный закон сохранения.

Если же  $Q_\alpha$  является генератором, соответствующим несохраняющемуся току, то интересующие нас физические матричные элементы  $Q_\alpha$  в общем случае относятся к состояниям различной энергии. Поэтому матричный элемент

$$\langle a | Q_\alpha(t) | n \rangle = \exp [i(E_n - E_a)t] \langle a | Q_\alpha(0) | n \rangle$$

осциллирует во времени, и в соответствии с обычными допущениями его вклад на поверхности  $t = -\infty$  обращается в нуль<sup>1)</sup>.

Поэтому для недиагональных зарядов мы опустим вклад поверхности  $t = -\infty$  и получим

$$Q_\alpha(t) = \int D_\alpha(x) \theta(t - x_0) d^4x. \quad (2')$$

В этом случае аналогичная формула, разумеется, может быть получена исходя из  $t = +\infty$ ; она полностью эквивалентна формуле (2').

Таким образом, если  $Q_\alpha$  — недиагональный заряд, то мы можем написать

$$\begin{aligned} \langle a_1 | [Q_\alpha(0), t_\beta(\mathbf{x}, 0)] | a_2 \rangle &= \\ = \int d^4y \theta(-y_0) \langle a_1 | [D_\alpha(y), t_\beta(\mathbf{x}, 0)] | a_2 \rangle &= f_{\alpha\beta}^y \langle a_1 | t_\gamma(\mathbf{x}, 0) | a_2 \rangle. \end{aligned} \quad (4)$$

Используя инвариантность относительно сдвигов, выделим фактор  $\exp[i(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \cdot \mathbf{x}]$  в обеих частях этого равенства

$$\int \langle a_1 | [D_\alpha(\mathbf{z}), t_\beta(0)] | a_2 \rangle \theta(-z_0) dz = f_{\alpha\beta}^y \langle a_1 | t_\gamma(0) | a_2 \rangle. \quad (5)$$

<sup>1)</sup> В ковариантной формулировке предложенного ранее метода [2, 3] интегрированию по времени в выражении (2) соответствует равенство

$$(E_a - E_n) \langle a | Q_\alpha | n \rangle = \langle a | D_\alpha | n \rangle \delta(\mathbf{p}_a - \mathbf{p}_n);$$

деля обе части последнего на  $E_a - E_n$ , получаем

$$\langle a | Q_\alpha | n \rangle = \frac{\langle a | D_\alpha | n \rangle}{E_a - E_n} \delta(\mathbf{p}_a - \mathbf{p}_n).$$

Если  $E_a \neq E_n$ , то деление на  $E_a - E_n$  не вызывает затруднений.

Сделаем теперь предположение о том, что коммутаторы локальных операторов  $D_\alpha(x)$  и  $t_\beta(y)$  равны нулю для пространственно-подобных интервалов

$$[D_\alpha(x), t_\beta(y)] = 0 \quad \text{при } (x - y)^2 < 0. \quad (6)$$

Заметим, что условие микропричинности (6) придает явно инвариантный смысл выражению

$$M = \int \langle a_1 | [D_\alpha(z), t_\beta(0)] | a_2 \rangle \theta(-z_0) d^4z. \quad (7)$$

Аналогичная формула, полученная исходя из  $t = +\infty$ ,

$$M = - \int \langle a_1 | [D_\alpha(z), t_\beta(0)] | a_2 \rangle \theta(z_0) d^4z \quad (7')$$

полностью эквивалентна формуле (7). Разумеется, оба выражения (7) и (7') имеют смысл лишь тогда, когда матричные элементы  $\langle a | D_\alpha | n \rangle$  берутся между состояниями различной энергии.

Сложнее обстоит дело в тех редких случаях (как, например, при рассмотрении  $\langle N | D_I^{(-)} | P \gamma \rangle$ ), когда разность энергий может обращаться в нуль. При этом приходится рассматривать очень неясную проблему асимптотического поведения произведения операторов. В этом случае нам не удалось найти полностью удовлетворительного ответа, однако, исходя из некоторых моделей, можно сформулировать простой рецепт, состоящий в том, что нужно рассматривать  $t = -\infty$  и  $t = +\infty$  одновременно и использовать представление

$$M = - \frac{i}{2} \int \langle a_1 | [D_\alpha(z), t_\beta(0)] | a_2 \rangle \varepsilon(z_0) d^4z. \quad (7'')$$

Вернемся теперь к выражению (7) и введем функцию  $F(k)$ , определяемую равенствами

$$F(k) = \int d^4z \theta(-z_0) \langle a_1 | [D_\alpha(z), t_\beta(0)] | a_2 \rangle e^{ikz} \quad (8)$$

и

$$M = \lim_{k \rightarrow 0} F(k). \quad (9)$$

Для нашего метода существенно, что функция  $F(k)$  является преобразованием Фурье опережающего причинного коммутатора, который обращается в нуль всюду



вне прошедшего светового конуса, поэтому с помощью стандартной процедуры мы можем получить для нее (одномерное) дисперсионное соотношение. Для простоты рассмотрим сначала случай, когда обе частицы  $a_1$  и  $a_2$  имеют нулевые спины и  $t_\beta$  — скалярный оператор, так что  $M$  — скалярная функция от  $m_1^2$ ,  $m_2^2$  и  $\Delta^2 = (p_1 - p_2)^2$ . Из-за того что мы ввели 4-вектор  $k$ , на который наложим условие нулевой длины  $k^2 = 0$ , функция  $F(k)$  будет зависеть от дополнительных инвариантов. Именно введем два 4-вектора  $k_1$  и  $k_2$ , такие, что

$$p_1 + k_1 = p_2 + k_2, \quad k_1 = k,$$

и зафиксируем

$$k_1^2 = k^2 = 0, \quad k_2^2 = (p_1 + k_1 - p_2)^2 = (\Delta + k_1)^2 = \Delta^2, \quad (10)$$

для чего необходимо, чтобы <sup>1)</sup>

$$\Delta \cdot k_1 = 0, \quad (11)$$

или

$$p_1 \cdot k_1 = p_2 \cdot k_1.$$

Наконец, введем переменную

$$v = k_1 \cdot \frac{p_1 + p_2}{2m_1} = \frac{k_1 \cdot p_1}{m_1}. \quad (12)$$

При этом  $F$  будет функцией „внешних масс“  $k_1^2$ ,  $k_2^2$  и двух инвариантов  $\Delta^2$  и  $v$ , а интересующая нас величина  $M$  будет соответствовать  $k_1 \rightarrow 0$ ,  $v \rightarrow 0$ ,  $k_2 \rightarrow \Delta$ .

Рассмотрим аналитические свойства  $F$  как функции  $v$  при фиксированных значениях внешних масс и  $\Delta^2$ . Эти свойства полностью аналогичны аналитическим свойствам амплитуды рассеяния частиц с массами  $k_1^2 = 0$ ,  $k_2^2 = \Delta^2$  (соответствующих полям  $D_\alpha$  и  $t_\beta$ ) на частицах  $a_1$ ,  $a_2$ . Отсюда мы получаем дисперсионное соотношение по энергии  $v$  при фиксированном передаваемом им-

<sup>1)</sup> Заметим, что из-за условия (11) вектор  $\Delta$  должен быть пространственно-подобным. Однако соотношения между формфакторами в области  $\Delta^2 \leq 0$ , которые мы получим ниже, можно аналитически продолжить в ту часть области  $\Delta^2 > 0$ , в которой нет особенностей.

пульсе  $\Delta^2$

$$F(\nu, \Delta^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{A_I(\nu', \Delta^2)}{\nu' - \nu} d\nu' - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{A_{II}(\nu', \Delta^2)}{\nu' - \nu} d\nu', \quad (13)$$

где спектральные функции определяются равенствами

$$A_I = \frac{i}{2} \sum_n (2\pi)^4 \delta(p_1 + k_1 - p_n) \langle a_1 | D_\alpha(0) | n \rangle \langle n | t_\beta(0) | a_2 \rangle, \quad (14)$$

$$A_{II} = \frac{i}{2} \sum_n (2\pi)^4 \delta(p_2 - k_1 - p_n) \langle a_1 | t_\beta(0) | n \rangle \langle n | D_\alpha(0) | a_2 \rangle. \quad (14')$$

В выражениях (14) и (14') выделим диагональные и недиагональные вклады. Диагональные члены соответствуют частицам, принадлежащим к тому же представлению, что и  $a_1$  и  $a_2$ . Они дают вклад в полюсные члены, знаменатели которых имеют вид  $\nu - (m_a^2 - m_a'^2)/2m_a$ , а числители содержат „константы связи“, пропорциональные матричным элементам  $\langle a_1 | D_\alpha | a' \rangle$ ,  $\langle a' | t | a_2 \rangle$ . Отсюда видно, почему вклады полюсных членов преобладают по сравнению с остальными вкладами: их знаменатели фактически имеют порядок разности масс внутри мультиплета.

Приближение, в котором учитываются только полюсные члены, можно рассматривать как ковариантное определение предела, соответствующего точной симметрии. Мы видим, что причина приближенной справедливости формул теории групп по существу не отличается от той, по которой бывает справедливым одночастичное приближение, например, в периферических моделях.

В тех случаях, когда по кинематическим причинам знаменатели  $\nu' \pm \nu$  могут обращаться в нуль, в соответствии с приведенными выше рассуждениями следует вместо  $F(\nu)$  рассматривать комбинацию<sup>1)</sup>

$$F(\nu) \rightarrow \frac{1}{2} \{F(\nu + i\eta) + F(\nu - i\eta)\}. \quad (15)$$

<sup>1)</sup> Замечание при корректуре. Алессандрини, Бег и Браун [14] нашли более изящный и общий способ изложения нашего метода. Рассматривая величину

$$Q_\alpha(q) = \int e^{iqx} j_0^{(\alpha)}(\bar{x}) d^3x,$$

2.2. Рассмотрим теперь релятивистское обобщение полученных ранее [2] правил сумм для констант перенормировки. Мы уже видели [2], что вычисление этих констант несколько отличается от получения обычных результатов теории групп, поскольку поправки к ним имеют второй порядок по нарушению симметрии [6] и более сильно подавлены квадратом в знаменателе. Поэтому их следует рассмотреть отдельно.

Рассмотрим коммутатор „противоположных зарядов“ (т. е. генераторов, соответствующих противоположным корням), который в стандартной формулировке алгебры Ли равен линейной комбинации диагональных генераторов <sup>1)</sup>

$$[Q_\alpha, Q_{-\alpha}] = \alpha^i Q_i. \quad (16)$$

В частности, в случае  $SU_3$ -алгебры  $\alpha^i Q_i$  является линейной комбинацией заряда и гиперзаряда, ее матричные элементы диагональны и не перенормировываются. Далее возьмем среднее значение оператора (16) в каком-нибудь определенном состоянии

$$\langle a | [Q_\alpha, Q_{-\alpha}] | a \rangle = \alpha^i \langle a | Q_i | a \rangle. \quad (17)$$

получим следующую формулу:

$$[Q_\alpha, t_\beta] = \lim_{q \rightarrow 0} \left[ \int [D_\alpha(x), t_\beta] e^{iqx} \theta(-x_0) d^4x + \right. \\ \left. + i q_\mu \int [j_\mu^{(\alpha)}(x), t_\beta] e^{iqx} \theta(-x_0) d^4x \right]$$

и воспользуемся ею в дисперсионном соотношении. В пределе  $q_\mu \rightarrow 0$  второй член обращается в нуль, и мы получаем прежние результаты. Для вычисления же полюсного члена нужно использовать оба слагаемых, сумма которых полностью однозначна. Можно вначале положить  $q \rightarrow 0$ , введя небольшое нарушение симметрии, или, наоборот, сначала положить нарушение симметрии равным нулю. В этом случае весь полюсный член получается из второго слагаемого.

<sup>1)</sup> Мы обозначим через  $Q_\alpha$  генераторы, соответствующие (ненулевому) корню  $\alpha$ , а через  $Q_i$  взаимно коммутирующие генераторы.

Используя для  $Q_{\pm\alpha}$  представления

$$Q_{\pm\alpha} = \pm \int D_{\pm\alpha}(x) \theta(\mp x_0) d^4x, \quad (18)$$

получаем

$$\begin{aligned} \langle a(p_1) | [Q_{+\alpha}, Q_{-\alpha}] | a(p_2) \rangle &= \\ &= - \int d^4x d^4y \langle a(p_1) | [D_{+\alpha}(x), D_{-\alpha}(y)] | a(p_2) \rangle \theta(-x_0) \theta(y_0) = \\ &= (2\pi)^3 \delta(p_1 - p_2) M', \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$M' = \int z_0 \theta(-z_0) d^4z \langle a | [D_{+\alpha}(z), D_{-\alpha}(0)] | a \rangle. \quad (20)$$

Введем снова величину

$$\Phi(k) = \int \theta(-z_0) d^4z \langle a | [D_{+\alpha}(z), D_{-\alpha}(0)] | a \rangle e^{ikz}. \quad (21)$$

Поскольку теперь внешние массы равны, то  $\Delta^2 = 0$ , и мы будем иметь дело с дисперсионным соотношением для рассеяния вперед. При этом мы получаем

$$M' = -i \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial k_0} \Phi(k) = -i \frac{E_a}{m_a} \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\partial \Phi}{\partial v}. \quad (22)$$

С другой стороны<sup>1)</sup>, так как

$$\langle a | Q_i | a \rangle = c_{aa}^i (2\pi)^3 \delta(p_1 - p_2) 2E_a, \quad (23)$$

где  $c_{aa}^i$  — соответствующие коэффициенты Клебша—Гордана, то мы получаем инвариантное правило сумм

$$- \frac{i}{\alpha_i c_{aa}^i} \frac{1}{2m_a} \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\partial \Phi}{\partial v} = 1. \quad (24)$$

Равенство (24) является релятивистским эквивалентом соотношений (3.12) и (3.13) работы [2]. Записав теперь дисперсионное соотношение для  $\Phi(v)$

$$\Phi(v) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{A_I(v')}{v' - v} dv' - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{A_{II}(v')}{v' - v} dv', \quad (25)$$

<sup>1)</sup> Для упрощения обозначений мы используем инвариантную нормировку состояний  $\langle p_1 | p_2 \rangle = 2E \delta(p_1 - p_2) (2\pi)^3$ .

где

$$A_I(\nu) = \frac{i}{2} \sum_n (2\pi)^4 \delta(p+k-p_n) \langle a | D_a(0) | n \rangle \langle n | D_{-a}(0) | a \rangle, \quad (26)$$

$$A_{II}(\nu) = \frac{i}{2} \sum_n (2\pi)^4 \delta(p-k-p_n) \langle a | D_{-a}(0) | n \rangle \langle n | D_a(0) | a \rangle, \quad (26')$$

мы можем отделить от вклада непрерывного спектра одночастичные полюсы, вычеты в которых пропорциональны квадратам констант перенормировки. Вклад непрерывного спектра можно формально выразить через сечение рассеяния безмассовых скалярных частиц, соответствующих „токам“  $D_{\pm a}$ .

Заметим, что производная  $\partial/\partial\nu$  в равенстве (24) дает квадрат энергии в знаменателе, что увеличивает вклад полюсного члена еще на порядок. Мы получаем таким образом дисперсионный аналог теоремы Адемолло—Гатто [6].

### § 3. Приложения

3.1. В предыдущем параграфе для иллюстрации метода мы рассматривали скалярный оператор  $t_\beta$  и бесспиновые частицы. Обобщение на высшие спины не представляет существенной трудности, однако приводит к более сложным выражениям. Рассмотрим некоторые конкретные примеры.

Пусть сначала спины обеих частиц  $1/2$ , а  $t_\beta$  — по-прежнему скалярный оператор. В этом случае величина  $F(k)$ , определяемая равенством (8), совпадает по своей структуре с амплитудой рассеяния скалярного мезона на барионе и может быть представлена в следующей стандартной форме:

$$F(k) = \bar{u}_1 [a(\nu, \Delta^2) + b(\nu, \Delta^2) \gamma \cdot k_1] u_2, \quad (27)$$

$$\nu = \frac{p_1 \cdot k_1}{m}, \quad \Delta = p_1 - p_2.$$

В этом случае мы должны иметь дело с двумя инвариантными функциями. В рассматриваемом пределе  $k_1 \rightarrow 0$ ,  $\nu \rightarrow 0$ ,  $k_2 \rightarrow \Delta$  остается лишь первый инвариант.

Заметим, что в случае равных масс и направления вперед ( $\Delta = 0$ ) мы имеем лишь одну инвариантную функцию  $\alpha(\nu, 0)$ , которая следующим образом связана с введенными инвариантами:

$$\alpha(\nu, 0) = a(\nu, 0) + \nu b(\nu, 0). \quad (28)$$

Такая ситуация возникает при вычислении констант перенормировки для частиц со спином  $1/2$ , так что в этом случае мы будем использовать величину  $\alpha(\nu, 0)$ .

Если теперь  $t_\beta$  есть 4-вектор, а спины частиц  $a_1$ ,  $a_2$  равны нулю, то разложение матричного элемента коммутатора на инварианты имеет вид

$$F_\mu(k) = G_1(\nu, \Delta^2)(p_1 + p_2)_\mu + G_2(\nu, \Delta^2)(p_1 - p_2)_\mu + k_\mu G_3(\nu, \Delta^2). \quad (29)$$

Наш метод в этом случае приводит к дисперсионным соотношениям для обоих инвариантов  $G_1$ ,  $G_2$  ( $G_3$  можно не рассматривать), которые соответствуют, например, формфакторам в распаде  $K \rightarrow \pi e \nu$ .

В более сложных случаях число независимых инвариантов возрастает. Мы рассмотрим еще один пример в § 4.

3.2. В качестве первого приложения исследуем подробнее правила сумм для констант перенормировки. Мы уже видели, что в этом случае достаточно взять равные внешние массы и, следовательно,  $\Delta^2 = 0$ . Напомним сначала некоторые полезные соотношения. Рассмотрим матричный элемент векторного тока между состояниями с нулевым спином

$$\langle p_1 | J_\mu^{(\alpha)} | p_2 \rangle = c_{12}^\alpha [(p_1 + p_2)_\mu G_1^{(\alpha)}(\Delta^2) + (p_1 - p_2)_\mu G_2^{(\alpha)}(\Delta^2)], \quad (30)$$

где  $c_{12}^\alpha$  — соответствующие коэффициенты Клебша—Гордана и второй формфактор  $G_2^{(\alpha)}$  возникает из-за несохранения тока  $J_\mu^{(\alpha)}$ . Тогда

$$\langle p_1 | D_\alpha(0) | p_2 \rangle = i(m_1^2 - m_2^2) c_{12}^\alpha G_D^{(\alpha)}(\Delta^2), \quad (31)$$

где

$$G_D^{(\alpha)}(\Delta^2) = G_1^{(\alpha)}(\Delta^2) + \frac{\Delta^2 G_2^{(\alpha)}(\Delta^2)}{m_1^2 - m_2^2}. \quad (32)$$

Для частиц со спином  $1/2$  аналогичные формулы имеют вид

$$\langle p_1 | J_\mu^{(\alpha)} | p_2 \rangle = c_{12}^\alpha \bar{u}_1 \left[ G_1^{(\alpha)}(\Delta^2) \gamma_\mu + G_2^{(\alpha)}(\Delta^2) (p_1 - p_2)_\mu + \right. \\ \left. + G_3^{(\alpha)}(\Delta^2) \sigma_{\mu\nu} (p_1 - p_2)_\nu \right] u_2, \quad (30')$$

$$\langle p_1 | D_\alpha(0) | p_2 \rangle = i(m_1 - m_2) c_{12}^\alpha G_D^{(\alpha)}(\Delta^2) \bar{u}_1 u_2, \quad (31')$$

$$G_D^{(\alpha)}(\Delta^2) = G_1^{(\alpha)}(\Delta^2) + \frac{\Delta^2 G^{(\alpha)}(\Delta^2)}{m_1 - m_2}. \quad (32')$$

Константа перенормировки определяется как значение  $G_D(\Delta^2)$  в пределе нулевого переданного импульса

$$r_\alpha = G_D^{(\alpha)}(0), \quad (33)$$

так что в этом пределе мы можем написать

$$\langle p_1 | D_\alpha | p_2 \rangle = c_{12}^\alpha i r_\alpha (m_1^2 - m_2^2) \quad (\text{бозоны}), \quad (34)$$

$$\langle p_1 | D_\alpha | p_2 \rangle = c_{12}^\alpha i r_\alpha \bar{u}_1 u_2 (m_1 - m_2) \quad (\text{фермионы}). \quad (34')$$

Чтобы получить инвариантные правила сумм для констант перенормировки, воспользуемся равенством (24)

$$\frac{1}{\alpha_i c_{\alpha\alpha}^i} \frac{1}{2m_\alpha} \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\partial F}{\partial v} = 1, \quad F = -i\Phi. \quad (24')$$

В случае псевдоскалярных мезонов мы имеем лишь одну инвариантную амплитуду, которая удовлетворяет дисперсионному соотношению

$$F(v) = \frac{r_\alpha^2 (m_\alpha^2 - m_0^2)^2}{2m_\alpha (v_0 - v)} + \frac{1}{\pi} \int \frac{\text{Im } F(v')}{v' - v} dv', \quad (35)$$

где

$$v_0 = \frac{m_0^2 - m_\alpha^2}{2m_\alpha}.$$

После дифференцирования получаем

$$r_\alpha^2 + \frac{1}{\pi} \int \frac{\text{Im } F(v')}{v'^2} dv' = 1. \quad (36)$$

В случае фермионов воспользуемся функцией  $\alpha$  (28), для которой имеет место дисперсионное соотношение<sup>1)</sup>

$$\alpha(v) = \frac{r_a^2(m_a^2 - m_0^2)^2}{2m_a(v_0 - v)} + \frac{1}{\pi} \int \frac{\text{Im } \alpha(v')}{v' - v} dv'. \quad (35')$$

Таким образом, для фермионов мы получаем совершенно аналогичное правило сумм

$$r_a^2 + \frac{1}{\pi} \int \frac{\text{Im } \alpha(v')}{v'^2} dv' = 1. \quad (36')$$

В связи с равенствами (36) и (36') подчеркнем два обстоятельства. Во-первых, наши правила сумм определены однозначно, без каких-либо кинематических факторов, в отличие от правил сумм, полученных в работах [2, 3], которые зависели от  $p$ . С помощью ковариантного подхода мы автоматически получили правила сумм, которые мы раньше называли наилучшими (т. е. те, которые ранее получались в пределе  $p \rightarrow \infty$ ). Во-вторых, отклонение  $r^2$  от единицы выражено через интеграл, содержащий члены вида  $|\langle a | D_A | n \rangle|^2$ . Эти члены можно интерпретировать как полные сечения рассеяния скалярной „частицы“  $D_A$  с нулевой массой на мишени  $a$ . Поэтому мы можем получить некоторую не зависящую от моделей информацию о величине поправок, воспользовавшись такими общими соображениями, как унитарность или теорема Померанчука.

3.3. В работе [3] мы показали, что массовые формулы проще всего получить с помощью коммутационного соотношения вида

$$[Q_A^+, N_A^+] = 0, \quad (37)$$

где

$$N_A^+ = [Q_A^+, H] = [Q_A^+, H_B] = i \int d^3x D_A^+(x). \quad (38)$$

Равенство (37) выражает с помощью коммутатора обычную гипотезу о том, что нарушающая симметрию часть гамильтониана преобразуется как восьмая компонента

<sup>1)</sup> Дополнительный множитель  $(m_a + m_0)^2$  в полюсном члене возникает из-за суммирования по спину промежуточного состояния.



октета. Как отмечено в работе [3], этот метод приводит к формулам для энергии, т. е. к правилам сумм, зависящим от  $p$ , поскольку в нем используется неинвариантный оператор.

Чтобы получить ковариантное обобщение этого метода, мы постулируем одновременное коммутационное соотношение между  $Q_A^+$  и локальным оператором  $D_A^+(x, t)$

$$[Q_A^+(t), D_A^+(x, t)] = 0. \quad (39)$$

К этому коммутатору можно применить общий метод, изложенный в § 2, положив  $t_\beta(x) = D_A(x)$ . Рассмотрим сначала случай псевдоскалярных мезонов, в частности возьмем  $A = K$ ,  $a_1 = K^+$ ,  $a_2 = K^-$ . Введем величину

$$\Phi(k) = \int d^4z \theta(-z_0) \langle K^+ | [D_K^+(z), D_K^+(0)] | K^- \rangle e^{ikz}, \quad (40)$$

причем из равенства (39) следует, что

$$\lim_{k \rightarrow 0} \Phi(k) = 0. \quad (41)$$

Для  $\Phi(k)$  мы можем написать дисперсионное соотношение (при фиксированном  $\Delta^2 \neq 0$ ). Выделяя в нем полюсные вклады с помощью равенств (31), (32), получаем

$$\begin{aligned} \Phi(v, \Delta^2) = & \frac{1}{4m_K} \left[ \frac{(m_K^2 - m_\pi^2)^2 r_{K\pi}^{(K)} G_{K\pi}^{(K)}(\Delta^2)}{(m_\pi^2 - m_K^2)/2m_K - v} + \right. \\ & \left. + \frac{(m_K^2 - m_\pi^2)^2 r_{K\pi}^{(K)} G_{K\pi}^{(K)}(\Delta^2)}{(m_\pi^2 - m_K^2)/2m_K + v} + 3(\pi \leftrightarrow \eta) \right] + \frac{1}{\pi} \int \frac{\text{Im } \Phi(v', \Delta^2)}{v' - v} dv'. \end{aligned} \quad (42)$$

Равенство (41) при этом принимает вид

$$\begin{aligned} (m_K^2 - m_\pi^2) r_{K\pi}^{(K)} G_{K\pi}^{(K)}(\Delta^2) + 3(m_K^2 - m_\eta^2) r_{K\eta}^{(K)} G_{K\eta}^{(K)}(\Delta^2) = \\ = \frac{1}{\pi} \int \frac{\text{Im } \Phi(v', \Delta^2)}{v'} dv'. \end{aligned} \quad (43)$$

В результате мы получили непрерывный набор правил сумм, в котором каждому значению квадрата переданного импульса  $\Delta^2$  соответствует одно правило. В частности, мы можем выбрать соотношение на массовой

поверхности (рассматривая только шпурионы нулевой массы), т. е. для  $\Delta^2 = 0$ . При этом мы получаем

$$(m_K^2 - m_\pi^2) r_{K\pi}^2 + 3(m_K^2 - m_\eta^2) r_{K\eta}^2 = \frac{1}{\pi} \int \frac{\text{Im } \Phi(v', \Delta^2)}{v'} dv'. \quad (44)$$

Так как по теореме Адемолло—Гатто отклонение  $r$  от единицы есть  $O(f^2)$ , то присутствие  $r$  сказывается лишь на поправках порядка  $O(f^3)$ . Поэтому можно положить  $r \approx 1$ , после чего мы получаем классическую формулу нарушенной  $SU_3$ -симметрии для квадратов масс

$$4m_K^2 - 3m_\eta^2 - m_\pi^2 = C, \quad (45)$$

где поправка  $C$  имеет порядок  $f^2$ .

Случай фермионов может быть рассмотрен аналогичным образом. Используя равенство (31'), получаем

$$\begin{aligned} \Phi(v, \Delta^2) = & \left[ \frac{1}{4m_p} \frac{(m_p^2 - m_\Sigma^2)(m_\Xi - m_\Sigma) r_{p\Xi} G_{\Sigma\Xi}(\Delta^2)}{(m_\Sigma^2 - m_p^2)/2m_p - v} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4m_\Xi} \frac{(m_\Xi^2 - m_\Sigma^2)(m_p - m_\Sigma) r_{\Sigma\Xi} G_{p\Sigma}(\Delta^2)}{(m_\Sigma^2 - m_\Xi^2)/2m_\Xi + v} + (\Sigma \rightarrow \Lambda) \right] + \\ & + \frac{1}{\pi} \int \frac{\text{Im } \Phi(v', \Delta^2)}{v' - v} dv' = 0. \quad (42') \end{aligned}$$

Фиксируя  $\Delta^2 = 0^1$ ) и пренебрегая отклонением  $r$  от единицы, мы получаем для барионов линейную массовую формулу

$$2m_\Xi + 2m_p - 3m_\Lambda - m_\Sigma = C, \quad C = O(f^2), \quad (45')$$

Поправки же можно выразить через вклад непрерывного спектра, т. е. через дисперсионный интеграл от  $\text{Im } \Phi$ . Формально эту величину можно связать с мнимой частью амплитуды рассеяния шпуриона на барионе

$$(D_K^+) + \Xi^- \rightarrow (D_K^-) + p. \quad (46)$$

<sup>1)</sup> Заметим, что в этом случае, когда внешние массы различны, значение  $\Delta^2 = 0$  можно получить, налагая условие  $p_1 = p_2 = p$  и затем переходя к пределу  $p \rightarrow \infty$ . Это соответствует процедуре, которую мы использовали в работе [3] (§ 6, п. 6.3) для получения массовых формул и для записи поправок в ковариантном виде.

Можно предположить, что эта амплитуда будет сильно подавлена при высоких энергиях, поскольку в этом процессе происходит обмен большими квантовыми числами ( $\Delta S = 2$ ). Мы знаем из общих теорем<sup>1)</sup>, что основным каналом при высоких энергиях является канал, в котором нет обмена квантовыми числами. В дисперсионной теории это соображение может служить объяснением малой величины поправок к массовым формулам.

**3.4.** В качестве последнего примера рассмотрим случай, когда  $t_\beta$  является плотностью тока. В частности, мы рассмотрим изменяющий странность векторный ток (с  $\Delta Q = \Delta S$ ), который описывает, например, распад  $K \rightarrow \text{лев}$ , и свяжем формфакторы этого процесса с электромагнитными формфакторами.

Для этого рассмотрим коммутатор изменяющего странность заряда  $Q_K^+$  и тока  $J^{(K^-)}$ , изменяющего странность противоположным образом,

$$[Q_K^+, J_\mu^{(K^-)}] = J_\mu^{(Q)} + \frac{3}{2} J_\mu^{(Y)}. \quad (47)$$

Напомним определение матричного элемента тока между состояниями псевдоскалярных частиц

$$\langle p_1 | J_\mu^{(\alpha)} | p_2 \rangle = c_{12}^\alpha [(p_1 + p_2)_\mu G_1^{(\alpha)}(\Delta^2) + (p_1 - p_2)_\mu G_2^{(\alpha)}(\Delta^2)],$$

где

$$G_1^{(\alpha)}(0) = r_\alpha.$$

Если  $J_\mu^{(\alpha)}$  — сохраняющийся ток (как в случае токов  $J^{(3)}$  и  $J^{(Y)}$ , если мы рассматриваем полусильное взаимодействие, нарушающее  $SU_3$ -симметрию), то

$$\partial_\mu J_\mu^{(\alpha)} = 0, \quad (48)$$

откуда

$$G_2^{(\alpha)}(\Delta^2) = 0 \quad (49)$$

и

$$r_\alpha = 1. \quad (50)$$

Возьмем теперь матричный элемент оператора (47) между состояниями  $\pi^+$

$$\langle \pi^+ | [Q_K^+, J_\mu^{(K^-)}] | \pi^+ \rangle = \langle \pi^+ | J_\mu^{(Q)} | \pi^+ \rangle. \quad (51)$$

<sup>1)</sup> См., например, работу [7].

Чтобы вычислить левую часть этого равенства, запишем ее в ковариантном виде

$$\int \langle \pi^+ (p_1) | [D_K^+(z), J_\mu^{(K^-)}(0)] | \pi^+ (p_2) \rangle \theta(-z_0) d^4 z \quad (52)$$

и введем величину

$$\begin{aligned} \Phi_\mu(k) &= \int d^4 z \theta(-z_0) \langle \pi^+ | [D_K^+(z), J_\mu^{(K^-)}(0)] | \pi^+ \rangle e^{ikz}, \\ \langle \pi^+ | [Q_K^+, J_\mu^{(K^-)}] | \pi^+ \rangle &= \lim_{k \rightarrow 0} \Phi_\mu(k). \end{aligned} \quad (53)$$

Из соображений инвариантности

$$\begin{aligned} \Phi_\mu(k) &= (p_1 + p_2)_\mu \Phi_1(v, \Delta^2) + \\ &+ (p_1 - p_2)_\mu \Phi_2(v, \Delta^2) + k_\mu \Phi_3(v, \Delta^2), \end{aligned} \quad (54)$$

поэтому мы получаем равенства

$$\Phi_1(0, \Delta^2) = G_{1\pi\pi}^{(Q)}(\Delta^2), \quad (55)$$

$$\Phi_2(0, \Delta^2) = 0. \quad (56)$$

Как обычно, для  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  можно написать следующие дисперсионные представления (мы явно выделяем вклад полюса, соответствующего  $\bar{K}_0$ ):

$$\begin{aligned} \Phi_1(v, \Delta^2) &= \frac{(m_K^2 - m_\pi^2) r_{\pi K}}{m_K^2 - m_\pi^2 - 2m_\pi v} G_{1\pi K}^{(-)}(\Delta^2) + \frac{1}{\pi} \int \frac{\text{Im } \Phi_1(v', \Delta^2)}{v' - v} dv', \\ & \quad (57) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(v, \Delta^2) &= \frac{(m_K^2 - m_\pi^2) r_{\pi K}}{m_K^2 - m_\pi^2 - 2m_\pi v} G_{2\pi K}^{(-)}(\Delta^2) + \frac{1}{\pi} \int \frac{\text{Im } \Phi_2(v', \Delta^2)}{v' - v} dv'. \\ & \quad (58) \end{aligned}$$

(Мы не пишем аналогичного выражения для  $\Phi_3$ , поскольку эта функция не дает вклада при  $k \rightarrow 0$ .) Используя равенства (55) и (56) [а также тот факт, что  $r_{\pi K} = 1 + O(f^2)$ ], получаем

$$G_{1\pi K}^{(-)}(\Delta^2) + \frac{1}{\pi} \int \frac{\text{Im } \Phi_1(v', \Delta^2)}{v'} dv' = G_{1\pi\pi}^{(Q)}(\Delta^2), \quad (59)$$

$$G_{2\pi K}^{(-)}(\Delta^2) + \frac{1}{\pi} \int \frac{\text{Im } \Phi_2(v', \Delta^2)}{v'} dv' = 0. \quad (60)$$

Мы видим, что отклонение  $G_{1\pi K}^{(K^-)}$  от  $G_{1\pi\pi}^{(Q)}$  (или  $G_{2\pi K}^{(K^-)}$  от нуля), представленное вкладом непрерывного спектра, равно  $O(f)$ . Разумеется, в низшем приближении равенства (59) и (60) переходят в обычные результаты  $SU_3$ -симметрии

$$G_{1\pi K}^{(-)}(\Delta^2) = G_{1\pi\pi}^{(Q)}(\Delta^2), \quad G_{2\pi K}^{(-)}(\Delta^2) = O(f).$$

Заметим, однако, еще раз, что наш метод позволяет дать однозначное определение предела точной  $SU_3$ -симметрии. Другими словами, проблемы кинематических факторов и зависимости от  $p$  в правилах сумм не существует.

Подытоживая этот параграф, мы видим, что дисперсионный подход позволяет однозначно разделить диагональные и недиагональные вклады.

Соотношения, которые получаются при учете лишь полюсного вклада, в действительности очень разумны и совпадают с теми, которые многие авторы получили ранее с помощью интуитивных соображений. В этой связи интересно отметить, что наш метод автоматически дает массовые формулы, линейные для фермионов и квадратичные для бозонов.

Можно возразить, что с точки зрения чисто группового подхода ни один выбор кинематических факторов не является выделенным. Однако мы хотим подчеркнуть, что если правила сумм представлены в виде равенства (5), то поправки можно выразить через дисперсионные интегралы, аналогичные тем, которые входят в дисперсионные соотношения при фиксированном  $\Delta^2$ .

Это позволяет использовать такие соображения, как унитарность или теорема Померанчука, для того, чтобы оценить эти поправки или найти для них верхние границы.

#### § 4. Динамические симметрии

Рассмотрим теперь приложения нашего метода к динамическим группам, включающим пространственно-временные квантовые числа, например спин и четность.

**4.1.** В этом случае основная, до сих пор не решенная проблема состоит в том, чтобы понять правильный

физический смысл результатов теории групп, в особенности их совместимость с лоренцевской инвариантностью и унитарностью [8]. С другой стороны, предложенный ранее метод [2, 3], основанный на полноте системы состояний, также оставляет открытым вопрос об интерпретации полученных результатов, поскольку вид правил сумм сильно зависит от выбора системы координат. Таким образом, в этом случае мы можем полагаться только на дисперсионный подход, который, как мы покажем на некоторых примерах, оказывается однозначным и очень полезным методом исследования этих сложных вопросов.

Рассмотрим сначала группу  $SU_3 \times SU_3$  Гелл-Манна [4], которая связывает состояния с противоположной четностью. Если установить соответствие

$$j_{\mu}^{(\alpha)} \sim \bar{\psi} \lambda_{\alpha} \gamma_{\mu} \psi, \quad (61)$$

$$\bar{j}_{\mu}^{(\alpha)} \sim \bar{\psi} \lambda_{\alpha} \gamma_5 \gamma_{\mu} \psi, \quad (62)$$

то генераторы группы будут равны

$$Q_{\alpha} = \int j_0^{(\alpha)} d^3x, \quad (63)$$

$$\bar{Q}_{\alpha} = \int \bar{j}_0^{(\alpha)} d^3x. \quad (64)$$

Коммутационные соотношения между операторами (61)–(64) нетрудно получить из коммутаторов алгебры  $SU_3$  с помощью следующего правила:

$$\begin{aligned} [\text{четный}, \text{четный}] &\rightarrow \text{четный}, \\ [\text{четный}, \text{нечетный}] &\rightarrow \text{нечетный}, \\ [\text{нечетный}, \text{нечетный}] &\rightarrow \text{четный}. \end{aligned} \quad (65)$$

Чтобы распространить дисперсионный метод на этот случай, достаточно записать генераторы в виде

$$Q_{\alpha} = \int D_{\alpha}(x) \theta(-x_0) d^4x, \quad \bar{Q}_{\alpha} = \int \bar{D}_{\alpha}(x) \theta(-x_0) d^4x, \quad (66)$$

$$D_{\alpha} = \partial_{\mu} j_{\mu}^{(\alpha)}, \quad \bar{D}_{\alpha} = \partial_{\mu} \bar{j}_{\mu}^{(\alpha)}. \quad (67)$$

При этом, как и в предыдущих параграфах, изучение одновременных коммутаторов зарядов и токов сводится к исследованию выражений

$$\int d^4x \theta(-x_0) \langle a | [D_\alpha(x), D_\beta(0)] | a \rangle e^{ikx}, \quad (68)$$

$$\int d^4x \theta(-x_0) \langle a | [D_\alpha(x), j_\mu^{(\beta)}(0)] | a \rangle e^{ikx}, \quad (69)$$

в которые могут входить как четные, так и нечетные заряды и токи.

Если мы теперь предположим, что коммутаторы всех  $D$  и  $j$  обращаются в нуль для пространственно-подобных интервалов, то выражения (68) и (69) будут полностью ковариантными и смогут служить основой для получения релятивистских дисперсионных соотношений.

В дисперсионные интегралы дают вклад одночастичные полюсы и многочастичные разрезы. Учитывая лишь полюсные вклады, мы получим соотношения между наблюдаемыми величинами и константами перенормировки, которые можно рассматривать как простейшее физическое следствие динамической группы. Разумеется, при этом остаются еще вклады от старших членов, однако можно надеяться, что по крайней мере для некоторых из этих вкладов можно дать разумную оценку, подобно тому как это делается в теории дисперсионных соотношений.

Мы хотим подчеркнуть, что все полученные таким образом равенства имеют физический смысл. По нашему мнению, это означает, что для четкой интерпретации динамических групп необходимо использовать условие причинности.

Мы проиллюстрируем эти рассуждения с помощью двух примеров. Первый пример относится к константе перенормировки аксиально-векторного тока. Мы дадим простой вывод изящного правила сумм, полученного Адлером и Вайсбергером более сложным способом с помощью ранее предложенного метода [2, 3]. В качестве второго примера мы рассмотрим коммутационные соотношения между зарядами и токами и получим два

правила сумм для аномальных магнитных моментов нулонов, физический смысл которых довольно интересен.

4.2. Рассмотрим коммутатор

$$[\bar{Q}^{(+)}, \bar{Q}^{(-)}] = 2Q^{(3)}, \quad (70)$$

где  $\bar{Q}^{\pm}$  — „аксиальные“ заряды, действующие как  $\tau^{\pm}$ , и  $Q^3$  — изовекторный заряд. Введем величину

$$F(k) = \int \langle P_1 | [\bar{D}^{(+)}(x), \bar{D}^{(-)}(0)] | P_2 \rangle e^{ikx} \theta(-x_0) d^4x \quad (71)$$

и, как в § 3, положим  $k^2 = 0$ . Из равенства (24') следует, что

$$\frac{1}{2m_a} \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\partial F(v)}{\partial v} = 1. \quad (72)$$

Полюсный член можно вычислить с помощью определения (при  $k^2 = 0$ )

$$\langle P | \bar{D}^{(+)} | N \rangle = i(m_p + m_N) \bar{u}_p \gamma_5 u_N r_A, \quad (73)$$

где константа перенормировки  $r_A$  в силу универсальности равна отношению  $g_A/g_V$ :

$$r_A = \frac{g_A}{g_A^0} = \frac{g_A}{g_V}.$$

Дисперсионное соотношение для  $F(v)$  имеет вид

$$F(v) = \frac{(m_N^2 - m_p^2)^2}{2m_p} \frac{r_A^2}{(m_N^2 - m_p^2)/2m_p - v} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{A_I(v')}{v' - v} dv' - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{A_{II}(v')}{v' - v} dv', \quad (74)$$

где

$$A_I = \frac{1}{2} (2\pi)^4 \sum_{n \neq N} \langle P | \bar{D}^{(+)} | n \rangle \langle n | \bar{D}^{(-)} | P \rangle \delta(p + k - p_n),$$

$$A_{II} = \frac{1}{2} (2\pi)^4 \sum_{n \neq N} \langle P | \bar{D}^{(-)} | n \rangle \langle n | \bar{D}^{(+)} | P \rangle \delta(p - k - p_n). \quad (75)$$



Вклад непрерывного спектра можно разумно оценить с помощью приближенного соотношения

$$\langle P | \bar{D}^{(+)} | n \rangle = i \frac{\alpha_\pi}{m_\pi^2} T_{\pi^- P, n}, \quad (76)$$

где

$$\alpha_\pi = \langle 0 | \bar{D}^{(+)} | \pi \rangle \quad (77)$$

и  $T_{\pi^- P, n}$  — амплитуда процесса  $\pi^- P \rightarrow n$ . Равенство (76) является обобщением известного соотношения Гольдбергера — Тримана [9] (которое получается, если в качестве  $|n\rangle$  взять однонейтронное состояние<sup>1)</sup>)

$$\langle P | \bar{D}^{(+)} | N \rangle = 2mi\bar{u}_P \gamma_5 u_N r_A = i\bar{u}_P \gamma_5 u_N g_{\pi N} \frac{\alpha_\pi}{m_\pi^2} \sqrt{2} \quad (78)$$

или

$$\alpha_\pi = \frac{r_A \sqrt{2} m m_\pi^2}{g_{\pi N}}. \quad (79)$$

Соотношение (76) можно получить двумя способами. Более интуитивный вывод основан на соотношении пропорциональности Гелл-Манна — Леви [10]

$$\bar{D}^{(+)} = C \Phi_\pi^{(+)} \quad (80)$$

и на предположении о том, что переход от виртуального пиона с нулевой массой к реальному пиону не вносит заметных поправок.

Более общее доказательство, аналогичное дисперсионному анализу соотношения Гольдбергера — Тримана [11], можно получить, продолжая  $\langle P | \bar{D}^{+} | n \rangle$  по квадрату импульса  $k^2 = (p - p_n)^2$ , связанного с  $\bar{D}$ , и учитывая лишь ближайший вклад, соответствующий пионному полюсу:

$$\langle P | \bar{D}^{(+)} | n \rangle = i \frac{\alpha_\pi T_{\pi P, n}}{m_\pi^2 - k^2}. \quad (81)$$

<sup>1)</sup> Чтобы получить соотношение Гольдбергера — Тримана в стандартной форме, нужно умножить обе части равенств (78) и (79) на  $g_A^0$  и учесть, что  $g_A = g_A^0 r_A$ , а константа  $\alpha_\pi$  (связанная с временем жизни пиона) равна  $g_A^0 \alpha_\pi$ .

Подставляя теперь выражение (76) в соотношения (74) и (75) и используя равенство (71), получаем

$$1 = r_A^2 + \frac{\alpha_\pi^2}{m_\pi^4} \frac{1}{\pi} \int_{m_\pi + m_\pi^2/2m}^{\infty} \frac{dv'}{v'} [\sigma_{\pi^- \rho}^{\text{полн}}(v') - \sigma_{\pi^+ \rho}^{\text{полн}}(v')]. \quad (82)$$

Наконец, используя выражение (79), получаем соотношение Адлера — Вайсбергера в окончательной форме

$$r_A^2 = \left\{ 1 + \frac{2m^2}{g_{\pi N}^2} \frac{1}{\pi} \int \frac{dv'}{v'} [\sigma_{\pi^- \rho}^{\text{полн}}(v') - \sigma_{\pi^+ \rho}^{\text{полн}}(v')] \right\}^{-1}. \quad (83)$$

Тот факт, что поправки к константе перенормировки аксиально-векторного тока удалось выразить через физические сечения, связан, разумеется, с тем, что  $\bar{D}^\pm$  имеет квантовые числа пиона. Ясно, что аналогичные результаты можно получить и для других частиц октета, например для  $K$ -мезона.

4.3. Рассмотрим теперь коммутаторы

$$[\bar{Q}_3, j_\mu^{(v)}] = 0, \quad [\bar{Q}_3, j_\mu^{(s)}] = 0, \quad (84)$$

где  $j_\mu^{(v)}$  и  $j_\mu^{(s)}$  — изовекторный и изоскалярный электромагнитные токи<sup>1)</sup>. Беря матричный элемент между протонными состояниями, получаем

$$\lim_{q \rightarrow 0} F^{(v, s)}(q) = 0, \quad (85)$$

где

$$F^{(v, s)}(q) = \epsilon_\mu \int d^4x \langle P(p_1) | [\bar{D}_3(x), j_\mu^{(v, s)}(0)] | P(p_2) \rangle e^{iqx} \theta(-x_0). \quad (86)$$

Свойства этой амплитуды очень близки к свойствам амплитуды фоторождения, рассмотренной Чью, Лоу,

<sup>1)</sup> Для вывода правил сумм, которые мы собираемся получить, так же как для вывода соотношения (83), достаточно использовать алгебру  $SU_2 \times SU_3$ .

Голдбергером и Намбу [12], которые использовали следующие переменные:

$$\begin{aligned} p &= \frac{p_1 + p_2}{2}, & v &= \frac{P \cdot q}{m}, \\ k &= p_1 + q - p_2, & \Delta^2 &= (p_1 - p_2)^2. \end{aligned} \quad (87)$$

В выражении (86) „вектор поляризации“  $\varepsilon_\mu$  может быть произвольным, но мы наложим на него условие

$$\varepsilon \cdot k = 0. \quad (88)$$

Разложим  $F$  следующим образом:

$$F = \alpha M_A + \beta M_B + \gamma M_C + \delta M_D, \quad (89)$$

где

$$\begin{aligned} M_A &= -\frac{i}{2} \gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu F_{\mu\nu}, \\ M_B &= -2i \gamma_5 P_\mu q_\nu F_{\mu\nu}, \\ M_C &= -\gamma_5 \gamma_\mu q_\nu F_{\mu\nu}, \\ M_D &= -2\gamma_5 \gamma_\mu P_\nu F_{\mu\nu} + im \gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu F_{\mu\nu}, \\ &\quad (F_{\mu\nu} = k_\mu \varepsilon_\nu - k_\nu \varepsilon_\mu) \end{aligned} \quad (90)$$

и  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  — инвариантные функции  $v, \Delta^2, q^2$ .

В пределе  $q_\mu \rightarrow 0$  остается лишь  $M_A$ , поскольку

$$M_D = \frac{1}{2} \gamma_5 \gamma \cdot q \gamma_\mu \gamma_\nu F_{\mu\nu} - M_C. \quad (90')$$

Поэтому в равенство (85) будет входить только  $\alpha(v, \Delta^2, q^2)$

$$\lim_{\substack{\Delta^2, q^2 \rightarrow 0 \\ v \rightarrow 0}} \alpha^{(v, s)}(v, \Delta^2, q^2) = 0. \quad (91)$$

Инвариантная функция  $\alpha$  может быть проанализирована с помощью дисперсионного соотношения при фиксированных  $\Delta^2 = q^2 = 0$ , точно так же, как в случае соотношения Вайсбергера — Адлера.

В пределе  $v \rightarrow 0$  мы получаем два правила сумм<sup>1)</sup>

$$r_A \mu'^{(v, s)} + \frac{1}{\pi} \int \frac{dv'}{v'} \operatorname{Im} \alpha^{(v, s)}(v') = 0, \quad (92)$$

где  $\mu'^{(v, s)}$  — изовекторный и изоскалярный аномальные магнитные моменты нуклона

$$\mu'^{(v)} = \frac{\mu'_p - \mu_N}{2}, \quad \mu'^{(s)} = \frac{\mu'_p + \mu_N}{2}.$$

Величину  $\alpha^{(v, s)}$  можно связать с суммами

$$\sum_n \langle P(p_1) | \bar{D} | n \rangle \langle n | j_\mu | P(p_2) \rangle \delta(p_1 + q - p_n), \quad (93)$$

$$\sum_n \langle P(p_1) | j_\mu | n \rangle \langle n | \bar{D} | P(p_2) \rangle \delta(p_2 - q - p_n). \quad (93')$$

Как и в предыдущем случае, с помощью соотношения (76) эту величину можно связать с амплитудой  $A$  физического фоторождения

$$\operatorname{Im} \alpha = \frac{\alpha_\pi}{m_\pi^2} \operatorname{Im} A = r_A \frac{2m}{g_{\pi p}} \operatorname{Im} A. \quad (94)$$

Окончательно мы получаем два правила сумм

$$\frac{\mu'_p + \mu_n}{2} + \frac{2m}{g_{\pi p}} \frac{1}{\pi} \int \operatorname{Im} A^{(s)}(v') \frac{dv'}{v'} = 0, \quad (95)$$

$$\frac{\mu'_p - \mu_n}{2} + \frac{2m}{g_{\pi p}} \frac{1}{\pi} \int \operatorname{Im} A^{(v)}(v') \frac{dv'}{v} = 0. \quad (96)$$

<sup>1)</sup> При вычислении нуклонного полюсного члена нужно соблюдать осторожность, поскольку приходится рассматривать отношение нулевого числителя к нулевому дисперсионному знаменателю. Эту трудность легко обойти, если ввести фиктивную разность масс между протонами в матричном элементе  $\langle P_1 | \bar{D} | P_2 \rangle$ . Устремляя затем эту разность к нулю, мы получаем полностью однозначное определение полюсного члена. Эта процедура может быть реализована физически, если рассматривать коммутаторы, в которых  $\bar{Q}_3$  заменено на  $\bar{Q}^{(+)}$ . (См. примечание на стр. 172. — Прим. ред.)

Рассмотрим физический смысл соотношений (95) и (96). Прежде всего заметим, что „результат теории групп“, соответствующий пренебрежению дисперсионными интегралами, состоит в том, что оба аномальных магнитных момента нуклона равны нулю. На это обстоятельство уже указывал Гелл-Манн. Оно следует из формулы (61) для электромагнитного тока, т. е. из факта отсутствия „элементарной“ паулиевской электромагнитной связи. Если мы рассмотрим дисперсионные поправки, то увидим, что соотношения (95) и (96) совершенно различны, поскольку большой вклад  $\Sigma$ -изобары имеется лишь в соотношении (96). Предварительная оценка этого члена с помощью модели Гурдэна — Салэна [13] показывает, что вклады  $N$  и  $N_{\Sigma}$  почти полностью сокращаются, так что остается объяснить лишь очень небольшую разность этих вкладов с помощью учета высших резонансов.

### Литература

1. Gell-Mann M., Phys. Rev., 125, 1067 (1962).
2. Fubini S., Furlan G., Physics, 4, 229 (1965).
3. Furlan G., Lannoy F., Rossetti C., Segrè G., Nuovo Cimento, 38, 1747; 40, 597 (1965).
4. Gürsey F., Radicati L. A., Phys. Rev. Letters, 13, 299 (1964).  
Sakita B., Phys. Rev., 136, B 1756 (1964).  
Gell-Mann M., Physics, 1, 63 (1964).
5. Adler S. L., Phys. Rev. Letters, 14, 1051 (1965).  
Weisberger W. I., Phys. Rev. Letters, 14, 1047 (1965).
6. Ademollo M., Gatto R., Phys. Rev. Letters, 13, 264 (1964).
7. Amati D., Foldy L., Stanghellini A., Van Hove L., Nuovo Cimento, 32, 1685 (1964).
8. Delbourgo R., Salam A., Strathdee J., IAEA preprint.
9. Goldberger M., Treiman S., Phys. Rev., 110, 1478 (1958).
10. Gell-Mann M., Lévy M., Nuovo Cimento, 16, 705 (1960).
11. Bernstein J., Fubini S., Gell-Mann M., Thirring W., Nuovo Cimento, 17, 797 (1960).
12. Chew G., Goldberger M., Low F., Nambu Y., Phys. Rev., 106, 1345 (1957).
13. Gourdin M., Salin P., Nuovo Cimento, 27, 193 (1963).
14. Alessandrini V. A., Beg M. A., Brown L. S., Phys. Rev., 144, 1137 (1966).

## ОДНОВРЕМЕННЫЕ КОММУТАТОРЫ И РАСПАДЫ $K$ -МЕЗОНОВ

К. Кэллан\*, С. Триман\*

C. G. Callan, S. B. Treiman, Phys. Rev. Letters, 16, 153 (1966)

Успешное количественное описание перенормировки аксиально-векторного тока в  $\beta$ -распаде, полученное Адлером [1] и Вайсбергером [2], стимулировало дальнейшую проверку основных гипотез, на которых основано это описание, прежде всего алгебры слабых токов, предложенной Гелл-Манном [3], и гипотезы о частичном сохранении аксиально-векторного тока. В данной статье мы рассмотрим некоторые дальнейшие приложения этих идей к исследованию лептонных распадов  $K$ - и  $\pi$ -мезонов. Мы также кратко обсудим следствия некоторого обобщения одновременных коммутационных соотношений Гелл-Манна.

Прежде всего мы рассмотрим коммутационные соотношения между слабыми токами, из которых с учетом гипотезы о частичном сохранении аксиально-векторного тока следуют соотношения между формфакторами, описывающими три моды лептонного распада  $K$ -мезона —  $K_{12}$ ,  $K_{13}$ ,  $K_{14}$ . Аналогичные соотношения связывают распады  $\pi_{12}$  и  $\pi_{13}$ . В обоих случаях в полученные соотношения входят матричные элементы вне массовой поверхности (при нулевой массе пиона). Поскольку мы не знаем надежного способа оценки влияния выхода за массовую поверхность, то нам не остается ничего другого, как просто сопоставить полученные предсказания без учета поправок с экспериментальной информацией на массовой поверхности. Согласно оказывается в общем хорошим, а в двух случаях — замечательным.

Далее мы предлагаем простое выражение для одновременного коммутатора аксиально-векторного тока и гамильтониана слабого нелептонного взаимодействия. Вместе с гипотезой о частичном сохранении это

---

\* Palmer Physical Laboratory, Princeton University, Princeton, New Jersey.

выражение приводит к связи между модами  $K \rightarrow 2\pi$  и  $K \rightarrow 3\pi$  вне массовой поверхности, а также к другим следствиям для распада  $K \rightarrow 3\pi$ . Однако эти результаты далеко не так хорошо согласуются с экспериментом.

Все наши результаты могут быть получены с помощью нижеследующего тождества (2)<sup>1)</sup>. Пусть

$$M_\mu = i \int dx e^{-iq \cdot x} \theta(x_0) \langle \beta | [j_\mu^\nu(x), B(0)] | \alpha \rangle. \quad (1)$$

Отсюда с помощью четырехмерного интегрирования по частям (пренебрегая поверхностными интегралами, что с формальной точки зрения может вызывать опасения) получаем

$$iq_\mu M_\mu = i \int dx e^{-iq \cdot x} \theta(x_0) \langle \beta | [\partial_\mu j_\mu^\nu(x), B(0)] | \alpha \rangle + \\ + i \int dx e^{-iq \cdot x} \delta(x_0) \langle \beta | [j_0^\nu(x), B(0)] | \alpha \rangle. \quad (2)$$

В качестве  $j_\mu^\nu = A_\mu^\nu$  мы возьмем те члены октета аксиально-векторных токов, которые имеют квантовые числа  $\pi^\nu$ -мезона ( $\nu = +, -, 0$ ). Воспользуемся гипотезой о частичном сохранении и свяжем дивергенцию этого тока с пионным полем известным равенством

$$\partial_\mu A_\mu^\nu = \frac{g_A m \mu^2}{g_r} \Phi^\nu, \quad (3)$$

где  $g_A$  — отношение аксиально-векторной и векторной констант связи  $\beta$ -распада,  $g_r$  — константа связи сильного пион-нуклонного взаимодействия,  $m$  — нуклонная масса и  $\mu$  — масса пиона.

Во всех приложениях мы перейдем к пределу  $q \rightarrow 0$ . При этом левая часть равенства (2) должна обратиться в нуль, если только  $M_\mu$  не имеет полюса при  $q_\mu = 0$ . В рассматриваемых случаях такие полюсы отсутствуют. Поэтому

$$i \int dx \delta(x_0) \langle \beta | [A_0^\nu(x), B(0)] | \alpha \rangle = \\ = - \frac{ig_A m}{g_r} \int dx (\mu^2 - \square) \theta(x_0) \langle \beta | [\Phi^\nu(x), B(0)] | \alpha \rangle. \quad (4)$$

<sup>1)</sup> По существу это же тождество получено в работах [4, 5].

Рассмотрим сначала лептонные распады  $K^+$ -мезона. Пусть  $|\alpha\rangle$  — состояние  $K^+$ -мезона и  $B(0) = J_\mu(0)$  — ток (векторный плюс аксиально-векторный), описывающий лептонные распады с изменением странности и соответствующий  $\Delta S/\Delta Q = 1$ . Тогда в левой части равенства (4) мы имеем хорошо известные коммутаторы токов. Если в качестве  $A_0^\nu$  взять нейтральный ток ( $\nu = 3$ , что соответствует квантовым числам  $\pi^0$ -мезона), то

$$[A_0^3(x), J_\mu^{(0)}(0)]_{x_0=0} = \frac{1}{2} \delta(x) J_\mu(0). \quad (5)$$

При этом левая часть равенства (4) совпадает с матричным элементом распада  $K^+ \rightarrow \beta + l^+ + \nu$ , а правая часть пропорциональна матричному элементу распада  $K^+ \rightarrow \beta + \pi^0 + l^+ + \nu$ , вычисленному при нулевом значении 4-импульса  $\pi^0$ -мезона  $q$ . Таким образом, мы получаем следующее равенство:

$$\langle \beta | J_\mu | K^+ \rangle = - \frac{2ig_A m}{g_r} \langle \beta \pi^0 | J_\mu | K^+ \rangle (2q_0)^{1/2}, \quad q(\pi^0) \rightarrow 0. \quad (6)$$

Если в качестве  $|\beta\rangle$  взять состояние вакуума,  $|\beta\rangle = |0\rangle$ , то из (6) будет следовать соотношение между амплитудами распадов  $K_{l2}$  и  $K_{l3}$  (последняя — вне массовой поверхности). Точно так же получается связь между распадами  $\pi_{l2}$  и  $\pi_{l3}$ . Выбирая в качестве  $\beta$  однопионное состояние,  $|\beta\rangle = |\pi^0\rangle$ , получаем соотношение между распадами  $K_{l3}$  и  $K_{l4}$ , в которых участвует нейтральный пион (амплитуда последнего процесса вне массовой поверхности).

Если теперь в равенстве (4) мы возьмем в качестве  $A^\nu$  отрицательно заряженный ток (с квантовыми числами  $\pi^-$ -мезона), то получим

$$[A_0^{(-)}(x), J_\mu(0)] = 0. \quad (7)$$

Это означает, что амплитуда распада  $K^+ \rightarrow \beta + \pi^+ + l^+ + \nu$  обращается в нуль в пределе нулевого 4-импульса  $\pi^+$ -мезона. В частности, выбирая в качестве  $|\beta\rangle$  состояние  $\pi^-$ -мезона, получаем

$$(2q_0)^{1/2} \langle \pi^+ \pi^- | J_\mu(0) | K^+ \rangle \rightarrow 0, \quad q(\pi^+) \rightarrow 0. \quad (8)$$



Рассмотрим теперь конкретные результаты для лептонных распадов  $K$ -мезона (а также  $\pi$ -мезона).

**Связь распадов  $K_{l2}$  и  $K_{l3}$ .** Ковариантный матричный элемент, описывающий распад  $K_{l2}^+$ , имеет вид

$$(2K_0)^{1/2} \langle 0 | J_\mu | K^+ \rangle = \frac{G}{\sqrt{2}} m_K f_K K_\mu, \quad (9)$$

где  $m_K$  — масса  $K$ -мезона,  $K_\mu$  — импульс  $K$ -мезона и  $f_K$  — безразмерная константа. Для распада  $K^+ \rightarrow \pi^0 + l^+ + \nu$ , в котором  $q$  — импульс пиона, матричный элемент равен

$$(2K_0)^{1/2} (2q_0)^{1/2} \langle \pi^0 | J_\mu | K^+ \rangle = \frac{G}{\sqrt{2}} [f_+(K+q)_\mu + f_-(K-q)_\mu], \quad (10)$$

где  $f_\pm$  — безразмерные формфакторы, которые, вообще говоря, зависят от переменных  $K \cdot q$  и  $q^2$ :  $f_\pm = f_\pm(K \cdot q, q^2)$  (последняя переменная, квадрат массы  $\pi^0$ -мезона, к сожалению, не является экспериментальной переменной). Полагая в равенстве (6)  $|\beta\rangle = |0\rangle$ , имеем

$$|f_K| = \left| \frac{2g_A m}{g_r m_K} \right| |f_+(0, 0) + f_-(0, 0)| = 0,32 |f_+(0, 0) + f_-(0, 0)|. \quad (11)$$

Из эксперимента следует, что формфакторы  $f_\pm$ , по-видимому, очень слабо зависят от переменной  $K \cdot q$ , когда пион находится на массовой поверхности. Пренебрежем поправками, связанными с выходом за массовую поверхность, и предположим, что в правую часть равенства (11) приближенно можно подставить формфакторы, определяемые из эксперимента. Мы будем использовать экспериментальные значения<sup>1)</sup>  $f_-/f_+ = 0,46 \pm 0,27$  и  $|f_+| = 0,16 \pm 0,01$ . При этом правая часть равенства (11) равна  $0,074 \pm 0,014$ . Экспериментальное значение для левой части равно  $|f_K| = 0,070 \pm 0,001$ . Согласие удивительно хорошее.

<sup>1)</sup> Эти и последующие данные взяты из доклада: G. H. Trilling, Proceedings of the International Conference on Weak Interactions, Argonne National Laboratory, 25–27 October 1965, не опубликовано.

Точно так же можно проанализировать распады  $\pi^+ \rightarrow l^+ + \nu$  и  $\pi^+ \rightarrow \pi^0 + l^+ + \nu$ , матричные элементы которых совпадают с выражениями (9) и (10), а результат имеет вид соотношения (11) с заменой  $m_K \rightarrow \mu$ . В этом случае, однако,  $f_- = 0$  и результат сводится к равенству<sup>1)</sup>

$$|f_\pi| = \left| \frac{g_A m}{\mu g_T} \right| |f_+(\pi)|. \quad (12)$$

Экспериментальное значение левой части 0,94, правой 0,85. Согласие снова очень хорошее.

**Связь распадов  $K_{13}$  и  $K_{14}$ .** Рассмотрим сначала распад  $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^- + l^+ + \nu$ . Его матричный элемент имеет следующую структуру:

$$\begin{aligned} (2K_0)^{1/2} (2p_0)^{1/2} (2q_0)^{1/2} \langle \pi^+ \pi^- | J_\mu | K^+ \rangle = \\ = \frac{G}{\sqrt{2}} \frac{1}{m_K} \left[ F_1(q+p)_\mu + F_2(q-p)_\mu + \right. \\ \left. + F_3(K-p-q)_\mu + \frac{F_4}{m_K^2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} K_\nu p_\rho q_\sigma \right], \quad (13) \end{aligned}$$

где  $q$  и  $p$  — импульсы  $\pi^+$ - и  $\pi^-$ -мезона соответственно. Формфакторы  $F_i$  зависят от переменных  $K \cdot p$ ,  $K \cdot q$ ,  $p \cdot q$  и, разумеется, от масс, в частности от  $q^2$ . Полагая  $q=0$ , из равенства (8) получаем

$$F_1 = F_2, \quad F_3 = 0, \quad (14)$$

где все формфакторы соответствуют нулевому 4-импульсу  $\pi^+$ -мезона, т. е. должны быть продолжены за массовую поверхность. О распаде  $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^- + e^+ + \nu$  имеется экспериментальная информация, причем формфактор  $F_3$  из-за малой величины массы позитрона по существу ненаблюдаем, поэтому о втором равенстве (14) ничего нельзя сказать. Однако данные на массовой поверхности об отношении  $F_1/F_2$ , усредненные по спектру, дают  $F_1/F_2 = 0,8 \pm 0,3$ , что хорошо согласуется с первым равенством (14) [6].

<sup>1)</sup> Мы благодарны м-ру Фишбеину (Paul Fishbane), который привлек наше внимание к этому равенству.

С другой стороны, если мы устремим к нулю импульс отрицательного  $\pi$ -мезона, то в пределе получим

$$\begin{aligned} 2|\dot{f}_+| &= \left| \frac{g_A m}{g_r m_K} \right| |F_1 + F_2|, \\ |\dot{f}_+ + \dot{f}_-| &= \left| \frac{g_A m}{g_r m_K} \right| |F_3|, \end{aligned} \quad (14')$$

где формфакторы  $F_i$  теперь соответствуют  $p(\pi^-) = 0$ . Если предположить, что формфакторы не зависят от импульсов, то эти соотношения явно противоречат равенствам (14). В самом деле, если просто пренебречь зависимостью формфакторов  $F$  от импульсов, то из данных Бёрджа и др. [6] мы получим в правой части первого равенства (14') величину  $0,70 \pm 0,07$ , в то время как левая часть равна 0,32. Разумеется, с формальной точки зрения формулы (14) и (14') не противоречат друг другу, так как они относятся к различным пределам:  $q(\pi^+) \rightarrow 0$  и  $p(\pi^-) \rightarrow 0$  соответственно. Эти пределы, однако, экспериментально недостижимы. Когда будут получены более полные данные, можно будет попытаться сделать лучшую проверку этих формул: сравнить их с физическими пределами, когда в системе покоя  $K$ -мезона стремятся к нулю соответствующие трехмерные импульсы<sup>1)</sup>.

Для распада  $K^+ \rightarrow 2\pi^0 + l^+ + \nu$  структура матричного элемента совпадает со структурой выражения (13). Устремляя к нулю импульс одного из нейтральных пионов, получаем из равенства (6) соотношения

$$\begin{aligned} |2\dot{f}_+| &= \left| \frac{2g_A m}{g_r m_K} \right| |F_1 - F_2|, \\ |\dot{f}_+ + \dot{f}_-| &= \left| \frac{2g_A m}{g_r m_K} \right| |F_3|, \end{aligned} \quad (15)$$

<sup>1)</sup> Равенство (14') на самом деле прекрасно согласуется с данными Бёрджа и др. [6]. Чтобы получить формфакторы из эксперимента, мы использовали уравнение (12) из работы Кабиббо и Максимовича [7], которое содержит ошибочно множитель 4. Это дало для формфакторов  $F_1$  и  $F_2$  вдвое большие значения.

связывающие моды  $K^+ \rightarrow \pi^0 + l^+ + \nu$  и  $K^+ \rightarrow 2\pi^0 + l^+ + \nu$ . Как и ранее формфакторы справа соответствуют нулевому импульсу одного из нейтральных пионов. В настоящее время отсутствует экспериментальная информация о распаде  $K^+ \rightarrow 2\pi^0 + l^+ + \nu$ . Если же допустить, что формфакторы этой моды, а также распада  $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^- + l^+ + \nu$  приблизительно постоянны, то с помощью правила  $\Delta I = 1/2$  мы получим  $F_2(2\pi^0) = 0$  и  $F_1(2\pi^0) = (1/\sqrt{2}) F_1(\pi^+\pi^-)$ . Для  $|F_1(\pi^+\pi^-)|$  из данных Бёрджа и др. [6] получаем значение  $2,5 \pm 0,3$ . В результате при сделанных предположениях и без учета влияния выхода за массовую поверхность мы получаем в правой части первого равенства (15) величину  $0,56 \pm 0,06$ . Экспериментальное значение левой части равно  $0,32 \pm 0,02$ . Согласие не очень хорошее, однако нужно принять во внимание, что учет выхода за массовую поверхность должен дать серьезную поправку, поскольку должно существенно сказаться сильное взаимодействие в конечном состоянии<sup>1)</sup>.

Можно попытаться проанализировать подобным образом также и нелептонные распады. Для этого подставим в равенство (4)  $B(0) = H(0)$ , где  $H$  — плотность гамилтониана, описывающего слабые нелептонные процессы с изменением странности. Предположим, что по отношению к  $SU_3$   $H$  преобразуется как  $K^0 + \bar{K}^0$ , и будем обозначать через  $H^+$  и  $H^-$  сохраняющую и нарушающую четность части  $H$  соответственно. Чтобы получить коммутатор в левой части равенства (4), воспользуемся для  $H$  кварковой моделью, подобно тому как это было сделано Гелл-Манном для токов, и примем соответствие  $H = H^+ + H^- \sim \bar{\psi}(1 + \gamma_5)\psi$  (мы опускаем  $SU_3$ -индексы у полей

<sup>1)</sup> Равенство (15) при сформулированных после него предположениях также согласуется с экспериментом. Из правила  $\Delta I = 1/2$  на самом деле следует, что  $F_1(2\pi^0) = F_1(\pi^+\pi^-)$ , а не  $F_1(2\pi^0) = (1/\sqrt{2}) F_1(\pi^+\pi^-)$ . Если учесть примечание на стр. 196, то экспериментальное значение  $F_1(\pi^+\pi^-)$  будет равно  $1,25 \pm 0,15$ . При этом первое равенство (15) в пределах экспериментальных ошибок выполняется.

кварков). Это приводит к коммутационным соотношениям

$$[A_0^3(x), H^\pm(0)]_{x_0=0} = \frac{1}{2} \delta(x) H^\pm(0), \quad (16)$$

$$[A^{(-)}(x), H(\Delta S = 1)]_{x_0=0} = [A^{(+)}(x), H(\Delta S = -1)]_{x_0=0} = 0. \quad (17)$$

Разумеется, равенства (16) и (17) могут быть справедливы независимо от того, существуют ли на самом деле кварки или нет. Они следуют также из модели нелептонных взаимодействий, в которой гамильтониан имеет вид произведения токов, если эти токи удовлетворяют соотношениям алгебры Гелл-Манна и если их эффективная связь локальна. При этом еще предполагается, что нейтральные токи введены таким образом, что  $H$  преобразуется как член октета группы  $SU_3$ .

Во всяком случае, с помощью рассмотренного выше метода эти предположения позволяют получить ряд следствий для распадов  $K \rightarrow 3\pi$ . Именно амплитуда распада  $K^+ \rightarrow 2\pi^+ + \pi^-$  должна обращаться в нуль в пределе нулевого 4-импульса  $\pi^-$ -мезона; точно так же амплитуда распада  $K^+ \rightarrow 2\pi^0 + \pi^+$  должна обращаться в нуль в пределе нулевого 4-импульса одного из  $\pi^0$ -мезонов; наконец, амплитуда распада  $K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0$  должна обращаться в нуль при нулевом значении 4-импульса любого заряженного мезона. Это не очень „приятные“ предсказания, однако они, возможно, отражают важность поправок за счет выхода за массовую поверхность в том случае, когда имеется сильное взаимодействие в конечном состоянии.

С другой стороны, для распада  $K_2^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0$  мы получаем, что в пределе нулевого 4-импульса  $\pi^0$ -мезона

$$A(K_1^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-) = \frac{2g_A m}{g_r} A[K_2^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0; q(\pi^0) = 0], \quad (18)$$

где  $A$  — инвариантная амплитуда соответствующего процесса (мы пренебрегаем малыми эффектами нарушения  $CP$ -инвариантности); аналогично для нулевого 4-импульса любого из  $\pi^0$ -мезонов в распаде  $K_2^0 \rightarrow 3\pi^0$  получаем

$$A(K_1^0 \rightarrow 2\pi^0) = \frac{2g_A^m}{g_r} A(K_2^0 \rightarrow 3\pi^0). \quad (19)$$

Рассмотрим равенство (18). Мы знаем, что амплитуда распада  $K_2^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0$  заметно меняется при изменении энергии  $\pi^0$ -мезона. Поэтому мы приближенно заменим правую часть равенства (18) физической амплитудой, взятой при нулевом *трехмерном* импульсе в системе покоя  $K_2^0$ -мезона, и пренебрежем эффектами выхода за массовую поверхность. Из экспериментальных данных об этой амплитуде при  $\mathbf{q} = 0$  мы получаем в правой части равенства (18) величину  $(0,38 \pm 0,04) \cdot 10^{-6}$ , в левой же части имеем  $(0,79 \pm 0,02) \cdot 10^{-6}$ . Согласие нельзя назвать хорошим.

Рассмотрим равенство (19). Мы не располагаем экспериментальными данными о спектре распада  $K_2^0 \rightarrow 3\pi^0$  и поэтому просто предположим, что этот спектр плоский. Пренебрегая эффектами выхода за массовую поверхность, оценим правую часть равенства (19) из вероятности распада. Эта оценка дает величину  $(0,40 \pm 0,04) \cdot 10^{-6}$ . Для левой экспериментальное значение составляет  $(0,56 \pm 0,01) \cdot 10^{-6}$ .

### Л и т е р а т у р а

1. Adler S. L., Phys. Rev. Letters, **14**, 1051 (1965).
2. Weisberger W. I., Phys. Rev. Letters, **14**, 1047 (1965).
3. Gell-Mann M., Phys. Rev., **125**, 1067 (1962); Physics, **1**, 63 (1964).
4. Fubini S., Furlan G., Rossetti C., Nuovo Cimento, **40**, 1171 (1965) (ст. 5 настоящей книги).  
Adler S. L., Phys. Rev., **137**, B1022 (1965).
5. Alessandrini V., Bég M., Brown L., Phys. Rev., **144**, 1137 (1966).
6. Birge R. W. et al., Phys. Rev., **139**, B1600 (1965).
7. Cabibbo N., Maksymowicz A., Phys. Rev., **137**, B438 (1965).

# О ВЫЧИСЛЕНИИ ФОРМФАКТОРОВ $K_{14}$ -РАСПАДА С ПОМОЩЬЮ КОММУТАТОРОВ ТОКОВ

С. Вайнберг\*

S. Weinberg, Phys. Rev. Letters, 17, 336 (1966)

В течение последних нескольких лет было показано, что с помощью гипотезы о частичном сохранении аксиально-векторного тока и коммутационных соотношений между токами можно получить матричные элементы испускания и рассеяния низкоэнергетических пионов [1, 9]<sup>1</sup>). Среди этих результатов одним из наиболее успешных является полученная Кэлланом и Триманом [2] формула для формфактора  $K_{13}$ -распада, которая очень хорошо согласуется с экспериментом<sup>2</sup>). Эти авторы проделали вычисления также для распада  $K \rightarrow 2\pi + l + \nu$  ( $l = e$  или  $\mu$ ), однако они сделали вывод, что из-за  $\pi\pi$ -взаимодействия в конечном состоянии формфакторы  $K_{14}$ -распада быстро изменяются, поэтому не имеет смысла проверять коммутаторы токов и гипотезу о частичном сохранении с помощью имеющихся экспериментальных данных о  $K_{e4}$ -распаде.

В настоящей статье показано, что Кэллан и Триман были слишком пессимистичны в своих выводах и что, последовательно используя коммутаторы токов и гипотезу о частичном сохранении, можно однозначно вычислить все формфакторы  $K_{14}$ -распада в прекрасном согласии с экспериментом. При этом мы всюду пренебрегаем взаимодействием в конечном состоянии, поэтому успех этих вычислений не только является еще одним успехом метода коммутаторов токов и гипотезы о частичном сохранении, но также служит убедительным

---

\* Department of Physics, University of California, Berkeley, California.

<sup>1</sup>) См. также ссылки в [2, 4, 5, 12].

<sup>2</sup>) Эта формула одновременно была получена также в работе [3].

подтверждением полученного недавно предсказания о малой величине длин для  $\pi\pi$ -рассеяния [4]<sup>1)</sup>.

Аксиально-векторные формфакторы  $K_{I_3}$ -распада  $F_1$ ,  $F_2$  и  $F_3$  определяются следующим образом<sup>2)</sup>:

$$\begin{aligned} \langle \pi_{qa} \pi_{pb} | A_n^\lambda(0) K_{km} \rangle = \\ = i (2\pi)^{-9/2} (8q^0 p^0 k^0)^{-1/2} \left( \frac{g_V}{m_K} \right) [(q+p)^\lambda F_1 + \\ + (q-p)^\lambda F_2 + (k-p-q)^\lambda F_3]. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $k^\lambda$  и  $q^\lambda$ ,  $p^\lambda$  — импульсы  $K$ -мезона и  $\pi$ -мезонов,  $m = \pm 1/2$  — значение  $I_3$  для  $K$ -мезона,  $a$  и  $b$  — изовекторные индексы пионов,  $A_n^\lambda$  — аксиально-векторный ток, соответствующий  $\Delta S = -1$  и  $\Delta I_3 = -n$ , и  $g_V = 1,02 \cdot 10^{-5} m_\rho^{-2}$  — константа слабого взаимодействия. Формфакторы  $F_i$  зависят от  $k \cdot q$ ,  $k \cdot p$ ,  $p \cdot q$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $m$  и  $n$ . Кэллан и Триман рассмотрели случай, когда импульс одного из пионов выходит за массовую поверхность и стремится к нулю. Они обнаружили, что значение  $F_3$  заметно зависит от того, какой импульс —  $q$  или  $p$  — стремится к нулю, и предположили, что подобная зависимость имеет место и для  $F_1$  и  $F_2$ .

Чтобы выяснить это, нужно рассмотреть случай, когда оба пиона находятся вне массовой поверхности, и последовательно воспользоваться коммутаторами токов и гипотезой о частичном сохранении<sup>3)</sup>. Определим форм-

1) Предсказанные величины равны  $a_0 = 0,20 m_\pi^{-1}$  и  $a_2 = -0,06 m_\pi^{-1}$ . (При вычислении этих длин было предположено, что они не очень велики, поэтому, строго говоря, коммутаторы токов и гипотеза о частичном сохранении не исключают возможности больших длин рассеяния.)

2) Это определение  $F_i$  совпадает с определением  $F_i$  в работе [2], а также с определением в работе [11] (т. е.  $F_1 \equiv f$ ,  $F_2 \equiv g$ ). Однако нормировка токов  $\mathcal{A}^\lambda$ , соответствующих  $\Delta S = -1$ , отличается от нормировок, использованных в работах [2, 11]: в работе [2] добавлен множитель  $-i/\sqrt{2}$ , в работе [11] опущен множитель  $ig_V$ .

3) Важность рассмотрения всех пионов вне массовой поверхности была отмечена Вайнбергом [5] в связи с вопросом о рождении многих пионов. В случае  $\pi N$ -рассеяния различие подходов с одним или обоими пионами вне массовой поверхности проявляется в различии между условиями самосогласованности (Адлер [9]), с одной стороны, и полным соотношением Адлера — Вайсбергера — с другой,



факторы как функции  $q^2$  и  $p^2$ , а также остальных инвариантов и изотопических индексов с помощью формулы

$$F_{\pi}^{-2} m_{\pi}^{-4} (q^2 + m_{\pi}^2) (p^2 + m_{\pi}^2) \int d^4 x d^4 y e^{-iq \cdot x} e^{-ip \cdot y} \times \\ \times \langle 0 | T \{ \partial_{\mu} A_a^{\mu}(x), \partial_{\nu} A_b^{\nu}(y), \mathcal{A}_n^{\lambda}(0) \} | K_{km} \rangle \equiv \\ \equiv i (2\pi)^{-3/2} (2k^0)^{-1/2} \left( \frac{g_V}{m_K} \right) [(q+p)^{\lambda} F_1 + \\ + (q-p)^{\lambda} F_2 + (k-p-q)^{\lambda} F_3], \quad (2)$$

где  $A_a^{\mu}(x)$  — аксиально-векторный ток с  $\Delta S = 0$  и  $F_{\pi}$  — амплитуда распада пиона, определяемая равенством

$$\langle 0 | \partial_{\mu} A_a^{\mu}(0) | \pi_{pb} \rangle \equiv F_{\pi} m_{\pi}^2 (2\pi)^{-3/2} (2p^0)^{-1/2} \delta_{ab}. \quad (3)$$

Это определение формфакторов вне массовой поверхности обеспечивает [6] их совпадение при  $q^2 = p^2 = -m_{\pi}^2$  с физическими формфакторами в выражении (1). Гипотеза о частичном сохранении аксиально-векторного тока состоит в том, что, несмотря на множитель  $(q^2 + m_{\pi}^2) \times (p^2 + m_{\pi}^2)$  в равенстве (2), определяемые этим равенством формфакторы медленно меняются при изменении  $q^{\mu}$  и  $p^{\nu}$ . Разлагая выражение (2) до первого порядка по  $p^{\mu}$  и  $q^{\nu}$ , мы вычислим  $F_i$  в нулевом порядке по  $p^{\mu}$  и  $q^{\mu}$  и в силу гипотезы о частичном сохранении будем использовать эти результаты для физических формфакторов. [Заметим, что множитель  $(k-p-q)^{\nu}$  перед  $F_3$  дает в матричный элемент распада вклад порядка  $m_l < m_{\pi}$ , поэтому для наших целей достаточно вычислить  $F_3$  лишь в нулевом порядке, пренебрегая в выражении (2) всеми членами первого порядка по  $q^{\mu}$  или  $p^{\nu}$ , которые дают вклад только в  $F_3$ .]

