


К. С. АДЗЕРИХО

ЛЕКЦИИ
ПО 
теории переноса
лучистой энергии



Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор *А. П. Иванов*,
кандидат физико-математических наук *И. Л. Кацев*

Адзерихо К. С.

А29 Лекции по теории переноса лучистой энергии.
Под ред. М. А. Ельяшевича. Мн., Изд-во БГУ, 1975.

192 с. с ил.

Учебное пособие написано на основе курса лекций. В нем излагаются основы современной теории переноса излучения, основные понятия, наиболее распространенные методы решения уравнений переноса, а также современные проблемы теории.

Предназначено для студентов университетов, пединституты и технических вузов. Может быть использовано в качестве справочного пособия аспирантами и научными работниками.

А $\frac{20405-041}{М317-75}$ 8-75

537.531

© Издательство БГУ им. В. И. Ленина, 1975.

ОТ РЕДАКТОРА

Современная теория переноса излучения находит широкое применение во многих областях физики. Большой интерес результаты этой теории представляют для спектроскопических исследований тех физических объектов, для которых процессы многократного рассеяния и переизлучения играют важную роль. Решение спектроскопических задач с учетом таких процессов весьма актуально в связи с изучением оптических свойств сред, при расчетах энергетического баланса атмосфер Земли и других планет, в метеорологической практике, при спектроскопических исследованиях плазмы и т. д. Рассмотрение лучистой теплопроводности вещества при высоких температурах основано на теории переноса излучения. Важным применением этой теории является использование ее методов в ядерной энергетике при расчетах ядерных реакторов. Большую роль играет теория переноса излучения при решении многих задач теоретической астрофизики.

К. С. Адзерихо написал данную книгу на основе лекций, которые он читает в течение ряда лет на физическом факультете Белорусского государственного университета имени В. И. Ленина для студентов, специализирующихся на кафедре атомной и молекулярной физики. Необходимость создания подобного учебного пособия неоднократно подчеркивалась на всесоюзных конференциях и совещаниях, на которых в той или иной мере рассматривались теоретические и экспериментальные исследования по переносу лучистой энергии. В книге большое внимание уделено формулировке уравнения переноса лучистой энергии с учетом таких физически важных факторов, как состояние поляризации излучения, перераспределение излучения по частотам и др. В ней обсуждены основные методы решения уравнения переноса излучения, используемые в различных областях физики, а также проведено их сопоставление и обсуждена их применимость для конкретных физических ситуаций. Последняя часть книги посвящена наиболее актуальным проблемам современной теории переноса лучистой энергии — учету состояния поляризации излучения, селективности и неравновесных процессов, нелинейных свойств среды и ее конфигурации.

Книга рассчитана на студентов старших курсов университетов, вузов и пединститутов, а также на научных работников и инженеров, которые в своей работе встречаются с вопросами переноса излучения.

М. А. Ельшевич

ОТ АВТОРА

Предлагаемое учебное пособие предназначается для студентов старших курсов физических специальностей вузов. В нем изложены основные понятия и методы, используемые при решении задач теории переноса излучения, и представлены основные результаты теории переноса излучения в различных областях физики. Издание пособия обусловлено необходимостью подготовки специалистов по теоретической оптике, широким применением на практике результатов теории переноса излучения, а также тем, что имеющиеся монографии по данной проблеме в силу их узкой специализации не могут быть использованы в качестве учебников. Кроме того, известные монографии В. В. Соболева и С. Чандрасекара давно уже стали библиографической редкостью.

Пособие написано на основе курса лекций, прочитанных автором в Белорусском государственном университете им. В. И. Ленина.

Для усвоения материалов данного спецкурса рекомендуется следующая основная литература:

1. С. Чандрасекар. Перенос лучистой энергии. М., ИЛ, 1953.
2. В. В. Соболев. Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет. М., ГИТТЛ, 1956.
3. Б. Дэвисон. Теория переноса нейтронов. М., Атомиздат, 1960.
4. Р. М. Гудн. Атмосферная радиация. М., «Мир», 1966.
5. А. П. Иванов. Оптика рассеивающих сред. Минск, «Наука и техника», 1969.
6. В. В. Иванов. Теория переноса и спектры небесных тел. М., «Наука», 1969.
7. В. Е. Зуев. Распространение видимых и инфракрасных волн в атмосфере. М., «Советское радио», 1970.
8. V. Kourganoff, L. W. Busbridge. Basic methods in transfer problems. Dover Publications, Inc., New York, 1963.

Материалы этих монографий использованы при написании данного учебного пособия. Дополнительная литература по теории переноса лучистой энергии приведена в конце пособия.

К. С. Адзериho

Глава 1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ.

УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА ЛУЧИСТОЙ ЭНЕРГИИ

§ 1. Предмет исследования теории переноса излучения

Теория переноса лучистой энергии возникла в первом десятилетии нашего века. Ее появление было обусловлено необходимостью решения ряда астрофизических задач. Исследование излучения, распространяющегося в реальных объектах (небесных телах, земной атмосфере, различных нагретых средах и т. д.), непосредственно связано с необходимостью учета многократных актов перепоглощения и рассеяния. Влияние этих процессов на интенсивность, угловое распределение и спектры лучистой энергии требовало более детального исследования законов распространения света в излучающих и рассеивающих средах. Формулировка Милном [1] уравнения переноса излучения положила начало многочисленным интересным исследованиям в астрофизике, что привело к возникновению одного из важнейших разделов современной физики — теории переноса излучения.

Приложения теории переноса лучистой энергии многочисленны и в каждом из разделов физики разнообразны по содержанию. В астрофизических проблемах существенной частью исследования является изучение процессов многократного рассеяния света в газовых средах и интерпретация спектров небесных тел. В силу большой разреженности межзвездного газа состояние самого вещества существеннейшим образом зависит от поля излучения, что значительно усложняет рассмотрение астрофизических задач. С другой стороны, имеется целый ряд задач, связанных с исследованием характеристик свечения оптически плотной плазмы. В решении этих задач заинтересованы специалисты по спектроскопии плазмы и исследователи воздействия мощных излучений на вещество. Вопросы, связанные с закономерностями излучения и поглощения молекулярных газов, в большой

степени интересуют специалистов по атмосферной оптике и геофизике в связи с исследованиями общей циркуляции атмосферы, энергетики земной атмосферы, а также ставшими актуальными в настоящее время метеорологическими исследованиями с помощью искусственных спутников Земли и космических кораблей.

Важные задачи сейчас стоят перед специалистами по теории переноса в связи с необходимостью изучения закономерностей распространения лазерного излучения в естественных средах. Их решение реально определит возможности лазерной локации и связи.

Если перечисленные проблемы в основном связаны с определением поля излучения по известным оптическим характеристикам сред, то при наличии известных условий освещения и данных взаимодействия излучения со средой можно поставить вопрос об определении спектроскопических характеристик сред. В этой области — области обратных задач — достигнуты значительные успехи, составляющие основу спектроскопии рассеивающих и излучающих систем.

Все разделы физики, имеющие отношение к теории переноса излучения (сюда относятся и разделы ядерной физики по переносу корпускулярных излучений), имеют общую основу — это общность математических подходов к рассмотрению физических проблем, общность идей и воплощение последних в методы решения уравнения переноса. Поэтому любой успех в теоретических и экспериментальных исследованиях в одном из перечисленных выше разделов физики имеет большое значение для остальных и при определенном физическом обосновании эти результаты можно использовать для объяснения того или иного явления в различных исследованиях переноса излучения. Так, например, успехи теории переноса излучения в послевоенные годы связаны с бурным развитием ядерной энергетики (отраженным в монографиях Дэвисона, Фано, Марчука и др.).

В последнее время развитие теории переноса излучения сопровождается появлением новых, аналитических методов исследования, усовершенствованием уже известных методов, а также мощных машинных методов расчета, позволяющих решать весьма трудоемкие задачи. Постановка новых проблем теории переноса излучения и получение их аналитических или численных решений

позволяют еще глубже проникнуть в существо процессов распространения излучения в среде, выявить еще неизвестные закономерности взаимодействия поля излучения с веществом и тем самым расширить наши знания об окружающем нас материальном мире.

§ 2. Характеристики поля излучения

Основными характеристиками поля излучения являются *интенсивность*, *плотность* и *поток*. Под *интенсивностью* (или *яркостью*) излучения обычно понимают то количество световой энергии, которое падает перпендикулярно на единичную площадку в единичном телесном угле за единицу времени. Если величина рассчитана на единичный частотный интервал, мы имеем дело со спектральной интенсивностью I_ν . Если количество лучистой энергии в частотном интервале $(\nu, \nu + d\nu)$, падающей перпендикулярно на площадку $d\sigma$ в телесном угле $d\Omega$ за время dt , равно dE_ν , то

$$I_\nu = \frac{dE_\nu}{d\sigma d\Omega d\nu dt}.$$

В общем случае спектральная интенсивность излучения является функцией от координат исследуемой точки среды $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y, z)$, направления распространения $\mathbf{l} = \mathbf{l}(\theta, \varphi)$, частоты ν и времени t :

$$I_\nu = I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{l}, t).$$

Для задач стационарной теории переноса излучения зависимость от времени опускается, т. е.

$$I_\nu = I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{l}).$$

(Вопросы, связанные с нестационарным распространением излучения, обсуждаются в гл. 7.)

Если интенсивность излучения определяется в некотором частотном интервале $\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1$, то количество световой энергии определяется величиной

$$\Delta E_{\Delta\nu} = d\sigma d\Omega dt \int_{\nu_1}^{\nu_2} I_\nu d\nu = I_{\Delta\nu} d\sigma d\Omega dt. \quad (1.2)$$

Очень часто при решении задач пользуются интегральной величиной интенсивности излучения:

$$I(\mathbf{r}, l) = \int_0^{\infty} I_{\nu}(\mathbf{r}, l) d\nu. \quad (1.3)$$

Объемная плотность излучения ρ_{ν} определяется количеством световой энергии в единице объема, приходящимся на единичный частотный интервал. Элементарный объем, который занимает излучение за интервал времени $(t, t+dt)$, равен $dV = c dt d\sigma$, где c — скорость света. Тогда по (1.1):

$$\int_{(4\pi)} dE_{\nu} = \int_{(4\pi)} I_{\nu}(\mathbf{r}, l) d\sigma d\Omega d\nu dt = \rho_{\nu}(\mathbf{r}) dV d\nu.$$

Отсюда находим связь между интенсивностью излучения и его плотностью:

$$\rho_{\nu}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int_{(4\pi)} I_{\nu}(\mathbf{r}, l) d\Omega. \quad (1.4)$$

Если величина интенсивности излучения не зависит от направления:

$$I_{\nu}(\mathbf{r}, l) \equiv I_{\nu}(\mathbf{r}),$$

т. е. если излучение *изотропно*, тогда

$$\rho_{\nu}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{c} I_{\nu}(\mathbf{r}) \quad \text{или} \quad I_{\nu}(\mathbf{r}) = \frac{c}{4\pi} \rho_{\nu}(\mathbf{r}). \quad (1.5)$$

Так, например, объемная плотность излучения, испускаемого черным телом, по закону Планка равна:

$$\rho_{\nu}(T) = B_{\nu}(T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} (e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1)^{-1}, \quad (1.6)$$

а интенсивность планковской радиации —

$$I_{\nu p} = \frac{c}{4\pi} B_{\nu}(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} (e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1)^{-1}. \quad (1.7)$$

Наряду с указанными характеристиками поля излучения часто используется величина, называемая *поток*

излучения. За эту величину примем количество световой энергии, падающее на единичную площадку и рассчитанное на единичный интервал частот и единицу времени:

$$H_{\nu} = \frac{dE_{\nu}}{d\sigma d\nu dt} . \quad (1.8)$$

Так как количество световой энергии, проходящей через площадку $d\sigma$ под некоторым углом θ к ее нормали \mathbf{n} , по (1.1) равно

$$\begin{aligned} dE_{\nu}(\mathbf{r}, l) &= I_{\nu}(\mathbf{r}, l) d\sigma \cos(l, \mathbf{n}) d\Omega dt = \\ &= I_{\nu}(\mathbf{r}, l) d\sigma \cos \theta d\Omega dt, \end{aligned}$$

то полное количество энергии, протекающее через площадку $d\sigma$ во всех возможных направлениях, определится соотношением

$$\begin{aligned} dE_{\nu}(\mathbf{r}) &= \int_{(4\pi)} dE_{\nu}(\mathbf{r}, l) = d\sigma d\nu dt \int_{(4\pi)} I_{\nu}(\mathbf{r}, l) \cos \theta d\Omega = \\ &= H_{\nu}(\mathbf{r}) d\sigma d\nu dt. \end{aligned}$$

Это позволяет найти связь между величинами H_{ν} и I_{ν} :

$$H_{\nu}(\mathbf{r}) = \int_{(4\pi)} I_{\nu}(\mathbf{r}, l) \cos \theta d\Omega. \quad (1.9)$$

Формулу (1.9) можно представить в следующем виде:

$$H_{\nu}(\mathbf{r}) = H_{\nu}^{+}(\mathbf{r}) - H_{\nu}^{-}(\mathbf{r}), \quad (1.9a)$$

где

$$\begin{aligned} H_{\nu}^{+}(\mathbf{r}) &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} I_{\nu}(\mathbf{r}, l) \cos \theta \sin \theta d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 I_{\nu}(\mathbf{r}, l) \mu d\mu, \quad \mu = \cos \theta, \end{aligned}$$

и

$$H_{\nu}^{-}(\mathbf{r}) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{-1} I_{\nu}(\mathbf{r}, l) \mu d\mu.$$

Здесь $H_{\nu}^{+}(\mathbf{r})$ — поток излучения, падающий на исследуемую площадку из верхней полусферы, а $H_{\nu}^{-}(\mathbf{r})$ — поток

излучения из нижней полусферы. Разность указанных потоков и образует результирующий поток излучения, проходящий через данную площадку. Если потоки $H_v^+(r)$ и $H_v^-(r)$ равны, результирующий поток отсутствует. К этому же результату приводит и формула (1.9) при независимости интенсивности излучения от направления.