Для хронологического произведения в выражении (2) справедливо тождество

$$T \{ \partial_{\mu} A_a^{\mu}(x), \partial_{\nu} A_b^{\nu}(y), \mathcal{A}_n^{\lambda}(0) \} \equiv \\ \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial}{\partial y^{\nu}} T \{ A_a^{\mu}(x), A_b^{\nu}(y), \mathcal{A}_n^{\lambda}(0) \} - \\ - \delta(x^0 - y^0) T \{ [A_b^0(y), \partial_{\mu} A_a^{\mu}(x)], \mathcal{A}_n^{\lambda}(0) \} -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \delta(x^0 - y^0) T \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial y^{\nu}} + \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \right) [A_a^0(x), A_b^{\nu}(y)], \mathcal{A}_n^{\lambda}(0) \right\} - \\
& -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial y^{\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \right) \delta(x^0 - y^0) T \{ [A_a^0(x), A_b^{\nu}(y)], \mathcal{A}_n^{\lambda}(0) \} - \\
& -\frac{1}{2} \delta(x^0) \delta(y^0) \{ A_b^0(y), [A_a^0(x), \mathcal{A}_n^{\lambda}(0)] \} - \\
& -\frac{1}{2} \delta(x^0) \delta(y^0) \{ A_a^0(x), [A_b^0(y), \mathcal{A}_n^{\lambda}(0)] \} - \\
& -\delta(y^0) T \{ [A_b^0(y), \mathcal{A}_n^{\lambda}(0)], \partial_{\mu} A_a^{\mu}(x) \} - \\
& -\delta(x^0) T \{ [A_a^0(x), \mathcal{A}_n^{\lambda}(0)], \partial_{\nu} A_b^{\nu}(y) \}. \tag{4}
\end{aligned}$$

[При преобразовании членов с  $\delta(x^0 - y^0)$  мы воспользовались тождеством Якоби.] Первый член дает вклады порядка  $qr$ , а также  $K$ -мезонный полюс первого порядка, который дает вклад первого порядка в  $F_3$ . Всеми этими вкладками можно пренебречь. Второй член содержит множитель  $m_{\pi}^2$ , и им также можно пренебречь<sup>1)</sup>. Чтобы вычислить остальные члены, воспользуемся одновременными коммутаторами [7]<sup>2)</sup>

$$[A_a^0(x), A_b^{\nu}(y)] \delta(x^0 - y^0) = 2ig_V \varepsilon_{abc} V_c^{\nu}(x) \delta^4(x - y), \tag{5}$$

$$[A_a^0(x), \mathcal{A}_n^{\lambda}(0)] \delta(x^0) = -g_V (\tau_a)_{nm} \mathcal{Y}_m^{\lambda}(x) \delta^4(x), \tag{6}$$

$$[A_a^0(x), \mathcal{Y}_n^{\lambda}(0)] \delta(x^0) = -g_V (\tau_a)_{nm} \mathcal{A}_m^{\lambda}(x) \delta^4(x), \tag{7}$$

$$[V_a^0(x), \mathcal{A}_n^{\lambda}(0)] \delta(x^0) = -g_V (\tau_a)_{nm} \mathcal{A}_m^{\lambda}(x) \delta^4(x), \tag{8}$$

где  $V_c^{\nu}$  и  $\mathcal{Y}_n^{\lambda}$  — векторные токи с  $\Delta I = 1$ ,  $\Delta S = 0$  и  $\Delta I = 1/2$ ,  $\Delta S = -1$  соответственно,  $\varepsilon_{abc}$  — полностью антисимметричный тензор,  $\varepsilon_{123} = +1$  и  $\tau_a$  — обычные матрицы Паули. Ток  $V_c^{\nu}(x)$  сохраняется, поэтому третий член в выражении (4) равен нулю. Используя коммутаторы (5) — (7)

<sup>1)</sup> Это имеет место по крайней мере в моделях теории поля, в которых  $\partial_{\mu} A^{\mu} = F_{\pi} m_{\pi}^2 \Phi_{\pi}$ . По-видимому, единственным случаем, где этот коммутатор играет важную роль, является  $\pi\pi$ -рассеяние, рассмотренное в работе [4].

<sup>2)</sup> В правых частях коммутаторов могут присутствовать дополнительные члены с производными, которые не дают вклада в формфакторы в нулевом порядке.

для вычисления остальных членов в выражении (4) и подставляя результат в равенство (2), получаем

$$\begin{aligned} & \left( \frac{ig_V}{m_K} \right) [(q+p)^\lambda F_1 + (q-p)^\lambda F_2 + (k-q-p)^\lambda F_3] \rightarrow \\ & \rightarrow - \left( \frac{g_V}{F_\pi} \right)^2 (p_\nu - q_\nu) M^{\nu\lambda} (k, q+p) \varepsilon_{abc} (\tau_c)_{nm} - \\ & - i \left( \frac{g_V}{F_\pi} \right)^2 F_k k^\lambda \delta_{ab} \delta_{nm} + i \left( \frac{g_V}{F_\pi} \right) M^\lambda (k, q) (\tau_b \tau_a)_{nm} + \\ & + i \left( \frac{g_V}{F_\pi} \right) M^\lambda (k, p) (\tau_a \tau_b)_{nm}, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $F_K$  и  $M^\lambda(k, q)$  — амплитуды  $K_{12}$ - и  $K_{13}$ -распадов

$$\begin{aligned} \langle 0 | \partial_\lambda A_n^\lambda(0) | K_{km} \rangle &= F_K m_K^2 (2\pi)^{-3/2} (2k^0)^{-1/2} \delta_{nm}, \\ \langle \pi_{qa} | V_n^\lambda(0) | K_{km} \rangle &= -i M^\lambda(k, q) (2\pi)^{-3} (4k^0 q^0)^{-1/2} (\tau_a)_{nm} \end{aligned} \quad (10)$$

и  $M^{\nu\lambda}$  — амплитуда изовекторного радиационного распада, определяемая равенством

$$\begin{aligned} \int d^4x e^{-iq \cdot x} \langle 0 | T \{ V_c^\nu(x), A_n^\lambda(0) \} | K_{km} \rangle &= \\ = -g_V M^{\nu\lambda}(k, q) (2\pi)^{-3/2} (2k^0)^{-1/2} (\tau_c)_{nm}. \end{aligned} \quad (11)$$

Амплитуду  $M^\lambda(k, q)$  можно вычислить, зная экспериментальные формфакторы  $f_\pm(k \cdot q)$   $K_{13}$ -распада:

$$M^\lambda(k, q) \rightarrow g_V [(k+q)^\lambda f_+(0) + (k-q)^\lambda f_-(0)], \quad (12)$$

а величина  $F_K$  дается соотношением Кэллана — Тримана [2]<sup>1)</sup>

$$F_K = F_\pi [f_+(0) + f_-(0)]. \quad (13)$$

Для вычисления  $M^{\nu\lambda}$  воспользуемся методом Лоу [8]. Умножая выражение (11) на  $q_\nu$  и используя сохранение тока  $V_c^\nu(x)$  и коммутатор (8), получаем во всех порядках по  $q$

$$q_\nu M^{\nu\lambda}(k, q) = F_K k^\lambda. \quad (14)$$

<sup>1)</sup> См. примечание 1 на стр. 205.

В силу аналитичности и инвариантности величина  $M^{\nu\lambda}$  имеет вид

$$M^{\nu\lambda}(k, q) = \frac{(k-q)^\lambda [c_1 k^\nu + O(q)]}{2k \cdot q + O(q^2)} + c_2 g^{\nu\lambda} + c_3 k^\nu k^\lambda + O(q), \quad (15)$$

где первый член соответствует диаграмме, на которой  $K$ -мезон сначала взаимодействует с током  $V$ , переходит в виртуальный  $K$ -мезон и затем поглощается в вершине, соответствующей току  $\mathcal{A}$ . Величины  $c_i$  являются константами и определяются из условия (14):  $c_1 = 2F_K$ ,  $c_2 = F_K$ ,  $c_3 = 0$ , поэтому

$$M^{\nu\lambda}(k, q) = F_K \left[ \frac{(k-q)^\lambda [k^\nu + O(q)]}{k \cdot q + O(q^2)} + g^{\nu\lambda} + O(q) \right]. \quad (16)$$

Используя равенства (9), (12), (13) и (16), получаем в нулевом порядке по  $p$  и  $q$

$$F_1 = A \delta_{ab} \delta_{nm}, \quad (17)$$

$$F_2 = -i A \epsilon_{abc} (\tau_c)_{nm}, \quad (18)$$

$$F_3 = B \left[ \delta_{ab} \delta_{nm} + i \epsilon_{abc} (\tau_c)_{nm} \frac{k \cdot (p-q)}{k \cdot (p+q)} \right], \quad (19)$$

где  $A$  и  $B$  — константы,

$$A = 2f_+(0) \frac{g_V m_K}{F_\pi}, \quad B = [f_+(0) + f_-(0)] \frac{g_V m_K}{F_\pi}. \quad (20)$$

Используя экспериментальные значения для  $F_\pi$  и формфакторов  $K_{13}$ -распада<sup>1)</sup>, получаем

$$|A| = 1,20 \pm 0,07, \quad |B| = 1,75 \pm 0,33. \quad (21)$$

Формфакторы различных мод  $K_{14}$ -распада легко получаются из формул (17) — (19) и имеют следующий вид: для  $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^- + e^+ + \nu$

$$F_1 = F_2 = A, \quad F_3 = B \left[ 1 - \frac{k(p-q)}{k(p+q)} \right]; \quad (22)$$

<sup>1)</sup> G. H. Trilling, Argonne National Laboratory Report No. ANL 7130, 1965, не опубликовано.

для  $K^+ \rightarrow \pi^0 + \pi^0 + e^+ + \nu$

$$F_1 = A, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = B; \quad (23)$$

для  $K_2^0 \rightarrow \pi^- + \pi^0 + e^+ + \nu$

$$F_1 = 0, \quad F_2 = -A, \quad F_3 = -B \left[ \frac{k(p-q)}{k(p+q)} \right]. \quad (24)$$

(При определении этих формфакторов мы выбираем в качестве  $q$  и  $p$  импульсы первого и второго из указанных пионов соответственно.)

Измеренное [10] отношение усредненных по фазовому объему  $F_1$  и  $F_2$  для распада  $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^- + e^+ + \nu$  равно  $\langle F_1 \rangle / \langle F_2 \rangle = 0,8 \pm 0,3$  — в хорошем согласии с предсказанием (22). Чтобы проверить абсолютные значения  $F_1$  и  $F_2$ , вычислим с их помощью полную ширину  $K_{14}$ -распада, используя формулу, справедливую для произвольных постоянных формфакторов  $F_1$  и  $F_2$ <sup>1)</sup>:

$$\Gamma = [1,67F_1^2 + 0,32F_2^2] \cdot 10^3 \text{ сек}^{-1}. \quad (25)$$

Из соотношения (22) получаем следующее значение ширины распада  $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^- + e^+ + \nu$ :

$$\Gamma = 1990F_1^2 \text{ сек}^{-1} = (2,87 \pm 0,33) \cdot 10^3 \text{ сек}^{-1} \quad (26)$$

в прекрасном согласии с экспериментальным значением [10]  $(2,9 \pm 0,6) \cdot 10^3 \text{ сек}^{-1}$ . Удивительный успех этих предсказаний указывает на то, что в области энергий пионов, где фазовый объем  $K_{e4}$ -распада не мал, т. е. для

<sup>1)</sup> Эта формула получается из табл. 1 и соотношения (12) работы [11], если положить  $a_0 = 0$  и опустить ошибочный множитель 4. [Я хотел бы поблагодарить д-ра Калмуса (G. Kalms), указавшего на эту ошибку; исправленное соотношение приведено в работе [10], формула (9).] Если в качестве  $a_0$  взять одну или больше комптоновских длин волн пиона, то равенство (26) сильно изменится.

значений  $s_{\pi\pi}$  от  $4m_{\pi}^2$  до примерно  $7,5m_{\pi}^2$ , сильное  $\pi\pi$ -взаимодействие, по-видимому, отсутствует<sup>1)</sup>.

Анализ событий распада  $K \rightarrow \pi^+ + \pi^- + e^+ + \nu$ , проведенный в настоящее время в нескольких лабораториях, вероятно, улучшит точность экспериментальных значений  $F_1$  и  $F_2$ . Было бы также очень полезно измерить ширины других  $K_{e4}$ -распадов, для которых мы предсказываем<sup>2)</sup>.

$$\frac{\Gamma(K^+ \rightarrow 2\pi^0 + e^+ + \nu)}{\Gamma(K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^- + e^+ + \nu)} = 0,42, \quad (27)$$

$$\frac{\Gamma(K_0^2 \rightarrow \pi^- + \pi^0 + e^+ + \nu)}{\Gamma(K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^- + e^+ + \nu)} = 0,16. \quad (28)$$

Если принять правило  $\Delta I = 1/2$ , то равенства (27) и (28) смогут служить дальнейшей независимой проверкой теоретического предсказания о равенстве и постоянстве формфакторов  $F_1$  и  $F_2$  в процессе  $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^- + e^+ + \nu$ . Можно надеяться, что формфактор  $F_3$  будет измерен путем изучения распада  $K_{\mu 4}$  (это единственный способ), однако до настоящего времени ни измерений, ни вычислений этого распада, по-видимому, не проводилось.

<sup>1)</sup> При вычислениях была допущена ошибка в численном значении для амплитуды распада пиона  $F_{\pi}$ . Если вычислить  $F_{\pi}$  из соотношения Гольдбергера—Тримана (при  $g_A/g_V = 1,18$  и  $G^2/4\pi = 14,6$ ) и использовать  $2f_+ = 0,32 \pm 0,01$ , то для константы  $A$ , входящей в формфакторы  $K_{e4}$ -распада, получается значение  $|A| = 0,97 \pm 0,03$  вместо  $1,20 \pm 0,07$ . Теория предсказывает для формфакторов распада  $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^- + e^+ + \nu$  равенство  $F_1 = F_2 = A$ , в то время как указанные в тексте экспериментальные данные соответствуют  $F_1/F_2 = 0,8 \pm 0,3$  и  $|F_1| = 1,2 \pm 0,1$ . Таким образом, согласие теории с экспериментом оказывается все еще хорошим, хотя и не таким блестящим, как получилось в тексте. Это согласие по-прежнему может служить веским аргументом против сильного  $\pi\pi$ -взаимодействия. Недавно некоторые группы сообщили о непостоянстве формфактора  $f_+$  в  $K_{e3}$ -распаде. Это может изменить теоретическое значение для  $F_1$  на 10 или 20%, по-видимому, в сторону увеличения (N. Cabibbo, частное сообщение).

<sup>2)</sup> В равенстве (27) первоначально была допущена ошибка, поскольку не была учтена тождественность двух  $\pi^0$ -мезонов. Я очень признателен К. Кэсеру (С. Kacser), привлечшему мое внимание к этой ошибке.

Вернемся теперь к результатам Кэллана и Тримана. Они получили для формфакторов распада  $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^- + e^+ + \nu$  предельные значения

$$F_1(q=0) = F_2(q=0), \quad F_3(q=0) = 0, \quad (29)$$

$$|F_1(p=0) + F_2(p=0)| = 2|A|, \quad |F_3(p=0)| = 2|B| \quad (30)$$

(с тем отличием, что они использовали для  $F_\pi$  соотношение Гольдбергера — Тримана). Эти значения согласуются с нашими результатами (22), однако большое различие между двумя значениями  $F_3$  привело Кэллана и Тримана к выводу о том, что формфакторы существенно зависят от  $s_{\pi\pi}$  и что эта зависимость вызвана сильным  $\pi\pi$ -взаимодействием. Из равенства (19) мы видим, что  $F_3$  действительно быстро меняется, однако эти изменения вызваны  $K$ -мезонным полюсом<sup>1)</sup> и не имеют ничего общего с  $\pi\pi$ -взаимодействием в конечном состоянии. Этот  $K$ -полюс отсутствует в формфакторах  $F_1$  и  $F_2$ <sup>1)</sup>, поэтому нет оснований предполагать, что они являются быстро меняющимися функциями. Кэллан и Триман заметили, что отношение усредненных экспериментальных значений  $F_1$  и  $F_2$  близко к единице в согласии с их результатом при  $q=0$ , однако они не получили согласия между величиной  $|F_1 + F_2|$  при  $p=0$  и усредненными формфакторами, определяемыми из экспериментальной ширины, потому что они, к сожалению, не знали о численной ошибке, указанной в примечании на стр. 206. Они также получили предельные значения для формфакторов распада  $K^+ \rightarrow 2\pi^0 + l^+ + \nu$

$$|F_1(q=0) - F_2(q=0)| = |A|, \quad |F_3(q=0)| = |B|, \quad (31)$$

которые согласуются с нашими результатами (23), однако Кэллан и Триман ошиблись на множитель  $\sqrt{2}$ ,

<sup>1)</sup> Этот полюс соответствует диаграммам, на которых  $K$ -мезон испускает два мягких пиона, переходит в виртуальный  $K$ -мезон и затем распадается на  $l + \nu$ . Амплитуда распада  $K \rightarrow l + \nu$  пропорциональна  $p_K^\lambda = (k - q - p)^\lambda$ , так что этот полюс возникает лишь в  $F_3$ . Зная амплитуду  $KK\pi\pi$  [12, 4], можно определить вычет в этом полюсе, причем результат полностью согласуется с равенствами (19), (20) и (13).

когда использовали правило  $\Delta I = 1/2$  для того, чтобы сравнить равенство (31) с данными по распаду  $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^- + e^+ + \nu$ .

Итак, мы видим, что в настоящее время имеются четыре величины (две длины  $\pi N$ -рассеяния в  $s$ -волне [12, 4] и два формфактора  $K_{e1}$ -распада), для которых экспериментальные значения прекрасно согласуются с теоретическими предсказаниями, полученными с помощью разложения амплитуды, соответствующей случаю двух мягких пионов, по степеням их импульсов. Эти результаты позволяют высказать некоторую уверенность в том, что коммутаторы токов и гипотеза о частичном сохранении могут быть использованы для расчетов процессов с мягкими пионами, причем пренебрежение массовыми поправками и  $\pi\pi$ -взаимодействием не является опасным. Интересно выяснить, можно ли с помощью подобного расчета (он проводится в настоящее время) объяснить имеющиеся данные о рождении многих мягких пионов в сильных взаимодействиях.

### Литература

1. Nambu Y., Lurié D., Phys. Rev., 125, 1429 (1962).  
Nambu Y., Shrauner E., Phys. Rev., 128, 862 (1962).
2. Callan C. G., Treiman S. B., Phys. Rev. Letters, 16, 153 (1966) (ст. 6 настоящей книги).
3. Mathur V. S., Okubo S., Pandit L. K., Phys. Rev. Lett., 16, 371 (1966).
4. Weinberg S., Phys. Rev. Letters, 17, 616 (1966) (ст. 4 настоящей книги).
5. Weinberg S., Phys. Rev. Letters, 16, 879 (1966) (ст. 3 настоящей книги).
6. Lehmann H., Sumanzik K., Zimmermann W., Nuovo Cimento, 1, 205 (1955).
7. Gell-Mann M., Phys. Rev., 125, 1064 (1962).
8. Low F. E., Phys. Rev., 110, 974 (1958).
9. Adler S. L., Phys. Rev., 137, B1022 (1965).
10. Birge R. W., Elv R. P., Gidal G., Kalmus G. E., Kernan A., Powell W. M., Camerini U., Cline D., Fry W. F., Gaidos J. G., Murphree D., Murphy C. J., Phys. Rev., 139, B1600 (1965).
11. Cabibbo N., Maksymowicz A., Phys. Rev., 137, B438 (1965).
12. Tomozawa Y., Nuovo Cimento, 46A, 707 (1966).



КОММУТАТОРЫ ТОКОВ И НЕЛЕПТОННЫЕ  
РАСПАДЫ ГИПЕРОНОВ

М. Судзуки \*

M. Suzuki, Phys. Rev. Letters, 15, 986 (1965)

Как отметил Гелл-Манн [1], пространственные интегралы от временных компонент векторного и аксиально-векторного токов унитарного спина образуют алгебру  $SU(3) \otimes SU(3)$ . Слабые взаимодействия хорошо формулируются на языке кварковой модели в рамках  $SU(3) \otimes SU(3)$  [2].

В этой статье мы обсудим следствия для нелептонных распадов гиперонов, вытекающие из коммутационных соотношений между токами, и гипотезы о частичном сохранении аксиально-векторного тока [3]. Наша основная идея заключается в том, чтобы с помощью одновременных коммутационных соотношений между компонентами токов связать матричные элементы нелептонных распадов гиперонов с матричными элементами билинейных произведений векторного и аксиально-векторного токов унитарного спина между состояниями барионного октета.

Гамильтониан, описывающий нелептонные слабые процессы, зададим в виде произведения тока на ток <sup>1)</sup>

$$H^{(\omega)} = \frac{G}{\sqrt{2}} [(F_{\mu}^1 + iF_{\mu}^2) \cos \theta + (F_{\mu}^4 + iF_{\mu}^5) \sin \theta] \times \\ \times [(F_{\mu}^1 - iF_{\mu}^2) \cos \theta + (F_{\mu}^4 - iF_{\mu}^5) \sin \theta], \quad (1)$$

$$F_{\mu}^i = j_{\mu}^i + j_{5\mu}^i, \quad (2)$$

где верхние индексы относятся к унитарным спинам. Если токи  $j_{\mu}^i$  и  $j_{5\mu}^i$  выразить через кварковые поля, то они будут иметь такие же трансформационные свойства, как величины  $\bar{q}\gamma_{\mu}\lambda_i q$  и  $\bar{q}\gamma_{\mu}\gamma_5\lambda_i q$  соответственно.

\* California Institute of Technology, Pasadena, California.

<sup>1)</sup> Мы можем добавить числовое слагаемое  $\alpha$  к току  $j_{5\mu}^i$ ; оно не влияет на последующее рассмотрение.

Прежде всего мы покажем, что коммутаторы гамильтониана  $H^{(\omega)}$  с пространственными интегралами от токов  $j_{50}^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) легко связать с матричными элементами нелептонных распадов при помощи гипотезы о частичном сохранении аксиально-векторного тока. Используя редукционную формулу, амплитуду распада  $\beta \rightarrow \alpha + \pi$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} \langle \alpha \pi^i | \int d^3x H^{(\omega)}(\mathbf{x}, 0) | \beta \rangle &= \\ &= -i \int d^4y \langle \alpha | [j_{\pi}^i(y), \int d^3x H^{(\omega)}(\mathbf{x}, 0)]_- \theta(y) | \beta \rangle e^{-i p_{\pi} y}, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$(\square - \mu^2) \Phi_{\pi}^i(y) = j_{\pi}^i(y) \quad (4)$$

и векторы состояния нормированы ковариантным образом  $\langle \alpha | \beta \rangle = 2E_{\alpha} \delta(\mathbf{p}_{\alpha} - \mathbf{p}_{\beta})$ . Разлагая по полной системе промежуточных состояний и используя закон сохранения энергии  $E_{\beta} = E_{\alpha} + E_{\pi}$ , получаем

$$\begin{aligned} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p}_{\pi} + \mathbf{p}_{\alpha} - \mathbf{p}_{\beta}) \sum_n \left\{ \langle \alpha | H^{(\omega)}(0) | n \rangle \times \right. \\ \times \langle n | j_{\pi}^i(0) | \beta \rangle \frac{\delta(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_{\alpha})}{2E_n(E_{\alpha} - E_n)} - \langle \alpha | j_{\pi}^i(0) | n \rangle \times \\ \left. \times \langle n | H^{(\omega)}(0) | \beta \rangle \frac{\delta(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_{\beta})}{2E_n(E_n - E_{\beta})} \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

С другой стороны, матричный элемент одновременного коммутатора величин  $\int d^3x H^{(\omega)}(\mathbf{x}, 0)$  и  $J_5^i = -i \int j_{50}^i(\mathbf{x}, 0) d^3x$  равен

$$\begin{aligned} \langle \alpha | \left[ \int d^3x H^{(\omega)}(\mathbf{x}, 0), J_5^i \right] | \beta \rangle &= \\ &= (2\pi)^3 \frac{im\mu^2 g_A}{g_r K^{NN\pi}(0)} \delta(\mathbf{p}_{\alpha} - \mathbf{p}_{\beta}) \times \\ \times \sum_n \left\{ \langle \alpha | H^{(\omega)}(0) | n \rangle \langle n | j_{\pi}^i(0) | \beta \rangle \frac{\delta(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_{\alpha})}{2E_n(E_{\beta} - E_n) [\mu^2 - (E_n - E_{\beta})^2]} \right. \\ &\left. - \langle \alpha | j_{\pi}^i(0) | n \rangle \langle n | H^{(\omega)}(0) | \beta \rangle \frac{\delta(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_{\beta})}{2E_n(E_n - E_{\alpha}) [\mu^2 - (E_n - E_{\alpha})^2]} \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь мы использовали формулу, вытекающую из гипотезы о частичном сохранении аксиально-векторного тока [3]:

$$\partial_{\mu} j_{5\mu}^i = - \frac{im\mu^2 g_A}{g_r K^{NN\pi}(0)} \Phi^i, \quad (7)$$

где  $m$  — масса нуклона,  $g_A$  — аксиально-векторная константа связи  $\beta$ -распада,  $g_r^2/4\pi = 14,6$ ,  $\Phi^i$  — перенормированный оператор поля пиона,  $K^{NN\pi}(0)$  есть  $\pi N$ -вершина при нулевом переданном импульсе [ $K^{NN\pi}(-\mu^2) = 1$ ]. В правой части соотношения (6)  $E_{\alpha} \rightarrow E_{\beta}$  в пределе больших импульсов  $p_{\alpha} (= p_{\beta})$ . Предположим, что сумма по промежуточным состояниям достаточно быстро сходится, так что можно изменить порядок суммирования по  $n$  и перехода к пределу  $p_{\alpha} \rightarrow \infty$ . Тогда  $\mu^2 - (E_{\alpha} - E_n)^2$  стремится к  $\mu^2$  при  $p_{\alpha} \rightarrow \infty$ , так как  $E_n - E_{\alpha} = (M_n^2 - m_{\alpha}^2)/(E_n + E_{\alpha})$  вследствие закона сохранения импульса. В результате мы приходим к соотношению

$$\lim_{p_{\alpha} \rightarrow \infty} \langle \alpha | [J_{5\mu}^i, \int d^3x H^{(\omega)}(\mathbf{x}, 0)] | \beta \rangle / \delta(p_{\alpha} - p_{\beta}) \approx \\ \approx \frac{img_A}{g_r K^{NN\pi}(0)} \lim_{p_{\alpha} \rightarrow \infty} \langle \alpha \pi^i | \int d^3x H^{(\omega)}(\mathbf{x}, 0) | \beta \rangle / \delta(p_{\alpha} + p_{\pi} - p_{\beta}). \quad (8)$$

Если бы массы  $m_{\alpha}$  и  $m_{\beta}$  были равны, а масса пиона равнялась нулю, то соотношение (8) выполнялось бы точно. Так как мы применяем его к распадам бариона из октета на барион из октета и пион, то можно ожидать, что это равенство будет достаточно точным<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Левая часть равенства (8) определена вне энергетической поверхности, где  $E_{\alpha}^2 - E_{\beta}^2 = m_{\alpha}^2 - m_{\beta}^2$  и  $p_{\pi} = 0$ , тогда как правая часть находится на энергетической поверхности  $(E_{\alpha} - E_{\beta})^2 - (p_{\alpha} - p_{\beta})^2 = \mu^2$ . В пределе, когда  $p_{\alpha} \rightarrow \infty$ , в левой части имеем  $(E_{\alpha} - E_{\beta})^2 - (p_{\alpha} - p_{\beta})^2 = (m_{\alpha}^2 - m_{\beta}^2)^2 O(p^{-2})$ . В пределе  $p_{\pi} \rightarrow 0$  и  $p_{\alpha} \rightarrow \infty$ , когда равенство (8) становится точным, можно показать, что члены одновременного коммутатора в правой части соотношения (3), которыми мы пренебрегли, имеют более высокий порядок по  $1/p_{\alpha}$ , чем тот член, который мы учитываем. Следовательно, в приближении, когда мы пренебрегаем переходом от  $p_{\pi} = 0$  к  $p_{\pi}^2 = \mu^2$ , отбрасывание этих членов является оправданным.

Так устанавливается связь между ковариантными матричными элементами и одновременными коммутаторами.

Зная явную структуру гамильтониана  $H^{(w)}$ , мы можем получить одновременные коммутаторы <sup>1)</sup>

$$[H^c, J_5^3] = -\frac{1}{2} H^v, \quad (9a)$$

$$[H^c, J_5^1] = \frac{G}{\sqrt{2}} \cos \theta \sin \theta [j_{5\mu}^3 (j_\mu^4 - ij_\mu^5) + \frac{1}{2} (j_\mu^1 + ij_\mu^2) (j_{5\mu}^6 - ij_{5\mu}^7) + (j_\mu \leftrightarrow j_{5\mu})] + \text{Эрмит. сопр.}, \quad (9б)$$

$$[H^c, -iJ_5^2] = \frac{G}{\sqrt{2}} \cos \theta \sin \theta [j_{5\mu}^3 (j_\mu^4 - ij_\mu^5) - \frac{1}{2} (j_\mu^1 + ij_\mu^2) (j_{5\mu}^6 - ij_{5\mu}^7) + (j_\mu \leftrightarrow j_{5\mu})] - \text{Эрмит. сопр.}, \quad (9в)$$

$$[H^v, J_5^3] = -\frac{1}{2} H^c, \quad (9г)$$

$$[H^v, J_5^1] = \frac{G}{\sqrt{2}} \cos \theta \sin \theta [j_\mu^3 (j_\mu^4 - ij_\mu^5) + \frac{1}{2} (j_\mu^1 + ij_\mu^2) (j_\mu^6 - ij_\mu^7) + (j_\mu \rightarrow j_{5\mu})] + \text{Эрмит. сопр.}, \quad (9д)$$

$$[H^v, -iJ_5^2] = \frac{G}{\sqrt{2}} \cos \theta \sin \theta [j_\mu^3 (j_\mu^4 - ij_\mu^5) - \frac{1}{2} (j_\mu^1 + ij_\mu^2) (j_\mu^6 - ij_\mu^7) + (j_\mu \rightarrow j_{5\mu})] - \text{Эрмит. сопр.}, \quad (9е)$$

где  $H^c$  и  $H^v$  означают соответственно сохраняющую четность и несохраняющую четность части гамильтониана  $H^{(w)}$ . Используя эти коммутационные соотношения, мы уменьшаем число независимых амплитуд процесса  $\beta \rightarrow \alpha + \pi$  и устанавливаем связь матричного элемента распада  $\beta \rightarrow \alpha + \pi$  с матричным элементом перехода  $\beta \rightarrow \alpha$ , вызываемого „взаимодействиями“, которые определяются правыми частями выписанных соотношений.

<sup>1)</sup> Мы предполагаем, что коммутаторы между пространственной и временной компонентами не содержат более высокой сингулярности, чем  $\delta$ -функция. Это не всегда так; см., например, работу Швингера [4].

Члены  $\pm$  Эрмит. сопр. нужно опустить в тех соотношениях (9), где  $H^{v,c}$  означают части гамильтониана слабых взаимодействий с  $\Delta Y = 1$ .

Правые части соответствуют переходам с трансформационными свойствами  $8_s$  и  $27$ . Квантовое число  $C$ , т. е. зарядовая четность члена с  $Y = I = 0$ , отрицательно для мультиплетов  $8_s$  и  $27$ , возникающих из правых частей соотношений (9а) — (9в). Так как мультиплеты  $8_a$ ,  $8_s$  и  $27$ , составленные из октета барионов и октета антибарионов, имеют  $C = +$ , то

$$\langle B | [H^C, J_3^i]_- | B' \rangle = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (10)$$

Это соотношение представляет собой некоторое обобщение того факта, что полюсный несохраняющий четность переход между барионами октета запрещен в модели с октетным шпурьоном [5].

Мы перечислим вытекающие отсюда следствия, используя несохраняющие четность амплитуды. При этом не делается предположения об октетной доминантности или ему эквивалентного:

$$\begin{aligned} \Xi_0^0 &= -\frac{\sqrt{3}}{20} a(27) + \frac{\sqrt{3}}{20} a(8_{ss}) + \left(\frac{3}{80}\right)^{1/2} a(8_{as}), \\ \Xi_- &= \frac{\sqrt{6}}{20} a(27) - \frac{\sqrt{6}}{20} a(8_{ss}) - \left(\frac{3}{40}\right)^{1/2} a(8_{as}), \\ \Lambda_0^0 &= -\frac{\sqrt{3}}{20} a(27) + \frac{\sqrt{3}}{20} a(8_{ss}) - \left(\frac{3}{80}\right)^{1/2} a(8_{as}), \\ \Lambda_-^0 &= \frac{\sqrt{6}}{20} a(27) - \frac{\sqrt{6}}{20} a(8_{ss}) + \left(\frac{3}{40}\right)^{1/2} a(8_{as}), \\ \Sigma_0^+ &= -\frac{\sqrt{2}}{10} a(27) - \frac{3\sqrt{2}}{20} a(8_{ss}) - \left(\frac{1}{40}\right)^{1/2} a(8_{as}), \\ \Sigma_- &= \frac{3}{10} a(27) - \frac{3}{10} a(8_{ss}) - \left(\frac{1}{20}\right)^{1/2} a(8_{as}), \\ \Sigma_+^+ &= \frac{1}{2} a(27). \end{aligned} \quad (11)$$

Легко заметить, что

$$\sqrt{2} \Xi_0^0 + \Xi_- = 0, \quad (12a)$$

$$\sqrt{2} \Lambda_0^0 + \Lambda_-^0 = 0, \quad (12b)$$

$$\Sigma_- - \sqrt{2} \Sigma_0^+ - \Sigma_+^+ = 0. \quad (12b)$$

Соотношения (12а) и (12б) представляют собой правило  $\Delta I = 1/2$  для  $\Xi^-$  и  $\Lambda^-$ -распадов соответственно. Соотношение (12в) не является правилом  $\Delta I = 1/2$  для  $\Sigma^+$ -распадов вследствие неправильного знака перед  $\Sigma_+^+$ . Однако этот знак не может быть установлен в эксперименте, поскольку экспериментально  $\Sigma_+^+$  является либо чистой  $s$ -волной, либо чистой  $p$ -волной. Поэтому соотношение (12в) по его следствиям нельзя отличить от правила  $\Delta I = 1/2$ <sup>1)</sup>. Далее,

$$2\Sigma_-^- + \Lambda_-^0 = \sqrt{\frac{3}{2}}\Sigma_+^+ + \sqrt{3}\Sigma_0^+. \quad (13)$$

Если  $\Sigma_+^+$  является в основном  $p$ -волной, то это соотношение выполняется в пределах экспериментальной ошибки.

Сделаем теперь предположение об октетной доминантности в билинейных произведениях векторного и аксиально-векторного токов унитарного спина. Тогда мы получим дополнительное соотношение

$$\Sigma_+^+ = 0, \quad (14)$$

и, следовательно,

$$2\Sigma_-^- + \Lambda_-^0 - \sqrt{3}\Sigma_0^+ = 0. \quad (15)$$

Это соотношение первоначально было получено Ли, Сугаровой и другими авторами [6] с помощью специфических предположений. Строгое доказательство для несохраняющих четность амплитуд было дано Гелл-Манном [5], только исходя из предположения о взаимодействиях типа ток  $\times$  ток, СР-инвариантности и октетной доминантности.

В настоящем подходе несохраняющие четность амплитуды в общем случае выражаются через три независимых матричных элемента между барионами октета, а в предположении октетной доминантности — через два независимых матричных элемента. Все предсказанные соотношения очень хорошо согласуются с эксперимен-

<sup>1)</sup> Автор благодарит проф. Дашена за выяснение этого обстоятельства.

том<sup>1)</sup>). Одним из наиболее важных результатов является вывод правила  $\Delta I = 1/2$  для  $\Lambda$ - и  $\Xi$ -распадов без предположения об октетной доминантности и получение для  $\Sigma$ -распада правила сумм, экспериментально эквивалентного правилу  $\Delta I = 1/2$ .

В случае же сохраняющих четность амплитуд мы сталкиваемся с серьезной трудностью. В соответствии с нашим обсуждением [см. соотношение (10)] все сохраняющие четность амплитуды запрещены предположением об  $SU(3)$ -симметрии и гипотезой о частичном сохранении аксиально-векторного тока. Кроме того, существует и непосредственная причина для запрещения сохраняющих четность амплитуд. Предположим, что в соотношении (6) мы перешли в систему покоя частиц  $\alpha$  и  $\beta$ . Масса и энергия-импульс пиона равны нулю, следовательно, соотношение (6) описывает следующий процесс:  $\beta$  (в покое)  $\rightarrow \alpha$  (в покое) +  $\pi$  (с нулевым вектором энергии-импульса). Распад в  $p$ -волне (сохраняющий четность процесс), очевидно, в таком случае запрещен<sup>2)</sup>.

В последующих работах мы покажем, как преодолеть эту трудность с амплитудами, сохраняющими четность, и укажем дальнейшие приложения.

### Л и т е р а т у р а

1. Gell-Mann M., Ne'eman Y., The Eightfold Way, New York, 1964, p. 11; Phys. Rev., 125, 1067 (1962).
2. Gell-Mann M., Physics, 1, 63 (1964).
3. Gell-Mann M., Lévy M., Nuovo Cimento, 16, 705 (1960). Nambu Y., Phys. Rev. Letters, 4, 380 (1960).
4. Schwinger J., Phys. Rev. Letters, 3, 296 (1959) (ст. 10 настоящей книги).
5. Gell-Mann M., Phys. Rev. Letters, 12, 155 (1964). Lee B. W., Swift A. R., Phys. Rev., 136, B228 (1964).

<sup>1)</sup> Относительно современных экспериментальных данных см. работы [7].

В модели „головастиков“ связь скалярного октета с барионным октетом в основном является  $F$ -связью, как следует из анализа расщепления масс [8]. Если мы примем этот механизм в дополнение к октетной доминантности, то из соотношений (11) получим, что  $\Xi^- : \Lambda^0 : \sqrt{3} \Sigma_0^+ = 1 : -1 : 1$ . Качественно это соотношение хорошо согласуется с экспериментальными данными.

<sup>2)</sup> Этот факт был отмечен проф. Дашеном,

6. Lee B. W., Phys. Rev. Letters, **12**, 83 (1964).  
Sugavara H., Progr. Theoret. Phys. (Kyoto), **31**, 213 (1964).  
Okubo S., Phys. Letters, **8**, 362 (1964).  
Sakita B., Phys. Rev. Letters, **12**, 379 (1964).  
Rosen S. P., Phys. Rev. Letters, **12**, 408 (1964).
7. Crawford F. S., Proceedings of the International Conference on High-Energy Nuclear Physics, Geneva, 1962, ed. J. Prentki (CERN Scientific Information Service, Geneva, Switzerland, 1962), p. 825.  
Stevenson M. L. et al., Phys. Letters, **9**, 349 (1964).  
Dalitz R. H., Proceedings of the International School of Physics «Enrico Fermi» 1964, New York, в печати.
8. Coleman S., Glashow S. L., Phys. Rev., **134**, B671 (1964).  
Suzuki M., Progr. Theoret. Phys. (Kyoto), **32**, 166 (1964).



## НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ТОКОВ

В гл. 2 мы рассмотрели низкоэнергетические теоремы для испускания мягких пионов. Существует и другой тип низкоэнергетических теорем, которые описывают испускание фотона или виртуальной лептонной пары ( $\bar{\nu}_\mu \mu$  или  $\bar{\nu}_e e$ ) с нулевым или малым 4-импульсом. Поскольку фотоны и виртуальные лептонные пары слабо связаны с адронами и эта связь осуществляется через векторный и аксиально-векторный токи, то низкоэнергетические теоремы второго типа в действительности представляют собой низкоэнергетические теоремы для токов. Сначала мы изложим общий формализм и приложения, а затем рассмотрим проблему швингеровских членов и покажем, почему эти члены не дают вклада в низкоэнергетические теоремы.

### § 1. Формализм и приложения

Мы выведем низкоэнергетические теоремы для испускания фотонов и виртуальных лептонных пар, используя метод, предложенный Лоу [8]. Лоу рассмотрел процесс  $\alpha \rightarrow \beta + \gamma$  ( $\alpha$  и  $\beta$  — произвольные адронные состояния,  $\gamma$  — фотон), который описывается матричным элементом электромагнитного тока

$$M^\lambda = \langle \beta | J_{EM}^\lambda | \alpha \rangle. \quad (3.1)$$

Пусть  $k$  обозначает 4-импульс фотона. Известно, что члены порядка  $k^{-1}$  в  $M^\lambda$  возникают в результате испускания фотона из *внешних линий* матричного элемента рассеяния  $\langle \beta | \alpha \rangle$ <sup>1)</sup>. (Член порядка  $k^{-1}$  получается из функции распространения, которая следует за фотонной вершиной, точно так же, как получается член по-

<sup>1)</sup> Как и в гл. 2, мы опускаем индексы состояний in и out.

рядка  $q^{-1}$  из диаграммы на фиг. 2.1). Лоу показал, что в силу условия сохранения тока

$$\partial_\lambda J_{EM}^\lambda = 0, \quad (3.2)$$

которое означает, что

$$k_\lambda M^\lambda = 0, \quad (3.3)$$

члены порядка  $k^0$  в  $M^\lambda$  также можно определить с помощью  $\langle \beta | \alpha \rangle$ . При этом неизвестными остаются лишь члены порядка  $k$  и выше. Метод Лоу дает возможность, используя только  $\langle \beta | \alpha \rangle$ , построить матричный элемент  $M^{\lambda I}$ , который

1) отличается от суммы фотонных вставок во внешние линии только слагаемыми, которые либо *не зависят* от  $k$ , либо имеют порядок  $k$  или выше, и

2) удовлетворяет приближенному условию сохранения

$$k_\lambda M^{\lambda I} = O(k^2). \quad (3.4)$$

Заметим, что члены вида  $k \cdot q_1 / k \cdot q_2$ , соответствующие вставкам во внешние линии, имеют нулевой порядок по  $k$ , но тем не менее *зависят* от  $k^1$ , и поэтому в соответствии со свойством 1 включены в  $M^{\lambda I}$ . За деталями построения мы отсылаем читателя к работе [8]. Здесь мы только покажем, что свойства 1 и 2 приводят к равенству

$$M^\lambda = M^{\lambda I} + O(k). \quad (3.5)$$

Для этого заметим, что из свойства 1 следует соотношение

$$M^\lambda - M^{\lambda I} = \text{const} + O(k). \quad (3.6)$$

---

<sup>1)</sup> Такие члены могут возникать только из фотонных вставок во внешние линии, так как лишь вставки во внешние линии приводят к знаменателям вида  $k \cdot q_2$ , которые стремятся к нулю при  $k \rightarrow 0$ . Сумма фотонных вставок во внутренние линии разлагается в ряд Тэйлора  $C_0 + C_1 \cdot k + \dots$

Кроме того, в силу равенства (3.3) и свойства 2 имеем

$$k_\lambda (M^\lambda - M^{\lambda'}) = O(k^2). \quad (3.7)$$

Сравнивая соотношения (3.6) и (3.7), мы видим, что  $\text{const} = 0$ , а это эквивалентно равенству (3.5).

Простейшей иллюстрацией результатов Лоу является теорема Кролла — Рудермана для фоторождения пиона, рассмотренная в гл. 2. Фоторождение пиона описывается матричным элементом  $\langle \pi N | J_{EM}^\lambda | N \rangle$ . Соответствующий процесс без участия фотона  $N \rightarrow \pi N$  представляет собой не что иное, как пион-нуклонную вершину. Фотонные вставки во внешние линии соответствуют диаграммам борновского приближения, изображенным на фиг. 2.3. Так как дивергенция суммы вкладов этих диаграмм равна нулю, то борновское приближение для фоторождения пиона совпадает с величиной  $M^{\lambda'}$  в методе Лоу и поэтому является полной амплитудой фоторождения с точностью до членов порядка  $k$ . Это и есть теорема Кролла — Рудермана. Другим полезным и практически важным приложением метода Лоу является вычисление радиационных поправок к амплитудам процессов рассеяния и распада, связанных с мягкими фотонами<sup>1)</sup>.

Метод Лоу может быть также обобщен на случай несохраняющихся токов. Предположим, что равенства (3.2) и (3.3) заменены следующими:

$$M^\lambda = \langle \beta | J^\lambda | \alpha \rangle, \quad \partial_\lambda J^\lambda = D, \quad k_\lambda M^\lambda = i \langle \beta | D | \alpha \rangle. \quad (3.8)$$

Тогда легко показать [1], что члены порядка  $k^{-1}$  и  $k^0$  в  $M^\lambda$  можно выразить через матричный элемент  $\langle \beta | D | \alpha \rangle$ . Этот метод можно использовать, например, для вычисления матричного элемента испускания виртуальной лептонной пары с малым 4-импульсом в реакции

<sup>1)</sup> Результаты Лоу справедливы в низшем исчезающем порядке по электромагнитному взаимодействию. Можно показать, что во всех порядках по электромагнитному взаимодействию  $M^\lambda$  содержит не только члены порядка  $k^{-1}$  и  $k^0$ , но и члены порядка  $\ln k$ , и получить явный вид сингулярных членов. Это позволяет, в частности, найти так называемые инфракрасные особенности матричных элементов упругих процессов (см. [9]). — *Прим. ред.*

$\alpha \rightarrow \beta + e + \bar{\nu}_e$ . Данный процесс описывается эффективным лагранжианом (1.14в); соответствующий адронный матричный элемент имеет вид

$$\langle \beta | \mathfrak{F}_1^\lambda + i\mathfrak{F}_2^\lambda - \mathfrak{F}_2^{5\lambda} - i\mathfrak{F}_2^{5\lambda} | \alpha \rangle. \quad (3.9)$$

Матричный элемент векторного тока  $\langle \beta | \mathfrak{F}_1^\lambda + i\mathfrak{F}_2^\lambda | \alpha \rangle$  удовлетворяет уравнению (3.3) и поэтому определяется непосредственно методом Лоу. Аксиально-векторный матричный элемент удовлетворяет уравнению (3.8), где оператор  $D$  пропорционален полю пиона. Как показано в работе [1] (при обычном предположении о медленном изменении матричных элементов, которое делается при формулировке гипотезы о частичном сохранении аксиально-векторного тока), с помощью обобщенного метода Лоу аксиально-векторный матричный элемент можно связать с градиентом по 4-импульсу пиона от матричного элемента процесса  $\alpha \rightarrow \beta + \pi$ .

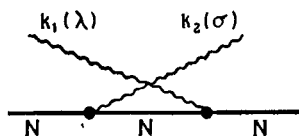
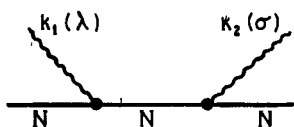
Наконец, метод Лоу легко применить к случаю, когда имеется несколько токов. Например, рассмотрим процесс, описываемый двумя токами:

$$J^\lambda(k_1) + \alpha \rightarrow J'^\sigma(k_2) + \beta, \quad (3.10)$$

где в скобках указаны 4-импульсы, переносимые каждым током. Процесс (3.10) описывается матричным элементом  $M^{\lambda\sigma}$ . Если дивергенция  $k_{1\lambda} M^{\lambda\sigma}$  известна, то применение метода Лоу (или его обобщения на случай отличной от нуля дивергенции) дает нам  $M^{\lambda\sigma}$  без членов порядка  $k_1$  и выше. Если дивергенция по второму импульсу  $k_{2\sigma} M^{\lambda\sigma}$  также известна, то повторное применение метода Лоу позволяет определить те члены порядка  $k_1$  или выше, которые имеют порядок  $k_2^{-1}$  или  $k_2^0$ . Другими словами, дважды применяя метод Лоу, мы находим  $M^{\lambda\sigma}$  с точностью до членов порядка  $k_1 k_2$  и выше.

Наиболее известным процессом, описываемым двумя токами, является комптоновское рассеяние на нуклоне. Вставки во внешние линии для этого процесса являются диаграммами борновского приближения, изображенными на фиг. 3.1. Дивергенции суммы вкладов двух борнов-

ских диаграмм, получаемые при умножении последних на  $k_{1\lambda}$  или на  $k_{2\sigma}$ , равны нулю, и потому их вклад совпадает с полной комптоновской амплитудой с точностью до членов порядка  $k_1 k_2$ . Этот результат является известной [2] низкоэнергетической теоремой для комптоновского рассеяния на нуклоне. Дрелл и Хёрн (ст. 9) объединили низкоэнергетическую теорему для комптоновского рассеяния с постулатом о дисперсионных соотношениях без вычитаний для одной из амплитуд комптоновского рассеяния и получили новое интересное



Фиг. 3.1. Диаграмма борновского приближения (фотонные вставки во внешние линии) для комптоновского рассеяния на нуклоне.

Жирной точкой обозначена полная вершина  $\gamma NN$ , включающая аномальный магнитный момент физического нуклона.

правило сумм<sup>1)</sup>. Вывод правила сумм Герасимова — Дрелла — Хёрна *не требует* предположения об алгебре токов. Как будет показано ниже, это правило на самом деле представляет собой простейший пример сверхсходящегося правила сумм.

Специфической особенностью комптоновского рассеяния является то, что описывающие его токи  $J$  и  $J'$  одинаковы. В общем случае нужно рассматривать матричный элемент

$$M^{\lambda\sigma} = \int d^4x e^{ik_1 \cdot x} \int d^4y e^{-ik_2 \cdot y} \times \\ \times \langle \beta | T(J'^{\sigma}(x) J^{\lambda}(y)) | \alpha \rangle, \quad (3.11)$$

<sup>1)</sup> Этот результат был ранее получен С. Б. Герасимовым [5]. — Прим. ред.

для которого

$$k_{1\lambda} M^{\lambda\sigma} = -i \int d^4x e^{ik_1 \cdot x} \int d^4y e^{-ik_1 \cdot y} \times \\ \times \langle \beta | \delta(x^0 - y^0) [J^0(y), J'^\sigma(x)] + T(J'^\sigma(x) \partial_\lambda J^\lambda(y)) | \alpha \rangle. \quad (3.12)$$

В выражение (3.12) входит не только дивергенция тока  $\partial_\lambda J^\lambda$ , но также и одновременный коммутатор  $[J^0, J'^\sigma]$ . Таким образом, мы можем применять метод Лоу к любым двум токам  $J$  и  $J'$ , если знаем их одновременную алгебру. Если оба тока  $J$  и  $J'$  совпадают с  $J_{EM}$  (случай комптоновского рассеяния), то  $[J^0, J'^\sigma] = 0$  с точностью до швингеровских членов. Однако, как мы покажем в § 2, швингеровские члены не дают вклада. Примером некоммутирующих токов является комптоновское рассеяние „заряженных“ фотонов, рассмотренное Бэгом [3] (заряженный фотон — это фиктивная частица, связанная с вершиной  $\mathfrak{F}_1^\lambda \pm i\mathfrak{F}_2^\lambda$ ). Получив низкоэнергетическую теорему для этого случая и постулировав дисперсионные соотношения без вычитаний для одной из амплитуд процесса с участием заряженного фотона, Бэг получил новый вывод правила сумм, связывающего магнитный момент нуклона с радиусом его заряда (правило сумм Кабиббо — Радикати), которое рассматривается в гл. 4. Приложение метода Лоу к другому случаю с двумя токами дано в работе Адлера и Дотана [1], которые выразили широкий класс поправок к амплитуде радиационного  $\mu$ -захвата ( $\mu^- + p \rightarrow n + \nu_\mu + \gamma$ ), вызванных структурой нуклона, через амплитуды фоторождения пионов. Это довольно сложная задача, поскольку в ней рассматриваются некоммутирующие токи, и один из токов — аксиально-векторный, дивергенция которого не равна нулю.

## § 2. Швингеровские члены

Из выражения (3.12) следует, что для применения метода Лоу (когда имеется более одного тока) нужно знать коммутатор временной компоненты векторного или

аксиально-векторного тока с *пространственными* компонентами токов. Эти коммутаторы имеют вид

$$\begin{aligned} [\mathfrak{F}_k^0(x), \mathfrak{F}_l^r(y)] \Big|_{x^0=y^0} &= i\delta(x-y) f_{klm} \mathfrak{F}_m^r(y) + \\ &\quad + i(\nabla_x)_t [\delta(x-y) S_{kl}^{tr}(y)], \\ [\mathfrak{F}_k^{50}(x), \mathfrak{F}_l^{5r}(y)] \Big|_{x^0=y^0} &= i\delta(x-y) f_{klm} \mathfrak{F}_m^r(y) + \\ &\quad + i(\nabla_x)_t [\delta(x-y) S_{kl}^{55tr}(y)] \end{aligned} \quad (3.13)$$

и т. д. (При написании этих соотношений мы предположили, что теория не настолько сингулярна, чтобы в них присутствовали вторая и более высокие производные  $\delta$ -функции.) Члены, пропорциональные  $i(\nabla_x)_t [ \ ]$ , не дают, разумеется, вклада в проинтегрированные коммутаторы (1.72) и (1.73). В кварковой модели формальное вычисление коммутаторов с использованием равенства (1.32) наводит на мысль, что члены с градиентами  $\delta$ -функции на самом деле отсутствуют. Однако Швингер (ст. 10) показал с помощью простых соображений, что этот вывод *неверен*. Коммутатор временной и пространственной компонент сохраняющегося тока кварков *должен* содержать члены, пропорциональные градиенту  $\delta$ -функции. Это утверждение можно доказать для векторных и аксиально-векторных токов в общем случае без предположения о сохранении тока [4]. Как мы уже указывали в гл. 1 (стр. 40), о швингеровских членах  $S_{kl}^{tr}$  и  $S_{kl}^{55tr}$  известно очень мало. Возможно, что они симметричны по индексам унитарного спина  $k$  и  $l$ <sup>1)</sup>; тогда они не дают вклада в антисимметричную по этим индексам часть коммутатора. Мы не знаем даже, являются ли они  $c$ -числами или операторами. Таким образом, может показаться, что имеются неизвестные члены, препятствующие сравнению низкоэнергетических теорем с экспериментом.

В том, что эта трудность является лишь кажущейся, можно убедиться на примере комптоновского рассеяния. В этом случае калибровочная инвариантность требует,

<sup>1)</sup> S. L. Adler, C. G. Callan, CERN Report TH. 587, 1965, не опубликовано.

чтобы физическая комптоновская амплитуда  $M^{\lambda\sigma}$  удовлетворяла равенству

$$k_{1\lambda} M^{\lambda\sigma} = k_{2\sigma} M^{\lambda\sigma} = 0. \quad (3.14)$$

Другими словами, дивергенция  $M^{\lambda\sigma}$  равна нулю независимо от величины швингеровского члена. Как указал Фейнман<sup>1)</sup>, трудность с швингеровскими членами вызвана предположением о том, что матричный элемент  $M^{\lambda\sigma}$  дается хронологическим произведением (3.11). На самом деле в нем присутствуют и другие члены, которые в выражении для дивергенции в точности сокращаются со швингеровским членом. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим матричный элемент испускания фотона с 4-импульсом  $k$  в присутствии возмущения  $\mathcal{L}$ . Стандартная редуцированная формула дает

$$\langle \beta \gamma | \mathcal{L}(0) | \alpha \rangle = \varepsilon_\lambda^* M^\lambda, \\ M_\lambda = - \frac{i}{(2k^0)^{1/2}} \int d^4x e^{ik \cdot x} \square_x^2 \langle \beta | T(A^\lambda(x) \mathcal{L}(0)) | \alpha \rangle, \quad (3.15)$$

где  $\varepsilon_\lambda$  — вектор поляризации фотона. Как обычно, калибровочная инвариантность требует, чтобы величина  $\varepsilon_\lambda^* M^\lambda$  была инвариантна относительно калибровочного преобразования  $\varepsilon_\lambda \rightarrow \varepsilon_\lambda + \Lambda k_\lambda$ , другими словами, чтобы

$$k_\lambda M^\lambda = 0. \quad (3.16)$$

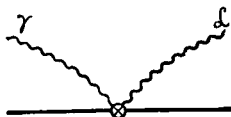
Внесем оператор  $\square_x^2$  в выражении (3.15) под знак хронологического произведения и воспользуемся уравнением движения  $\square_x^2 A^\lambda = J_{EM}^\lambda$ . Удерживая все одновременные коммутаторы, которые получаются в результате дифференцирования по времени хронологического произведения, получаем

$$M^\lambda = - \frac{i}{(2k^0)^{1/2}} \int d^4x e^{ik \cdot x} \left\{ \langle \beta | T(J_{EM}^\lambda(x) \mathcal{L}(0)) | \alpha \rangle + \right. \\ \left. + \delta(x^0) \langle \beta | [\dot{A}^\lambda(x), \mathcal{L}(0)] | \alpha \rangle + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial x^0} [\delta(x^0) \langle \beta | [A^\lambda(x), \mathcal{L}(0)] | \alpha \rangle] \right\}, \quad (3.17)$$

<sup>1)</sup> R. P. Feynman, неопубликованные замечания на XIII Международной конференции по физике высоких энергий в Беркли, сентябрь 1966 г.; см. также [6].



где мы ввели сокращение  $(\partial/\partial x^0) A^\lambda = \dot{A}^\lambda$ . Одновременной коммутатор  $[A^\lambda, \mathcal{L}(0)]$  обычно равен нулю. Но в общем случае  $\mathcal{L}$  содержит члены, пропорциональные  $A^\lambda$ , возникающие благодаря введению минимального электромагнитного взаимодействия с помощью подстановки  $\partial_\lambda \Phi_j \rightarrow (\partial_\lambda - ie_j A_\lambda) \Phi_j$ . В этом случае коммутатор  $[A^\lambda(x), \mathcal{L}(0)]$  отличен от нуля. Этот коммутатор описывает испускание фотона в той же пространственно-временной точке, в которой действует возмущение  $\mathcal{L}$ ; его иногда называют „катастрофическим“ членом<sup>1)</sup>. Ему соответствует диаграмма, изображенная на фиг. 3.2. Замечание Фейнмана



Фиг. 3.2. Типичная диаграмма в виде чайки, соответствующая „катастрофическому“ члену.

На этой диаграмме фотон (тонкая волнистая линия) выходит непосредственно из вершины  $\mathcal{L}$ , обозначенной символом  $\otimes$ .

основано на том, что при вычислении  $k_\lambda M^\lambda$  мы получаем

$$0 = k_\lambda M^\lambda = - \frac{i}{(2k^0)^{1/2}} \int d^4x e^{ik \cdot x} \{ i\delta(x^0) \langle \beta | [J_{EM}^0(x), \mathcal{L}(0)] | \alpha \rangle + \delta(x^0) k_\lambda \langle \beta | [\dot{A}^\lambda(x), \mathcal{L}(0)] | \alpha \rangle \}. \quad (3.18)$$

Если лагранжиан  $\mathcal{L}$  пропорционален другому электромагнитному току, скажем  $J_{EM}^\sigma(0)$ , то первый член в этом выражении есть как раз швингеровский член. Мы видим, что *дивергенция „катастрофического“ члена в точности сокращается со швингеровским членом.* (Формальное доказательство этого сокращения дано в приложении Б; см. также [7].)

Фейнман предположил, что это взаимное сокращение имеет место не только для матричных элементов, соответствующих электромагнитным токам, но также и для

<sup>1)</sup> В английской литературе его часто называют seagull term (т. е. член, соответствующий диаграмме, напоминающей чайку). — Прим. перев.

матричных элементов, содержащих слабые токи  $\mathfrak{F}_k^\lambda$  и  $\mathfrak{F}_k^{5\lambda}$ . Сохранение тока при этом несущественно. Например, согласно Фейнману, матричный элемент испускания двух виртуальных лептонных пар при аксиально-векторном взаимодействии не равен хронологическому произведению двух аксиально-векторных токов, а имеет вид

$$M^{\lambda\sigma} = \int d^4x e^{ik \cdot x} \langle \beta | T (\mathfrak{F}_k^{5\lambda}(x) \mathfrak{F}_l^{5\sigma}(0)) | \alpha \rangle + \text{„Катастрофические“ члены.} \quad (3.19)$$

Дивергенция „катастрофических“ членов в точности сокращается со швингеровским членом в коммутаторе  $\mathfrak{F}_k^{5\lambda}$  и  $\mathfrak{F}_l^{5\sigma}$ . В результате дивергенция полного матричного элемента имеет простой вид

$$k_\lambda M^{\lambda\sigma} = \int d^4x e^{ik \cdot x} \{ i \langle \beta | T (\partial_\lambda \mathfrak{F}_k^{5\lambda}(x) \mathfrak{F}_l^{5\sigma}(0)) | \alpha \rangle - \delta^4(x) f_{klm} \langle \beta | \mathfrak{F}_m^\sigma(0) | \alpha \rangle \}, \quad (3.20)$$

в то время как дивергенция хронологического произведения дается более сложным выражением. Из равенства (3.20) можно получить низкоэнергетические теоремы для  $M^{\lambda\sigma}$  описанным выше методом. Таким образом, с точки зрения вывода низкоэнергетических теорем смысл утверждения Фейнмана состоит в том, что если одновременно пренебречь „катастрофическими“ и швингеровскими членами, то получится правильный результат.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Здесь мы рассмотрим в рамках теории поля формальное доказательство того, что в амплитуде испускания двух фотонов  $M^{\lambda\sigma}$  дивергенция „катастрофического“ члена сокращается со швингеровским членом. Пусть сначала в плотностях лагранжиана и гамильтониана отсутствует электромагнитное поле:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}[\{\Phi\}, \{\partial_\lambda \Phi\}], \quad \mathcal{H} = -\mathcal{L} + \sum_j \partial_0 \Phi_j \Pi_j. \quad (Б.1)$$

Чтобы ввести минимальное электромагнитное взаимодействие, сделаем подстановку

$$\partial_\lambda \Phi_j \rightarrow (\partial_\lambda - ie_j A_\lambda) \Phi_j \quad (Б.2)$$

и вычислим ток с помощью соотношения

$$J_{EM}^\lambda = - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A_\lambda}. \quad (\text{Б.3})$$

Определим  $P_{j,\lambda}$  равенством  $P_{j,\lambda} = (\partial_\lambda - ie_j A_\lambda) \Phi_j$ , тогда ток можно переписать в виде

$$J_{EM}^\lambda = \sum_j \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta P_{j,\lambda}} ie_j \Phi_j. \quad (\text{Б.4})$$

Поскольку канонический импульс  $\Pi_j$  по определению равен

$$\Pi_j = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_0 \Phi_j)} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta P_{j,0}}, \quad (\text{Б.5})$$

то временная компонента тока имеет вид

$$J_{EM}^0 = \sum_j ie_j \Pi_j \Phi_j, \quad (\text{Б.6})$$

откуда следует, что гамильтониан можно записать в виде

$$\mathcal{H} = - \mathcal{L} + \sum_j (\partial_0 - ie_j A_0) \Phi_j \Pi_j + A_0 \sum_j ie_j \Phi_j \Pi_j = \mathfrak{H} + A_0 J_{EM}^0,$$

$$\mathfrak{H} = - \mathcal{L} + \sum_j P_{j,0} \Pi_j. \quad (\text{Б.7})$$

Ясно, что  $\delta \mathfrak{H} / \delta P_{j,0} = - \Pi_j + \Pi_j = 0$ , поэтому  $\mathfrak{H}$  не зависит от  $P_{j,0}$ , т. е.

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H} [\{\Phi\}, \{P_{,1-3}\}, \{\Pi\}]. \quad (\text{Б.8})$$

Ток (Б.3) можно выразить через гамильтониан:  $J_{EM}^\lambda = \delta \mathcal{H} / \delta A_\lambda$ ; в частности, пространственные компоненты равны

$$J_{EM}^r = \frac{\delta \mathfrak{H}}{\delta A_r} = - \sum_j \frac{\delta \mathfrak{H}}{\delta P_{j,r}} ie_j \Phi_j. \quad (\text{Б.9})$$

Смысл перехода к гамильтонову формализму состоит в том, что равенства (Б.6), (Б.8) и (Б.9) выражают ток только через канонические переменные, коммутационные соотношения между которыми известны.

Теперь остается лишь вычислить нужные коммутаторы. Прежде всего ясно, что

$$\begin{aligned} [\dot{A}_s(x), J_{EM}^0(y)]|_{x^0=y^0} &= [\dot{A}_0(x), J_{EM}^0(y)]|_{x^0=y^0} = \\ &= [\dot{A}_0(x), J_{EM}^r(y)]|_{x^0=y^0} = 0. \end{aligned} \quad (\text{Б.10})$$

Коммутатор  $\dot{A}_s$  и  $J_{EM}^r$  равен

$$\begin{aligned} [\dot{A}_s(x), J_{EM}^r(y)]|_{x^0=y^0} &= - \sum_{jlt} \frac{\delta^2 \mathfrak{F}}{\delta P_{j,r} \delta P_{l,t}} i e_j \Phi_j \times \\ &\times [\dot{A}_s(x), -i e_l A_l(y) \Phi_l(y)]|_{x^0=y^0} = -i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) S_s^r, \\ S^{sr} = S^{rs} &= \sum_{jl} \frac{\delta^2 \mathfrak{F}}{\delta P_{j,r} \delta P_{l,s}} e_j \Phi_j e_l \Phi_l. \end{aligned} \quad (\text{Б.11})$$

Коммутатор  $J_{EM}^0$  и  $J_{EM}^r$  при  $x^0 = y^0$  равен<sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} [J_{EM}^0(x), J_{EM}^r(y)] &= \\ &= \left[ \sum_j i e_j \Pi_j(x) \Phi_j(x), - \sum_l \frac{\delta \mathfrak{F}(y)}{\delta P_{l,r}} i e_l \Phi_l(y) \right] = \\ &= \sum_{jlm} e_j e_l \left\{ \Pi_j(x) \frac{\delta^2 \mathfrak{F}(y)}{\delta P_{l,r} \delta \Pi_m} [\Phi_j(x), \Pi_m(y)] \Phi_l(y) + \right. \\ &+ \Phi_j(x) \frac{\delta^2 \mathfrak{F}(y)}{\delta P_{l,r} \delta \Phi_m} [\Pi_j(x), \Phi_m(y)] \Phi_l(y) + \\ &+ \left. \Phi_j(x) \sum_s \frac{\delta^2 \mathfrak{F}(y)}{\delta P_{l,r} \delta P_{m,s}} [\Pi_j(x), P_{m,s}(y)] \Phi_l(y) \right\} + \\ &+ \sum_{jl} e_j e_l \Phi_j(x) [\Pi_j(x), \Phi_l(y)] \frac{\delta \mathfrak{F}(y)}{\delta P_{l,r}} = \\ &= \sum_s i \frac{\partial}{\partial x^s} [\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) S^{rs}(y)] - i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) R^r(y). \end{aligned} \quad (\text{Б.12})$$

<sup>1)</sup> Выражение (Б.12) соответствует случаю, когда все поля  $\Phi_j$  бозонины. В случае фермионных полей все канонические коммутаторы заменяются на канонические антикоммутаторы.

Коэффициент при  $\delta$ -функции  $R^r(y)$  выглядит очень сложно и может быть записан в виде

$$R^r(y) = - \frac{d}{d\lambda} \left\{ \sum_l \frac{\delta \mathcal{F} \{ [e^{ie\lambda\Phi}], [e^{ie\lambda P_{1-3}}], [e^{-ie\lambda\Pi}] \}}{\delta P_{l,r}} \right\} \times \\ \times i e_l e^{ie_l \lambda \Phi_l} \Big|_{\lambda=0}, \quad (\text{Б.13})$$

где  $\{e^{ie\lambda\Phi}\} = \{e^{ie_1\lambda\Phi_1}, e^{ie_2\lambda\Phi_2}, \dots\}$ . Таким образом, вследствие зарядовой нейтральности лагранжиана коэффициент  $R^r(y)$  тождественно равен нулю. Если выражения (Б.10) – (Б.12) подставить в равенство (3.18), то

$$\int d^4x e^{ik \cdot x} \{ i\delta(x^0) \langle \beta | [J_{EM}^0(x), J_{EM}^r(0)] | \alpha \rangle + \\ + \delta(x^0) k_\lambda \langle \beta | [\dot{A}^\lambda(x), J_{EM}^r(0)] | \alpha \rangle \} = \\ = \int d^4x e^{ik \cdot x} \sum_s \left\{ -\delta(x^0) \frac{\partial}{\partial x^s} \delta x \langle \beta | S^{rs}(0) | \alpha \rangle - \right. \\ \left. - \delta(x^0) k_s i\delta(x) \langle \beta | S^{rs}(0) | \alpha \rangle \right\} = 0, \quad (\text{Б.14})$$

откуда следует, что дивергенция „катастрофического“ члена и швингеровский член действительно сокращаются друг с другом.

### Литература

1. Adler S. L., Dothan Y., Phys. Rev., **151**, 1267 (1966).
2. Low F. E., Phys. Rev., **96**, 1428 (1954).  
Gell-Mann M., Goldberger M. L., Phys. Rev., **96**, 1433 (1954).
3. Bé g M. A. B., Phys. Rev., **150**, 1276 (1966).
4. Okubo S., Nuovo Cimento, **44A**, 1015 (1966).
- 5\*. Герасимов С. Б., Ядерная физика, **2**, 598 (1965).
6. Bell J. S., Nuovo Cimento, **50A**, 129 (1967).  
Boulware D. G., Brown L. S., Phys. Rev., **156**, 1724 (1967).  
Brown S. G., Phys. Rev., **158**, 1444 (1967).
7. Brown L. S., Phys. Rev., **150**, 1338 (1966).
8. Low F. E., Phys. Rev., **110**, 974 (1958).
- 9\*. Соловьев Л. Д., Nucl. Phys., **64**, 657 (1965); ЖЭТФ, **18**, 1740 (1965).

## ОСНОВНЫЕ СТАТЬИ

- Low F. E., Phys. Rev., **110**, 974 (1958) (оригинал, стр. 225).  
Bremsstrahlung of Very Low-Energy Quanta in Elementary Particle Collisions.
- Drell S. D., Hearn A. C., Phys. Rev. Letters, **16**, 908 (1966)  
(ст. 9 настоящей книги).  
Exact Sum Rule for Nucleon Magnetic Moments.
- Schwinger J., Phys. Rev. Letters, **3**, 296 (1959) (ст. 10 настоящей книги).  
Field Theory Commutators.

# ТОЧНОЕ ПРАВИЛО СУММ ДЛЯ МАГНИТНЫХ МОМЕНТОВ НУКЛОНА

С. Дрелл\*, А. Хёрн\*\*

S. D. Drell, A. C. Hearn, Phys. Rev. Letters, 16, 908 (1966)

В этой работе при очень общих предположениях получено правило сумм, которое связывает наблюдаемые величины и поэтому может быть проверено на опыте<sup>1)</sup>. Обозначим через  $\sigma_P(\nu)$  [ $\sigma_A(\nu)$ ] полное сечение поглощения поляризованного по кругу фотона с энергией  $\nu$  в лабораторной системе поляризованным протоном, спин которого параллелен (антипараллелен) спину фотона. Тогда правило сумм будет иметь вид

$$\int_0^{\infty} \frac{d\nu}{\nu} [\sigma_P(\nu) - \sigma_A(\nu)] = + \frac{2\pi^2\alpha}{M_p^2} \kappa_p^2 \approx 205 \text{ мкбарн}, \quad (1)$$

где  $\alpha = 1/137$ ,  $M_p$  — масса протона и  $\kappa_p = 1,79$  — аномальный магнитный момент протона в нуклонных магнетонах. Существует аналогичное правило для магнитного момента нейтрона, содержащее соответствующие нейтронные величины. Соотношение (1) непосредственно следует из дисперсионного соотношения для комптоновского рассеяния вперед, полученного Гелл-Манном, Гольдбергером и Тиррингом [1], и из низкоэнергетической теоремы для комптоновского рассеяния, доказанной Лоу [2] и Гелл-Манном и Гольдбергером [3], а также из предположения о сходимости интеграла в левой части соотношения (1). В этом можно убедиться следующим образом.

\* Stanford Linear Accelerator Center, Stanford University, Stanford, California.

\*\* Institute of Theoretical Physics, Department of Physics, Stanford University, Stanford, California.

<sup>1)</sup> Значительно раньше Дрелла и Хёрна это правило сумм было при тех же предположениях получено и исследовано С. Б. Герасимовым [12]. На его существование указывалось еще в работе Л. И. Лапидуса и Чжоу Гуан-Чжао [13]. Приложения этого правила сумм рассмотрены в работе И. Г. Азнаурян [14]. — *Прим. ред.*

Амплитуду комптоновского рассеяния вперед можно записать с помощью двух скалярных инвариантных функций квадрата энергии  $\nu^2$

$$f(\nu) = f_1(\nu^2) \mathbf{e}'^* \cdot \mathbf{e} + \nu f_2(\nu^2) i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}'^* \times \mathbf{e}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{e}'$  — векторы поперечной поляризации падающего и рассеянного вперед фотона соответственно. Дисперсионное соотношение для амплитуды с переворотом спина может быть записано с учетом предположения об отсутствии вычитания в виде <sup>1)</sup>

$$2(\operatorname{Re} f_2(\nu^2)) = + \frac{1}{4\pi^2} P \int_0^\infty \frac{[\sigma_A(\nu') - \sigma_P(\nu')] d\nu'^2}{\nu'^2 - \nu^2}. \quad (3)$$

Отсюда непосредственно следует соотношение (1), если использовать формулу

$$f_2(0) = - \frac{1}{2} \frac{\alpha}{M_p^2} \kappa_p^2, \quad (4)$$

вытекающую из низкоэнергетической теоремы [2, 3].

Идея настоящей работы чрезвычайно проста. Она заключается в объединении дисперсионного соотношения (3) и низкоэнергетической теоремы [формула (4)] с предположением об отсутствии вычитаний. Это объединение приводит к соотношению (1), представляющему интерес ввиду его экспериментальных и теоретических следствий <sup>2)</sup>.

Милберн [4] показал возможность создания пучка высокоэнергетических фотонов с круговой поляризацией при рассеянии назад лазерного пучка на электронном пучке синхротрона или линейного ускорителя при высоких энергиях <sup>3)</sup>. Лазерный пучок превращается в

<sup>1)</sup> Правые части соотношения (3) и аналогичного соотношения работы [1] имеют разные знаки. Необходимость вычитания в дисперсионном соотношении для не зависящей от спина амплитуды  $f_1(\nu)$  вытекает из знака классической томсоновской амплитуды, которая является ее низкоэнергетическим пределом (ср. [1]).

<sup>2)</sup> Это правило сумм позволяет также оценить часть неизвестного вклада от обмена двумя виртуальными фотонами между электроном и протоном при анализе сверхтонкой структуры (т. е. вклад поляризуемости) по амплитуде для реальных фотонов [15].

<sup>3)</sup> На эту возможность было указано также в работах [16, 17]. — *Прим. ред.*



поляризованный по кругу свет при прохождении через четвертьволновую пластину. При рассеянии излучения назад на электронном пучке с энергией  $E$  частота  $\nu$  падающего излучения увеличивается по закону

$$\nu' = \nu \frac{(2E/mc^2)^2}{1 + 4E(h\nu)/(mc^2)^2} \quad (5)$$

( $mc^2 = 0,51 \text{ Мэв}$ ). Таким способом можно получить поляризованные по кругу высокоэнергетические фотоны. На стэнфордском линейном ускорителе достигнута энергия  $7,8 \text{ Гэв}$  при использовании рубинового лазера [4]. Поэтому, хотя измерение величины левой части соотношения (1) сталкивается с существенными экспериментальными трудностями, не нужно думать, что они вообще непреодолимы.

С теоретической точки зрения общность исходных предположений, использованных при выводе соотношения (1), указывает на то, что оно должно выполняться. При этом предположение об отсутствии вычитания, которое позволяет с помощью этого правила сумм „вычислить“ аномальный паулиевский момент протона, является единственным предположением, в справедливости которого могут возникнуть сомнения. Ввиду того что аналогичные гипотезы об отсутствии вычитания лежат в основе многих других новых правил сумм, при выводе которых используются более ограничительные предположения об алгебре компонент токов, было бы интересно получить непосредственное подтверждение их справедливости.

Чтобы проверить, насколько хорошо данные по фоторождению при низких энергиях удовлетворяют формуле (1), мы тщательно проинтегрировали в левой части соотношения (1) данные по фоторождению в области порога и  $3,3$ -резонанса и затем оценили вклады до  $\sim 1 \text{ Гэв}$ . Интегрирование в области энергий от порога до  $500 \text{ Мэв}$  с учетом лишь вклада  $3,3$ -резонанса приводит к значению, приблизительно равному  $200 \text{ мкбарн}$ , что уже дает довольно хорошее приближение для магнитного момента. Это значение соответствует предположению о том, что сечение  $\pi^0 p$ -фоторождения равно  $270 \text{ мкбарн}$  в резонансном максимуме и что этот процесс происходит лишь

в состоянии ( $3/2, 3/2$ ), так что можно пренебречь вкладом нерезонансного фона. В этом приближении  $\kappa_p^2 = \kappa_n^2$  вследствие изовекторного характера всех вкладов в интегралы.

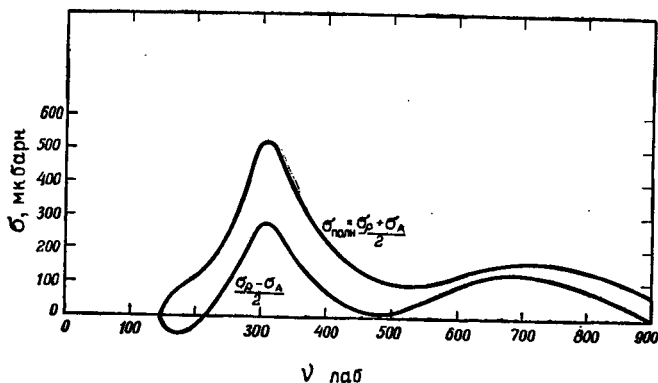
Для того чтобы произвести более детальные оценки, учитывающие изоскалярные вклады, мы использовали полное выражение для амплитуды фоторождения в модели Гурдэна — Салэна [5]. При параметризации данных вплоть до 500 Мэв в этой модели учитываются вклады 3,3-изобары и одночастичных полюсных членов и используется феноменологическая  $s$ -волновая константа вычитания. Значение интеграла при этом оказывается равным 180 мкбарн. Однако, несмотря на успех модели Гурдэна и Салэна в описании данных по полным и дифференциальным сечениям  $\pi^0 p$ - и  $\pi^+ n$ -фоторождения, не следует забывать и о том, что интересующая нас величина  $\sigma_p - \sigma_d$  в формуле (1) может быть весьма чувствительна к членам, относительно несущественным для неполяризованного сечения. Поэтому полученное значение интеграла следует рассматривать как ориентировочное, а не точное значение.

Ситуация становится более запутанной, если мы попытаемся произвести учет вкладов области энергий от 500 до  $\sim 900$  Мэв. В модели Гурдэна — Салэна для согласования с экспериментальными данными используются вклады как от феноменологического члена  $p$ -волнового фона, так и от  $d_{13}$ -изобары. Однако из анализа пион-нуклонного рассеяния известно, что в этой области энергий изобарная структура является более сложной. Использование этой простой параметризации в области энергий от 500 до 900 Мэв приводит к дополнительному вкладу в правило сумм порядка +90 мкбарн, что дает в сумме 270 мкбарн, как показано на фиг. 1. К этому мы должны добавить вклад многопионного рождения с сечением порядка 100 мкбарн в этой области энергий<sup>1)</sup>. В настоящее время не ясно, куда следует отнести этот вклад — в  $\sigma_p$  или в  $\sigma_d$ , однако возможно, что вблизи

---

<sup>1)</sup> См. [6]. В этом эксперименте не учитывается рождение нейтральных пионов. Предполагается, что их вклад составляет приблизительно 30%.

порога эти процессы идут главным образом за счет рождения  $p_{11}$ . В этом случае они дают вклад только в  $\sigma_A$ , который, следовательно, входит в правило сумм с отрицательным знаком. Таким образом, современные данные не противоречат тому, что правило сумм хорошо удовлетворяется за счет вклада от области энергий порядка  $1 \text{ Гэв}$ , однако окончательный ответ может быть получен только из эксперимента <sup>1)</sup>.



Фиг. 1. Результат использования модели Гурдэна—Салэна для  $\sigma_{\text{полн}} = \frac{1}{2}(\sigma_p + \sigma_A)$  и для  $\frac{1}{2}(\sigma_p - \sigma_A)$  в случае однопионного фоторождения.

В то же время приведенное обсуждение показывает, что данные в области энергий  $\geq 1 \text{ Гэв}$  будут играть

<sup>1)</sup> Использование в соотношении (1) лишь данных по низкоэнергетическому фоторождению пионов ( $< 500 \text{ Мэв}$ ) приводит к хорошему согласию с наблюдаемыми моментами. Аналогичный результат был получен Дреллом и Пагелсом [7] при вычислении нуклонных моментов с помощью дисперсионной теории путем продолжения электромагнитной вершины по нуклонной массе. Они пришли к выводу, что вклад абсорбтивной части амплитуды при низких энергиях приближенно передает величину и изовекторный характер нуклонных моментов, что следует из теоремы Кролла—Рудермана. В их анализе 3,3-резонанс не дает вклада. Однако подобно тому, как это было показано выше, учет низкоэнергетической области приводит к приближенно правильному результату.