Аналогично (1.3) при расчетах можно использовать интегральные величины плотности и потока излучения:

$$\rho(r) = \int_0^\infty \rho_v(r) dv, \quad H(r) = \int_0^\infty H_v(r) dv. \quad (1.10)$$

Нетрудно показать, что соотношения между интегральными величинами I , ρ и H сохраняют свой вид:

$$\rho(r) = \frac{1}{c} \int_{(4\pi)} I(r, l) d\Omega, \quad H(r) = \int_{(4\pi)} I(r, l) \cos \theta d\Omega. \quad (1.11)$$

§ 3. Акты поглощения и испускания излучения. Уравнение переноса излучения

При распространении излучения в среде количество световой энергии вдоль луча от точки к точке может изменяться за счет процессов ослабления и испускания излучения элементарными объемами. Эти процессы противоположного знака, и поэтому общее изменение световой энергии

$$dE_v = -dE_v^{\text{осл}} + dE_v^{\text{исп}}. \quad (1.12)$$

Полагая, что процесс ослабления происходит линейно относительно интенсивности и массы исследуемого вещества (так называемый закон *Бугера*), величину $dE_v^{\text{осл}}$ можно записать в виде*):

$$dE_v^{\text{осл}} = \alpha_v dr \cdot I_v d\Omega dv dt,$$

где $\alpha_v dr$ — доля излучения, ослабленного на длине dl . Величина α_v называется *показателем полного ослабления* (или просто *показателем ослабления*). В общем случае α_v пред-

*) Процессы нелинейного распространения излучения в веществе кратко рассмотрены в гл. 7.

составляет собой сумму показателей истинного поглощения (или просто поглощения) κ_ν и рассеяния σ_ν :

$$\alpha_\nu = \kappa_\nu + \sigma_\nu. \quad (1.13)$$

Нетрудно заметить, что величина $\alpha_\nu dl$, называемая элементарной оптической толщиной, безразмерна. Тогда показатель ослабления α_ν и, следовательно, κ_ν и σ_ν имеют размерность L^{-1} (см^{-1} , м^{-1} и т. д.).

Если обозначить количество световой энергии, испускаемой единичным объемом вещества в единичном телесном угле за единицу времени, через J_ν (так называемый коэффициент испускания), то величину $dE_\nu^{\text{исп}}$ можно выразить так:

$$dE_\nu^{\text{исп}} = J_\nu dV d\Omega dv dt, \quad dV = d\sigma dr.$$

Таким образом, изменение интенсивности излучения при прохождении расстояния dl в среде определяется выражением

$$\begin{aligned} (I_\nu + dl_\nu) d\sigma d\Omega dv dt - I_\nu d\sigma d\Omega dv dt &= dE = \\ &= -\alpha_\nu dr \cdot I_\nu d\sigma d\Omega dv dt + J_\nu d\sigma dr d\Omega dv dt. \end{aligned}$$

Отсюда находим уравнение переноса излучения:

$$\frac{dI_\nu}{dr} = -\alpha_\nu I_\nu + J_\nu \quad \text{или} \quad \frac{dI_\nu}{dr} = \alpha_\nu (\epsilon_\nu - I_\nu). \quad (1.14)$$

Здесь $\epsilon_\nu = J_\nu / \alpha_\nu$ называется функцией источников. Таким образом, уравнение переноса излучения является, в сущности, математической формулировкой закона сохранения лучистой энергии при взаимодействии излучения с элементарным объемом вещества.

Вводя элементарную оптическую толщину $d\tau_\nu = \alpha_\nu dr$, уравнение (1.14) можно представить в виде

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = \epsilon_\nu - I_\nu. \quad (1.15)$$

Соотношение (1.15) носит название уравнения Шварцшильда.

Несмотря на простой вид, уравнение переноса излучения (1.14) описывает очень большой класс задач по взаимодействию излучения с веществом в разнообраз-

ных физических явлениях. В общем случае это уравнение является интегродифференциальным (функция источников e_v может зависеть от величины I_v) и допускает решения в весьма ограниченном числе случаев. С другой стороны, производная, стоящая в левой части уравнения (1.14), является производной по направлению:

$$\begin{aligned} \frac{dI_v}{dl} = \text{grad}_l I_v = \frac{\partial I_v}{\partial x} \cos(i, l) + \\ + \frac{\partial I_v}{\partial y} \cos(j, l) + \frac{\partial I_v}{\partial z} \cos(k, l), \end{aligned} \quad (1.16)$$

где i, j, k — соответственно орты осей x, y и z . Решение задачи затрудняет довольно сложная иногда спектральная зависимость показателей поглощения и рассеяния. Так, например, для молекулярных газов κ_v представляет собой набор спектральных линий, параметры которых могут зависеть от координат точки среды (см. § 4).

Пусть $I_v(0)$ — интенсивность излучения, падающего на границу среды $l = 0$, а $\tau_v = \int_0^l \kappa_v(l') dl'$ — оптическая глупина среды. Если исследуемая среда только поглощает излучение, то из (1.14) следует, что

$$I_v(l) = I_v(0) e^{-\tau_v}. \quad (1.17)$$

Соотношение (1.17) является математической формулировкой закона Бугера. Помимо указанного условия линейности свойств среды, этот закон справедлив лишь для монохроматического излучения. При вычислении интенсивности в определенном частотном интервале закон Бугера также может нарушаться вследствие сложной спектральной зависимости оптических характеристик среды (см. гл. 6 и 7).

Формальным решением уравнения (1.14) является

$$\begin{aligned} I_v(l) = I_v(0) \exp \left\{ - \int_0^l \alpha_v(l') dl' \right\} + \\ + \int_0^l e_v(l') \exp \left\{ - \int_{l'}^l \alpha_v(l'') dl'' \right\} dl'. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Это уравнение иногда называют *уравнением переноса излучения в интегральной форме*. Здесь первый член характеризует пропускание внешнего излучения, второй — излучение, возникающее в некотором элементарном объеме и ослабленное теми элементарными объемами, которые лежат по пути выхода излучения из среды. При наличии явного выражения для функции $\epsilon_\nu(l)$ соотношение (1.18) нетрудно рассчитать, хотя и аналитически решение (1.18) в большинстве случаев получить невозможно.

Если коэффициент ослабления среды не зависит от частоты излучения (случай *серой* среды), уравнение переноса излучения по форме совершенно аналогично уравнению (1.14):

$$\frac{dI}{dr} = \alpha(e - I), \quad (1.19)$$

где $e = \int_0^\infty \epsilon_\nu dv$ — интегральная функция источников.

Функция источников ϵ_ν является важнейшей характеристикой взаимодействия излучения с веществом и требует специального физического рассмотрения при решении уравнения переноса излучения. Возникновение излучения в некотором элементарном объеме происходит вследствие собственного излучения объема или действия внешних электромагнитных полей (и, в частности, падающего на него излучения). При этом определяющими процессами являются процессы взаимодействия частиц (электронов, атомов и т. д.) и процессы взаимодействия излучения с частицами.

Столкновение частиц в замкнутом объеме приводит к равновесному состоянию системы. Излучение таких систем определяется законом Планка (1.7):

$$J_\nu/\kappa_\nu = I_{\nu p}(T). \quad (1.20)$$

Интегральная величина $I_{\nu p}$ прямо пропорциональна T^4 (*закон Стефана—Больцмана*):

$$\frac{4\pi}{c} e = \frac{4\pi}{c} \int_0^\infty I_{\nu p}(T) dv = \rho = \alpha T^4, \quad (1.21)$$

где $\sigma = 5,6686 \cdot 10^{-12}$ Вт·см⁻²·град⁻⁴ — постоянная Стефана—Больцмана.

Условие полного термодинамического равновесия можно считать приближенно выполненным в тех областях изотермического объема, которые достаточно удалены от граничных поверхностей, т. е. $\tau_v \gg 1$. Состояние термодинамического равновесия нарушается в случае не-изотермичности среды. Однако если предположить, что основную роль играют процессы столкновения, а не процессы излучения, можно считать выполненным условие полного термодинамического равновесия для каждого элементарного объема исследуемой среды. Иными словами, элементарные объемы отождествляются с черными полостями с соответствующей температурой и больцмановским распределением частиц. Это условие носит название *условия локального термодинамического равновесия* (ЛТР) (впервые введено Милном). Функция источников в данном случае определяется выражением (1.20), где $T = T(r)$. Как показала практика, результаты расчета при условии ЛТР для многих случаев вполне удовлетворительны.

§ 4. Коэффициент поглощения

Процессы поглощения и испускания излучения атомами и молекулами происходят в результате изменения энергии частиц, которая в общем случае представляет собой сумму энергий поступательных, колебательных и вращательных движений и энергии движения электронов:

$$E = E_e + E_v + E_r + E_t. \quad (1.22)$$

При этом поглощение и испускание излучения происходит квантами, величина которых определяется формулой Планка:

$$\Delta E = h\nu, \quad (1.23)$$

где $h = 6,6252 \cdot 10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка.

В соотношении (1.22) предполагается отсутствие взаимодействия между различными видами движений. Величина энергии поступательного движения E_t изменяется непрерывно в отличие от скачкообразных (квантованных) изменений величин E_e , E_v и E_r . Обычно измене-

ние энергии квантовой системы сопровождается одновременным изменением величин E_e , E_v и E_r в соответствии с правилами отбора, описываемыми квантовой механикой. Если энергия системы увеличивается, происходит поглощение излучения (система переходит в более высокое энергетическое состояние), если уменьшается — испускание излучения. Вследствие отсутствия у атомов запасов колебательной и вращательной энергии (E_v и E_r) атомы имеют линейчатый спектр. Спектры испускания (поглощения) молекул представляют собой совокупность линий, которые образуют системы полос (полоса определяет электронный переход с одновременным изменением колебательной и вращательной энергий).

Энергия электронного перехода E_e обычно составляет величину порядка нескольких eV *) , колебательная энергия E_v — порядка $600—10\,000\text{ см}^{-1}$, а вращательная энергия E_r — порядка $1—200\text{ см}^{-1}$. Поэтому электронные спектры поглощения и испускания лежат в ультрафиолетовой и видимой областях спектра, колебательные — в близкой и средней инфракрасной, а вращательные — в средней и далекой инфракрасной и микроволновой областях.

Определение коэффициента поглощения атомов и молекул представляет собой сложную спектроскопическую задачу. Однако если считать справедливым условие независимости между типами энергии (1.22), можно выявить общие закономерности для каждого типа и оценить соответствующий вклад в величину коэффициента поглощения. Если считать, что при взаимодействии излучения со средой атомы и молекулы между собой независимы, то, определяя вероятность перехода между энергетическими уровнями и их заселенность, можно найти общую вероятность перехода при испускании (или поглощении) излучения в определенном интервале. Вероятность перехода системы из i -го состояния со статистическим весом g_i в j -е состояние определяется выражением

$$A_{ij} = \frac{64\pi^2\nu_{ij}^3}{3hg_jc^3} |\mathbf{R}_{ij}|^2, \quad (1.24)$$

где \mathbf{R}_{ij} — матричный элемент дипольного перехода:

$$\mathbf{R}_{ij} = \int \psi_i^* M \psi_j dV \quad (1.25)$$

*) $1\text{ eV} = 8066\text{ см}^{-1}$.

(ψ_i — волновая функция i -го квантового состояния системы).

Энергия движения электронов характеризуется главным квантовым числом n и азимутальным числом l :

$$E_e = E_e(n, l) = - \frac{hcRZ^2}{[n + a(l)]^2}. \quad (1.26)$$

Здесь R — постоянная Ридберга, Z — атомный номер, $a(l)$ — некоторая функция от l . Если колебания молекул считать гармоническими, то их энергия квантуется следующим образом:

$$E_v = \left(v + \frac{1}{2} \right) h\nu_0 \quad (1.27)$$

(v — колебательное квантовое число). И наконец, вращательная энергия в простейшем случае жесткой линейной молекулы изменяется так:

$$E_r = E_r(j) = hcBj(j + 1), \quad (1.28)$$

j — вращательное квантовое число, а B — вращательная константа, определяемая моментом инерции молекулы I :

$$B = \frac{h}{8\pi^2cI} = 2,8 \cdot 10^{-39} \cdot I^{-1}. \quad (1.29)$$

Учет взаимодействия между атомами и молекулами приводит к уширению спектральных линий. Как известно, причинами уширения является естественное время жизни системы в возбужденном состоянии (естественное уширение), эффекты столкновений (ударное уширение) и тепловое движение атомов и молекул (доплеровское уширение). Для первых двух типов спектральную функцию уширения можно записать в виде

$$b(v, \nu_0) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\gamma}{(v - \nu_0)^2 + \gamma^2}, \quad (1.30)$$

причем

$$\gamma_L = \frac{1}{4\pi\tau_L} \quad \text{и} \quad \gamma_p = \frac{1}{4\pi\tau_p}. \quad (1.31)$$

Здесь $\tau_p = 1/A$ — среднее время жизни системы в возбужденном состоянии; τ_L — среднее время между двумя

столкновениями. Функция $b(v, v_0)$ нормирована к единице: $\int_0^{\infty} b(v, v_0) dv = 1$. Для доплеровского уширения имеем:

$$b(v, v_0) = \frac{1}{\gamma_D \sqrt{\pi}} \exp \left\{ - \left(\frac{v - v_0}{\gamma_D} \right)^2 \right\}, \quad (1.32)$$

где

$$\gamma_D = \frac{v_0}{c} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.33)$$

Коэффициент поглощения κ_ν можно представить так:

$$\kappa_\nu = S b(v, v_0), \quad (1.34)$$

где $S = \int_0^{\infty} \kappa_\nu dv$ — спектральная сила линий. Для некоторого ($j \rightarrow i$)-го перехода

$$S = \frac{n_j}{n_{gi}} \cdot \frac{8\pi\nu_{ij} |R_{ij}|^2}{3hc} \left(1 - e^{-\frac{h\nu_{ij}}{kT}} \right). \quad (1.35)$$

Вследствие трудности расчета R_{ij} спектральная сила линий обычно определяется экспериментально.