решающую роль при подтверждении или опровержении соотношения (1). Измерение сечений  $\sigma_p$  и  $\sigma_n$  имеет большой интерес не только потому, что они входят в правило сумм. Дело в том, что каждое из них чувствительно к членам, без которых нельзя получить полной параметризации фотопионной амплитуды.

Поучительно также сравнить соотношение (1) с другими, недавно полученными правилами, основанными на предложенной Гелл-Манном [8] алгебре компонент токов. Одно точное правило [9], полученное с помощью операторов электрического дипольного момента, связывает разность моментов нейтрона и протона и радиус распределения нуклонного изовекторного заряда с интегралом от полных сечений  $\sigma_{1/2}$  и  $\sigma_{3/2}$  поглощения изовекторных фотонов нуклонами в состояниях с  $I = 1/2$  и  $I = 3/2$  соответственно. Именно

$$\left[ 2\pi^2\alpha \frac{(1 + \kappa_p - \kappa_n)^2 - 1}{4M^2} - 2 \frac{dG_E^v(q^2)}{dq^2} \Big|_{q^2=0} \right] = \int_0^\infty \frac{d\nu}{\nu} (\sigma_{3/2} - 2\sigma_{1/2}). \quad (6)$$

Подставляя экспериментальные значения для нуклонных моментов и изовекторного электрического радиуса в левую часть соотношения (6), мы получаем отрицательное число. Поэтому вклад  $\Delta$ -резонанса не может доминировать в правой части правила сумм, так как в этом случае она была бы положительной.

Другое правило сумм получено Фубини, Серге и Валечка [10], которые рассматривают одновременные коммутационные соотношения между зарядами кварков, генерирующими группу  $U(12)$ . Они получают

$$\frac{2\pi^2\alpha}{M^2} \left[ \kappa_v^2 - 3\kappa_s \kappa_v \left( \frac{\kappa_s}{\kappa_v} + 2R \right) \right] = \int_0^\infty \frac{d\nu}{\nu} (\sigma_p^v - \sigma_n^v), \quad (7)$$

где  $\kappa_v$ ,  $\kappa_s$  — изовекторный и изоскалярный магнитные моменты, величина  $R$  связана с отношением  $f/d$  для слабых взаимодействий и ее экспериментальное значение порядка  $1/9$ , а  $\sigma_p^v$ ,  $\sigma_n^v$  — изовекторные компоненты сечений, входящих в соотношение (1). При получении соотношения (7) приходится совершать экстраполяцию от массы  $\rho$ -мезона к нулевой массе реального фотона. Не

ясно также, должны ли моменты  $\kappa_{\nu, s}$  представлять собой полные или аномальные паулиевские моменты. Если используется аномальный момент, то второй член в формуле (7) мал, так как тогда  $\kappa_s = 0,06$ . Пренебрегая этим членом, мы можем написать

$$\frac{2\pi^2\alpha}{M^2} \kappa_{\nu}^2 = \int_{0^-}^{\infty} \frac{d\nu}{\nu} (\sigma_P^{\nu} - \sigma_A^{\nu}). \quad (8)$$

Это соотношение по форме аналогично соотношению (1) и хорошо удовлетворяется, если предположить, что в правой части доминирует вклад 3,3-резонанса. Если же используется полный момент, то согласие не такое хорошее<sup>1)</sup>.

Было бы очень интересно, если бы эксперимент мог подтвердить непосредственно справедливость соотношения (1) путем доказательства того, что разность  $\sigma_P(\nu) - \sigma_A(\nu)$  либо плавно падает до нуля, либо содержит большие вклады разных знаков, взаимно компенсирующие друг друга до того, как достигается асимптотическое нулевое значение, предсказываемое гипотезой о полюсах Редже.

### Литература

1. Gell-Mann M., Goldberger M. L., Thirring W., Phys. Rev., **95**, 1612 (1954).
2. Low F. E., Phys. Rev., **96**, 1428 (1954).
3. Gell-Mann M., Goldberger M. L., Phys. Rev., **96**, 1433 (1954).
4. Milburn R. H., Phys. Rev. Letters, **10**, 75 (1963).
5. Gourdin M., Salin Ph., Nuovo Cimento, **27**, 193 (1963).  
Salin Ph., Nuovo Cimento, **28**, 1294 (1963).
6. Allaby J. V., Lynch H. L., Ritson D. M., Phys. Rev., **142**, 887 (1966).
7. Drell S. D., Pagels H., Phys. Rev., **140**, B397 (1965).
8. Gell-Mann M., Physics, **1**, 63 (1964).
9. Cabibbo N., Radicati L. A., Phys. Letters, **19**, 697 (1966).  
Adler S. L., Phys. Rev., **143**, 1144 (1966).

<sup>1)</sup> Правила сумм для магнитных моментов были также получены из коммутаторов электромагнитного тока и аксиальных компонент заряда [11]. В этом случае подынтегральная функция пропорциональна мнимой части амплитуды фоторождения и не может быть непосредственно связана с физическими сечениями.

10. Fubini S., Segré G., Walecka J. D., Ann. of Phys., 39, 381 (1966).
11. Fubini S., Furlan G., Rossetti C., Nuovo Cimento, 40, 1171 (1965) (ст. 5 настоящей книги).  
S. Gasiorowicz, в печати.
12. Герасимов С. Б., Ядерная физика, 2, 598 (1965).
13. Лapidус Л. И., Чжоу Гуан-Чжао, ЖЭТФ, 41, 154 (1961).
14. Азнаурян И. Г., Ядерная физика, 6, 124 (1967).
15. Drell S. D., Sullivan J. D., в печати.
16. Арутюнян Ф. Р., Гольдман И. И., Туманян В. А., ЖЭТФ, 45, 312 (1963).
17. Арутюнян Ф. Р., Туманян В. А., Phys. Letters, 4, 176 (1963).

### Статья 10

## КОММУТАТОРЫ В ТЕОРИИ ПОЛЯ

Ю. Швингер\*

Julian Schwinger, Phys. Rev. Letters, 3, 296 (1959)

Имеются некоторые парадоксальные противоречия между формальными коммутационными соотношениями и характером энергетического спектра, которые подчеркивают то обстоятельство, что локализованные произведения операторов поля следует понимать как сингулярный предел произведений, определенных для несовпадающих точек. Так, обычно считается, что плотность электрического заряда дираковского поля коммутирует с плотностью тока при совпадающих временах, поскольку вектор тока является калибровочно-инвариантной билинейной комбинацией дираковских полей. Тогда из сохранения заряда следует, что плотность заряда и ее временная производная, взятые в любых двух пространственных точках при совпадающих временах, коммутируют друг с другом. Однако это невозможно, если существует низшее энергетическое состояние — вакуум. В самом деле, для любого эрмитовского оператора  $F$ , в данном случае произвольного линейного функционала

\* Harvard University, Cambridge, Massachusetts.

плотности заряда, среднее по вакууму от такого коммутатора равно

$$\langle [i\partial_0 F, F] \rangle = \langle [[F, P^0], F] \rangle = 2 \langle FP^0 F \rangle > 0.$$

Это следует из того, что оператор  $F$  будет, вообще говоря, иметь неисчезающие матричные элементы между вакуумным состоянием нулевой энергии и другими состояниями, которые с необходимостью имеют положительную энергию. То исключительное обстоятельство, что вакуумное состояние является собственным вектором оператора  $F$ , не может физически реализоваться, например, в случае вектора потока заряда. Другой пример, связанный с предыдущим, можно получить, выбирая в качестве  $F$  преобразование Фурье электрического поля, соответствующее нулевому волновому числу. Преимущество такого выбора состоит в том, что в этом случае производная по времени от оператора  $F$  пропорциональна той же компоненте Фурье вектора электрического заряда. Это позволяет заключить, что электрическое поле и вектор тока не могут коммутировать. Из соображений инвариантности и гипотезы о существовании следует, что

$$x^0 = x^{0'}: \langle i[E_k(x), j_l(x')] \rangle = \delta_{kl} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') K^2,$$

где  $K$  — вещественная константа с размерностью обратной длины или массы. Ввиду того что продольная часть электрического поля связана с плотностью заряда, мы убеждаемся, что

$$\langle i[j^0(x), j_l(x')] \rangle = \nabla_l \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') K^2.$$

Отличное от нуля и не зависящее от предыдущего среднее значение коммутатора, содержащего поперечное электрическое поле, также находится в явном противоречии с формальными коммутационными свойствами максвелловского и дираковского полей.

Коммутационные соотношения для электромагнитного поля, полученные из требований инвариантности, должны выполняться в любой модели заряженного поля. Для бесспинового поля  $\varphi(x)$ ,  $\varphi^\dagger(x)$

$$j_k = \frac{1}{2} e \left[ \varphi^\dagger \left( \frac{1}{i} \nabla_k - e A_k \right) \varphi + (i \nabla_k - e A_k) \varphi^\dagger \varphi \right],$$

где подразумевается симметризация произведений  $\psi^\dagger\psi$ . Применение формальных коммутационных соотношений в этом случае приводит к ожидаемому результату, причем

$$K^2 = e^2 \langle \psi^\dagger \psi \rangle.$$

Вектор электрического тока дираковского поля обычно определяется как предел упорядоченного по времени произведения

$$j_\mu(x) = \lim_{x' \rightarrow x} e (\psi^\dagger(x) \gamma^0 \gamma_\mu \psi(x'))_+ \varepsilon_+(x - x').$$

Однако для вычисления коммутатора тока с плотностью заряда достаточно рассмотреть произведение операторов, взятых при совпадающих временах в различных пространственных точках<sup>1)</sup>, именно

$$\begin{aligned} i \left[ \int (d\mathbf{x}) \varphi(x) j^0(x), e \psi^\dagger \left( \mathbf{x}' - \frac{1}{2} \varepsilon \right) \gamma^0 \gamma_k \psi \left( \mathbf{x}' + \frac{1}{2} \varepsilon \right) \right] = \\ = - \left( \varphi \left( \mathbf{x}' + \frac{1}{2} \varepsilon \right) - \varphi \left( \mathbf{x}' - \frac{1}{2} \varepsilon \right) \right) \times \\ \times i e^2 \psi^\dagger \left( \mathbf{x}' - \frac{1}{2} \varepsilon \right) \gamma^0 \gamma_k \psi \left( \mathbf{x}' - \frac{1}{2} \varepsilon \right). \end{aligned}$$

Если переход к пределу  $\varepsilon \rightarrow 0$  совершен симметрично в пространстве, то для среднего значения получается требуемое выражение, в котором

$$K^2 = - \frac{1}{3} i e^2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{Sp} \gamma^0 \gamma \cdot \varepsilon \langle \psi \left( \mathbf{x} + \frac{1}{2} \varepsilon \right) \psi^\dagger \left( \mathbf{x} - \frac{1}{2} \varepsilon \right) \rangle.$$

Обычно при рассмотрении коммутаторов предполагается, что среднее значение произведения полей остается ограниченным при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , тогда как структура энергетического спектра требует обратного. В простейшем случае

1) При этом следует иметь в виду дополнительный фактор, содержащий контурный интеграл от векторного потенциала. Он нужен для калибровочной инвариантности и приводит к тому, что коммутатор с поперечным электрическим полем отличен от нуля.



невзаимодействующего дираковского поля хорошо известно, что

$$\langle \psi \left( \mathbf{x} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \right) \psi^\dagger \left( \mathbf{x} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \right) \rangle = \frac{1}{2\pi^2} \frac{i\gamma^0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}}{(\boldsymbol{\varepsilon}^2)^2}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} \rightarrow 0,$$

и  $K^2$  представляет собой расходящийся предел выражения  $(2e^2/3\pi^2)(\boldsymbol{\varepsilon}^2)^{-1}$ .

Вытекающие из этого обсуждения выводы о структуре фотонной функции Грина будут рассмотрены в отдельной работе.

## ПРАВИЛА СУММ

## § 1. Вводные замечания

Общая идея правил сумм очень проста: берем коммутатор двух операторов между некоторыми состояниями и разлагаем произведение операторов по полному набору промежуточных состояний; в результате получаем правило сумм, связывающее матричные элементы этих операторов. К сожалению, правила сумм, которые получаются таким непосредственным способом, обычно не имеют большого практического применения. Причину этого легче всего понять на примере.

Пусть  $|\beta(\mathbf{P})\rangle$  есть инвариантно нормированное состояние одной частицы  $\beta$  с импульсом  $\mathbf{P}$ , так что

$$\langle\beta(\mathbf{P})|\beta(\mathbf{P}')\rangle = (2\pi)^3 2P^0\delta^3(\mathbf{P} - \mathbf{P}'),$$

где  $P^0 = (M_\beta^2 + \mathbf{P}^2)^{1/2}$  (в приложениях  $\beta$  будет обычно протоном). Рассмотрим правило сумм, которое получается, если взять матричный элемент между состояниями  $\langle\beta(\mathbf{P})|$  и  $|\beta(\mathbf{P})\rangle$  от одновременного коммутатора двух аксиально-векторных зарядов:

$$\begin{aligned} \langle\beta(\mathbf{P})|\left[\int d^3x \mathfrak{F}_{1+i2}^{50}(x), \int d^3y \mathfrak{F}_{1-i2}^{50}(y)\right]|\beta(\mathbf{P})\rangle\Big|_{x^0=y^0} = \\ = 2\langle\beta(\mathbf{P})|\int d^3x \mathfrak{F}_3^0(x)|\beta(\mathbf{P})\rangle = 2I_3(\beta)\langle\beta(\mathbf{P})|\beta(\mathbf{P})\rangle, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где  $\mathfrak{F}_{1\pm i2}^{50} \equiv \mathfrak{F}_1^{50} \pm i\mathfrak{F}_2^{50}$ , и мы воспользовались тем, что интеграл по пространству от  $\mathfrak{F}_3^0$  есть третья компонента изоспина. Преобразуем левую часть равенства (4.1), разложив произведение операторов по полному набору промежуточных состояний  $|n\rangle$  и использовав трансляционную инвариантность, т. е. равенство

$$\langle\beta(\mathbf{P})|\mathfrak{F}^0(x)|n\rangle = \exp[i(\mathbf{P} - \mathbf{P}_n) \cdot x]\langle\beta(\mathbf{P})|\mathfrak{F}^0(0)|n\rangle.$$

Проинтегрировав по пространству, получим

$$(2\pi)^3 \sum_n (|\langle \beta(\mathbf{P}) | \mathfrak{F}_{1+i2}^{50}(0) | n \rangle|^2 - \\ - |\langle \beta(\mathbf{P}) | \mathfrak{F}_{1-i2}^{50}(0) | n \rangle|^2) \delta^3(\mathbf{P} - \mathbf{P}_n) = 4P^0 I_3(\beta), \quad (4.2)$$

где мы использовали свойство  $\mathfrak{F}_{1+i2}^{50} = (\mathfrak{F}_{1-i2}^{50})^\dagger$  и сократили обе части на  $(2\pi)^3 \delta^3(0)$ . Сложность соотношения (4.2) становится явной, если вычислить квадрат переданного импульса  $q^2 = (P - P_n)^2$  между состояниями  $|\beta(\mathbf{P})\rangle$  и  $|n\rangle$ , входящими в правило сумм. Поскольку  $\mathbf{P} = \mathbf{P}_n$ , величина  $q^2 = (P^0 - P_n^0)^2$  всегда положительна, за исключением специального случая, когда  $|n\rangle = |\beta\rangle$  (в этом случае  $q^2 = 0$ ). Если бы величина  $q^2$  была отрицательной, матричный элемент  $|\langle \beta(\mathbf{P}) | \mathfrak{F}_{1+i2}^{50}(0) | n \rangle|$  можно было бы определить из сечения реакции слабого взаимодействия  $\nu_e + \beta \rightarrow e + (\text{состояние } n)$ , но существует простой кинематический факт, что область  $q^2 > 0$  недоступна в экспериментах по рассеянию нейтрино. Единственный способ, с помощью которого можно было бы измерить матричные элементы при  $q^2 > 0$ , состоял бы в наблюдении распада (состояние  $n$ )  $\rightarrow \beta + \bar{\nu}_e + e$  (что возможно почти всегда) или в постановке опытов на встречных пучках  $\bar{\nu}_e$  и  $e$ ! С другой стороны, можно попытаться оценить  $\langle \beta(\mathbf{P}) | \mathfrak{F}_{1+i2}^{50}(0) | n \rangle$ , используя гипотезу о частичном сохранении аксиально-векторного тока, но она надежна только для малых  $q^2$  ( $q^2 \leq M_\pi^2$ ), в то время как в сумме по состояниям величина  $q^2$  возрастает неограниченно с увеличением массы состояния  $|n\rangle$ . Наконец, есть еще одно затруднение: мы не имеем возможности оценить быстроту сходимости суммы по промежуточным состояниям, что является, конечно, серьезной проблемой, так как в приложениях сумму по состояниям всегда приходится обрывать. Эта трудность также связана с тем, что  $q^2$  увеличивается с ростом массы состояния  $|n\rangle$ , поскольку если бы величина  $q^2$  оставалась фиксированной в сумме по состояниям, то можно было бы воспользоваться нашими знаниями о рассеянии при высоких энергиях и сделать некоторые правдоподобные догадки о скорости сходимости.

Таким образом, использовать правила сумм, в которых  $q^2$  меняется при переходе от одного промежуточного состояния к другому, очень сложно, и мы покажем в § 2, как вывести правила сумм, в которых величина  $q^2$  остается постоянной, не зависящей от  $|n\rangle$ . Заметим, однако, что существуют правила сумм, которые нельзя свести к правилам с фиксированным квадратом переданного импульса  $q^2$ . В частности, мы увидим, что правила сумм, получающиеся из коммутаторов пространственных компонент токов, как раз такого типа. Поэтому было бы неразумно отбрасывать правила сумм с переменным  $q^2$  как совершенно лишённые практического значения. Некоторые приложения этих правил сумм были рассмотрены Бьетти [5]. Его работа может служить иллюстрацией как техники, так и трудностей использования таких правил сумм.

## § 2. Использование бесконечного импульса

Ключевой в области применения алгебры токов была работа Фубини и Фурлана [6], когда они показали, что правила сумм типа (4.2) можно преобразовать к виду, в котором  $q^2$  не меняется при переходе от одного промежуточного состояния к другому. Решающим при этом является то обстоятельство, что равенство (4.2) предполагается справедливым для всех  $\mathbf{P}$ ; так что на самом деле мы имеем целое семейство правил сумм — свое для каждого значения  $\mathbf{P}$ . То, что различные правила сумм не тождественны друг другу, легко понять, если вычислить квадрат переданного импульса  $q^2 = (P - P_n)^2$ , соответствующего промежуточному состоянию  $|n\rangle$ :

$$q^2 = [(M_\beta^2 + \mathbf{P}^2)^{1/2} - (M_n^2 + \mathbf{P}^2)^{1/2}]^2,$$

где  $M_\beta$  и  $M_n$  — массы состояний  $|\beta\rangle$  и  $|n\rangle$ . Ясно, что  $q^2$  зависит от  $\mathbf{P}$ , так что правила сумм действительно отличаются друг от друга. Мы видим, что для любого конечного значения  $\mathbf{P}$  величина  $q^2$  зависит от  $M_n$ ; но если

возможен переход к пределу  $|\mathbf{P}| \rightarrow \infty$ , то мы можем получить правило сумм, в котором

$$q^2 = \lim_{|\mathbf{P}| \rightarrow \infty} \left[ (M_\beta^2 + \mathbf{P}^2)^{1/2} - (M_n^2 + \mathbf{P}^2)^{1/2} \right]^2 = 0$$

не зависит от  $M_n$ . В своей первоначальной работе Фубини и Фурлан [6] использовали именно этот метод для получения правила сумм с фиксированным  $q^2$ . С тех пор были развиты более тонкие методы, использующие теорию дисперсионных соотношений. Мы в основном будем применять первоначальный метод с предельным переходом  $|\mathbf{P}| \rightarrow \infty$ , который нам кажется более физическим. В последнем параграфе этой главы мы рассмотрим дисперсионный метод вывода правил сумм и покажем, что он эквивалентен методу бесконечного импульса.

Рассмотрим подробнее, каким образом переход к бесконечному импульсу  $|\mathbf{P}|$  превращает равенство (4.2) в правило сумм с фиксированным  $q^2$ . Наш метод состоит в том, чтобы преобразовать равенство (4.2) к виду, в котором вся зависимость от  $|\mathbf{P}|$  станет явной; после этого переход к пределу будет тривиальным. Для простоты предположим, что внешние частицы  $\beta$  не имеют спина. Воспользовавшись тождеством

$$|\langle \beta(\mathbf{P}) | \mathfrak{F}_{1 \pm i2}^{50} | n \rangle|^2 = \left| \frac{\langle \beta(\mathbf{P}) | \partial_\lambda \mathfrak{F}_{1 \pm i2}^{5\lambda} | n \rangle}{P^0 - P_n^0} \right|^2, \quad (4.3)$$

которое справедливо, когда  $\mathbf{P} = \mathbf{P}_n$ , перепишем равенство (4.2) в виде <sup>1)</sup>

$$(2\pi)^3 \sum_n \left[ (|\langle \beta(\mathbf{P}) | \partial_\lambda \mathfrak{F}_{1+i2}^{5\lambda} | n \rangle|^2 - |\langle \beta(\mathbf{P}) | \partial_\lambda \mathfrak{F}_{1-i2}^{5\lambda} | n \rangle|^2) \frac{\delta^3(\mathbf{P} - \mathbf{P}_n)}{|P^0 - P_n^0|^2} \right] = 4P^0 I_3(\beta). \quad (4.4)$$

<sup>1)</sup> Поскольку  $\langle \beta | \mathfrak{F}^{5\lambda} | \beta \rangle = 0$  для бесспиновых частиц, в это правило сумм дают вклад только состояния  $n \neq \beta$  и, следовательно, величина  $|P^0 - P_n^0|$  в равенстве (4.3) никогда не равна нулю.

Далее, в качестве промежуточного шага введем функцию  $A$ , зависящую от  $P$  и от вспомогательного 4-вектора  $q$ :

$$\begin{aligned} A(P, q) &= (2\pi)^3 \sum_n |\langle \beta(\mathbf{P}) | \partial_\lambda \delta_{1+iz}^{5\lambda} | n \rangle|^2 \times \\ &\quad \times \delta^4(P + q - P_n), \quad q^0 > 0, \\ A(P, q) &= - (2\pi)^3 \sum_n |\langle \beta(\mathbf{P}) | \partial_\lambda \delta_{1-iz}^{5\lambda} | n \rangle|^2 \times \\ &\quad \times \delta^4(P - q - P_n), \quad q^0 < 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Нетрудно видеть, что с помощью функции  $A$  равенство (4.4) можно переписать в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(P, q)}{|q^0|^2} dq^0 \Big|_{q=0} = 4P^0 I_3(\beta) \quad (4.6)$$

или

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(P, q)}{v^2} dv \Big|_{q=0} = 4I_3(\beta), \quad (4.7)$$

где мы ввели переменную  $v = (P \cdot q) = P^0 q^0 - \mathbf{P} \cdot \mathbf{q}$ , которая сводится к  $v = P^0 q^0$  при  $\mathbf{q} = 0$ . В этот момент читатель вправе спросить, почему мы проделали столько преобразований лишь для того, чтобы переписать равенство (4.2) в виде (4.7). Дело в том, что по построению функция  $A$  является лоренцевским скаляром и поэтому может зависеть от  $P$  и  $q$  только через скалярные произведения  $v$  и  $q^2$  (скаляр  $P^2$  фиксирован и равен  $M_\beta^2$ ). В переменных  $v$  и  $q^2$  условие  $\mathbf{q} = 0$  эквивалентно равенству  $q^2 = (q^0)^2 = (v/P^0)^2$ , и, следовательно, мы можем записать равенство (4.7) в виде

$$\int \frac{A[v, q^2 = (v/P^0)^2]}{v^2} dv = 4I_3(\beta). \quad (4.8)$$

Зависимость правила сумм от  $\mathbf{P}$  теперь стала явной, и его предел при  $|\mathbf{P}| \rightarrow \infty$  легко вычисляется. В результате получаем равенство

$$\int \frac{A(v, 0)}{v^2} dv = 4I_3(\beta), \quad (4.9)$$

которое и является искомым правилом сумм с фиксированным  $q^2$ .

Необходимо подчеркнуть, что мы *предположили* законность перехода к пределу под знаком интеграла; никому не удалось найти для этого строгого доказательства. Однако по причинам, которые мы обсудим в конце этой главы (стр. 53), большинство физиков считают, что результат (4.9) верен.

Можно попытаться проверить правила сумм, подобные (4.9), используя для  $A$  приближение частичного сохранения аксиально-векторного тока, т. е. полагая  $\partial_\lambda \mathfrak{F}^{5\lambda} = c\Phi_\pi$  в выражении (4.5) и пренебрегая влиянием выхода за массовую поверхность. Это приближение имеет смысл, так как в интеграле величина  $q^2$  фиксирована и равна нулю, а гипотеза о частичном сохранении аксиально-векторного тока предполагается справедливой для малых  $q^2$ . Если в качестве  $\beta$  взять нуклон, то равенство (4.9) перейдет в правило сумм для  $g_A^1$ , которое обсуждалось в гл. 1 (стр. 272). Успех этого правила сумм и его аналога для токов с изменением странности дает некоторое *апостериорное* оправдание предельного перехода, использованного при выводе соотношения (4.9).

Подобным же образом можно теперь вывести другое полезное правило сумм, которое является основой для приложений, рассматриваемых в § 3. На этот раз рассмотрим локальный коммутатор следующего вида:

$$\left[ \int e^{-iq \cdot x} \mathfrak{F}_{1+i2}^0(x) d^3x, \int e^{iq \cdot y} \mathfrak{F}_{1-i2}^0(y) d^3y \right] \Big|_{x^0=y^0} = 2F_3, \quad (4.10)$$

где мы воспользовались равенством

$$[\mathfrak{F}_{1+i2}^0(x), \mathfrak{F}_{1-i2}^0(y)] \Big|_{x^0=y^0} = 2\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathfrak{F}_3^0(y). \quad (4.11)$$

Мы снова будем изучать матричный элемент этого коммутатора между одночастичными состояниями  $|\beta\rangle$ . Все величины мы усредним по спину, так что полученные

1) Спин нуклона легче всего учесть, усреднив все выражения по спину. Однако вклад однунуклонного промежуточного состояния нужно исследовать отдельно, так как равенство (4.3) несправедливо для однунуклонного промежуточного состояния.

результаты будут верны для частиц с любым спином. Далее, мы не будем явно использовать тот факт, что токи  $\mathfrak{F}_{1\pm i2}^\lambda$  сохраняются, так что наши результаты будут справедливы и в том случае, когда векторные токи заменены на несохраняющиеся аксиально-векторные токи.

Беря матричный элемент равенства (4.10), усредняя по спину и делая те же преобразования, которые привели к соотношению (4.2), получаем

$$(2\pi)^3 \sum_n (|\langle \beta(\mathbf{P}) | \mathfrak{F}_{1+i2}^0(0) | n \rangle|^2 - |\langle \beta(\mathbf{P}) | \mathfrak{F}_{1-i2}^0(0) | n \rangle|^2) \delta^3(\mathbf{P} + \mathbf{q} - \mathbf{P}_n) = 4P^0 I_3(\beta). \quad (4.12)$$

На этот раз мы не будем делать выкладок, ведущих от соотношения (4.2) к (4.4), а сразу же введем величину  $A^{\mu\nu}$ , определяемую равенствами

$$A^{\mu\nu}(P, q) = (2\pi)^3 \sum_n [\langle \beta(\mathbf{P}) | \mathfrak{F}_{1+i2}^\mu(0) | n \rangle \times \langle n | \mathfrak{F}_{1-i2}^\nu(0) | \beta(\mathbf{P}) \rangle \delta^4(P + q - P_n)], \quad q^0 > 0, \quad (4.13a)$$

и

$$A^{\mu\nu}(P, q) = - (2\pi)^3 \sum_n [\langle \beta(\mathbf{P}) | \mathfrak{F}_{1-i2}^\nu(0) | n \rangle \times \langle n | \mathfrak{F}_{1+i2}^\mu(0) | \beta(\mathbf{P}) \rangle \delta^4(P - q - P_n)], \quad q^0 < 0. \quad (4.13b)$$

Ясно, что величина  $A^{\mu\nu}$  будет играть ту же роль, что и функция  $A$  в предыдущем примере. С помощью  $A^{\mu\nu}$  правило сумм (4.12) можно переписать в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq^0 A^{00}(P, q) \Big|_{\mathbf{q} \text{ фиксирован}} = 4P^0 I_3(\beta) \quad (4.14)$$

или

$$(P^0)^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} d\nu A^{00}(P, q) \Big|_{\mathbf{q} \text{ фиксирован}} = 4I_3(\beta), \quad (4.15)$$

где вектор  $\mathbf{q}$  фиксирован при том же значении, что и в коммутаторе (4.10).



Так как величина  $A^{\mu\nu}$  является (симметричной) тензорной функцией  $P$  и  $q$ , она должна иметь вид

$$A^{\mu\nu} = P^\mu P^\nu B_1 + q^\mu q^\nu B_2 + \frac{1}{2}(P^\mu q^\nu + P^\nu q^\mu) B_3 + g^{\mu\nu} B_4, \quad (4.16)$$

где  $B$  — скалярные функции  $\nu$  и  $q^2$ . С помощью функций  $B$  равенство (4.15) можно переписать в виде

$$\int d\nu \left[ B_1 + \left( \frac{q^0}{P^0} \right)^2 B_2 + \left( \frac{q^0}{P^0} \right) B_3 + \frac{B_4}{(P^0)^2} \right] \Big|_{\mathbf{q} \text{ фиксирован}} = 4I_3(\beta), \quad (4.17)$$

где условие „ $\mathbf{q}$  фиксирован“ требует, чтобы

$$q^0 = (\nu + \mathbf{P} \cdot \mathbf{q})(P^0)^{-1} \quad \text{и} \quad q^2 = (\nu + \mathbf{P} \cdot \mathbf{q})^2 (P^0)^{-2} - q^2.$$

Удобно выбрать  $\mathbf{P}$  так, чтобы  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{q} = 0$ ; в этом случае мы будем иметь

$$\int d\nu \left[ B_1(\nu, q^2) + \frac{\nu^2}{(P^0)^4} B_2(\nu, q^2) + \frac{\nu}{(P^0)^2} B_3(\nu, q^2) + \frac{B_4(\nu, q^2)}{(P^0)^2} \right] \Big|_{q^2 = -q^2 + (\nu/P^0)^2} = 4I_3(\beta). \quad (4.18)$$

Зависимость от  $\mathbf{P}$  в правиле сумм теперь явная, и переход к пределу  $|\mathbf{P}| \rightarrow \infty$  (при условии  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{q} = 0$ ) дает

$$\int d\nu B_1(\nu, q^2 = -q^2) = 4I_3(\beta). \quad (4.19)$$

Напомним, что величина вектора  $\mathbf{q}$  здесь та же, что и в (4.10).

Перестановка операций перехода к пределу и интегрирования при выводе правила сумм (4.19) имеет те же основания, что и аналогичная перестановка при выводе соотношения (4.9). Если предположить, что трудностей при этом не возникает, то мы получим замечательный результат: интеграл от  $B_1$  должен быть постоянной величиной, не зависящей от параметра  $q^2$ . Нетрудно понять, почему правило сумм (4.19) представляет собой более сильный результат, чем правило сумм (4.9), справедливое только для  $q^2 = 0$ : правило сумм (4.19) предполагает выполнение локальных коммутационных соотношений между  $\mathfrak{S}^0$ , в то время как для вывода соот-

ношения (4.9) достаточно одной справедливости проинтегрированных коммутационных соотношений. Очевидно, что соотношение (4.19) можно использовать для проверки локальных коммутационных соотношений; этот вопрос мы рассмотрим в § 3.

В приложениях важно иметь представление о том, насколько быстро сходятся правила сумм. К сожалению, мы не можем сформулировать строгих утверждений о поведении  $A$  или  $B$  при больших  $\nu$  и фиксированных  $q^2$ . Мы можем, однако, высказать правдоподобную догадку. Если представить на минуту, что операторы  $\partial_\lambda \mathfrak{F}^{5\lambda}$  и  $\mathfrak{F}^\lambda$  являются источниками частиц, то величины  $A$  и  $A^{\mu\nu}$  будут абсорбтивными частями амплитуд рассеяния вперед этих частиц на мишени  $\beta$ , в чем легко убедиться из определений<sup>1)</sup> (4.5) и (4.13).

В соответствии с моделью полюсов Редже<sup>2)</sup> абсорбтивная часть амплитуды процесса с сильным взаимодействием асимптотически ведет себя как  $\nu^{\alpha(0)}$ , где  $\alpha(0)$  — значение главной траектории Редже с соответствующими квантовыми числами в точке нулевой энергии. Обобщая это поведение на функции  $A$  и  $B_1$ , мы можем предположить, что  $A \sim \nu^{\alpha(0)}$ , а  $B_1 \sim \nu^{\alpha(0)-2}$ . (Дополнительный множитель  $\nu^{-2}$  в  $B_1$  появляется за счет того, что  $A^{\mu\nu}$  и  $B_1$  отличаются на 2 по степени энергии.) Соответствующей траекторией Редже является

<sup>1)</sup> Если  $j_B$  — источник частиц  $B$ , то абсорбтивная часть амплитуды рассеяния (вперед) для реакции  $B(q) + \beta(P) \rightarrow B(q) + \beta(P)$  пропорциональна

$$\int e^{iq \cdot x} \langle \beta(P) | \left[ j_B \left( \frac{x}{2} \right), j_B^\dagger \left( -\frac{x}{2} \right) \right] | \beta(P) \rangle d^4x$$

(см., например, книгу Бьёркена и Дрелла [2] в главе „Обозначения“). Разлагая произведение операторов по полному набору состояний и интегрируя по пространству, получаем выражение, аналогичное  $A$  или  $A^{\mu\nu}$ .

<sup>2)</sup> Читатель, который не знаком с моделью полюсов Редже, может рассматривать степенной закон  $\nu^\alpha$  как удобную параметризацию амплитуд рассеяния адронов при высоких энергиях, которая согласуется с современными экспериментами. Введение в теорию полюсов Редже можно найти, например, в книге Фраучи [4].

$\rho$ -резонная траектория, для которой  $\alpha(0) \approx 1/2$ , так что интегралы в (4.9) и (4.19) должны сходиться достаточно быстро.

### § 3. Применения

В расчетах, основанных на правилах сумм с  $q^2 = 0$  [соотношение (4.9)], величину  $A$  обычно задают, исходя из гипотезы о частичном сохранении аксиально-векторного тока<sup>1)</sup>. При таком рассмотрении эти правила сумм, как будет показано ниже, эквивалентны низкоэнергетическим теоремам, обсуждавшимся в предыдущих главах и не требующим дальнейших пояснений.

Правила сумм с  $q^2 \neq 0$  типа (4.19) представляют больший интерес; как уже отмечалось, они могут быть использованы для проверки локальной алгебры токов. В настоящее время существует только одно экспериментально проверенное правило сумм, чувствительное к виду локальных коммутаторов. Это так называемое правило сумм Кабиббо — Радикати [1], которое наиболее просто получается следующим образом. Будем исходить из формулы (4.15); воспользуемся условием сохранения тока и заменим  $A^{00}$  на  $(q^0)^{-2} q_r q_s A^{rs}$ . Выбирая вектор  $\mathbf{P}$  так, чтобы  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{q} = 0$ , и учитывая (4.16) и равенство  $v = \mathbf{P} \cdot \mathbf{q}$ , получаем

$$q^2 \int \frac{dv}{v^2} [q^2 B_2(v, -q^2) - B_4(v, -q^2)] = 4I_3(\beta), \quad (4.20)$$

где мы перешли к пределу  $|\mathbf{P}| \rightarrow \infty$ , чтобы получить правило сумм с фиксированным  $q^2$ . Далее рассмотрим случай, когда  $\beta$  — протон; при этом удобно выделить вклад нейтронного промежуточного состояния. Прямой подсчет приводит к следующему выражению для этого вклада:

$$2 [(F_1^V(-q^2))^2 + q^2 (F_2^V(-q^2))^2],$$

<sup>1)</sup> Правило сумм с  $q^2 = 0$ , получающееся из коммутатора  $F_k$  и  $F_l$ ,  $k, l = 1, 2, 3$ , тривиально: в силу того что величины  $F_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , являются операторами изоспина, вклад в правило сумм дает только одно промежуточное состояние, и это правило сводится к тождеству  $1 = 1$ .

где  $F_1^V$  и  $F_2^V$  — изовекторные электромагнитные форм-факторы нуклона [ $F_1^V(0) = 1$  и  $F_2^V(0) = \mu^V/(2M_N) \approx \approx 3,7/(2M_N)$ ]. Если учесть, что  $I_3$  (протон) =  $1/2$ , то правило сумм примет вид

$$(F_1^V(-q^2))^2 + q^2 (F_2^V(-q^2))^2 + \\ + \frac{q^2}{2} \int \frac{d\nu}{\nu^2} [q^2 B_2(\nu, -q^2) - B_4(\nu, -q^2)] = 1, \quad (4.21)$$

причем в интеграл с чертой не входит вклад состояния с одним нейтроном. Наконец, беря производную по  $q^2$  и затем полагая  $q^2 = 0$ , получаем правило сумм Кабиббо — Радикати:

$$-2F_1^{V'}(0) + (F_2^V(0))^2 - \frac{1}{2} \int \frac{d\nu}{\nu^2} B_4(\nu, 0) = 0. \quad (4.22)$$

Ценность этого соотношения в том, что входящая в него величина  $B_4(\nu, 0)$  может быть определена из сечений рассеяния фотонов. Чтобы убедиться в этом, разобьем промежуточные состояния в (4.13) на состояния с изоспином  $1/2$  и изоспином  $3/2$  и произведем вращения в изотопическом пространстве. Окончательный результат имеет вид

$$-2F_1^{V'}(0) + (F_2^V(0))^2 + \\ + \frac{1}{2\pi^2\alpha} \int \frac{d\omega}{\omega} [2\sigma_{1/2}^V(\omega) - \sigma_{3/2}^V(\omega)] = 0, \quad (4.23)$$

где  $\alpha \approx 1/137$ ,  $\omega$  — энергия фотона в лабораторной системе отсчета, а  $\sigma_j^V$  — полное сечение реакции: (изовекторный фотон) + (протон)  $\rightarrow$  (состояния с изоспином  $I$ ).

Гилман и Шнитцер [2] произвели численный анализ правила сумм Кабиббо — Радикати и получили следующий результат:

$$0 = (-0,8 + 1,6 - 2,8 + 1,6 + \dots) \text{ Гэв}^{-2}, \quad (4.24)$$

$N$      $S$ -волна     $N^*$      $N^{**}$

где слагаемое, отвечающее  $N$ , равно полному<sup>1)</sup> вкладу однонуклонного состояния,  $N^*$  и  $N^{**}$  — вклады резонансов с массами 1238 и 1520  $Mэв$ , а слагаемое, отвечающее  $S$ -волне, происходит от нерезонансного пион-нуклонного  $S$ -состояния. В соответствии с результатами работы [2] третий резонанс  $N^{***}$  с массой 1690  $Mэв$  дает вклад, меньший  $0,02 \text{ Гэв}^{-2}$ ; поэтому правило сумм, по-видимому, сходится.

Правило сумм Кабиббо — Радикати можно использовать для проверки следующего коммутационного соотношения:

$$\sum_{r=1}^3 \left[ \int x^r \mathfrak{F}_{1+i2}^0(x) d^3x, \int y^r \mathfrak{F}_{1-i2}^0(y) d^3y \right] \Big|_{x^0=y^0} = \\ = 2 \int y^2 \mathfrak{F}_3^0(y) d^3y. \quad (4.25)$$

Несомненный успех этого правила сумм исключает присутствие градиентных членов, таких, как  $\nabla_x \cdot \nabla_y \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ , в локальных коммутационных соотношениях.

Более надежную проверку локальных коммутационных соотношений можно произвести в экспериментах по рассеянию нейтрино при высоких энергиях. Пусть  $d\sigma(\nu_l p)/d|q^2|$  — дифференциальное сечение реакции

$$\nu_l + p \rightarrow l + \text{Адроны}$$

при фиксированном квадрате переданного импульса и заданной энергии падающих нейтрино  $E_\nu = k_\nu^0$ . Здесь  $l$  — либо электрон, либо мюон, а  $q^2 = (k_l - k_\nu)^2$ . Пусть  $d\sigma(\bar{\nu}_l p)/d|q^2|$  — соответствующее сечение для антинейтрино. Из явного вида лагранжиана взаимодействия

<sup>1)</sup> Первые два члена в (4.23) приблизительно сокращаются друг с другом; каждый из них в отдельности составляет около  $3 \text{ Гэв}^{-2}$ . Заметим, что в нашей нормировке величина  $F_1^{V'}(0) = \langle r^2 \rangle^V / 6$ , как следует из эксперимента, положительна.

<sup>2)</sup> Поскольку для этого процесса  $q^2$  отрицательно, то мы написали  $d\sigma/d|q^2|$ , чтобы показать, что дифференциальное сечение положительно.

(1.14в)  $(G/\sqrt{2})[J_{h\lambda}^+ J_l^\lambda]_S + \text{Эрмит. сопр.}$  следует, что разность сечений рассеяния частиц  $\nu$  и  $\bar{\nu}$  равна

$$\frac{d\sigma}{d|q^2|}(\nu_l p) - \frac{d\sigma}{d|q^2|}(\bar{\nu}_l p) = \int_0^{\xi_{\text{макс}}} M_{\lambda\sigma}(q, Q) [A_w^{\lambda\sigma}(P, q) + A_w^{\lambda\sigma}(P, -q)] \rho d\xi, \quad (4.26)$$

где  $M_{\lambda\sigma}(q, Q)$  — просуммированное по спинам произведение  $J_{i\lambda}^+ J_{l\sigma}$ ;  $Q = k_l + k_\nu$ , а  $q = k_l - k_\nu$ ; величина  $A_w^{\lambda\sigma}(P, q)$  задается равенством (4.16), если  $\tilde{J}_{1+i2}^\lambda$  заменить на  $J_h^\lambda$ ;  $\rho$  — множитель, связанный с фазовым объемом;  $\xi = P \cdot q$ , а  $\xi_{\text{макс}}$  — верхний предел, который зависит от энергии нейтрино  $E_\nu$ . (Чтобы избежать недоразумений, мы заменили переменную интегрирования  $\nu$  на  $\xi$ .) Посмотрим теперь, что происходит, когда  $E_\nu \rightarrow \infty$ . Так как тензор  $M_{\lambda\sigma}$ , образованный из лептонных токов, должен строиться из  $Q$  и  $q$  и известен общий вид  $A_w^{\lambda\sigma}$  [соотношение (4.16)], то ясно, что их свертка будет содержать скалярные произведения  $Q \cdot P$ ,  $q \cdot P$ ,  $q \cdot Q$ ,  $Q^2$  и  $q^2$ . Когда  $E_\nu \rightarrow \infty$  при фиксированном  $q^2$ , величины  $Q^2$  и  $q \cdot Q$  остаются конечными, а  $Q \cdot P$  и  $q \cdot P$  ведут себя так же, как  $E_\nu$ . Таким образом, при больших  $E_\nu$  основной вклад в  $A_w^{\lambda\sigma}$  дает член  $P^\lambda P^\sigma B_{w1}$ . Поэтому

$$M_{\lambda\sigma}(q, Q) A_w^{\lambda\sigma}(P, q) \sim P^\lambda P^\sigma M_{\lambda\sigma}(q, Q) B_{w1}(\xi, q^2) \quad (4.27)$$

( $E_\nu \rightarrow \infty$ ,  $q^2$  фиксирован).

Далее, оказывается, что при  $E_\nu \rightarrow \infty$  величина  $\xi_{\text{макс}} \rightarrow \infty$ , а  $(P^\lambda P^\sigma M_{\lambda\sigma})\rho$  стремится к константе, и мы получаем следующий результат:

$$\begin{aligned} \lim_{E_\nu \rightarrow \infty} \left[ \frac{d\sigma}{d|q^2|}(\nu_l p) - \frac{d\sigma}{d|q^2|}(\bar{\nu}_l p) \right] &= \\ &= (\text{const}) \times \int_0^\infty d\xi [B_{w1}(\xi, q^2) + B_{w1}(-\xi, q^2)] = \\ &= (\text{const}) \times \int_{-\infty}^\infty d\xi B_{w1}(\xi, q^2). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Однако мы знаем, что правая часть равенства (4.28) как раз входит в правило сумм, вытекающее из коммутатора (4.11), если в нем заменить операторы  $\mathfrak{F}_{1+i2}^0$  и  $\mathfrak{F}_{1-i2}^0$  на  $J_h^0$  и  $(J_h^0)^\dagger$ . Поэтому если локальный коммутатор  $J_h^0$  и  $(J_h^0)^\dagger$  не содержит членов с производными  $\delta$ -функции, то интеграл от  $B_{w1}$  не зависит от  $q^2$ ! Наконец, коммутатор  $[J_h^0, (J_h^0)^\dagger]$  выражается через коммутаторы операторов  $\mathfrak{F}^0$ , и, следовательно, можно вычислить все константы. Мы получаем удивительно простой результат

$$\lim_{E_\nu \rightarrow \infty} \left[ \frac{d\sigma}{d|q^2|}(\nu l p) - \frac{d\sigma}{d|q^2|}(\bar{\nu} l p) \right] = -\frac{G^2}{\pi} (\cos^2 \theta_C + 2 \sin^2 \theta_C), \quad (4.29)$$

где  $\theta_C$  — угол Кабиббо, а  $G$  — постоянная Ферми,  $G \approx 10^{-5}/M_N^2$ .

Соотношение (4.29) является одним из самых сильных предсказаний алгебры токов и дает реальную возможность проверки локальных коммутационных соотношений. При этом важным является вопрос о том, когда практически можно считать  $E_\nu \approx \infty$ , т. е. как велика должна быть энергия нейтрино, чтобы стала возможной проверка соотношения (4.29). Основываясь на сведениях о быстроте сходимости правила сумм для  $g_A$  и правила Кабиббо — Радикати, можно показать [3], что для этого, по-видимому, достаточна энергия нейтрино порядка  $5 \Gamma_{\text{эв}}$ , по крайней мере при малых  $q^2$ . Первоначальный вывод соотношения (4.29) и детальное обсуждение кинематики нейтринных реакций даны в работе Адлера (ст. 11).

Аналогичные вычисления для рассеяния электронов приводят к неравенству (Бьёркен, ст. 12)

$$\lim_{E_e \rightarrow \infty} \left[ \frac{d\sigma}{d|q^2|}(ep) + \frac{d\sigma}{d|q^2|}(en) \right] > \frac{2\pi\alpha^2}{q^4}, \quad (4.30)$$

где величина  $q^{-4}$ , отсутствовавшая в (4.29), получается из функции распространения фотона. Хотя это неравенство — менее сильный результат, чем соотношение (4.29), оно может быть проверено значительно раньше.

Итак, мы рассмотрели все следствия локальной алгебры токов, которые, по-видимому, будут интересовать экспериментаторов в ближайшем будущем. Оставшиеся вопросы, касающиеся правил сумм, интересны в основном с теоретической точки зрения.

#### § 4. Правила сумм для сильных взаимодействий, или сверхсходящиеся правила сумм

Любой матричный элемент  $\langle \beta | \mathfrak{F}_{1+i_2}(0) | n \rangle$  изоспинового тока имеет полюс, когда  $q^2 = (P_\beta - P_n)^2$  приближается к квадрату массы  $\rho$ -мезона<sup>1)</sup>. Поэтому из определения величины  $A^{\mu\nu}$  (4.13) вытекает, что  $A^{\mu\nu}$ , а следовательно, и  $B_1$  имеют полюсы второго порядка при  $q^2 = M_\rho^2$ . Коэффициент при таком полюсе равен произведению  $\text{Im } T_1(\nu)$  на постоянную, причем  $\text{Im } T_1(\nu)$  является коэффициентом при  $P^\mu P^\nu$  в мнимой части амплитуды рассеяния вперед процесса  $\rho + \beta \rightarrow \rho + \beta$ .

Теперь обратимся к правилу сумм (4.19). Так как левая часть несингулярна при  $q^2 = M_\rho^2$ , мы с необходимостью имеем

$$\int \text{Im } T_1(\nu) d\nu = 0. \quad (4.31)$$

Создается впечатление, что мы получили ограничение на амплитуду процесса, включающего только сильные взаимодействия, из алгебры токов! Однако это не так: соотношение (4.31) имеет чисто кинематическую природу. Чтобы убедиться в этом, сначала заметим, что только нечетная по  $\nu$  часть  $T_1^{(-)}$  амплитуды  $T_1$  может давать вклад в интеграл (4.31), так как нечетная часть амплитуды имеет *четную* абсорбтивную часть, и наоборот. Нечетная амплитуда  $T_1^{(-)}$  удовлетворяет дисперсионному соотношению

$$T_1^{(-)}(\nu) = \frac{1}{\pi} \int \frac{\text{Im } T_1^{(-)}(\nu')}{\nu' - \nu} d\nu', \quad (4.32)$$

<sup>1)</sup> Точнее говоря, поскольку  $\rho$ -мезон нестабилен, полюс расположен на нефизическом листе. Для наших целей мы можем считать  $\rho$ -мезон стабильным.



где мы предположили, что вычитания отсутствуют. Модель полюсов Редже предсказывает, что  $T_1^{(-)}(\nu) \sim \nu^{\alpha(0)-2}$  при  $\nu \rightarrow \infty$ , где  $\alpha(0)$  — значение главной траектории, дающей вклад в  $T_1^{(-)}$ , в точке нулевой энергии. Соответствующей траекторией является  $\rho$ -траектория, для которой  $\alpha(0) \approx 1/2$ , что оправдывает предположение об отсутствии вычитаний в соотношении (4.32). Фактически  $T_1^{(-)}$  стремится к нулю настолько быстро, что, кроме условия  $T_1^{(-)} \rightarrow 0$  при  $\nu \rightarrow \infty$ , которое необходимо для выполнения (4.32), мы имеем  $\nu T_1^{(-)}(\nu) \rightarrow 0$  при  $\nu \rightarrow \infty$ . Умножая (4.32) на  $\nu$  и переходя к пределу  $\nu \rightarrow \infty$ , получаем

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \nu T_1^{(-)}(\nu) = \frac{1}{\pi} \int \text{Im } T_1^{(-)}(\nu') d\nu' = 0, \quad (4.33)$$

что совпадает с соотношением (4.31). Таким образом, можно заключить, что соотношение (4.31) — не ограничение, налагаемое алгеброй токов, а просто следствие условия  $\nu T_1^{(-)} \rightarrow 0$  при  $\nu \rightarrow \infty$ . Амплитуды с таким свойством часто называют „сверхсходящимися“, а соотношения, аналогичные (4.31), — „сверхсходящимися правилами сумм“.

На самом деле поведение  $\nu T_1^{(-)} \rightarrow 0$  при  $\nu \rightarrow \infty$  не связано с моделью полюсов Редже. Де Альфаро, Фубини, Росетти и Фурлан (ст. 13), которые впервые получили соотношение (4.31), показали, что это свойство амплитуды  $T_1^{(-)}$  является просто следствием теоремы Померанчука<sup>1)</sup>.

Соотношение (4.31) — один из многих возможных примеров сверхсходящихся соотношений. Еще раз напомним, что эти правила сумм никак не связаны с алгеброй токов. В действительности существует общее утверждение: *любое точное правило сумм, которое включает только амплитуды рассеяния сильно взаимодей-*

<sup>1)</sup> Сверхсходящиеся правила сумм типа (4.31) впервые были получены и использованы в работах [7]. — *Прим. ред.*

ствующих частиц на массовой поверхности<sup>1)</sup>, является свержходящимся соотношением и не является следствием алгебры токов. Тем не менее эти правила сумм для сильных взаимодействий очень интересны сами по себе. Некоторые приложения соотношения (4.31) описаны в ст. 13.

В литературе иногда встречается утверждение о том, что интеграл в правой части соотношения (4.19) можно аппроксимировать интегралом от сечений  $\rho\beta$ -рассеяния. Такое приближение является спорным, поскольку мы знаем, что интеграл от  $\text{Im } T_1^{(-)}$  равен нулю, а не  $4I_3(\beta)$ . В связи с этим читателя, вероятно, интересует, как же удастся использовать гипотезу о частичном сохранении аксиально-векторного тока для аппроксимации интегралов в других правилах сумм. Этот кажущийся парадокс можно разрешить следующим образом. Если  $\mathfrak{F}$  в определении  $A^{\mu\nu}$  заменить на  $\mathfrak{F}^5$  и произвести разложение (4.16), то нетрудно убедиться, что функция  $B_2$  имеет полюс второго порядка, а функция  $B_3$  — полюс первого порядка при  $q^2 = M_\pi^2$ , тогда как ни  $B_1$ , ни  $B_4$  не имеют полюсов при  $q^2 = M_\pi^2$ . Таким образом, если взять интеграл от  $B_1$  [см. (4.19)] и положить  $q^2 = M_\pi^2$ , то мы не придем ни к какому конкретному результату; гипотеза о частичном сохранении представляет собой более тонкое утверждение. Оно гласит, что для малых  $q^2$  величина  $q_\lambda q_\sigma A^{\lambda\sigma}$  хорошо аппроксимируется функцией с пионным полюсом (второго порядка) при  $q^2 = M_\pi^2$ . Разлагая  $q_\lambda q_\sigma A^{\lambda\sigma}$ , получаем

$$v^2 B_1 + q^4 B_2 + q^2 v B_3 + q^2 B_4 \approx \frac{c^2 \text{Im } T^{\pi\beta}(v)}{(q^2 - M_\pi^2)^2}, \quad (4.34)$$

где  $\text{Im } T^{\pi\beta}(v)$  — абсорбтивная часть амплитуды рассеяния  $\pi + \beta \rightarrow \pi + \beta$  вперед, а  $c$  — константа. Положив  $q^2 = 0$ , мы обнаружим, что  $v^2 B_1(v, 0) \approx c^2 M_\pi^{-4} \text{Im } T^{\pi\beta}(v)$ , даже

<sup>1)</sup> Правила сумм, использующие гипотезу о частичном сохранении аксиально-векторного тока, справедливы только для пионов с нулевой массой и не являются „точными“, если в них подставить только величины на массовой поверхности.

если функция  $B_1$  не имеет полюса при  $q^2 = M_\pi^2$ . Следовательно, подынтегральное выражение в правилах сумм с фиксированным  $q^2$ , которые следуют из коммутатора двух аксиально-векторных токов, не имеют полюса при  $q^2 = M_\pi^2$ . Однако в специальном случае  $q^2 = 0$  можно использовать гипотезу о частичном сохранении аксиально-векторного тока, чтобы связать подынтегральную функцию с амплитудой рассеяния пионов.

Из предыдущих рассуждений следует очевидный, но тем не менее важный вывод: правила сумм, содержащие интегралы от амплитуд рассеяния пионов и получающиеся при использовании соотношения (4.9) и гипотезы о частичном сохранении, не являются свержсходящимися правилами сумм для  $\pi\pi$ -рассеяния<sup>1)</sup>.

### § 5. Физические свойства в пределе бесконечного импульса

До сих пор мы не пытались обосновать предельный переход  $|\mathbf{P}| \rightarrow \infty$ , использованный при выводе правил сумм с фиксированным  $q^2$ . В этом параграфе мы изучим некоторые физические свойства предела  $|\mathbf{P}| \rightarrow \infty$ . При этом оказывается, что, хотя этот предел крайне неравномерный, правила сумм, выведенные в § 2, по-видимому, верны. Начнем с изучения правил сумм в теории свободных полей; основываясь на результатах, полученных в этом простом случае, можно будет сделать некоторые правдоподобные догадки относительно реального мира.

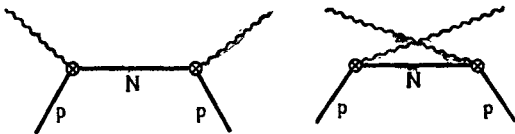
Рассмотрим мир, содержащий только невзаимодействующие нуклоны, описываемые оператором поля  $N$  с восемью компонентами (по 2 изоспиновые компоненты на каждую из 4 спиновых). В таком мире изоспиновые токи  $\bar{N}(x) \gamma^{\lambda 1/2} \tau_i N(x) = \mathcal{S}_i^\lambda(x)$  удовлетворяют локальным коммутационным соотношениям Гелл-Манна, и мы можем изучить свойства предела  $|\mathbf{P}| \rightarrow \infty$ , приводящего к правилу сумм (4.19). В дальнейшем нам понадобится величина  $A^{\mu\nu}$ , определенная равенством (4.13), где в ка-

<sup>1)</sup> При учете спиновых эффектов положение усложняется (см. гл. 5).

честве  $|\beta(\mathbf{P})\rangle$  взято протонное состояние. Эту величину можно получить, либо непосредственно суммируя по промежуточным состояниям в равенстве (4.13), либо более элегантно, заметив, что  $A^{\mu\nu}$  есть абсорбтивная часть фейнмановских диаграмм на фиг. 4.1. Приведем окончательный результат

$$A^{\mu\nu} = \left(2P^\mu P^\nu + \frac{1}{2} q^2 g^{\mu\nu}\right) \varepsilon(\nu) [\delta(2\nu + q^2) - \delta(2\nu - q^2)] + \\ + (P^\mu q^\nu + P^\nu q^\mu) \varepsilon(\nu) [\delta(2\nu + q^2) + \delta(2\nu - q^2)] + \\ + \text{Члены, нечетные относительно замены } q \rightarrow -q, \quad (4.35)$$

где  $\varepsilon(\nu) = \nu |\nu|^{-1}$ . Мы не выписали члены, нечетные относительно замены  $q \rightarrow -q$ , поскольку они не дают вклада в правило сумм.



Фиг. 4.1. Фейнмановские диаграммы, соответствующие выражению (4.35) в тексте. Вершина  $\otimes$  соответствует матричному элементу изоспинового тока между состояниями „голых“ нуклонов. Четная по  $q$  часть  $A^{\mu\nu}$  отвечает той части диаграмм, которая антисимметрична по изоспиновым индексам токов.

Учитывая, что  $I_3(\text{протон}) = 1/2$ , получаем следующее правило сумм:

$$\frac{1}{(P^0)^2} \int A^{00} d\nu \Big|_{q \text{ фиксирован}} = 2. \quad (4.36)$$

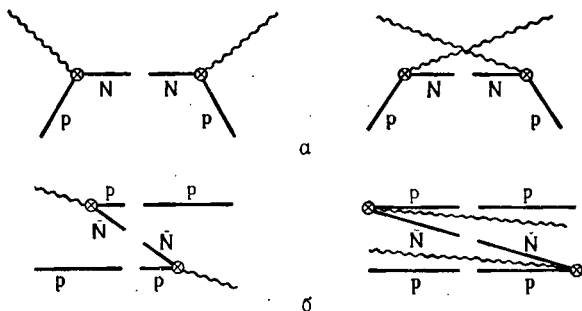
Для изучения предела бесконечного импульса в этом соотношении удобно воспользоваться условием сохранения тока и заменить  $A^{00}$  на  $(q^0)^{-2} q_r q_s A^{rs}$ ; полагая  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{q} = 0$  и подставляя выражение (4.35) для  $A^{rs}$  в (4.36), получаем

$$-q^2 \int \frac{q^2 \varepsilon(\nu)}{\nu^2} \delta(2\nu + q^2) d\nu \Big|_{q \text{ фиксирован}} = 2 \quad (4.37)$$

или

$$-q^2 \int \frac{v^2 (P^0)^{-2} - q^2}{v^2} \varepsilon(v) \delta[2v + v^2 (P^0)^{-2} - q^2] dv = 2, \quad (4.38)$$

где при выводе соотношения (4.37) мы использовали тот факт, что два члена, дающие вклад в  $q_r q_s A^{rs}$ , отличаются только заменой  $v \rightarrow -v$ . При переходе от (4.37) к (4.38) мы воспользовались равенством  $q^2 = v^2 (P^0)^{-2} - q^2$ , справедливым при  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{q} = 0$ . Легко проверить, что правило сумм (4.38) выполняется для любого конечного



Фиг. 4.2. Диаграммы с обычным (а) и парным (б) промежуточными состояниями, дающие вклад в правило сумм для свободных нуклонов. Разрывы в линиях обозначают промежуточные состояния в правиле сумм.

значения  $|\mathbf{P}|$  и остается справедливым, если перейти к пределу  $|\mathbf{P}| \rightarrow \infty$  под знаком интеграла. Мы хотим исследовать поведение подынтегрального выражения при  $|\mathbf{P}| \rightarrow \infty$ . Нетрудно обнаружить, что аргумент  $\delta$ -функции в (4.38) имеет два нуля; один при

$$v = (P^0)^2 \{ [1 + q^2 (P^0)^{-2}]^{1/2} - 1 \} \approx \frac{1}{2} q^2, \quad (4.39)$$

а другой при

$$v = - (P^0)^2 \{ [1 + q^2 (P^0)^{-2}]^{1/2} + 1 \} \approx -2 (P^0)^2. \quad (4.40)$$

На языке промежуточных состояний ноль вблизи  $\frac{1}{2}q^2$  возникает за счет обычного однонуклонного состояния (фиг. 4.2, а), а ноль вблизи  $-2(P^0)^2$  — за счет парных состояний (фиг. 4.2, б). Существуют, разумеется, только

два состояния, которые могут давать вклад в коммутатор в теории свободных полей. Так как парное состояние проявляется при значениях  $\nu$ , которые стремятся к  $-\infty$  при  $|\mathbf{P}| \rightarrow \infty$ , то ясно, что предел  $|\mathbf{P}| \rightarrow \infty$  явно не равномерен. Очевидно, что процесс перехода к  $|\mathbf{P}| \rightarrow -\infty$  в подынтегральном выражении (4.38) допустим лишь в том случае, если вклад парного состояния в интеграл стремится к нулю, когда это состояние смещается к  $\nu = -\infty$ . Легко проверить, что вклад парного состояния действительно затухает в этом пределе. При больших  $|\mathbf{P}|$  правило сумм имеет вид

$$\begin{aligned}
 & -\frac{q^2}{2} \int \frac{\nu^2 (P^0)^{-2} - q^2}{\nu^2} \delta\left(\nu - \frac{1}{2} q^2\right) d\nu + \\
 & \quad \text{(одноуклонное состояние)} \\
 & \quad + \frac{q^2}{2} \int \frac{\nu^2 (P^0)^{-2} - q^2}{\nu^2} \delta[\nu + 2(P^0)^2] = 2 \quad (4.41) \\
 & \quad \text{(парное состояние)}
 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
 & -2q^2 \left\{ q^{-4} [q^4 (2P^0)^{-2} - q^2] - (2P^0)^{-4} [(2P^0)^2 - q^2] \right\} = 2. \quad (4.42) \\
 & \quad \text{(одноуклонное состояние)} \quad \quad \quad \text{(парное состояние)}
 \end{aligned}$$

Теперь ясно, что при  $|\mathbf{P}| \rightarrow \infty$  вклад парного состояния стремится к нулю как  $|\mathbf{P}|^{-2}$ , в то время как вклад одноуклонного состояния не исчезает и дает то самое правило сумм, которое мы получаем, переходя к пределу  $|\mathbf{P}| \rightarrow \infty$  под знаком интеграла.

Нетрудно видеть, что причиной затухания вклада парного состояния при  $|\mathbf{P}| \rightarrow \infty$  является энергетический множитель  $\nu^{-2}$  в (4.38). В случае парного состояния  $\nu^{-2}$  переходит в  $(2P^0)^{-4}$  и дает быстро убывающий множитель  $|\mathbf{P}|^{-4}$ . Возвращаясь назад, мы видим, что величина  $\nu^{-2}$  появилась при использовании условия сохранения тока для замены  $A^{00}$  на  $(q^0)^{-2} q_r q_s A^{rs}$ . Таким образом, мы получаем, что возможность предельного перехода  $|\mathbf{P}| \rightarrow \infty$  существенно предполагает сохранение тока. На самом деле точного сохранения не требуется; необходимо только „частичное сохранение“ в том смысле, что дивергенция тока должна быть „несингулярным“ оператором. Что это означает, проще всего проиллюстрировать на примере.

Рассмотрим коммутатор компонент  $\mathfrak{S}_{1+i2}^{50}$  и  $\mathfrak{S}_{1-i2}^{50}$  аксиально-векторного тока в теории свободных нуклонов. Аксиальные токи, разумеется, имеют вид  $\mathfrak{S}_i^{5\lambda} = \bar{N}_\gamma^\lambda \gamma_5^{1/2} \tau_i N$ , а отвечающая этому коммутатору величина  $A^{\mu\nu}$  равна

$$A^{\mu\nu} = \left[ 2P^\mu P^\nu - \left( 2M_N^2 - \frac{1}{2} q^2 \right) g^{\mu\nu} \right] \times \\ \times \varepsilon(\nu) [\delta(2\nu + q^2) - \delta(2\nu - q^2)] + \\ + (P^\mu q^\nu + P^\nu q^\mu) \varepsilon(\nu) [\delta(2\nu + q^2) + \delta(2\nu - q^2)] + \\ + \text{члены, нечетные относительно замены } q \rightarrow -q, \quad (4.43)$$

где  $M_N$  — масса нуклона. Так как аксиально-векторный ток не сохраняется (если  $M_N$  не равно нулю), мы не можем в нашем правиле сумм просто заменить  $A^{00}$  на  $(q^0)^{-2} q_r q_s A^{rs}$ , а должны использовать тождество

$$A^{00} = (q^0)^{-2} (q_\lambda q_\sigma A^{\lambda\sigma} - 2q_r q_\sigma A^{r\sigma} + q_r q_s A^{rs}), \quad (4.44)$$

где латинские индексы  $r$  и  $s$  пробегает значения от 1 до 3, а греческие  $\lambda$  и  $\sigma$  — от 0 до 3. Если учесть соотношения (4.43) и (4.44), то правило сумм для коммутатора  $\mathfrak{S}_{1+i2}^{50}$  и  $\mathfrak{S}_{1-i2}^{50}$  примет вид

$$\int \frac{d\nu}{\nu^2} \left[ -4M_N^2 q^2 - 8M_N^2 q^2 + q^2 (4M_N^2 - q^2) \right] \times \\ \times \varepsilon(\nu) \delta(\nu + 2q^2) \Big|_{q \text{ фиксирован}} = 2, \quad (4.45)$$

где три члена в подынтегральном выражении соответствуют трем членам в (4.44) и где, как обычно, мы положили  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{q} = 0$ . Для правила сумм в такой форме легко проверить, что благодаря энергетическому множителю  $\nu^{-2}$  вклад парного состояния, как и ранее, затухает при  $|\mathbf{P}| \rightarrow \infty$ , так что можно перейти к пределу  $|\mathbf{P}| \rightarrow \infty$  под знаком интеграла. Величина  $\nu^{-2}$  возникла, разумеется, при замене  $A^{00}$  на правую часть соотношения (4.44). Может показаться странным, что умножение и деление на  $(q^0)^2$  и последующая перегруппировка членов, входящих в (4.44), дают имеющий физический смысл множитель  $\nu^{-2}$ , обеспечивающий сходимость.

В этом, однако, отражена реальная физическая ситуация. Слагаемое

$$q_\lambda q_\sigma A^{\lambda\sigma} = -2M_N^2 q^2 \varepsilon(\nu) [\delta(\nu + 2q^2) - \delta(\nu - 2q^2)]$$

имеет часть, содержащую  $(q^0)^2$ , но в пределе высоких энергий  $\nu \rightarrow \infty$  при  $|\nu| = |2q^2|$ <sup>1)</sup> она ведет себя как  $\nu$ , а не как  $\nu^2$ . Это и подразумевают, когда говорят, что дивергенция тока является „несингулярным“ оператором. Более абстрактно, гипотеза о „частичном сохранении“ гласит, что величины  $q_\lambda q_\sigma A^{\lambda\sigma}$  и  $A^{\lambda\sigma} q_\sigma$  ведут себя не хуже, чем  $A^{\lambda\sigma}$ , даже несмотря на то, что в них явно входят степени  $q^0$ . В теории свободных полей это происходит следующим образом: дивергенция  $\partial_\lambda \delta_l^{5\lambda}$  равна  $iM_N \bar{N} \tau_l \gamma_5 N$ , т. е. простой билинейной форме, в которой отсутствуют градиенты полей, и потому она не содержит дополнительных сингулярностей по сравнению с током  $\bar{N} \gamma^\lambda \gamma_5 \tau_l N$ .

Описанное выше явление присуще всем теориям свободных полей. Мы предоставляем читателю проверить, например, что теория свободных пионов обладает в сущности теми же свойствами.

В этой главе мы ограничились коммутаторами двух временных компонент токов. И это не случайно. Посмотрим, что произойдет, если перейти к пределу  $|\mathbf{P}| \rightarrow \infty$  в коммутаторе пространственной и временной компонент. Для этого нужно исследовать предел интеграла  $\int A^{0r} dq^0|_q$  фиксирован при  $|\mathbf{P}| \rightarrow \infty$ . Возникает вопрос, может ли парное состояние давать вклад в этот интеграл при  $|\mathbf{P}| \rightarrow \infty$  или нет. Чтобы ответить на него, напомним

$$\int A^{0r} dq^0|_q \text{ фиксирован} = \int \frac{d\nu}{\nu} (q_\lambda A^{\lambda r} - q_s A^{sr})|_q \text{ фиксирован} \quad (4.46)$$

и воспользуемся гипотезой о „частичном сохранении“, которая утверждает, что функция  $q_\lambda A^{\lambda r}$  ведет себя не хуже, чем  $A^{\lambda\sigma}$ . При этом мы получим, что

<sup>1)</sup> Из-за присутствия  $\delta$ -функций только этот предел и имеет значение.



множитель, обеспечивающий сходимость, равен  $\nu^{-1}$ , что эквивалентно множителю  $(P^0)^{-2}$  для парного состояния, который убывает медленнее множителя  $(P^0)^{-4}$ , рассмотренного раньше. Следовательно, в коммутаторе временной и пространственной компонент происходит подавление вклада парного состояния при  $|\mathbf{P}| \rightarrow \infty$ , но, возможно, это подавление не настолько сильное, чтобы можно было перейти к пределу  $|\mathbf{P}| \rightarrow \infty$  под знаком интеграла. Этот коммутатор можно исследовать в различных теориях свободных полей; при этом оказывается, что иногда вклад парного состояния достаточно быстро стремится к нулю, а иногда нет. Допустимость перехода к пределу  $|\mathbf{P}| \rightarrow \infty$  под знаком интеграла в этих коммутаторах существенно зависит от модели. Для коммутатора двух пространственных компонент положение еще хуже. В этом случае мы имеем дело с величиной

$\int A^{rs} dq^0|_{q \text{ фиксирован}}$  и, очевидно, не можем обратиться к гипотезе о „частичном сохранении“, чтобы получить энергетический множитель, который подавил бы вклад парного состояния. В результате предельный переход  $|\mathbf{P}| \rightarrow \infty$  для этих коммутаторов справедлив только в исключительных случаях, ни один из которых не представляет интереса с физической точки зрения. Читатель может спросить, почему нельзя, записав равенство (при  $q^2 = 0$ )

$$A^{3r} = (q^0)^{-1} \varepsilon^{12\lambda\sigma} q_\sigma A_\lambda^r, \quad (4.47)$$

принять гипотезу о том, что ротор тока  $\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \partial_\sigma \mathcal{F}_\lambda$  является „несингулярным“ оператором. Разумеется, такое предположение можно сделать, но среди известных моделей нет ни одной, в которой ротор хотя бы одного из токов, удовлетворяющих алгебре Гелл-Манна, был бы „несингулярным“ оператором.

Другие интересующие нас коммутаторы — это коммутатор временной компоненты с дивергенцией тока и коммутатор двух дивергенций. Коммутатор, содержащий одну дивергенцию, при  $|\mathbf{P}| \rightarrow \infty$  ведет себя аналогично коммутатору временной и пространственной компонент, в то время как коммутатор двух дивергенций сингуля-

рен в такой же степени, как и коммутатор двух пространственных компонент. Поведение множителя, определяющего степень затухания вклада парного состояния для различных случаев, представлено в табл. 1.

Таблица 1<sup>1)</sup>

Коммутатор	Фактор затухания вклада парного состояния	Степень сходимости подынтегрального выражения
$[\mathfrak{F}^0, \mathfrak{F}^0]$	$(P^0)^{-4}$	$\nu^{\alpha-2}$
$[\mathfrak{F}^0, \mathfrak{F}^r]$	$(P^0)^{-2}$	$\nu^{\alpha-1}$
$[\mathfrak{F}^r, \mathfrak{F}^s]$	Отсутствует	$\nu^{\alpha}$
$[\mathfrak{F}^r, \partial_{\lambda}\mathfrak{F}^{\lambda}]$	$(P^0)^{-2}$	$\nu^{\alpha-1}$
$[\mathfrak{F}^r, \partial_{\lambda}\mathfrak{F}^{\lambda}]$	Отсутствует	$\nu^{\alpha}$
$[\partial_{\lambda}\mathfrak{F}^{\lambda}, \partial_{\mu}\mathfrak{F}^{\mu}]$	"	$\nu^{\alpha}$

<sup>1)</sup> В этой таблице собраны факторы затухания для различных коммутаторов, рассмотренные в тексте. Кроме того, выписаны предсказания модели полюсов Редже для асимптотического поведения подынтегрального выражения в правиле сумм при  $\nu \rightarrow \infty$  и фиксированном  $q^2$  ( $\alpha$  — значение главной траектории с соответствующими квантовыми числами в точке  $t=0$ ). Последние не обсуждаются в тексте этой главы, но могут быть получены из формул приложений Г и Д. Для того чтобы правило сумм с фиксированным  $q^2$  сходилось, подынтегральное выражение должно стремиться к нулю быстрее, чем  $\nu^{-1}$  при  $\nu \rightarrow \infty$  и фиксированном  $q^2$ . Заметим, что для коммутаторов, в которых вклад парного состояния подавлен в меньшей степени, подынтегральное выражение стремится к нулю медленнее.

До сих пор мы формулировали определенные утверждения только в рамках теории свободных полей. Однако важные физические свойства предела  $|P| \rightarrow \infty$  в сущности уже содержатся в этих простых моделях. В реальном мире сильно взаимодействующих частиц существуют классы состояний, аналогичных парным состояниям свободных полей, которые смещаются к  $|\nu| = \infty$  при  $|P| \rightarrow \infty$  и представляют собой возможный источник трудностей. Как показано в приложении В, вполне вероятно, что эффективный фактор затухания вклада этих состояний такой же, как и в случае свободных полей; таким образом, табл. 1 может служить хорошим руководством при определении того, насколько сильно подавляется вклад этих (аналогичных парному) состояний при  $|P| \rightarrow \infty$ . Для правил сумм § 2 и 3, которые

следуют из коммутатора двух временных компонент, фактор затухания равен  $(P^0)^{-4}$ , и мы можем быть вполне уверены в возможности предельного перехода  $|P| \rightarrow \infty$ .

Мы закончим этот параграф некоторыми замечаниями, относящимися к швингеровским членам (градиентам  $\delta$ -функции) в коммутаторах. Иногда высказываются утверждения о том, что такие члены не дают вклада в правила сумм с фиксированным  $q^2$ . Идея состоит примерно в следующем: записывают правило сумм в виде

$$\begin{aligned} &(\text{обычный коммутатор}) + (\text{швингеровский член}) = \\ &= \int (\text{обычные состояния}) + \int (\text{парные состояния}) \quad (4.48) \end{aligned}$$

и утверждают, что интеграл от вклада парных состояний не исчезает при  $|P| \rightarrow \infty$ , а сокращается со швингеровским членом; в результате получают равенство

$$\lim_{|P| \rightarrow \infty} (\text{обычный коммутатор}) = \int \lim_{|P| \rightarrow \infty} (\text{обычные состояния}). \quad (4.49)$$

Несмотря на то что такая возможность существует, она не может иметь места в общем случае: в теории свободных полей есть контрпример. В модели свободных нуклонов можно добавить к изоспиновому току слагаемое  $x \partial_\mu (\bar{N} \sigma^{\mu\nu} \tau_i N)$ , отвечающее элементарному аномальному моменту. Тогда одновременный коммутатор  $[\mathfrak{S}_{1+i2}^0(x), \mathfrak{S}_{1-i2}^0(y)] \Big|_{x^0=y^0}$  будет содержать нетривиальный член, пропорциональный  $(\nabla_x \cdot \nabla_y) \delta^3(x-y)$ . Несмотря на то что это выражение довольно сингулярно, метод предельного перехода  $|P| \rightarrow \infty$  все еще справедлив для этого коммутатора и правило сумм с фиксированным  $q^2$  содержит вклад, соответствующий градиентному члену. Отсюда, в частности, следует, что правило сумм Кабиббо — Радикати, которое чувствительно к членам типа  $(\nabla_x \cdot \nabla_y) \delta^3(x-y)$ , не является тождеством.

## § 6. Правила сумм как дисперсионные соотношения без вычитаний

В литературе обсуждаемые правила сумм обычно выводят с помощью теории дисперсионных соотношений, а не путем предельного перехода  $|\mathbf{P}| \rightarrow \infty$ . Мы приведем здесь пример дисперсионной техники, из которого будет понятно, почему эти два метода всегда эквивалентны. Мы проиллюстрируем это на примере правила сумм, вытекающего из дважды проинтегрированного коммутатора  $[F_{1+i2}^5, F_{1-i2}^5] = 2F_3$ , который обсуждался в первой половине § 2.

Для дисперсионного вывода этого правила сумм нужно рассмотреть запаздывающий коммутатор

$$R(P, q) = i \int \theta(x^0) e^{iq \cdot x} \times \\ \times \langle \beta(\mathbf{P}) | [\partial_\lambda \delta_{1+i2}^{5\lambda}(x), \partial_\sigma \delta_{1-i2}^{5\sigma}(0)] | \beta(\mathbf{P}) \rangle d^4x, \quad (4.50)$$

где функция  $\theta(x^0) = 1$  при  $x^0 > 0$  и равна нулю при  $x^0 < 0$ . Разлагая коммутатор в выражении (4.50) по полному набору промежуточных состояний и используя трансляционную инвариантность при интегрировании по пространству, получаем

$$R(P, q) = \int \frac{dq'^0}{q'^0 - q^0} A(P, q') \Big|_{q'=q}, \quad (4.51)$$

где  $A(P, q)$  определяется равенством (4.5), а правило обхода сингулярности при  $q'^0 = q^0$  задается путем введения малой положительной мнимой части  $q^0$ . Связь между функцией  $R(P, q)$  и правилом сумм легко обнаружить, учитывая, что

$$\frac{d}{dq^0} R(P, q) \Big|_{\substack{q^0=0 \\ q=0}} = \int \frac{A(P, q')}{(q'^0)^2} dq'^0 \Big|_{q'=0} = 4P^0 I_3(\beta), \quad (4.52)$$

где мы использовали соотношение (4.6).

Чтобы использовать теорию дисперсионных соотношений, мы должны быть уверены, что  $R$  является скалярной функцией  $\nu$  и  $q^2$ . Величина  $A$ , безусловно, является скаляром, но соотношение (4.51) не означает

непосредственно, что и  $R$  — скаляр; причина этого состоит, конечно в том, что элемент контура интегрирования  $dq^0$  при фиксированном  $q'$  инвариантен. Однако из выражения (4.50) для  $R$  в конфигурационном пространстве видно, что если коммутатор  $\partial_{\lambda} \delta_{1+i_2}^{5\lambda}(x)$  и  $\partial_{\sigma} \delta_{1-i_2}^{5\sigma}(0)$  не слишком сингулярен вблизи  $x^0 = 0$  (т. е. при равных временах), так что его умножение на инвариантную функцию  $\theta(x^0)$  приводит к определенной величине, то  $R$  является скаляром<sup>1)</sup>. Мы предположим, что это ограничение на степень сингулярности коммутатора выполняется.

Если  $R$  является функцией только  $v$  и  $q^2$ , то равенство (4.52) можно переписать в виде

$$(P^0)^{-1} \frac{d}{dq^0} R(v, q^2) \Big|_{\substack{q^0=0 \\ q=0}} = \frac{d}{dv} R(v, 0) \Big|_{v=0} = 4I_3(\beta). \quad (4.53)$$

Вывод нужного нам правила сумм в теории дисперсионных соотношений производится следующим образом. Стандартным и строгим результатом теории дисперсионных состояний является то, что  $R(v, 0)$  — вещественная аналитическая функция  $v$ , абсорбтивная часть которой равна  $A(v, 0)$ . Пусть  $R^{(-)}(v, 0)$  — нечетная по  $v$  часть  $R^{(-)}$ , а  $A^{(-)}$  — соответствующая абсорбтивная часть. Тогда, дополнительно предположив, что  $R^{(-)}(v, 0)/v \rightarrow 0$  при  $v \rightarrow \infty$ , можно написать дисперсионное соотношение

$$R^{(-)}(v, 0) = v \int \frac{A^{(-)}(v', 0)}{v'(v' - v)} dv'. \quad (4.54)$$

Правило сумм с  $q^2 = 0$  (4.9) следует непосредственно из соотношений (4.53) и (4.54), так как  $A^{(-)}(v', 0)$  является четной по  $v'$  частью  $A(v', 0)$ .