§ 5. Рассеяние света.

Коэффициент рассеяния

Количество ослабленного элементарным объемом излучения

$$dE^{\text{осл}} = \alpha_\nu dr \cdot I_\nu d\sigma d\Omega dv dt = \alpha_\nu I_\nu dV d\Omega dv dt$$

может частично переходить в другие формы энергии. Излучение, как говорят, может испытать истинное поглощение, характеризуемое величиной κ_ν . Остальная часть энергии $dE^{\text{осл}}$ может вновь быть испущена, т. е. может рассеиваться. Если в рассматриваемом элементарном объеме рассеивающие центры не взаимодействуют между собой, то коэффициенты ослабления и рассеяния такого объема нетрудно подсчитать, используя теорию Ми (см., например, [2, 3]). Основой теории Ми является решение классической задачи о рассеянии плоской электромагнитной волны однородным шаром, приводящее к следующим

выражениям для коэффициентов ослабления и рассеяния излучения, отнесенным к площади поперечного сечения шара:

$$k = k^a + k^s = \frac{\alpha}{\pi r^2 N} =$$

$$= -\frac{2}{\rho^2} \sum_{n=1}^{\infty} i (-1)^n n(n+1) (c_n - b_n), \quad (1.36)$$

$$k^s = \frac{0}{\pi r^2 N} = \frac{2}{\rho^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(n+1)^2}{2n+1} (|c_n|^2 + |b_n|^2), \quad (1.37)$$

где $\rho = \frac{2\pi r}{\lambda}$ (r — радиус шара; λ — длина волны излучения), а амплитудные коэффициенты парциальных волн электрических и магнитных колебаний c_n и b_n равны:

$$c_n = i^{2n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \cdot \frac{\psi_n(\rho) \psi'_n(m\rho) - m\psi'_n(\rho) \psi_n(m\rho)}{\zeta_n(\rho) \psi'_n(m\rho) - m\zeta'_n(\rho) \psi_n(m\rho)},$$

$$b_n = -i^{2n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \cdot \frac{\psi'_n(\rho) \psi_n(m\rho) - m\psi_n(\rho) \psi'_n(m\rho)}{\zeta'_n(\rho) \psi_n(m\rho) - m\zeta_n(\rho) \psi'_n(m\rho)}, \quad (1.38)$$

$m = n_1 - in_2$ — комплексный показатель преломления вещества,

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} I_{n+\frac{1}{2}}(x),$$

$$\zeta_n(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(x), \quad (1.39)$$

$I_{n+\frac{1}{2}}(x)$ — функция Бесселя первого рода; $H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(x)$ — функция Ханкеля второго рода.

Коэффициенты поглощения и рассеяния, рассчитываемые с помощью соотношений (1.36) и (1.37), имеют сложную зависимость от параметра дифракции $\rho = \frac{2\pi r}{\lambda}$ (рис. 1).

Однако в предельных случаях эти соотношения довольно

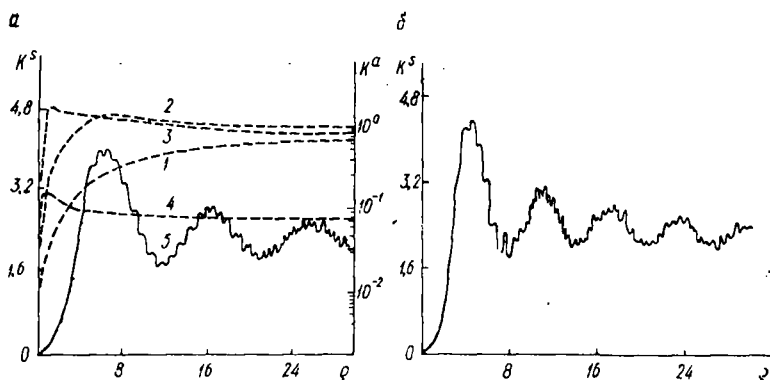


Рис. 1. Коэффициенты k^s и k^a для одной сферической частицы (по данным [4, 5]):

— k^s [4], - - - k^a [5]; $a-n_1=1,33$; $b=1,50$; $1-n_2=10^{-2}$, $2-10^{+1}$, $3-1,0$, $4-10$

просты. Для очень малых частиц выражения (1.36) и (1.37) принимают вид

$$k = \frac{24n_1n_2\rho^3}{(n_1^2 - n_2^2 + 2)^2 + (2n_1n_2)^2},$$

$$k^s = \frac{8\rho^4 \{ [n_1^2 - n_2^2 - 2 + (n_1^2 + n_2^2)^2]^2 + (6n_1n_2)^2 \}}{3 [(n_1^2 - n_2^2 + 2)^2 + (2n_1n_2)^2]^2} \quad (1.40)$$

и совпадают с основными соотношениями теории Релея для молекулярного рассеяния.

Для больших частиц ($\rho \gg 1$) коэффициент ослабления k не зависит от оптических характеристик вещества (n_1, n_2) и от параметра дифракции ρ , стремясь к предельному значению

$$k_{\text{lim}} = 2. \quad (1.41)$$

Практически это явление наступает при $\rho \geq 20$. Следует отметить, что по законам геометрической оптики $k_{\text{lim}} \leq 1$. Соотношение (1.41) обусловлено дифракционными явлениями излучения на частицах, что приводит к увеличению потока световой энергии, рассеиваемой частицами. При $\rho \geq 20$ соотношение между коэффициентами поглощения и рассеяния перестает зависеть от параметра дифракции и определяется только оптическими характеристиками вещества.

Если обозначить через σ_ν коэффициент рассеяния света на элементарном объеме, то доля рассеянного излучения для $dE^{\text{осл}}$ будет равна $\alpha_\nu \sigma_\nu / (\kappa_\nu + \sigma_\nu) = \lambda_\nu \alpha_\nu$. Величина

$$\lambda_\nu = \frac{\sigma_\nu}{\kappa_\nu + \sigma_\nu} \quad (1.42)$$

называется *вероятностью выживания кванта* (или *квантовым выходом*). Случай $\lambda_\nu = 1$, т. е. когда все падающее излучение рассеивается элементарным объемом, соответствует чистому рассеянию в среде.