<sup>1)</sup> Любые нековариантные члены в  $R$  должны быть полиномами по  $q^0$ , поскольку из соотношения (4.51) следует, что  $R$  является аналитической функцией  $q^0$  со скалярной абсорбтивной частью. В обычных доказательствах дисперсионных соотношений для рассеяния адронов, когда интересуются только установлением аналитических свойств функции  $R$ , эти полиномы можно опустить. В правиле же сумм нельзя пренебрегать никакими частями в  $R$ .

Очевидно, что мы заменили предположение о возможности перехода к пределу  $|\mathbf{P}| \rightarrow \infty$  под знаком интеграла предположением о том, что  $R^{(-)}(\nu, 0)/\nu \rightarrow 0$  для больших  $\nu$ . Покажем, что эти два предположения полностью эквивалентны друг другу. Возвращаясь к равенству (4.51), положим  $\mathbf{q} = 0$ ; тогда  $\nu = P^0 q^0$ ,  $q^2 = (\nu/P^0)^2$ , и мы получаем

$$\begin{aligned} R^{(-)}\left(\nu, \left(\frac{\nu}{P^0}\right)^2\right) &= R^{(-)}(P, q) \Big|_{q=0} = \\ &= q^0 \int \frac{A^{(-)}(P, q')}{q'^0 (q'^0 - q^0)} dq'^0 \Big|_{q'=0} = \nu \int \frac{A^{(-)}\left(\nu', \left(\frac{\nu'}{P^0}\right)^2\right)}{\nu' (\nu' - \nu)} d\nu'. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Теперь ясно, что для любых конечных  $P^0$  величина  $R^{(-)}(\nu, (\nu/P^0)^2)/\nu$  удовлетворяет дисперсионному соотношению по  $\nu$  без вычитаний, а  $R^{(-)}(\nu, 0)/\nu$  будет удовлетворять дисперсионному соотношению без вычитаний в том и только том случае, когда допустим переход к пределу  $|\mathbf{P}| \rightarrow \infty$  под знаком интеграла в правой части (4.55).

В действительности, однако, то обстоятельство, что возможность предельного перехода  $|\mathbf{P}| \rightarrow \infty$  эквивалентна отсутствию вычитаний в дисперсионном соотношении, не улучшает положения. Строго доказать отсутствие вычитаний не легче, чем доказать справедливость метода предельного перехода  $|\mathbf{P}| \rightarrow \infty$ . Тем не менее замечательно, что изучение предела бесконечного импульса  $|\mathbf{P}|$  отвечает на вопрос, почему в некоторых дисперсионных соотношениях нужны вычитания, даже если интеграл от абсорбтивной части сходится при отсутствии вычитаний: это происходит тогда, когда вклад парных состояний недостаточно подавлен при  $|\nu| = \infty$ .

Исключительно изящной формулировкой результата теории дисперсионных соотношений является утверждение о том, что алгебра токов позволяет вывести низкоэнергетическую теорему для  $R(\nu, 0)$ , т. е. определяет значение  $(d/d\nu)R(\nu, 0)$  при  $\nu = 0$ . Низкоэнергетическая

теорема плюс предположение о дисперсионных соотношениях без вычитаний и дают нам правило сумм<sup>1)</sup>.

Когда правила сумм с фиксированным  $q^2$  были впервые получены, казалось совершенно таинственным, почему метод предельного перехода  $|\mathbf{P}| \rightarrow \infty$  и дисперсионный метод всегда дают одни и те же результаты. Однако на приведенном выше примере мы выяснили, что эти два метода действительно отличаются только внешне. Для читателя не представит большого труда убедиться, что это справедливо и в общем случае; для того чтобы при выводе *любого* правила сумм перейти от метода предельного перехода  $|\mathbf{P}| \rightarrow \infty$  к дисперсионному методу, нужно лишь: 1) путем несложных преобразований выразить сумму по состояниям [как в (4.6)] через запаздывающий коммутатор [как это сделано в (4.52)]; 2) заметить, что переход к пределу  $|\mathbf{P}| \rightarrow \infty$  под знаком интеграла, определяющего запаздывающий коммутатор, ведет к дисперсионному соотношению без вычитаний; 3) забыть о пределе  $|\mathbf{P}| \rightarrow \infty$  и сформулировать постулат об отсутствии вычитаний. Обратный процесс превратит любой дисперсионный вывод в вывод с использованием предела бесконечного импульса.

Адлер (ст. 11) с помощью теории дисперсионных соотношений выводит правила сумм с  $q^2 \neq 0$ , рассмотренные в последней части § 2 и в § 3. Мы рекомендуем читателю, желающему глубже понять метод правил сумм, проработать вывод Адлера и сравнить его с приведенным здесь выводом, использующим предел бесконечного импульса. Мы должны предостеречь, что некоторые правила сумм, рассмотренные в ст. 11, вытекают из коммутаторов пространственных компонент токов, а в этих случаях постулат об отсутствии вычи-

<sup>1)</sup> Например, как отмечалось в гл. 2, правило сумм для  $g_A$  можно рассматривать как низкоэнергетическую теорему для  $\pi N$ -рассеяния. Фактически почти любое правило сумм можно представить в виде низкоэнергетической теоремы для того или иного запаздывающего произведения. Однако, за исключением нескольких случаев, аналогичных правилу сумм для  $g_A$ , запаздывающее произведение не является непосредственно измеримым, так что низкоэнергетическая теорема сама по себе не представляет большой ценности.

таний, почти наверное, несправедлив. Фубини, Фурлан и Росетти (ст. 5) дают несколько отличный дисперсионный вывод некоторых правил сумм. Читателю будет полезно найти связь между их выводом и нашим.

### Л и т е р а т у р а

1. Cabibbo N., Radicati L. A., Phys. Letters, **19**, 697 (1966).
2. Gilman F. J., Schnitzer H. J., Phys. Rev., **150**, 1362 (1966).
3. Adler S. L., Gilman F. J., Phys. Rev., **156**, 1598 (1967).
4. Frautschi S. C., Regge Poles and S-Matrix Theory, New York, 1963.
5. Bietti A., Phys. Rev., **142**, B1258 (1966).
6. Fubini S., Furlan G., Physics, **1**, 229 (1965).
- 7\*. Логунов А. А., Соловьев Л. Д., Nucl. Phys., **10**, 60 (1959).  
Соловьев Л. Д., Ядерная физика, **3**, 188 (1966).  
Азнаурян И. Г., Соловьев Л. Д., Ядерная физика, **4**, 5 (1966).

### ОСНОВНЫЕ СТАТЬИ

- Bietti A., Phys. Rev., **142**, B1258 (1966) (оригинал, стр. 269).  
Sum Rules for Magnetic Quadrupole and Electric Dipole Moments: An Application of the Algebra of Current Components.
- Fubini S., Furlan G., Physics, **1**, 229 (1965).  
Renormalization Effects for Partially Conserved Currents.
- Adler S. L., Phys. Rev., **143**, 1144 (1966) (ст. 11 настоящей книги).  
Sum Rules Giving Tests of Local Current Commutation Relations in High-Energy Neutrino Reactions.
- Bjorken J. D., Phys. Rev. Letters, **16**, 408 (1966) (ст. 12 настоящей книги).  
Inequality for Electron and Muon Scattering from Nucleons.
- De Alfaro V., Fubini S., Rossetti G., Furlan G., Phys. Letters, **21**, 577 (1966) (ст. 13 настоящей книги).  
Sum Rules for Strong Interactions.



# ПРАВИЛА СУММ, ПОЗВОЛЯЮЩИЕ ПРОВЕРИТЬ ЛОКАЛЬНЫЕ КОММУТАЦИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ ТОКОВ В НЕЙТРИННЫХ РЕАКЦИЯХ ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ

С. Адлер\*

S. L. Adler, Phys. Rev., **143**, 1144 (1966); Errata **151**, 1342 (1966)

В настоящей работе показано, что локальные коммутационные соотношения для октетов векторных и аксиально-векторных токов могут быть проверены в нейтринных реакциях с образованием лептонов под ненулевыми углами. Для этого с помощью коммутационных соотношений получены правила сумм при фиксированном  $q^2$  ( $q^2$  — инвариантный квадрат импульса, передаваемого лептонами), содержащие упругие и неупругие формфакторы, которые измеряются в нейтринных реакциях при высоких энергиях.

## § 1. Введение

Недавно Гелл-Манном [1] было высказано предположение, что четвертые компоненты октетов векторного и аксиально-векторного токов удовлетворяют локальным одновременным коммутационным соотношениям

$$[\mathfrak{F}_{a4}(x), \mathfrak{F}_{b4}(y)]|_{x_0=y_0} = -f_{abc}\mathfrak{F}_{c4}(x)\delta(x-y), \quad (1a)$$

$$[\mathfrak{F}_{a4}(x), \mathfrak{F}_{b4}^5(y)]|_{x_0=y_0} = -f_{abc}\mathfrak{F}_{c4}^5(x)\delta(x-y), \quad (1б)$$

$$[\mathfrak{F}_{a4}^5(x), \mathfrak{F}_{b4}^5(y)]|_{x_0=y_0} = -f_{abc}\mathfrak{F}_{c4}^5(x)\delta(x-y). \quad (1в)$$

Здесь  $\mathfrak{F}_{a\lambda}$  и  $\mathfrak{F}_{a\lambda}^5$  — октеты векторного и аксиально-векторного токов соответственно,  $a, b$  и  $c$  — индексы унитарного спина, пробегающие значения от 1 до 8. Согласно соотношениям (1), октеты векторного и аксиально-векторного зарядов

$$F_a(t) = -i \int d^3x \mathfrak{F}_{a4}(x, t), \quad F_a^5(t) = -i \int d^3x \mathfrak{F}_{a4}^5(x, t) \quad (2)$$

---

\* CERN, Geneva, Switzerland and Lyman Laboratory, Harvard University, Cambridge, Massachusetts.

удовлетворяют одновременным коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} [F_a(t), F_b(t)] &= if_{abc} F_c(t), \\ [F_a(t), F_b^5(t)] &= if_{abc} F_c^5(t), \\ [F_a^5(t), F_b^5(t)] &= if_{abc} F_c(t). \end{aligned} \quad (3)$$

Предположение о существовании коммутационных соотношений (1) является значительно более сильным, чем предположение о существовании соотношений (3), так как если бы в правой части соотношений (1) присутствовали производные  $\delta$ -функции, то соотношения (3) были бы по-прежнему справедливы. В более ранней работе [2] мы показали, что коммутационные соотношения (3) могут быть проверены в неупругих нейтринных реакциях при высоких энергиях, в которых лептон (массой которого пренебрегаем) движется параллельно направлению движения падающего нейтрино. Другими словами, соотношения (3) могут быть проверены в нейтринных реакциях при  $q^2 = 0$ , где  $q^2$  — инвариантный квадрат импульса, переданного от нейтрино вылетающему лептону. В этой работе мы обобщим результаты [2] и покажем, что локальные коммутационные соотношения (1) могут быть проверены в нейтринных реакциях при  $q^2 > 0$  (для ненулевого угла вылета лептона). Для этого мы выведем из соотношений (1) правило сумм, справедливое при любом фиксированном  $q^2$  и содержащее величины, измеряемые в нейтринных реакциях при высоких энергиях.

В дополнение к соотношениям (1) для четвертых компонент октетов токов мы постулируем, что пространственные компоненты октетов удовлетворяют следующим локальным одновременным коммутационным соотношениям

$$[\mathfrak{F}_{an}(x), \mathfrak{F}_{bm}(y)]|_{x_0=y_0} = \delta_{nm} f_{abc} \mathcal{Y}_{c4}^1(x) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + S_{ab}^1, \quad (4a)$$

$$\begin{aligned} \{[\mathfrak{F}_{an}(x), \mathfrak{F}_{bm}^5(y)]|_{x_0=y_0} + [\mathfrak{F}_{an}^5(x), \mathfrak{F}_{bm}(y)]|_{x_0=y_0}\} = \\ = -2\delta_{nm} f_{abc} \mathcal{A}_{c4}(x) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + S_{ab}^2, \end{aligned} \quad (4b)$$

$$[\mathfrak{F}_{an}^5(x), \mathfrak{F}_{bm}^5(y)]|_{x_0=y_0} = \delta_{nm} f_{abc} \mathcal{Y}_{c4}^2(x) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + S_{ab}^3. \quad (4b)$$

Здесь  $\mathcal{Y}_{c4}^1$  и  $\mathcal{Y}_{c4}^2$  — четвертые компоненты октетов векторных токов, а  $\mathcal{A}_{c4}$  — четвертая компонента аксиально-

векторного октета. Величины  $S_{ab}^{1,2,3}$  симметричны по индексам унитарного спина  $a$  и  $b$ . Если выполняются коммутационные соотношения простой кварковой модели, предложенные Гелл-Манном и Дашеном [3] и Ли [4], то

$$\mathcal{V}_{c4}^1 = \mathcal{V}_{c4}^2 = \mathcal{F}_{c4}, \quad \mathcal{A}_{c4} = \mathcal{F}_{c4}^5. \quad (5)$$

Однако формулы (5) не справедливы в моделях, в которых токи явно содержат мезонные поля, в то время как во многих таких моделях теории поля соотношения (4) имеют место. Мы получим правила сумм, позволяющие проверить соотношения (4) в нейтринных реакциях при  $q^2 > 0$ .

Для вывода каждого правила, обсуждаемого в этой статье, требуется, помимо локального одновременного коммутационного соотношения, предположение о том, что некоторая амплитуда рассеяния удовлетворяет дисперсионному соотношению по энергетической переменной при фиксированном  $q^2$  без вычитаний. В этой статье не будет сделано никаких попыток обосновать предположение об отсутствии вычитаний в дисперсионных соотношениях. Поэтому утверждение, которое мы можем сделать в этой статье, состоит в том, что если справедливо предположение об отсутствии вычитаний в дисперсионных соотношениях, то полученные правила сумм позволяют провести непосредственную экспериментальную проверку локальных одновременных коммутационных соотношений.

В § 2 мы детально сформулируем результаты работы. Следующие два параграфа содержат их вывод. В § 3 анализируется кинематика нейтринных реакций при высоких энергиях. В § 4 мы получаем из локальных коммутационных соотношений правила сумм, которые содержат величины, определенные в § 3 при анализе кинематики. В приложении рассмотрены поправки к результатам за счет лептонной массы.

## § 2. Результаты

Рассмотрим нейтринную реакцию при высоких энергиях

$$\nu + N \rightarrow l + \beta, \quad (6)$$

где  $\nu$  — нейтрино,  $N$  — нуклон (нейтрон или протон),  $l$  — электрон или мюон и  $\beta$  — совокупность сильно взаимодействующих частиц. Всюду в тексте этой статьи мы будем пренебрегать массой конечного лептона, т. е.

$$m_l \approx 0. \quad (7)$$

Сформулированные ниже результаты лишь незначительно изменяются при учете лептонной массы (см. приложение). Определим все инвариантные величины, относящиеся к реакции (6), в лабораторной системе, где нуклон  $N$  покоится:

$E_\nu$  — энергия нейтрино,

$E_l$  — энергия лептона,

$\varphi$  — угол между импульсами нейтрино и лептона,

$\Omega_l$  — лептонный телесный угол,

$k_\nu$  — 4-импульс нейтрино,

$k_l$  — 4-импульс лептона,

$q = k_\nu - k_l$  — 4-импульс, переданный лептону.

Обозначим через  $W$  инвариантную массу системы  $\beta$ , через  $M_N$  — массу нуклона и через  $q^2$  — инвариантный импульс, передаваемый между лептонами:

$$q^2 = (k_\nu - k_l)^2 = 4E_\nu E_l \sin^2 \frac{\varphi}{2},$$

$$W = [2M_N(E_\nu - E_l) + M_N^2 - q^2]^{1/2}. \quad (8б)$$

Мы будем предполагать, что полулептонные слабые взаимодействия описываются плотностью эффективного лагранжиана, имеющего вид произведения токов:

$$\mathcal{L}(x) = \frac{G}{\sqrt{2}} j_\lambda(x) J_\lambda(x) + \text{Сопряж. член},$$

$$G = \frac{1,023 \cdot 10^{-5}}{M_N^2},$$

$$j_\lambda(x) = \bar{\psi}_l(x) \gamma_\lambda (1 + \gamma_5) \psi_\nu(x),$$

$$J_\lambda(x) = (\cos \theta_C) [\mathfrak{S}_{1\lambda}(x) + i\mathfrak{S}_{2\lambda}(x) + \mathfrak{S}_{1\lambda}^5(x) + i\mathfrak{S}_{2\lambda}^5(x)] +$$

$$+ (\sin \theta_C) [\mathfrak{S}_{4\lambda}(x) + i\mathfrak{S}_{5\lambda}(x) + \mathfrak{S}_{4\lambda}^5(x) + i\mathfrak{S}_{5\lambda}^5(x)], \quad (9)$$

$\theta_C$  = Угол Кабиббо.

Формфакторы  $F_1^V(q^2)$ ,  $F_2^V(q^2)$ ,  $g_V(q^2)$ ,  $g_A(q^2)$  и  $h_A(q^2)$ , описывающие упругие нейтринные реакции, определяются формулами

$$\begin{aligned} \langle N(p_2) | \mathfrak{F}_{1\lambda}(0) + i\mathfrak{F}_{2\lambda}(0) | N(p_1) \rangle = \\ = \left( \frac{M_N}{p_{20}} \frac{M_N}{p_{10}} \right)^{1/2} i\bar{u}_N(p_2) \tau^+ [F_1^V(q^2) \gamma_\lambda - F_2^V(q^2) \sigma_{\lambda\eta} q_\eta] u_N(p_1) = \\ = \left( \frac{M_N}{p_{20}} \frac{M_N}{p_{10}} \right)^{1/2} i\bar{u}_N(p_2) \tau^+ [g_V(q^2) \gamma_\lambda + iF_2^V(q^2) (p_1 + p_2)_\lambda] u_N(p_1), \end{aligned} \quad (10)$$

$$q = p_2 - p_1, \quad g_V(q^2) = F_1^V(q^2) + 2M_N F_2^V(q^2),$$

$$\begin{aligned} \langle N(p_2) | \mathfrak{F}_{1\lambda}^5(0) + i\mathfrak{F}_{2\lambda}^5(0) | N(p_1) \rangle = \\ = \left( \frac{M_N}{p_{20}} \frac{M_N}{p_{10}} \right)^{1/2} i\bar{u}_N(p_2) \tau^+ [g_A(q^2) \gamma_\lambda - ih_A(q^2) q_\lambda] \gamma_5 u_N(p_1). \end{aligned}$$

Здесь через  $\tau^+$  обозначена комбинация  $1/2(\tau^1 + i\tau^2)$ , где  $1/2\tau^c$  ( $c = 1, 2, 3$ ) — матрицы изотопического спина нуклона.

Наконец, определим диагональные матричные элементы между однонуклонными состояниями операторов  $\mathcal{Y}_{c4}^{1,2}$ , входящие в соотношения (4),

$$\begin{aligned} \langle N(p) | \mathcal{Y}_{c4}^{1,2}(0) | N(p) \rangle = iC_I^{1,2} \left\langle \frac{1}{2} \tau^c \right\rangle, \quad c = 1, 2, 3, \\ \langle N(p) | \mathcal{Y}_{84}^{1,2}(0) | N(p) \rangle = iC_Y^{1,2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Если выполняются коммутационные соотношения модели кварков, так что справедлива формула (5), то

$$C_I^{1,2} = 1, \quad C_Y^{1,2} = \frac{1}{2} \sqrt{3}. \quad (12)$$

Если же коммутационные соотношения модели кварков не выполняются, то значения  $C_I^{1,2}$  и  $C_Y^{1,2}$  остаются неизвестными. Теперь мы можем сформулировать результаты этой работы.

## 1. СЛУЧАЙ СОХРАНЯЮЩЕЙСЯ СТРАННОСТИ

Из кинематического анализа § 3 следует, что дифференциальное сечение рассматриваемой реакции можно записать в следующем виде:

$$\frac{d^2\sigma\left(\left(\frac{\mathbf{v}}{\bar{\mathbf{v}}}\right) + p \rightarrow \left(\frac{l}{\bar{l}}\right) + \beta (S=0)\right)}{d\Omega_l dE_l} = \frac{G^2 \cos^2 \theta_C}{(2\pi)^2} \frac{E_l}{E_\nu} =$$

$$= \left[ q^2 \alpha^{(\pm)}(q^2, W) + 2E_\nu E_l \cos^2\left(\frac{1}{2}\varphi\right) \beta^{(\pm)}(q^2, W) \mp \right.$$

$$\left. \mp (E_\nu + E_l) q^2 \gamma^{(\pm)}(q^2, W) \right]. \quad (13)$$

Измеряя  $d^2\sigma/d\Omega_l dE_l$  для различных значений энергии нейтрино  $E_\nu$ , энергии лептона  $E_l$  и угла  $\varphi$  между направлениями движения лептона и нейтрино, мы можем определить формфакторы  $\alpha^{(\pm)}$ ,  $\beta^{(\pm)}$  и  $\gamma^{(\pm)}$  для всех  $q^2 > 0$  и всех  $W$  выше порога.

В § 4 показано, что:

1) Из локальных коммутационных соотношений (1а) и (1в) следует правило сумм

$$2 = g_A (q^2)^2 + F_1^V (q^2)^2 + q^2 F_2^V (q^2)^2 +$$

$$+ \int_{M_N + M_\pi}^{\infty} \frac{W}{M_N} dW [\beta^{(-)}(q^2, W) - \beta^{(+)}(q^2, W)]. \quad (14)$$

2) Из локальных коммутационных соотношений (4а) и (4в) следует правило сумм

$$C_I^1 + C_I^2 = \left(1 + \frac{q^2}{4M_N^2}\right) g_A (q^2)^2 + \frac{q^2}{4M_N^2} g_V (q^2)^2 +$$

$$+ \int_{M_N + M_\pi}^{\infty} \frac{W}{M_N} dW [\alpha^{(-)}(q^2, W) - \alpha^{(+)}(q^2, W)]. \quad (15)$$

3) Из локального коммутационного соотношения (4б) следует правило сумм

$$\frac{g_V(q^2) g_A(q^2)}{M_N} = \int_{M_N + M_\pi}^{\infty} \frac{W}{M_N} dW [\gamma^{(-)}(q^2, W) - \gamma^{(+)}(q^2, W)]. \quad (16)$$

## 2. СЛУЧАЙ ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ СТРАННОСТИ

Мы имеем

$$\frac{d^2\sigma \left( \left( \begin{smallmatrix} \nu \\ \bar{\nu} \end{smallmatrix} \right) + (p, n) \rightarrow \left( \begin{smallmatrix} l \\ \bar{l} \end{smallmatrix} \right) + \beta \left( \begin{smallmatrix} S=1 \\ S=-1 \end{smallmatrix} \right) \right)}{d\Omega_l dE_l} =$$

$$= \frac{G^2 \sin^2 \theta_c}{(2\pi)^2} \frac{E_l}{E_\nu} \left[ q^2 \alpha_{(p, n)}^{(\pm)}(q^2, W) + \right.$$

$$\left. + 2E_\nu E_l \cos^2 \left( \frac{1}{2} \varphi \right) \beta_{(p, n)}^{(\pm)}(q^2, W) \mp (E_\nu + E_l) q^2 \gamma_{(p, n)}^{(\pm)}(q^2, W) \right]. \quad (17)$$

Тогда:

1) Из локальных коммутационных соотношений (1а) и (1в) следует правило сумм

$$(4, 2) = \int \frac{W}{M_N} dW \left[ \beta_{(p, n)}^{(-)}(q^2, W) - \beta_{(p, n)}^{(+)}(q^2, W) \right]. \quad (18)$$

2) Из локальных коммутационных соотношений (4а) и (4в) следует правило сумм

$$\left[ \sqrt{3} (C_Y^1 + C_Y^2) + \frac{1}{2} (C_l^1 + C_l^2), \sqrt{3} (C_Y^1 - C_Y^2) - \frac{1}{2} (C_l^1 + C_l^2) \right] =$$

$$= \int \frac{W}{M_N} dW \left[ \alpha_{(p, n)}^{(-)}(q^2, W) - \alpha_{(p, n)}^{(+)}(q^2, W) \right]. \quad (19)$$

3) Из локального коммутационного соотношения (4б) следует правило сумм

$$(0, 0) = \int \frac{W}{M_N} dW \left[ \gamma_{(p, n)}^{(-)}(q^2, W) - \gamma_{(p, n)}^{(+)}(q^2, W) \right]. \quad (20)$$

Интегралы в соотношениях (18) — (20) содержат вклады дискретного спектра, соответствующие  $W = M_\Delta$  и (или)  $M_\Sigma$ , и непрерывного спектра, охватывающего интервал от  $W = M_\Delta + M_\pi$  или от  $W = M_\Sigma + M_\pi$  до  $W = \infty$ . Мы не выделили явно дискретные вклады в интегралы, как это было сделано в соотношениях (14) — (16) для случая сохраняющейся странности, однако это выделение не представляет труда.

Правила сумм (14) — (16) и (18) — (20) имеют место при любом фиксированном  $q^2$  при условии, как это отмечалось в § 1, что справедливо предположение об от-

существовании вычитаний в каждом дисперсионном соотношении, необходимом для получения этих правил сумм. Из соотношений (41) и (43) § 3 следует, что при  $q^2 = 0$

$$\beta(0, W) = \frac{4M_N^2}{(W^2 - M_N^2)^2} \sum_{\beta, \text{внут}} \sum_s \delta(k_{\beta 0} + E_l - E_\nu - M_N) \times \\ \times [|\langle \beta | \partial_\lambda J_\lambda^V | N \rangle|^2 + |\langle \beta | \partial_\lambda J_\lambda^A | N \rangle|^2], \quad (21)$$

где  $J_\lambda^V$  и  $J_\lambda^A$  — векторный и аксиально-векторный слабые токи, соответствующие  $\Delta S = 0$  или  $|\Delta S| = 1$  (например,  $J_\lambda^V = \mathfrak{F}_{1\lambda} + i\mathfrak{F}_{2\lambda}$  или  $\mathfrak{F}_{4\lambda} + i\mathfrak{F}_{5\lambda}$ ). Поэтому при  $q^2 = 0$  соотношения (14) и (18) переходят в правила сумм для нулевого угла вылета лептонов, полученные в [2].

Из правила сумм для формфакторов  $\beta$  вытекают интересные следствия о поведении нейтринных сечений в пределе очень высоких энергий нейтрино  $E_\nu$ . Запишем с помощью формул (8) соотношения (13) и (14) в виде

$$\frac{d^2\sigma \left( \begin{pmatrix} \nu \\ \bar{\nu} \end{pmatrix} + p \rightarrow \begin{pmatrix} l \\ \bar{l} \end{pmatrix} + \beta (S=0) \right)}{d(q^2) dq_0} = \\ = \frac{G^2 \cos^2 \theta_c}{4\pi E_\nu^2} \left[ q^2 \alpha^{(\pm)} + \left( 2E_\nu^2 - 2E_\nu q_0 - \frac{1}{2} q^2 \right) \beta^{(\pm)} \mp \right. \\ \left. \mp (2E_\nu - q_0) q^2 \gamma^{(\pm)} \right], \quad (22)$$

$$2 = \int_{(q^2/2M_N)^-}^{\infty} dq_0 (\beta^{(-)} - \beta^{(+)}). \quad (23)$$

Дифференциальное сечение  $d\sigma/d(q^2)$  дается формулой

$$\frac{d\sigma}{dq^2} = \int_{(q^2/2M_N)^-}^{E_\nu(1-q^2/4E_\nu^2)} dq_0 \frac{d^2\sigma}{d(q^2) dq_0}, \quad (24)$$

в которой верхний предел интегрирования фиксируется требованием того, чтобы значения  $\sin^2(\varphi/2)$  лежали между 0 и 1. Используя формулы (22) — (24), нетрудно доказать следующую теорему.



Теорема. Предположим, что интегралы

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_0}{q_0^2} (\alpha^{(-)} - \alpha^{(+)}), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_0}{q_0} (\gamma^{(-)} + \gamma^{(+)}),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq_0 (\beta^{(-)} - \beta^{(+)})$$
(25)

сходятся. Тогда

$$\lim_{E_\nu \rightarrow \infty} \left[ \frac{d\sigma(\bar{\nu} + p \rightarrow \bar{l} + \beta(S=0))}{d(q^2)} - \frac{d\sigma(\nu + p \rightarrow l + \beta(S=0))}{d(q^2)} \right] =$$

$$= \frac{G^2 \cos^2 \theta_C}{2\pi} \int_{(q^2/2M_N)^-}^{\infty} dq_0 [\beta^{(-)} - \beta^{(+)}] = \frac{G^2 \cos^2 \theta_C}{\pi}. \quad (26)$$

Аналогичные результаты имеют место в случае изменяющейся странности. Складывая сечения для  $\Delta S = 0$  и  $|\Delta S| = 1$ , приходим к следующим соотношениям для полных сечений:

$$\lim_{E_\nu \rightarrow \infty} \left[ \frac{d\sigma_T(\bar{\nu} + p)}{d(q^2)} - \frac{d\sigma_T(\nu + p)}{d(q^2)} \right] = \frac{G^2}{\pi} (\cos^2 \theta_C + 2 \sin^2 \theta_C),$$

$$\lim_{E_\nu \rightarrow \infty} \left[ \frac{d\sigma_T(\bar{\nu} + n)}{d(q^2)} - \frac{d\sigma_T(\nu + n)}{d(q^2)} \right] = \frac{G^2}{\pi} (-\cos^2 \theta_C + \sin^2 \theta_C). \quad (27)$$

Из формул (27) следует довольно удивительный вывод о том, что величина  $d\sigma_T(\bar{\nu} + N)/d(q^2) - d\sigma_T(\nu + N)/d(q^2)$  становится *не зависящей* от  $q^2$  в пределе больших энергий нейтрино. Этот результат не изменяется при учете массы лептона.

### § 3. Кинематический анализ нейтринных реакций при высоких энергиях

В этом параграфе мы выведем формулу (13), которая дает общий вид дифференциального сечения  $d^2\sigma/d\Omega_l dE_l$  образования лептона в нейтринной реакции<sup>1)</sup>. В част-

<sup>1)</sup> Теоремы локальности этого типа, разумеется, хорошо известны. См., например, [5].

ности, мы найдем явные выражения для формфакторов  $\alpha(q^2, W)$ ,  $\beta(q^2, W)$  и  $\gamma(q^2, W)$  через матричные элементы векторных и аксиально-векторных токов.

В соответствии с эффективным лагранжианом (9) матричный элемент  $\mathfrak{M}$  для процесса  $\nu + N \rightarrow l + \beta$  дается формулой

$$\mathfrak{M} = gm, \quad (28)$$

$$m = \bar{u}_l(k_l) \gamma_\lambda (1 + \gamma_5) u_\nu(k_\nu) 2^{-1/2} \langle \beta^{\text{out}}(k_\beta) | J_\lambda^V + J_\lambda^A | N(k_N) \rangle.$$

Здесь  $g = (G \cos \theta_C, G \sin \theta_C)$  в реакциях с  $\Delta S = 0$  и  $|\Delta S| = 1$ ;  $J_\lambda^V$  и  $J_\lambda^A$  — соответствующие векторный и аксиально-векторный токи;  $k_\beta$  и  $k_N$  — 4-импульсы частиц  $\beta$  и  $N$  соответственно. В системе покоя начального нуклона  $N$  сечение реакции имеет вид

$$\sigma = (2\pi)^4 \int \frac{d^3 k_l}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k_\beta}{(2\pi)^3} \sum_{\beta, \text{внут}} \sum_s \delta(k_\beta + k_l - k_\nu - k_N) \times \\ \times \left( \frac{m_l}{E_l} \frac{m_\nu}{E_\nu} \right) g^2 \langle |m|^2 \rangle. \quad (29)$$

В формуле (29)  $\sum_{\beta, \text{внут}}$  — сумма по внутренним переменным системы частиц  $\beta$ ,  $\sum_s$  — усреднение по спину начального нуклона и  $\langle |m|^2 \rangle$  — величина  $|m|^2$ , просуммированная по спиновым состояниям лептона. Из формулы (29) следует, что

$$\frac{d^2 \sigma}{d\Omega_l dE_l} = \frac{g^2}{(2\pi)^2} \frac{E_l}{E_\nu} \kappa, \quad (30)$$

где

$$\kappa = \sum_{\beta, \text{внут}} \sum_s \delta(k_{\beta 0} + E_l - E_\nu - M_N) m_l m_\nu \langle |m|^2 \rangle |_{k_\beta = q}. \quad (31)$$

Изучим теперь величину  $\kappa$ . Введем сокращенные обозначения

$$e_\lambda = 2^{-1/2} \bar{u}_l(k_l) \gamma_\lambda (1 + \gamma_5) u_\nu(k_\nu), \\ V_\lambda^\beta = \langle \beta^{\text{out}}[\mathbf{q}, i(q_0 + M_N)] | J_\lambda^V | N(0, iM_N) \rangle, \\ A_\lambda^\beta = \langle \beta^{\text{out}}[\mathbf{q}, i(q_0 + M_N)] | J_\lambda^A | N(0, iM_N) \rangle, \\ \sum_\beta = \sum_{\beta, \text{внут}} \sum_s \delta(k_{\beta 0} + E_l - E_\nu - M_N). \quad (32)$$

Обозначим далее через  $V_D^\beta$  и  $A_D^\beta$  матричные элементы дивергенций векторного и аксиально-векторного токов

$$\begin{aligned} V_D^\beta &= -iq_\lambda V_\lambda^\beta = \langle \beta^{\text{out}} [\mathbf{q}, i(q_0 + M_N)] | \partial_\lambda J_\lambda^V | N(\mathbf{0}, iM_N) \rangle, \\ A_D^\beta &= -iq_\lambda A_\lambda^\beta = \langle \beta^{\text{out}} [\mathbf{q}, i(q_0 + M_N)] | \partial_\lambda J_\lambda^A | N(\mathbf{0}, iM_N) \rangle. \end{aligned} \quad (33)$$

Так как мы пренебрегаем массой конечного лептона, то

$$q_\lambda e_\lambda = 0. \quad (34)$$

Используя формулы (33) и (34), можно написать

$$\begin{aligned} m &= e_\lambda (V_\lambda^\beta + A_\lambda^\beta) = \\ &= e_n \left( \delta_{nk} - \frac{q_n q_k}{q_0^2} \right) (V_k^\beta + A_k^\beta) + i \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{e}}{q_0^2} (V_D^\beta + A_D^\beta), \end{aligned} \quad (35)$$

где по повторяющимся индексам  $n$  и  $k$  производится суммирование от 1 до 3. Обозначив через  $t_{nm}$  величину

$$\begin{aligned} t_{nm} &= \langle e_n e_m^* \rangle m_\nu m_l = \\ &= (k_\nu)_n (k_l)_m + (k_l)_n (k_\nu)_m - k_\nu \cdot k_l \delta_{nm} + \varepsilon_{nm\xi\eta} (k_\nu)_\xi (k_l)_\eta, \end{aligned} \quad (36)$$

мы получим

$$\begin{aligned} \kappa &= \sum_\beta m_l m_\nu \langle |m|^2 \rangle |_{k_\beta = q} = \\ &= t_{nm} \left( \delta_{mj} - \frac{q_m q_j}{q_0^2} \right) \left( \delta_{nk} - \frac{q_n q_k}{q_0^2} \right) \left\{ \sum_\beta (V_j^\beta)^* V_k^\beta + \right. \\ &+ \sum_\beta (A_j^\beta)^* A_k^\beta + \sum_\beta [(A_j^\beta)^* V_k^\beta + (V_j^\beta)^* A_k^\beta] \left. \right\} + \\ &+ t_{nm} \frac{q_n q_m}{q_0^4} \left\{ \sum_\beta |V_D^\beta|^2 + \sum_\beta |A_D^\beta|^2 + \right. \\ &+ \sum_\beta [(A_D^\beta)^* V_D^\beta + (V_D^\beta)^* A_D^\beta] \left. \right\} + \\ &+ t_{nm} \left( \delta_{nk} - \frac{q_n q_k}{q_0^2} \right) \frac{iq_m}{q_0} \left\{ \sum_\beta [(V_k^\beta)^* V_D^\beta - (V_D^\beta)^* V_k^\beta] + \right. \\ &+ \sum_\beta [(A_k^\beta)^* A_D^\beta - (A_D^\beta)^* A_k^\beta] + \sum_\beta [(V_k^\beta)^* A_D^\beta - (A_D^\beta)^* V_k^\beta] + \\ &\left. + \sum_\beta [(A_k^\beta)^* V_D^\beta - (V_D^\beta)^* A_k^\beta] \right\}. \end{aligned} \quad (37)$$

Следующий этап состоит в использовании трансформационных свойств токов при обращении времени и отражении пространства для определения вида различных членов  $\sum_{\beta}$  в формуле (37). Обозначая через  $T$  и  $P$  операторы обращения времени и четности соответственно, имеем

$$\begin{aligned} T J_k^V(0) T^{-1} &= -J_k^V(0), & T J_k^A(0) T^{-1} &= -J_k^A(0), \\ P J_k^V(0) P^{-1} &= -J_k^V(0), & P J_k^A(0) P^{-1} &= J_k^A(0), \end{aligned} \quad (38)$$

и аналогично для дивергенций токов. Предполагая, что как in-, так и out-состояния образуют полные базисы для состояний с заданной энергией, получаем

$$\begin{aligned} &\sum_{\beta, \text{внут}} \delta(k_{\beta 0} + E_l - E_v - M_N) |\beta^{\text{out}}(k_{\beta})\rangle \langle \beta^{\text{out}}(k_{\beta})| = \\ &= \sum_{\beta, \text{внут}} \delta(k_{\beta 0} + E_l - E_v - M_N) |PT\beta^{\text{out}}(k_{\beta})\rangle \langle PT\beta^{\text{out}}(k_{\beta})| \end{aligned} \quad (39a)$$

и

$$\sum_s |N(k_N)\rangle \langle N(k_N)| = \sum_s |PTN(k_N)\rangle \langle PTN(k_N)|. \quad (39b)$$

Используя формулы (38) и (39), находим

$$\begin{aligned} &\sum_{\beta} V_k^{\beta} (V_j^{\beta})^* = \\ &= \sum_{\beta, \text{внут}} \sum_s \delta(k_{\beta 0} + E_l - E_v - M_N) \langle \beta^{\text{out}} | J_k^V | N \rangle \langle \beta^{\text{out}} | J_j^V | N \rangle^* = \\ &= \sum_{\beta, \text{внут}} \sum_s \delta(k_{\beta 0} + E_l - E_v - M_N) \times \\ &\times \langle PT\beta^{\text{out}} | J_k^V | PTN \rangle^* \langle PT\beta^{\text{out}} | J_j^V | PTN \rangle = \\ &= \sum_{\beta} V_j^{\beta} (V_k^{\beta})^* = \left[ \sum_{\beta} V_k^{\beta} (V_j^{\beta})^* \right]^*. \end{aligned} \quad (40)$$

Таким образом, тензор  $\sum_{\beta} V_k^{\beta} (V_j^{\beta})^*$  веществен и, следовательно, симметричен. Использование одного лишь оператора  $P$  показывает, что этот тензор является четной функцией  $q$ . Аналогичным образом можно проанализировать все члены  $\sum_{\beta}$  в формуле (37). В результате получаем, что

- 1)  $\sum_{\beta} V_k^{\beta} (V_j^{\beta})^*$  и  $\sum_{\beta} A_k^{\beta} (A_j^{\beta})^*$  — вещественные симметричные тензоры (четные при замене  $\mathbf{q} \rightarrow -\mathbf{q}$ );
- 2)  $\sum_{\beta} [V_k^{\beta} (A_j^{\beta})^* + A_k^{\beta} (V_j^{\beta})^*]$  — мнимый антисимметричный псевдотензор (нечетный при замене  $\mathbf{q} \rightarrow -\mathbf{q}$ );
- 3)  $\sum_{\beta} |V_D^{\beta}|^2$  и  $\sum_{\beta} |A_D^{\beta}|^2$  — вещественные скаляры;
- 4)  $\sum_{\beta} [V_D^{\beta} (A_D^{\beta})^* + A_D^{\beta} (V_D^{\beta})^*]$  — мнимый псевдоскаляр;
- 5)  $\sum_{\beta} [V_k^{\beta} (V_D^{\beta})^* - (V_k^{\beta})^* V_D^{\beta}]$  и  $\sum_{\beta} [A_k^{\beta} (A_D^{\beta})^* - (A_k^{\beta})^* A_D^{\beta}]$  — мнимые векторы;
- 6)  $\sum_{\beta} [V_k^{\beta} (A_D^{\beta})^* - (V_k^{\beta})^* A_D^{\beta}]$  и  $\sum_{\beta} [A_k^{\beta} (V_D^{\beta})^* - (A_k^{\beta})^* V_D^{\beta}]$  — мнимые псевдовекторы.

Все эти величины должны строиться из единственного имеющегося вектора  $\mathbf{q}$ . Поэтому единственными возможными тензорами являются  $\delta_{kj}$  и  $q_k q_j$ , а единственным псевдотензором будет  $\varepsilon_{kijn} q_n$ . Псевдовекторы же или псевдоскаляры при этом не могут быть образованы. Следовательно, величины, содержащиеся в формуле (37), имеют следующий наиболее общий вид:

$$\begin{aligned}
 \sum_{\beta} (V_j^{\beta})^* V_k^{\beta} &= \delta_{jk} V_1(q^2, W) + q_j q_k V_2(q^2, W), \\
 \sum_{\beta} (A_j^{\beta})^* A_k^{\beta} &= \delta_{jk} A_1(q^2, W) + q_j q_k A_2(q^2, W), \\
 \sum_{\beta} [(A_j^{\beta})^* V_k^{\beta} + (V_j^{\beta})^* A_k^{\beta}] &= i \varepsilon_{kjl} q_l I(q^2, W), \\
 \sum_{\beta} |V_D^{\beta}|^2 &= D_V(q^2, W), \\
 \sum_{\beta} |A_D^{\beta}|^2 &= D_A(q^2, W), \\
 \sum_{\beta} [(V_k^{\beta})^* V_D^{\beta} - (V_D^{\beta})^* V_k^{\beta}] &= i q_k I_V(q^2, W), \\
 \sum_{\beta} [(A_k^{\beta})^* A_D^{\beta} - (A_D^{\beta})^* A_k^{\beta}] &= i q_k I_A(q^2, W), \\
 \sum_{\beta} [(A_D^{\beta})^* V_D^{\beta} + (V_D^{\beta})^* A_D^{\beta}] &= 0, \\
 \sum_{\beta} [(V_k^{\beta})^* A_D^{\beta} - (A_D^{\beta})^* V_k^{\beta}] &= 0, \\
 \sum_{\beta} [(A_k^{\beta})^* V_D^{\beta} - (V_D^{\beta})^* A_k^{\beta}] &= 0;
 \end{aligned} \tag{41}$$

здесь все структурные функции ( $V_1, V_2$  и т. д.) вещественны.

Теперь остается только вычислить свертки тензоров в формуле (37). Используя равенства

$$\begin{aligned} q_n \left( \delta_{nk} - \frac{q_n q_k}{q_0^2} \right) &= - \frac{q^2}{q_0^2} q_k, \\ q_n q_m t_{nm} &= 2E_\nu E_l (E_\nu - E_l)^2 \cos^2 \frac{\Phi}{2}, \\ \delta_{nm} t_{nm} &= q^2 + 2E_\nu E_l \cos^2 \frac{\Phi}{2}, \\ \varepsilon_{nm} q_l t_{nm} &= i q^2 (E_\nu + E_l), \end{aligned} \quad (42)$$

после простых алгебраических операций получаем следующий результат:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \sigma}{d\Omega_l dE_l} &= \frac{g^2}{(2\pi)^2} \frac{E_l}{E_\nu} \kappa, \\ \kappa &= q^2 \alpha(q^2, W) + 2E_\nu E_l \cos^2 \left( \frac{1}{2} \Phi \right) \beta(q^2, W) - \\ &\quad - q^2 (E_\nu + E_l) \gamma(q^2, W), \\ \alpha(q^2, W) &= V_1(q^2, W) + A_1(q^2, W), \\ \beta(q^2, W) &= \{q^2 [V_1(q^2, W) + A_1(q^2, W)] + \\ &\quad + (q^2)^2 [V_2(q^2, W) + A_2(q^2, W)] + \\ &\quad + q^2 [I_V(q^2, W) + I_A(q^2, W)] + D_V(q^2, W) + \\ &\quad + D_A(q^2, W)\} \frac{4M_N^2}{(W^2 - M_N^2 + q^2)^2}, \end{aligned} \quad (43)$$

$$\gamma(q^2, W) = I(q^2, W).$$

Для антинейтринных реакций получается та же формула, за исключением того, что последний член в  $\kappa$  заменяется на  $+ q^2 (E_\nu + E_l) \gamma(q^2, W)$  [и, конечно, в выражениях (32), определяющих  $V_k$  и  $A_k$ , токи  $J_k^V$  и  $J_k^A$  заменены на сопряженные].

Простейшей иллюстрацией полученного результата является упругая реакция  $\nu + N \rightarrow l + N$ . Непосредственное

вычисление показывает, что для  $d^2\sigma(\bar{\nu} + p \rightarrow l + n)/d\Omega_l dE_l$  справедлива формула (13), в которой

$$\alpha^{(-)}(q^2, W) = \delta(W - M_N) \left[ \left( 1 + \frac{q^2}{4M_N^2} \right) g_A(q^2)^2 + \frac{q^2}{4M_N^2} g_V(q^2)^2 \right], \quad (44)$$

$$\beta^{(-)}(q^2, W) = \delta(W - M_N) [g_A(q^2)^2 + F_1^V(q^2)^2 + q^2 F_2^V(q^2)^2],$$

$$\gamma^{(-)}(q^2, W) = \delta(W - M_N) \left[ -\frac{g_A(q^2) g_V(q^2)}{M_N} \right].$$

Для этой реакции мы вычислим также отдельные структурные функции, входящие в формулы (41). Они имеют вид

$$V_1^{(-)}(q^2, W) = \delta(W - M_N) \frac{q^2}{4M_N^2} g_V(q^2)^2,$$

$$V_2^{(-)}(q^2, W) = \delta(W - M_N) \left[ \left( 1 + \frac{q^2}{4M_N^2} \right) F_2^V(q^2)^2 - g_V(q^2) \frac{F_2^V(q^2)}{M_N} \right],$$

$$A_1^{(-)}(q^2, W) = \delta(W - M_N) \left( 1 + \frac{q^2}{4M_N^2} \right) g_A(q^2)^2,$$

$$A_2^{(-)}(q^2, W) = \delta(W - M_N) \left[ \frac{q^2}{4M_N^2} h_A(q^2)^2 - h_A(q^2) \frac{g_A(q^2)}{M_N} \right], \quad (45)$$

$$I^{(-)}(q^2, W) = \delta(W - M_N) \left[ -g_A(q^2) \frac{g_V(q^2)}{M_N} \right],$$

$$I_A^{(-)}(q^2, W) = \delta(W - M_N) - \frac{1}{2M_N^2} [2M_N g_A(q^2) - q^2 h_A(q^2)]^2,$$

$$D_A^{(-)}(q^2, W) = \delta(W - M_N) \frac{q^2}{4M_N^2} [2M_N g_A(q^2) - q^2 h_A(q^2)]^2,$$

$$I_V^{(-)}(q^2, W) = D_V^{(-)}(q^2, W) = 0.$$

### § 4. Вывод правил сумм

В этом параграфе мы выведем правила сумм, приведенные в § 2. В п. 1 устанавливается и обсуждается основное тождество, используемое при выводах. Последующие пункты посвящены получению соотношений (14) — (16). Вывод правил сумм в случае изменяющейся странности ничем не отличается от вывода в случае сохраняющейся странности и поэтому опущен.

#### 1. ОСНОВНОЕ ТОЖДЕСТВО

Исходным при получении правил сумм является тождество <sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} \frac{1}{q_0} \int_0^{\infty} dt e^{iq_0 t} \langle N | [\dot{A}(t), \dot{B}(0)] | N \rangle = \\ = -i \langle N | [A(0), B(0)] | N \rangle + \\ + (2q_0)^{-1} \langle N | [\dot{A}(0), B(0)] + [\dot{B}(0), A(0)] | N \rangle + \\ + q_0 \int_0^{\infty} dt e^{iq_0 t} \langle N | [A(t), B(0)] | N \rangle. \end{aligned} \quad (46)$$

Здесь через

$$\dot{A}(t) = \frac{dA(t)}{dt}, \quad \dot{B}(t) = \frac{dB(t)}{dt} \quad (47)$$

обозначены производные операторных функций  $A(t)$  и  $B(t)$  по времени. Равенство (46) легко получить путем повторного интегрирования по частям. Оно справедливо для всех значений  $q_0$ , лежащих в верхней комплексной полуплоскости. В этой статье операторы  $A(t)$  и  $B(t)$  будут всегда иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} A(t) &= -i \int d^3x e^{-is \cdot x} \mathfrak{F}_A(\mathbf{x}, t), \\ B(t) &= -i \int d^3y e^{is \cdot y} \mathfrak{F}_B(\mathbf{y}, t); \end{aligned} \quad (48)$$

$$\mathfrak{F}_A = \mathfrak{F}_{a\lambda} \quad \text{или} \quad \mathfrak{F}_{a\lambda}^5, \quad \mathfrak{F}_B = \mathfrak{F}_{b\sigma} \quad \text{или} \quad \mathfrak{F}_{b\sigma}^5.$$

<sup>1)</sup> Равенство (46) представляет собой более симметричную форму равенства (37), использованного в работе [2]. Равенство (46) остается справедливым и в том случае, когда  $\langle N |$  и  $| N \rangle$  заменяются любыми двумя состояниями с одинаковыми 4-импульсами.



В работе [2] мы исследовали тождество (46) при  $s = 0$  и получили в пределе  $q_0 \rightarrow 0$  правило сумм при  $q^2 = 0$ . В этой же статье мы рассмотрим случай  $s \neq 0$  и в пределе  $q_0 \rightarrow 0$  получим правила сумм для фиксированного  $q^2$  ( $q^2 = |s|^2$ ).

Все выводы, приведенные ниже, обладают некоторыми общими чертами. Во-первых, мы будем использовать равенство (46) в системе покоя нуклона  $N$ , усредненное по спину нуклона. Во-вторых, каждый член в равенстве (46) можно разбить на симметричную и антисимметричную части по индексам унитарного спина  $a$  и  $b$ . Мы будем рассматривать это тождество только для *антисимметричных частей*. В каждом случае, рассмотренном ниже, мы покажем, что член

$$U = (2q_0)^{-1} \langle N | [\dot{A}(0), B(0)] + [B(0), \dot{A}(0)] | N \rangle \quad (49)$$

полностью симметричен по индексам унитарного спина и потому не дает вклада. В-третьих, выражение

$$q_0 \int_0^\infty dt e^{iq_0 t} \langle N | [A(t), B(0)] | N \rangle =$$

$$= -iq_0 \sum_{\substack{\beta, \text{ внут} \\ (M_\beta \geq M_N)}} \left[ \frac{\langle N | \mathfrak{F}_A | \beta \rangle \langle \beta | \mathfrak{F}_B | N \rangle}{q_0 + M_N - (|s|^2 + M_\beta^2)^{1/2}} - \frac{\langle N | \mathfrak{F}_B | \beta \rangle \langle \beta | \mathfrak{F}_A | N \rangle}{q_0 + (|s|^2 + M_\beta^2)^{1/2} - M_N} \right] (2\pi)^2 \delta(0) \quad (50)$$

в пределе  $q_0 \rightarrow 0$  обращается в нуль для всех  $|s|^2 > 0$ . Поэтому третий член в правой части тождества (46) не дает вклада в правила сумм<sup>1)</sup>.

Наконец, мы покажем, что антисимметричная по индексам унитарного спина часть выражения

$$\int_0^\infty dt e^{iq_0 t} \langle N | [\dot{A}(t), \dot{B}(0)] | N \rangle \quad (51)$$

<sup>1)</sup> При  $|s|^2 = 0$  только однонуклонное промежуточное состояние ( $M_\beta = M_N$ ) дает вклад в этом пределе. Этот случай рассмотрен в работе [2].

всегда является нечетной функцией  $q_0$ . Если обозначить ее через  $O(q_0, q^2)$ , то в пределе  $q_0 \rightarrow 0$  тождество (46) перейдет в равенство

$$\left. \frac{\partial}{\partial q_0} O(q_0, q^2) \right|_{q_0=0} = C, \quad (52)$$

где  $C$  — антисимметричная по унитарному спину часть коммутатора  $-i \langle N | [A(0), B(0)] | N \rangle$ . Равенство (52) означает, что коммутатор  $A$  и  $B$  связан с производной по энергии от амплитуды рассеяния вперед, взятой при нулевой энергии. Вплоть до этого места вывод является строгим. Теперь, для того чтобы связать левую часть равенства (52) с физически наблюдаемыми величинами, мы предположим, что производная по энергии  $(\partial/\partial q_0) O(q_0, q^2)$  удовлетворяет дисперсионному соотношению по энергетической переменной  $q_0$  при фиксированном  $q^2$  без вычитаний. Скачок функции  $(\partial/\partial q_0) O(q_0, q^2)$  на разрезе будет в каждом рассматриваемом случае связан с соответствующими структурными функциями, определенными формулами (41).

## 2. ПРАВИЛО СУММ ДЛЯ $\beta^{(\pm)}$

Правило сумм для  $\beta^{(\pm)}$  (14) получается путем сложения двух отдельно выведенных правил сумм для аксиально-векторной и векторной частей  $\beta^{(\pm)}$ ,  $\beta_A^{(\pm)}$  и  $\beta_V^{(\pm)}$

$$1 = g_A(q^2)^2 + \int_{M_N + M_\pi}^{\infty} \frac{W}{M_N} dW [\beta_A^{(-)}(q^2, W) - \beta_A^{(+)}(q^2, W)], \quad (53a)$$

$$1 = F_1^V(q^2)^2 + q^2 F_2^V(q^2)^2 +$$

$$+ \int_{M_N + M_\pi}^{\infty} \frac{W}{M_N} dW [\beta_V^{(-)}(q^2, W) - \beta_V^{(+)}(q^2, W)]. \quad (53b)$$

Используя определения структурных функций (41), получаем

$$\beta_A^{(\pm)}(q^2, W) = [q^2 A_1^{(\pm)}(q^2, W) + (q^2)^2 A_2^{(\pm)}(q^2, W) + q^2 I_A^{(\pm)}(q^2, W) + D_A^{(\pm)}(q^2, W)] \frac{4M_N^2}{(W^2 - M_N^2 + q^2)^2}, \quad (54)$$

$$\beta_V^{(\pm)}(q^2, W) = q^2 [V_1^{(\pm)}(q^2, W) + q^2 V_2^{(\pm)}(q^2, W)] \frac{4M_N^2}{(W^2 - M_N^2 + q^2)^2}.$$

(Структурные функции  $I_V^{(\pm)}(q^2, W)$  и  $D_V^{(\pm)}(q^2, W)$  тождественно равны нулю в случае сохранения странности из-за сохранения векторного тока.) Поскольку соотношения (53а) и (53б) получаются одинаково, мы рассмотрим здесь лишь аксиально-векторный случай [соотношение (53а)].

Мы исходим из основного тождества (46), в котором

$$\begin{aligned} A(t) &= -i \int d^3x e^{-is \cdot x} \mathfrak{F}_{a4}^5(x, t), \\ B(t) &= -i \int d^3y e^{is \cdot y} \mathfrak{F}_{b4}^5(y, t). \end{aligned} \quad (55)$$

Полагая  $D_a(x) = \partial_\lambda \mathfrak{F}_{a\lambda}^5(x)$  и интегрируя по частям, находим

$$\begin{aligned} \dot{A}(t) &= \int d^3x e^{-is \cdot x} [D_a(x, t) - is_n \mathfrak{F}_{an}^5(x, t)], \\ \dot{B}(t) &= \int d^3y e^{is \cdot y} [D_b(y, t) + is_n \mathfrak{F}_{bn}^5(y, t)], \end{aligned} \quad (56)$$

где по повторяющемуся индексу  $n$  проводится суммирование. Если взять  $A$  и  $B$  в виде (55) и воспользоваться локальным коммутационным соотношением (1в), то первый член в правой части соотношения (46) будет равен

$$-i \sum_s \langle N | [A(0), B(0)] | N \rangle = \varepsilon_{abc} \left\langle \frac{1}{2} \tau^c \right\rangle (2\pi)^3 \delta(\mathbf{0}). \quad (57)$$

Таким образом, этот член полностью антисимметричен по индексам изоспина  $a$  и  $b$ . [Отметим, что справедли-

вость равенства (57) зависит от вида локального коммутационного соотношения. Если изменить соотношение (1в) путем добавления члена, пропорционального  $\nabla^2 \delta(x-y)$ , то к равенству (57) добавится член, пропорциональный  $|s|^2$ .] Второй член в правой части (46) имеет вид

$$U_1^{ab} = -\frac{1}{2q_0} \times \\ \times \left\{ \sum_s \langle N | \left[ \int d^3x e^{-is \cdot x} \frac{\partial \mathfrak{F}_{a4}^5(x, t)}{\partial t}, \int d^3y e^{is \cdot y} \mathfrak{F}_{b4}^5(y, t) \right] | N \rangle + \right. \\ \left. + \sum_s \langle N | \left[ \int d^3y e^{is \cdot y} \frac{\partial \mathfrak{F}_{b4}^5(y, t)}{\partial t}, \int d^3x e^{-is \cdot x} \mathfrak{F}_{a4}^5(x, t) \right] | N \rangle \right\}, \quad (58a)$$

$$U_1^{ab} = -\frac{1}{2q_0} \times \\ \times \left\{ \sum_s \langle N | \left[ \int d^3x e^{-is \cdot x} \frac{\partial \mathfrak{F}_{a4}^5(x, t)}{\partial t}, \int d^3y e^{is \cdot y} \mathfrak{F}_{b4}^5(y, t) \right] | N \rangle + \right. \\ \left. + \sum_s \langle N | \left[ \int d^3x e^{-is \cdot x} \frac{\partial \mathfrak{F}_{b4}^5(x, t)}{\partial t}, \int d^3y e^{is \cdot y} \mathfrak{F}_{a4}^5(y, t) \right] | N \rangle \right\}, \quad (58б)$$

где для получения выражения (58б) мы сделали замену  $-y \leftrightarrow x$  во втором члене выражения (58а) и воспользовались трансформационными свойствами аксиально-векторного тока при действии оператора четности. Ясно, что величина  $U_1^{ab}$  полностью симметрична по индексам  $a$  и  $b$ . Таким образом, если мы интересуемся только антисимметричной по индексам  $a$  и  $b$  частью соотношения (46), то второй член в правой части этого соотношения, содержащий неизвестный коммутатор  $\partial \mathfrak{F}_{a4}^5 / \partial t$  с  $\mathfrak{F}_{b4}^5$ , выпадает. Как было отмечено выше, третий член в правой части соотношения (46) обращается в нуль в пределе  $q_0 \rightarrow 0$ .

Обратимся теперь к левой части тождества (46). Использование трансляционной инвариантности позволяет выполнить в явном виде интегрирование по  $y$ .

В результате мы получаем множитель  $(2\pi)^3 \delta(0)$ , который сокращается с аналогичным множителем в выражении (57). Выбирая в качестве состояния  $N$  протон в системе покоя и домножая все члены соотношения (46) на  $\varepsilon_{ab3}$ , получаем

$$1 = \frac{\varepsilon_{ab3}}{q_0} \int d^4x e^{-iq \cdot x} \theta(x_0) \sum \langle p | [D_a(x) - is_n \mathfrak{F}_{an}^5(x), D_b(0) + is_m \mathfrak{F}_{bm}^5(0)] | p \rangle + o(q_0), \quad (59a)$$

$$\hat{q} = (s, iq_0), \quad (59b)$$

где через  $o(q_0)$  обозначены члены, обращающиеся в нуль при  $q_0 \rightarrow 0$ . Определим амплитуды  $d(q_0, q^2)$ ,  $a_1(q_0, q^2)$ ,  $a_2(q_0, q^2)$  и  $i_A(q_0, q^2)$  следующим образом:

$$d(q_0, q^2) = \varepsilon_{ab3} \int d^4x e^{-iq \cdot x} \theta(x_0) \sum_s \langle p | [D_a(x), D_b(0)] | p \rangle,$$

$$a_1(q_0, q^2) \delta_{nm} + a_2(q_0, q^2) q_n q_m =$$

$$= \varepsilon_{ab3} \int d^4x e^{-iq \cdot x} \theta(x_0) \sum_s \langle p | [\mathfrak{F}_{an}^5(x), \mathfrak{F}_{bm}^5(0)] | p \rangle, \quad (60)$$

$$iq_n i_A(q_0, q^2) = \varepsilon_{ab3} \int d^4x e^{-iq \cdot x} \theta(x_0) \sum_s \langle p | [\mathfrak{F}_{an}^5(x), D_b(0)] - [D_a(x), \mathfrak{F}_{bn}^5(0)] | p \rangle.$$

Ниже мы докажем, что все эти амплитуды являются нечетными функциями  $q_0$ . Поэтому формула (59) в пределе  $q_0 \rightarrow 0$  принимает вид

$$1 = \frac{\partial}{\partial q_0} \lambda(q_0, q^2) |_{q_0=0}, \quad (61)$$

$$\lambda(q_0, q^2) = d(q_0, q^2) + q^2 a_1(q_0, q^2) + (q^2) a_2(q_0, q^2) + q^2 i_A(q_0, q^2),$$

где  $q^2$  фиксировано и равно  $|s|^2$ .

Рассмотрим теперь свойства функций  $d$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  и  $i_A$ . Из их определения как запаздывающих коммутаторов с помощью стандартных методов теории дисперсионных соотношений для рассеяния вперед [6] можно показать, что они являются аналитическими функциями переменной  $q_0$  в верхней полуплоскости при фиксированном  $q^2$ . Поэтому если предположить, что амплитуда  $(\partial/\partial q_0) \times \lambda(q_0, q^2)$  стремится к нулю при  $q_0 \rightarrow \infty$  в верхней

полуплоскости, то мы сможем написать следующее дисперсионное соотношение без вычитаний:

$$\frac{q}{\partial q_0} \lambda(q_0, q^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq'_0}{(q'_0 - q_0)^2} [d'(q'_0, q^2) + q^2 a'_1(q'_0, q^2) + (q^2)^2 a'_2(q'_0, q^2) + q^2 i'_A(q'_0, q^2)], \quad (62)$$

где абсорбтивные части  $d'$ ,  $a'_1$ ,  $a'_2$  и  $i'_A$  определяются формулами

$$\begin{aligned} id'(q_0, q^2) &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ab3} \int d^4x e^{-iq \cdot x} \sum_s \langle p | [D_a(x), D_b(0)] | p \rangle, \\ i[a'_2(q_0, q^2) \delta_{nm}^* + a'_2(q_0, q^2) q_n q_m] &= \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ab3} \int d^4x e^{-iq \cdot x} \sum_s \langle p | [\mathfrak{F}_{an}^5(x), \mathfrak{F}_{bm}^5(0)] | p \rangle, \quad (63) \\ i[iq_n i'_A(q_0, q^2)] &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ab3} \int d^4x e^{-iq \cdot x} \sum_s \langle p | [\mathfrak{F}_{an}^5(x), D_b(0)] - \\ &\quad - [D_a(x), \mathfrak{F}_{bn}^5(0)] | p \rangle. \end{aligned}$$

Следующий этап состоит в вычислении абсорбтивных частей. Рассмотрим подробно вычисление  $d'$ . Обозначим через  $k_p = (0, iM_N)$  четырехмерный импульс протона. Подставляя полный набор промежуточных состояний, получаем

$$\begin{aligned} id'(q_0, q^2) &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ab3} (2\pi)^4 \sum_{\beta, \text{внут}} \sum_s \int \frac{d^3k_\beta}{(2\pi)^3} \times \\ &\times [\langle p | D_a(0) | \beta(k_\beta) \rangle \langle \beta(k_\beta) | D_b(0) | p \rangle \delta(k_\beta - q - k_p) - \\ &- \langle p | D_b(0) | \beta(k_\beta) \rangle \langle \beta(k_\beta) | D_a(0) | p \rangle \delta(k_\beta + q - k_p)] = \\ &= \pi \varepsilon_{ab3} \sum_{\beta, \text{внут}} \sum_s \{ [\langle p | D_a(0) | \beta(k_\beta) \rangle \langle \beta(k_\beta) | D_b(0) | p \rangle] |_{k_\beta=q} \times \\ &\quad \times \delta(k_\beta - q_0 - M_N) - [\langle p | D_b(0) | \beta(k_\beta) \rangle \times \\ &\quad \times \langle \beta(k_\beta) | D_a(0) | p \rangle] |_{k_\beta=-q} \delta(k_\beta + q_0 - M_N) \}. \quad (64) \end{aligned}$$

Из сохранения четности следует, что

$$\sum_{\beta, \text{внут}} \sum_s [\langle p | D_b(0) | \beta(k_\beta) \rangle \langle \beta(k_\beta) | D_a(0) | p \rangle] |_{k_\beta=q} \times \\ \times \delta(k_{\beta 0} + q_0 - M_N) = \sum_{\beta, \text{внут}} \sum_s [\langle p | D_b(0) | \beta(k_\beta) \rangle \times \\ \times \langle \beta(k_\beta) | D_a(0) | p \rangle] |_{k_\beta=q} \delta(k_{\beta 0} + q_0 - M_N). \quad (65)$$

Поэтому, используя антисимметричность  $\varepsilon_{ab3}$ , формулу (64) можно переписать следующим образом:

$$id'(q_0, q^2) = \pi \varepsilon_{ab3} \sum_{\beta, \text{внут}} \sum_s [\langle p | D_a(0) | \beta(k_\beta) \rangle \langle \beta(k_\beta) | \times \\ \times | D_b(0) | p \rangle] |_{k_\beta=q} [\delta(k_{\beta 0} - q_0 - M_N) + \delta(k_{\beta 0} + q_0 - M_N)]. \quad (66)$$

Мы видим, что  $d'$  — четная функция  $q_0$ , следовательно,  $d$  является нечетной функцией  $q_0$ . Ввиду того что

$$\varepsilon_{ab3} D_a^* D_b = D_1^* D_2 - D_2^* D_1 = \frac{1}{2} i [(D_1^* + iD_2^*)(D_1 - iD_2) - \\ - (D_1^* - iD_2^*)(D_1 + iD_2)], \quad (67)$$

мы приходим к следующему окончательному результату:

$$d'(q_0, q^2) = \frac{1}{2} \pi [D^{(-)} - D^{(+)}], \quad q_0 > 0, \quad (68)$$

где

$$D^{(-)} = \sum_{\beta, \text{внут}} \sum_s |\langle \beta[q, i(q_0 + M_N)] | D_1(0) - \\ - iD_2(0) | p \rangle|^2 \delta(k_{\beta 0} - q_0 - M_N), \\ D^{(+)} = \sum_{\beta, \text{внут}} \sum_s |\langle \beta[q, i(q_0 + M_N)] | D_1(0) + \\ + iD_2(0) | p \rangle|^2 \delta(k_{\beta 0} - q_0 - M_N). \quad (69)$$

Очевидно, что выражения (69) совпадают с выражениями (41), (32) и (33), определяющими структурную функцию  $D$ , причем

$$q_0 = E_\nu - E_l = \frac{W^2 - M_N^2 + q^2}{2M_N}. \quad (70)$$

Аналогичным образом находим, что  $a'_1$ ,  $a'_2$  и  $i'_A$  являются четными функциями  $q_0$  (откуда следует, что  $a_1$ ,  $a_2$  и  $i_A$  — нечетные функции  $q_0$ ). Мы также получаем, что при  $q_0 > 0$

$$a'_1(q_0, q^2) = \frac{1}{2} \pi [A_1^{(-)} - A_1^{(+)}], \quad a'_2(q_0, q^2) = \frac{1}{2} \pi [A_2^{(-)} - A_2^{(+)}],$$

$$i'_A(q_0, q^2) = \frac{1}{2} \pi [I_A^{(-)} - I_A^{(+)}], \quad (71)$$

где структурные функции  $A_1^{(\pm)}$ ,  $A_2^{(\pm)}$  и  $I_A^{(\pm)}$  определяются формулами (41). Объединяя соотношения (43), (61), (62) и (68) — (71), приходим к следующему правилу сумм:

$$1 = \int dq_0 [\beta_A^{(-)} - \beta_A^{(+)}] =$$

$$= \int \frac{W}{M_N} dW [\beta_A^{(-)}(q^2, W) - \beta_A^{(+)}(q^2, W)]. \quad (72)$$

Используя формулы (44), нетрудно вычислить в явном виде полюсный вклад в соотношение (72), после чего мы получаем формулу (53а).

### 3. ПРАВИЛО СУММ ДЛЯ $\alpha^{(\pm)}$

Правило сумм для  $\alpha^{(\pm)}$  (15) получается путем сложения двух равенств

$$C_I^2 = \left(1 + \frac{q^2}{4M_N^2}\right) g_A(q^2)^2 +$$

$$+ \int_{M_N + M_\pi}^{\infty} \frac{W}{M_N} dW [\alpha_A^{(-)}(q^2, W) - \alpha_A^{(+)}(q^2, W)], \quad (73a)$$

$$C_I^1 = \left(\frac{q^2}{4M_N^2}\right) g_V(q^2)^2 + \int_{M_N + M_\pi}^{\infty} \frac{W}{M_N} dW \times$$

$$\times [\alpha_V^{(-)}(q^2, W) - \alpha_V^{(+)}(q^2, W)]. \quad (73b)$$

Здесь через  $\alpha_A^{(\pm)}$  и  $\alpha_V^{(\pm)}$  обозначены аксиально-векторная и векторная части  $\alpha^{(\pm)}$  соответственно

$$\alpha_A^{(\pm)} = A_1^{(\pm)}(q^2, W), \quad \alpha_V^{(\pm)} = V_1^{(\pm)}(q^2, W). \quad (74)$$



Рассмотрим кратко вывод формулы (73а); соотношение (73б) получается аналогично. Для получения соотношения (73а) воспользуемся основным тождеством, в котором

$$\begin{aligned} A(t) &= -i \int d^3x e^{-is \cdot x} \mathfrak{F}_{an}^5(\mathbf{x}, t), \\ B(t) &= -i \int d^3y e^{is \cdot y} \mathfrak{F}_{bm}^5(\mathbf{y}, t). \end{aligned} \quad (75)$$

Используя соотношения (4а) и (11), первый член в правой части тождества (4б) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} &-i \sum_s \langle p | [A(0), B(0)] | p \rangle = \\ &= -\varepsilon_{abc} \delta_{nm} C_l^2 \left\langle \frac{1}{2} \tau^c \right\rangle (2\pi)^3 \delta(\mathbf{0}) + (\text{член, симметричный по } a, b). \end{aligned} \quad (76)$$

Второй член равен

$$\begin{aligned} U_2^{nm, ab} &= -\frac{1}{2q_0} \sum_s \langle p | \int d^3x e^{-is \cdot x} \int d^3y e^{is \cdot y} \times \\ &\times \left\{ \left[ \frac{\partial \mathfrak{F}_{an}^5(\mathbf{x}, t)}{\partial t}, \mathfrak{F}_{bm}^5(\mathbf{y}, t) \right] + \left[ \frac{\partial \mathfrak{F}_{bm}^5(\mathbf{y}, t)}{\partial t}, \mathfrak{F}_{an}^5(\mathbf{x}, t) \right] \right\} | p \rangle. \end{aligned} \quad (77)$$

Используя трансформационные свойства  $\mathfrak{F}^5$  при действии оператора четности, можно переписать последнее выражение следующим образом:

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2q_0} \sum_s \langle p | \int d^3x e^{-is \cdot x} \int d^3y e^{is \cdot y} \left\{ \left[ \frac{\partial \mathfrak{F}_{an}^5(\mathbf{x}, t)}{\partial t}, \mathfrak{F}_{bm}^5(\mathbf{y}, t) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \frac{\partial \mathfrak{F}_{bm}^5(\mathbf{x}, t)}{\partial t}, \mathfrak{F}_{an}^5(\mathbf{y}, t) \right] \right\} | p \rangle. \end{aligned} \quad (78)$$

Выражение (78) явно симметрично относительно одновременной замены  $n \leftrightarrow m$ ,  $a \leftrightarrow b$ . Из сохранения четности следует, что  $U_2$  имеет вид

$$U_2^{nm, ab} = \mu_1^{ab} \delta_{nm} + \mu_2^{ab} s_n s_m. \quad (79)$$

Поэтому величина  $U_2$  симметрична относительно замены  $a \leftrightarrow b$ . Таким образом, поскольку мы учитываем лишь

члены, антисимметричные по  $a$  и  $b$ , то неизвестная величина  $[\partial \mathfrak{F}^5 / \partial t, \mathfrak{F}^5]$  выпадает.

В результате мы приходим к равенству

$$\delta_{nm} C_l^2 = \frac{\partial}{\partial q_0} \eta(q_0, q^2) \Big|_{q_0=0},$$

$$\eta(q_0, q^2) = \bar{a}_1(q_0, q^2) \delta_{nm} + \bar{a}_2(q_0, q^2) q_n q_m =$$

$$= \varepsilon_{ab3} \int d^4x e^{-iq \cdot x} (x_0) \sum_s \langle p | \left[ \frac{\partial \mathfrak{F}_{an}^5(x)}{\partial x_0}, \frac{\partial \mathfrak{F}_{bm}^5(0)}{\partial t} \right] | p \rangle. \quad (80)$$

[Здесь через  $\partial \mathfrak{F}_{bm}^5(0) / \partial t$  обозначена производная  $\partial \mathfrak{F}_{bm}^5 \times \times (\mathbf{y}, t) / \partial t$ , взятая при  $\mathbf{y} = 0, t = 0$ .] Постулируем теперь, что функция

$$\frac{\partial \bar{a}_1(q_0, q^2)}{\partial q_0} \quad (81)$$

удовлетворяет дисперсионному соотношению без вычитаний. Нетрудно видеть, что абсорбтивная часть амплитуды  $\bar{a}_1(q_0, q^2)$  равна произведению  $q_0^2$  на абсорбтивную часть амплитуды  $a_1(q_0, q^2)$ , определенной формулой (60). Приравнявая коэффициент при  $\delta_{nm}$  в равенстве (80), получаем правило сумм

$$C_l^2 = \int dq_0 [A_1^{(-)} - A_1^{(+)}] =$$

$$= \int \frac{W}{M_N} dW [A_1^{(-)}(q^2, W) - A_1^{(+)}(q^2, W)]. \quad (82)$$

Таким образом, доказательство завершено.

#### 4. ПРАВИЛО СУММ ДЛЯ $\gamma^{(\pm)}$

Правило сумм (16) для  $\gamma^{(\pm)}$  получается сложением двух основных тождеств, в одном из которых

$$A_1(t) = -i \int d^3x e^{-ts \cdot x} \mathfrak{F}_{an}^5(\mathbf{x}, t), \quad (83)$$

$$B_1(t) = -i \int d^3y e^{ts \cdot y} \mathfrak{F}_{bm}^5(\mathbf{y}, t),$$

а в другом

$$A_2(t) = -i \int d^3x e^{-is \cdot x} \mathfrak{F}_{an}^5(\mathbf{x}, t), \quad (84)$$

$$B_2(t) = -i \int d^3y e^{ts \cdot y} \mathfrak{F}_{bm}^5(\mathbf{y}, t).$$

Использование соотношения (46) приводит к следующему симметричному по  $a$  и  $b$  выражению для первого члена в правой части формулы (46):

$$-i \sum_s \langle p | [A_1(0), B_1(0)] + [A_2(0), B_2(0)] | p \rangle, \quad (85)$$

так как

$$\sum_s \langle p | \mathcal{A}_{ct}(0) | p \rangle = 0 \quad (86)$$

для покоящегося нуклона. Используя трансформационные свойства токов при действии оператора четности, можно привести второй член к следующему виду:

$$\begin{aligned} U_3^{nm, ab} = & -\frac{1}{2q_0} \sum_s \langle p | \int d^3x e^{-is \cdot x} \int d^3y e^{is \cdot y} \times \\ & \times \left\{ \left[ \frac{\partial \mathfrak{F}_{an}^5(x, t)}{\partial t}, \mathfrak{F}_{bm}(y, t) \right] - \left[ \frac{\partial \mathfrak{F}_{bm}^5(x, t)}{\partial t}, \mathfrak{F}_{an}^5(y, t) \right] + \right. \\ & \left. + \left[ \frac{\partial \mathfrak{F}_{an}^5(x, t)}{\partial t}, \mathfrak{F}_{bm}^5(y, t) \right] - \left[ \frac{\partial \mathfrak{F}_{bm}^5(x, t)}{\partial t}, \mathfrak{F}_{an}(y, t) \right] \right\} | p \rangle = \\ & = \mu_3^{ab} \epsilon_{nml} S_l. \quad (87) \end{aligned}$$

Ясно, что выражение  $\mu_3^{ab}$  симметрично по индексам  $a$  и  $b$ . Мы видим, что члены  $[\partial \mathfrak{F}^5 / \partial t, \mathfrak{F}]$  и  $[\partial \mathfrak{F} / \partial t, \mathfrak{F}^5]$  выпадают из антисимметричной части тождества.

Таким образом, мы получаем равенство

$$0 = \frac{\partial}{\partial q_0} i(q_0, q^2) \Big|_{q_0=0},$$

$$\begin{aligned} i(q_0, q^2) = & \epsilon_{ab3} \int d^4x e^{-iq \cdot x} \theta(x_0) \times \\ & \times \sum_s \langle p | \left[ \frac{\partial \mathfrak{F}_{an}^5(x)}{\partial x_0}, \frac{\partial \mathfrak{F}_{bm}(0)}{\partial t} \right] + \\ & + \left[ \frac{\partial \mathfrak{F}_{an}(x)}{\partial x_0}, \frac{\partial \mathfrak{F}_{bm}^5(0)}{\partial t} \right] | p \rangle. \quad (88) \end{aligned}$$

Постулируя, что функция

$$\frac{\partial i(q_0, q^2)}{\partial q_0} \quad (89)$$

удовлетворяет дисперсионному соотношению по  $q_0$  без вычитаний, получаем соотношение (16).

### Приложение

В этом приложении мы обобщаем результаты, сформулированные в § 2, на случай, когда учитываются все члены с лептонной массой. Для вычисления поправок за счет лептонной массы удобнее не выражать четвертые компоненты токов через пространственные компоненты и дивергенции, а использовать ковариантные выражения. Поэтому мы пишем

$$\begin{aligned}
 T_{\lambda\sigma} &= \sum_{\beta, \text{внут}} \sum_s \delta(k_{\beta 0} - k_{N0} - q_0) \langle N(k_N) | (J_{\sigma}^V + J_{\sigma}^A)^* | \beta(k_N + q) \rangle \times \\
 &\quad \times \langle \beta(k_N + q) | J_{\lambda}^V + J_{\lambda}^A | N(k_N) \rangle = \\
 &= \frac{M_N}{k_{N0}} [\bar{A} \delta_{\lambda\sigma} + \bar{B} k_{N\lambda} k_{N\sigma} + \bar{C} \varepsilon_{\lambda\sigma\gamma\delta} q_{\gamma} k_{N\delta} + \bar{D} q_{\lambda} q_{\sigma} + \\
 &\quad + \bar{E} (q_{\lambda} k_{N\sigma} + q_{\sigma} k_{N\lambda})], \quad (\text{П. 1})
 \end{aligned}$$

где  $\bar{A}, \dots, \bar{E}$  — функции  $q^2$  и  $\mathcal{W}$ . Инвариантность относительно обращения времени и сохранение четности исключают присутствие в формуле (П. 1) членов, пропорциональных  $q_{\lambda} k_{N\sigma} - q_{\sigma} k_{N\lambda}$ . Сравнение выражений (П. 1) и (41) в лабораторной системе показывает, что

$$\bar{A} = \alpha(q^2, \mathcal{W}), \quad M_N^2 \bar{B} = \beta(q^2, \mathcal{W}), \quad M_N \bar{C} = \gamma(q^2, \mathcal{W}),$$

$$\bar{D} \equiv \delta(q^2, \mathcal{W}) = V_2(q^2, \mathcal{W}) + A_2(q^2, \mathcal{W}),$$

$$M_N \bar{E} \equiv \varepsilon(q^2, \mathcal{W}) = q_0^{-1} \left\{ V_1(q^2, \mathcal{W}) + A_1(q^2, \mathcal{W}) + \right. \quad (\text{П. 2})$$

$$+ q^2 [V_2(q^2, \mathcal{W}) + A_2(q^2, \mathcal{W})] +$$

$$\left. + \frac{1}{2} [I_V(q^2, \mathcal{W}) + I_A(q^2, \mathcal{W})] \right\}.$$

Свертка  $T_{\lambda\sigma}$  с лептонным тензором вычисляется непосредственно. В результате получаем, что для случая сохранения странности формулы (13) и (22) заменяются на

$$\frac{d^2\sigma\left(\left(\begin{smallmatrix} \nu \\ \bar{\nu} \end{smallmatrix}\right) + p \rightarrow \left(\begin{smallmatrix} l \\ l \end{smallmatrix}\right) + \beta (S=0)\right)}{d\Omega_l dE_l} = \frac{G^2 \cos^2 \theta_C}{(2\pi)^2} \frac{[(E_\nu - q_0)^2 - m_l^2]^{1/2}}{E_\nu} \chi^{(\pm)}, \quad (\text{П. 3})$$

$$\frac{d^2\sigma\left(\left(\begin{smallmatrix} \nu \\ \bar{\nu} \end{smallmatrix}\right) + p \rightarrow \left(\begin{smallmatrix} l \\ l \end{smallmatrix}\right) + \beta (S=0)\right)}{d(q^2) dq_0} = \frac{C^2 \cos^2 \theta_C}{4\pi E_\nu^2} \chi^{(\pm)}, \quad (\text{П. 4})$$

где

$$\begin{aligned} \chi^{(\pm)} = & (q^2 + m_l^2) \alpha^{(\pm)}(q^2, W) + \\ & + \left[ 2E_\nu^2 - 2E_\nu q_0 - \frac{1}{2}(q^2 + m_l^2) \right] \beta^{(\pm)}(q^2, W) \mp \\ & \mp \left[ (2E_\nu - q_0) q^2 - m_l^2 q_0 \right] \gamma^{(\pm)}(q^2, W) + \\ & + \frac{1}{2} m_l^2 (q^2 + m_l^2) \delta^{(\pm)}(q^2, W) - 2m_l^2 E_\nu \epsilon^{(\pm)}(q^2, W). \end{aligned} \quad (\text{П. 5})$$

Исследование формулы (П. 5) и ее аналога для нейтронной мишени показывает, что величины  $\beta^{(\pm)}$ ,  $\gamma^{(\pm)}$ ,  $\epsilon^{(\pm)}$  и  $\alpha^{(\pm)} + \frac{1}{2} m_l^2 \delta^{(\pm)}$  измеримы независимо. Так как из вывода правила сумм для  $\alpha^{(\pm)}$ , рассмотренного в § 4, следует, что

$$0 = \int dq_0 [\delta^{(-)} - \delta^{(+)}], \quad (\text{П. 6})$$

то мы можем видоизменить соотношение (15) следующим образом:

$$\begin{aligned} C_l^1 + C_l^2 = & \left( 1 + \frac{q^2}{4M_N^2} \right) g_A(q^2)^2 + \frac{q^2}{4M_N^2} g_V(q^2)^2 + \\ & + \frac{1}{2} m_l^2 \left[ \left( 1 + \frac{q^2}{4M_N^2} \right) f_V(q^2)^2 - \frac{g_V(q^2) f_V(q^2)}{M_N} + \right. \\ & \left. + \frac{q^2}{4M_N^2} h_A(q^2)^2 - \frac{h_A(q^2) g_A(q^2)}{M_N} \right] + \\ & + \int_{M_N + M_\pi}^{\infty} \frac{W}{M_N} dW \left[ \alpha^{(-)}(q^2, W) + \frac{1}{2} m_l^2 \delta^{(-)}(q^2, W) - \right. \\ & \left. - \alpha^{(+)}(q^2, W) - \frac{1}{2} m_l^2 \delta^{(+)}(q^2, W) \right]. \end{aligned} \quad (\text{П. 7})$$

Таким образом, для случая сохранения странности при учете членов с лептонной массой мы по-прежнему имеем три правила сумм, которые можно непосредственно сравнить с экспериментом.

В случае же изменения странности можно получить соотношения, аналогичные (П. 3) — (П. 5), а величины  $\beta_{(p, n)}^{(\pm)}$ ,  $m_l^2 \epsilon_{(p, n)}^{(\pm)} \pm q^2 \gamma_{(p, n)}^{(\pm)}$  и  $\alpha_{(p, n)}^{(\pm)} + 1/2 m_l^2 \delta_{(p, n)}^{(\pm)} \pm q_0 \gamma_{(p, n)}^{(\pm)}$  независимо измеримы. В этом случае при учете членов с лептонной массой непосредственно сравнить с экспериментом можно только правило сумм для  $\beta_{(p, n)}^{(\pm)}$ .

Нетрудно проверить, что результаты (26) и (27), относящиеся к поведению нейтринных сечений при высоких энергиях нейтрино, не изменяются при добавлении членов, учитывающих лептонную массу. Формула (24) принимает вид

$$\frac{d\sigma}{dq^2} = \int_{(q^2/2M_N)^-}^{E_\nu(1-L/4E_\nu^2)} dq_0 \frac{d^2\sigma}{d(q^2) dq_0}, \quad L = q^2 + m_l^2 + \frac{4E_\nu^2 m_l^2}{q^2 + m_l^2}. \quad (\text{П. 8})$$

Если постулировать, что в дополнение к интегралам (25) сходятся интегралы

$$\int_{q_0^2}^{\infty} \frac{dq_0}{q_0^2} (\delta^{(-)} - \delta^{(+)}), \quad \int_{q_0}^{\infty} \frac{dq_0}{q_0} (\epsilon^{(-)} - \epsilon^{(+)}) \quad (\text{П. 9})$$

(и аналогично для случая изменения странности), то мы немедленно получим соотношения (26) и (27).

### Л и т е р а т у р а

1. Gell-Mann M., Physics, 1, 63 (1964).
2. Adler S. L., Phys. Rev., 140, B736 (1965) (ст. 1 настоящей книги).
3. Dashen R. F., Gell-Mann M., Phys. Letters, 17, 142 (1965).
4. Lee B. W., Phys. Rev. Letters, 14, 676 (1965).
5. Lee T. D., Yang C. N., Phys. Rev., 126, 2239 (1962).  
Pais A., Phys. Rev. Letters, 9, 117 (1962).
6. Jackson J. D., Dispersion Relations, ed. G. R. Scaeton, New York, 1961, p. 1—32.

# НЕРАВЕНСТВО ДЛЯ СЕЧЕНИЙ РАССЕЯНИЯ ЭЛЕКТРОНА И МЮОНА НА НУКЛОНЕ

Дж. Бьёркен \*

J. D. Bjorken, Phys. Rev. Letters, 16, 408 (1966)

Адлер <sup>1)</sup> получил правило сумм для неупругого рассеяния нейтрино на нуклоне при фиксированном квадрате переданного импульса. С помощью изотопического вращения из него можно вывести полезное неравенство для неупругого электрон-нуклонного (или мюон-нуклонного) рассеяния

$$\lim_{E \rightarrow \infty} \frac{d(\sigma_p + \sigma_n)}{d(q^2)} > \frac{2\pi\alpha^2}{q^4} = \frac{1}{2} \lim_{E \rightarrow \infty} \frac{d\sigma_p^{NS}}{d(q^2)}, \quad (1)$$

где  $E$  и  $E'$  — энергии налетающего и рассеянного электрона в лабораторной системе,  $\theta$  — угол рассеяния и  $q^2 = 4EE' \sin^2(\theta/2)$ . Через  $\sigma_p$  обозначено полное (упругое + неупругое) сечение электрон-протонного рассеяния, а через  $\sigma_p^{NS}$  — сечение рассеяния на точечном бесспиновом протоне. С помощью формулы

$$\begin{aligned} \frac{d(\sigma_p + \sigma_n)}{d(q^2) dE'} = \\ = \frac{E'}{E} \left[ \cos^2 \frac{\theta}{2} F_1(q^2, E - E') + \sin^2 \frac{\theta}{2} F_2(q^2, E - E') \right] \end{aligned} \quad (2)$$

неравенство (1) можно записать в более общем виде

$$\int_0^\infty dv F_1(q^2, v) > \frac{2\pi\alpha^2}{q^4}. \quad (3)$$

Соотношение (1) по своей структуре сильно напоминает правило сумм, за исключением того, что оно содержит дополнительный множитель 2. Происхождение этого множителя связано с тем, что половина величины сечения на точечном нуклоне обусловлена изоскалярным током, относительно которого коммутационные соот-

\* Stanford Linear Accelerator Center, Stanford University, Stanford, California.

<sup>1)</sup> S. L. Adler, Phys. Rev., 143, 1144 (1966) (ст. 11 настоящей книги).

ношения токов изоспина (основное, что используется при получении правила сумм) не дают никакой информации.

Вывод формулы (1) основан на неравенстве

$$\langle p|Q^2|p\rangle + \langle n|Q^2|n\rangle > \frac{1}{2} \sum_{n; T=1/2} |\langle p|T^+|n\rangle|^2 - \frac{1}{3} \sum_{n; T=3/2} |\langle p|T^-|n\rangle|^2 = \frac{1}{2} \langle p|[T^+, T^-]|p\rangle = \frac{1}{2}. \quad (4)$$

Используя соотношение (4) для плотностей токов (вместо зарядов) и результаты Адлера<sup>1)</sup>, нетрудно получить неравенства (3) и (1).

### Статья 13

## ПРАВИЛА СУММ ДЛЯ СИЛЬНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

*В. Де Альфаро\**, *С. Фубини\**, *К. Росетти\**, *Дж. Фурлан\*\**

V. De Alfaro, S. Fubini, C. Rossetti, G. Furlan, Phys. Letters, 21, 576 (1966)

В настоящей работе, исходя из аналитичности и ограничений на высокоэнергетическое поведение амплитуд рассеяния частиц со спином, выводятся правила сумм для сильных взаимодействий<sup>2)</sup>. Эти ограничения, гораздо более жесткие, чем в бесспиновом случае, по-видимому, могут быть строго выведены из условия унитарности.

В недавних работах [1] были получены общие следствия из алгебры компонент токов. В частности, было

<sup>1)</sup> Основные предположения, использованные в этом выводе, следующие: а) локальные коммутационные соотношения для плотностей изовекторных зарядов и б) дисперсионные соотношения без вычитания для определенных компонент нечетной части амплитуды рассеяния изовекторного тока нуклоном на нулевой угол. Эти предположения будут рассмотрены в отдельной работе.

\* Istituto di Fisica dell'Università, Torino and INFN, Sezione di Torino.

\*\* Istituto di Fisica dell'Università, Trieste and INFN, Sottosezione di Trieste.

<sup>2)</sup> Эти правила сумм были ранее выведены и применялись в работах советских ученых [8-10]. — *Прим. ред.*



показано, что использование одновременных коммутационных соотношений между временными компонентами токов

$$[j_0^{(\alpha)}(x), j_0^{(\beta)}(x')]_{t=t'} = C_{\nu}^{\alpha\beta} j_0^{(\nu)}(x) \delta(x - x') \quad (1)$$

приводит к соотношению вида

$$\frac{1}{\pi} \int a(\nu, u_1, u_2, t) d\nu = F(t), \quad (2)$$

Функция  $a$  определяется из разложения амплитуды

$$t_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \int d^4x e^{iq_2 \cdot x} \langle p_2 | [j_{\mu}^{(\alpha)}(x), j_{\nu}^{(\beta)}(0)] | p_1 \rangle \quad (3)$$

следующим образом:

$$t_{\mu\nu} = a P_{\mu} P_{\nu} + b_1 P_{\mu} Q_{\nu} + b_2 P_{\mu} \Delta_{\nu} + \dots, \quad (4)$$

где  $P = 1/2(p_1 + p_2)$ ,  $Q = 1/2(q_1 + q_2)$ ,  $\Delta = p_2 - p_1$ ;  $p_1 + q_1 = p_2 + q_2$ ;  $u_1 = q_1^2$ ;  $u_2 = q_2^2$ ;  $\nu = (PQ)$ ;  $t = \Delta^2$ ; для простоты мы считаем  $|p_1\rangle$ ,  $|p_2\rangle$  состояниями бесспиновых частиц.

Как уже указывалось в работах [1, 2], формула (2) имеет очень интересную и важную особенность. Именно она показывает, что при интегрировании по  $\nu$  зависимость от „масс“  $u_1$  и  $u_2$ , связанных с внешними токами, исчезает.

Независимость правой части формулы (2) от  $u_1$  и  $u_2$  означает, что вычеты во всех сингулярностях левой части по  $u_1$  и  $u_2$  компенсируются в результате интегрирования по  $\nu$ .

Поэтому первое следствие можно получить, умножая обе части равенства (2) на  $(u_1 - m_1^2)(u_2 - m_2^2)$  и переходу к пределу  $u_{1,2} \rightarrow m_{1,2}^2$ . Здесь  $m_1$  и  $m_2$  — физические массы сильно взаимодействующих частиц, обладающих квантовыми числами токов  $j_{\mu}^{(\alpha)}$  и  $j_{\nu}^{(\beta)}$  (например,  $\rho$ -мезона, если  $j_{\mu}$  — изоспиновый ток). В этом пределе функция  $a$  определяется вкладом диаграммы фиг. 1, и мы можем написать строго

$$\lim_{u_{1,2} \rightarrow m_{1,2}^2} (u_1 - m_1^2)(u_2 - m_2^2) a(\nu, u_1, u_2, t) = (\text{const}) \text{Im } A(\nu, t), \quad (5)$$

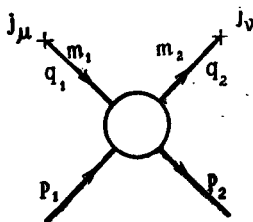
где  $A(\nu, t)$  определяется следующим разложением амплитуды  $\rho$ - $\pi$ -рассеяния:

$$T = (\epsilon_1 P) (\epsilon_2 P) A + \frac{1}{2} \{ (\epsilon_1 P) (\epsilon_2 Q) + (\epsilon_2 P) (\epsilon_1 Q) \} B + (\epsilon_1 Q) (\epsilon_2 Q) C_1 + (\epsilon_1 \epsilon_2) C_2. \quad (6)$$

Таким образом, из формулы (2) следует правило сумм

$$\int \text{Im } A(\nu, t) d\nu = 0, \quad (7)$$

которое содержит только амплитуду рассеяния сильно взаимодействующих частиц.



Ф и г. 1.

Мы хотим подчеркнуть то обстоятельство, что соотношение (7) фактически не зависит от каких-либо конкретных предположений относительно коммутаторов токов. Действительно, оно может быть получено из коммутационных соотношений между любой парой векторных „токов“, если этот коммутатор содержит (в силу локальности)  $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  или производные  $\delta$ -функции более высокого конечного порядка.

Это обстоятельство наводит на мысль о том, что „правило сумм для сильных взаимодействий“ (7) можно получить более непосредственным образом, исходя только из таких требований на сильные взаимодействия, как аналитичность, унитарность и ограничения на высокоэнергетическое поведение.

Цель этой работы состоит в том, чтобы доказать справедливость последнего утверждения и показать, что соотношение (7) является частным случаем целого

семейства правил сумм для сильно взаимодействующих частиц с высшими спинами.

В нашем выводе „правил сумм для сильных взаимодействий“ мы исходим из того факта, что если аналитическая функция  $f(v)$ , удовлетворяющая дисперсионному соотношению

$$f(v) = \frac{1}{\pi} \int \frac{\text{Im} f(v')}{v' - v} dv', \quad (8)$$

ограничена при  $v \rightarrow \infty$  условием

$$|f(v)| < v^\beta, \quad \beta < -1, \quad (9)$$

то она должна удовлетворять соотношению

$$\int \text{Im} f(v) dv = 0. \quad (10)$$

Физическая значимость предыдущих формул следует из того, что в случае рассеяния частиц с высшими спинами условие унитарности налагает на некоторые амплитуды чрезвычайно жесткие ограничения при высоких энергиях, подобные (9). Отсюда следует, что эти амплитуды должны удовлетворять условиям типа (10)<sup>1)</sup>.

Мы покажем, что для высших спинов условие унитарности приводит для некоторых амплитуд к ограничениям, значительно более сильным, чем ограничение  $s(\ln s)^2$ , полученное Фруассаром [3] для бесспинового случая. Причиной этого является то, что при использовании условия унитарности возникает сумма по промежуточным состояниям с дополнительными степенями энергии, появляющимися за счет проекционных операторов частиц с высшими спинами.

Рассмотрим сначала простое наводящее соображение, иллюстрирующее ограничение Фруассара для амплитуды  $A(s, t)$  скалярной частицы. Воспользуемся при высоких энергиях оптической теоремой вместе с очевидным условием, что полное сечение превышает чисто упругое:

$$\text{Im} A(s, 0) > \frac{1}{16\pi \sqrt{s(s-4m^2)}} \int_{-s+4m^2}^0 |A(s, t)|^2 dt. \quad (11)$$

<sup>1)</sup> Тесная связь между правилами сумм и высокоэнергетическим поведением была ранее отмечена Газиоровичем [7].

Если предположить постоянство наклона дифракционного пика, мы получим неравенство

$$\frac{|A(s, 0)|^2}{s} < \text{const} \cdot \text{Im } A, \quad (12)$$

которое приводит к простому условию

$$|A(s, 0)| < \text{const} \cdot s. \quad (13)$$

Разумеется, грубое условие постоянства наклона дифракционного пика можно опустить, допуская медленное логарифмическое изменение (например, как в случае движущихся полюсов Редже). Это приводит к дополнительным логарифмическим членам в высокоэнергетическом пределе. Применим теперь эти рассуждения к  $\rho - \pi$ -рассеянию и воспользуемся „ортогональным разложением“

$$T = \alpha I_\alpha + \beta I_\beta + \gamma I_\gamma + \delta I_\delta, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} I_\alpha &= (\mathbf{e}_1 P') (\mathbf{e}_2 P'), & I_\beta &= \frac{1}{2} \{(\mathbf{e}_1 P') (\mathbf{e}_2 Q) + (\mathbf{e}_2 P') (\mathbf{e}_1 Q)\}, \\ I_\gamma &= (\mathbf{e}_1 Q) (\mathbf{e}_2 Q), & I_\delta &= (\mathbf{e}_1 N) (\mathbf{e}_2 N), \\ P'_\mu &= P_\mu - \frac{(PQ)}{Q^2} Q_\mu, & N_\mu &= \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} P_\nu Q_\rho \Delta_\sigma, \\ (P'Q) &= (P'N) = (QN) = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

и амплитуды  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\delta$  являются линейными комбинациями  $A$ ,  $B$  и  $C_{1,2}$ .

Используя опять оптическую теорему и требуя, чтобы полное сечение было больше вкладов  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\delta$ <sup>1)</sup>, получаем ( $P'^2 \sim s^2$  при  $s \rightarrow \infty$ )

$$\begin{aligned} s^4 \int |\alpha(s, t)|^2 dt &< \text{const} \cdot s^2 \sigma^{\text{tot}}, \\ s^2 \int Q^2 |\beta(s, t)|^2 t dt &< \text{const} \cdot s^2 \sigma^{\text{tot}}, \\ \int Q^2 |\gamma(s, t)|^2 t^2 dt &< \text{const} \cdot s^2 \sigma^{\text{tot}}, \\ s^4 \int Q^4 |\delta(s, t)|^2 t^4 dt &< \text{const} \cdot s^2 \sigma^{\text{tot}}. \end{aligned} \quad (16)$$

<sup>1)</sup> Отметим, что вследствие нашего ортогонального разложения интерференционные члены не возникают.

Окончательно, выражая  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\delta$  через  $A$ ,  $B$ ,  $C_{1,2}$  и используя предположение о постоянстве наклона, получаем следующие ограничения:

$$|A(s, 0)| < \text{const} \cdot s^{-1}, \quad |B(s, 0)| < \text{const}, \\ |C_{1,2}(s, 0)| < \text{const} \cdot s. \quad (17)$$

Конечно, наш способ „получения“ ограничений (17) весьма эвристичен. По-видимому, более систематическое использование условия унитарности для каждой парциальной волны может, как и в бесспиновом случае, привести к точным ограничениям, которые совпадают с нашими неравенствами (17) с точностью до логарифмических факторов.

При учете изоспина разумно полагать, что для амплитуд с переверотом изоспина могут иметь место более жесткие ограничения. Мы предположим, что если изоспиновая амплитуда для скалярных частиц ведет себя как  $s^\alpha$ , то для  $A$ ,  $B$ ,  $C_1$  и  $C_2$  соответствующее поведение дается формулами

$$A(s, 0) \sim s^{\alpha-2}, \quad B(s, 0) \sim s^{\alpha-1}, \quad C_{1,2}(s, 0) \sim s^\alpha. \quad (18)$$

Эти асимптотические формулы могут быть получены из модели полюсов Редже, так как обмен частицей со спином  $\alpha$  ведет при высоких энергиях к поведению  $s^{\alpha-2}$ ,  $s^{\alpha-1}$ ,  $s^\alpha$  для  $A$ ,  $B$ ,  $C_{1,2}$  соответственно. Окончательный вывод следующий: в  $\rho$ - $\pi$ -рассеянии мы получаем правило сумм типа (10) для  $A$ , если  $\alpha < 1$ , и для  $B$ , если  $\alpha < 0$ <sup>1)</sup>.

Следует подчеркнуть, что полученные результаты никоим образом не ограничиваются частицами с единичным спином. Например, для  $\pi$ - $N$ -рассеяния, записывая  $T = A + (\gamma Q)B$ , получаем  $A \sim s^\alpha$ ,  $B \sim s^{\alpha-1}$ , тогда

<sup>1)</sup> Идея о возможности получения правил сумм для сильных взаимодействий исходя из асимптотических пределов была независимо развита в интересном исследовании Л. Д. Соловьева (препринт, Дубна). Однако его предположения о высокоэнергетическом поведении отличаются от наших. Например, для  $\pi$ - $N$ -рассеяния предположение  $|B| < s^{-1} (\ln s)^{-\alpha}$ ,  $\alpha > 1$ , является более сильным, чем предположения, налагаемые в нашем подходе условием унитарности. Имеется в виду работа [10]. — Прим. ред.)

как в  $N-N$ -рассеянии амплитуды  $T_i$ , определяемые разложением [4]:

$$T = \sum_i T_i P_i,$$

$$P_1 = 1^P 1^N, \quad P_2 = i[(\gamma^N P) 1^P + (\gamma^P N) 1^N],$$

$$P_3 = (i\gamma^N P)(i\gamma^P N), \quad P_4 = (\gamma^N \gamma^P), \quad P_5 = \gamma_5^N \gamma_5^P,$$

ведут себя как  $s^\alpha$ ,  $s^{\alpha-1}$ ,  $s^{\alpha-2}$ ,  $s^{\alpha-1}$ ,  $s^\alpha$  соответственно. Здесь  $\alpha$  зависит от изоспинового разложения в перекрестном ( $N - \bar{N}$ ) канале<sup>1</sup>).

Общее исследование содержания правил сумм для сильных взаимодействий и их экспериментальной обоснованности будет сделано в последующих работах. Здесь мы исследуем лишь простой случай  $\rho - \pi$ -рассеяния на нулевой угол, уже рассмотренный в работе [2]. Учтем изоспиновые переменные, разлагая амплитуду  $T$ :  $T = T_0 P_0 + T_1 P_1 + T_2 P_2$ , где  $P_{0,1,2}$  — операторы проектирования на собственные состояния изоспина перекрестного канала  $\pi + \pi \rightarrow \rho + \rho$ . Поведение  $T_1$  при высоких энергиях в основном определяется вкладом  $\rho$ -траектории [экспериментальное значение  $\alpha_\rho(0) \approx 0,5$ ], тогда как в  $T_2$  доминирует двухзарядный обмен, для которого мы предположим, что  $\alpha_{++}(0) < 0$ .

<sup>1</sup>) В этом анализе нуклон-нуклонного рассеяния мы учли вклады только тех траекторий Редже, которые соответствуют частицам с четностью  $(-1)^J$  (например,  $\rho$ - или  $\omega$ -траектории). Для полного анализа асимптотического поведения с учетом обеих четностей удобнее использовать «инварианты  $\beta$ -распада»  $S, V, T, A, P$ :

$$\begin{aligned} S &\sim s^{\alpha_e} + s^{\alpha_0-1}, & P &\sim s^{\alpha_e} + s^{\alpha_0}, \\ V &\sim s^{\alpha_e-1} + s^{\alpha_0-2}, & A &\sim s^{\alpha_e-2} + s^{\alpha_0-1}, \\ T &\sim s^{\alpha_e-1} + s^{\alpha_0-2}, \end{aligned}$$

где  $\alpha_e$  — траектория положительной четности [ $P = (-1)^J$ ], а  $\alpha_0$  — отрицательной.

Аналогичные выводы были получены также с помощью метода спиральностей.

Наши рассуждения приводят к двум правилам сумм <sup>1)</sup>

$$\int \text{Im } A^{(1)}(\nu, 0) d\nu = 0, \quad (19)$$

$$\int \text{Im } B^{(2)}(\nu, 0) d\nu = 0. \quad (20)$$

Если в промежуточном состоянии оставить только  $\pi$ -,  $\omega$ - и  $\phi$ -мезоны, то мы получим <sup>2)</sup>

$$(g_{\omega\rho\pi}^2 + g_{\phi\rho\pi}^2) m_\rho^2 - 4g_{\rho\pi\pi}^2 = 0, \quad (21)$$

$$(\nu_\omega + m_\rho^2) g_{\omega\rho\pi}^2 + (\nu_\phi + m_\rho^2) g_{\phi\rho\pi}^2 - 4g_{\rho\pi\pi}^2 = 0, \quad (22)$$

где  $\nu_{\omega, \phi} = 1/2(m_{\omega, \phi}^2 - m_\rho^2 - m_\pi^2)$ .

Вычитая равенство (22) из (21), имеем

$$\nu_\omega g_{\omega\rho\pi}^2 + \nu_\phi g_{\phi\rho\pi}^2 = 0. \quad (23)$$

Ввиду того что  $\nu_\omega$  практически равно нулю, из равенства (23) следует хорошо согласующееся с экспериментом утверждение о том, что отношение  $g_{\phi\rho\pi}/g_{\omega\rho\pi}$  очень мало. Аналогичным образом, как и в работе [2], мы получаем разумное соотношение между  $g_{\rho\pi\pi}$  и  $g_{\rho\omega\pi}$  <sup>3)</sup>.

1) Соотношение  $\int \text{Im } A^{(2)}(\nu, 0) d\nu = 0$  тривиально удовлетворяется из-за перекрестной симметрии.

2) Используются следующие виды взаимодействий:

$$g_{\rho\pi\pi} \epsilon_{ijk} \partial_\mu \pi^j \partial_\mu \pi^k, \quad g_{\omega\rho\pi} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_\alpha \omega_\beta \partial_\gamma \rho_\delta \pi^i, \quad g_{\phi\rho\pi} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_\alpha \phi_\beta \partial_\gamma \rho_\delta \pi^i.$$

3) При рассмотрении  $\rho$ - $\pi$ -рассеяния мы не учли существования третьего правила сумм для рассеяния вперед, которое следует из тех же предположений, а именно

$$\int \nu \text{Im } A^{(2)}(\nu, 0) d\nu = 0. \quad (a)$$

Система уравнений (19), (20) и (a) имеет лишь тривиальное нулевое решение, если ограничиться учетом вкладов от  $\pi$ ,  $\rho$ ,  $\omega$  и  $\phi$  в промежуточных состояниях. Поэтому остается открытым вопрос о том, какие промежуточные состояния следует учесть для того, чтобы удовлетворить уравнению (a) и в то же время не нарушить разумного согласия уравнений (21) и (22) с экспериментом. Разумеется, уравнения (19), (20) и (a) можно обобщить, написав правила сумм для  $t \neq 0$  и рассмотрев все производные по  $t$ . Весьма вероятно, что такой расширенной системе уравнений может удовлетворять лишь система частиц с бесконечным набором спинов. Исправленный анализ наших уравнений для  $\rho$ - $\pi$ -рассеяния проделан, например, в работе [6].

Таким образом, мы получили правила сумм, связывающие лишь величины, характеризующие сильные взаимодействия, как следствие аналитичности и разумных предположений о высокоэнергетическом поведении. При получении этих результатов фундаментальную роль играет спин: мы не имеем ни одного соотношения для бесспиновых частиц, с ростом же спинов рассматриваемых частиц число соотношений очень быстро возрастает. С другой стороны, число неопределенных констант связи увеличивается с ростом спина примерно с той же скоростью, что и число соотношений. Мы надеемся, что полученные правила сумм для сильных взаимодействий будут играть важную роль в развитии физики элементарных частиц. Эти правила сумм являются, по-видимому, релятивистским обобщением так называемых условий „зашнуровки“ (бутстрэпа), которые могут быть получены наложением аналогичных, вытекающих из условия унитарности, ограничений на каждую парциальную волну [5].

Красивой новой особенностью наших результатов является связь между константами различной размерности, например между „электрической“ константой связи  $g_{\text{элект}}$  и „магнитной“ константой связи  $g_{\text{магн}}$ . Можно надеяться, что эти правила сумм позволят получить новые взаимосвязи между свойствами элементарных частиц, которые не могут быть получены с помощью чисто теоретико-групповых методов.

#### Л и т е р а т у р а

1. Fubini S., Nuovo Cimento, 43, 475 (1966).
2. Fubini S., Segré G., Nuovo Cimento, 45, 641 (1966).
3. Froissart M., Phys. Rev., 123, 1053 (1961).
4. Amati D., Leader E., Vitale B., Nuovo Cimento, 17, 68 (1960).
5. Chew G. F., Phys. Rev. Letters, 9, 233 (1962).  
Amati D., Fubini S., Ann. Rev. Nucl. Sci., 12, 359 (1962).
6. Frampton P. H., Taylor J. C., Nuovo Cimento, 49, 152 (1967).
7. Gasiogowicz S., в печати.
- 8\*. Логуинов А. А., Соловьев Л. Д., Nucl. Phys., 10, 60 (1959).
- 9\*. Соловьев Л. Д., Ядерная физика, 3, 188 (1966).
- 10\*. Азиаурян И. Г., Соловьев Л. Д., Ядерная физика, 4, 615 (1966).



## ДАЛЬНЕЙШИЕ СВЕДЕНИЯ О ПРАВИЛАХ СУММ

В этой главе мы рассмотрим некоторые более сложные, в основном теоретические вопросы метода правил сумм. При этом мы не будем вводить новых идей: основные физические идеи содержатся в предыдущей главе. Это оправдывает наше стремление подчинить изложение интересам читателя, склонного к теории.

Мы начинаем главу с обсуждения правила сумм общего вида, которое получается, если рассмотреть матричный элемент локального коммутатора двух токов между состояниями с произвольными спинами. Затем мы рассматриваем вопрос о сверхсходимости и в § 2 и приложении Д даем общий рецепт для написания сверхсходящихся правил сумм. Заканчивается глава обсуждением той роли, которую в правилах сумм играют полюсы Редже.

Прежде всего необходимо сделать следующее замечание. При параметризации асимптотического поведения амплитуд мы постоянно будем пользоваться языком модели полюсов Редже. Читатель, который незнаком с деталями „реджеизма“ или не верит в гипотезу о полюсах Редже, может рассматривать реджевское асимптотическое поведение просто как удобную параметризацию, которая согласуется с существующими экспериментальными данными <sup>1)</sup>.

---

<sup>1)</sup> Мы будем использовать асимптотическое поведение вида: (энергетическая переменная) <sup>$\alpha(t)-N$</sup> , где  $N$  — целое число и  $\alpha(t)$  — ведущая траектория с соответствующими квантовыми числами. Если существуют реджевские разрезы, то в некоторых случаях они могут лежать правее полюсов: в этом случае  $\alpha(t)$  нужно интерпретировать как правый край разреза, и  $( )^{\alpha(t)-N}$  по-прежнему будет давать правильное асимптотическое поведение с точностью до логарифмических членов.

## § 1. Правила сумм, вытекающие из алгебры токов

### 1. КОММУТАТОРЫ ВРЕМЕННЫХ КОМПОНЕНТ.

Локальный коммутатор  $\delta(x^0 - y^0) [\mathfrak{F}_a^0(x), \mathfrak{F}_b^0(y)] = i\delta^4(x - y) f_{abc} \mathfrak{F}_c^0(x)$  приводит к равенству

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int \left\{ \int e^{i\frac{1}{2}(q+q') \cdot x} \langle f(\mathbf{P}_f) | [\mathfrak{F}_a^0\left(\frac{x}{2}\right), \mathfrak{F}_b^0\left(-\frac{x}{2}\right)] | i(\mathbf{P}_i) \rangle d^4x \right\} \times \\ \times d(q^0 + q'^0) \Big|_{q+q' \text{ фиксирован}} = \\ = if_{abc} \langle f(\mathbf{P}_f) | \mathfrak{F}_c^0(0) | i(\mathbf{P}_i) \rangle, \quad (5.1) \end{aligned}$$

где  $|i\rangle$  и  $|f\rangle$  — адронные состояния с импульсами  $\mathbf{P}_i$  и  $\mathbf{P}_f$ , а разность между  $q$  и  $q'$ , которая не входит в равенство (5.1) явно, определяется соотношением  $P_i - P_f = q - q'$ . Разлагая по полной системе промежуточных состояний и выполняя пространственное интегрирование, мы приходим к интегралу по  $q^0 + q'^0$ , который очень похож на интегралы с фиксированным  $q$  предыдущей главы, за исключением того, что теперь равенство  $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_f$  не выполняется. Заметим, что величину в фигурных скобках в (5.1) под интегралом можно рассматривать как абсорбтивную часть „амплитуды рассеяния“ процесса:

$$\begin{aligned} (\text{ток } b, \text{ импульс } q) + (\text{адрон } i, \text{ импульс } \mathbf{P}_i) \rightarrow \\ \rightarrow (\text{ток } a, \text{ импульс } q') + (\text{адрон } f, \text{ импульс } \mathbf{P}_f). \end{aligned}$$

Массы, связанные с токами  $\mathfrak{F}_b$  и  $\mathfrak{F}_a$ , очевидно, равны  $q^2$  и  $q'^2$  соответственно, а обычные мандельштамовские переменные для указанного выше процесса имеют вид

$$\begin{aligned} s = (P_i + q)^2, \quad u = (P_i - q')^2, \quad t = (P_i - P_f)^2, \\ s + t + u = M_i^2 + M_f^2 + q^2 + q'^2, \quad (5.2) \end{aligned}$$

$$\mathbf{v} = \frac{1}{4} (P_i + P_f) \cdot (q + q') = \frac{1}{4} (s - u),$$

где мы ввели переменную  $\mathbf{v}$ , которая удобна при рассмотрении правил сумм. Переменную интегрирования  $q^0 + q'^0$  в соотношении (5.1) можно, конечно, заменить на  $\mathbf{v}$ , однако условие „ $q + q'$  фиксирован“ приводит

к тому, что массы  $q^2$  и  $q'^2$  зависят от  $\nu$  так же, как это было в случае одной массы  $q^2$  в правилах сумм с фиксированным  $q$  предшествующей главы. Это обстоятельство, разумеется, нежелательно, поэтому мы преобразуем соотношение (5.1) в правило сумм с фиксированными  $q^2$  и  $q'^2$ , переходя к пределу  $|\mathbf{P}_i + \mathbf{P}_f| \rightarrow \infty$  при фиксированной и конечной разности  $\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_f$ . Идея, лежащая в основе этого предельного перехода, совпадает с идеей предельного перехода, рассмотренного в предыдущей главе. Мы изложим в этом параграфе результат, получающийся в пределе бесконечного импульса, допуская, что состояния  $|i\rangle$  и  $|f\rangle$  могут иметь произвольные спины. При выводе этого результата приходится иметь дело с достаточно сложной кинематикой, поэтому мы вынесли вывод в приложение Г.

Чтобы записать правило сумм в краткой, но понятной форме, нам придется ввести несколько определений и воспользоваться некоторыми кинематическими соотношениями. Поэтому мы просим читателя проявить терпение.

Правило сумм будет выражено через величины

$$A_{ab}^{\mu\nu}(\mathbf{Q}, \mathbf{p}; \lambda_f, \lambda_{\bar{i}}) = \frac{1}{2\pi} \int d^4x e^{i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{x}} \times \\ \times \langle \bar{i}(-\mathbf{p}, \lambda_{\bar{i}}) f(\mathbf{p}, \lambda_f) | \left[ \mathfrak{F}_a^\mu\left(\frac{\mathbf{x}}{2}\right), \mathfrak{F}_b^\nu\left(-\frac{\mathbf{x}}{2}\right) \right] | 0 \rangle \quad (5.3a)$$

и

$$G_c^\mu(\mathbf{p}; \lambda_f, \lambda_{\bar{i}}) = \langle \bar{i}(-\mathbf{p}, \lambda_{\bar{i}}) f(\mathbf{p}, \lambda_f) | \mathfrak{F}_c^\mu(0) | \rangle, \quad (5.3b)$$

где  $\langle \bar{i}(-\mathbf{p}, \lambda_{\bar{i}}) f(\mathbf{p}, \lambda_f) |$  — состояние, содержащее адрон  $f$  с импульсом  $\mathbf{p}$  и спиральностью<sup>1)</sup>  $\lambda_f$  и античастицу  $\bar{i}$  частицы  $i$  с импульсом  $-\mathbf{p}$  и спиральностью  $\lambda_{\bar{i}}$ . Перекрестная симметрия связывает величины  $A_{ab}^{\mu\nu}$  и  $G_c^\mu$  с матричными элементами, входящими в соотношение (5.1). На языке обычного рассеяния величина  $A_{ab}^{\mu\nu}$ , очевидно, связана с амплитудой процесса в  $t$ -канале: (ток  $a$ ) + (ток  $b$ )  $\rightarrow \bar{i} + f$ . Так как частицы  $\bar{i}$  и  $f$  имеют

<sup>1)</sup> То есть проекцией спина на направление движения.

равные по величине и противоположно направленные импульсы ( $-\mathbf{p}$  и  $\mathbf{p}$ ), то ясно, что мы работаем в системе центра масс этой реакции. Импульс, переносимый током  $a$ , равен  $-\mathbf{Q}$ , а током  $b$  равен  $+\mathbf{Q}$ . Величины импульсов  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{Q}$  выражаются через переменную  $t$  и массы следующим образом:

$$\begin{aligned} p^2 &= (4t)^{-1} [t^2 - 2(M_i^2 + M_f^2)t + (M_i^2 - M_f^2)^2], \\ Q^2 &= (4t)^{-1} [t^2 - 2(q^2 + q'^2)t + (q^2 - q'^2)^2], \end{aligned} \quad (5.4)$$

а косинус „угла рассеяния“  $z$  определяется формулой

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{Q} = |\mathbf{p}| |\mathbf{Q}| z = - \left[ v + \frac{(M_f^2 - M_i^2)(q'^2 - q^2)}{4t} \right]. \quad (5.5)$$

Отметим, что косинус угла рассеяния в  $t$ -канале по существу является энергетической переменной  $v$  в канале: (ток)  $+i \rightarrow$  (ток)  $+f$ . В исходном правиле сумм с фиксированной суммой  $(q + q')$  интегрирование идет по энергии в указанном канале, поэтому можно предвидеть, что именно  $z$  окажется переменной интегрирования в правиле сумм, которое мы выпишем ниже.

Из-за наличия тензорных индексов у  $A^{\mu\nu}$  и  $G^\mu$  нам придется ввести пространственные координаты в системе центра масс частиц в  $t$ -канале. Мы введем следующие векторы:

$$\begin{aligned} e_+ &= \frac{1}{\sqrt{2} |\mathbf{p}| (1-z^2)^{1/2}} \left( \mathbf{p} - \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{Q}}{Q^2} \mathbf{Q} + i \frac{\mathbf{Q} \times \mathbf{p}}{|\mathbf{Q}|} \right), \\ e_- &= \frac{1}{\sqrt{2} |\mathbf{p}| (1-z^2)^{1/2}} \left( \mathbf{p} - \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{Q}}{Q^2} \mathbf{Q} - i \frac{\mathbf{Q} \times \mathbf{p}}{|\mathbf{Q}|} \right), \\ e_0 &= \frac{\mathbf{Q}}{|\mathbf{Q}|}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Физическая интерпретация векторов  $e$  проста:  $e_+$  и  $e_-$  ортогональны вектору  $\mathbf{Q}$  и соответствуют волновым функциям частиц (или векторному току!) со спином единица, спиральностями  $+1$  и  $-1$  и импульсом  $\mathbf{Q}$ , тогда как  $e_0$  соответствует волновой функции с нулевой

спиральностью. Нам также понадобятся еще три вектора  $\mathbf{d}_0$ ,  $\mathbf{d}_+$  и  $\mathbf{d}_-$ , определяемые следующим образом:

$$\mathbf{d}_0 = \left( \begin{array}{l} \text{Единичный вектор, лежащий в плоскости векторов } \mathbf{p} \text{ и } \mathbf{Q} \\ \text{и ортогональный к } \mathbf{p}. \text{ Направление вектора } \mathbf{d}_0 \text{ фиксируется} \\ \text{условием } \mathbf{d}_0 = \mathbf{e}_0 \text{ при } z=0, (1-z^2)^{1/2} = +1 \end{array} \right),$$

$$\mathbf{d}_+ = \frac{1}{\sqrt{2} |\mathbf{p}|} (\mathbf{p} + i \mathbf{d}_0 \times \mathbf{p}),$$

$$\mathbf{d}_- = \frac{1}{\sqrt{2} |\mathbf{p}|} (\mathbf{p} - i \mathbf{d}_0 \times \mathbf{p}). \quad (5.7)$$

Наконец, прежде чем записать правило сумм, отметим, что величины  $(\mathbf{e}_+)_r (\mathbf{e}_+)_s A_{ab}^{rs}(\mathbf{p}, \mathbf{Q}; \lambda_f, \lambda_{\bar{i}})$  могут зависеть только от  $t$ ,  $q^2$ ,  $q'^2$  и  $z$ ; причина состоит в том, что свертка векторов  $\mathbf{e}$  с  $A^{rs}$  инвариантна при вращениях, а в нашей специальной системе независимыми скалярами относительно вращений являются величины  $t$ ,  $q^2$ ,  $q'^2$  и  $z$ . Аналогично величины  $(\mathbf{d}_+)_r G_c^r$  могут зависеть только от  $t$ .

Теперь мы выпишем результат, который получается после перехода к бесконечному импульсу в правиле сумм (5.1)<sup>1)</sup>:

$$|\mathbf{Q}| \int \frac{(\mathbf{e}_+)_r (\mathbf{e}_+)_s A_{ab}^{rs}(z, t, q^2, q'^2; \lambda_f, \lambda_{\bar{i}})}{1-z^2} \left[ \frac{1-z}{1+z} \right]^{1/2} (\lambda_f^{-\lambda_{\bar{i}}}) dz =$$

$$= \frac{i f_{abc}}{\sqrt{2}} (\mathbf{d}_+)_r G_c^r(t); \quad (5.8)$$

где мы использовали отмеченный выше факт, что величины  $A^{rs}$ , свернутые с векторами  $\mathbf{e}$ , и величины  $G^r$ , свернутые с векторами  $\mathbf{d}$ , зависят только от выписанных переменных. Для того чтобы это правило сумм выглядело по крайней мере правдоподобным, посмотрим, как из него получаются более простые правила сумм предыдущей главы. Там мы имели  $q^2 = q'^2$ ,  $t = 0$  и бесспиновые состояния  $i$  и  $f$ , так что  $\lambda_f = \lambda_{\bar{i}} = 0$ ; в этом слу-

<sup>1)</sup> В литературе имеется много частных случаев формулы (5.8). Стандартными "первыми ссылками" являются ссылки на работы Фубини [1] и Дашена и Гелл-Манна [1]. Вывод соотношения (5.8) из теории дисперсионных соотношений для случая, когда  $i$  и  $f$  имеют спин 0 или  $1/2$ , можно найти, например, в работе Муцинича [1]. После того как была издана эта глава, нам сообщили, что Бандер (M. V. a n d e r) независимо вывел общее правило сумм (5.8).

чае, используя справедливое для случая равных масс соотношение  $|\mathbf{p}||\mathbf{Q}|z = -v$ , правило сумм (5.8) можно привести к виду

$$\frac{1}{|\mathbf{p}|} \int \frac{(\mathbf{e}_+)_{r}(\mathbf{e}_+)_{s} A_{ab}^{rs}(v, q^2)}{1-z^2} dv = -\frac{if_{abc}}{\sqrt{2}} (\mathbf{d}_+)_{r} G_c^r(0). \quad (5.9)$$

Далее, для бесспиновых частиц величина  $A^{\mu\nu}$  является тензором, и мы можем представить ее в виде разложения (4.16). Записанное в  $t$ -канале в наших обозначениях разложение имеет вид

$$A^{rs} = p^r p^s B_1(v, q^2) + Q^r Q^s B_2(v, q^2) + \\ + \frac{1}{2} (Q^r p^s + Q^s p^r) B_3(v, q^2) - \delta^{rs} B_4(v, q^2),$$

где  $B$  — те же скалярные функции от  $v$  и  $q^2$ , что и раньше. Используя затем соотношения  $\mathbf{e}_+ \cdot \mathbf{p} = 2^{-1/2} (1-z^2)^{1/2} |\mathbf{p}|$ ,  $\mathbf{e}_+ \cdot \mathbf{Q} = 0$  и  $\mathbf{e}_+ \cdot \mathbf{e}_+ = 0$ , легко проверить, что равенство (5.9) эквивалентно следующему:

$$\frac{|\mathbf{p}|}{2} \int B_1(v, q^2) dv = -i \frac{f_{abc}}{\sqrt{2}} (\mathbf{d}_+)_{r} G_c^r(0). \quad (5.10)$$

Таким образом, интеграл в формуле (5.10) равен интегралу в (4.19); проверим, что правые части этих соотношений также совпадают. В правиле сумм (4.19) мы имели  $a = 1 + i2$ ,  $b = 1 - i2$ , что для правой части формулы (5.10) дает  $-\sqrt{2} (\mathbf{d}_+)_{r} G_3^r$ . Для бесспиновых частиц  $i$  и  $f$  с равными массами величина  $G_3^r$  должна иметь вид<sup>1)</sup>  $G_3^r = 2p^r F(t)$ , причем  $F(0)$  равно третьей компоненте изотопического спина. Таким образом,  $(\mathbf{d}_+)_{r} G_3^r(0) = -\sqrt{2} |\mathbf{p}| I_3$ , и соотношение (5.10) эквивалентно (4.19).

Хотя на первый взгляд правило сумм (5.8) может показаться сложным, оно имеет простую физическую интерпретацию. Как уже говорилось выше, векторы  $\mathbf{e}$  выделяют состояния с определенной спиральностью для

1) Это вытекает из общего вида матричного элемента

$$\langle p | \mathfrak{S}_3^\mu(0) | p' \rangle = (p + p')^\mu F((p - p')^2).$$

Переходя в аннигиляционный канал, получаем указанный результат.

токов. Действительно, если мы определим спиральную амплитуду [2]

$$T_{\lambda_f \lambda_{\bar{f}}; \lambda_1 \lambda_2}^{ab}$$

для фиктивного процесса рассеяния

(ток  $b$ , спиральность  $\lambda_1$ ) + (ток  $a$ , спиральность  $\lambda_2$ )  $\rightarrow$   
 $\rightarrow (f, \text{ спиральность } \lambda_f) + (\bar{f}, \text{ спиральность } \lambda_{\bar{f}}),$

то  $(e_+)_r (e_+)_s A^{rs}$  окажется просто произведением нормировочного множителя  $\mathfrak{N}$ , который зависит от того, как мы нормируем эту амплитуду<sup>1)</sup>, на абсорбтивную часть амплитуды

$$T_{\lambda_f \lambda_{\bar{f}}; 1-1}^{ab}$$

Таким образом, правило сумм можно переписать в виде

$$\mathfrak{N} | \mathbf{Q} | \int \text{AP} \left\{ \frac{T_{\lambda_f \lambda_{\bar{f}}; 1-1}^{ab}(z, t, q^2, q'^2)}{(1-z)^2} \left[ \frac{1-z}{1+z} \right]^{1/2 (\lambda_f - \lambda_{\bar{f}})} \right\}_z dz = \\ = \frac{i f_{abc}}{\sqrt{2}} (\mathbf{d}_+)_r G_c^r(t), \quad (5.11)$$

где  $\text{AP} \{ \}_z$  обозначает „абсорбтивная часть“ (Absorptive Part) по переменной  $z$ . Здесь необходимо подчеркнуть, что, хотя мы пользуемся кинематикой в  $t$ -канале для определения спиральных амплитуд, абсорбтивные части  $T$  берутся в  $s$ - и  $u$ -каналах; напомним, что  $z$  — это, по существу,  $v = 1/4 (s - u)$ . Поэтому промежуточными состояниями, которые дают вклад в  $\text{AP} \{ T \}_z$ , являются, например, резонансы в прямом канале реакции: (ток)  $+ + i \rightarrow$  (ток)  $+ f$ . Именно эти состояния и должны фигурировать в правиле сумм.

Множитель

$$(1-z^2)^{-1} \left[ \frac{1-z}{1+z} \right]^{1/2 (\lambda_f - \lambda_{\bar{f}})},$$

на который умножается амплитуда  $T$  в соотношении (5.11), имеет простой смысл. Как мы покажем в следующем параграфе, амплитуда

$$T_{\lambda_f \lambda_{\bar{f}}; 1-1}^{ab}$$

<sup>1)</sup> Для данной нормировки амплитуды  $T$  множитель  $\mathfrak{N}$  определяется из соотношения (5.3). Множитель  $\mathfrak{N}$  не зависит от  $z$ .

имеет кинематические точки ветвления при  $z = \pm 1$ , и выписанный выше множитель как раз уничтожает эти кинематические сингулярности.

Заметим, что подынтегральное выражение в (5.8) или (5.11) зависит от трех независимых переменных  $t$ ,  $q^2$  и  $q'^2$ , в то время как правая часть этих соотношений зависит только от  $t$ . Это следствие того, что коммутатор

$$\left[ \int d^3x e^{-iq \cdot x} \mathcal{S}_a^0(x), \int d^3y e^{iq' \cdot y} \mathcal{S}_b^0(y) \right] \Big|_{x_0=y_0} = \\ = if_{abc} \int d^3x e^{i(q-q') \cdot x} \mathcal{S}_c^0(x)$$

зависит только от разности  $q - q'$ , в то время как вклад отдельного промежуточного состояния зависит от  $q$  и  $q'$  отдельно. В § 2 и 3 мы еще вернемся к вопросу о зависимости правила сумм от  $q^2$ ,  $q'^2$  и  $t$ .

Прежде чем перейти к конкретным приложениям полученного правила сумм, мы перечислим некоторые из его полезных свойств.

1) *Выбор фаз.* Мы избежали необходимости какого-либо конкретного выбора фаз для спиральных состояний  $\langle \bar{i}(-\mathbf{p}, \lambda_{\bar{i}}) f(\mathbf{p}, \lambda_f) \rangle$ . Любой фазовый множитель будет сокращаться в обеих частях равенства, представляющего правило сумм.

2) *Реджевское асимптотическое поведение.* Когда правило сумм записано для спиральной амплитуды [формула (5.11)], мы можем воспользоваться формулами приложения Д для того, чтобы получить предсказание модели полюсов Редже относительно асимптотического поведения подынтегрального выражения. Оказывается, что четная по  $z$  часть подынтегрального выражения ведет себя как  $z^{\alpha_V(t)-2}$  (ясно, что поведение нечетной по  $z$  части несущественно), где  $\alpha_V(t)$  — траектория одного из векторных мезонов. Для всех этих мезонов  $\alpha_V(0) \approx 1/2$ , так что при малых  $t$  правило сумм должно хорошо сходиться.

3) *Усреднение по спине.* Когда частицы  $i$  и  $f$  тождественны или принадлежат к одному изотопическому мультиплету, в правиле сумм можно провести усреднение по спине, полагая  $\lambda_f = \lambda_{\bar{i}} = \lambda$  и суммируя по  $\lambda$ .



После этого правило сумм можно представить в виде, который чаще употребляется в литературе. Усредненная по спину величина  $A^{\mu\nu}$ , определяемая формулой (5.3), является тензором и потому может быть представлена в виде

$$A^{\mu\nu} = P^\mu P^\nu B_{PP} + Q^\mu Q^\nu B_{QQ} + \dots + g^{\mu\nu} B_g, \quad (5.12)$$

где  $P^\mu = 1/2 (P_f^\mu - P_i^\mu) = 1/2 (P_f^\mu + P_i^\mu)$  и где опущены члены, содержащие остальные тензоры, которые могут быть образованы из  $P^\mu$ ,  $Q^\mu$  и  $\Delta^\mu = 1/2 (P_f^\mu + P_i^\mu) = 1/2 (P_f^\mu - P_i^\mu)$ .

Аналогично  $G^\mu$  можно записать в виде

$$G^\mu = P^\mu F_P + \Delta^\mu F_\Delta. \quad (5.13)$$

Далее, в нашей системе координат в  $t$ -канале  $\Delta = 0$ , и если теперь вспомнить, что  $\mathbf{e}_+ \cdot \mathbf{Q} = 0$  и  $\mathbf{e}_+ \cdot \mathbf{e}_+ = 0$ , то мы получим, что усредненные по спину величины  $\langle (\mathbf{e}_+)_r (\mathbf{e}_+)_s A^{rs} \rangle$  и  $\langle (\mathbf{d}_+)_r G^r \rangle$  равны

$$\begin{aligned} \langle (\mathbf{e}_+)_r (\mathbf{e}_+)_s A^{rs} \rangle &= \frac{1}{2} |\mathbf{p}|^2 (1 - z^2) B_{PP}, \\ \langle (\mathbf{d}_+)_r G^r \rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}} |\mathbf{p}| F_P. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Таким образом, правило сумм, усредненное по спину, можно записать с помощью интеграла от  $B_{PP}$ . Именно такая запись правила сумм обычно употребляется в литературе.

4) *Симметрии*. Следствия, вытекающие из предположений о сохранении четности и инвариантности относительно зарядового сопряжения, нетрудно получить для общего случая. Однако для того, чтобы не иметь дела с выбором фаз, мы приведем здесь результаты только для случая одинаковых частиц  $i$  и  $f$ . Обозначим через  $\mathcal{G}^{ab}(z, t, q^2, q'^2; \lambda, \lambda')$  подынтегральное выражение в (5.8) или (5.11). Первый индекс спиральности в  $\mathcal{G}$  соответствует частице, второй — античастице. Из сохранения четности вытекает<sup>1)</sup>, что

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{ab}(z, t, q^2, q'^2; \lambda, \lambda') &= \\ &= -\xi_a \xi_b \mathcal{G}^{ba}(-z, t, q'^2, q^2; -\lambda, -\lambda'), \end{aligned} \quad (5.15)$$

<sup>1)</sup> В соотношениях (5.15) и (5.16)  $a$  и  $b$  служат как унитарные индексы и одновременно указывают на то, является ли ток векторным или аксиально-векторным.

в то время как зарядовое сопряжение дает равенство

$$\mathcal{G}^{ab}(z, t, q^2, q'^2; \lambda, \lambda') = -\mathcal{G}^{\bar{a}\bar{b}}(-z, t, q^2, q'^2; \lambda', \lambda), \quad (5.16)$$

где  $\xi_a(\xi_b)$  есть 1, если  $\mathfrak{F}_a(\mathfrak{F}_b)$  является векторным током, и  $-1$ , если  $\mathfrak{F}_a(\mathfrak{F}_b)$  — аксиально-векторный ток, и где операторы  $\mathfrak{F}_{\bar{a}}(\mathfrak{F}_{\bar{b}})$  получаются в результате применения операции зарядового сопряжения к токам  $\mathfrak{F}_a(\mathfrak{F}_b)$ .

С точки зрения экспериментов ближайшего будущего интерес представляют лишь правила сумм, соответствующие коммутатору изоспиновых токов, взятому между протонными состояниями. Матричные элементы, которые возникают в этих правилах сумм, могут быть измерены в экспериментах по электророжению. При их рассмотрении мы для простоты ограничимся случаем  $q^2 = q'^2$ . Правила сумм, получающиеся из коммутатора временных компонент токов  $\mathfrak{F}_1^0$  и  $\mathfrak{F}_2^0$ , будут содержать спиральные амплитуды

$$T_{\lambda_p \lambda_{\bar{p}}; 1 - 1}^{12}$$

Полезно заметить, что эти амплитуды нечетны относительно перестановки изотопических индексов  $1 \leftrightarrow 2$ ; причина этого заключается в том, что симметризованная комбинация  $T^{12} + T^{21}$  имеет изотопический спин  $I=2$  и должна обращаться в нуль, так как  $p\bar{p}$ -система не может иметь  $I > 1$ . Отсюда и из рассмотренных выше симметрий следует, что существуют только два независимых правила сумм: одно для  $\lambda_p = \lambda_{\bar{p}}$  и другое для  $\lambda_p = -\lambda_{\bar{p}}$ . Они имеют следующий вид:

$$\mathfrak{N} | \mathbf{Q} | \int \text{AP} \times \left\{ \frac{T_{1/2 \ 1/2; 1 - 1}^{12}(z, t, q^2, q^2) + T_{-1/2 \ -1/2; 1 - 1}^{12}(z, t, q^2, q^2)}{1 - z^2} \right\} dz = iG_E^V(t) \quad (5.17)$$

и

$$\mathfrak{N} | \mathbf{Q} | \int \text{AP} \left\{ \frac{T_{1/2 \ -1/2; 1 - 1}^{12}(z, t, q^2, q^2)}{(1 - z)^{1/2} (1 + z)^{3/2}} \right\} dz = \frac{i}{2} \left( \frac{t}{4M_p^2} \right)^{1/2} G_M^V(t), \quad (5.18)$$

где  $M_p$  — масса протона, а  $G_E^V$  и  $G_M^V$  — изовекторные саксовские электрический и магнитный формфакторы протона [ $G_E^V(0) = 1/2$ ,  $G_M^V(0) = 1/2(\mu^V + 1)$ ]. Выбор фаз и нормировочного множителя в соотношениях (5.17) и (5.18) станет ясен читателю после сравнения их правых частей с соотношениями (5.8) и (5.11). При  $t=0$  усредненное по спину правило сумм [соотношение (5.17)] переходит в правило сумм, рассмотренное в предыдущей главе. В частности, оно приводит к правилу сумм Кабиббо — Радикати [соотношение (4.23)] и к неравенству (4.30). Правило сумм (5.18) включает эффекты, связанные со спином: при  $t=0$  оно обращается в тождество.

## 2. ПРАВИЛО СУММ, ВЫТЕКАЮЩЕЕ ИЗ КОММУТОРА ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КОМПОНЕНТЫ ТОКА

В предыдущей главе отмечалось, что возможность перехода к пределу бесконечного импульса является сомнительной для коммутаторов, содержащих пространственные компоненты токов. До сих пор мы не обсуждали правил сумм, соответствующих таким коммутаторам, отчасти по указанной выше причине, а отчасти из-за того, что при  $t=0$  и при усреднении по спину (именно этот случай и был рассмотрен в предыдущей главе) эти коммутаторы не приводят к каким-либо интересным правилам сумм. Однако, когда принимается во внимание спин, матричный элемент локального коммутатора

$$\delta(x^0 - y^0) [\mathfrak{F}_1^0(x), \mathfrak{F}_2^r(y)] = i\delta^4(x - y) \mathfrak{F}_3^r(x)$$

между протонными состояниями ведет, если в нем возможен предельный переход  $|\mathbf{P}| \rightarrow \infty$ , к довольно любопытному правилу сумм. Метод его получения рассмотрен в приложении Г; здесь же мы просто выпишем это правило сумм

$$\begin{aligned} \mathfrak{N} | \mathbf{Q} | \int \text{AP} \left\{ \frac{z T^{12}_{1/2 - 1/2; 1 - 1} (z, t, q^2, q^2)}{(1-z)^{1/2} (1+z)^{3/2}} \right\}_z dz = \\ = -\frac{i}{2} (\mathbf{d}_0)_r G_3^r(t) = \frac{i}{2} \left( \frac{t}{4M_p^2} \right)^{1/2} G_M^V(t). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Отметим, что подынтегральное выражение в (5.19) отличается от соответствующего выражения в (5.18) только множителем  $z$ , так что сходимость интеграла в равенстве (5.19) менее вероятна. Однако, если мы принимаем модель полюсов Редже всерьез, этот интеграл должен сходиться примерно так же быстро, как и интеграл в (5.18). Используя результаты приложения Д, мы получаем следующее предсказание модели полюсов Редже относительно асимптотического поведения подынтегрального выражения в (5.19):

$$\text{AP} \{ \} z \sim z^{\alpha_p(t)-2} + z^{\alpha_x(t)-1} + (\text{нечетные по } z \text{ члены}),$$

где  $\alpha_p$  — траектория  $\rho$ -мезона, а  $\alpha_x$  — ведущая траектория с положительной сигнатурой, отрицательной четностью и положительной  $G$ -четностью. Так как не было обнаружено мезонов, лежащих на траектории типа  $\alpha_x$ , то можно предположить, что  $\alpha_x(0) < 0$ , и, следовательно, интеграл должен сходиться при малых  $t$ .

Аналогично тому, как из правила сумм (5.17) выводится правило сумм Кабиббо — Радикати, можно показать, что интеграл в соотношении (5.19) имеет предел, который содержит только полные сечения для реальных (с нулевой массой) фотонов; получающееся при этом правило сумм имеет вид <sup>1)</sup>

$$\frac{\mu^{V+1}}{2M_N} = \frac{1}{4\pi^2\alpha} \int [(\sigma_{1/2} - 2\sigma_{3/2})_A^V - (\sigma_{1/2} - 2\sigma_{3/2})_P^V] d\omega, \quad (5.20)$$

где  $\alpha \approx (137)^{-1}$ ,  $\omega$  — энергия фотона (лабораторная), а  $\sigma_{IA}^V$  и  $\sigma_{IP}^V$  — полные сечения процесса (изовекторный фотон) + нуклон  $\rightarrow$  (состояния с изоспином  $I$ ), когда спины фотона и нуклона параллельны ( $\sigma_P$ ) или антипараллельны ( $\sigma_A$ ).

Как читатель, вероятно, уже заметил, правило сумм (5.20) обладает любопытной особенностью: оно должно нарушаться, если сильные взаимодействия включены! Если бы сильные взаимодействия отсутствовали, то сечения обратились бы в нуль, но левая часть должна была бы равняться  $1/(2M_N)$ . Это эквивалентно

<sup>1)</sup> Другой вывод соотношения (5.20) можно найти в работе [3].

утверждению о том, что если бы мы изучали предел бесконечного импульса для коммутатора  $[\mathfrak{F}_1^0, \mathfrak{F}_2^r]$  в теории свободных нуклонов, то обнаружили бы, что парные состояния дают неисчезающий вклад. Поэтому правила сумм (5.19) и (5.20) занимают особое положение. Если экспериментально они не удовлетворяются, то это было бы скорее указанием на то, что в этом случае переход к пределу бесконечного импульса невозможен, чем на то, что предполагаемое коммутационное соотношение неправильно. С другой стороны, если окажется, что они согласуются с экспериментом, то наиболее важным будет вывод о том, что мы не можем больше говорить о выключении сильных взаимодействий для нуклона. До настоящего времени не предпринималось попыток аккуратного численного расчета соотношения (5.20).

## § 2. Еще о сверхсходимости

В предыдущей главе мы „открыли“ сверхсходящиеся правила сумм, обнаружив, что подынтегральные выражения в правилах сумм, полученных из алгебры токов, имеют полюсы, вычеты в которых должны при интегрировании давать нуль. Поступим так же с более общими правилами сумм, выведенными в § 1.

Рассмотрим правило сумм (5.11), в котором в качестве  $\mathfrak{F}_a$  выбран ток изотопического спина. Тогда, очевидно, амплитуда

$$T_{\lambda_f \lambda_{\bar{f}}; 1-1}^{ab}$$

имеет полюс при  $q'^2 = M_\rho^2$ , вычет в котором равен константе, умноженной на спиральную амплитуду

$$T_{\lambda_f \lambda_{\bar{f}}; 1-1}^{0b}$$

процесса (ток  $b$ )  $+ \rho \rightarrow f + \bar{f}$ . Так как правая часть соотношения (5.11), очевидно, несингулярна при  $q'^2 = M_\rho^2$ , то мы получаем правило сумм

$$\int \text{AP} \left\{ \frac{T_{\lambda_f \lambda_{\bar{f}}; 1-1}^{0b}(z, t, q^2)}{1-z^2} \left[ \frac{1-z}{1+z} \right]^{1/2 (\lambda_f - \lambda_{\bar{f}})} \right\}_z dz = 0. \quad (5.21)$$

Рассуждая теперь точно так же, как в гл. 4, мы обнаружим, что соотношение (5.21) эквивалентно равенству

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z \left[ \frac{T_{\lambda_f \lambda_{\bar{f}}; 1-1}^{0b}(z, t, q^2)}{1-z^2} \left( \frac{1-z}{1+z} \right)^{1/2 (\lambda_f - \lambda_{\bar{f}})} \right] = 0, \quad (5.22)$$

иначе говоря, величина в квадратных скобках является сверхсходящейся.

Ранее мы указывали, что сверхсходящиеся правила сумм для амплитуд рассеяния сильно взаимодействующих частиц обычно могут быть получены из некоторого общего, не зависящего от модели ограничения типа теоремы Померанчука, вытекающего из унитарности. Однако условие унитарности не накладывает никаких ограничений на амплитуды, которые подобно  $T^{0b}$  содержат ток. Может быть, алгебра токов дает нам указание на то, что эти амплитуды тем не менее должны удовлетворять некоторым общим ограничениям при высокой энергии? Нет, это не так. Дело в том, что при выводе правила сумм с фиксированным  $q'^2$  мы молчаливо предположили справедливость соотношения (5.21). Это обстоятельство связано с неравномерностью перехода к пределу бесконечного импульса. Детали этого заключения приведены в приложении В; здесь мы сформулируем лишь окончательный вывод:

*Любое сверхсходящееся правило сумм, которое может быть получено из правила сумм с фиксированным  $q^2$ , вытекающее из алгебры токов, неявно предполагается при выводе этого правила (с фиксированным  $q^2$ ).*

Конечно, мы надеемся, что соотношение (5.21) является правильным. В противном случае правила сумм, полученные из алгебры токов, оказались бы неверными.

Так как сверхсходимость, по существу, не связана с коммутаторами токов, то сверхсходящиеся правила сумм стоят несколько в стороне от той темы, которой посвящена настоящая книга. Но, поскольку сверхсходимость представляет интерес сама по себе и исторически была связана с алгеброй токов, мы продолжим ее рассмотрение в общем виде. Определенный класс

сверхсходящихся правил сумм можно получить при рассмотрении полюсов в правилах сумм алгебры токов, как мы это делали раньше. Однако такой способ не очень эффективен. Вместо этого мы, исходя непосредственно из амплитуд рассеяния частиц, сформулируем общее правило сумм и затем покажем, каким образом ему соответствует соотношение (5.21).

Рассмотрим реакцию  $A + B \rightarrow C + D$  в  $s$ -канале, где  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  — частицы с произвольными массами и спинами. В  $t$ -канале ей соответствует реакция  $A + \bar{C} \rightarrow D + \bar{B}$ . Введем спиральные амплитуды

$$T_{\lambda_D \lambda_{\bar{B}}; \lambda_A \lambda_{\bar{C}}}(z, t),$$

где  $z$  — косинус угла между импульсами  $\mathbf{P}_A$  и  $\mathbf{P}_D$  частиц  $A$  и  $D$ . Преимущество использования амплитуд в  $t$ -канале заключается в том, что для произвольных спинов приведенные амплитуды [4]<sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{\lambda_D \lambda_{\bar{B}}; \lambda_A \lambda_{\bar{C}}}(z, t) &= \\ &= (1+z)^{-1/2|\lambda+\mu|} (1-z)^{-1/2|\lambda-\mu|} T_{\lambda_D \lambda_{\bar{B}}; \lambda_A \lambda_{\bar{C}}}(z, t), \quad (5.23) \\ \lambda &= \lambda_D - \lambda_{\bar{B}}, \quad \mu = \lambda_A - \lambda_{\bar{C}} \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> В этой статье можно найти ссылки на другие полезные работы по спиральным амплитудам.

Физический смысл множителей  $(1-z)^{1/2|\lambda-\mu|}$  и  $(1+z)^{1/2|\lambda+\mu|}$ , которые выделяются из амплитуды  $T$  для получения приведенной амплитуды  $\tilde{T}$ , можно понять следующим образом. Когда  $z = +1$ , векторы  $\mathbf{P}_A = -\mathbf{P}_C$  и  $\mathbf{P}_D = -\mathbf{P}_B$  параллельны (т. е. мы имеем рассеяние вперед) и проекция углового момента на направление  $\mathbf{P}_A$  может сохраняться, только если  $\lambda_D - \lambda_{\bar{B}} = \lambda = \lambda_A - \lambda_{\bar{C}} = \mu$ . Следовательно, для  $\lambda \neq \mu$  амплитуда  $T$  должна обращаться в нуль при  $z = 1$ , что объясняет выделение множителя  $(1-z)^{1/2|\lambda-\mu|}$ . Аналогичным образом можно объяснить наличие множителя  $(1+z)^{1/2|\lambda+\mu|}$ , если рассмотреть сохранение углового момента при рассеянии назад ( $z = -1$ ). Отметим, что дополнительный усиливающий сходимость множитель  $z^{-M}$  в (5.24) появляется за счет множителей, выделенных из  $T$ ; сама амплитуда  $T$  всегда ведет себя как  $z^\alpha$ . Наличие спина является решающим для получения сверхсходящихся правил сумм.

не имеют кинематических сингулярностей по  $z$  при фиксированном  $t$ . Кроме того, асимптотическое поведение амплитуд  $\tilde{T}$  в модели полюсов Редже оказывается очень простым

$$\tilde{T}_{\lambda_D \lambda_B; \lambda_A \lambda_C}(z, t) \rightarrow z^{\alpha(t)-M}, \quad M = \text{Max}(|\lambda|, |\mu|); \quad (5.24)$$

здесь  $\alpha(t)$  — траектория ведущего полюса Редже с соответствующими квантовыми числами. В этом случае мы можем, следовательно, явно выписать следующие сверхсходящиеся правила сумм:

$$\int z^n \text{AP} \left\{ \tilde{T}_{\lambda_D \lambda_B; \lambda_A \lambda_C}(z, t) \right\}_z dz = 0, \quad (5.25)$$

$$n = 0, 1, \dots, M-2, \quad 0 \leq \alpha(t) < 1,$$

$$n = 0, 1, \dots, M-1, \quad \alpha(t) < 0.$$

Единственные два предположения, которые понадобились для получения соотношений (5.25), — это аналитичность амплитуд  $\tilde{T}$  и асимптотическое поведение (5.24).

Вернемся теперь к правилу сумм, которое мы получили из алгебры токов, и посмотрим, как оно входит в систему соотношений (5.25). Для того чтобы иметь дело с рассеянием частиц, мы заменим оставшийся ток  $\rho$ -мезоном и опустим верхние индексы у амплитуды  $T$ , которая соответствует теперь процессу  $\rho + \rho \rightarrow f + \bar{i}$ . Амплитуду в подынтегральном выражении в правиле сумм можно представить в виде

$$\frac{T_{\lambda_f \lambda_{\bar{i}}; 1-1} \left[ \frac{1-z}{1+z} \right]^{\frac{1}{2}(\lambda_f - \lambda_{\bar{i}})}}{1-z^2} = P(z) \tilde{T}_{\lambda_f \lambda_{\bar{i}}; 1-1}, \quad (5.26)$$

где  $P$  — полином по  $z$  степени  $(|\lambda_f - \lambda_{\bar{i}}| - 2)$ , если  $|\lambda_f - \lambda_{\bar{i}}| > 2$ , и просто единица, если  $|\lambda_f - \lambda_{\bar{i}}| \leq 2$ . (Асимптотическое поведение произведения  $P(z) T_{\lambda_f \lambda_{\bar{i}}; 1-1}$  всегда имеет вид  $z^{\alpha-2}$ .) Теперь ясно, что правила сумм, полученные из алгебры токов, всегда приводят к сверхсходящимся правилам сумм, совместным с соотношениями (5.25), но не дают в общем случае всех правил сумм, содержащихся в (5.25), даже для рассеяния частиц, которые, подобно  $\rho$ -мезону, имеют те же квантовые числа, что и токи.



Мы хотим привести пример практического использования спиральных амплитуд для получения свёрхсходящихся правил сумм, но вначале сделаем небольшое замечание. Обычно удобнее работать не с амплитудами  $\tilde{T}$ , а с их линейными комбинациями

$$\tilde{T}_{\lambda_D \lambda_{\bar{B}}; \lambda_A \lambda_{\bar{C}}} \pm \tilde{T}_{-\lambda_D -\lambda_{\bar{B}}; \lambda_A \lambda_{\bar{C}}}.$$

Эти комбинации обладают полезными свойствами, которые перечислены в приложении Д.

Простейший интересный с физической точки зрения пример свёрхсходимости представляет комптоновское рассеяние фотонов на мишени  $B$  со спином  $1/2$ . В  $t$ -канале этому процессу соответствует реакция  $\gamma\gamma \rightarrow B\bar{B}$ ; мы будем работать с амплитудами

$$\begin{aligned} t\mathcal{M}_1 &= \tilde{T}_{1/2 \ 1/2; 1 \ -1} + \tilde{T}_{-1/2 \ -1/2; 1 \ -1}, \\ t\mathcal{M}_2 &= \tilde{T}_{1/2 \ -1/2; 1 \ -1} - \tilde{T}_{-1/2 \ 1/2; 1 \ -1}, \end{aligned} \quad (5.27)$$

где мы выделили множитель  $t$ , поскольку оказывается, что амплитуды  $\tilde{T}$  имеют кинематический нуль при  $t=0$ . Существуют, конечно, и другие амплитуды, но они не приводят к интересным правилам сумм. В приложении Д показано, что амплитуда  $\mathcal{M}_1$  четна по  $z$ , а  $\mathcal{M}_2$  нечетна и что они имеют следующее асимптотическое поведение:

$$\mathcal{M}_1 \sim z^{\alpha_{ee}-2} + z^{\alpha_{oe}-3}, \quad \mathcal{M}_2 \sim z^{\alpha_{eo}-2} + z^{\alpha_{ee}-3}, \quad (5.28)$$

где  $\alpha_{ee}$  — ведущая траектория с положительными сигнатурой и четностью (типа  $0^+$ ,  $2^+$ ,  $4^+$ , ...), а  $\alpha_{oe}$  — ведущая траектория с отрицательной сигнатурой и положительной четностью (типа  $1^+$ ,  $3^+$ ,  $5^+$ , ...). Если мы ограничимся областью вблизи  $t=0$ , то кандидаты в  $\alpha_{ee}$  лучше всего классифицировать по изотопическому спину: для  $I=0$  мы имеем померанчукон с  $\alpha_P \approx 1$ , для  $I=1$  имеем  $A_2$ -траекторию с  $\alpha_{A_2} \approx 1/2$ , для  $I=2$  траектории неизвестны. О траекториях  $\alpha_{oe}$ , за исключением того, что  $\alpha_{oe}(0) < 1$ , почти ничего не известно.

Очевидно, можно считать, что амплитуда  $\mathfrak{M}_2$  является сверхсходящейся [т. е.  $\lim_{z \rightarrow \infty} z\mathfrak{M}_2(z, t) = 0$ ], и мы получаем правило сумм

$$\int \text{AP} \{ \mathfrak{M}_2(z, t) \}_z dz = 0. \quad (5.29)$$

Интеграл в этом равенстве содержит вклад одночастичного промежуточного состояния и вклад непрерывного спектра. Переходя к  $t=0$  в соотношении (5.29), получаем

$$\left( \frac{\mu'_B}{2M_B} \right)^2 - \frac{1}{8\pi^2\alpha} \int_0^\infty \frac{\sigma_P(\omega) - \sigma_A(\omega)}{\omega} d\omega = 0, \quad (5.30)$$

где член, содержащий аномальный магнитный момент  $\mu'_B$  частицы  $B$ , возникает за счет дискретного состояния, а  $\sigma_P$  и  $\sigma_A$  обозначают, как и раньше, полные сечения  $\gamma B$ -рассеяния, когда спины  $\gamma$  и  $B$  соответственно параллельны и антипараллельны;  $\omega$  — энергия фотона в лабораторной системе. Если в качестве  $B$  выбрать протон, то мы получим правило сумм Герасимова — Дрелла — Хёрна (ст. 9 и гл. 3 настоящей книги; работа [9]).

Положение со сверхсходимостью амплитуды  $\mathfrak{M}_1$  хуже. Прежде всего  $\mathfrak{M}_1$  четна по  $z$ , откуда следует<sup>1)</sup>, что нетривиальное правило сумм можно получить, если только произведение  $z\mathfrak{M}_1$  является сверхсходящимся [т. е.  $\lim_{z \rightarrow \infty} z^2\mathfrak{M}_1(z, t) = 0$ ]. Поэтому из приведенной выше классификации траекторий следует, что в амплитуду должны давать вклад только траектории с  $I=2$ . Этого можно добиться, выбирая в качестве  $B$  член изотопического мультиплета с  $I \geq 1$  и ограничиваясь для процесса  $\gamma\gamma \rightarrow B\bar{B}$  каналом с  $I=2$ . Предполагая затем, что не существует полюсов<sup>2)</sup> с  $I=2$  и  $\alpha \geq 0$ , мы получаем следующее правило сумм:

<sup>1)</sup> Напомним, что если амплитуда  $\mathfrak{M}$  четна (нечетна) по  $z$ , то ее абсорбтивная часть нечетна (четна).

<sup>2)</sup> Заметим, что в этом случае, возможно, придется остерегаться реджевских разрезов. Может случиться, что все полюсы с  $I=2$  имеют  $\alpha < 0$ , но правый край разреза с  $I=2$ , образованного из двух  $\rho$ -траекторий, лежит выше нуля. Можно ожидать, что при  $t=0$  этот

$$\int z \text{AP} \{ \mathcal{M}_1'^{-2}(z, t) \}_z dz = 0. \quad (5.31)$$

Для конкретности выберем в качестве  $B$  частицу, принадлежащую к  $\Sigma$ -мультиплету, и положим в (5.31)  $t = 0$ . Тогда получим

$$\frac{2}{M_\Sigma} - \frac{1}{2\pi^2 a} \int d\omega (2\sigma_{\Sigma^0} - \sigma_{\Sigma^+} - \sigma_{\Sigma^-}) = 0, \quad (5.32)$$

где  $2M_\Sigma^{-1}$  возникает за счет одночастичного состояния, а входящие в это равенство сечения представляют собой полные сечения рассеяния фотонов на различных членах  $\Sigma$ -мультиплета.

Правила сумм (5.30) и (5.32), полученные здесь с точки зрения сверхсходимости, обычно выводятся путем комбинирования низкоэнергетических теорем для комптоновского рассеяния с дисперсионными соотношениями без вычитаний<sup>1)</sup>. Связь между двумя подходами можно проследить, если учесть, что обычные амплитуды  $f_1$  и  $f_2$  рассеяния вперед фотонов на частицах со спином  $1/2$ , записанные как функции  $\nu$ , а не  $z$ , равны (с точностью до постоянных множителей)

$$f_1(\nu) \sim \nu^2 \mathcal{M}_1(\nu, 0) \text{ и } f_2(\nu) \sim \nu^2 \mathcal{M}_2(\nu, 0).$$

Таким образом, дисперсионные соотношения без вычитаний<sup>2)</sup> для  $f_1$  и  $f_2$  эквивалентны сверхсходимости соответствующих амплитуд  $\mathcal{M}$ , а знание вычетов амплитуд  $\mathcal{M}_1$  и  $\mathcal{M}_2$  в полюсах<sup>3)</sup> при  $\nu = 0$  эквивалентно низкоэнергетической теореме для  $f_1(0)$  и  $(d/d\nu)f_2|_{\nu=0}$ .

разрез достигает точки  $2a_p(0) - 1$ , что фактически очень близко к нулю. Таким образом, если этот разрез существен, то правило сумм (5.32) будет сходиться медленно, если оно вообще сходится.

<sup>1)</sup> Вывод соотношения (5.30) с помощью низкоэнергетических теорем дан в работе Дрелла и Хёрна (ст. 9). Вывод соотношения (5.32) можно найти в работах [5].

<sup>2)</sup> Для четной функции, подобной  $f_1$ , дисперсионное соотношение без вычитаний имеет место, если  $f_1 \rightarrow 0$  при  $\nu \rightarrow \infty$ . Для нечетной функции, подобной  $f_2$ , соответствующим условием является  $\nu^{-1}f_2 \rightarrow 0$  при  $\nu \rightarrow \infty$ .

<sup>3)</sup> Для  $t = 0$  в реакции  $\gamma + B \rightarrow \gamma + B$   $B$ -полюс появляется при  $\nu = 0$ ; вычет в нем, конечно, известен и выражается через заряд и магнитный момент.

Наконец, существует интересная связь между сверхсходимостью и „правилами сумм для  $g_A$ “, вытекающими из проинтегрированного коммутатора  $[F_{1+i_2}^5, F_{1-i_2}^5] = 2F_3$ , взятого между состояниями  $\langle i |$  и  $| i \rangle$ . Используя гипотезу о частичном сохранении аксиально-векторного тока, эти правила сумм можно записать с помощью интегралов от сечений рассеяния пионов на частице  $i$ . Если частица  $i$  имеет спин, больший  $1/2$ , то формально существует более одного правила сумм для  $g_A$ . Однако разность между любыми двумя из этих правил сумм оказывается однородной (так как  $\langle i | F_3 | i \rangle$  не зависит от спина) и есть фактически одно из сверхсходящихся правил сумм для  $\pi$ -рассеяния. Этот факт становится существенным, когда мы хотим подсчитать число независимых правил сумм для данного процесса рассеяния

### § 3. Правила сумм и полюсы Редже

В предыдущем параграфе мы изучали зависимость правил сумм от „масс“  $q^2$  и  $q'^2$  и пришли к сверхсходящимся правилам сумм. Теперь мы будем исследовать зависимость правил сумм от  $t$ . На этот раз мы узнаем некоторые интересные сведения о полюсах Редже.

Рассмотрим конкретный пример, а именно усредненное по спину правило сумм [соотношение (5.17)], которое следует из коммутатора токов  $\mathfrak{F}_1^0$  и  $\mathfrak{F}_2^0$ , взятого между нуклонными состояниями. Для упрощения наших уравнений удобно ввести амплитуду

$$\tilde{T}_{1-1}(z, t, q^2) = \frac{T_{1/2, 1/2; 1-1}^{12}(z, t, q^2, q^2)}{1-z^2} + \frac{T_{-1/2, -1/2; 1-1}^{12}(z, t, q^2, q^2)}{1-z^2} \quad (5.33)$$

и записать правило сумм в виде

$$\Re | Q | \int AP \{ \tilde{T}_{1-1}(z, t, q^2) \}_z dz = iG_E^V(t). \quad (5.34)$$

Так как оба члена в правой части (5.33) являются приведенными спиральными амплитудами [см. соотношение (5.24)], то определение (5.33) согласуется с определением символа  $\tilde{T}$  в § 2, а вследствие того, что

правая часть (5.33) включает усреднение по спидам протонов, мы можем опустить индексы спиральностей протонов.