В общем случае рассеянное излучение анизотропно, т. е. интенсивность рассеянного излучения зависит от направления его распространения. Для учета этого явления обозначим вероятность того, что излучение рассеивается под некоторым углом γ внутри телесного угла $d\Omega$, через $p(\gamma) \frac{d\Omega}{4\pi}$.

Функция $p(\gamma)$ называется *индикатрисой рассеяния* излучения. Так как явление рассеяния излучения под любым углом — достоверное событие, получаем условие нормировки индикатрисы рассеяния:

$$\int_{(4\pi)} p(\gamma) \frac{d\Omega}{4\pi} = 1. \quad (1.43)$$

В случае $p(\gamma) = 1$ рассеяние по всем направлениям равновероятно. Индикатриса рассеяния в этом случае называется *сферической*. Если рассеяние излучения происходит на частицах, размеры которых малы по сравнению с длиной волны излучения, индикатриса рассеяния имеет вид

$$p(\gamma) = \frac{3}{4} (1 + \cos^2 \gamma) \quad (1.44)$$

и называется *релеевской*. При размерах частиц, сравнимых с длиной волны излучения, индикатриса рассеяния определяется по теории Ми. В этом случае она существенно зависит от отношения радиуса частицы к длине волны излучения и показателя преломления частицы. С увеличением размера частиц индикатриса рассеяния становится все более вытянутой вперед (рис. 2).

Если известны α_ν , λ_ν и $p(\gamma)$, не представляет труда найти количество лучистой энергии, рассеянной единичным объемом

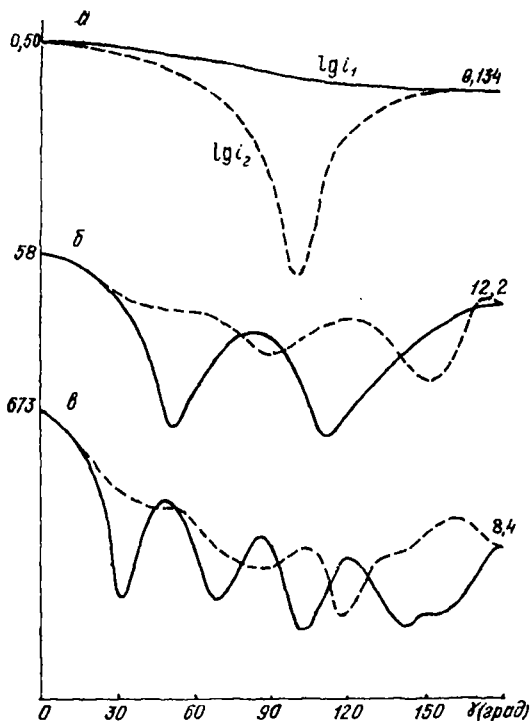


Рис. 2. Угловое распределение взаимно перпендикулярных компонент интенсивности излучения, рассеянного на шаре с показателем преломления $n_1=2,0$ [3]:

$a-\rho=1$, $b-3$, $v-6$

в заданном направлении. Для этого необходимо количество энергии $dE^{\text{отл}}$ умножить на долю рассеянного в данном направлении излучения $\lambda_v \rho(\gamma) \frac{d\Omega}{4\pi}$ и проинтегрировать полученное выражение по полному телесному углу. Это выражение и представляет собой функцию источников в случае рассеивающих сред:

$$\alpha_v e_v = \lambda_v \alpha_v \int_{(4\pi)} \rho(\gamma) I_v \frac{d\Omega}{4\pi}$$

или

$$e_v = \frac{\lambda_v}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\pi p(\theta, \varphi; \theta', \varphi') I_v(r, \theta', \varphi') \sin \theta' d\theta'. \quad (1.45)$$

Таким образом, уравнение переноса излучения в светорассеивающей и излучающей среде можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{dI_v(r, \theta, \varphi)}{dr} = & -\alpha_v I_v(r, \theta, \varphi) + \\ & + \frac{\sigma_v}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\pi p(\theta, \varphi; \theta', \varphi') I_v(r, \theta', \varphi') \sin \theta' d\theta' + \alpha_v e_v^0, \end{aligned} \quad (1.46)$$

где $e_v^0 = e_v^0(r)$ — функция источников собственного излучения среды.

Граничные условия для уравнения (1.46) должны выражать тот факт, что излучение среды (рассеянное или испускаемое средой) не может падать извне на ее граничные поверхности положительной кривизны. Если \mathbf{n} — нормаль к внешней поверхности среды $r=R$, на которую падает излучение в направлении $\mathbf{l}_0 = \mathbf{l}(\theta_0, \varphi_0)$, то граничным условием для уравнения (1.46) является следующее выражение:

$$I_v(r, \theta, \varphi)|_{r=R, (\ln) < 0} = I_v^{\text{вн}}(\theta_0, \varphi_0). \quad (1.47)$$

Решение уравнения переноса излучения (1.46) при граничном условии (1.47) определяет характеристики светового поля в среде, если известны оптические характеристики среды α_v , λ_v и $p(\gamma)$.

Глава 2

ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

§ 1. Излучение неравновесных газов. Учет перераспределения излучения по частотам

Как было указано в § 3 гл. 1, отклонение от термодинамического равновесия, обусловленное неизотермичностью исследуемой среды, с практической точки зрения удобно и вполне корректно описывать с помощью условия локального термодинамического равновесия. Однако рассмотрение задач, связанных с распространением излучения в достаточно разреженных газах, а также задач, касающихся механизма создания состояния инверсной заселенности и распространения лазерного излучения, приводит к необходимости более тщательного изучения отклонения состояния элементарного объема от термодинамического равновесия [6—9]. Следует различать два физически различных механизма испускания неравновесного излучения. Прежде всего внутренние степени свободы квантовых систем могут находиться в различных состояниях. Это объясняется тем, что времена установления равновесия (времена релаксации) поступательных, вращательных, колебательных и электронных степеней свободы различны при определенных физических условиях и по-разному зависят от давления и температуры. К таким условиям реализации неодинакового состояния различных степеней свободы можно отнести случаи пониженных давлений, высоких температур и скоростей. Сюда следует отнести и специально созданные внешними силами состояния инверсной заселенности энергетических уровней квантовых систем. Следует отметить, что достаточно быстро устанавливается равновесие поступательных и вращательных степеней свободы. Так, для установления термодинамического равновесия по поступательным степеням свободы требуется лишь несколько соударений, причем каждое из них приближает систему к равновесию. Времена электронной и колебательной ре-

лаксации могут сильно отличаться от времени поступательной релаксации. Так как взаимодействие между степенями свободы одного типа происходит значительно сильнее, чем между степенями свободы разных типов, то прежде всего устанавливается равновесие для одинаковых степеней свободы, которое можно охарактеризовать вполне определенной температурой (вращательной, колебательной и т. д.) [6]:

$$\frac{n(E_i^a)}{n(E_j^a)} = \frac{g_i^a}{g_j^a} \exp \left\{ -\frac{E_i^a - E_j^a}{kT^a} \right\}, \quad (2.1)$$

где $n(E_i^a)$ — заселенность i -го уровня энергии для степени свободы a -го типа; g_i^a — его статистический вес; T^a — температура; k — постоянная Больцмана.

При расчетах неравновесного излучения молекулярных газов уравнение переноса остается уравнением типа (1.14):

$$\frac{dI_\nu}{dl} = \alpha_\nu (B_\nu - I_\nu), \quad (2.2)$$

но величины α_ν и B_ν в данном случае определяются двумя температурами: колебательной T_ν и вращательной (или поступательной) T . Как нетрудно показать [7],

$$B_\nu = B_\nu(T_\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \left\{ \exp \left[\frac{h}{k} \left(\frac{\nu_\nu}{T_\nu} + \frac{\nu - \nu_\nu}{T} \right) \right] - 1 \right\}^{-1}, \quad (2.3)$$

$$\alpha_\nu = \alpha_\nu(n, T_\nu, T) \cong \frac{nB_{01} \varepsilon(\nu) h\nu}{1 - e^{-\frac{h\nu_\nu}{kT_\nu}}} \times \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{h}{k} \left(\frac{\nu_\nu}{T_\nu} + \frac{\nu - \nu_\nu}{T} \right) \right] \right\}. \quad (2.4)$$

Здесь ν_ν — частота колебательного перехода; B_{01} — коэффициент Эйнштейна для (0—1)-го перехода; $\varepsilon(\nu)$ — функция, определяющая контур спектральной линии; n — полное количество молекул в единице объема.

Другим не менее важным, а в астрофизических задачах основным механизмом испускания неравновесного

излучения является механизм, при котором заселенность энергетических уровней обусловлена не только столкновением квантовых систем, но и процессами излучения. Данный случай описывает наличие многократных актов переиспускания, сопровождающих распространение излучения в исследуемой среде. Исследование этого случая важно также и для тех люминесцирующих сред (а их большинство), у которых перекрываются полосы поглощения и люминесценции. Для упрощения изучения неравновесности данного типа в качестве модели элементарного излучателя исследуемого газа выберем двухуровневую систему. Нетрудно показать, что к тем же физическим следствиям можно прийти, рассматривая многоуровневые системы [8, 9] или, например, колебательно-вращательные полосы молекул [10].

Пусть n_1 и n_2 — заселенности нижнего и верхнего энергетических уровней соответственно. Излучение рассматриваемой системы определяется процессами заселения и опустошения верхнего (возбужденного) уровня. К процессам заселения относятся удары первого рода и фотовозбуждения, а к процессам опустошения — спонтанные и вынужденные переходы, удары второго рода. Обозначим через B_{12} , A_{21} и B_{21} коэффициенты Эйнштейна, а через C_{12} и C_{21} — вероятности ударов первого и второго рода соответственно. Без ущерба для дальнейших расчетов в величины C_{12} и C_{21} можно включить вероятности безызлучательных переходов различной природы. Напомним известные квантовомеханические соотношения, которые нам понадобятся при выводе выражения функции источников [11]:

$$B_{12} = \frac{g_2}{g_1} B_{21}, \quad A_{21} = \frac{2h\nu_{12}^3}{c^2} B_{21},$$

$$\int_0^{\infty} k_{12}(\nu) d\nu = \frac{h\nu_{12}}{4\pi} B_{12},$$

(2.5)

$$u_{12} = \frac{\int_0^{\infty} k_{12}(\nu) d\nu \int_{(4\pi)} I_{\nu} \frac{d\Omega}{4\pi}}{\int_0^{\infty} k_{12}(\nu) d\nu},$$

$$\epsilon_{21}(\nu) = \frac{8\pi\nu_{12}^2}{c^3} \cdot \frac{g_1}{g_2} \cdot \frac{1}{A_{21}} k_{12}(\nu),$$

где $k_{12}(\nu)$ и $\epsilon_{21}(\nu)$ — коэффициенты поглощения и излучения; u_{12} — плотность излучения; остальные обозначения общепринятые.

Выражение для u_{12} в (2.5) приближенное. Оно получается из расчета числа актов поглощения при условии, что спектральная зависимость $k_{12}(\nu)$ более резкая, чем функция $\frac{1}{\nu}$:

$$\begin{aligned} n_1 B_{12} u_{12} &= n_1 \int_0^{\infty} k_{12}(\nu) d\nu \frac{1}{h\nu} \int_{(4\pi)} I_\nu d\Omega \cong \\ &\cong \frac{n_1}{h\nu_{12}} \int_0^{\infty} k_{12}(\nu) d\nu \int_{(4\pi)} I_\nu d\Omega. \end{aligned}$$

Для двухуровневой системы уравнение переноса излучения можно записать в следующем виде:

$$\frac{dI}{dr} = -k_{12}(\nu) n_1 I_\nu + \frac{1}{4\pi} \epsilon_{21}(\nu) n_2 A_{21} \left(1 + \frac{c^2}{2h\nu_{12}^3} I_\nu \right)$$

или, с учетом (2.5):

$$\begin{aligned} \frac{dI_\nu}{dr} &= -k_{12}(\nu) n_1 I_\nu + \\ &+ \frac{2h\nu_{12}^3}{c^2} \cdot \frac{g_1}{g_2} k_{12}(\nu) n_2 \left(1 + \frac{c^2}{2h\nu_{12}^3} I_\nu \right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Вводя обозначения

$$\kappa_{12}(\nu) = k_{12}(\nu) \left(n_1 - \frac{g_1}{g_2} n_2 \right)$$

и

$$S_{12}(\nu) = \frac{2h\nu_{12}^3}{c^2} \left(\frac{g_2}{g_1} \cdot \frac{n_1}{n_2} - 1 \right)^{-1}, \quad (2.7)$$

приходим к обычной записи уравнения переноса излучения (1.14):

$$\frac{dI_\nu}{dr} = -\kappa_{12}(\nu) I_\nu + \kappa_{12} S_{12}(\nu). \quad (2.8)$$

Здесь $\kappa_{12}(\nu)$ — коэффициент поглощения с учетом вынужденного испускания, а функция $S_{12}(\nu)$ является, по определению, функцией источников, величина которой существенно определяется, согласно (2.7), заселенностями уровней n_1 и n_2 . В случае термодинамического равновесия

$\left(n_1 = \frac{g_1}{g_2} n_2 e^{\frac{\nu v}{kT}} \right)$ функция $S_{12}(\nu)$ переходит в интенсивность планковской радиации.

Заметим, что полученные выражения для коэффициента поглощения и функции источников (2.7) справедливы для любого перехода $i \rightarrow j$ многоуровневых квантовых систем.