Известно, что формфактор  $G_E^V(t)$  в (5.34) является аналитической функцией  $t$  с сингулярностями на положительной действительной полуоси. Рассмотрим эти особенности; они должны соответствовать сингулярностям, возникающим из интеграла в (5.34). В связи с этим отметим, что существуют два типа особенностей у  $G_E^V(t)$ : во-первых, точки ветвлений, возникающие за счет промежуточных состояний, содержащих две и более частиц (например,  $2\pi$ ,  $4\pi$  и т. д.), и, во-вторых, полюсы, возникающие за счет одночастичных состояний, подобных  $\rho$ -мезону<sup>1</sup>). Интеграл в (5.34) воспроизводит эти два типа сингулярностей различным образом. Ветвления возникают просто за счет ветвлений в подинтегральном выражении  $\text{AR}\{\tilde{T}_{1-1}\}_z$ , которое, как известно, имеет разрезы в  $t$ -плоскости, начинающиеся у различных порогов. Полюсы, однако, не связаны с полюсами в  $\text{AR}\{\tilde{T}_{1-1}\}_z$ ; например, промежуточное  $\rho$ -состояние не дает вклада в абсорбтивную по  $z$  часть амплитуды реакции (токи)  $\rightarrow \rho\bar{\rho}$ , и, следовательно, оно не дает вклада в  $\text{AR}\{\tilde{T}_{1-1}\}_z$ . Очевидно, что полюс в  $G_E^V(t)$  при  $t = M_\rho^2$  можно объяснить только в том случае, если интеграл от  $\text{AR}\{\tilde{T}_{1-1}\}_z$  расходится при  $t = M_\rho^2$ . В том, что это фактически так и происходит, легко убедиться следующим образом. Согласно модели полюсов Редже, величина  $\text{AR}\{\tilde{T}_{1-1}\}_z$  имеет асимптотическое поведение вида  $\gamma(t, q^2) z^{\alpha_\rho(t)-2}$ . Интегрируя эту реджевскую асимптотику при больших  $z$ , получаем

$$\int_{z_0}^{\infty} \text{AR}\{\tilde{T}_{1-1}\}_z dz \sim \int_{z_0}^{\infty} \gamma(t, q^2) z^{\alpha_\rho(t)-2} dz = -\frac{\gamma(t, q^2)}{\alpha_\rho(t) - 1} z_0^{\alpha_\rho(t)-1}, \quad (5.35)$$

<sup>1</sup>) Как отмечалось выше, вследствие нестабильности  $\rho$ -мезона  $\rho$ -полюс находится не на „физическом листе“  $G_E^V(t)$ , а на римановом листе. Чтобы попасть на него, нужно при угле  $2\pi$  пройти под линией разреза. Мы, однако, пренебрежем этим обстоятельством и будем рассматривать  $\rho$ -мезон как стабильную частицу.

где  $z_0$  — некоторое (большое) значение  $z$ , выше которого предполагается справедливым асимптотическое поведение  $z^{\alpha_p(t)-2}$ . Чтобы выявить теперь полюс при  $t = M_\rho^2$ , мы просто заметим, что вблизи  $t = M_\rho^2$

$$\alpha_p(t) = 1 + \alpha'_p(M_\rho^2)(t - M_\rho^2) + \dots,$$

откуда вытекает существование полюса вида

$$- \gamma(M_\rho^2, q^2) [\alpha'_p(M_\rho^2)(t - M_\rho^2)]^{-1}.$$

То, что зависящее от  $t$  асимптотическое поведение  $z^{\alpha(t)}$ , следующее из модели полюсов Редже, может явиться причиной возникновения полюсов по переменной  $t$  в дисперсионном соотношении при фиксированном  $t$ , не является чем-то новым: в физике сильных взаимодействий это известно уже много лет [6]. С точки зрения алгебры токов важно то, что мы имеем возможность провести проверку ее самосогласованности, состоящую в том, что полюсы, появляющиеся в форм-факторе  $G$  в правой части данного правила сумм, всегда должны соответствовать реджевским траекториям, которые дают вклад в подынтегральное выражение слева. Все правила сумм, выведенные в § 1, удовлетворяют этому требованию; в частности, с правилом сумм (5.20), которое несправедливо для невзаимодействующих нуклонов, с точки зрения присутствия реджевских траекторий все обстоит хорошо.

В действительности, однако, хотя сделанные выше заключения справедливы, аргументы, которые мы при этом использовали, не совсем корректны. Трудность связана с тем, что  $\tilde{T}_{1-1}$  является амплитудой для процесса рассеяния, в котором полный спин вдоль направления  $\mathbf{Q}$  в начальном состоянии равен 2. (Напомним, что противоположные спиральности соответствуют параллельным спином.) Когда  $\rho$ -траектория проходит через точку  $J = 1$ , она соответствует мезону со спином 1, который находится в покое в системе центра масс в  $t$ -канале и не может быть связан с начальным состоянием со спином 2 вдоль  $\mathbf{Q}$ . Если аккуратно проводить „реджезацию“ амплитуды  $\tilde{T}_{1-1}$ , то это обстоятельство проявится в

появлении множителя  $\alpha_p(t) - 1$  в  $\gamma(t, q^2)$ . Тогда оказывается, что мы теряем полюс при  $t = M_p^2$ . Выход из этого затруднения был предложен Бронзаном, Герстейном, Ли и Лоу [7] и Сингхом [8]. Они указали, что в дополнение к  $\rho$ -полюсу, который движется при изменении  $t$ , амплитуда  $\tilde{T}_{1-1}$  должна иметь неподвижный, фиксированный полюс в точке, где спин равен единице<sup>1)</sup>. Этот фиксированный полюс добавляет множитель  $[\alpha_p(t) - 1]^{-1}$  в  $\gamma(t, q^2)$ , который сокращается с возникшим ранее множителем  $\alpha_p(t) - 1$ . Следовательно, наши предыдущие аргументы справедливы, но только потому, что мы сделали две компенсирующие друг друга ошибки. Что касается самосогласованности, то фиксированный полюс с целым спином не изменяет степени  $z$  в асимптотическом поведении величины  $\text{AP} \{ \tilde{T}_{1-1} \}_z$ , так что наша первоначальная формула  $\text{AP} \{ \tilde{T}_{1-1} \}_z \sim z^{\alpha_p(t)-2}$  по-прежнему верна.

Фиксированный полюс при  $J = 1$  интересен еще и по другой причине, что становится ясным при вычислении асимптотического поведения амплитуды  $\tilde{T}_{1-1}$ . Эта амплитуда получается из  $\text{AP} \{ \tilde{T}_{1-1} \}_z$  с помощью дисперсионного интеграла

$$\tilde{T}_{1-1}(z, t, q^2) = \int \frac{\text{AP} \{ \tilde{T}_{1-1} \}_{z'}(z', t, q^2)}{z' - z} dz'. \quad (5.36)$$

Чтобы вычислить асимптотическое поведение амплитуды  $\tilde{T}_{1-1}$ , перепишем (5.36) в виде

$$\tilde{T}_{1-1} = -\frac{1}{z} \int \text{AP} \{ \tilde{T}_{1-1} \}_{z'} dz' + \frac{1}{z} \int \frac{z'}{z' - z} \text{AP} \{ \tilde{T}_{1-1} \}_{z'} dz', \quad (5.37)$$

откуда получаем

$$\tilde{T}_{1-1} \rightarrow -z^{-1} \int \text{AP} \{ \tilde{T}_{1-1} \}_{z'} dz' + \frac{\pi\gamma(t, q^2) z^{\alpha_p(t)-2}}{\sin \pi\alpha_p(t)}; \quad (5.38)$$

<sup>1)</sup> Мы, конечно, имеем в виду полюсы в плоскости комплексного углового момента. Парциальные волны в амплитуде  $\tilde{T}_{1-1}$  процесса (токи)  $\rightarrow p\bar{p}$  могут быть продолжены в комплексную  $J$ -плоскость стандартным образом.

здесь мы воспользовались тем, что  $\text{AP} \{\tilde{T}_{1-1}\}_z \rightarrow \gamma z^{\alpha_p-2}$ , для вычисления предела второго члена при больших  $z$  в формуле (5.37). Асимптотическое поведение амплитуды  $\tilde{T}_{1-1}$  интересует нас потому, что присутствие в  $\tilde{T}_{1-1}$  члена, который ведет себя как  $z^{J_0-2}$ , приводит к полюсу при  $J=J_0$  в плоскости углового момента. Таким образом, присутствие члена порядка  $z^{-1}$  в (5.38) означает, что в дополнение к движущемуся полюсу при  $J=\alpha_p(t)$  имеется фиксированный полюс при  $J=1$ . Вычет в этом полюсе при  $J=1$  пропорционален  $\int \text{AP} \{\tilde{T}_{1-1}\}_z dz$  и не может обращаться в нуль в силу правила сумм (5.34).

Из соотношения (5.38) мы видим, что присутствие фиксированного полюса в  $\tilde{T}_{1-1}$  приводит к тому, что  $\lim_{z \rightarrow \infty} z \tilde{T}_{1-1} \neq 0$ , даже если абсорбтивная часть удовлетворяет соотношению  $\lim_{z \rightarrow \infty} z \text{AP} (\tilde{T}_{1-1})_z = 0$ . В весьма общем случае наличие фиксированного полюса при целом  $J > -1$  приводит к тому, что асимптотическое поведение полной амплитуды отлично от асимптотического поведения ее абсорбтивной части<sup>1)</sup>.

Сопоставим поведение амплитуды (содержащей токи), которое мы только что нашли, с поведением амплитуды рассеяния адронов. При рассеянии сильно взаимодействующих частиц условие унитарности исключает фиксированные полюсы рассмотренного выше типа<sup>2)</sup>.

1) Это утверждение можно уточнить. Существуют два вида фиксированных полюсов. Во-первых, фиксированные полюсы в точках с „правильной сигнатурой“, которые представляют собой полюсы при нечетных целых  $J$  в амплитудах с нечетной сигнатурой или полюсы при четных целых  $J$  в амплитудах с четной сигнатурой. Во-вторых, могут быть фиксированные полюсы в точках с „неправильной сигнатурой“ — это полюсы при нечетных  $J$  в амплитудах с четной сигнатурой или при четных  $J$  в амплитудах с нечетной сигнатурой. Фиксированный полюс с „правильной сигнатурой“ всегда влияет на асимптотическое поведение амплитуды. Наоборот, фиксированный полюс с „неправильной сигнатурой“ не влияет на асимптотику.

2) Строго говоря, унитарность исключает только фиксированные полюсы с „правильной сигнатурой“. Фиксированные же полюсы с „неправильной сигнатурой“, как отмечалось выше, не меняют асимптотического поведения амплитуды.



Следовательно, амплитуды сильных взаимодействий имеют то же самое асимптотическое поведение, что и их абсорбтивные части. Это означает, что если в соотношении (5.38) амплитуда  $\tilde{T}_{1-1}$  была бы амплитудой рассеяния адронов, то должно было бы выполняться соотношение  $\int \text{AR} \{ \tilde{T}_{1-1} \}_z dz = 0$ . Поскольку оно представляет собой как раз одно из рассмотренных выше свержсходящихся правил сумм, то все утверждения оказываются согласованными между собой.

Из приведенных выше замечаний вытекает очевидный, но очень важный вывод. *Следует быть очень осторожным при переносе асимптотического поведения амплитуд рассеяния адронов на амплитуды, содержащие токи. Даже если мы сделаем непротиворечивое предположение об одинаковом асимптотическом поведении абсорбтивных частей амплитуд обоих типов, присутствие фиксированных полюсов приведет к тому, что полные амплитуды в общем случае не будут вести себя одинаково.*

## ПРИЛОЖЕНИЕ В

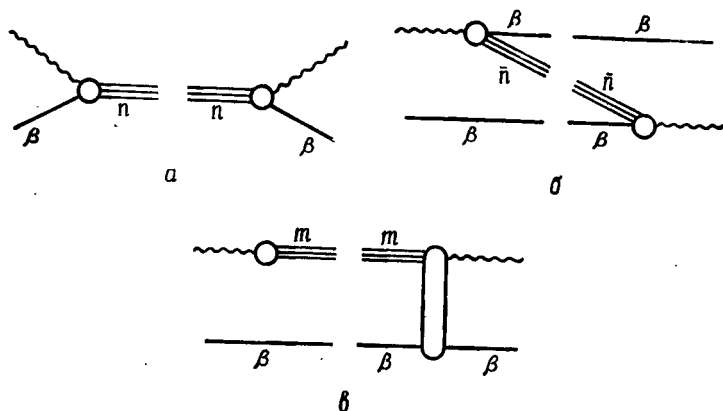
### 1. Общие замечания

Это приложение посвящено обсуждению технической стороны предельного перехода к бесконечному импульсу. Наша цель состоит в том, чтобы: 1) показать, как рассмотрение свободных полей в гл. 4, § 5 связано с реальным миром, в котором существуют сильные взаимодействия адронов; 2) привести соображения в пользу перечисленных в табл. 1 факторов затухания парных состояний и 3) проверить утверждение § 2 настоящей главы о том, что переход к пределу  $|P| \rightarrow \infty$  предполагает существование некоторых свержсходящихся правил сумм.

Всюду в этом приложении мы будем предполагать, что имеем дело с коммутаторами, взятыми между бесспиновыми состояниями с равными массами.

Вначале мы перечислим промежуточные состояния, которые дают вклад в  $A^{\mu\nu}$ . Промежуточные состояния, дающие вклад в  $A^{\mu\nu}$ , могут быть разбиты на три типа,

как показано на фиг. 5.1, где предполагается, что блоки содержат только связанные диаграммы<sup>1)</sup>. Состояния, изображенные на фиг. 5.1, *а* и *б*, представляют собой обобщения прямых и парных состояний, которые мы обнаружили в теории свободных полей, тогда как состояния, показанные на фиг. 5.1, *в*, не имеют аналога для свободных полей. Удобно объединить первые два типа состояний (фиг. 5.1, *а* и *б*) в один класс, который мы



Фиг. 5.1. Типы промежуточных состояний, дающих вклад в  $A^{\mu\nu}$ .

назовем классом I; другие состояния (фиг. 5.1, *в*) будут принадлежать классу II. Соответственно подынтегральное выражение  $A^{\mu\nu}$  в нашем правиле сумм можно разбить на две части:  $A^{\mu\nu} = A^{I\mu\nu} + A^{II\mu\nu}$ , в каждую из которых дают вклад только состояния данного класса.

Правила сумм с фиксированным  $q^2$  включают интегралы только от вклада прямых состояний в  $A^{I\mu\nu}$  (фиг. 5.1, *а*). Очевидно, что вклады парных состояний в  $A^{I\mu\nu}$  и вся величина  $A^{II\mu\nu}$  будут стремиться к своим предельным значениям при  $|v| = \infty$ , если  $|P| \rightarrow \infty$ , точно так же, как это было в теории свободных полей. Поэтому ясно, что для справедливости правил сумм

<sup>1)</sup> Это обеспечивает единственность разделения на типы *а*, *б* и *в*.

с фиксированным  $q^2$  эти своеобразные „состояния на бесконечности“ должны давать вклад, исчезающий при  $|P| \rightarrow \infty$ .

Мы обсудим вклады парных состояний в  $A^I$  и вклады различных состояний в  $A^{II}$  отдельно, причем для парных состояний будем использовать обозначения гл. 4, где мы уже обсуждали эти состояния в теории свободных полей, а для состояний класса II воспользуемся обозначениями гл. 5 и приложения Г.

## 2. Парные состояния

Как отмечалось выше, мы используем обозначения и кинематику гл. 4. Конкретно, мы будем изучать правило сумм, выведенное в соотношениях (4.10) — (4.19), где  $A^{\mu\nu} = A^{I\mu\nu} + A^{II\mu\nu}$  определяется формулами (4.13).

Рассмотрим некоторое адронное состояние  $|n\rangle$  с определенной массой  $M_n$ . Это состояние будет появляться в  $A^{I\mu\nu}$  дважды: один раз как прямое состояние (фиг. 5.1, а), а в другой раз в составе парного состояния (фиг. 5.1, б). Общий вид вклада этого состояния в ковариантную величину  $A^{I\mu\nu}$  имеет вид

$$\begin{aligned}
 A_n^{I\mu\nu} = & [P^\mu P^\nu G_n^1(q^2) + q^\mu q^\nu G_n^2(q^2) + g^{\mu\nu} G_n^3(q^2)] \times \\
 & \times [\varepsilon(\nu) \delta(2\nu + q^2 + M^2 - M_n^2) + (\nu \leftrightarrow -\nu)] + \\
 & + \frac{1}{2} [P^\mu q^\nu + P^\nu q^\mu] G_n^4(q^2) \times \\
 & \times [\varepsilon(\nu) \delta(2\nu + q^2 + M^2 - M_n^2) - (\nu \leftrightarrow -\nu)] + \\
 & + \text{Члены, нечетные относительно } q \rightarrow -q, \quad (B.1)
 \end{aligned}$$

где  $M$  — масса внешней частицы  $\beta$ , а величины  $G$  являются по существу произведениями формфакторов, которые входят в матричный элемент  $\langle \beta | \mathfrak{F}^\nu(0) | n \rangle$ . Выражения для величин  $A$  в теории свободных полей (4.35) и (4.43) представляют собой частные случаи общей формулы (B.1). Так как полная величина  $A^{I\mu\nu}$  равна

сумме членов вида (B.1), то мы можем записать правило сумм (4.15) (стр. 249) в виде

$$\sum_n \int \frac{A_n^{100}}{(P^0)^2} dv \Big|_{q \text{ фиксирован}} + (\text{вклад от } A^{II}) = 4I_3(\beta). \quad (\text{B.2})$$

Для того чтобы изучить вклады парных состояний при  $|\mathbf{P}| \rightarrow \infty$ , полезно переписать (B.2) следующим образом:

$$\sum_n \int \frac{q_\lambda q_\sigma A_n^{1\lambda\sigma} - 2q_\lambda q_r A_n^{1\lambda r} + q_r q_s A_n^{Irs}}{\nu^2} dv \Big|_{q \text{ фиксирован}} + (\text{вклад от } A^{II}) = 4I_3(\beta), \quad (\text{B.3})$$

вводя явно улучшающий сходимость множитель  $\nu^{-2}$ . [Как отмечалось в гл. 4, это улучшение сходимости является следствием гипотезы о частичном сохранении, которая утверждает, что величины  $q_\lambda q_\sigma A^{\lambda\sigma}$  и  $q_\lambda A^{\lambda\sigma}$  не более сингулярны, чем  $A^{\lambda\sigma}$ .] Подставляя общее выражение для величины  $A_n^{1\mu\nu}$  [соотношение (B.1)] в (B.3), получаем

$$\begin{aligned} & \sum_n \int \frac{G_n^5(q^2) \varepsilon(\nu) \delta(2\nu + q^2 + M^2 - M_n^2)}{\nu^2} dv + \\ & + 2q^2 \sum_n \int \frac{G_n^6(q^2) \varepsilon(\nu) \delta(2\nu + q^2 + M^2 - M_n^2)}{\nu^2} dv + \\ & + q^4 \sum_n \int \frac{G_n^2(q^2) \varepsilon(\nu) \delta(2\nu + q^2 + M^2 - M_n^2)}{\nu^2} dv - \\ & - q^2 \sum_n \int \frac{G_n^3(q^2) \varepsilon(\nu) \delta(2\nu + q^2 + M^2 - M_n^2)}{\nu^2} dv + \\ & + (\text{вклад от } A^{II}) = 2I_3(\beta), \quad (\text{B.4}) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} G_n^5 &= \nu^2 G_n^1 + q^4 G_n^2 + q^2 G_n^3 + \nu q^2 G_n^4, \\ G_n^6 &= q^2 G_n^2 + G_n^3 + \frac{1}{2} \nu G_n^4, \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

а интегрирования должны проводиться при фиксированном  $q^2$ . В соотношении (В.4) слагаемые, содержащие  $G_n^5$  и  $G_n^6$ , возникают из членов  $q_\lambda q_\sigma A_n^{1\lambda\sigma}$  и  $q_\lambda q_r A_n^{1\lambda r}$  в (В.3), тогда как часть, содержащая величины  $G_n^2$  и  $G_n^3$ , возникает из члена  $q_r q_s A_n^{1rs}$ . Как обычно, мы положили  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{q} = 0$  и воспользовались симметрией подынтегрального выражения относительно замены  $\mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{v}$  для того, чтобы исключить половину членов в (В.1).

Теперь легко найти точное условие обращения в нуль вклада парного состояния, соответствующего данному состоянию  $n$ , при  $|\mathbf{P}| \rightarrow \infty$ . Вклад парного состояния соответствует нулю аргумента  $\delta$ -функции в той точке, которая при  $|\mathbf{P}| \rightarrow \infty$  стремится к  $\mathbf{v} = -2(P^0)^2$ , так что вклад одного парного состояния имеет вид<sup>1)</sup>

$$\lim_{P^0 \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{8(P^0)^4} [G_n^5(4(P^0)^2) + 2q^2 G_n^6(4(P^0)^2) + q^4 G_n^2(4(P^0)^2) - q^2 G_n^3(4(P^0)^2)] \right\} \quad (\text{В.6})$$

и, безусловно, обращается в нуль, если каждая из величин  $G_n$  удовлетворяет соотношению  $q^{-4} G_n(q^2) \rightarrow 0$  при  $q^2 \rightarrow \infty$ . Как упоминалось выше, величины  $G_n$  являются по существу произведениями формфакторов, а так как измеренные экспериментально формфакторы (например, электромагнитные формфакторы протона), по-видимому, обращаются в нуль при  $q^2 \rightarrow \infty$ , то естественно предположить, что условие  $q^{-4} G_n^l(q^2) \rightarrow 0$ ,  $l = 2, 3, 5, 6$ , выполняется для каждого состояния  $n$ .

В действительности формфакторы протона стремятся при  $q^2 \rightarrow \infty$  к нулю, по-видимому, очень быстро, возможно, даже экспоненциально. Нельзя ли принять это за указание на то, что вклад парных состояний в правило сумм стремится к нулю гораздо быстрее, чем величина  $(P^0)^{-4}$ , которая возникает благодаря множи-

<sup>1)</sup> В соотношении (В.6) и последующих формулах через  $G_n^5(q^2)$  и  $G_n^6(q^2)$  обозначены функции  $G_n^5$  и  $G_n^6$ , определяемые соотношениями (В.5) и вычисленные в точке  $\mathbf{v} = -1/2(q^2 + M^2 - M_n^2)$ , где аргументы  $\delta$ -функций в (В.4) обращаются в нуль.

телю  $v^{-2}$  в равенстве (В.4)? Однако это представляется маловероятным: напомним, что бесконечная сумма членов не обязательно обращается в нуль так же быстро, как ее отдельные слагаемые. В действительности существуют разумные основания полагать, что сумма вкладов парных состояний в (В.4) стремится к нулю приблизительно как  $(P^0)^{-4}$ , т. е. так же, как убывает вклад этих состояний в теории свободных полей. Чтобы убедиться в этом, мы прежде всего заметим, что если возможен переход к пределу при  $|\mathbf{P}| \rightarrow \infty$ , то правило сумм в этом пределе переходит в равенство

$$\sum_n \left[ \frac{G_n^5(-q^2) + 2q^2 G_n^6(-q^2) + q^4 G_n^2(-q^2) - q^2 G_n^3(-q^2)}{(M_n^2 + q^2 - M^2)^2} \right] = I_3(\beta), \quad (\text{В. 7})$$

которое в пределе больших  $q^2$ , если не рассматривать вопросов, связанных с изменением порядка перехода к пределу и суммирования, приводит к соотношению

$$\frac{1}{q^4} [G^5(-q^2) + 2q^2 G^6(-q^2) + q^4 G^2(-q^2) - q^2 G^3(-q^2)] = I_3(\beta), \quad (\text{В. 8})$$

где

$$G^l(-q^2) = \sum_n G_n^l(-q^2), \quad l = 2, 3, 5, 6. \quad (\text{В. 9})$$

Из соотношений (В.8) и (В.9) мы видим, что, даже если сами  $G_n$  быстро обращаются в нуль при  $q^2 \rightarrow \infty$ , из локального коммутационного соотношения, которое ведет к (В. 8), следует, что по крайней мере одна сумма величин  $G_n$  не может стремиться к нулю при  $q^2 \rightarrow \infty$ . С целью разобраться в том, что отсюда должно следовать для вклада парных состояний, мы заметим, что если соотношение (В. 6) просуммировать по  $n$ , то полный вклад этих состояний равен

$$\lim_{P^0 \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{8(P^0)^4} [G^5(4(P^0)^2) + 2q^2 G^6(4(P^0)^2) + q^4 G^2(4(P^0)^2) - q^2 G^3(4(P^0)^2)] \right\}. \quad (\text{В.10})$$

При этом мы по-прежнему игнорируем вопросы, связанные с изменением порядка суммирования и перехода к пределу. Сравнивая теперь соотношения (В. 8) и (В. 10), получаем, что фактор затухания вклада парных состояний по существу должен равняться  $P_0^{-4}$ , что и предсказывает множитель  $\nu^{-2}$ . Таким образом, быстрое стремление к нулю самих формфакторов не может изменить этого поведения.

Очевидно, что приведенный здесь анализ был далеко не строгим, однако он дает определенное указание на то, что для реальных сильно взаимодействующих адронов эффективный фактор затухания вклада парных состояний приблизительно такой же, как и в теории свободных полей. Отсюда вытекают два важных следствия:

1) Правила сумм с фиксированным  $q^2$ , по-видимому, справедливы только тогда, когда дивергенции токов  $\partial_a \xi^a$  и  $\partial_a \xi^{5a}$  „несингулярны“. Конечно, успех гипотезы о частичном сохранении аксиально-векторного тока указывает на то, что дивергенции аксиально-векторных токов, конечно, „несингулярны“. О дивергенциях же некоторых токов с изменением странности, за исключением того, что они малы, почти ничего не известно.

2) Для коммутаторов, содержащих пространственные компоненты токов, где теория свободных полей предсказывает менее сильное подавление вклада парных состояний или его полное отсутствие, мы не можем воспользоваться быстро убывающими адронными формфакторами для того, чтобы оправдать предельный переход  $|P| \rightarrow \infty$ . В частности, коммутатор двух пространственных компонент не может, следовательно, быть преобразован в правило сумм с фиксированным  $q^2$ .

### 3. Состояние класса II

Мы покажем теперь, что вклад состояний класса II исчезает в пределе бесконечного импульса, если выполняются некоторые свёрхсходящиеся правила сумм. Как уже отмечалось, мы будем пользоваться при этом кинематикой и обозначениями гл. 5 и дополнения Г.

Рассмотрим коммутатор токов  $\mathfrak{F}_{i+i_2}^0$  и  $\mathfrak{F}_{i-i_2}^0$ , обсуждаемый в дополнении Г, с тем упрощением, что состояния  $i$  и  $f$  имеют равные массы и нулевые спины, так что  $\lambda_i$  и  $\lambda_f$  всегда равны нулю. В коммутаторе двух изоспиновых токов одним из кандидатов в состояние  $m$  (фиг. В. 1, б) является  $\rho$ -мезон. Вклад этого состояния в тензорную функцию  $A^{\Pi\mu\nu}$  равен

$$A_{\rho}^{\Pi\mu\nu} = C\delta(q'^2 - M_{\rho}^2)T^{\mu\nu}, \quad (\text{В. 11})$$

где  $G$  — константа,  $\epsilon_{\mu}^* T^{\mu\nu}$  — амплитуда процесса  $i +$  (изоспиновый ток)  $\rightarrow \rho + f$  (мы еще не перешли в систему центра масс в  $t$ -канале),  $\epsilon_{\mu}$  — вектор поляризации  $\rho$ -мезона. Вклад  $A_{\rho}^{\Pi}$  в правило сумм при конечном  $|\mathbf{P}_i + \mathbf{P}_f|$ , поделенный на  $P_i^0 + P_f^0$  для нормировки<sup>1)</sup>, имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{P_i^0 + P_f^0} \int A_{\rho}^{\Pi 00} d(q^0 + q'^0) \Big|_{q+q' \text{ фиксирован}} = \\ & = \frac{C}{P_i^0 + P_f^0} \int \frac{\delta(q'^2 - M_{\rho}^2)}{q'^0} T^{00} dq'^2 \Big|_{q+q' \text{ фиксирован}}. \end{aligned} \quad (\text{В. 12})$$

Это выражение после небольших алгебраических преобразований и перехода в систему центра масс в  $t$ -канале принимает вид

$$\begin{aligned} & \frac{2C}{(P_i^0 + P_f^0)^2} \int \frac{\delta(q'^2 - M_{\rho}^2) v L_{\sigma}^0 L_{\lambda}^0 T_{(t\text{-канал})}^{\sigma\lambda}}{(q'^0)^2} dq'^2 \Big|_{q+q' \text{ фиксирован}} = \\ & = \frac{2CL_{\sigma}^0 L_{\lambda}^0}{(q'^2 + M_{\rho}^2)(P_i^0 + P_f^0)^2} v T_{(t\text{-канал})}^{\sigma\lambda} \Big|_{q'^2 = M_{\rho}^2}. \end{aligned} \quad (\text{В. 13})$$

<sup>1)</sup> Напомним, что множитель  $P_i^0 + P_f^0$  всегда сокращается в обеих частях правил сумм, соответствующих двум временным компонентам токов.



Наша цель сейчас заключается в том, чтобы найти предел величины, стоящей в правой части соотношения (В.13), при  $|\mathbf{P}_i + \mathbf{P}_f| \rightarrow \infty$ . Прежде всего рассмотрим кинематику. Учитывая то, что мы переходим к пределу бесконечного импульса при фиксированных  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{q}'$  и при  $(\mathbf{P}_i + \mathbf{P}_f) \cdot \mathbf{q} = (\mathbf{P}_i + \mathbf{P}_f) \cdot \mathbf{q}' = 0$ , можно проверить, что условие  $q'^2 = M_\rho^2$  приводит для  $M_i = M_f$  к равенствам

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{1}{2} (\mathbf{q}'^2 + M_\rho^2)^{1/2} (P_i^0 + P_f^0), \\ t &= -(\mathbf{q} - \mathbf{q}')^2, \\ q^2 &= M_\rho^2 + \mathbf{q}'^2 - \mathbf{q}^2. \end{aligned} \quad (\text{В. 14})$$

Из этих равенств следует, что рассматриваемое состояние смещается к  $|\mathbf{v}| = \infty$  при  $|\mathbf{P}_i + \mathbf{P}_f| \rightarrow \infty$ . Возвращаясь теперь к формуле (В.13), нетрудно получить вклад этого состояния в предельное выражение. Из приложения Г следует, что при  $|\mathbf{P}_i + \mathbf{P}_f| \rightarrow \infty$  величина

$$(P_i^0 + P_f^0)^{-1} L_0^0 \rightarrow 0,$$

а

$$(P_i^0 + P_f^0)^{-1} L_r^0 \rightarrow -[\sqrt{2} |\mathbf{p}| (1 - z^2)^{1/2}]^{-1} (\boldsymbol{\varepsilon}_+)_r,$$

где  $\boldsymbol{\varepsilon}_+$  — вектор, выделяющий поперечные спиральные состояния в системе центра масс в  $t$ -канале. Все вместе это дает для вклада  $\rho$ -состояния в пределе бесконечного импульса следующее выражение:

$$\begin{aligned} & \lim_{|\mathbf{P}_i + \mathbf{P}_f| \rightarrow \infty} \frac{C}{(q'^2 + M_\rho^2) |\mathbf{p}|^2} \mathbf{v} \tilde{T}_{1-1}(\mathbf{v}, t, q^2) \Big|_{\mathbf{q} + \mathbf{q}' \text{ фиксирован}} = \\ & = \frac{C}{(q'^2 + M_\rho^2) |\mathbf{p}|^2} \lim_{\mathbf{v} \rightarrow \infty} \mathbf{v} \tilde{T}_{1-1}(\mathbf{v}, t, q^2) \Big|_{q^2, t \text{ фиксирован}}, \end{aligned} \quad (\text{В. 15})$$

где  $\tilde{T}_{1-1}$  — приведенная спиральная амплитуда процесса  $\rho + (\text{изоспиновый ток}) \rightarrow f + \bar{i}$ . Кроме того, мы использовали соотношение (В.14), чтобы заменить предел  $|\mathbf{P}_i + \mathbf{P}_f| \rightarrow \infty$  на  $\mathbf{v} \rightarrow \infty$ .

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

В настоящем приложении мы выведем правила сумм, сформулированные в гл. 5. Будем исходить из равенства

$$\frac{1}{2} \int \hat{A}_{ab}^{00}(P_i, P_f, q, q'; \lambda_f, \lambda_i) d(q^0 + q'^0) \Big|_{q+q' \text{ фиксирован}} = \\ = i f_{abc} \hat{G}_c^0(P_i, P_f; \lambda_f, \lambda_i), \quad (\text{Г. 1})$$

где

$$\hat{A}_{ab}^{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi} \int e^{i/2t(q+q') \cdot x} \times \\ \times \langle f(\mathbf{P}_f, \lambda_f) | [\mathfrak{F}_a^\mu\left(\frac{x}{2}\right), \mathfrak{F}_b^\nu\left(-\frac{x}{2}\right)] | i(\mathbf{P}_i, \lambda_i) \rangle d^4x, \quad (\text{Г. 2}) \\ \hat{G}_c^\mu = \langle f(\mathbf{P}_f, \lambda_f) | \mathfrak{F}_c^\mu(0) | i(\mathbf{P}_i, \lambda_i) \rangle;$$

$\lambda_i$  и  $\lambda_f$  — спиральности состояний  $i$  и  $f$ , а разность  $q' - q$  определяется соотношением  $q' - q = P_i - P_f$ . Мы используем шляпки ( $\wedge$ ), чтобы отличать величины, входящие в соотношения (Г.1) и (Г.2), от соответствующих величин  $A^{\mu\nu}$  и  $G^\mu$  в системе центра масс в  $t$ -канале, определенных равенствами (5.3).

Чтобы получить правило сумм с фиксированными  $q^2$  и  $q'^2$  из соотношения с фиксированной суммой  $q + q'$ , мы перейдем к пределу  $\mathbf{P}_i + \mathbf{P}_f \rightarrow \infty$  вдоль направления, перпендикулярного  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{q}'$ . С этой целью положим

$$\mathbf{P}_i + \mathbf{P}_f = \frac{\mathbf{q} \times \mathbf{q}'}{|\mathbf{q} \times \mathbf{q}'|} |\mathbf{P}_i + \mathbf{P}_f| \quad (\text{Г. 3})$$

и затем устремим  $|\mathbf{P}_i + \mathbf{P}_f|$  к бесконечности. Так как мы собираемся перейти к пределу под знаком интеграла, потребуем, чтобы величина

$$\nu = \frac{(P_i + P_f) \cdot (q + q')}{4} = \frac{(P_i^0 + P_f^0)(q^0 + q'^0)}{4}$$

оставалась фиксированной: в результате мы получим правило сумм, в котором  $\nu$  будет переменной интегрирования. (Интегрирование по  $z$  в гл. 5 эквивалентно интегрированию по  $\nu$ .) В пределе бесконечного импульса

массы  $q^2$  и  $q'^2$ , связанные с токами, и квадрат переданного импульса принимают вид

$$q^2 \rightarrow -q^2, \quad q'^2 \rightarrow -q'^2, \quad t \rightarrow -(q - q')^2. \quad (\Gamma.4)$$

Единственным осложнением, возникающим при этом предельном переходе, является необходимость учитывать спиновые индексы  $\mu, \nu, \lambda_i$  и  $\lambda_f$  в  $\hat{A}^{\mu\nu}$  и в  $\hat{G}^\mu$ , что мы будем делать, предварительно преобразовав величины  $\hat{A}^{\mu\nu}$  и  $\hat{G}^\mu$  к системе центра масс в  $t$ -канале.

Величина  $\hat{A}^{\mu\nu}$ , входящая в (Г.1), связана с соответствующей величиной  $A^{\mu\nu}$  в системе центра масс в  $t$ -канале, определяемой выражением (Б.3), преобразованием Лоренца

$$\hat{A}^{\mu\nu}(\lambda_f, \lambda_i) = \sum_{\substack{\mu'\nu' \\ \lambda_f'\lambda_i'}} L_{\mu'\nu'}^\mu L_{\lambda_f'\lambda_i}^\nu R_{\lambda_f'\lambda_f}^f A^{\mu'\nu'}(\lambda_f', \lambda_i') R_{\lambda_i'\lambda_i}^i, \quad (\Gamma.5)$$

где  $L_{\nu'}^\mu$  — преобразование Лоренца, переводящее систему центра масс в  $t$ -канале в систему, в которой  $|\mathbf{P}_i + \mathbf{P}_f|$  стремится к бесконечности;  $R$  — соответствующие матрицы, которые действуют на индексы спиральности. Так как система центра масс в  $t$ -канале и система, в которой  $|\mathbf{P}_i + \mathbf{P}_f| \rightarrow \infty$ , не могут быть одновременно физическими, то преобразование Лоренца  $L_{\nu'}^\mu$  должно быть комплексным. Это, однако, не приводит к каким-либо трудностям.

Преобразование Лоренца  $L_{\nu'}^\mu$  является функцией  $q^0 + q'^0$ , переменной интегрирования в соотношении (Г.1), так что  $L_{\nu'}^\mu$  и матрицы преобразования спиральностей нельзя просто вынести из под знака интеграла в правиле сумм. Однако зависимость  $L_{\nu'}^\mu$  от  $q^0 + q'^0$  оказывается очень простой. При любом значении переменной  $q^0 + q'^0$  матрица  $L_{\nu'}^\mu$  преобразует импульсы  $P_i$  и  $P_f$  в системе центра масс в  $t$ -канале

$$P_i = [(2\sqrt{t})^{-1}(t + M_i^2 - M_f^2), -\mathbf{p}] \quad \text{и} \\ P_f = [(2\sqrt{t})^{-1}(t + M_f^2 - M_i^2), \mathbf{p}]$$

в импульсы в системе, в которой мы устремляем  $|\mathbf{P}_i + \mathbf{P}_f|$  к бесконечности. Далее, любые два преобразования Лоренца, обладающие этим свойством, могут отличаться самое большее на поворот вокруг направления импульса  $\mathbf{p}$  в системе центра масс в  $t$ -канале<sup>1)</sup>. Таким образом, зависящая от  $(q^0 + q'^0)$  часть преобразования  $L_v^\mu$  может быть только вращением вокруг  $\mathbf{p}$ , что позволяет нам представить  $L_v^\mu$  в виде произведения

$$L_v^\mu(q^0 + q'^0) = [\bar{L} D(q^0 + q'^0)]_v^\mu, \quad (\text{Г. 6})$$

где  $\bar{L}$  не зависит от  $q^0 + q'^0$ , а  $D$  является вращением вокруг направления импульса  $\mathbf{p}$ . Отсюда следует, что матрицы, преобразующие индексы спиральностей, можно также представить в виде произведений

$$\begin{aligned} R_{\lambda_f \lambda_f'}^i(q^0 + q'^0) &= [\bar{R}^i R_D^i(q^0 + q'^0)]_{\lambda_f \lambda_f'}, \\ R_{\lambda_i' \lambda_i}^i(q^0 + q'^0) &= [R_D^i(q^0 + q'^0) \bar{R}^i]_{\lambda_i' \lambda_i}, \end{aligned} \quad (\text{Г. 7})$$

где  $\bar{R}$  по-прежнему не зависит от  $q^0 + q'^0$ , а  $R_D$  — преобразования, соответствующие вращению на некоторый угол  $\psi$  вокруг направления  $\mathbf{p}$ , который должен быть одним и тем же для состояний  $i$  и  $f$ . Но мы знаем, как преобразуются спиральные состояния при вращениях вокруг направления их движения: они просто приобретают дополнительные фазы; поэтому мы имеем

$$\begin{aligned} R_D^i(q^0 + q'^0)_{\lambda\lambda'} &= \delta_{\lambda\lambda'} e^{i\lambda\psi(q^0 + q'^0)}, \\ R_D^i(q^0 + q'^0)_{\lambda\lambda'} &= \delta_{\lambda\lambda'} e^{-i\lambda\psi(q^0 + q'^0)}, \end{aligned} \quad (\text{Г. 8})$$

где мы учли, что в системе центра масс в  $t$ -канале состояние  $f$  имеет импульс  $\mathbf{p}$ , а состояние  $i$  — импульс  $-\mathbf{p}$ .

Далее, мы должны выяснить, как преобразуется величина  $\hat{G}^\mu$  в правой части соотношения (Г.1). В данном случае у нас есть некоторая свобода:  $\hat{G}$  зависит только

<sup>1)</sup> Импульс в системе центра масс в  $t$ -канале  $\mathbf{p}$  определяется соотношением (5.3а).

от импульсов  $P_f$  и  $P_i$ , поэтому любое преобразование Лоренца, связывающее выражения для  $P_f$  и  $P_i$  в системе центра масс в  $t$ -канале с соответствующими выражениями в системе с  $|\mathbf{P}_i + \mathbf{P}_f| \rightarrow \infty$ , оказывается подходящим. В частности, мы можем использовать не зависящие от переменной  $q^0 + q'^0$  преобразования  $\bar{L}$  и  $\bar{R}$ , определенные выше. Мы можем, следовательно, написать

$$\hat{G}^\mu(\lambda_f, \lambda_i) = \sum_{\mu', \lambda_f', \lambda_i'} \bar{L}_{\mu'}^\mu \bar{R}_{\lambda_f \lambda_i'}^f G^{\mu'}(\lambda_f', \lambda_i') \bar{R}_{\lambda_f' \lambda_i'}^i. \quad (\Gamma.9)$$

Теперь вновь обратимся к нашему правилу сумм (Г.1). Используя соотношения (Г.5) и (Г.9), получаем

$$\frac{1}{2} \int L_\mu^0 L_\nu^0 R^f A_{ab}^{\mu\nu} R^i d(q^0 + q'^0) \Big|_{q+q' \text{ фиксирован}} = if_{abc} \bar{L}_\mu^0 \bar{R}^f G_c^\mu \bar{R}^i, \quad (\Gamma.10)$$

где подразумевается, что невыписанные индексы спиральностей расположены как в (Г.5) и (Г.9). Далее, использование соотношения (Г.7) и замена переменной интегрирования  $q^0 + q'^0$  на  $\nu$  приводят к выражению

$$\bar{R}^f \frac{2}{P_i^0 + P_f^0} \int L_\mu^0 L_\nu^0 R_D^f A_{ab}^{\mu\nu} R_D^i d\nu \Big|_{q+q' \text{ фиксирован}} \bar{R}^i = if_{abc} \bar{L}_\mu^0 \bar{R}^f G_c^\mu \bar{R}^i, \quad (\Gamma.11)$$

где мы вынесли матрицы  $\bar{R}^f$  и  $\bar{R}^i$  из под знака интеграла, так как они не зависят от  $q^0 + q'^0$ . Очевидно, что мы можем сократить на  $\bar{R}$  в обеих частях соотношения (Г.11) и, используя формулы (Г.8), привести правило сумм к виду

$$\frac{2}{P_i^0 + P_f^0} \int L_\mu^0 L_\nu^0 A_{ab}^{\mu\nu}(\lambda_f, \lambda_i) e^{i(\lambda_f - \lambda_i)\psi} d\nu \Big|_{q+q' \text{ фиксирован}} = if_{abc} \bar{L}_\mu^0 G_c^\mu(\lambda_f, \lambda_i), \quad (\Gamma.12)$$

где восстановлены индексы спиральностей. Именно в этом соотношении мы в итоге перейдем к пределу  $|\mathbf{P}_i + \mathbf{P}_f| \rightarrow \infty$ . Заметим, что переход от  $L_\nu^\mu$  к произве-

дению  $(\bar{L}D)_v^\mu$  не упростил бы выражения (Г.12), так как матрицы  $\bar{L}$  в этом случае не сократились бы.

Остается вычислить матрицы преобразований Лоренца  $L_v^\mu$  и  $\bar{L}_v^\mu$  и угол поворота  $\psi$ .

Так как векторы

$$(P_i + P_f)^\mu, \quad (P_i - P_f)^\mu, \quad (q + q')^\mu \quad \text{и} \quad \varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau} P_i^\nu P_f^\sigma (q + q')^\tau$$

линейно независимы, то  $L_v^\mu$  полностью определяется видом этих векторов в системе центра масс в  $t$ -канале и в системе, в которой  $|\mathbf{P}_i + \mathbf{P}_f|$  стремится к бесконечности. Фактически вычисление  $L_v^\mu$  сводится к решению некоторых линейных уравнений. Восстановить детали расчета мы предоставляем читателю; окончательный же результат имеет вид

$$\begin{aligned} L_0^0 &= 0, \quad L_0^r = [\mathbf{q} - \mathbf{q}']^r t^{-1/2}, \\ L_r^0 &= -[P_i^0 + P_f^0] \left[ \frac{e_+}{\sqrt{2} |\mathbf{p}| (1 - z^2)^{1/2}} \right]_r, \\ L_s^r &= - \left[ \mathbf{P}_i + \mathbf{P}_f - \frac{M_f^2 - M_i^2}{t} (\mathbf{q} - \mathbf{q}') \right]_s \times \\ &\quad \times \left[ \frac{e_+}{\sqrt{2} |\mathbf{p}| (1 - z^2)^{1/2}} \right]_s + [\mathbf{q} \times (\mathbf{q}' \times \mathbf{q}) + \\ &\quad + (\mathbf{q}' \times \mathbf{q}) \times \mathbf{q}']^r \left[ \frac{e_0}{t |\mathbf{Q}|} - \frac{z}{(1 - z^2)^{1/2}} \frac{\sqrt{2} e_+}{t |\mathbf{Q}|} \right]_s, \end{aligned} \tag{Г.13}$$

где мы опустили члены порядка  $|\mathbf{P}_i + \mathbf{P}_f|^{-1}$  при  $|\mathbf{P}_i + \mathbf{P}_f| \rightarrow \infty$ . Здесь  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{Q}$  — импульсы в системе центра масс в  $t$ -канале, определяемые равенством (5.3а),  $z$  — косинус угла рассеяния в системе центра масс в  $t$ -канале [соотношение (5.5)], а векторы  $e$  определяются соотношениями (5.6). При получении выражений (Г.13) существенно использовались соотношения (Г.4), (5.4) и (5.5). То, что в формулы (Г.13) входит вектор  $e_+$ , а не  $e_-$ , является следствием соотношения (Г.3); если бы мы устремили  $\mathbf{P}_i + \mathbf{P}_f$  к бесконечности в противоположном направлении, то вектор  $e_+$  заменился бы на  $e_-$ .

Из обсуждения соотношения (Г.6), где мы впервые ввели преобразование  $L_v^\mu$ , вытекает, что мы можем выбрать в качестве  $\bar{L}_v^\mu$  преобразование  $L_v^\mu$ , вычисленное

при некотором частном значении  $q^0 + q'^0$  или, что эквивалентно, при некотором частном значении  $z$ , так как, согласно (5.5),  $z$  в сущности равно  $v$ , а  $4v = (q^0 + q'^0) \times \times (P_i^0 + P_f^0)$ . Наиболее удобным оказывается выбор значения  $z = 0$ , который приводит к выражениям

$$\begin{aligned} \bar{L}_0^0 &= 0, \quad \bar{L}_0^r = [\mathbf{q} - \mathbf{q}']^r t^{-1/2}, \\ \bar{L}_r^0 &= -[\mathbf{P}_i^0 + \mathbf{P}_f^0] \left[ \frac{\mathbf{d}_+}{\sqrt{2} |\mathbf{p}|} \right]_r, \\ \bar{L}_s^r &= -\left[ \mathbf{P}_i + \mathbf{P}_f - \frac{M_f^2 - M_i^2}{t} (\mathbf{q} - \mathbf{q}') \right]^r \left[ \frac{\mathbf{d}_+}{\sqrt{2} |\mathbf{p}|} \right]_s + \\ &\quad + [\mathbf{q} \times (\mathbf{q}' \times \mathbf{q}) + (\mathbf{q}' \times \mathbf{q}) \times \mathbf{q}']^r \left[ \frac{\mathbf{d}_0}{t |\mathbf{Q}|} \right]_s, \end{aligned} \quad (\text{Г.14})$$

где векторы  $\mathbf{d}_+$  и  $\mathbf{d}_0$  определяются соотношениями (5.6) и опущены члены порядка  $|\mathbf{P}_i + \mathbf{P}_f|^{-1}$ .

Угол  $\psi$  можно вычислить, сравнивая преобразования  $L_r^0$  и  $\bar{L}_s^0$ . Для этого удобно ввести специальную систему ортонормированных векторов  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  в  $t$ -канале, выбранных так, что

$$\mathbf{p} = |\mathbf{p}| \mathbf{e}_3 \quad \text{и} \quad \mathbf{Q} = |\mathbf{Q}| [z \mathbf{e}_3 + (1 - z^2)^{1/2} \mathbf{e}_1].$$

С помощью этих векторов преобразование  $L_r^0$  можно представить в виде

$$L_r^0 = -\frac{P_i^0 + P_f^0}{2|\mathbf{p}|} \left[ \mathbf{e}_3 - \frac{z}{(1 - z^2)^{1/2}} \mathbf{e}_1 - \frac{i}{(1 - z^2)^{1/2}} \mathbf{e}_2 \right]_r. \quad (\text{Г.15})$$

Это выражение можно записать как  $\sum_s \bar{L}_s^0 D_r^s$ , где

$$\bar{L}_s^0 = -\frac{P_i^0 + P_f^0}{2|\mathbf{p}|} (\mathbf{e}_3 - i \mathbf{e}_2)_s, \quad (\text{Г.16})$$

а  $D$  — матрица поворота вокруг направления  $\mathbf{e}_3$  на комплексный угол  $\psi$ , определяемый соотношениями

$$\cos \psi = (1 - z^2)^{-1/2}, \quad \sin \psi = iz (1 - z^2)^{-1/2}.$$

Теперь довольно просто вычислить  $\exp [i(\lambda_f - \lambda_i) \psi]$ :

$$e^{i(\lambda_f - \lambda_i) \psi} = (\cos \psi + i \sin \psi)^{(\lambda_f - \lambda_i)} = \left[ \frac{1 - z}{1 + z} \right]^{1/2 (\lambda_f - \lambda_i)}. \quad (\text{Г.17})$$

Чтобы получить правило сумм с фиксированными  $q^2$  и  $q'^2$ , вернемся к соотношению (Г.12). Подставляя в него выражения (Г.13) и (Г.14) для  $L_v^\mu$  и  $\bar{L}_v^\mu$  и (Г.18) для угла поворота и сокращая обе части на  $P_i^0 + P_f^0$ , получаем

$$\int \left\{ \frac{(\mathbf{e}_+)_r (\mathbf{e}_+)_s A_{ab}^{rs}}{|\mathbf{p}|^2 (1-z^2)} \left[ \frac{1-z}{1+z} \right]^{1/2 (\lambda_f - \lambda_i^-)} \right\} dv = - \frac{if_{abc}}{\sqrt{2} |\mathbf{p}|} (\mathbf{d}_+)_r G_c^r, \quad (\text{Г.18})$$

где в соответствии с условиями (Г.4) интегрирование должно проводиться при фиксированных  $q^2$  и  $q'^2$ , равных  $-q^2$  и  $-q'^2$  соответственно. Замена переменной интегрирования  $v$  на  $z$  и сокращение некоторых множителей приводит к правилу сумм (5.8).

Во второй половине § 2 настоящей главы мы обсуждали правило сумм, вытекающее из коммутатора, содержащего пространственную компоненту тока. Это правило сумм получается из коммутатора величин  $\mathfrak{S}_1^0$  и  $\mathfrak{S}_2 \cdot \mathbf{q}$  и выводится следующим образом. Исходим из соотношения (Г.1), где величина  $A_{ab}^{00}$  заменена на  $\hat{A}_{12r}^{0r} q_r$ , а величина  $\hat{G}_c^0$  — на  $\hat{G}_3^r q_r$ . Сохранение тока позволяет нам заменить  $\hat{A}_{12r}^{0r} q_r$  на  $-\hat{A}_{12r}^{00} q_0$ ; поэтому с интегралом можно поступить точно так же, как и выше, за исключением того, что теперь нужно учитывать дополнительный множитель  $q_0$ , который в случае  $M_f = M_i$  и  $q^2 = q'^2$  ( $q^2 = q'^2$  в пределе бесконечного импульса) равен  $q^0 = 2v(P_i^0 + P_f^0)^{-1}$ . Правая часть равенства преобразуется при переходе в систему центра масс в  $t$ -канале с помощью соотношения  $q_r \hat{G}_3^r = q_r \bar{L}_\mu^r G_3^\mu = q_r \bar{L}_s^r G_3^s$ , которое является следствием того, что  $G_3^0 = 0$  в случае сохраняющегося тока. Окончательный результат (когда  $M_f = M_i$  и  $q^2 = q'^2$ ) имеет вид

$$-2 \int \left\{ \frac{(\mathbf{e}_+)_r (\mathbf{e}_+)_s A_{12}^{rs}}{|\mathbf{p}|^2 (1-z^2)} \left[ \frac{1-z}{1+z} \right]^{1/2 (\lambda_f - \lambda_i^-)} \right\} v dv = i |\mathbf{Q}| (\mathbf{d}_0)_r G_3^r. \quad (\text{Г.19})$$



Правило сумм (5.19) есть частный случай соотношения (Г.19).

### ПРИЛОЖЕНИЕ Д

Спиральные амплитуды Гелл-Манна, Голдбергера, Лоу, Маркса и Закерайзена (ГГЛМЗ) [9] с сохраняющейся четностью определяются соотношением

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{\lambda_c \lambda_d; \lambda_a \lambda_b}^{\pm} = \tilde{T}_{\lambda_c \lambda_d; \lambda_a \lambda_b} \pm (-1)^{S_c + S_d - \nu} (-1)^{\lambda_a - \lambda_b + M} \times \\ \times \eta_c \eta_d \tilde{T}_{-\lambda_c - \lambda_d; \lambda_a \lambda_b}, \end{aligned} \quad (\text{Д.1})$$

где  $\tilde{T}_{\lambda_c \lambda_d; \lambda_a \lambda_b}$  — приведенная спиральная амплитуда [соотношение (5.23)] процесса  $a + b \rightarrow c + d$ ;  $M = \text{Max}(|\lambda_a - \lambda_b|, |\lambda_c - \lambda_d|)$ ;  $\eta_c, \eta_d$  — четности состояний  $c$  и  $d$ ;  $S_c$  и  $S_d$  — спины состояний  $c$  и  $d$ ;  $\nu = 1/2$ , если  $S_c + S_d$  — полуцелое число, и  $\nu = 0$ , если  $S_c = S_d$  — целое число. Выбор фаз такой же, как у Джакоба и Вика.

Если четность сохраняется, то соотношение (Д.1) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{\lambda_c \lambda_d; \lambda_a \lambda_b}^{\pm} = \tilde{T}_{\lambda_c \lambda_d; \lambda_a \lambda_b} \pm (-1)^{S_a + S_b - \nu} \times \\ \times (-1)^{\lambda_c - \lambda_d + M} \eta_a \eta_b \tilde{T}_{\lambda_c \lambda_d; -\lambda_a - \lambda_b}. \end{aligned} \quad (\text{Д.2})$$

Асимптотическое поведение амплитуд  $\tilde{T}$  при больших значениях  $z$  косинуса угла между импульсами состояний  $a$  и  $c$  определяется моделью полюсов Редже. Энергетическую переменную мы обозначим через  $t$ . Из приложения А к работе ГГЛМЗ [9] следует, что

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{\lambda_c \lambda_d; \lambda_a \lambda_b}^{+} \rightarrow z^{-M} \{ \beta_{ee}^{+} [z^{\alpha_{ee}(t)} + (-z)^{\alpha_{ee}(t)}] + \\ + \beta_{oo}^{+} [z^{\alpha_{eo}(t)} - (-z)^{\alpha_{oo}(t)}] \} + \\ + z^{-M-1} \{ \beta_{eo}^{+} [z^{\alpha_{eo}(t)} + (-z)^{\alpha_{eo}(t)}] + \beta_{oe}^{+} [z^{\alpha_{oe}(t)} - (-z)^{\alpha_{oe}(t)}] \}, \end{aligned} \quad (\text{Д.3})$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{\lambda_c \lambda_d; \lambda_a \lambda_b}^{-} \rightarrow z^{-M} \{ \beta_{eo}^{-} [z^{\alpha_{eo}(t)} + (-z)^{\alpha_{eo}(t)}] + \\ + \beta_{oe}^{-} [z^{\alpha_{oe}(t)} - (-z)^{\alpha_{oe}(t)}] \} + \\ + z^{-M-1} \{ \beta_{ee}^{-} [z^{\alpha_{ee}(t)} + (-z)^{\alpha_{ee}(t)}] + \beta_{oo}^{-} [z^{\alpha_{oo}(t)} - (-z)^{\alpha_{oo}(t)}] \}, \end{aligned}$$

где  $\alpha_{ee}$  — ведущая траектория с положительными сигнатурой и четностью (типа  $0^+, 2^+, 4^+, \dots$ ),  $\alpha_{oo}$  — ведущая траектория с отрицательными сигнатурой и четностью (типа  $1^-, 3^-, 5^-, \dots$ ),  $\alpha_{eo}$  — ведущая траектория с положительной сигнатурой и отрицательной четностью (типа  $0^-, 2^-, 4^-, \dots$ ),  $\alpha_{oe}$  — ведущая траектория с отрицательной сигнатурой и положительной четностью (типа  $1^+, 3^+, 5^+, \dots$ ) и  $\beta$  — коэффициенты, зависящие от  $t$  и спиральностей  $\lambda$ .

Заметим, что вклад данной траектории в (Д.3) является либо четным, либо нечетным по  $z$ . Это справедливо не только для асимптотической формы амплитуд  $\tilde{T}^\pm$ , но и в общем случае. Например, если  $M$  — четное число, то вклад состояния с четным спином и положительной четностью ( $\alpha_{ee}$ ) в амплитуду  $\tilde{T}^+$  является четным по  $z$ , тогда как состояния с четным спином и отрицательной четностью ( $\alpha_{eo}$ ) дают вклад в ту часть амплитуды  $\tilde{T}^+$ , которая нечетна по  $z$ .

Полезным свойством амплитуд с сохраняющейся четностью является то, что они сами или их простые линейные комбинации часто оказываются четными или нечетными по  $z$ . Следствия, вытекающие из этого свойства, легче всего обнаружить на примерах.

Амплитуды в правилах сумм (5.17) — (5.19) представляют собой приведенные амплитуды  $\tilde{T}_{\lambda\lambda'; 1-1}$  процесса (изоспиновые токи)  $\rightarrow p\bar{p}$  с различными наборами спиральностей  $\lambda (= \pm 1/2)$  и  $\lambda' (= \pm 1/2)$ . Так как изоспиновые токи в амплитуде  $\tilde{T}_{\lambda\lambda'; 1-1}$  имеют противоположные спиральности и, следовательно, параллельные спины, то соответствующий им полный спин  $S$  равен 2. Кроме того, им соответствует изотопический спин  $I = 1$ . Так как величина  $(-1)^{S+I+L}$ , где  $L$  — орбитальный момент, должна равняться единице для тождественных бозонов, то  $L$  — нечетно и потому только состояния с отрицательной четностью могут давать вклад в амплитуду. Таким образом, из соотношения (Д.3) мы заключаем, что амплитуда  $\tilde{T}_{\lambda\lambda'; 1-1}^+$  нечетна, а амплитуда  $\tilde{T}_{\lambda\lambda'; 1-1}^-$  четна по  $z$ . Только нечетные амплитуды  $\tilde{T}_{\lambda\lambda'; 1-1}^+$ , абсорбтивные

части которых являются четными, дают вклад в правила сумм (5.17) и (5.18), и только четная амплитуда  $\tilde{T}_{\lambda\lambda'; 1-1}^-$  дает вклад в соотношение (5.19). Заметим, что амплитуда  $\tilde{T}_{\lambda\lambda'; 1-1}^-$  обратилась бы в нуль, если бы нуклоны были бесспиновыми: в результате своеобразное правило сумм (5.19) не имеет места, если не учитывать спина.

Для амплитуд процесса  $\gamma\gamma \rightarrow B\bar{B}$ , рассмотренных в качестве примера сверхсходимости, можно получить аналогичные результаты, за исключением того, что изотопический спин здесь не играет роли, и потому мы имеем  $(-1)^{S+L} = 1$  при  $S=2$ . Так как  $L$  должно быть четным, то теперь амплитуда  $\tilde{T}_{\lambda\lambda'; 1-1}^+$  является четной, а амплитуда  $\tilde{T}_{\lambda\lambda'; 1-1}^-$  — нечетной.

В приведенных выше примерах мы использовали параллельность спинов. Однако развитая техника применима не только к такой конфигурации. Для реакции  $\gamma\gamma \rightarrow B\bar{B}$  амплитуды

$$\tilde{T}_{1/2-1/2; 11} \pm \tilde{T}_{1/2-1/2; -1-1} = \tilde{T}_{1/2-1/2; 11}^\pm$$

с обычным выбором фаз соответствуют рассеянию, когда начальные состояния соответственно четны и нечетны по спинам фотонов. Тогда из аргументов, аналогичных приведенным ранее, следует, что только состояния с четным  $L$  дают вклад в амплитуду  $\tilde{T}^+$  и только состояния с нечетным  $L$  — в  $\tilde{T}^-$ . Следовательно, обе амплитуды  $\tilde{T}_{1/2-1/2; 11}^+$  и  $\tilde{T}_{1/2-1/2; 11}^-$  нечетны по  $z$ . Обобщение на частицы, отличные от фотонов, очевидно; необходимо только помнить, что амплитуда  $\tilde{T}_{\lambda\lambda'; \mu\mu'} \pm \tilde{T}_{\lambda\lambda'; -\mu'-\mu}$  (четна / нечетна) по спинам начального состояния. Разумеется, можно использовать и симметризацию по спинам конечного состояния.

#### Л и т е р а т у р а

1. Fubini S., Nuovo Cimento, 43A, 475 (1966).  
 Dashen R. F., Gell-Mann M., Proceedings of the Third Coral Gables Conference, San Francisco, 1966.  
 Muzinich I. J., Phys. Rev., 151, 1206 (1966).

2. Jacob-M., Wick G. C., *Ann. of Phys.*, **7**, 404 (1959).
3. Bég M. A. B., *Phys. Rev. Letters*, **17**, 333 (1966).
4. Trueman T. L., *Phys. Rev. Letters*, **17**, 1198 (1966).
5. Pagels H., *Phys. Rev. Letters*, **18**, 316 (1967).  
Nagari H., *Phys. Rev. Letters*, **18**, 319 (1967).
6. Chew G. F., Frautschi S. C., Mandelstam S., *Phys. Rev.*, **126**, 1202 (1962). (См. перевод в сб. «Теория сильных взаимодействий при больших энергиях», ИЛ, 1963.)
7. Bronzan J. B., Gerstein I. S., Lee B. W., Low F. E., *Phys. Rev. Letters*, **18**, 32 (1967).
8. Singh V., *Phys. Rev. Letters*, **18**, 36 (1967).
9. Gell-Mann M., Goldberger M. L., Low F. E., Marx E., Zachariasen F., *Phys. Rev.*, **133**, B145 (1964).

# АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА ПРАВИЛ СУММ

## § 1. Введение

Если взять коммутатор  $[F_{1+t_2}^5, F_{1-t_2}^5] = 2F_3$  между  $\rho$ -мезонными состояниями, усреднить по спинам, перейти к пределу  $|\mathbf{P}| \rightarrow \infty$  и затем использовать гипотезу о частичном сохранении аксиально-векторного тока, то в результате мы получим правило сумм для  $\rho$ -рассеяния. Предполагая, что основной вклад в интеграл в правиле сумм дают промежуточные состояния  $\pi$  и  $\omega$ , получим очень простое правило сумм для констант связи  $\rho\pi\pi$  и  $\rho\omega\pi$  [1]

$$\frac{1}{3} \frac{c^2}{M_\pi^4} \left( \frac{2}{M_\rho^2} G_{\rho\pi\pi}^2 + G_{\omega\rho\pi}^2 \right) = 2, \quad (6.1)$$

$c =$  (константа, входящая в соотношение частичного сохранения аксиально-векторного тока)  $\approx \sqrt{2} M_N M_\pi^2 g_A g_\rho^{-1}$ ,

которое хорошо выполняется в эксперименте. Мы привели простой пример так называемого метода „насыщения“. Общая идея этого метода крайне проста: исходя из алгебры токов или сверхсходимости, записываем правила сумм и предполагаем, что им приближенно удовлетворяет (их насыщает) некоторый набор одночастичных и резонансных промежуточных состояний. В результате, разумеется, мы получаем большое число алгебраических соотношений между константами связи и формфакторами токов.

Метод насыщения не всегда дает хорошие результаты. Иногда, как, например, в правиле сумм (6.1), он работает хорошо, но бывают случаи, когда он совсем неприменим. По-видимому, неудачи связаны с тем, что мы удерживаем недостаточное число резонансов при насыщении, или с тем, что не учитываем нерезонансного непрерывного спектра<sup>1)</sup>. Однако в целом идея

<sup>1)</sup> В правило сумм Кабиббо — Радикати значительный вклад дает нерезонансное  $\pi N$ -состояние с равным нулю орбитальным моментом [ср. (4.24)].

использования приближенных правил сумм для получения информации о константах связи и формфакторах является привлекательной и достаточно успешной. Поэтому она заслуживает дальнейшего изучения.

Одной из основных трудностей в программе, аналогичной той, которую мы наметили выше, является то, что существует ошеломляюще большое число правил сумм. Можно попытаться найти некоторую схему насыщения, которая одновременно удовлетворяла бы некоторому достаточно большому набору правил сумм. Почти очевидно, что для правил сумм, вытекающих из алгебры токов, эта проблема в основном является теоретико-групповой. Она и будет предметом нашего рассмотрения в настоящей главе; к проблеме насыщения свёрхсходящихся правил сумм мы обращаться не будем.

## § 2. Алгебраическая форма правил сумм

Обозначим через  $|N\lambda P\rangle$  адронное состояние с определенной массой, спиральностью  $\lambda$  и импульсом  $P$ , нормированное<sup>1)</sup> на  $\delta$ -функцию

$$\langle P | P' \rangle = (2\pi)^3 \delta^3(P - P').$$

При этом подразумевается, что масса, спин и внутренние квантовые числа включены в индекс  $N$ . Тогда правило сумм алгебры токов, следующее из коммутатора

$$F_a(q) = \int e^{iq \cdot x} \mathcal{F}_a^0(x) d^3x \quad \text{и} \quad F_b(q') = \int e^{iq' \cdot x} \mathcal{F}_b^0(x) d^3x,$$

будет иметь вид

$$\begin{aligned} \langle N_1 \lambda_1 P_1 | [F_a(q), F_b(q')] | N_2 \lambda_2 P_2 \rangle = \\ = if_{abc} \langle N_1 \lambda_1 P_1 | F_c(q + q') | N_2 \lambda_2 P_2 \rangle. \end{aligned} \quad (6.2)$$

<sup>1)</sup> Отметим, что эта нормировка отличается от нормировки, принятой в гл. 4.

После разложения по полной системе промежуточных состояний и сокращения на  $\delta$ -функцию мы получаем выражение

$$\begin{aligned} \sum_{N_3 \lambda_3} & \left[ \langle N_1 \lambda_1 (\mathbf{P} + \frac{1}{2} \mathbf{q}) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \mathbf{q}' \mid \mathfrak{F}_a^0(0) \mid N_3 \lambda_3 (\mathbf{P} - \frac{1}{2} \mathbf{q}) + \frac{1}{2} \mathbf{q}' \rangle_c \times \right. \\ & \times \langle N_3 \lambda_3 (\mathbf{P} + \frac{1}{2} \mathbf{q}') - \\ & \left. - \frac{1}{2} \mathbf{q} \mid \mathfrak{F}_b^0(0) \mid N_2 \lambda_2 (\mathbf{P} - \frac{1}{2} \mathbf{q}') - \frac{1}{2} \mathbf{q} \rangle_c - \right. \\ & \left. - \begin{array}{l} a \leftrightarrow b \\ \mathbf{q} \leftrightarrow \mathbf{q}' \end{array} \right] + \text{Парные члены} = \\ & = if_{abc} \langle N_1 \lambda_1 \mathbf{P} + \frac{1}{2} (\mathbf{q} + \mathbf{q}') \mid \mathfrak{F}_c^0(0) \mid N_2 \lambda_2 \mathbf{P} - \\ & - \frac{1}{2} (\mathbf{q} + \mathbf{q}') \rangle_c, \end{aligned} \tag{6.3}$$

$$\mathbf{P} \equiv \frac{1}{2} (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2),$$

где мы проделали следующие две операции. Во-первых, мы выделили вклад парных состояний<sup>1)</sup> (ср. гл. 4, § 5 и приложение В); предполагается, что матричные элементы  $\langle |F| \rangle_c$  содержат вклады только связанных диаграмм. Во-вторых, мы расположили импульсы состояний таким образом, чтобы выявить одну неприятную особенность правила сумм: выражение (6.3) было бы лучше, если бы матричный элемент имел вид

$$\langle \mathbf{P} + \frac{1}{2} \mathbf{k} \mid \mathfrak{F}^0(0) \mid \mathbf{P} - \frac{1}{2} \mathbf{k} \rangle,$$

где  $\mathbf{k}$  — некоторый импульс.

Далее мы знаем, что переход к пределу  $|\mathbf{P}| \rightarrow \infty$  устраняет парные состояния, которые, очевидно, нежелательны в том случае, когда требуется аппроксимировать правило сумм резонансами. Оказывается, что этот предел позволяет устранить и другое неприятное

<sup>1)</sup> Состояния „класса II“ из приложения В включены в парные члены.

свойство выражения (6.3), упомянутое выше. Если перейти к пределу  $|\mathbf{P}| \rightarrow \infty$  с  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{k}' = 0$ , то матричный элемент

$$\langle N_1 \lambda_1 \mathbf{P} + \mathbf{k} | \mathfrak{F}^0(0) | N_2 \lambda_2 \mathbf{P} + \mathbf{k}' \rangle$$

в пределе зависит только от разности  $\mathbf{k} - \mathbf{k}'$  и не зависит от суммы  $\mathbf{k} + \mathbf{k}'$ . Доказательство. Для больших  $|\mathbf{P}|$  и для  $\mathbf{k}$ , перпендикулярных  $\mathbf{P}$ , вектор  $\mathbf{P} + \mathbf{k}$  отличается от  $\mathbf{P}$  только бесконечно малым вращением, т. е.

$$\exp\left(-\frac{i\mathbf{P} \times \mathbf{k} \cdot \mathbf{J}}{|\mathbf{P}|^2}\right) |N\lambda\mathbf{P}\rangle = |N\lambda\mathbf{P} + \mathbf{k}\rangle + O(|\mathbf{P}|^{-2}),$$

где  $\mathbf{J}$  — оператор углового момента. Поэтому

$$\begin{aligned} \langle N_1 \lambda_1 \mathbf{P} + \mathbf{k} | \mathfrak{F}^0(0) | N_2 \lambda_2 \mathbf{P} + \mathbf{k}' \rangle &= \\ &= \langle N_1 \lambda_1 \mathbf{P} | \exp\left(\frac{i\mathbf{P} \times \mathbf{k} \cdot \mathbf{J}}{|\mathbf{P}|^2}\right) \mathfrak{F}^0(0) \times \\ &\times \exp\left(-\frac{i\mathbf{P} \times \mathbf{k}' \cdot \mathbf{J}}{|\mathbf{P}|^2}\right) | N_2 \lambda_2 \mathbf{P} \rangle + O(|\mathbf{P}|^{-2}) = \\ &= \langle N_1 \lambda_1 \mathbf{P} | \exp\left[\frac{i\mathbf{P} \times (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{J}}{|\mathbf{P}|^2}\right] \times \\ &\quad \times \mathfrak{F}^0(0) | N_2 \lambda_2 \mathbf{P} \rangle + O(|\mathbf{P}|^{-2}), \end{aligned}$$

где мы использовали то обстоятельство, что  $\mathfrak{F}^0(0)$  — скаляр относительно вращений и что

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{i\mathbf{P} \times \mathbf{k} \cdot \mathbf{J}}{|\mathbf{P}|^2}\right) \exp\left(-\frac{i\mathbf{P} \times \mathbf{k}' \cdot \mathbf{J}}{|\mathbf{P}|^2}\right) &= \\ &= \exp\left[\frac{i\mathbf{P} \times (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{J}}{|\mathbf{P}|^2}\right] + O(|\mathbf{P}|^{-2}). \end{aligned}$$

В пределе бесконечного импульса мы можем переписать выражение (6.3) следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{N_3 \lambda_3} \left[ \langle N_1 \lambda_1 \mathbf{P} \rightarrow \infty + \frac{1}{2} \mathbf{q}'_{\perp} | \mathfrak{F}_a^0(0) | N_3 \lambda_3 \mathbf{P} \rightarrow \infty - \frac{1}{2} \mathbf{q}'_{\perp} \rangle_c \times \right. \\ \times \langle N_3 \lambda_3 \mathbf{P} \rightarrow \infty + \frac{1}{2} \mathbf{q}_{\perp} | \mathfrak{F}_b^0(0) | N_2 \lambda_2 \mathbf{P} \rightarrow \infty - \frac{1}{2} \mathbf{q}_{\perp} \rangle_c - \\ \left. - \begin{array}{l} a \leftrightarrow b \\ \mathbf{q}_{\perp} \leftrightarrow \mathbf{q}'_{\perp} \end{array} \right] = \\ = if_{abc} \langle N_1 \lambda_1 \mathbf{P} \rightarrow \infty + \frac{1}{2} (\mathbf{q}_{\perp} + \mathbf{q}'_{\perp}) | \times \\ \times \mathfrak{F}_c^0(0) | N_2 \lambda_2 \mathbf{P} \rightarrow \infty - \frac{1}{2} (\mathbf{q}_{\perp} + \mathbf{q}'_{\perp}) \rangle_c, \quad (6.4) \end{aligned}$$



где мы опустили парные члены, которые исчезают в этом пределе, и заменили  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{q}'$  на  $\mathbf{q}_\perp$  и  $\mathbf{q}'_\perp$ , чтобы подчеркнуть, что эти импульсы перпендикулярны  $\mathbf{P}$ .

Итак, если мы определим

$$\lim_{|\mathbf{P}| \rightarrow \infty} \langle N\lambda\mathbf{P} + \frac{1}{2}\mathbf{q}_\perp \left| \mathfrak{F}_a^0(0) \right| N'\lambda'\mathbf{P} - \frac{1}{2}\mathbf{q}'_\perp \rangle \equiv \\ \equiv (N\lambda \| F_a(\mathbf{q}_\perp) \| N'\lambda'), \quad (6.5)$$

то правило сумм (6.3) можно будет записать в виде

$$\sum_{N_3\lambda_3} \left[ (N_1\lambda_1 \| F_a(\mathbf{q}_\perp) \| N_3\lambda_3) (N_3\lambda_3 \| F_b(\mathbf{q}'_\perp) \| N_2\lambda_2) - \right. \\ \left. \begin{array}{c} a \leftrightarrow b \\ \mathbf{q}_\perp \leftrightarrow \mathbf{q}'_\perp \end{array} \right] = \\ = if_{abc} (N_1\lambda_1 \| F_c(\mathbf{q}_\perp + \mathbf{q}'_\perp) \| N_2\lambda_2). \quad (6.6)$$

Следует подчеркнуть разницу между соотношениями (6.6) и (6.2). В соотношении (6.2)  $F$  — операторы в гильбертовом пространстве, действие которых приводит, например, к образованию пар из вакуума, причем матричные элементы этих операторов, как в (6.3), сложным образом зависят от импульсов. Величины  $(N\lambda \| F(\mathbf{q}_\perp) \| N'\lambda')$  в соотношении (6.6) являются просто матрицами, строки и столбцы которых характеризуются спиральностью и внутренними квантовыми числами состояний. Элементы этих матриц являются формфакторами переходов (ток)  $(N\lambda) \rightarrow (N'\lambda')$ , где „масса“ тока равна  $-\mathbf{q}_\perp^2$ .

Конечно, соотношение (6.6) полностью эквивалентно правилам сумм при бесконечном импульсе, полученным в гл. 4 и 5; преимущество соотношения (6.6) в том, что оно делает явным алгебраические свойства правил сумм. Нужно иметь в виду, что индексы  $N$  в (6.6) пробегают все адронные состояния, включая и непрерывный спектр. Идея „насыщения“ правил сумм алгебры токов состоит в нахождении приближенного решения соотношения (6.6), выраженного через матрицы  $(n\lambda \| F(\mathbf{q}_\perp) \| n'\lambda')$ , где индексы  $n$  и  $n'$  пробегают некоторый ограниченный набор одночастичных и резонансных состояний.

§ 3. Алгебра  $SU_3 \otimes SU_3$ 

В простейших схемах насыщения используются только правила сумм с  $\mathbf{q}_\perp = \mathbf{q}'_\perp = 0$  в соотношении (6.6). В этом случае соответствующие матрицы  $(N\lambda \| F(0) \| N'\lambda')$ , как можно видеть из их определения (6.5), диагональны по спиральным индексам, т. е.

$$(N\lambda \| F(0) \| N'\lambda') = \delta_{\lambda\lambda'} (N\lambda \| F(0) \| N'\lambda). \quad (6.7)$$

Посмотрим, как будет выглядеть непротиворечивая схема насыщения. Предположим, что мы имеем решение, насыщающее правила сумм при  $\mathbf{q}_\perp = \mathbf{q}'_\perp = 0$ , в котором общий индекс  $N$  заменяется индексом  $n = 1, 2, \dots, M$ , пробегающим  $M$  связанных и резонансных состояний. Тогда правила сумм будут иметь вид

$$\begin{aligned} \sum_{n_3=1}^M [(n_1\lambda \| F_a(0) \| n_3\lambda) (n_3\lambda \| F_b(0) \| n_2\lambda) - a \leftrightarrow b] = \\ = if_{abc} (n_1\lambda \| F_c(0) \| n_2\lambda), \\ \sum_{n_3=1}^M [(n_1\lambda \| F_a(0) \| n_3\lambda) (n_3\lambda \| F_b^5(0) \| n_2\lambda) - a \leftrightarrow b^5] = \\ = if_{abc} (n_1\lambda \| F_c^5(0) \| n_2\lambda), \quad (6.8) \\ \sum_{n_3=1}^M [(n_1\lambda \| F_a^5(0) \| n_3\lambda) (n_3\lambda \| F_b^5(0) \| n_2\lambda) - a \leftrightarrow b] = \\ = if_{abc} (n_1\lambda \| F_c(0) \| n_2\lambda). \end{aligned}$$

Другими словами, для каждого фиксированного  $\lambda$   $M \times M$ -матрицы  $(n\lambda \| F(0) \| n'\lambda)$  являются представлением алгебры  $SU_3 \otimes SU_3$ . Поэтому для данного  $\lambda$  проблема нахождения последовательной схемы насыщения сводится к проблеме нахождения представлений алгебры  $SU_3 \otimes SU_3$ . В зависимости от числа состояний  $M$  представление может быть либо неприводимым, либо приводимым. Если представление неприводимо, то матричные элементы  $(n\lambda \| F(0) \| n'\lambda)$  будут однозначно определяться соотношениями (6.8). Если же оно приводимо, то будет несколько свободных параметров (углы смешивания).

Однако рассматриваемая проблема связана не только лишь с теорией групп: следует также удовлетворить некоторым кинематическим ограничениям. Чтобы убедиться в этом, мы вернемся к определению матричного элемента  $(n\lambda \| F(0) \| n'\lambda)$

$$(n\lambda \| F(0) \| n'\lambda) = \lim_{|\mathbf{P}| \rightarrow \infty} \langle n\lambda \mathbf{P} | \mathfrak{F}^0(0) | n'\lambda \mathbf{P} \rangle. \quad (6.9)$$

Если состояния  $n$  и  $n'$  имеют одинаковую массу, матричный элемент  $\langle n\lambda \mathbf{P} | \mathfrak{F}^0(0) | n'\lambda \mathbf{P} \rangle$  можно переписать с помощью преобразования Лоренца вдоль направления импульса  $\mathbf{P}$  в следующем виде:

$$\begin{aligned} \langle n\lambda \mathbf{P} | \mathfrak{F}^0(0) | n'\lambda \mathbf{P} \rangle &= \left( \frac{M^2}{M^2 + \mathbf{P}^2} \right)^{1/2} \left( \frac{1}{1 - \beta^2} \right)^{1/2} \times \\ &\times \langle n\lambda \mathbf{0} | [\mathfrak{F}^0(0) + \boldsymbol{\beta} \cdot \mathfrak{F}(0)] | n'\lambda \mathbf{0} \rangle, \quad (6.10) \\ M &= M_n = M_{n'}, \end{aligned}$$

где  $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{P}/(\mathbf{P}^2 + M^2)^{1/2}$  — скорость, входящая в преобразование Лоренца, которое приводит состояние  $|n\lambda \mathbf{P}\rangle$  в состояние покоя. Соотношения (6.9) и (6.10) дают

$$\begin{aligned} (n\lambda \| F(0) \| n'\lambda) &= \langle n\lambda \mathbf{0} | \mathfrak{F}^0(0) + \mathbf{e} \cdot \mathfrak{F}(0) | n'\lambda \mathbf{0} \rangle, \quad (6.11) \\ M_n &= M_{n'}, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{e}$  — единичный вектор вдоль направления, по которому  $\mathbf{P}$  стремится к бесконечности. Спиральность  $\lambda$  теперь равна компоненте спина вдоль вектора  $\mathbf{e}$ . Если  $\mathfrak{F}^\nu$  — векторный ток, то в силу сохранения четности вклад в выражение (6.11) может давать только член с  $\mathfrak{F}^0$  (предполагаем, что спины и четности состояний  $n$  и  $n'$  одинаковы), и мы находим, что  $(n\lambda \| F(0) \| n'\lambda)$  не зависит от  $\lambda$ . С другой стороны, если  $\mathfrak{F}^\nu$  — аксиально-векторный ток, то вклад дает только член с  $\mathbf{e} \cdot \mathfrak{F}$  и  $(n\lambda \| F^5(0) \| n'\lambda)$  должно быть пропорционально  $\lambda$ . В результате мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{(n\lambda_1 \| F(0) \| n'\lambda_1)}{(n\lambda_2 \| F(0) \| n'\lambda_2)} &= 1, \quad \frac{(n\lambda_1 \| F^5(0) \| n'\lambda_1)}{(n\lambda_2 \| F^5(0) \| n'\lambda_2)} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \quad (6.12) \\ M_n &= M_{n'}. \end{aligned}$$

Для неравных масс  $M_n \neq M_{n'}$  два состояния в определении (6.9) не могут быть приведены в состояние по-

коя общим преобразованием Лоренца. В этом случае кинематические ограничения, за исключением сравнительно тривиальных, вытекающих из сохранения четности,

$$\begin{aligned}(n\lambda \| F(0) \| n'\lambda) &= (n - \lambda \| F(0) \| n' - \lambda), \\ (n\lambda \| F^5(0) \| n'\lambda) &= - (n - \lambda \| F^5(0) \| n' - \lambda),\end{aligned}\quad (6.13)$$

отсутствуют.

Непротиворечивая схема насыщения должна удовлетворять как алгебраическим соотношениям (6.8), так и кинематическим ограничениям (6.12) и (6.13).

Единственная конкретная схема насыщения, изученная во всех подробностях, включает обычный октет барионов со спином  $1/2$  и декуплет резонансов со спином  $3/2^1$ ). Существует единственное решение соотношений (6.8), (6.12) и (6.13) с индексом  $n$ , пробегающим эти состояния. При этом получается несколько предсказаний для сравнения с экспериментом:

1) Отношение  $G_D/G_F$  для матричных элементов аксиально-векторного тока между барионными состояниями получается равным  $3/2$ , что достаточно близко к экспериментальному значению.

2) Использование гипотезы о частичном сохранении аксиально-векторного тока позволяет предсказать величину  $G_{\pi NN}/G_{\pi NN^*}$  отношения  $\pi NN$ - и  $\pi NN^*$ -констант связи, которое также согласуется с экспериментом.

3) Предсказанное значение  $g_A$  оказывается равным  $5/3$ , что по крайней мере близко к экспериментальному значению  $g_A \approx 1,2$ .

Таким образом, вначале все идет хорошо, трудности же начинаются при попытке расширить схему гипотезой о том, что тот же набор состояний насыщает соотношение (6.6) при  $\mathbf{g}_\perp = 0$ , но  $\mathbf{g}'_\perp \neq 0$ . Так как матрицы  $(n\lambda \| F(0) \| n'\lambda)$  уже известны, это приводит к системе линейных однородных уравнений для матричных элементов  $(n\lambda \| F(\mathbf{q}'_\perp) \| n'\lambda')$ . Эта система имеет решение только тогда, когда аномальные магнитные моменты  $\mu_n$  и  $\mu'_p$  нейтрона и протона и момент  $\mu_{NN^*}$   $NN^*$ -перехода равны

<sup>1</sup>) См. [2] и цитируемую в этой работе литературу.

нулю. Очевидный выход из этого положения состоит в расширении схемы насыщения путем включения некоторых более высоких барионных резонансов. К сожалению, когда включаются эти дополнительные состояния, решение уравнений перестает быть единственным (представления алгебры  $SU_3 \otimes SU_3$  становятся приводимыми) и возникает несколько подгоночных параметров. Было предложено несколько различных способов включения новых состояний. Как правило, имеются три свободных параметра, которые можно выбрать таким образом, чтобы они давали точные значения для пяти величин  $G_D/G_F$ ,  $g_A$ ,  $G_{\pi NN}/G_{\pi NN^*}$ ,  $\mu_n/\mu'_p$  и  $\mu_{NN^*}/\mu'_p$ . Однако реальная проверка этих расширенных схем насыщения невозможна, пока не существует хороших экспериментальных способов определения различных параметров высших резонансов, например их магнитных моментов.

#### § 4. Более претенциозное предложение

Дашен и Гелл-Манн [3] предположили, что можно найти решение, насыщающее не просто алгебру  $SU_3 \otimes SU_3$  при  $\mathbf{q}_\perp = 0$ , а полную локальную алгебру соотношения (6.6). Если бы оказалось, что это решение описывает действительность, то оно было бы близко к реальной феноменологической модели адронов, содержащей бесконечное число связанных и резонансных состояний  $n$ , причем матричные элементы  $(n\lambda \| F(\mathbf{q}_\perp) \| n'\lambda')$  давали бы все формфакторы. Использование гипотезы о частичном сохранении аксиально-векторного тока позволило бы получить все константы связи  $G_{\pi nn'}$  пионов с различными состояниями.

Проблема нахождения непротиворечивого решения аналогична проблеме с  $\mathbf{q}_\perp = 0$ , рассмотренной в предыдущем параграфе, но гораздо сложнее ее. Снова имеются как алгебраические уравнения, вытекающие из правил сумм, так и кинематические ограничения на матричные элементы. Кинематические ограничения крайне усложняются при  $\mathbf{q}_\perp \neq 0$ . Ко времени написания этой книги не было найдено ни одного решения, интересного с физической точки зрения.

В заключение следует напомнить, что идея использования правил сумм для предсказания интересующих нас свойств адронов целиком базируется на гипотезе о доминировании одночастичных и резонансных промежуточных состояний в правилах сумм. В действительности неизвестно, насколько справедлива эта гипотеза.

#### Л и т е р а т у р а

1. Mathur V. S., Pandit L. K., Phys. Letters, **19**, 523 (1965).
2. Gerstein I. S., Lee B. W., Phys. Rev., **152**, 1418 (1966).
3. Dashen R., Gell-Mann M., Phys. Rev. Letters, **17**, 340 (1966).

#### ОСНОВНАЯ СТАТЬЯ

Dashen R., Gell-Mann M., Phys. Rev. Letters, **17**, 340 (1966).  
Representations of Local Current Algebra at Infinite Momentum.

# ПОВЕДЕНИЕ ХРОНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ

Бьёркен (ст. 14) заметил, что при  $Q^0 \rightarrow \infty$  и фиксированном  $Q$  главный член выражения  $\langle \beta | \int e^{iQ \cdot x} \times T(A(x)B(0)) d^4x | \alpha \rangle$  определяется одновременным коммутатором операторов  $A$  и  $B$ :

$$\lim_{\substack{Q^0 \rightarrow \infty \\ Q \text{ фиксирован}}} \langle \beta | \int e^{iQ \cdot x} T(A(x)B(0)) d^4x | \alpha \rangle = \\ = \frac{1}{Q^0} \left\{ i \langle \beta | \int e^{iQ \cdot x} \delta(x^0) [A(x), B(0)] d^4x | \alpha \rangle \right\} + O\left(\frac{1}{(Q^0)^2}\right). \quad (7.1)$$

Бьёркен применил этот результат к ряду задач, в которых  $A$  и  $B$  — компоненты векторного и аксиально-векторного токов.

По-видимому, наиболее интересным приложением формулы (7.1) является вычисление электромагнитных поправок к пионному  $\beta$ -распаду  $\pi^+ \rightarrow \pi^0 + e^+ + \nu_e$ . (Можно рассмотреть и другие распады с  $\Delta S = 0$ , например  $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ .) В данном случае  $A$  и  $B$  — это слабый ток  $J_h$  и электромагнитный ток  $J_{EM}$ . Величина  $Q$  представляет собой импульс виртуального фотона, и по нему, следовательно, проводится интегрирование. Соотношение (7.1) позволило Бьёркену определить поведение интегралов при больших импульсах виртуального фотона; из него следует, что радиационные поправки к пионному  $\beta$ -распаду логарифмически расходятся.

Однако проведенный в ст. 14 расчет является неполным. При вычислении вклада виртуального процесса, изображенного на фиг. 3, б ст. 14, Бьёркен опустил член, соответствующий случаю, когда процесс  $\pi^+ \rightarrow \pi^0 + e^+ + \nu_e + \gamma$  описывается аксиально-векторной частью слабого тока; все другие вклады в электромагнитные поправки содержат только векторный ток. В настоящее время об этом расчете можно сказать следующее:

1) Было показано, что проинтегрированный коммутатор  $[F_k(y^0), \mathfrak{F}_i^\lambda(y)] = if_{kim} \mathfrak{F}_m^\lambda(y)$  полностью определяет ту часть радиационных поправок к процессу  $\pi^+ \rightarrow \pi^0 + e^+ + \nu_e$ , которая содержит векторную составляющую

тока  $J_h$ . При этом алгебра токов дает всю радиационную поправку, а не только ее расходящуюся часть <sup>1)</sup>.

2) Однако для определения части радиационных поправок, которая включает аксиально-векторную составляющую тока  $J_h$ , необходимо задать коммутатор  $\delta(x^0 - y^0) [\mathfrak{F}_k(x), \mathfrak{F}_l^5(y)]$  пространственной компоненты векторного тока с пространственной компонентой аксиально-векторного тока. Кроме того, даже если такой коммутатор известен, не зависящим от модели образом можно вычислить только расходящуюся часть аксиально-векторных радиационных поправок.

Итак, векторные поправки могут быть вычислены и оказываются расходящимися. Об аксиально-векторных же поправках известно очень мало. Возможно, что расходимость в аксиальных поправках сократится с расходимостью в векторных поправках <sup>2)</sup>, однако если мы предположим, что кварковая модель правильно определяет коммутатор  $\delta(x^0 - y^0) [\mathfrak{F}_k(x), \mathfrak{F}_l^5(y)]$ , то расходящаяся часть аксиальных поправок может быть вычислена, и такое сокращение не будет иметь места.

Наконец, мы хотим предостеречь читателя от неправильного использования соотношения (7.1). Обычно нас интересует результат предельного перехода не при  $Q^0 \rightarrow \infty$  и фиксированном  $Q$ , а при  $Q \cdot (P_\alpha + P_\beta) \rightarrow \infty$  и фиксированном  $Q^2$ . Однако в таком пределе соотношение (7.1) в общем случае не выполняется. Мы предоставляем читателю убедиться в том, что формулу (7.1) можно обобщить на этот случай тогда и только тогда, когда в коммутаторе

$$\langle \beta | \int e^{-iQ \cdot x} [A(x, 0), B(0, 0)] d^3x | \alpha \rangle$$

можно перейти к пределу  $|P_\alpha + P_\beta| \rightarrow \infty$ , приводящему к правилу сумм при фиксированном  $Q^2$ .

#### Основная статья

Bjorken J. D., Phys. Rev., 148, 1467 (1966) (ст. 14 настоящей книги).

<sup>1)</sup> J. D. Bjorken, частное сообщение; E. S. Abers, R. E. Norton, D. A. Dicus, Phys. Rev. Letters, 18, 676 (1967).

<sup>2)</sup> Примером, когда расходимости в векторной и аксиально-векторной частях сокращаются, служит расчет радиационной поправки к мюонному распаду  $\mu \rightarrow e + \bar{\nu}_\mu + \nu_e$ .



# ПРИЛОЖЕНИЯ КИРАЛЬНОЙ АЛГЕБРЫ ПЛОТНОСТЕЙ ТОКОВ $U(6) \otimes U(6)$

Дж. Бьёркен \*

J. D. Bjorken, Phys. Rev., 148, 1467 (1966)

В работе рассматриваются следствия, вытекающие из предложенных Гелл-Маниом локальных коммутационных соотношений между векторными и аксиально-векторными токами. 1) Обсуждается способ обнаружения и выделения в коммутаторах швингеровских членов, пропорциональных производным от  $\delta$ -функции. 2) Предполагая, что формфакторы для рассеяния вперед изовекторного тока на протоне имеют гладкое асимптотическое поведение, мы показываем, что если временные компоненты токов удовлетворяют алгебре  $U(3) \otimes U(3)$ , то пространственные компоненты токов удовлетворяют алгебре  $U(6) \otimes U(6)$ , по крайней мере в случае диагональных матричных элементов между одночастичными состояниями, усредненными по спину. 3) Указаны соображения в пользу того, что при фиксированной энергии функция Грина  $\pi - p$ -рассеяния вперед удовлетворяет дисперсионному соотношению по пионной массе без вычитаний; это позволяет усилить доказательство формулы Адлера — Вайсбергера для отношения  $G_A/G_V$ . 4) С помощью алгебры  $U(6) \otimes U(6)$  получена нижняя граница для сечения неупругого рассеяния электрона на нуклоне при больших переданных импульсах. 5) Показано, что вклад очень виртуальных фотонов в сверхтонкую структуру спектра водорода связан с одновременным коммутатором токов; при грубой оценке относительная величина этого вклада оказывается меньше  $4 \cdot 10^{-6}$ . 6) Показано, что логарифмически расходящаяся часть электромагнитной разности масс адронов пропорциональна матричным элементам одновременного коммутатора электромагнитного тока с его производной по времени. Мы предлагаем отождествить эту „расходящуюся“ часть с вкладом „головастиков“ в модели Коулмана — Глэшоу; это предположение основано на рассмотрении простой кварковой модели. 7) На основе алгебры токов  $U(6) \otimes U(6)$  вычислена логарифмически расходящаяся часть электромагнитной поправки к процессу  $\pi^- \rightarrow \pi^0 + e^- + \bar{\nu}$  и показано, что она не обращается в нуль. 8) Приведены соображения в пользу того, что в пределе больших энергий вероятность процесса  $e^+ + e^- \rightarrow \rightarrow$  (адроны) может стать сравнимой с вероятностью процесса  $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ .

## § 1. Введение

В этой работе мы применяем киральную алгебру токов  $U(6) \otimes U(6)$ , предложенную Гелл-Манном [1] и

\* Stanford Linear Accelerator Center, Stanford University, Stanford, California.

Фейнманом, Гелл-Манном и Цвейгом [2], к анализу различных процессов. Мы предлагаем критерий для обнаружения и выделения сингулярных членов, пропорциональных производным от  $\delta$ -функций. Эти швингеровские члены [3] не давали возможности использовать всю информацию, заключенную в алгебре плотностей токов. В этой работе мы, в частности, покажем, что из алгебры токов может быть получено поведение матричных элементов токов при стремлении к бесконечности импульса  $q$ , связанного с токами. Будут рассмотрены также некоторые приложения, включая электромагнитные поправки к процессам с участием адронов. План изложения следующий.

В § 2 мы предлагаем критерий для выделения швингеровских членов. Суть дела состоит в том, что  $T$ -произведение токов, используемое при выводе правил сумм, вообще говоря, является нековариантным. Это обстоятельство было обнаружено и рассмотрено Джонсоном [4] в 1961 г. Мы даем правило построения  $T$ -произведения из соответствующей ковариантной амплитуды. Разность между двумя этими величинами и есть швингеровский член.

В § 3 мы иллюстрируем утверждения § 2 на примере среднего по вакууму от  $T$ -произведения двух токов. Здесь мы по существу даем сводку результатов работы Джонсона.

В § 4 мы рассматриваем матричный элемент от  $T$ -произведения двух изовекторных токов между состояниями покоящихся протонов и показываем, что если некоторые формфакторы обладают разумным поведением на бесконечности, то швингеровские члены возникают только из несвязанных диаграмм. При этом мы далее показываем, что если временные компоненты токов удовлетворяют алгебре  $U(3) \otimes U(3)$ , то пространственные компоненты удовлетворяют алгебре  $U(6) \otimes U(6)$  — по крайней мере в случае диагональных матричных элементов между одночастичными состояниями, усредненными по спину.

В § 5 мы показываем, что амплитуда  $\pi - p$ -рассеяния вперед для виртуального пиона [интерполирующим полем которого является  $\partial_{\mu} j_{\mu}(x)^{\text{акс}}$ ] удовлетворяет дис-

персионному соотношению по массе при фиксированной энергии в лабораторной системе без вычитаний. Это позволяет нам усилить доказательство формулы Адлера — Вайсбергера [5] для  $|G_A/G_V|$ , так как мы получаем некоторые аргументы для обоснования необходимых при ее выводе аналитических продолжений.

В § 6 мы рассматриваем зависящую от спина часть амплитуды комптоновского рассеяния вперед виртуального фотона и, используя алгебру  $U(6) \otimes U(6)$ , получаем для неупругого электрон-нуклонного рассеяния следующее неравенство:

$$\lim_{q' \rightarrow -\infty} \lim_{E_{\text{пад}} \rightarrow \infty} q^4 E_{\text{пад}} \int_0^{\infty} \frac{dv}{v} \frac{d}{dq^2 dv} (\sigma_p + \sigma_n) > \frac{8\pi\alpha^2}{3} \left| \frac{G_A}{G_V} \right|, \quad (1.1)$$

где  $v = E_{\text{пад}} - E_f$ . Мы предполагаем, что в этом же предельном случае справедливо неравенство

$$\frac{d\sigma_p}{dq^2} \gtrsim \frac{\pi\alpha^2}{q^4}. \quad (1.2)$$

В § 7 мы применяем результаты § 6 к проблеме сверхтонкой структуры водорода. Мы показываем, что вклад очень виртуальных фотонов ( $q^2 \ll -m_p^2$ ) ограничен величиной  $\sim 4 \cdot 10^{-6}$  и, вероятно, не может объяснить имеющегося расхождения, равного  $20 \cdot 10^{-6}$ .

В § 8 мы показываем, что логарифмически расходящиеся части электромагнитных разностей масс пропорциональны матричным элементам одновременных коммутаторов токов с их производными по времени. На основе простой кварковой модели мы приводим довод (но не доказательство) в пользу того, что эти матричные элементы коичны, не обращаются в нуль и преобразуются как октет группы  $SU(3)$ . Если в гамильтониане  $H$  доминирует кварковый массовый член, то имеют место многие из результатов модели „головастиков“ Коулмана — Глэшоу.

В § 9 мы исследуем радиационные поправки к  $\beta$ -распаду пиона и показываем, используя киральную алгебру  $U(6) \otimes U(6)$ , что во всех порядках по сильным

взаимодействиям радиационные поправки логарифмически расходятся; в частности,

$$\mathfrak{M} \approx \mathfrak{M}_0 \left\{ 1 + \frac{3\alpha}{4\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{M^2} \right\}, \quad (1.3)$$

где  $\mathfrak{M}_0$  — амплитуда в низшем порядке.

Наконец, в § 10 мы рассматриваем процесс  $e^+ + e^- \rightarrow \rightarrow$  (адроны) и показываем, что его полное сечение удовлетворяет соотношению

$$\int dq^2 q^4 \sigma_{\text{полн}}(q^2) = 16\pi^2 \alpha^2 \int \langle 0 | [j_z(0, \mathbf{x}), [H, j_z(0)]] | 0 \rangle d^3x, \quad (1.4)$$

где  $q^2$  — квадрат полной энергии в системе центра масс.

Используя рассмотренный в § 8 модельный гамильтониан, мы получаем, что правая часть этого соотношения квадратично расходится. Отсюда следует, что с точностью до логарифмических факторов

$$\sigma_{\text{полн}}(q^2) \sim \frac{\alpha^2}{q^2} \quad \text{при } q^2 \rightarrow \infty. \quad (1.5)$$

## § 2. Швингеровские члены

Швингеровские члены [3, 4] — это сингулярные члены в коммутаторе плотностей токов. Точнее, Швингер показал, что

$$[j_0(0, \mathbf{x}), \mathbf{j}(0, \mathbf{x}')] = C \nabla \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (2.1)$$

где  $j_\mu(x)$  — например, плотность электромагнитного тока. Присутствие такого члена можно продемонстрировать, переходя к вакуумному среднему коммутатора. При получении правил сумм подобные члены дают вклад; мы попытаемся дать рецепт, как обнаружить и выделить этот вклад.

Мы исходим из того, что существование швингеровских членов связано исключительно с локальностью и релятивистской кинематикой, так что их можно выделить, используя только эту информацию. Чтобы пояснить это утверждение, обсудим изовекторные токи  $j_\mu^\pm$

с  $\Delta S = 0$ , рассматриваемые в  $\beta$ -распаде и удовлетворяющие соотношениям

$$[Q^+, Q^-] = 2Q_3, \quad [Q^3, Q^\pm] = \pm Q^\pm, \quad Q^\pm = \int d^3x j_0^\pm(\mathbf{x}, 0). \quad (2.2)$$

Мы будем рассматривать в основном хронологическое произведение<sup>1)</sup>

$$M_{\mu\nu}(q, \dots) = -i \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle A | T(j_\mu^+(x) j_\nu^-(0)) | B \rangle \quad (2.3)$$

и абсорбтивные части амплитуды

$$\begin{aligned} \rho_{\mu\nu}(q, \dots) &= \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle A | j_\mu^-(x) j_\nu^+(0) | B \rangle, \\ \bar{\rho}_{\mu\nu}(q, \dots) &= \int d^4x e^{-iq \cdot x} \langle A | j_\mu^-(0) j_\nu^+(x) | B \rangle, \\ \rho_{\mu\nu} &= \sum_n (2\pi)^4 \delta^4(q + P_A - P_n) \langle A | j_\mu^+(0) | n \rangle \langle n | j_\nu^-(0) | B \rangle, \\ \bar{\rho}_{\mu\nu} &= \sum_n (2\pi)^4 \delta^4(q + P_B - P_n) \langle A | j_\mu^-(0) | n \rangle \langle n | j_\nu^+(0) | B \rangle. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Главная идея этого параграфа состоит в том, что только по кинематическим причинам *хронологическое произведение, вообще говоря, не определяет ковариантной амплитуды*, т. е. оно не преобразуется как тензор второго ранга. Ниже это будет показано на примере вакуумного среднего, но, прежде чем перейти к вычислениям, заметим, что всегда существует ковариантная амплитуда, определенная матричным элементом второго порядка по слабому взаимодействию и соответствующая фиг. 1. Ковариантность  $S$ -матрицы требует, чтобы амплитуда  $\tilde{M}_{\mu\nu}$ , на которую умножаются лептонные токи, преобразовывалась как тензор второго ранга.

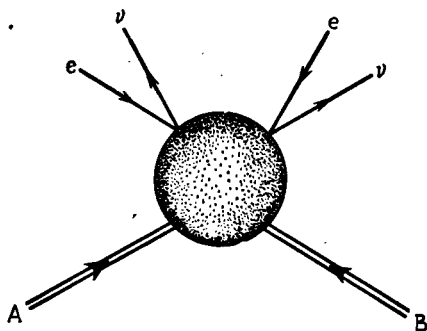
Теперь мы переформулируем проблему швингеровских членов следующим образом: задана (феноменологически) ковариантная амплитуда  $\tilde{M}_{\mu\nu}$ ; как построить

<sup>1)</sup>В этой работе мы используем следующую нормировку одночастичных состояний:

$$\langle p' | p \rangle = \left( \frac{E}{M} \right) (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}').$$

хронологическое произведение?  $T$ -произведение нам нужно для того, чтобы можно было воспользоваться методом Фубини — Фурлана и получить правила сумм.

Предположим, что  $M_{\mu\nu}$  и  $\tilde{M}_{\mu\nu}$ , рассматриваемые как аналитические функции  $q_0$ , имеют одни и те же абсорбтивные части  $\rho_{\mu\nu}$  и  $\bar{\rho}_{\mu\nu}$  [в координатном пространстве это означает, что  $M_{\mu\nu}(x) = \tilde{M}_{\mu\nu}(x)$  при  $x_0 \neq 0$ ]. Следовательно, величины  $M_{\mu\nu}$  и  $\tilde{M}_{\mu\nu}$  отличаются самое большее на полином по  $q_0$  [в координатном пространстве



Фиг. 1. Матричный элемент  $S$ -матрицы во втором порядке по слабому взаимодействию.

этому соответствуют члены  $\delta(x_0)$ ,  $\delta'(x_0)$ , ...]. Наконец, хронологическое произведение стремится к нулю при  $q_0 \rightarrow \infty$ , как это следует из разложения (2.3), если оборвать сумму по промежуточным состояниям (что мы всегда будем делать в той или иной форме перед тем, как сравнивать теорию с экспериментальными данными):

$$M_{\mu\nu}(q, \dots) = \int_0^\infty \frac{dq'_0}{(2\pi)} \left[ \frac{\rho_{\mu\nu}(q'_0, q, \dots)}{q_0 - q'_0} - \frac{\bar{\rho}_{\nu\mu}(q'_0 - q, \dots)}{q_0 + q'_0} \right]. \quad (2.5)$$

Таким образом, мы можем построить хронологическое произведение  $M_{\mu\nu}$  из ковариантной амплитуды  $\tilde{M}_{\mu\nu}$ , если перейдем в ней к пределу  $q_0 \rightarrow \infty$  при фиксированном  $q$ , получим в пределе полином по  $q_0$  и затем вычтем его.

Полезно также отметить, что член  $O(1/q_0)$  при  $q_0 \rightarrow \infty$  пропорционален одновременному коммутатору токов

$$\begin{aligned} M_{\mu\nu} \xrightarrow{q_0 \rightarrow \infty} & \frac{1}{q_0} \int \frac{dq'_0}{(2\pi)} [\rho_{\mu\nu}(q'_0, \mathbf{q}, \dots) - \bar{\rho}_{\nu\mu}(q'_0, -\mathbf{q}, \dots)] = \\ & = \frac{1}{q_0} \int d^3x \langle A | [j_\mu^+(0, \mathbf{x}), j_\nu^-(0, 0)] | B \rangle e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Члены более высокого порядка малости содержат повторные коммутаторы токов с гамильтонианом  $H$ ; например, следующий член имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{q_0^2} \int \frac{dq'_0}{2\pi} q'_0 [\rho_{\mu\nu}(q'_0, \mathbf{q}, \dots) + \bar{\rho}_{\nu\mu}(q'_0, -\mathbf{q}, \dots)] = \\ = \frac{1}{q_0^2} \int d^2x e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} \langle A | [[j_\mu^+(0, \mathbf{x}), H] j_\nu^-(0)] | B \rangle. \end{aligned} \quad (2.7)$$

### § 3. Вакуумное среднее

Для полноты изложения мы кратко обсудим случай, когда  $|A\rangle = |B\rangle = |0\rangle$ , хотя он и рассмотрен в работе Джонсона [4]. Абсорбтивная часть  $\rho_{\nu\mu}$  имеет вид

$$\rho_{\mu\nu}(q) = \bar{\rho}_{\nu\mu}(q) = (q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2) \rho(q^2). \quad (3.1)$$

Ковариантную амплитуду<sup>1)</sup> мы зададим с помощью дисперсионного интеграла<sup>2)</sup> от  $\rho$

$$\tilde{M}_{\mu\nu} = \frac{(q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2)}{2\pi} \int \frac{d\sigma^2 \rho(\sigma^2)}{q^2 - \sigma^2}. \quad (3.2)$$

Чтобы получить  $M_{\mu\nu}$ , положим  $q_\mu = q_0 \eta_\mu$  и перейдем к пределу при  $q_0 \rightarrow \infty$  [ $\eta_\mu = (1, 0, 0, 0)$ ]

$$\tilde{M}_{\mu\nu} \xrightarrow{q_0 \rightarrow \infty} (\eta_\mu \eta_\nu - g_{\mu\nu}) \int \frac{d\sigma^2 \rho(\sigma^2)}{2\pi}. \quad (3.3)$$

Это и есть швингеровский член; хронологическое произведение при этом равно

$$M_{\mu\nu} = \tilde{M}_{\mu\nu} - (\eta_\mu \eta_\nu - g_{\mu\nu}) \int \frac{d\sigma^2 \rho(\sigma^2)}{2\pi}. \quad (3.4)$$

<sup>1)</sup> Мы предполагаем, что токи сохраняются, хотя существование швингеровских членов от этого не зависит.

<sup>2)</sup> Любой дополнительный „массовый“ член  $\sim g_{\mu\nu}$  устраняется при переходе к  $M_{\mu\nu}$ ; см. соотношение (3.4).

Чтобы вычислить одновременный коммутатор, можно образовать величину  $q_\mu M_\nu^\mu$  и проинтегрировать выражение (2.3) по частям

$$q^\mu M_{\mu\nu} = \int d^3x \langle A | [j_0^+(0, \mathbf{x}), j_\nu^-(0)] | B \rangle e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} = \\ = [-(\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{q}) \eta_\nu + q_\nu] \int \frac{d\sigma^2 \rho(\sigma^2)}{2\pi} = (0, \mathbf{q}) \int \frac{d\sigma^2 \rho(\sigma^2)}{2\pi}. \quad (3.5)$$

Мы получили результат Швингера. Если воспользоваться формулой (2.6), а член  $O(1/q_0)$  вычислить из выражений (3.2) и (3.4), то мы получим тот же результат. Его можно также получить и прямым вычислением выражения (2.5); в этом случае швингеровский член возникает из-за того, что имеющий вид полинома проекционный оператор  $(q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2)$  зависит от переменной интегрирования  $q'_0$ .

#### § 4. Среднее по протонным состояниям

Мы рассмотрим теперь тот же коммутатор между протонными состояниями с одинаково направленными спинами и равными импульсами и усредненный по спину<sup>1)</sup>. (Члены, зависящие от спина, мы рассмотрим позднее.) Этот случай был рассмотрен Адлером, который получил правила сумм при фиксированном переданном импульсе [6]. Для ковариантной амплитуды  $M_{\mu\nu}$  имеет место следующее общее представление:

$$\tilde{M}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_s \int d^4x e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} \langle Ps | T(j_\mu^+(x) j_\nu^-(0)) | Ps \rangle + \\ + (\text{швингеровские члены}) = P_\mu P_\nu \mathfrak{F}_1(q^2, \mathbf{v}) + (P_\mu q_\nu + P_\nu q_\mu) \times \\ \times \mathfrak{F}_2(q^2, \mathbf{v}) + q_\mu q_\nu \mathfrak{F}_3(q^2, \mathbf{v}) + g_{\mu\nu} \mathfrak{F}_4(q^2, \mathbf{v}), \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{q} \cdot P}{M}, \quad (4.1)$$

<sup>1)</sup> Полученные при этом результаты справедливы для любого одночастичного состояния.



которое мы перепишем в виде

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{\mu\nu} = & P_\mu P_\nu M_0(\nu) + [q^2 P_\mu P_\nu - (q \cdot P)(q_\mu P_\nu + q_\nu P_\mu) + (q \cdot P)^2 q_{\mu\nu}] \times \\ & \times M_1(q^2, \nu) + (q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2) M_2(q^2, \nu) + \\ & + (q_\mu P_\nu + q_\nu P_\mu - g_{\mu\nu} q \cdot P) M_3(q^2, \nu) + \\ & + g_{\mu\nu} M_4(q^2, \nu) + B_{\mu\nu} + \tilde{D}_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Здесь  $B_{\mu\nu}$  — борновский член,  $\tilde{D}_{\mu\nu}$  — несвязная ковариантная амплитуда, совпадающая с амплитудой (3.2)<sup>1)</sup>;

$$\begin{aligned} B_{\mu\nu} = & \frac{2 \left( P_\mu + \frac{1}{2} q_\mu \right) \left( P_\nu + \frac{1}{2} q_\nu \right)}{M(q^2 + 2M\nu)} \left[ F_{1\nu}^2 - \frac{q^2}{4M^2} F_{2\nu}^2 \right] - \\ & - \frac{(q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2)}{2M(q^2 + 2M\nu)} (F_{1\nu} + F_{2\nu})^2, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где  $F_{1\nu}$  и  $F_{2\nu}$  — изовекторные формфакторы Дирака, нормированные соответственно на 1 и  $(\kappa_P - \kappa_N)$ .

Для  $q^2 < 0$  ( $q$  — пространственно-подобный 4-вектор) абсорбтивные части амплитуды  $\tilde{M}_{\mu\nu}$  сводятся к сохраняющимся членам  $M_1$  и  $M_2$ , которые удовлетворяют дисперсионному соотношению по  $\nu$  при фиксированном  $q^2$ . Таким образом, при фиксированном  $q^2$  величины  $M_0$ ,  $M_3$  и  $M_4$  являются полиномами по  $\nu$ .

Переходя к построению  $\tilde{M}_{\mu\nu}$  из  $M_{\mu\nu}$ , мы видим, что  $\tilde{D}_{\mu\nu}$  будет давать вклад в швингеровский член, а величина  $M_0$  полностью выпадает. Если

$$q^2 M_1 \rightarrow 0, \quad q^2 M_2 \rightarrow 0, \quad q \cdot P M_3 \rightarrow 0, \quad M_4 \rightarrow 0 \quad (4.4)$$

при  $q_0 \rightarrow i\infty$  ( $\nu \rightarrow i\infty$ ,  $q^2 \rightarrow -\infty$ ), то никаких других швингеровских членов не возникает. Эти предположения являются естественными, и мы принимаем их в дальнейшем. Тогда  $M_{\mu\nu}$  определяется выражением (4.2), в котором нужно опустить член, содержащий  $M_0$ , и

<sup>1)</sup> С точностью до множителя  $(2\pi)^3 (E/M) \delta^3(0)$ .

сделать замену  $\tilde{D}_{\mu\nu} \rightarrow D_{\mu\nu}$ . Образую дивергенцию, получаем

$$q^\mu M_{\mu\nu} = q^2 P_\nu M_3 + q_\nu M_4 + \frac{\left(P_\nu + \frac{1}{2} q_\nu\right)}{M} \left[F_{1\nu}^2 - \frac{q^2}{4M^2} F_{2\nu}^2\right] + q^\mu D_{\mu\nu}. \quad (4.5)$$

Из локальных коммутационных соотношений [1] с помощью выражений (2.2) и (2.3) получаем

$$\begin{aligned} q^\mu M_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \sum_s \int d^3x \langle Ps | [j_0^+(0, \mathbf{x}), j_\nu^-(0)] | Ps \rangle e^{-iq \cdot \mathbf{x}} = \\ &= \sum_s \langle Ps | j_\nu^3(0) | Ps \rangle + (\text{несвязная часть}) = \\ &= \left(\frac{P_\nu}{M}\right) + (\text{несвязная часть}). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Сравнивая выражения (4.6) и (4.5), находим

$$\begin{aligned} M_3 &= \frac{1}{Mq^2} \left[1 - \left\{F_{1\nu}^2 - \frac{q^2}{4M^2} F_{2\nu}^2\right\}\right], \\ M_4 &= -\frac{1}{2M} \left[F_{1\nu}^2 - \frac{q^2}{4M^2} F_{2\nu}^2\right]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Интересный результат получается в случае, когда

$$q_0^3 M_1 \rightarrow 0, \quad q_0^3 M_2 \rightarrow 0, \quad q^2 F_i < \infty. \quad (4.8)$$

Тогда при  $q_0 \rightarrow i\infty$  весь вклад возникает из  $M_3$ :

$$M_{\mu\nu} \rightarrow \frac{(\eta_\mu P_\nu + \eta_\nu P_\mu - g_{\mu\nu} \eta \cdot P)}{Mq_0}; \quad (4.9)$$

отвлекаясь от швингеровского члена в несвязной части<sup>1)</sup>, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_s \int d^3x e^{-iq \cdot \mathbf{x}} \langle Ps | [j_\mu^+(0, \mathbf{x}), j_\nu^-(0)] | Ps \rangle = \\ = \frac{\eta_\mu P_\nu + \eta_\nu P_\mu - g_{\mu\nu} \eta \cdot P}{M}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

<sup>1)</sup> Фактически мы можем положить  $q = 0$ ; в этом случае швингеровский член не возникает совсем.

Этот результат как раз соответствует кварковым токам

$$[j_i(0, \mathbf{x}), j_l(0)] = 2j_0^3(0) \delta^3(\mathbf{x}). \quad (4.11)$$

Таким образом, можно заключить, что теория, которая является „настолько регулярной, насколько это возможно“, по-видимому, как раз и соответствует киральной алгебре токов  $U(6) \otimes U(6)$ .

Если потребовать, чтобы коэффициент при  $(P_\mu q_\nu + P_\nu q_\mu)$  в амплитуде  $\tilde{M}_{\mu\nu}$  удовлетворял дисперсионному соотношению без вычитаний, то получится правило сумм Адлера; мы не будем здесь останавливаться на деталях, так как этот вопрос подробно обсуждался в литературе [7, 6].

### § 5. Формула Адлера — Вайсбергера

В качестве приложения некоторых из этих идей мы уточним вывод правила сумм Адлера — Вайсбергера [5] для аксиально-векторной константы связи  $\beta$ -распада. Рассмотрим амплитуду

$$M(q^2, \nu) = -i \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle P | T(D^+(x) D^-(0)) | P \rangle. \quad (5.1)$$

Здесь  $|P\rangle$  — протонное состояние с импульсом  $P$  и

$$D^\pm(x) = \frac{\partial j_\mu(x)_{\text{акс}}^\pm}{\partial x_\mu}. \quad (5.2)$$

При  $q^2 < 0$  амплитуда  $M$  удовлетворяет дисперсионному соотношению по  $\nu$ . В этом соотношении для четной части делаем одно вычитание. Для нечетной части в соответствии с теоремой Померанчука вычитаний можно не делать. При этом

$$M(q^2, \nu) = B(q^2, \nu) + \frac{\nu}{2\pi} \int_0^\infty \frac{d\nu' \rho^{\text{неч}}(q^2, \nu')}{(\nu'^2 - \nu^2)} + M^{\text{чет}}(q^2, \nu), \quad (5.3)$$

где  $B$  — борновский член. Строгое соотношение, следующее из алгебры токов, имеет вид

$$\left. \left( \frac{\partial A}{\partial \nu} \right) \right|_{q^2 = \nu = 0} \equiv \frac{\partial}{\partial \nu} (M - B)_{q^2 = \nu = 0} = 1 - G_A^2. \quad (5.4)$$

Чтобы связать его с пионным рассеянием, обычно делается предположение, что при малых значениях  $q^2$  вклад двухпионного полюса доминируют в той части амплитуды  $A$ , которая соответствует непрерывному спектру

$$A(q^2, \nu) \approx \left[ \frac{a^2 \mu^4}{(q^2 - \mu^2)^2} \right] A_{\pi\pi}(\nu), \quad (5.5)$$

где  $a$  — константа, связанная с амплитудой распада пиона. Формула (5.5) правдоподобна, если  $A$  удовлетворяет дисперсионному соотношению по  $q^2$  без вычитаний. Известно<sup>1)</sup>, что при фиксированном  $\nu$  амплитуда  $A$  аналитична в плоскости  $q^2$  с разрезом, начинающимся для  $\nu \sim 0$  в точке  $\sim 8,5\mu^2$ . Исходя из разумных коммутационных соотношений, мы покажем, что действительно амплитуда  $A$  удовлетворяет дисперсионному соотношению по  $q^2$  без вычитаний, и тем самым усилим аргументы в пользу соотношений (5.5). Хотя этот результат носит академический характер в случае правила сумм с  $\Delta S = 0$ , однако он может иметь некоторое значение для понимания того, почему вообще выполняется правило сумм с  $\Delta S = 1$  [8].

Вернемся к соотношению (5.1) и положим  $q_0 \rightarrow i\infty$ . Член порядка  $1/q_0$  является нечетным по  $\nu$  и имеет вид [см. соотношения (2.5) и (2.6)]

$$M \xrightarrow{q_0 \rightarrow i\infty} \frac{1}{q_0} \int d^3x e^{-iq \cdot x} \langle P | [D^+(0, x), D^-(0)] | P \rangle. \quad (5.6)$$

Из дисперсионного соотношения, справедливого для интересующих нас отрицательных  $q^2$ , находим (предполагаем, что при больших  $q^2$  борновские члены быстро убывают)

$$M^{\text{неч}} \rightarrow \frac{\nu}{2\pi} \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{d\nu' \rho^{\text{неч}}(q^2, \nu')}{(\nu'^2 - \nu^2)}. \quad (5.7)$$

Но в этом дисперсионном интеграле при больших  $q_0$  предел интегрирования  $\nu_0 \sim |q_0|^2/2M$ , поэтому

$$\left| \frac{\nu'}{\nu} \right| \gtrsim \frac{|q_0|}{2M} \gg 1. \quad (5.8)$$

<sup>1)</sup> Во всех порядках теории возмущений.

Следовательно, при  $q_0 \rightarrow i\infty$

$$M \rightarrow \frac{\nu}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\nu' \rho^{\text{неч}}(q^2, \nu')}{\nu'^2} = \nu \left. \frac{\partial A(q^2, \nu)}{\partial \nu} \right|_{\nu=0}. \quad (5.9)$$

Мы приходим к соотношению

$$\begin{aligned} \frac{E_p}{M} \left. \frac{\partial A(q^2, \nu)}{\partial \nu} \right|_{\nu=0} \xrightarrow{q^2 \rightarrow -\infty} \\ \rightarrow \frac{1}{q^2} \int d^3x e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \langle P | [D^+(0, \mathbf{x}), D^-(0)] | P \rangle. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Таким образом,  $A'(q^2, 0)$  удовлетворяет дисперсионному соотношению без вычитаний при условии, что коммутатор в правой части существует<sup>1)</sup>. Если величина  $D^{\pm}(x)$  пропорциональна каноническому пионному полю, то этот коммутатор обращается в нуль. Если же она является билинейной комбинацией фермиевских полей, например

$$D^+(x) = C \bar{\psi} \gamma_5 \tau^+ \psi, \quad (5.11)$$

то

$$\left. \frac{\partial A}{\partial \nu} \right|_{\nu=0} \rightarrow \frac{|C|^2}{q^2} \quad \text{при} \quad q^2 \rightarrow -\infty. \quad (5.12)$$

## § 6. Зависящее от спина виртуальное комптоновское рассеяние

Применим теперь вышеизложенные соображения к антисимметричной части амплитуды виртуального комптоновского рассеяния на протоне, предполагая, что электромагнитные токи  $j_{\mu}$  имеют кварковую структуру

$$[j_{\mu}(0, \mathbf{x}), j_{\nu}(0)] = -2i\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} \eta^{\lambda} j_5^{\sigma}(0) \delta^3(\mathbf{x}) + (\text{градиентные члены}), \quad (6.1)$$

<sup>1)</sup> Это требуется по экспериментальным соображениям. Успех правила сумм Адлера для четной амплитуды пион-нуклонного рассеяния [9] означает, что этот коммутатор мал. См. также работу [10],

где

$$j_\mu = \bar{\Psi} \gamma_\mu Q \Psi, \\ j_\mu^5 = \bar{\Psi} \gamma_5 \gamma_\mu Q^2 \Psi = \left(\frac{2}{9}\right) \bar{\Psi} \gamma_5 \gamma_\mu \Psi + \frac{1}{3} \bar{\Psi} \gamma_5 \gamma_\mu Q \Psi, \quad (6.2)$$

и

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_{0123} = 1. \quad (6.3)$$

Общая структура антисимметричной части  $M_{\mu\nu}^{(a)}$  амплитуды  $M_{\mu\nu}$ , определяемой соотношением (2.3) с заменой токов  $j_\mu^\pm$  на  $j_\mu$ , имеет вид

$$M_{\mu\nu}^{(a)} = \frac{1}{2} \bar{u} \{ [\gamma_\nu, \mathbf{q}] P_\mu - [\gamma_\mu, \mathbf{q}] P_\nu + [\gamma_\mu, \gamma_\nu] P \cdot \mathbf{q} \} u G_1(q^2, \nu) + \\ + \frac{1}{2} \bar{u} \{ [\gamma_\nu, \mathbf{q}] q_\mu - [\gamma_\mu, \mathbf{q}] q_\nu + [\gamma_\mu, \gamma_\nu] q^2 \} u G_2(q^2, \nu). \quad (6.4)$$

Из перекрестной симметрии следует, что

$$M_{\mu\nu}^{(a)}(q, \dots) = + M_{\nu\mu}^{(a)}(-q, \dots) = - M_{\mu\nu}^{(a)}(-q, \dots)$$

и

$$G_1(q^2, -\nu) = G_1(q^2, \nu), \quad G_2(q^2, -\nu) = -G_2(q^2, \nu). \quad (6.5)$$

Для величин  $G_1$  и  $G_2$  мы предполагаем справедливыми дисперсионные соотношения без вычитаний.

При  $q^2 = 0$  величина  $M_{\mu\nu}^{(a)}$  связана с зависящей от спина частью амплитуды комптоновского рассеяния вперед. При  $q^2 < 0$  абсорбтивная часть  $M_{\mu\nu}^{(a)}$  связана с зависящей от спина частью амплитуды неупругого электрон-протонного рассеяния, именно

$$\frac{d\sigma^{\uparrow\uparrow}}{dq^2 dE'} - \frac{d\sigma^{\downarrow\uparrow}}{dq^2 dE'} = \frac{4\alpha^2}{q^2 E^2} [M(E + E' \cos \theta) \text{Im } G_1 + q^2 \text{Im } G_2], \quad (6.6)$$

где  $d\sigma^{\uparrow\uparrow}$  — сечение в случае, когда спины электрона и протона параллельны и направлены вдоль импульса падающего электрона;  $d\sigma^{\downarrow\uparrow}$  — сечение в случае антипараллельных спинов;  $E$ ,  $E'$  и  $\theta$  — энергии и угол рассея-

ния электрона;  $q^2 = -4EE' \sin^2(\theta/2)$ ,  $v = E - E'$ . Мы положили  $m_e = 0$ .

Для сечения фоторождения при  $q^2 = 0$  справедлива оптическая теорема

$$e^2 \operatorname{Im} G_1 = \left( \frac{1}{2M} \right) [\sigma^{\uparrow\uparrow} - \sigma^{\downarrow\downarrow}], \quad (6.7)$$

где  $\sigma^{\uparrow\uparrow}$  — сечение в случае, когда спины фотона и протона направлены в одну сторону. Борновские члены имеют вид

$$G_1^B = \frac{-2q^2 F_1 (F_1 + F_2)}{M(q^4 - 4M^2 v^2)}, \quad G_2^B = \frac{-2v F_2 (F_1 + F_2)}{q^4 - 4M^2 v^2}. \quad (6.8)$$

Чтобы получить интересующий нас результат, перейдем в  $M_{\mu\nu}^{(a)}$  к пределу при  $q_0 \rightarrow i\infty$ . Используя соотношения (2.6) и (6.1), находим

$$\lim_{q_0 \rightarrow i\infty} M_{\mu\nu}^{(a)} = \frac{-2i\varepsilon_{\mu\nu\sigma\sigma}}{q_0} \langle P | j_5^\sigma(0) | P \rangle = \frac{-2i\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} q^\lambda}{q^2} \langle P | j_5^\sigma(0) | P \rangle. \quad (6.9)$$

Положим по определению

$$\langle ps | j_5^\sigma(0) | ps \rangle = Z \bar{u} \gamma_5 \gamma^\sigma u = -Z s^\sigma. \quad (6.10)$$

Сравнивая это соотношение с асимптотической формулой для амплитуды, получаем

$$G_1 \rightarrow -\frac{2Z}{Mq^2}, \quad G_2 \rightarrow O\left(\frac{1}{q_0^4}\right) (q_0 \rightarrow i\infty). \quad (6.11)$$

С другой стороны, мы можем записать выражение для  $G_1$ , используя дисперсионное соотношение без вычитаний:

$$G_1(q^2, v) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{dv' v' \operatorname{Im} G_1(q^2, v')}{v'^2 - v^2}, \quad (6.12)$$

откуда при  $q_0 \rightarrow i\infty$

$$G_1(q^2, v) \approx \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{dv'}{v'} \operatorname{Im} G_1(q^2, v') = G_1(q^2, 0), \quad (6.13)$$

или <sup>1)</sup>

$$\int_0^{\infty} \frac{dv'}{v'} \operatorname{Im} G_1(q^2, v') \xrightarrow{q^2 \rightarrow -\infty} \frac{-\pi Z}{Mq^2}. \quad (6.14)$$

Из соотношения (6.6) при  $E \rightarrow \infty$  и фиксированном  $q^2$  получаем

$$\operatorname{Im} G_1(q^2, v) \rightarrow \frac{q^2 E}{8\alpha^2 M} \left[ \frac{d\sigma^{\uparrow\uparrow}}{dq^2 dv} - \frac{d\sigma^{\downarrow\downarrow}}{dq^2 dv} \right]. \quad (6.15)$$

Таким образом, мы находим, что

$$\lim_{q^2 \rightarrow -\infty} \lim_{E \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{dv'}{v'} \left[ \frac{d\sigma^{\uparrow\uparrow}}{dq^2 dv'} - \frac{d\sigma^{\downarrow\downarrow}}{dq^2 dv'} \right] = \frac{-8\pi\alpha^2 Z}{q^4 E}. \quad (6.16)$$

Сечения, которые входят в это соотношение, смогут быть измерены лишь в далеком будущем. Далее, мы не знаем величины  $Z$ , хотя  $SU(6)$ -симметрия предсказывает значения  $Z_p = 5/9$  и  $Z_n = 0$ . Однако если мы рассмотрим разность этих величин для протона и нейтрона, то из соотношений (6.2), предполагая справедливость алгебры токов  $U(6) \otimes U(6)$ , получим, что

$$Z_p - Z_n = \frac{1}{3} \left( \frac{G_A}{G_V} \right). \quad (6.17)$$

Следовательно,

$$\int_0^{\infty} \frac{dv'}{v'} \frac{d}{dq^2 dv'} [\sigma_p^{\uparrow\uparrow} - \sigma_p^{\downarrow\downarrow} - \sigma_n^{\uparrow\uparrow} + \sigma_n^{\downarrow\downarrow}] \rightarrow \frac{-8\pi\alpha^2}{3q^4 E} \left( \frac{G_A}{G_V} \right). \quad (6.18)$$

Мы сможем извлечь некоторую информацию из этого бесполезного соотношения, если перейдем к неравенству <sup>2)</sup>

$$\lim_{q^2 \rightarrow -\infty} \lim_{E \rightarrow \infty} q^4 E \int_0^{\infty} \frac{dv}{v} \left[ \frac{d\sigma_p}{dq^2 dv} + \frac{d\sigma_n}{dq^2 dv} \right] > \frac{8\pi\alpha^2}{3} \left| \frac{G_A}{G_V} \right|. \quad (6.19)$$

<sup>1)</sup> Эти результаты можно сравнить с соотношениями (5.7) — (5.9).

<sup>2)</sup>  $\sigma_p = \sigma_p^{\uparrow\uparrow} + \sigma_p^{\downarrow\downarrow}$ .



Если отвлечься от множителя  $1/v'$  в дисперсионном интеграле, то мы увидим, что оно напоминает правило сумм Адлера [6] для нейтринных процессов

$$\lim_{q^2 \rightarrow -\infty} \lim_{E \rightarrow \infty} \left( \frac{d\bar{\sigma}}{dq^2} - \frac{d\sigma}{dq^2} \right) \approx \frac{G^2}{\pi}, \quad (6.20)$$

если в нем заменить  $e^4/q^4$  на  $G^2$ . Можно предположить, что множитель  $1/v'$  возник только из-за того, что мы с самого начала ограничились рассмотрением амплитуды, зависящей от спина, и что „фактическое“ неравенство для рассеяния электронов имеет вид

$$\lim_{q^2 \rightarrow -\infty} \lim_{E \rightarrow \infty} \frac{d\sigma_p}{dq^2} \gtrsim \frac{\pi\alpha^2}{q^4}, \quad (6.21)$$

т. е. полностью аналогично результату для нейтрино<sup>1)</sup>.

## § 7. Сверхтонкая структура

Асимптотическая часть зависящей от спина комптоновской амплитуды (6.4) дает также вклад в сверхтонкое расщепление. Она не принималась в рассмотрение в предыдущих работах [12]<sup>2)</sup>, в которых асимптотическое убывание (например, в случае борновских членов) было быстрее  $1/k_0$ . Матричный элемент второго порядка для зависящих от спина эффектов в электрон-протонном рассеянии вперед асимптотически ( $k_0 \rightarrow i\infty$ ) стремится к величине

$$\mathfrak{M}^{(2)} = -ie^4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4 k^6} \bar{u}\gamma^\mu k \gamma^\nu u M_{\mu\nu}^{(a)}(P, k). \quad (7.1)$$

Используя (6.9) и выполняя алгебраические преобразования с  $\gamma$ -матрицами, получаем

$$\mathfrak{M}^{(2)} = \frac{+a^2 Z}{2\pi^2} \int \frac{d^4k}{k^6} \bar{u}\gamma^\mu \gamma^\lambda \gamma^\nu u \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} S^\sigma = 3a^2 Z \bar{u}\gamma_5 u \int \frac{dk^2}{\bar{m}^2}, \quad (7.2)$$

<sup>1)</sup> Нам удалось подтвердить справедливость соотношения (6.21); см. работу [11].

<sup>2)</sup> В этой статье имеются также ссылки на более ранние работы.

где  $\bar{m}^2$  — некоторое эффективное обрезание снизу. Сравнивая с членом первого порядка, находим поправку

$$\left| \frac{\Delta v}{v} \right| = \frac{9\alpha}{2\pi} \frac{|Z_p|}{\mu_p} \left[ \frac{m_e M_p}{\bar{m}^2} \right]. \quad (7.3)$$

Выбирая  $Z_p \sim 1$  и  $\bar{m}^2 = m_p^2$ , мы получаем следующую оценку:

$$\left| \frac{\Delta v}{v} \right| \sim 3,5 \cdot 10^{-6}. \quad (7.4)$$

Эта величина, по-видимому, слишком мала, чтобы объяснить имеющееся расхождение  $\sim 20 \cdot 10^{-6}$  [12]. Таким образом, в рамках нашего подхода [сходящиеся дисперсионные интегралы и киральная алгебра токов  $U(6) \otimes U(6)$ ] мы можем сделать вывод, что область больших  $k^2$ , вероятно, не дает главного вклада в аномалию в сверхтонком расщеплении<sup>1)</sup>.

### § 8. Электромагнитные разности масс

Те же методы можно применить к любому процессу, в котором участвуют виртуальные фотоны с большими (пространственно-подобными) импульсами, в частности к вычислению радиационных поправок для процессов с участием адронов. Наиболее интересными являются электромагнитные разности масс и радиационные поправки к слабым взаимодействиям. Исследуем сначала разности масс. Рассмотрим выражение (4.1) для амплитуды  $\tilde{M}_{\mu\nu}$ , в котором изоспиновые токи заменены на электромагнитные и выполнено усреднение по спину. Для конкретности мы рассматриваем протонные состояния, хотя наши результаты будут иметь общий характер. Тогда выражение, аналогичное (4.2), будет иметь вид

$$\begin{aligned} M_{\mu\nu} = & [q^2 P_\mu P_\nu - (q \cdot P)(q_\mu P_\nu + q_\nu P_\mu) + (q \cdot P)^2 g_{\mu\nu}] M_1(q^2, q \cdot P) + \\ & + (q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2) M_2(q^2, q \cdot P) + B_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{M} \left( F_{1p}^2 - \frac{q^2}{4M^2} F_{2p}^2 \right) + D_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (8.1)$$

<sup>1)</sup> Новое определение постоянной тонкой структуры ликвидировало эту аномалию; см. [18]. — *Прим. ред.*

Чтобы это выражение согласовывалось с отсутствием швингеровских членов и с киральной алгеброй токов  $U(6) \otimes U(6)$ , мы потребуем, отвлекаясь от вклада несвязанных диаграмм  $D_{\mu\nu}$ , чтобы при  $q_0 \rightarrow i\infty$  амплитуда  $M_{\mu\nu} \rightarrow O(1/q_0^2)$ . Это означает, что

$$M_1 \rightarrow O\left(\frac{1}{q_0^4}\right), \quad M_2 \rightarrow O\left(\frac{1}{q_0^4}\right) \quad (8.2)$$

при  $q_0 \rightarrow i\infty$ . Мы предположим, что в этом пределе борновскими членами можно пренебречь, для чего достаточно, чтобы

$$F_{1p} \rightarrow O\left(\frac{1}{q^2}\right), \quad F_{2p} \rightarrow O\left(\frac{1}{q^2}\right) \quad (8.3)$$

при  $q^2 \rightarrow -\infty$ .

Мы будем рассматривать в основном расходящуюся часть электромагнитной поправки к массе, которую будем вычислять методом Коттингэма [13]. Она возникает только из членов, содержащих  $M_1$  и  $M_2$ , поскольку борновские вклады были вычислены [14] с помощью измеренных электромагнитных формфакторов и оказались сходящимися:

$$\begin{aligned} \delta M &= \frac{-ie^2}{2(2\pi)^4} \int \frac{d^4q}{q^2} [M_\mu^\mu(q, P) - D_\mu^\mu] = \\ &= \frac{-ia}{8\pi^3} \int \frac{d^4q}{q^2} [(q^2 + 2\nu^2) M^2 M_1(q^2, \nu) - 3q^2 M_2(q^2, \nu)] + \\ &\quad + (\text{борновские члены}), \quad M\nu = q \cdot P. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Следуя Коттингэму [13], перейдем от интегрирования по  $q_0$  к интегрированию по  $iq_0$  и выразим  $M_1$  и  $M_2$  через дисперсионные интегралы по  $\nu$  без вычитаний<sup>1)</sup>

$$M_i(q^2, \nu) = \frac{2}{\pi} \int_{\nu_{\text{мин}}}^{\infty} \frac{d\nu' \nu' \text{Im} M_i(q^2, \nu')}{\nu'^2 - \nu^2}. \quad (8.5)$$

Из этого дисперсионного соотношения следует (так как порог  $\nu_{\text{мин}} \rightarrow \infty$  как  $-q^2/M$ ), что при  $q^2 = -k^2$ ,  $\nu = ik \cos \theta$ ,

<sup>1)</sup> Случай, когда вычитания необходимы, интересен и заслуживает изучения. Он, в частности, важен для неупругого рассеяния электронов при больших  $q^2$ .

$$\cos \theta \leq 1$$

$$M_i(q^2, \nu) \rightarrow M_i(q^2, 0) \text{ при } k \rightarrow \infty. \quad (8.6)$$

Следовательно, расходящаяся часть  $\delta M$  имеет вид

$$\delta M^{\text{расх}} = \frac{\alpha}{8\pi} \int_0^\infty k^2 dk^2 \left[ \frac{3}{2} M^2 M_1(-k^2, 0) - 3M_2(-k^2, 0) \right]. \quad (8.7)$$

Мы видим, что  $\delta M^{\text{расх}}$  зависит от члена  $O(1/k^4)$  в  $M_i(k^2, 0)$ . Именно этот член определяется одновременными коммутационными соотношениями токов с гамильтонианом  $H$ . Согласно соотношению (2.7), мы имеем<sup>1)</sup> при  $q_0 \rightarrow i\infty, \mathbf{q} = 0$

$$M_{\mu\nu} \rightarrow \frac{1}{q^2} \frac{1}{2} \sum_s \int d^3x \langle ps | [[j_\mu(0, \mathbf{x}), H], j_\nu(0)] | ps \rangle, \quad (8.8)$$

тогда как из соотношений (8.1) и (8.6) следует, что

$$M_{\mu\nu} \rightarrow [P_\mu P_\nu - \eta \cdot P (\eta_\mu P_\nu + \eta_\nu P_\mu) + (\eta \cdot P)^2 g_{\mu\nu}] q^2 M_1(q^2, 0) + (\eta_\mu \eta_\nu - g_{\mu\nu}) q^2 M_2(q^2, 0), \quad (8.9)$$

где  $q_\mu = \eta_\mu q_0$ . Чтобы вычислить двойной коммутатор, необходимо задать вид гамильтониана сильных взаимодействий. При этом результаты, по-видимому, сильно зависят от выбранной модели. Однако в рамках кварковой модели, вероятно, можно утверждать, что двойной коммутатор не обращается в нуль. Для иллюстрации — и только для иллюстрации — мы рассмотрим простую кварковую модель, в которой

$$H = \sum_{i=1}^3 \int d^3x \psi_i^\dagger(x) \left[ -i\alpha \cdot \nabla + \beta m_i + g\beta \gamma_\mu B^\mu(x) \right] \psi_i(x) + H_B = H_0 + H_M + H_I + H_B. \quad (8.10)$$

В этом выражении  $\psi_i$  — кварковые поля;  $B^\mu(x)$  — нейтральное векторное поле, соответствующее синглету  $SU(3)$ ;  $H_B$  — гамильтониан  $B$ -мезона, включающий возможные

<sup>1)</sup> Заметим, что если бы киральная симметрия  $U(6) \otimes U(6)$  была точной, то этот коммутатор обратился бы в нуль.

члены самодействия. Единственным достоинством этого гамильтониана  $H$  является то, что он обладает простой алгебраической структурой и соответствующей ему алгеброй токов является киральная алгебра  $U(6) \otimes U(6)$ .

Теперь мы можем вычислить коммутатор (8.8). Достаточно рассмотреть только пространственные компоненты токов  $j_\mu$  и  $j_\nu$ , поскольку  $\eta_\mu M^{\mu\nu} = O(1/q_0^3)$ , что следует из соотношения (8.9) или из (8.8). Тогда

$$\begin{aligned} \int d^3x [ [j_i(0, \mathbf{x}), H_0], j_j(0) ] &= -4i\psi^\dagger [\alpha_i \nabla_j - \delta_{ij} \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla] Q^2 \psi, \\ \int d^3x [ [j_i(0, \mathbf{x}), H_M], j_j(0) ] &= -4\bar{\psi} M Q^2 \psi \delta_{ij}, \\ \int d^3x [ [j_i(0, \mathbf{x}), H_I], j_j(0) ] &= 4g\psi^\dagger [\alpha_i B_j - \delta_{ij} \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{B}] Q^2 \psi. \end{aligned} \quad (8.11)$$

В этой модели «расходящаяся» часть расщеплений масс преобразуется в пределе  $SU(3)$ -симметрии как унитарный октет. Это следует из того, что матрицы  $Q^2$  и  $Q^2 M$  можно представить в виде линейных комбинаций матриц  $1$ ,  $\lambda_3$  и  $\lambda_8$ . Непосредственным обобщением этого результата является следующая теорема.

**Теорема.** Если часть гамильтониана  $H$ , зависящая от кварковых полей  $\psi$ , является билинейной по  $\psi$  и  $\psi^\dagger$  и не содержит недиагональных  $SU(3)$ -матриц<sup>1)</sup> (т. е. содержит только  $1$ ,  $\lambda_3$ ,  $\lambda_8$ ), то расходящаяся часть электромагнитного расщепления масс преобразуется как октет [в пределе  $SU(3)$ ].

Мы не показали, что матричный элемент отличен от нуля, и фактически не можем этого сделать. Однако можно высказать некоторые утверждения о массовом члене  $H_M$ . В дальнейшем в духе<sup>2)</sup> статической  $SU(6)$ -симметрии мы не будем учитывать два других члена.

<sup>1)</sup> Это предположение вряд ли является необходимым. Если бы такие матрицы присутствовали, то должны были бы присутствовать другие заряженные поля, взаимодействующие с кварковыми. Но эти поля давали бы вклад в токи, что противоречит нашим исходным предположениям.

<sup>2)</sup> То есть предполагая, что  $\langle \psi^\dagger \alpha \psi \rangle \ll \langle \psi^\dagger \beta \psi \rangle$ .

С этой оговоркой мы получаем из соотношений (8.11) и (8.8)

$$M_{\mu\nu} \rightarrow \left(\frac{4}{q^2}\right) \langle ps | \bar{\psi}_k(0) Q_k^2 m_k \psi_k(0) | ps \rangle (g_{\mu\nu} - \eta_\mu \eta_\nu) \equiv \\ \equiv \left(\frac{4m_0^{(p)}}{q^2}\right) (g_{\mu\nu} - \eta_\mu \eta_\nu). \quad (8.12)$$

Отсюда и из выражения (8.9) следует, что

$$q^4 M_1 \rightarrow 0, \quad M_2 \rightarrow -\frac{4m_0^{(p)}}{q^4} \quad (8.13)$$

при  $q^2 \rightarrow -\infty$ .

Таким образом, используя эти упрощенные предположения, мы приходим к выводу, что электромагнитная масса протона расходится, если голые массы кварков и  $m_0^{(p)}$  не равны нулю. Расходящаяся часть при этом имеет вид<sup>1)</sup>

$$\delta M_p \approx \frac{3\alpha}{2\pi} m_0^{(p)} \int \frac{dk^2}{k^2} = \frac{3\alpha}{2\pi} m_0^{(p)} \ln \frac{\Lambda^2}{k_{\text{мин}}^2}. \quad (8.14)$$

Если гамильтониан  $H$  коммутирует с изоспином, то в выражении (8.10)  $m_1 = m_2$  и зависящая от изотопического спина часть расщепления масс равна

$$\delta M_3 = \frac{\alpha}{2\pi} m_1 \langle \bar{p} | \bar{\psi}(0) T_3 \psi(0) | p \rangle \int \frac{dk^2}{k^2}, \quad (8.15)$$

где

$$T_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и мы опустили матричные индексы. Эти вычисления можно проделать для любой частицы, и каждый раз мы получим тот же множитель

$$\frac{\alpha m_1}{2\pi} \int \frac{dk^2}{k^2}. \quad (8.16)$$

<sup>1)</sup> Для свободных кварков вклад члена кинетической энергии (не учитываемый здесь) уменьшает этот результат в 2 раза.

При переходе от одной частицы к другой будет изменяться только приведенный матричный элемент

$$\langle p | \bar{\psi}(0) T_3 \psi(0) | p \rangle.$$

Разумеется, для мезонов  $\delta M_3$  заменяется на  $(\delta\mu^2)_3$ .

Как видно из соотношения (8.15), наши результаты очень похожи на описание электромагнитных расщеплений при помощи модели „головастиков“ Коулмана и Глэшоу [15]. В частности, в пределе  $SU(3)$ -симметрии для матричных элементов  $\langle p | \bar{\psi} T_3 \psi | p \rangle$  мы получаем, что расщепления преобразуются, как октет. Далее, электромагнитные расщепления можно связать с октетными расщеплениями рассматриваемого  $SU(3)$ -мультиплета<sup>1)</sup>:

$$\delta M_8 = (m_1 - m_3) \langle p | \bar{\psi} Y \psi | p \rangle, \quad (8.17)$$

где

$$Y = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}. \quad (8.18)$$

Следовательно,

$$\frac{\delta M_3}{\delta M_8} = \frac{\alpha_1}{2\pi} \left( \frac{m_1}{m_1 - m_3} \right) \frac{\langle p | \bar{\psi}(0) T_3 \psi(0) | p \rangle}{\langle p | \bar{\psi}(0) Y \psi(0) | p \rangle} \int \frac{dk^2}{k^2}. \quad (8.19)$$

Для мезонных октетов и декуплета отношение входящих сюда матричных элементов является просто коэффициентом Клебша — Гордана. Для барионного октета это отношение зависит только от отношения  $f/d$  в массовой формуле для октета.

Из вида соотношения (8.19) следуют общие результаты Коулмана — Глэшоу, а именно:

1. Электромагнитные расщепления образуют октет.
2. Отношение  $f/d$  для электромагнитных расщеплений такое же, как для октетных.

<sup>1)</sup> Это выражение похоже на результат теории возмущений, однако мы можем получить тот же результат, если воспользуемся методом Фубини — Фурлана и учтем только полюсные вклады, пренебрегая дисперсионными интегралами [16].

3. Отношение электромагнитных расщеплений к октетным универсально, т. е. не зависит с точностью до коэффициентов Клебша — Гордана от рассматриваемой частицы (в том смысле, что логарифм  $\int dk^2/k^2$  не зависит от рассматриваемой частицы). Этот последний результат мы можем выразить в виде соотношения

$$\frac{K^0 - K^+}{K - \pi} = \frac{\Sigma^- - \Sigma^+}{\Xi - N} = \frac{n - p}{\Xi - \Sigma} = \frac{\Xi^- - \Xi^0}{\Sigma^- - N} = \frac{\alpha}{2\pi} \left( \frac{m_1}{m_1 - m_3} \right) \int \frac{dk^2}{k^2}, \quad (8.20)$$

в котором использованы обозначения Коулмана — Глэшоу [15] [их соотношения (9) и (10)].

Численно левая часть соотношения (8.20) изменяется от +0,017 до +0,038, а после выделения вкладов от „неголовастиков“ для нее можно получить наилучшее значение приблизительно +0,035. Следовательно,

$$\frac{m_1}{m_1 - m_3} \int \frac{dk^2}{k^2} \approx 30.$$

Любопытно, что в противоположность упрощенному представлению изосинглетный кварк здесь имеет *наименьшую* голую массу.

Хотя все эти рассуждения носят весьма умозрительный характер, мы можем сделать из них следующие выводы:

1. Вклад кваркового массового члена гамильтониана в электромагнитные расщепления масс расходится.

2. Маловероятно, чтобы этот вклад мог сократиться с другими вкладами.

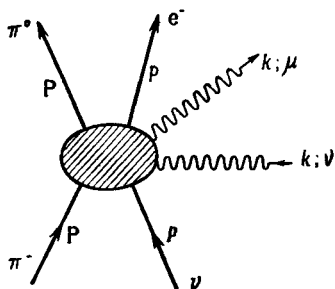
3. При достаточно общих предположениях о структуре гамильтониана  $H$  расходящаяся часть расщепления масс преобразуется как  $SU(3)$ -октет.

4. В предположении, что кварковый массовый член является основной причиной этого расщепления, можно получить многие результаты модели „головастиков“ Коулмана — Глэшоу.



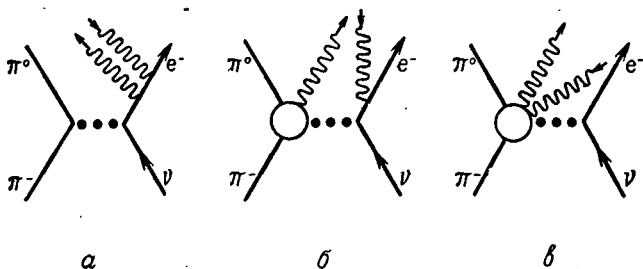
### § 9. Радиационные поправки к слабым взаимодействиям

Рассмотрим теперь расходящуюся часть радиационных поправок к  $\beta$ -распаду  $\pi^+$ -мезона [17]. Мы покажем,



Фиг. 2. Радиационная амплитуда для  $\beta$ -распада  $\pi$ -мезона.

что в случае алгебры токов  $U(6) \otimes U(6)$  радиационная поправка первого порядка расходится во всех порядках по сильным взаимодействиям, и вычислим коэффициент перед логарифмически расходящимся членом.



Фиг. 3. Структура амплитуды, соответствующей фиг. 2.

Мы начнем с рассмотрения инвариантной амплитуды изображенного на фиг. 2 процесса  $\pi^- \rightarrow \pi^0 + e^- + \bar{\nu} + \gamma + \gamma'$ , где  $\gamma$  и  $\gamma'$  — виртуальные фотоны с импульсом  $k$ .

Мы выпишем асимптотическую часть этой амплитуды, т. е. все члены  $O(1/k^2)$ , а затем „свяжем“ фотоны

друг с другом и с помощью интегрирования получим радиационную поправку. Рассматривая эту амплитуду, мы прежде всего сможем проверить, что результат является градиентно-инвариантным.

Амплитуда, соответствующая фиг. 2, состоит из трех членов, которым соответствуют диаграммы на фиг. 3. Мы будем считать нейтрино виртуальной частицей.

Амплитуда  $\mathfrak{M}_{\mu\nu}^{(a)}$  определяется по теории возмущений и сразу может быть выписана (мы пренебрегаем форм-фактором в пионной вершине):

$$\mathfrak{M}_{\mu\nu}^{(a)} = Ge^2 P_{\alpha\bar{u}} \left\{ \gamma_{\mu} \frac{1}{p+k-m} \gamma_{\nu} + \gamma_{\nu} \frac{1}{p-k-m} \gamma_{\mu} \right\} \frac{1}{p-m} \gamma^{\alpha} (1 - \gamma_5). \quad (9.1)$$

Выпишем также дивергенцию амплитуды  $\mathfrak{M}_{\mu\nu}^{(a)}$

$$k^{\mu} \mathfrak{M}_{\mu\nu}^{(a)} = Ge^2 P_{\alpha\bar{u}} \gamma_{\nu} \frac{1}{p-k-m} \gamma^{\alpha} (1 - \gamma_5). \quad (9.2)$$

Адронная часть амплитуды  $\mathfrak{M}_{\mu\nu}^{(6)}$  пропорциональна величине

$$\Gamma_{\mu\alpha}^{+} = -i \int d^4 x e^{ik \cdot x} \langle \pi^0 | T(j_{\mu}(x) j_{\alpha}^{+}(0)) | \pi^{-} \rangle, \quad (9.3)$$

где  $j_{\alpha}^{+}$  — полный слабый  $(V-A)$ -ток и<sup>1)</sup>

$$k^{\mu} \Gamma_{\mu\alpha}^{+} = \langle \pi^0 | j_{\alpha}^{+}(0) | \pi^{-} \rangle = P_{\alpha} \sqrt{2}. \quad (9.4)$$

Приведем общий вид величины  $\Gamma_{\mu\alpha}^{+}$ , следующий из соотношения (9.4), релятивистской ковариантности и сохранения изовекторного тока (см. § 4):

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\alpha}^{+} = & [k^2 P_{\mu} P_{\alpha} - (k \cdot P)(P_{\mu} k_{\alpha} + P_{\alpha} k_{\mu}) + \\ & + (k \cdot P)^2 g_{\mu\alpha}] \Phi_1(k^2, k \cdot P) + (k_{\mu} k_{\alpha} - g_{\mu\alpha} k^2) \Phi_2(k^2, k \cdot P) + \\ & + \varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} P_{\beta} k_{\gamma} \Phi_3(k^2, k \cdot P) - 2 \sqrt{2} \frac{(P_{\mu} - \frac{1}{2} k_{\mu})(P_{\alpha} - \frac{1}{2} k_{\alpha})}{k^2 - 2k \cdot P} F^2(k^2) + \\ & + \sqrt{2} (P_{\alpha} k_{\mu} + P_{\mu} k_{\alpha} - g_{\mu\alpha} P \cdot k) \left[ \frac{1 - F^2(k^2)}{k^2} \right] + \frac{1}{\sqrt{2}} g_{\mu\alpha} F^2(k^2). \end{aligned} \quad (9.5)$$

<sup>1)</sup> См. примечание на стр. 374; функцией распространения пиона является  $2(q^2 - \mu^2)^{-1}$ , иногда мы полагаем  $\mu = 1$ ,

Нас интересует член  $O(1/k)$  в  $\Gamma_{\mu\alpha}^+$ . Подобно выражению (4.6), он определяется одновременными коммутационными соотношениями. Предполагая справедливость дисперсионных соотношений без вычитаний для величин  $\Phi_i$  и  $F(k^2)$  и переходя от них к соотношениям, подобным (6.13), получим, что для согласованности с алгеброй токов  $U(6) \otimes U(6)$  при  $k_0 \rightarrow i\infty$  необходимо, как и в § 4, выполнение следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \Phi_1(k^2, 0) &\rightarrow O\left(\frac{1}{k^4}\right), & \Phi_2(k^2, 0) &\rightarrow O\left(\frac{1}{k^4}\right), \\ \Phi_3(k^2, k \cdot P) &\rightarrow k \cdot PO\left(\frac{1}{k^4}\right), & F(k^2) &\rightarrow 0. \end{aligned} \quad (9.6)$$

Тогда все члены  $\Gamma_{\mu\alpha}^+$  будут давать конечный вклад в радиационную поправку  $\mathfrak{M}_{\mu\nu}^{(6)}$ , за исключением члена

$$\sqrt{2} \frac{P_\alpha k_\mu + P_\mu k_\alpha - g_{\mu\alpha} P \cdot k}{k^2} \equiv \Gamma_{\mu\alpha}^+(\infty), \quad (9.7)$$

который следует из алгебры токов  $U(6) \otimes U(6)$ . Итак, для амплитуды  $\mathfrak{M}_{\mu\nu}^{(6)}$  можно взять следующее приближенное выражение:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{\mu\nu}^{(6)} &\approx -Ge^2 \left[ \frac{P_\alpha k_\mu + P_\mu k_\alpha - g_{\mu\alpha} (P \cdot k)}{k^2} \right] \bar{u} \gamma_\nu \times \\ &\times \frac{1}{p-k-m} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) + \left( \begin{array}{c} \mu \leftrightarrow \nu \\ k \leftrightarrow -k \end{array} \right). \end{aligned} \quad (9.8)$$

Его дивергенция имеет вид

$$\begin{aligned} k^\mu \mathfrak{M}_{\mu\nu}^{(6)} &= -Ge^2 P^\alpha \bar{u} \gamma_\nu \frac{1}{p-k-m} \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) + \\ &+ Ge^2 \left[ \frac{P_\alpha k_\nu + P_\nu k_\alpha - g_{\nu\alpha} (k \cdot P)}{k^2} \right] \bar{u} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5). \end{aligned} \quad (9.9)$$

Рассмотрим, наконец, амплитуду  $\mathfrak{M}_{\mu\nu}^{(a)}$ . В данном случае перенормировка волновой функции является более тонким вопросом, чем перенормировка электронной линии, которая может быть получена просто по теории возмущений. Чтобы решить эту задачу, вернемся

к методу Фубини — Фурлана [18]<sup>1)</sup> и рассмотрим величину

$$T_{\mu\nu}(P, q) = -i \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle \pi^- | T(j_\mu^-(x) j_\nu^+(0)) | \pi^- \rangle \quad (9.10)$$

во всех порядках по электромагнитному взаимодействию. Заметим, что

$$\langle \pi^- | j_\mu^-(0) | \pi^0 \rangle = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) Z (P_{\pi^-} + P_{\pi^0})_\mu.$$

При  $q \rightarrow 0$  получаем

$$O(q^2) = q_\mu q_\nu T^{\mu\nu} = 2q \cdot P + i \langle \pi^- | [\partial^\mu j_\mu^-(0), Q^+] | \pi^- \rangle - \\ - i \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle \pi^- | T(\partial^\mu j_\mu^-(x) \partial^\nu j_\nu^+(0)) | \pi^- \rangle. \quad (9.11)$$

Выделим борновские члены из последнего слагаемого, используя соотношение

$$-i \langle \pi^- | \partial_\mu j_\mu^-(0) | \pi^0 \rangle = \left( \frac{Z}{\sqrt{2}} \right) (q^2 + 2q \cdot P) = \left( \frac{Z}{\sqrt{2}} \right) (\mu_0^2 - \mu_-^2). \quad (9.12)$$

Вклад непрерывного спектра получается путем замены  $\partial_\mu j_\mu^\pm$  на  $\pm ie A_\mu j_\mu^\pm$  и последующего спаривания операторов электромагнитного поля. В низшем порядке по  $e^2$  имеем

$$O(q^2) = 2q \cdot P + \text{const} + \frac{Z^2 (\mu_-^2 - \mu_0^2)^2}{(q^2 + 2q \cdot P + \mu_-^2 - \mu_0^2)} + \\ + e^2 \int d^4x e^{iq \cdot x} D^{\mu\nu}(x) \langle \pi^- | T(j_\mu^-(x) j_\nu^+(0)) | \pi^- \rangle, \quad (9.13)$$

где  $D_{\mu\nu}$  — фотонная функция распространения. Сохраняя линейный по  $q \cdot P$  член, получаем формулу Фубини — Фурлана (Вайсбергера — Адлера)

$$(1 - Z^2) P_\sigma = \frac{e^2}{2} \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} D^{\mu\nu}(k) T_{\mu\nu}(P, k - q) \Big|_{q=0}. \quad (9.14)$$

<sup>1)</sup> S. Fubini, G. Furlan, C. Rossetti, IAEA, Vienna, не опубликовано. Аналогичные расчеты проводились Норттоном (R. Norton, частное сообщение). См. также работу [16].

Проводя преобразование сдвига в  $k$ -пространстве, мы можем перенести дифференцирование на функцию распространения фотона  $D_{\mu\nu}(k)$ . После взятия производной мы получим из  $D_{\mu\nu}$  величину порядка  $1/k^3$ , что позволит нам учитывать в  $T_{\mu\nu}$  только члены порядка  $1/k$ . Эти члены известны из § 3 и при тех же предположениях об асимптотическом поведении неупругих формфакторов равны

$$T_{\mu\nu}(P, k) = 2 \left( \frac{P_\mu k_\nu + P_\nu k_\mu - g_{\mu\nu} P \cdot k}{k^2} \right) + O \left( \frac{1}{k^2} \right).$$

Собирая полученные выражения, мы находим вклад перенормированных членов в амплитуду  $\mathfrak{M}_{\mu\nu}^{(c)}$

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{\mu\nu}^{(a)} &\approx Ge^2 \frac{\partial}{\partial k^\alpha} \left[ \frac{P_\mu k_\nu + P_\nu k_\mu - g_{\mu\nu} P \cdot k}{k^2} \right] \bar{u} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5), \\ k^\mu \mathfrak{M}_{\mu\nu}^{(a)} &\approx -Ge^2 \left[ \frac{P_\alpha k_\nu + P_\nu k_\alpha - g_{\nu\alpha} (P \cdot k)}{k^2} \right] \bar{u} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5). \end{aligned} \quad (9.15)$$

Складывая (9.2), (9.9) и (9.15), получаем проверку градиентной инвариантности

$$k^\mu \{ \mathfrak{M}_{\mu\nu}^{(a)} + \mathfrak{M}_{\mu\nu}^{(b)} + \mathfrak{M}_{\mu\nu}^{(c)} \} = 0. \quad (9.16)$$

Теперь мы можем вычислить радиационную поправку. Умножим найденные амплитуды на  $1/2 D_{\mu\nu}(k) d^4k/(2\pi)^4$ , где величина  $D_{\mu\nu}$  пропорциональна  $(1/k^2)(g_{\mu\nu} + \lambda k_\mu k_\nu/k^2)$ , и проинтегрируем. С диаграммами типа  $a$  (фиг. 3) нужно обращаться осторожно; чтобы учесть следующий из редуцированной формулы множитель  $\sqrt{Z_2}$  перед амплитудой. Вклад этих диаграмм имеет вид

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}^{(a)} &\approx GP_\alpha \bar{u} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \left[ -\frac{\alpha}{8\pi} (1 + \lambda) \int \frac{dk^2}{k^2} \right] \equiv \\ &\equiv -\frac{\alpha}{8\pi} (1 + \lambda) \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} \mathfrak{M}_0. \end{aligned} \quad (9.17)$$

Из соотношений (9.8) и (9.15) получаем вклады диаграмм б и в

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}^{(б)} &\approx -ie^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2} \left( g^{\mu\nu} + \frac{\lambda k^\mu k^\nu}{k^2} \right) \times \\ &\times \left[ \frac{P_\alpha k_\mu + P_\mu k_\alpha - g_{\mu\alpha} P \cdot k}{k^2} \right] \bar{u} \gamma_\nu \frac{k}{k^2} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) G = \\ &= \frac{\alpha}{\pi} \left( \frac{5}{8} + \frac{\lambda}{4} \right) \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} \mathfrak{M}_0, \end{aligned} \quad (9.18)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}^{(в)} &\approx -\frac{ie^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2} \left( g^{\mu\nu} + \frac{\lambda k^\mu k^\nu}{k^2} \right) \frac{\partial}{\partial k^\alpha} \times \\ &\times \left[ \frac{P_\mu k_\nu + P_\nu k_\mu - g_{\mu\nu} (P \cdot k)}{k^2} \right] \bar{u} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) G = \\ &= -\frac{\alpha}{8\pi} (1 + \lambda) \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} \mathfrak{M}_0. \end{aligned} \quad (9.19)$$

Следовательно, в главном порядке по  $\alpha$  амплитуда пионного  $\beta$ -распада имеет следующую структуру:

$$\mathfrak{M} \approx G P_\sigma \bar{u} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) u \left\{ 1 + \frac{3\alpha}{8\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} \right\}. \quad (9.20)$$

Таким образом, использование киральной алгебры токов  $U(6) \otimes U(6)$  приводит к серьезным трудностям при построении последовательной теории радиационных поправок к слабым полулептонным процессам. Эти трудности нельзя отнести за счет того, что мы не знаем формфакторов, возникающих из-за сильных взаимодействий. Однако даже при обрезании  $\Lambda^2 \sim 1/G$  поправка в формуле (9.20) составляет только около 1%.

## § 10. Электрон-позитронная аннигиляция в адроны

В этом параграфе мы применим те же рассуждения, что и в § 8, к среднему по вакууму от электромагнитных токов. В соответствии с определением (3.1)

$$\begin{aligned} \sum_n \langle 0 | j_\mu(0) | n \rangle \langle n | j_\nu(0) | 0 \rangle (2\pi)^4 \delta^4(P_n - q) = \\ = (q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2) \rho(q^2). \end{aligned} \quad (10.1)$$

Функция  $\rho(q^2)$  связана с полным сечением процесса  $e^+ + e^- \rightarrow$  (адроны) при энергии  $\sqrt{q^2}$  в системе центра масс:

$$\sigma_{\text{полн}}(q^2) = \frac{16\pi^2 \alpha^2 \rho(q^2)}{q^2}.$$

Умножая соотношение (10.1) на  $E_n = q_0$  и интегрируя по  $q_0$ , мы получаем (предполагаем, что существует двойной коммутатор)

$$\begin{aligned} \int d^3x \langle 0 | [j_\mu(x), [H, j_\nu(0)]] | 0 \rangle &= (\eta_\mu \eta_\nu - g_{\mu\nu}) \int \frac{dq^2}{2\pi} q^2 \rho(q^2) = \\ &= \frac{(\eta_\mu \eta_\nu - g_{\mu\nu})}{16\pi^2 \alpha^2} \int \frac{dq^2}{2\pi} q^4 \sigma_{\text{полн}}(q^2). \end{aligned} \quad (10.2)$$

Вернемся к гамильтониану в кварковой модели (8.10) и вычислению двойного коммутатора (8.11). Уже член кинетической энергии приводит к трудностям:

$$\begin{aligned} \int d^3x \langle 0 | [j_l(x), [H_0, j_l(0)]] | 0 \rangle &= \\ &= -4i \langle 0 | \psi^\dagger (\alpha_l \nabla_l - \delta_{ll} \alpha \cdot \nabla) Q^2 \psi | 0 \rangle = \\ &= 4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Sp} (\gamma_l k_l - \delta_{ll} \gamma \cdot k) Q^2 S(k), \end{aligned} \quad (10.3)$$

где  $S(k)$  — функция распространения для неперенормированных кварковых полей

$$S(k) = i \int \frac{dm^2 [k\rho_1(m^2) + \rho_2(m^2)]}{k^2 - m^2}$$

и

$$\int dm^2 \rho_1(m^2) = 1, \quad \rho_1 \geq 0. \quad (10.4)$$

Очевидно, что член с двойным коммутатором квадратично расходится:

$$\int d^3x \langle 0 | [j_l(x), [H_0, j_l(0)]] | 0 \rangle \sim \int d^4k \int dm^2 \rho_1(m^2). \quad (10.5)$$

Массовый член пропорционален вакуумному среднему  $\langle 0 | \bar{\psi} Q^2 M \psi | 0 \rangle$ , которое связано с матричным элементом

$$\langle 0 | [Q_{\text{акс}}^+, \partial_\mu j_\mu^-(0)_{\text{акс}}] | 0 \rangle \sim \langle 0 | \bar{\psi} \{ \tau^+, \{ \tau^-, M \} \} \psi | 0 \rangle \quad (10.6)$$

и даст конечный вклад, если мы воспользуемся гипотезой о частичном сохранении аксиально-векторного тока и в сумме по промежуточным состояниям ограничимся пионом [1].

К сожалению, член, описывающий взаимодействие, труднее поддается анализу, однако маловероятно, чтобы он точно скомпенсировал квадратичную расходимость от первого члена. Мы можем заключить, что

$$\int dq^2 q^4 \sigma_{\text{полн}}(q^2) = \infty. \quad (10.7)$$

Если мы потребуем, чтобы интеграл (10.7), подобно выражению (10.5), расходился квадратично, то получим, что (с точностью до логарифмов)

$$\sigma_{\text{полн}}(q^2) \sim \frac{1}{q^2} \quad \text{при} \quad q^2 \rightarrow \infty. \quad (10.8)$$

Такой же результат следует и из теории возмущений. Уже давно высказывалась мысль<sup>1)</sup>, что *полный* выход адронов, образующихся на встречных пучках при заданной энергии, должен быть приблизительно таким же, как, скажем, выход  $\mu^+ - \mu^-$ -мезонов. Приведенный расчет можно рассматривать как аргумент (но, конечно, не доказательство) в пользу этой точки зрения<sup>2)</sup>.

### Л и т е р а т у р а

1. Gell-Mann M., Phys. Rev., 125, 1062 (1962); Physics, 1, 63 (1964).
2. Feynman R., Gell-Mann M., Zweig G., Phys. Rev. Letters, 13, 678 (1964).
3. Schwinger J., Phys. Rev. Letters, 3, 296 (1959) (ст. 10 настоящей книги).
4. Johnson K., Nucl. Phys., 25, 431 (1961).
5. Adler S., Phys. Rev. Letters, 14, 1051 (1965).  
Weisberger W., Phys. Rev. Letters, 14, 1047 (1965).
6. Adler S., Phys. Rev., 143, 1144 (1966) (ст. 11 настоящей книги).
7. Cabibbo N., Radicati L., Phys. Letters, 12, 697 (1965).

<sup>1)</sup> В. Рихтер, частное сообщение.

<sup>2)</sup> Подобные рассуждения в случае среднего по вакууму от заряженных токов приводят к выводу, что при большой массе  $W$ -мезона вероятность распада  $W \rightarrow$  (лептоны) сравнима с вероятностью  $W \rightarrow$  (адроны).



8. Levinson C., Muzinich I., Phys. Rev. Letters, **15**, 715 (1965).  
Amati D., Bouchiat C., Nuyts J., Phys. Letters, **19**, 59 (1965).  
Pandit L., Schechter J., Phys. Letters, **19**, 56 (1965).  
Weisberger W., Phys. Rev., **143**, 1302 (1966).
9. Adler S., Phys. Rev., **137**, B1022 (1965).
10. Kawarabayashi K., Wada W., Phys. Rev., **146**, 1209 (1966).
11. Bjorken J., Phys. Rev. Letters, **16**, 408 (1966) (ст. 12 настоящей книги).
12. Iddings C. K., Phys. Rev., **138**, B446 (1965).
13. Cottingham W., Ann. of Phys., **25**, 424 (1963).
14. Cini M., Ferrari E., Gatto R., Phys. Rev. Letters, **2**, 7 (1959).
15. Coleman S., Glashow S., Phys. Rev., **134**, B671 (1964).  
Coleman S., Schnitzer H., Phys. Rev., **136**, B223 (1964).
16. Fubini S., Furlan G., Rossetti C., Nuovo Cimento, **40A**, 1171 (1965) (ст. 5 настоящей книги).
17. Chang N. P., Phys. Rev., **131**, 1272 (1963).  
DaPrato G., Putzulu G., Nuovo Cimento, **21**, 541 (1961).
18. Йенни Д. Р., Труды Международной конференции по электромагнитным взаимодействиям при низких и средних энергиях, Дубна, 1967.

## ПОСЛЕСЛОВИЕ.

### ДАЛЬНЕЙШЕЕ РАЗВИТИЕ АЛГЕБРЫ ТОКОВ

*Л. Д. Соловьев*

Написать послесловие к этой книге — задача довольно сложная. К началу 1970 г. по алгебре токов и правилам сумм было опубликовано около 2000 статей, из них только в 1969 г. более 400. Вместе с тем в книге Адлера и Дашена отражены не только основы, но и наиболее существенные результаты метода алгебры токов: формулировка теории нарушенной симметрии и универсальности слабых взаимодействий, низкоэнергетические теоремы и правила сумм. Дальнейшие исследования были в основном посвящены попыткам осмыслить и обобщить эти результаты. Среди них можно выделить следующие направления: попытки отойти от приближений, использовавшихся ранее при выводе низкоэнергетических теорем, попытки понять происхождение алгебры токов, дальнейшие приложения локальных коммутаторов, выяснение связи метода алгебры токов с теорией возмущений в лагранжевом подходе, обобщение свержсходящихся правил сумм. Здесь мы можем сделать лишь краткие замечания об этих исследованиях и о роли алгебры токов в теории частиц. Детальное обсуждение последних работ по алгебре токов содержится в обзоре Вайнберга на Венской конференции 1968 г. [1], в докладах на конференции в Женеве 1969 г. [2], в обзоре Реннера на Лундской конференции 1969 г. [3] и в обзорных докладах на конференции в Киеве 1970 г. [73].

В современной теории частиц существуют несколько направлений: 1) аксиоматический подход — исследование наиболее общих принципов релятивистской квантовой теории; 2) применение аналитических свойств  $S$ -матрицы — как вытекающих из аксиоматического подхода, так и постулируемых; сюда относятся, например, строгие асимптотические теоремы для рассеяния при высоких энергиях и дисперсионная теория низкоэнергетических процессов; 3) динамические модели, например модель полюсов Редже, квазипотенциальный подход, теория слабых взаимодействий; 4) теории симметрий, в которых

предполагается существование главного симметричного взаимодействия и постулируются явные свойства взаимодействий, нарушающих эту симметрию, например  $SU_3$ -симметрия с октетным нарушением; 5) квантовая электродинамика, описывающая электромагнитное взаимодействие частиц; эту теорию часто используют в качестве образца для построения моделей других взаимодействий в приближении слабой связи с целью выяснить если не количественные, то хотя бы некоторые качественные закономерности.

К какому из этих направлений принадлежит алгебра токов? Прежде всего ясно, что алгебра токов — это теория *динамической* симметрии. Так называют симметрию, проявляющуюся не в соотношениях между матричными элементами  $S$ -матрицы (для конечного числа частиц), а в *существовании* некоторых объектов, в данном случае 8 векторных и 8 аксиально-векторных токов адронов. В качестве известного примера динамической симметрии можно привести локальную градиентную инвариантность, проявляющуюся в существовании фотонов.

В алгебре токов предполагается, что, несмотря на нарушение симметрии  $S$ -матрицы и состояний частиц, заряды векторных и аксиально-векторных токов удовлетворяют в фиксированный момент времени коммутационным соотношениям алгебры  $SU_3 \times SU_3$ . Эти соотношения и составляют основу алгебры токов как теории *нарушенной* симметрии, в которой в отличие от четвертого из перечисленных выше направлений не делается явных предположений о нарушающем симметрию взаимодействии. Значит ли это, что алгебра токов есть теория произвольного нарушения симметрии, т. е. лишена физического содержания? Рассмотрение моделей показывает, что коммутаторы алгебры токов выполняются в довольно широком классе теорий с нарушенной симметрией, однако эти теории не являются произвольными (лагранжиан нарушающего симметрию взаимодействия не должен, например, содержать производных), причем к способу нарушения симметрии наиболее чувствителен коммутатор двух аксиальных зарядов. Например, нетрудно построить модель нарушенной симметрии с 8 барионами и 8 псевдоскалярными мезонами без скалярных мезонов, в

которой этот коммутатор нарушается (а все остальные коммутаторы выполняются). Таким образом, имеются основания заключить, что алгебра токов как теория нарушенной симметрии является динамической теорией и должна быть проверена в эксперименте.

Эта сторона алгебры токов особенно подчеркнута в ст. 5 и работе [6] гл. 4, в которых получены формулы для поправок к результатам, соответствующим точной симметрии. Правда, эти поправки имеют вид дисперсионных интегралов, экспериментальная оценка которых возможна лишь в редких случаях (например, в соотношении Адлера — Вайсбергера); в большинстве случаев для их оценки нужно привлекать модели.

Существенным физическим предположением этой теории является предположение о том, что в число адронных токов, удовлетворяющих коммутационным соотношениям алгебры, входят те токи, которые участвуют в слабом и электромагнитном взаимодействиях адронов. Это предположение означает, что матричные элементы токов могут быть измерены в слабых и электромагнитных процессах и, следовательно, коммутационные соотношения, связывающие эти матричные элементы, могут быть в принципе проверены. При этом алгебра токов, по видимому, впервые позволила с некоторой единой точки зрения подойти к рассмотрению сильного, слабого и электромагнитного взаимодействий адронов. Для слабого взаимодействия эта теория позволила в общем виде сформулировать понятие универсальности, о чем подробно говорится в гл. 2, § 3, п. 1, хотя происхождение этой универсальности слабого взаимодействия остается неясным (см., однако, геометрическую теорию слабого взаимодействия [4]).

Наконец, последним существенным моментом этой теории является гипотеза о частичном сохранении аксиально-векторного тока, которая устанавливает дополнительную явную связь между сильным и слабым взаимодействиями адронов. Что является основанием для этой гипотезы? Необходимым условием ее выполнения является относительная малость массы пиона. Можно предположить, что эта малость (вместе с допущениями о гладкости) является достаточной и что гипотеза о ча-

стичном сохранении близка по своему содержанию к периферическим моделям. Однако возможно и другое (симметричное) истолкование этой гипотезы, на котором мы остановимся ниже.

Таким образом, коммутационные соотношения алгебры  $SU_3 \times SU_3$  шестнадцати зарядов, соответствующих слабым и электромагнитному токам адронов, и частичное сохранение аксиально-векторного тока составляют содержание той динамической симметрии, существование которой предполагает рассматриваемый метод. Не останавливаясь сейчас на возможном происхождении такой симметрии (кварки? голдстоуновские бозоны?), заметим, что она непосредственно приводит к низкоэнергетическим теоремам для пионов, подобно тому как динамическая симметрия, проявляющаяся в существовании фотонов, приводит к известным низкоэнергетическим теоремам для фотонов. Правда, теоремы для пионов являются приближенными — они были бы точными, если бы масса пиона равнялась нулю. Поэтому для проверки предсказаний алгебры токов нужно уметь продолжать по массе пиона. Хотя возможность и способы такого продолжения формально не связаны с перечисленными выше постулатами алгебры токов, они весьма существенны для экспериментальной проверки этой теории. При этом малость пионной массы оказывается тем экспериментальным фактом, который существенно используется в этой теории.

Таким образом, алгебра токов является специфической динамической теорией, имеющей общие черты со вторым, третьим и четвертым направлениями, перечисленными выше. Какова ее связь с общими аксиомами локальной теории и перенормируемой теорией возмущений? Постулирование коммутаторов алгебры не противоречит общим аксиомам — это видно на простейшем примере модели свободных кварков. Однако дальнейшее исследование этой связи и выяснение динамического содержания алгебры токов в рамках локальной теории является сложным делом. Характерной чертой метода алгебры токов является использование *одновременных* коммутаторов, т. е. понятий, чуждых локальной теории, имеющей дело с операторнозначными *обобщенными* функциями,

произведение которых в фиксированный момент времени, вообще говоря, не имеет смысла. Поэтому с точки зрения локальной теории поля нужно прежде всего определить понятия несохраняющихся зарядов и одновременных коммутаторов. Такое определение, вообще говоря, не однозначно, в чем и состоит основная трудность исследования алгебр токов в рамках локальной теории. На некоторых результатах в этом направлении мы остановимся ниже. Сейчас же заметим, что это обстоятельство усиливает интерес к свержсходящимся соотношениям, для получения которых не требуется одновременных коммутаторов, а также к алгебре полей, в которой токи отождествляются с каноническими полями, одновременные коммутаторы которых сравнительно просты. По-видимому, возможности для осмысления алгебры токов с точки зрения локальной теории еще далеко не исчерпаны.

Рассмотрим теперь основные направления современных исследований по алгебре токов.

*Экспериментальная проверка.* Наиболее важные приложения алгебры токов, которые можно сравнить с имеющимися экспериментальными данными, рассмотрены в первой и второй главах книги и в ст. 1—8 (обсуждение этих приложений см. также в [5]). Они согласуются с большой совокупностью экспериментальных данных по процессам  $\pi N \rightarrow \pi N$ ,  $\pi N \rightarrow 2\pi N$ ,  $\gamma N \rightarrow \pi N$ ,  $\gamma N \rightarrow 2\pi N$ ,  $K \rightarrow \pi l\nu$ ,  $K \rightarrow 2\pi l\nu$ ,  $K \rightarrow 3\pi$ . В последнее время к этому списку добавились процессы  $eN \rightarrow e\pi N$ ,  $NN \rightarrow \pi NN$ ,  $NN \rightarrow KYN$ ,  $\pi \rightarrow lv\gamma$ ,  $K \rightarrow lv\gamma$ . Здесь мы лишь заметим, что проблема распада  $\eta \rightarrow 3\pi$  (гл. 2, § 2, п. 5) остается нерешенной (см. по этому поводу обзор [6]), и кратко остановимся на длинах рассеяния мезонов и на  $K_{L3}$ -распаде.

Формулы для длин рассеяния мезонов (гл. 2, ст. 4) зависят не только от постулатов алгебры токов и предположения об экстраполяциии, но и от свойств так называемого  $\Sigma$ -оператора [гл. 2, первая из формул (2.14)]. Свойства этого оператора связаны с нарушениями симметрии  $SU_3 \times SU_3$ , к которым не чувствительны коммутаторы алгебры токов.

Используя линейную экстраполяцию и определенные свойства  $\Sigma$ -оператора (на которых мы остановимся ни-

же), Вайнберг (ст. 4) получил для длин  $\pi\pi$ -рассеяния величины  $a_0 = 0,16$ ,  $a_1 = 0,03$ ,  $a_2 = -0,045$  (в единицах массы пиона при экспериментальном значении  $f_\pi$ ), которые являются малыми и, следовательно, эффективно определяются не массой пиона, а ее отношением к некоторой большей массе (заметим в этой связи, что простая  $\rho$ -мезонная модель [7] дает  $2a_0 - 5a_2 = 0,6$ ,  $a_1 = 0,04$  в согласии с алгеброй токов). Для определения этих длин из экспериментальных данных по реакции  $\pi N \rightarrow 2\pi N$  приходится использовать не очень надежную экстраполяцию или модели. Одну из таких моделей дает алгебра токов, позволяющая вычислить непериферический вклад в этот процесс вблизи порога (см. [5] в гл. 2; [8]). Сравнение этой модели с данными, полученными в Дубне [9], дает  $|2a_0 + a_2| = 0,4 \pm 0,1$  в согласии с алгеброй токов. Относительно проверки соотношения  $a_0/a_2 = -7/2$  (вытекающего из предположения о  $\Sigma$ -операторе) см. работу [10]. К сожалению, данные о  $K_{14}$ -распаде пока не позволяют надежно определить длины  $\pi\pi$ -рассеяния. Использование правил сумм при конечной энергии (см. ниже) позволило оценить высокоэнергетический вклад в соотношение Адлера — Вайсбергера для  $\pi\pi$ - и  $\pi K$ -рассеяния (ст. 1), при этом оказалось, что этому соотношению можно удовлетворить без большого скалярного вклада при низких энергиях, так что оно не противоречит малым длинам  $\pi\pi$ -рассеяния [11].

В случае  $\pi N$ -рассеяния пренебрежение как эффектом экстраполяции, так и вкладом  $\Sigma$ -оператора приводит к хорошему согласию с экспериментом (гл. 2, § 2, п. 1; ст. 4). Как обстоит дело для  $\pi\Sigma$ -,  $KN$ -рассеяния и других процессов с отличной от нуля странностью? Попытка исследовать поправки к длинам рассеяния за счет экстраполяции была предпринята в работах [12]. Авторы этих работ отказались от правил сумм при  $p \rightarrow \infty$  и рассмотрели случай  $p = 0$  (гл. 4). С помощью представления Лоу они получили для амплитуды рассеяния дисперсионное представление по энергии и массам внешних мезонов, так что предельная точка, в которой справедлива низкоэнергетическая теорема, лежит на пути интегрирования. Делая вычитание в этой точке, они получают представление для амплитуды, в котором константа

вычитания известна из низкоэнергетической теоремы, а дисперсионный интеграл дает искомую поправку. Правда, оценка этого интеграла невозможна без модельных предположений. Сравнение этой теории с экспериментальными значениями длин мезон-барийонного рассеяния сделано в работе [13]. Вычисляя поправочный интеграл в некоторой единой для всех процессов модели, авторы получили, что поправка на экстраполяцию и вклад  $\Sigma$ -оператора малы для  $\pi N$ -рассеяния и велики почти для всех процессов с отличной от нуля странностью. При этом вклады  $\Sigma$ -оператора не противоречат тем его свойствам, которые были использованы при выводе длин  $\pi\pi$ -рассеяния и которые вытекают из определенным образом нарушенной симметрии  $SU_3 \times SU_3$  [22], хотя это заключение сильно зависит от модели экстраполяции (см. также [14]). Заметим, что вклады  $\Sigma$ -оператора важны в тех случаях, когда нельзя пренебречь массой пиона или когда существенно нарушение  $SU_3$ -симметрии.

Таким образом, до сих пор мы видели большое число экспериментальных подтверждений алгебры токов и лишь одно противоречие (распад  $\eta \rightarrow 3\pi$ ). В настоящее время для проверки этой теории большое значение имеет уточнение данных о  $K_{13}$ -распаде. Из коммутатора аксиального заряда с векторным током вытекает связь формфакторов  $f_{\pm}$  этого распада с константами  $K_{12}$  и  $\pi_{12}$ -распадов (ст. 6)

$$f_+ + f_- = \frac{f_K}{f_{\pi}}. \quad (1)$$

Деля обе части этого равенства на  $f_+$  и используя для правой части экспериментальные данные и теорию Кабиббо, получаем  $1 + \xi \approx 1,28$ , где  $\xi \equiv f_-/f_+ \approx 0,3$ . Это число хорошо согласовывалось с экспериментальным значением, приведенным в ст. 6. Однако новые поляризационные измерения дали величину  $\xi \approx -1$  (см. доклад Руббинга [2]). Такое большое расхождение трудно объяснить эффектами экстраполяции, если не предполагать аномально сильного  $\pi K$ -взаимодействия при низких энергиях (его можно было бы объяснить, если бы в эксперименте был обнаружен странный скалярный мезон  $\kappa$  с массой меньше 600 Мэв). Заметим, что в приближении



$SU_3$ -симметрии  $\xi = 0$ . Учет нарушения этой симметрии с помощью алгебры токов (с единственным предположением о малости эффектов экстраполяций) дает близкое к этому значение  $\sim 0,3$ . Если эксперимент подтвердит, что  $\xi = -1$  и что нет легкого  $\chi$ -мезона, то это будет серьезным противоречием для алгебры токов. Однако прежде всего нужно уточнить экспериментальное значение  $\xi$ .

*Эффективные лагранжианы и модели с жесткими пионами.* Как показано в гл. 2 и ст. 3, алгебра токов позволяет получать низкоэнергетические теоремы для процессов с произвольным числом пионов и нуклонов, но их практический вывод в случае большого числа пионов весьма громоздок, если использовать обычный аппарат алгебры токов. Оказывается, однако, что все эти теоремы можно записать с помощью одного эффективного лагранжиана ([2] в гл. 2). Для этого достаточно нарисовать для заданного процесса все диаграммы Фейнмана типа деревьев (т. е. не содержащие замкнутых петель), соответствующие этому лагранжиану, а для вершины без испускания реальных пионов воспользоваться экспериментальным матричным элементом. Эффективные лагранжианы в последнее время привлекают большое внимание, поэтому остановимся на них несколько подробнее.

Большим достоинством лагранжева подхода является то, что в нем одна функция — лагранжиан — включает в себе все свойства симметрии процессов, которые автоматически выполняются в любом порядке теории возмущений. Поэтому если построить лагранжиан, зависящий от полей пионов и других частиц, участвующих в процессе, для которого выполняется алгебра токов и частичное сохранение аксиально-векторного тока, то этим же требованиям будут удовлетворять и вклады диаграмм типа деревьев, т. е. амплитуды процессов с мягкими пионами (заметим, что, как видно, например, из формулы (2.3) гл. 2, диаграммы типа деревьев могут соответствовать только мягким пионам). При этом простейший вид лагранжиана (минимальное число производных) будет соответствовать простейшему предположению о гладкости, используемому в обычном аппарате алгебры токов. Трудность здесь состоит лишь в том, чтобы исключить из

лагранжиана вспомогательные поля, что и приводит к его нелинейности.

Рассмотрим в качестве примера пион-пионное взаимодействие. Построим сначала лагранжиан, инвариантный относительно группы  $SU_2 \times SU_2$ . Из одного пионного поля  $\pi$  невозможно построить инвариант этой группы. Вводя вспомогательное скалярное изоскалярное поле  $\sigma$ , получаем единственный инвариант

$$\pi^2 + \sigma^2 = f_\pi^2, \quad (2)$$

который должен быть  $c$ -числом. Поэтому простейший инвариантный лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L}_{\text{инв}} = \frac{1}{2} [(\partial\pi)^2 + (\partial\sigma)^2]. \quad (3)$$

Вводя простейшее нарушение симметрии, при котором выполняется гипотеза о частичном сохранении аксиально-векторного тока (см. гл. 1, § 2, п. 2), получаем искомый лагранжиан

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [(\partial\pi)^2 + (\partial\sigma)^2] + f_\pi M_\pi^2 \sigma, \quad (4)$$

где  $\sigma$  выражается через  $\pi$  по формуле (2). Разлагая его до членов порядка  $\pi^4$ , получаем лагранжиан, описывающий четырехпионную вершину:

$$\mathcal{L}_4 = \frac{1}{8f_\pi^2} [(\partial\pi^2)^2 - M_\pi^2 (\pi^2)^2], \quad (5)$$

из которого получают длины пион-пионного рассеяния, совпадающие с результатом алгебры токов. (Заметим, что при выводе этого результата в ст. 4 были использованы свойства  $\Sigma$ -оператора, как раз вытекающие из рассмотренной  $\sigma$ -модели.)

Эффективный лагранжиан для взаимодействия пионов и нуклонов получен в работе [2] гл. 2. С его помощью легко получить длины  $\pi N$ -рассеяния, причем соответствующие диаграммы типа деревьев, как указано выше, не применимы вдали от порога реакции. Рассмотрим, однако, обобщенный эффективный лагранжиан, содержащий поля  $N$ ,  $\pi$ ,  $N_{33}$  и  $\rho$ . Какому приближению соответ-

ствуется описание  $\pi N$ -рассеяния вдали от порога с помощью отвечающих ему обобщенных диаграмм типа деревьев? На этот вопрос легко ответить с помощью формулы (2.10) гл. 2, примененной к  $\pi N$ -рассеянию. Эта формула типа тождества Уорда, выражающая амплитуду через коммутаторы, является точной, причем вдали от порога в ней нужно учитывать все, а не только полюсные члены. Это можно сделать лишь при модельных предположениях. Нетрудно понять, что если произведения операторов в правой части этой формулы разложить по промежуточным состояниям и среди них учесть лишь  $\pi$ -,  $N$ -,  $N_{33}$ - и  $\rho$ -частицы и предположить, что соответствующие вершины являются достаточно гладкими функциями, то мы получим выражение, отвечающее обобщенному эффективному лагранжиану. Подобные модели, называемые моделями с жесткими пионами, в последнее время часто используются для получения поправок к низкоэнергетическим теоремам или для анализа процессов, к которым эти теоремы неприменимы (например,  $\rho \rightarrow \pi\pi$ ,  $A_1 \rightarrow \rho\pi$ ) (см. работы [15] и ранее упомянутые работы [12]). Обсуждение моделей не входит в задачи этой книги. Мы упоминаем о модели с жесткими пионами, потому что она поясняет смысл использования эффективных лагранжианов в приближении диаграмм типа деревьев. Заметим, что использование эффективных лагранжианов существенно сокращает выкладки и в этом случае. Отметим также, что обобщенные эффективные лагранжианы обладают свойством дуальности (см. ниже). Одновременный учет диаграмм с  $N$ ,  $N_{33}$  и  $\rho$  в  $\pi N$ -рассеянии, вообще говоря, мог бы привести к удвоению длин рассеяния, которые получаются либо с помощью  $N$  и  $N_{33}$ , либо с помощью  $\rho$ . Однако симметрия лагранжиана приводит к появлению добавочных контактных вершин, которые и восстанавливают правильный (дуальный) результат.

Нелинейным лагранжианам, инвариантным относительно групп  $SU_2 \times SU_2$  и  $SU_3 \times SU_3$ , в последнее время уделяется много внимания (см., например, [2] в гл. 2 и [16]). Это связано не только с тем, что использование таких лагранжианов в приближении диаграмм типа деревьев существенно сокращает выкладки в методе алгебры

токов. Теории с такими лагранжианами могут дать интересный пример реализации динамической симметрии, существование которой предполагает алгебра токов. Для этого, разумеется, нужно уметь перенормировывать такие теории, которые в обычном смысле крайне перенормируемы. Метод перенормировки таких теорий был предложен Ефимовым и Фрадкиным [17], однако вопрос о том, удастся ли построить разумную физическую теорию с нелинейным лагранжианом, требует дальнейших сложных исследований.

*Об интерпретации алгебры токов.* Как показано в гл. 1, § 2, можно построить ряд моделей динамической симметрии, в которых существуют токи, удовлетворяющие коммутационным соотношениям алгебры. Эти модели можно разделить на два класса в зависимости от того, как в них получается частичное сохранение аксиально-векторного тока. В моделях первого типа это сохранение возникает в результате сложной *динамики*, приводящей к малой массе пиона и преобладанию пионного полюса в матричных элементах дивергенции аксиально-векторного тока. Предсказать этот эффект практически невозможно, и его фактически приходится принимать как экспериментальный факт. В моделях второго типа уже *симметрия* основного взаимодействия приводит к сохранению аксиального тока; одной малости нарушающего симметрию взаимодействия достаточно для частичного сохранения этого тока.

Наиболее экономной (по числу исходных частиц) моделью при этом является модель кварков, в которой основное взаимодействие  $SU_3$ -инвариантно. Эта модель имеет ряд бесспорных успехов в объяснении спектра частиц и ряда соотношений между константами взаимодействий (см., например, [18]), однако с точки зрения алгебры токов она принадлежит к первому типу моделей.

С точки зрения алгебры токов и ее экспериментальных успехов более привлекательны модели второго типа, в которых основное взаимодействие инвариантно относительно группы  $SU_2 \times SU_2$  (или  $SU_3 \times SU_3$ ), что обеспечивает сохранение аксиально-векторного тока в главном приближении. Простейшей моделью такого типа являет-

ся  $\sigma$ -модель (гл. 1, § 2, п. 2; [15] в гл. 1), которую можно сформулировать в нескольких вариантах:

1) в главном приближении лагранжиан и соответствующие ему состояния инварианты относительно группы  $SU_2 \times SU_2$ , т. е. нуклоны имеют нулевую массу, а массы пионов и  $\sigma$ -частицы совпадают; такая реализация симметрии должна быть сильно нарушена и не может считаться главной;

2) в главном приближении лагранжиан инвариантен относительно линейных преобразований  $SU_2 \times SU_2$ , однако в отличие от первого варианта его параметры таковы, что соответствующие ему состояния физических частиц инвариантны лишь относительно группы  $SU_2$ : ими являются нуклон с произвольной массой,  $\sigma$ -мезон с произвольной массой и пионы с нулевой массой (гл. 1, § 2, п. 2; [15] в гл. 1);

3) в главном приближении имеется нелинейная реализация симметрии, рассмотренная выше; при этом нуклоны имеют наблюдаемую массу,  $\sigma$ -частицы отсутствуют, пионы имеют нулевую массу [см. (3)].

Второй (если  $\sigma$ -частица существует) или третий (если диаграммы с замкнутыми петлями имеют смысл) вариант этой модели особенно привлекателен. В обоих случаях реализацией динамической  $SU_2 \times SU_2$ -симметрии (т. е. симметрии лагранжиана) являются физические состояния с низшей симметрией ( $SU_2$ ) и пионы нулевой массы. Такая реализация динамической симметрии иногда называется спонтанно нарушенной симметрией, а соответствующие ей частицы нулевой массы — голдстоуновскими бозонами. Этот механизм реализации симметрии хорошо известен в теории твердого тела, где он приводит к сверхпроводимости и сверхтекучести [19]. В теории частиц этот механизм рассматривался в работах [20]. Сейчас он считается наиболее естественной реализацией динамической симметрии алгебры токов [21].

Уже главное приближение такой теории с симметрией  $SU_2 \times SU_2$ , в котором аксиально-векторный ток сохраняется и пионы имеют нулевую массу, дает низкоэнергетические теоремы для излучения мягких пионов нуклонами, как это показано в гл. 2, § 1. Учет наруше-

ния этой симметрии приводит к ненулевой массе пиона и несохранению аксиально-векторного тока. Если это нарушение мало (в пользу чего свидетельствует малая величина массы пиона), то из дисперсионных соотношений типа (1.95) в гл. I нетрудно получить, что аксиальный ток должен частично сохраняться независимо от вида нарушения (см. [21]).

Оператор  $\Sigma$  [гл. 2, ур-ние (2.14)] в главном приближении равен нулю, поскольку ток сохраняется. Следовательно, в общем случае он пропорционален величине нарушающего симметрию взаимодействия, т. е. массе пиона. Поэтому он должен давать малый вклад в длины  $\pi N$ -рассеяния.

При учете странных частиц исходной симметрией следует считать симметрию  $SU_3 \times SU_3$ . Она нарушается не только за счет относительно малого нарушения симметрии  $SU_2 \times SU_2$ , но и за счет нарушения  $SU_3$ -симметрии. Поэтому оператор  $\Sigma$  для странных частиц может давать большой вклад. Его, разумеется, нужно учитывать и в задаче о длинах пион-пионного рассеяния, где важен учет нарушения симметрии  $SU_2 \times SU_2$ .

Изучению нарушающего симметрию взаимодействия посвящено большое число работ [1, 3]. Если, например, предположить, что гамильтониан взаимодействия, нарушающего симметрию  $SU_3 \times SU_3$ , преобразуется по простейшему представлению  $(3, 3^*) + (3^*, 3)$  этой группы [22], то мы получим  $\Sigma$ -оператор как раз с теми свойствами, которые использовались при выводе длин пион-пионного рассеяния и не противоречат данным о длинах мезон-барионного рассеяния. Однако, делая такие предположения, мы переходим от алгебры токов к теории симметрии, подробное рассмотрение которой выходит за рамки этой книги. Обсуждение нарушения симметрии нам нужно лишь для того, чтобы увидеть ту симметрию адронов, которая может соответствовать алгебре токов.

Вопрос о происхождении этой симметрии полностью открыт.

*Локальные коммутаторы.* До сих пор мы рассматривали коммутаторы, в которые входят заряды токов, т. е. интегралы по пространству от временных компонент токов. Дальнейшей детализацией рассмотренных выше

представлений является постулирование одновременных коммутационных соотношений между самими токами в каждой точке пространства (гл. 3—7, ст. 10—12, 14). При этом постулируются, во-первых, вид коммутаторов пространственных компонент токов, а также коммутаторов с временными производными токов и, во-вторых, свойства швингеровских членов. Эти локальные коммутаторы позволяют заметно расширить круг задач, рассматриваемых алгеброй токов. С их помощью можно получать не только низкоэнергетические теоремы для токов (гл. 3), но и исследовать (при дополнительных предположениях) слабые и электромагнитные свойства адронов при высоких энергиях.

В настоящее время рассматриваются следующие наборы локальных коммутаторов: 1) Алгебра кварков (см., например, ст. 14), коммутаторы которой с точностью до швингеровских членов совпадают с коммутаторами билинейных комбинаций полей кварков. 2) Алгебра полей [23], коммутаторы которой полностью совпадают с коммутаторами 8 векторных и 8 аксиально-векторных полей, удовлетворяющих уравнениям с минимально нарушенной симметрией относительно локальных градиентных преобразований (уравнения Янга — Миллса с массовым членом). Пространственные компоненты этих полей удовлетворяют каноническим коммутаторам, а коммутаторы с временными компонентами и с временными производными находятся с помощью уравнений полей. При этом швингеровские члены оказываются определенными и имеют простой вид. Основное достоинство этих соотношений — их простота. Однако их связь с алгеброй токов основана на предположении, что адронные токи пропорциональны векторным и аксиально-векторным полям. Это соответствует резонансному приближению в формфакторах, справедливому в ограниченной области энергий. 3) Минимальная алгебра [24], совпадающая с формальным пределом алгебры полей, когда их массы и константы связи стремятся к нулю; в этой алгебре формально нарушается тождество Якоби. 4) Алгебра модели [25], в которой электромагнитный ток пропорционален нейтральному промежуточному бозону. 5) Алгебра [26], соответствующая нарушенной инвариантности относи-

тельно масштабных преобразований пространства-времени; эта теория предполагает определенные свойства оператора тензора энергии-импульса, и ее можно связать с попытками включить в схему алгебры токов и реализующей ее симметрии также и гравитационное взаимодействие.

Не останавливаясь на последнем направлении, возникшем совсем недавно (см., например, [73]), заметим, что такое большое число рассматриваемых алгебр связано с тем, что приложения алгебр кварков и полей к вычислению радиационных поправок не привели к разумным результатам, а также с тем, что основные высокоэнергетические предсказания алгебр токов еще ждут своей экспериментальной проверки.

Общим для всех алгебр является коммутатор временных компонент токов, в котором предполагается отсутствие швингеровских членов. Как показано в гл. 5, § 1, п. 1, этот коммутатор при дополнительном предположении о сходимости приводит к правилам сумм (5.17), которые означают, что соответствующие амплитуды рассеяния токов должны иметь иное поведение при высоких энергиях, чем адронные амплитуды (амплитуды токов должны иметь фиксированный полюс при  $J = 1$  в плоскости комплексного углового момента; гл. 5, § 3). В случае рассеяния вперед эти правила сумм переходят в правила сумм Адлера для рассеяния нейтрино (ст. 6) и неравенство Бьёркена для рассеяния электронов (ст. 7). Из этих соотношений вытекает своеобразное качественное свойство процессов неупругого рассеяния лептонов при больших энергиях и больших переданных импульсах — они должны вести себя так, как при рассеянии на точечной частице, т. е. слабо убывать с ростом переданного импульса [27]. Выполненные на Стэнфордском ускорителе эксперименты по неупругому рассеянию электронов не противоречат этому свойству. Поскольку алгебра токов дает для рассеяния электронов лишь неравенство, был предложен ряд более детальных моделей для объяснения своеобразных черт этого процесса (см., например, обзоры [28, 73]).

Коммутаторы с участием пространственных компонент токов должны содержать швингеровские члены



(ст. 10), причем мы не имеем каких-либо общих соображений, позволяющих ограничить произвол в их выборе. Так, если потребовать выполнения тождества Якоби для повторных коммутаторов, то для коммутатора пространственных компонент в алгебре кварков эти члены должны быть операторами того же вида, что и основной член коммутатора [29]. Если же отказаться от этого тождества, то можно, по-видимому, ограничиться  $s$ -числовыми швингеровскими членами, хотя динамическое содержание этого ограничения неясно.

Простые свойства швингеровских членов алгебры полей приводят к правилам сумм для спектральных функций [30], однако их проверка невозможна без дополнительных гипотез о насыщении (хотя эти гипотезы и приводят к ряду соотношений между массами и ширинами распадов, согласующихся с экспериментом; см., например, [1]).

В некоторых работах вакуумные средние коммутаторов электромагнитного тока связывают с сечением  $\sigma(s)$  аннигиляции электронов и позитронов в адроны ( $s$  — квадрат полной энергии в с. ц. м.), причем делается вывод, что если эти вакуумные средние бесконечны (алгебра кварков), то  $\sigma(s) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 1/s$  (ст. 14), а если конечны

(алгебра полей), то  $\sigma(s)$  убывает быстрее, чем  $1/s^2$  ([31], см. также обзор [32]). Очевидно, однако, что первый вывод не является строгим. Бесконечные величины не имеют смысла, поэтому нужно либо доопределить коммутатор алгебры кварков так, чтобы его вакуумное среднее имело смысл, либо, если это невозможно, исключить это вакуумное среднее из рассмотрения. Лишь зная  $\sigma(s)$ , можно рассмотреть вопрос об определении вакуумного среднего одновременного коммутатора.

В последнее время большое внимание уделялось применению алгебр токов для вычисления радиационных поправок к слабым взаимодействиям адронов и электромагнитных разностей масс, начало которому положено в ст. 14. Эти расчеты, помимо гипотез о коммутаторах, существенно основаны на формуле Бьёркена — Джонсона — Лоу (ст. 14; [33]), связывающей высокоэнергетическое поведение фурье-образа хронологического произведения с одновременным коммутатором [формула (7.1),

гл. 7]. Эта формула является дополнительной гипотезой. Результаты ее использования в алгебрах кварков и полей оказались в основном отрицательными: радиационные поправки к слабым взаимодействиям адронов и электромагнитные разности масс получились расходящимися.

Конечность поправок к слабому взаимодействию (или их отношений друг к другу) нужна для прецизионной проверки универсальности этого взаимодействия. Были предприняты интересные попытки частичного решения этой проблемы (например, с помощью алгебры модели, в которой кварки заменены тремя триплетами с целыми зарядами), однако полностью избежать расходимостей не удалось (см., например, обзор Сэрлина, [2]). Заметим, что эту неудачу можно объяснить нашим незнанием природы слабых взаимодействий (известно, например, что расходимость или сходимости радиационных поправок к  $\mu$ -распаду зависит от того, является ли слабое взаимодействие контактным или переносится промежуточным бозоном). Подобное замечание можно отнести и к попыткам применять алгебру токов к слабому взаимодействию адронов в высших порядках (по слабому взаимодействию), которые не привели к устранению расходимостей. Разложение по теории возмущений для слабого взаимодействия разумно считать имеющим отношение к действительности лишь тогда, когда в нем устранены по крайней мере главные расходимости, и если алгебра токов их не устраняет, то это говорит скорее против разложения, чем против алгебры. (Попытка устранения главных расходимостей слабого взаимодействия в теории нарушенной симметрии адронов [22] предпринята в [34].)

Неудача алгебр кварков и полей с электромагнитными разностями масс кажется более серьезной: если разности масс внутри мультиплетов действительно вызваны электромагнитным взаимодействием (вера в это отражена уже в названии разностей масс), то рассмотренные вычисления [35] следует считать неприменимыми на малых расстояниях.

Попыткой выйти из этой трудности является рассмотрение перечисленных выше третьей и четвертой алгебр, в которых одновременный коммутатор электромагнитного

тока  $[\partial_0 J_\mu, J_\nu]$  равен  $c$ -числу. Это приводит к конечности радиационных поправок для адронов (алгебра 3, в которой  $J$  — ток адронов) или всех радиационных поправок (алгебра 4, в которой  $J$  — ток адронов и лептонов). Эти алгебры приводят к определенным следствиям, которые можно будет проверить в экспериментах. Вместе с тем не ясна, например, роль нарушения тождества Якоби в алгебре 3. В простейшей реализации алгебры 4 вместо электромагнитных расходимостей вводятся новые слабые расходимости из-за взаимодействия адронов и лептонов с нейтральным промежуточным бозоном. Эти вопросы требуют дальнейшего анализа.

Использование формулы Бьёркена — Джонсона — Лоу позволяет связать интегралы от формфакторов неупругого рассеяния лептонов адронами с матричными элементами коммутаторов электромагнитного тока и его временной производной [36]. При этом можно получить указания на автомодельный характер неупругого рассеяния [37], который должен привести к линейному возрастанию с энергией полного сечения рассеяния нейтрино (Бьёркен [28]) и не противоречит имеющимся экспериментальным данным. В работах [38] показано, что различные предположения о структуре электромагнитного тока приводят к различным наблюдаемым эффектам. Правда, заключения их работ не удалось воспроизвести в теории возмущений (см. ниже). В работе [39] одно из них выводится из предположений, не связанных явно со структурой тока. Тем не менее установление связей матричных элементов одновременных коммутаторов с наблюдаемыми величинами, даже при сделанных предположениях, представляет интерес для будущих экспериментов. При этом большое значение имеет получение таких связей для матричных элементов, измеримых в неупругом рассеянии лептонов с регистрацией одного адрона в конечном состоянии и в рождении лептонных пар при адронных соударениях [40], поскольку, только имея большое число различных предсказаний, можно надеяться проверить применимость сделанных предположений и получить сведения о коммутаторах и структуре тока.

В заключение этого пункта отметим трудности попыток найти представления локальной алгебры токов в

пространстве одночастичных состояний с бесконечным импульсом (гл. 6, § 4). Как показано в [41], приближенные следствия сложных расчетов этого направления можно просто получить с помощью квазипотенциальной модели кварков. Попытки же найти точное решение [42] привели к появлению частиц с отрицательными массами, подобно тому, как это имеет место в теории бесконечно-компонентных полей. Этот подход основан на предположении, что в матричных элементах локальных коммутаторов при бесконечном импульсе достаточно учесть лишь одночастичные промежуточные состояния, т. е. пренебречь нерезонансным фоном. Как показали данные по неупругому электрон-протонному рассеянию, при больших массах, уносимых током, этот фон преобладает, а вклады резонансов пренебрежимо малы. Возможно, в этом и состоит физическая причина трудностей этого направления.

Таким образом, задание вида локальных коммутаторов вместе с допущением о сходимости приводит к своеобразным правилам сумм для неупругого рассеяния нейтрино на адронах, а вместе с формулой Бьёркена — Джонсона — Лоу позволяет анализировать слабые и электромагнитные свойства адронов на малых расстояниях, т. е. при больших энергиях и больших массах, переносимых токами (радиационные поправки, неупругое рассеяние лептонов). При этом для простоты часто постулируют простейшие локальные коммутаторы, соответствующие формальному использованию канонических коммутаторов и уравнений движения модели кварков. Насколько сильное ограничение на динамику накладывают принимаемые при этом постулаты? На этот вопрос можно ответить, рассматривая по теории возмущений различные модели. Выше мы видели, что алгебра зарядов требует лишь известной симметрии взаимодействия и накладывает минимальные ограничения на его динамику. Наоборот, локальная алгебра, как мы увидим ниже, накладывает на динамику очень жесткие ограничения (с точки зрения перенормируемых моделей в теории возмущений).

*Локальные коммутаторы в теории возмущений.* В последнее время использование теории возмущений в алгебре токов приобрело практический интерес, связанный

с парадоксом распада  $\pi_0 \rightarrow 2\gamma$ . Этот парадокс состоит в том, что формальный учет электромагнитного взаимодействия не меняет вида уравнения частичного сохранения нейтрального аксиально-векторного тока (ст. 2, приложение) и приводит к нулевому сечению этого процесса (в приближении  $M_\pi = 0$ ). Рассмотрение моделей со спинорными частицами показывает, однако, что при использовании обычной процедуры перенормировки треугольная диаграмма со спинорными частицами дает аномальный вклад в уравнение частичного сохранения

$$\partial_\lambda \mathfrak{F}_3^{5\lambda} = \frac{i\pi}{V^2} \Phi_{\pi^0} + \bar{Q} \frac{\alpha}{4\pi} F^{\mu\nu} F^{\sigma\rho} \epsilon_{\mu\nu\sigma\rho}, \quad (6)$$

где  $F^{\mu\nu}$  — тензор электромагнитного поля,  $\alpha$  — постоянная тонкой структуры и  $\bar{Q}$  — константа (которую можно интерпретировать как средний заряд спинорных частиц, участвующих во взаимодействии) [43]. Были высказаны соображения в пользу того, что это уравнение справедливо во всех порядках по сильному и электромагнитному взаимодействиям и может быть проверено в эксперименте (Адлер [43]).

По этой же причине в теории возмущений оказались видоизмененными тождества Уорда для трехточечных вершинных функций аксиально-векторного тока [44]. Для того чтобы эти тождества выполнялись, нужно ввести соответствующие швингеровские члены в коммутаторы. Это обстоятельство означает, что некоторые вычисления в модели с жесткими пионами не соответствуют теории возмущений.

Вслед за этим было показано, что в перенормируемой теории возмущений асимптотическая формула Бьёркена — Джонсона — Лоу [гл. 7, ур-ние (7.1)] для электромагнитного тока может не выполняться, если для коммутаторов использовать простейшие выражения [45]. Это означает, что заключения работ [38] о связи наблюдаемых сечений со структурой тока могут не выполняться в теории возмущений.

Эти результаты можно сформулировать и иначе: если формулу Бьёркена — Джонсона — Лоу принять за определение одновременного коммутатора, то многие

коммутаторы в теории возмущений должны быть видоизменены [46].

Очевидно, что это определение не единственно. Как показано в работах Усюкиной [47], для определения одновременного предела коммутатора естественно использовать интегральные представления Йоста — Лемана — Дайсона для матричных элементов коммутатора. Соответствующие этому определению одновременные коммутаторы токов в низших порядках перенормируемой теории возмущений содержат разнообразные швингеровские члены, причем эти члены входят и в коммутатор временных компонент.

Эти результаты не означают, что предсказания локальной алгебры токов, не соответствующие теории возмущений, должны быть неверными. Известно, например, что низшие порядки теории возмущений не передают высокоэнергетического поведения адронных процессов. Теория возмущений может быть неприменима и для случая локальных коммутаторов. Тем не менее рассмотренные примеры показывают, что динамика, соответствующая простым локальным коммутаторам, должна быть достаточно сложной и специфической (с точки зрения наших представлений, основанных на теории возмущений). Поэтому если эксперимент подтвердит предсказания локальной алгебры токов, то это представит большой интерес для понимания динамики взаимодействия адронов.

Аналізу одновременных коммутаторов вне рамок теории возмущений посвящены, например, работы [48].

*Сверхсходящиеся правила сумм и их обобщение.* Предположение о существовании одновременных коммутаторов, в особенности локальных, является весьма сильным предположением с точки зрения квантовой теории поля. Поэтому интересно рассмотреть следствия других, более общих предположений, имеющих ясный динамический смысл в локальной (причинной) теории. В формулировке этой теории, предложенной Боголюбовым [49] (т. е. в теории дисперсионных соотношений), динамика проявляется в высокоэнергетическом поведении матричных элементов. Предположение о достаточно быстром убы-

вании при высоких энергиях (сверхсходимости) определенных матричных элементов и приводит к сверхсходящимся правилам сумм, гл. 4, § 4; гл. 5, § 2; ст. 13.

Эти правила сумм возникли в теории дисперсионных соотношений для частиц со спинами [50] как способ согласования различных дисперсионных соотношений, соответствующих одному и тому же высокоэнергетическому поведению, но разному выбору спиновых структур. Такую же роль играют они и при использовании дисперсионных соотношений в алгебре токов, где они согласуют, например, линейную (ст. 5) и квадратичную массовые формулы для октета барионов.

Рассмотрение сверхсходящихся правил сумм для получения результатов алгебры токов было начато в работе [51], где с их помощью были получены правила сумм для магнитных моментов, близкие к результату алгебры токов (см. (95) и (96) в ст. 5 и обзор [52]). На языке сверхсходящихся правил сумм можно сформулировать очень многие результаты алгебры токов. Так, сверхсходящееся правило сумм при комбинации  $f(v, q^2) - f(v, 0)$ , где  $f(v, q^2)$  — одна из амплитуд рассеяния виртуального изовекторного фотона с массой  $q^2$  на нуклоне, есть не что иное, как соотношение Кабиббо — Радикати; см. (4.21) и (4.22) в гл. 4 (см. обзор [53], где таким способом выведено новое соотношение для пионов). Правило сумм Адлера для рассеяния нейтрино (гл. 4, § 3; ст. 11) и соотношение Адлера — Вайсбергера (гл. 1, § 5; ст. 1) получаются из предположения о том, что условию сверхсходимости удовлетворяет разность между амплитудой слабого процесса и ее значением в борновском приближении [54]. В работе [55] показано, как на языке сверхсходящихся правил сумм записать массовые формулы нарушений  $SU_3$ -симметрии. С помощью этих правил можно извлекать информацию из предположения об асимптотической симметрии, выполняющейся лишь при высоких энергиях (см. обзор [56]). Например, в работе [57] таким способом выведены правила сумм для спектральных функций, полученные ранее Вайнбергом из предположений о швингеровских членах в коммутаторах. Идея сверхсходимости оказалась полезной и для понимания электромагнитных разностей масс [58].

Однако наиболее широкое применение эти правила сумм получили в сочетании с предположением о том, что в них достаточно учесть лишь вклады резонансных состояний. При этом правила сумм приводят к большому числу допускающих экспериментальную проверку соотношений между константами связи частиц и резонансов типа тех, которые могут быть получены в теориях высших симметрий. К настоящему времени в многочисленных работах рассмотрены приложения свержсходящихся правил сумм к различным процессам и получены многие соотношения, представляющие интерес для эксперимента и для сравнения со следствиями теорий симметрии. Отметим лишь полученное таким образом предсказание ширины распада  $\Lambda(1520) \rightarrow Y\gamma$  [59], подтвержденное впоследствии экспериментом (этот резонанс считается унитарным синглетом, поэтому  $SU_3$ -симметрия не дает для него никаких предсказаний). Более детальный обзор применений свержсходящихся правил сумм и подробная библиография имеются в работе [60]. Сверхсходящиеся правила сумм совместно с правилами сумм алгебры токов в резонансном приближении рассмотрены, например, в работе [61].

Сверхсходящиеся правила сумм справедливы лишь для амплитуд, достаточно быстро убывающих при высоких энергиях. Однако их можно обобщить и на случай неубывающих амплитуд, характер поведения которых при больших энергиях известен [62]. Так, если амплитуда  $f(v, t)$  при энергиях  $|v| > N$  имеет реджевский вид

$$f(v, t) = \sum_i b_i(t) v^{\alpha_i(t)} \quad (7)$$

(эксперимент подтверждает такое поведение при  $N = 4-5$  Гэв и не слишком больших  $t$ ), то из теоремы Коши следует, что при  $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\int_{-N}^N v^n \operatorname{Im} f(v, t) dv = \sum_i \frac{N^{\alpha_i(t)+1+n}}{\alpha_i(t)+1+n} \operatorname{Im} \{b_i(t)(1 + e^{i\pi[\alpha_i(t)+n]})\}. \quad (8)$$



Эти реджевские правила сумм (или правила сумм при конечной энергии  $N$ ) обобщают свержходящиеся правила сумм и простым образом связывают высокоэнергетические параметры  $b_i(t)$  и  $a_i(t)$  с интегралами по области низких энергий. Они находят широкое применение при анализе экспериментальных данных по высокоэнергетическим процессам и позволяют уточнять значения реджевских параметров и объяснять их зависимость от переданного импульса, исходя из свойств рассеяния при низких энергиях (см., например, [63] и обзоры [64, 60]). С их помощью удалось предсказать параметр поворота поляризации в упругом  $\pi N$ -рассеянии, экспериментальное измерение которого позволит проверить применимость гипотезы о полюсах Редже к этому процессу [65].

Эти правила сумм послужили также основой для простой модели, качественно передающей основные свойства реджевских траекторий и состоящей в предположении, что вклад дифракционного рассеяния (полюса Померанчука) в правой части соотношения (П. 8) равен вкладу нерезонансного фона в левой его части [66]. При этом возникает простая связь между резонансами  $s$ - и  $t$ -каналов (дуальность [67, 68], новый «бутстрэп» [69]), позволяющая связать между собой такие казавшиеся независимыми факты, как отсутствие экзотических резонансов (т. е. резонансов, которые нельзя построить из кварков) и вырождение реджевских траекторий (т. е. их слабая зависимость от сигнатуры и внутренних квантовых чисел), линейное возрастание траекторий и необходимость «дочерних» траекторий, а также качественно объяснить одинаковый наклон барионных и мезонных траекторий.

Наконец, попытка угадать вид амплитуды, удовлетворяющей в резонансном приближении реджевским правилам сумм и требованию перекрестной симметрии, привела к модели Венециано [70], позволившей описать с помощью небольшого числа параметров большую совокупность экспериментальных фактов. Многие предсказания этой модели близки к результатам алгебры токов (например, отношение длин  $\pi\pi$ -рассеяния) [71, 3]. В последнее время эта модель находит важное применение для анализа многочастичных процессов [72].

Возвращаясь теперь к алгебре токов, мы видим, что эта теория способствовала появлению многочисленных исследований в различных областях физики частиц. Это объясняется, разумеется, тем, что затронутая алгеброй токов проблема симметрии адронных взаимодействий является одной из основных в современной физике частиц.

### Л и т е р а т у р а

1. Weinberg S., 14th International Conference on High Energy Physics (Vienna, 1968), Proceedings, ed. J. Prentki, J. Steinberger, Geneva, 1968, p. 253.
2. Topical Conference on Weak Interactions (CERN, 1969), Proceedings, CERN 69-7, Geneva, 1969. Reports by Filthuth H. (p. 131), Lee B. W. (p. 183), Rubbia C. (p. 227), Callan C. (p. 263), Stech B. (p. 271), Mandelstam S. (p. 349), Zumino B. (p. 361), Sirlin A. (p. 409), Gatto R. (p. 465).
3. Renner B., Rapporteur's review for the Lund International Conference on Elementary Particles, 1969.
4. Арбузов Б. А., Филиппов А. Т., ЖЭТФ, 51, 1389 (1966).
5. Coleman S., Hadrons and Their Interactions. 1967 International School in Physics «Ettore Majorana», New York, ed. Zichichi, p. 9.
6. Bell J. S., Sutherland D. G., Nucl. Phys. B4, 315 (1968).
7. Соловьев Л. Д., Чэнь Цун-мо, ЖЭТФ, 42, 526 (1962).
8. Olsson M. G., Turner L., Phys. Rev. Letters, 20, 1127 (1968).
9. Батусов Ю. А., Бунятов С. А., Сидоров В. М., Ярба В. А., Ядерная физика, 1, 526 (1965).
10. Gutay L. J., Meiere F. T., Scharenguivel J. H., Phys. Rev. Letters, 23, 431 (1969).
11. Vasavada K. V., Phys. Rev., 178, 2350, 184, 1594 (1969).
12. Fubini S., Furlan G., Ann. of Phys., 48, 322 (1968).  
Furlan G., Rosetti C., Вопросы теории элементарных частиц, Труды Международного семинара по теории элементарных частиц (Варна 1968), Труды ОИЯИ P2-4050, Дубна, 1968, стр. 312.  
Ademollo M., Denardo G., Furlan G., Nuovo Cimento, 57, 1 (1968).  
Carbone G., Donini E., Sciuto S., Furlan G., Nuovo Cimento, 58A, 668 (1968).  
De Alfaro V., Fubini S., Furlan G., Rossetti C., Nuovo Cimento, 62A, 497 (1969).  
Furlan G., Paver N., Verzegnassi C., Nuovo Cimento, 62A, 519 (1969).
13. Von Hippel F., Kim J. K., Phys. Rev. Letters, 22, 740 (1969).
14. Chan C. H., Meiere F. T., Phys. Rev. Letters, 22, 737 (1969).
15. Schnitzer H. J., Weinberg S., Phys. Rev., 164, 1828 (1967).

- Gerstein I. S., Schnitzer H. J., Phys. Rev., **170**, 1638, 175, 1876 (1969).
- Gerstein I. S., Schnitzer H. J., Weinberg S., Phys. Rev., **175**, 1873 (1968).
- Arnowitz R., Friedman M. H., Nath P., Phys. Rev., **174**, 1999, 2008 (1968); Nuclear Phys., **B10**, 578 (1969).
- Arnowitz R., Friedman M. H., Nath P., Suitor R., Phys. Rev., **175**, 1802, 1820 (1968).
- Brown S. G., West G. B., Phys. Rev., **174**, 1777, 1786 (1968), **180**, 1613 (1969).
- Okubo S., Marshak R. E., Mathur V. S., Phys. Rev. Letters, **19**, 407 (1967).
- Das T., Mathur V. S., Okubo S., Phys. Rev. Letters, **19**, 1067 (1967).
16. Weinberg S., Phys. Rev., **166**, 1568 (1968); **177**, II, 2604 (1969).
- Schwinger J., Phys. Letters, **24B**, 473 (1967); Phys. Rev. Letters, **18**, 923 (1967).
- Струминский Б. В., Препринт ОИЯИ P2-3554, Дубна, 1967.
- Gürsey F., Chang P., Phys. Rev., **164**, 1752 (1968).
- Lee B. W., Proceedings of the 1967 International Conference on Particles and Fields, Rochester, 1967, ed. C. R. Hagen, G. Guralnik, V. S. Matur, Interscience Publishers, p. 547.
- Zumino B., Hadrons and Their Interactions, 1967 International School in Physics «Ettore Majorana», New York, ed. Zichichi, p. 51.
- Coleman S., Wess J., Zumino B., Phys. Rev., **177**, 2239 (1969).
- Callan C. C., Coleman S., Wess J., Zumino B., Phys. Rev. **177**, 2247 (1969).
- Bardeen W. A., Lee B. W., Phys. Rev., **177**, II, 2389 (1969).
- Gasiorowicz S., Geffen D. A., Rev. Mod. Phys., **41**, 531 (1969).
- Волков Д. В., Препринт ИТФ-69-75, Киев, 1969.
17. Ефимов Г. В., ЖЭТФ, **44**, 2105 (1963).
- Фрадкин Е. С., Nucl. Phys., **49**, 624 (1963).
18. Боголюбов Н. Н., Нгуен Ван Хьеу, Стоянов Д., Струминский Б. В., Тавхелидзе А. Н., Шелест В. П., Препринт ОИЯИ Д-2075, Дубна, 1965.
- Боголюбов Н. Н., Матвеев В. А., Нгуен Ван Хьеу, Стоянов Д., Струминский Б. В., Тавхелидзе А. Н., Шелест В. П., Препринт ОИЯИ P-2141, Дубна, 1965.
- Morpurgo G., 14th International Conference on High Energy Physics (Vienna, 1968), Proceedings, ed. J. Prentki, J. Steinberger, Geneva, 1968, p. 225.
19. Боголюбов Н. Н., Квазисредние в задачах статистической механики, Препринт ОИЯИ P-1451, Дубна, 1963.
20. Nambu Y., Jona-Lasino G., Phys. Rev., **122**, 345; **124**, 246 (1961).

- Арбузов Б. А., Тавхелидзе А. Н., Фаустов Р. Н., ДАН СССР, 139, 345 (1961).
- Kibble T. W. B., Proceedings of the 1967 International Conference on Particles and Fields (Rochester, 1967), ed. C. R. Hagen, G. Guralnik, V. S. Mathur, Interscience Publishers, p. 277.
21. Dashen R., Phys. Rev., 183, 1245 (1969).  
Dashen R., Weinstein M., Phys. Rev., 183, 1261 (1969);  
Phys. Rev. Letters, 22, 1337 (1969).
22. Gell-Mann M., Oakes R. J., Renner B., Phys. Rev., 175, 2195 (1968).
23. Kroll N. M., Lee T. D., Zumino B., Phys. Rev., 157, 1376 (1967).  
Lee T. D., Zumino B., Phys. Rev., 163, 1667 (1967).  
Lee T. D., Zumino B., Weinberg S., Phys. Rev. Letters, 18, 1029 (1967).
24. Bjorken J. D., Brandt R. A., Phys. Rev., 177, II, 2331 (1969).
25. Lee T. D., Phys. Rev., 171, 1731 (1968).
26. Ciccariello S., Gatto R., Sartori G., Tonin M., Phys. Letters, 30B, 546 (1969).  
Wilson K. G., Phys. Rev., 179, 1499 (1969).
27. Марков М. А., Нейтринно, изд-во «Наука», 1964, стр. 81.  
Сообщения ОИЯИ Е2-4370, Дубна, 1969.
28. Gilman F., 4th International Symposium on Electron and Photon Interactions at High Energies (Liverpool, 1969), Proceedings, ed. D. W. Braben, Daresbury Nuclear Physics Laboratory, 1969, p. 177.  
Bjorken J. D., Pashos E. A., Векторные мезоны и электромагнитные взаимодействия, Труды Международного семинара, Дубна, 1969.
29. Buccella F., Veneziano G., Gatto R., Okubo S., Phys. Rev., 149, 1268 (1966).
30. Weinberg S., Phys. Rev. Letters, 18, 507 (1967).
31. Doohar J., Phys. Rev. Letters, 19, 600 (1967).
32. Gatto R., 4th International Symposium on Electron and Photon Interactions at High Energies (Liverpool, 1969), Proceedings, ed. D. W. Braben, Daresbury Nuclear Physics Laboratory, 1969, p. 235.
33. Johnson K., Low F. E., Progr. Theoret., Phys., Suppl., 37-38, 74 (1966).
34. Bouchiat C., Illiopoulos J., Prentki J., Nuovo Cimento, 56A, 1150 (1968).  
Gatto R. [2].
35. Bell J. S., Proceedings of the 1967 International Conference on Particles and Fields (Rochester, 1967), ed. C. R. Hagen, G. Guralnik, V. S. Mathur, Interscience Publishers, p. 530.
36. Bjorken J. D., Phys. Rev., 179, 1547 (1969).
37. Матвеев В. А., Мурадян Р. М., Тавхелидзе А. Н., Сообщения ОИЯИ Р2-4578, Дубна, 1969.
38. Callan C. G., Gross D. J., Phys. Rev. Letters, 22, 156 (1969).  
Gross D. J., Llewellyn Smith C. H., Nucl. Phys., B 14, 337 (1969).

39. Chanda R., Sen S., Majumdar D. P., Preprint NYO-3399-217, SU-1206-217, 1969.
40. Матвеев В. А., Мурадяи Р. М., Тавхелидзе А. Н., Сообщения ОИЯИ P2-4543, Дубна, 1969.  
Кёгерлер Р. Ф., Мурадян Р. М., Сообщения ОИЯИ E2-4791, Дубна, 1969.
41. Шелест В. П., Вопросы теории элементарных частиц, Труды Международного семинара по теории элементарных частиц (Варна, 1968), Дубна P2-4050, 1968.
42. Chang C.-J., Dashen R., O'Rai feartaigh L., Phys. Rev., 182, 1805, 1819 (1969).
43. Bell J. S., Jackiw R., Nuovo Cimento, 60, 47 (1969).  
Schwinger J., Phys. Rev., 82, 664 (1951).  
Adler S. L., Phys. Rev., 177, II, 2426 (1969).  
Gervais J.-L., Lee B. W., Nucl. Phys., B12, 627 (1969).  
Hagen C. R., Phys. Rev., 177, II, 2622 (1969).  
Brandt R. A., Phys. Rev., 180, 1490 (1969).  
Jackiw R., Johnson K., Phys. Rev., 182, 1459 (1969).  
Adler S. L., Bardeen W. A., Phys. Rev., 182, 1517 (1969).  
Zumino B. [2].
44. Wilson K. G., Phys. Rev., 181, 1909 (1969).  
Gerstein I. S., Jackiw R., Phys. Rev., 181, 1955 (1969).  
Adler S. L., Boulware D. G., Phys. Rev., 184, 1740 (1969).  
Bardeen W. A., Phys. Rev., 184, 1848 (1969).
45. Jackiw R., Preparata G., Phys. Rev. Letters, 22, 975, 1162 (1969); Harvard preprint (1969).  
Adler S. L., Tung W.-K., Phys. Rev. Letters, 22, 978 (1969);  
Inst. for Advanced Study preprint. October 1969.
46. Jackiw R., Talk at the Trieste Conference on Renormalization Theory, August 1969; Preprint CERN TH. 1065 (1969).
47. Усюкина Н. И., Препринт ОИЯИ E2-3539 (1967), P2-3661, P2-3827 (1968); Теоретическая и математическая физика, 3, 228 (1970).
48. Stichel P., Springer Tracts in Modern Physics, 50, 100, 110, 120 (1969).  
Völkel U., Völkel A. H., Nuovo Cimento, 63A, 203 (1969).  
Bell J. S. [35].  
Hagen C. R., Phys. Rev., 178, 2154 (1969).  
Gervais J.-L., Phys. Rev., 177, 2182 (1969).
49. Боголюбов Н. Н., Медведев Б. В., Поливанов М. К., Вопросы теории дисперсионных соотношений. Гостехиздат, 1957.
50. Логунов А. А., Соловьев Л. Д., Nucl. Phys., 12, 60 (1959).
51. Соловьев Л. Д., Ядерная физика, 3, 188 (1966).  
Азнаурян И. Г., Соловьев Л. Д., Ядерная физика, 4, 615 (1966).
52. Соловьев Л. Д., Springer Tracts in Modern Physics, 46, 53 (1968).
53. Матвеев В. А., Соловьев Л. Д., Струминский Б. В., Тавхелидзе А. Н., Шелест В. П., Препринт ОИЯИ P2-3118, Дубна, 1967.

54. Мурадян Р. М., Вопросы теории элементарных частиц, Труды Международного семинара по теории элементарных частиц (Варна, 1968); Труды ОИЯИ P2-4050, Дубна, 1968, стр. 159.
55. Фаустов Р. Н., Доклад, представленный на конференцию по элементарным частицам в Гейдельберге, 1967.
56. Соловьев Л. Д., Препринт ОИЯИ E2-3511, Дубна, 1967.
57. Das T., Mathur V. S., Okubo S., Phys. Rev. Letters, **18**, 761 (1967).
58. Nagari H., Phys. Rev. Letters, **17**, 1303 (1966).
59. Азнаурян И. Г., Соловьев Л. Д., Ядерная физика, **8**, 129 (1967).
60. Азнаурян И. Г., кандидатская диссертация, ИФВЭ, Серпухов, 1969.
61. Gilman F. J., Nagari H., Phys. Rev., **165**, 1803 (1968).  
Томозава У., Phys. Rev., **177**, 2288 (1969).
62. Логунов А. А., Соловьев Л. Д., Тавхелидзе А. Н., Phys. Letters, **24B**, 181 (1967).
63. Азнаурян И. Г., Соловьев Л. Д., Соловьянов В. Л., Ядерная физика, **9**, 1245 (1969).
64. Chan H.-M., 14th International Conference on High Energy Physics. (Vienna, 1968). Proceedings, ed. J. Prentki, J. Steinberger, Geneva, 1968, p. 395.
65. Азнаурян И. Г., Соловьев Л. Д., Phys. Letters, **29B**, 597 (1969); Препринт ИФВЭ 69-43, Серпухов, 1969.
66. Gilman F. J., Nagari H., Zarmi Y., Phys. Rev. Letters, **21**, 323 (1968).
67. Dalen R., Horn D., Schmid C., Phys. Rev., **166**, 1768 (1968).
68. Schmid C., Report at the Royal Physical Society Meeting, London, 1969; Preprint CERN TH. 1128, Geneva, 1969.
69. Mandelstam S., Phys. Rev., **166**, 1539 (1968).
70. Veneziano G., Nuovo Cimento, **57A**, 190 (1968).
71. Lovelace C., Phys. Letters, **28B**, 264 (1968).
72. Chan H.-M., Report at the Royal Physical Society Meeting, London, 1969.  
Jacob M., Rapporteur's review for the Lund International Conference on Elementary Particles, 1969.
73. Zumino B., Rapporteur's review for the XV International Conference on High Energy Physics, Kiev, 1970.  
Соловьев Л. Д., Rapporteur's review for the XV International Conference on High Energy Physics, Kiev, 1970.

# СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие редактора перевода . . . . .	5
Предисловие . . . . .	8
<b>Обозначения</b> . . . . .	10
§ 1. Метрика Бьёркена — Дрелла и $\gamma$ -матрицы . . . . .	10
§ 2. Матрицы изоспина и $SU_3$ . . . . .	13
§ 3. Суммирование по индексам . . . . .	14
§ 4. Метрика Паули и «словарик» для перевода формул . . . . .	15
Литература . . . . .	17
<b>Глава 1. Основные гипотезы: алгебра токов и дивергенции токов</b> . . . . .	18
§ 1. Слабые и электромагнитные токи . . . . .	18
§ 2. Коммутаторы и дивергенции токов в лагранжевой теории поля . . . . .	22
1. Кварковая модель . . . . .	26
2. $\sigma$ -модели . . . . .	29
§ 3. Гипотеза алгебры токов . . . . .	32
1. Алгебра временных компонент . . . . .	32
2. Обобщение гипотезы . . . . .	38
§ 4. Дивергенции токов . . . . .	43
1. Гипотеза о сохранении векторного тока для векторного октета . . . . .	44
2. Гипотеза о частичном сохранении аксиально-векторного тока для аксиально-векторного октета . . . . .	44
§ 5. Экспериментальные проверки гипотез . . . . .	51
Литература . . . . .	54

## Статья к главе I

<b>1. С. Адлер. Правила сумм для перенормировки аксиально-векторной константы связи <math>\beta</math>-распада</b> . . . . .	55
Введение . . . . .	55
§ 1. Предположения . . . . .	56
§ 2. Вывод правила сумм . . . . .	59
1. Метод Фубини и Фурлана . . . . .	59
2. Метод, основанный на условиях самосогласованности, вытекающих из гипотезы о частичном сохранении . . . . .	63
§ 3. Численный расчет . . . . .	71
1. Вычисление $R_1$ . . . . .	73
2. Вычисление $R_2$ . . . . .	74
3. Вычисление $R_3$ . . . . .	75
4. Замечания . . . . .	78
§ 4. Правило сумм для пион-пионного рассеяния . . . . .	78
§ 5. Способы проверки алгебры токов в нейтринных реакциях при высоких энергиях . . . . .	82
Литература . . . . .	86

Глава 2. Низкоэнергетические теоремы для пионов . . . . .	88
§ 1. Общий формализм . . . . .	88
§ 2. Краткий обзор приложений . . . . .	100
1. Классическая пионная физика . . . . .	100
2. Каонная физика . . . . .	102
3. Нелептонные распады гиперонов в $S$ -волне . . . . .	103
4. Другие приложения . . . . .	104
§ 3. Применения . . . . .	104
1. Длины рассеяния пионов . . . . .	104
2. Рождение мягких пионов в электромагнитных процессах . . . . .	105
3. Рождение мягких пионов в полуплептонных слабых процессах . . . . .	108
4. Рождение мягких пионов в нелептонных слабых процессах . . . . .	108
5. Проблема распадов $K \rightarrow 3\pi$ и $\eta \rightarrow 3\pi$ . . . . .	113
Приложение А . . . . .	116
Литература . . . . .	122

## Статьи к главе 2

2. <i>С. Адлер</i> . Условия самосогласованности для сильных взаимодействий, вытекающие из гипотезы о частичном сохранении аксиально-векторного тока. II . . . . .	124
Введение . . . . .	124
§ 1. Вывод условий самосогласованности . . . . .	127
§ 2. Учет электромагнитного взаимодействия . . . . .	137
Приложение . . . . .	138
Литература . . . . .	142
3. <i>С. Вайнберг</i> . Коммутаторы токов в теории множественного рождения пионов . . . . .	143
Литература . . . . .	152
4. <i>С. Вайнберг</i> . Длины рассеяния пионов . . . . .	152
Литература . . . . .	164
5. <i>С. Фубини, Дж. Фурлан, К. Росетти</i> . Дисперсионная теория нарушенных симметрий . . . . .	165
§ 1. Введение . . . . .	165
§ 2. Общий метод . . . . .	167
§ 3. Приложения . . . . .	174
§ 4. Динамические симметрии . . . . .	182
Литература . . . . .	190
6. <i>К. Кэлан, С. Триман</i> . Одновременные коммутаторы и распады $K$ -мезонов . . . . .	191
Литература . . . . .	199
7. <i>С. Вайнберг</i> . О вычислении формфакторов $K_{14}$ -распада с помощью коммутаторов токов . . . . .	200
Литература . . . . .	209
8. <i>М. Судзуки</i> . Коммутаторы токов и нелептонные распады гиперонов . . . . .	210
Литература . . . . .	216



<b>Глава 3. Низкоэнергетические теоремы для токов . . . . .</b>	<b>218</b>
§ 1. Формализм и приложения . . . . .	218
§ 2. Швингеровские члены . . . . .	223
Приложение Б . . . . .	227
Литература . . . . .	230

## Статьи к главе 3

9. <i>С. Дрелл, А. Хёрн.</i> Точное правило сумм для магнитных моментов нуклона . . . . .	232
Литература . . . . .	238
10. <i>Ю. Швингер.</i> Коммутаторы в теории поля . . . . .	239

<b>Глава 4. Правила сумм . . . . .</b>	<b>243</b>
--	------------

§ 1. Вводные замечания . . . . .	243
§ 2. Использование бесконечного импульса . . . . .	245
§ 3. Применения . . . . .	252
§ 4. Правила сумм для сильных взаимодействий, или свёрсходящиеся правила сумм . . . . .	257
§ 5. Физические свойства в пределе бесконечного импульса . . . . .	260
§ 6. Правила сумм как дисперсионные соотношения без вычитаний . . . . .	269
Литература . . . . .	273

## Статьи к главе 4

11. <i>С. Адлер.</i> Правила сумм, позволяющие проверить локальные коммутационные соотношения токов в нейтринных реакциях при высоких энергиях . . . . .	274
§ 1. Введение . . . . .	274
§ 2. Результаты . . . . .	276
1. Случай сохраняющейся странности . . . . .	279
2. Случай изменяющейся странности . . . . .	280
§ 3. Кинематический анализ нейтринных реакций при высоких энергиях . . . . .	282
§ 4. Вывод правил сумм . . . . .	289
1. Основное тождество . . . . .	289
2. Правило сумм для $\beta^{(\pm)}$ . . . . .	291
3. Правило сумм для $\alpha^{(\pm)}$ . . . . .	297
4. Правило сумм для $\gamma^{(\pm)}$ . . . . .	299
Приложение . . . . .	301
Литература . . . . .	303
12. <i>Дж. Бьёркен.</i> Неравенство для сечения рассеяния электрона и мюона на нуклоне . . . . .	304
13. <i>В. Де Альфаро, С. Фубини, К. Росетти, Дж. Фурлан.</i> Правила сумм для сильных взаимодействий . . . . .	305
Литература . . . . .	313

<b>Глава 5. Дальнейшие сведения о правилах сумм . . . . .</b>	<b>314</b>
§ 1. Правила сумм, вытекающие из алгебры токов . . . . .	315
1. Коммутаторы временных компонент . . . . .	315
2. Правило сумм, вытекающее из коммутатора пространственной компоненты тока . . . . .	324
§ 2. Еще о сверхсходимости . . . . .	326
§ 3. Правила сумм и полюсы Редже . . . . .	333
Приложение В . . . . .	338
1. Общие замечания . . . . .	338
2. Парные состояния . . . . .	340
3. Состояние класса II . . . . .	344
Приложение Г . . . . .	347
Приложение Д . . . . .	354
Литература . . . . .	356
<b>Глава 6. Алгебраическая структура правил сумм . . . . .</b>	<b>358</b>
§ 1. Введение . . . . .	358
§ 2. Алгебраическая форма правил сумм . . . . .	359
§ 3. Алгебра $SU_3 \otimes SU_3$ . . . . .	363
§ 4. Более претенциозное предложение . . . . .	366
Литература . . . . .	367
<b>Глава 7. Поведение хронологических произведений при высоких энергиях . . . . .</b>	<b>368</b>
Литература . . . . .	369

## Статья к главе 7

<b>14. Дж. Бьёркен. Приложения киральной алгебры плотностей токов <math>U(6) \otimes U(6)</math> . . . . .</b>	<b>370</b>
§ 1. Введение . . . . .	370
§ 2. Швингеровские члены . . . . .	373
§ 3. Вакуумное среднее . . . . .	376
§ 4. Среднее по протоинным состояниям . . . . .	377
§ 5. Формула Адлера — Вайсбергера . . . . .	380
§ 6. Зависящее от спина виртуальное комптоновское рассеяние . . . . .	382
§ 7. Сверхтонкая структура . . . . .	386
§ 8. Электромагнитные разности масс . . . . .	387
§ 9. Радиационные поправки к слабым взаимодействиям . . . . .	394
§ 10. Электрон-позитронная аннигиляция в адроны . . . . .	399
Литература . . . . .	401
<b>Л. Д. Соловьев. Послесловие. Дальнейшее развитие алгебры токов . . . . .</b>	<b>403</b>
Литература . . . . .	427