В случае двухуровневой системы функцию источников $S_{12}(\nu)$ можно записать как функцию от интенсивности излучения, если воспользоваться стационарным уравнением баланса:

$$n_1 (B_{12} u_{12} + C_{12}) = n_2 (A_{21} + B_{21} u_{12} + C_{21}). \quad (2.9)$$

С помощью соотношений (2.5) уравнение (2.9) можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{n_2}{n_1} (A_{21} + C_{21}) = \frac{c^2}{2h\nu_{12}^3} \cdot \frac{g_2}{g_1} \left(1 - \frac{n_2}{n_1} \cdot \frac{g_1}{g_2} \right) A_{21} u_{12} + C_{12}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{2h\nu_{12}^3}{c^2} \cdot \frac{1}{\frac{g_2}{g_1} \cdot \frac{n_1}{n_2} - 1} &= \frac{A_{21}}{A_{21} + C_{21}} u_{12} + \\ + \frac{2h\nu_{12}^3}{c^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{n_2}{n_1} \cdot \frac{g_1}{g_2}} \cdot \frac{\frac{g_1}{g_2} C_{12}}{A_{21} + C_{21}}. \end{aligned}$$

С учетом выражений для u_{12} и S_{12} последнее соотношение определяет искомую связь функции источников с интенсивностью излучения:

$$S_{12}(\nu) \equiv S_{12} = \frac{\lambda}{\int_0^\infty k_{12}(\nu) d\nu} \int_0^\infty k_{12}(\nu) d\nu \int_{(4\pi)} I_\nu \frac{d\Omega}{4\pi} + (1 - \lambda) S_{12}^0. \quad (2.10)$$

Здесь величина

$$\lambda = \frac{A_{21}}{A_{21} + C_{21}} \quad (2.11)$$

характеризует квантовый выход (или вероятность выживания кванта) при элементарном акте взаимодействия излучения с веществом, а функция

$$S_{12}^0 = \frac{2h\nu_{12}^3}{c^2} \cdot \frac{\frac{g_1}{g_2} \cdot \frac{C_{12}}{C_{21}}}{1 - \frac{n_2}{n_1} \cdot \frac{g_1}{g_2}} \quad (2.12)$$

определяет роль процессов столкновения при испускании излучения элементарным объемом вещества.

Выражение, в физическом смысле аналогичное (2.10), для колебательно-вращательной полосы приведено в монографии Гуди [10]:

$$S_\nu = I_{\nu p} \left(\frac{1}{\tau_\nu} + \frac{1}{\tau} \right)^{-1} \times \left(\frac{1}{\tau_\nu} + \frac{1}{\tau} \frac{\int_0^\infty d\nu n k_{n,\nu} \int_{(4\pi)} I_\nu \frac{d\Omega}{4\pi}}{\int_0^\infty d\nu n k_{n,\nu} B_\nu} \right), \quad (2.13)$$

где τ_ν и τ — время релаксации колебательных степеней свободы и время жизни возбужденного состояния соответственно; n — количество молекул; $k_{n,\nu}$ — коэффициент поглощения молекул, рассчитанный на единичный частотный интервал.

Таким образом, уравнение переноса излучения можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{dI_{\nu}(r, l)}{dr} = & -\kappa_{12}(\nu) I(r, l) + \\ & + \frac{\lambda \kappa_{12}(\nu)}{4\pi \int_0^{\infty} k_{12}(\nu) d\nu} \int_0^{\infty} k_{12}(\nu) d\nu \int_{(4\pi)} I_{\nu}(r, l') d\Omega' + \\ & + (1 - \lambda) \kappa_{12}(\nu) S_{12}^0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

В случае, когда вероятность столкновений намного больше вероятности спонтанного испускания ($C_{21} \gg A_{21}$, т. е. $\lambda \rightarrow 0$), то, учитывая, что в данном случае

$$n_1 = \frac{g_1}{g_2} n_2 e^{\frac{h\nu_{12}}{kT}} \quad \text{и} \quad C_{12} = \frac{g_2}{g_1} C_{21} e^{\frac{h\nu_{12}}{kT}},$$

приходим к уравнению переноса излучения при условии локального термодинамического равновесия:

$$\frac{dI_{\nu}(r, l)}{dr} = -\kappa_{12}(\nu) I_{\nu}(r, l) + \kappa_{12}(\nu) I_{\nu p}(T), \quad (2.14a)$$

где $I_{\nu p}(T)$ — интенсивность планковской радиации.

Если заселенность энергетических уровней обусловлена только фотовозбуждениями, то приходим к уравнению переноса, учитывающему многократные акты переиспускания и обычно используемому в астрофизических задачах:

$$\begin{aligned} \frac{dI_{\nu}(r, l)}{dr} = & -\kappa_{12}(\nu) I_{\nu}(r, l) + \\ & + \frac{\lambda \kappa_{12}(\nu)}{4\pi \int_0^{\infty} k_{12}(\nu) d\nu} \int_0^{\infty} k_{12}(\nu) d\nu \int_{(4\pi)} I_{\nu}(r, l') d\Omega'. \end{aligned} \quad (2.14б)$$

Последнее уравнение можно получить из чисто феноменологических соображений и в более общем виде, учитывающем наличие произвольного закона перераспределения излучения по частотам при элементарном акте взаимодействия последнего с веществом. Причинами, вызывающими перераспределение излучения по ча-

стотам, обычно могут быть эффект соударения атомов и молекул, эффект Допплера и т. п. Для учета перераспределения по частотам можно ввести некоторую функцию $W(\nu, \nu')$, характеризующую вероятность того, что после поглощения излучения частоты ν' элементарным объемом испускается излучение в частотном интервале $(\nu, \nu + d\nu)$. Тогда функцию источников можно представить в виде [12]:

$$\alpha_{\nu} e_{\nu} = \int_0^{\infty} W(\nu, \nu') \sigma_{\nu'} d\nu' \int_{(4\pi)} I_{\nu'} \frac{d\Omega}{4\pi}, \quad (2.15)$$

причем

$$\int_0^{\infty} W(\nu, \nu') d\nu = 1. \quad (2.16)$$

Величина $W(\nu, \nu') \sigma_{\nu'} = Q(\nu, \nu')$ представляет собой коэффициент рассеяния квантов частоты ν' с учетом преобразования частоты при взаимодействии излучения с элементарным объемом вещества. В силу нормировки (2.16)

$$\int_0^{\infty} Q(\nu, \nu') d\nu = \sigma_{\nu'}. \quad (2.17)$$

В силу теоремы оптической взаимности функция $Q(\nu, \nu')$ симметрична относительно переменных [12]:

$$Q(\nu, \nu') = Q(\nu', \nu). \quad (2.18)$$

Конкретный вид самой функции $W(\nu, \nu')$ для реальных случаев довольно сложен. Так, при учете явления Допплера функцию $W(\nu, \nu')$ можно записать в следующем виде [11]:

$$W(\nu, \nu') = \frac{1}{\pi^{3/2} U(a, 0)} \int_0^{\infty} e^{-(y+t)^2} \left(\arctg \frac{y+s}{a} + \right. \\ \left. + \arctg \frac{y-s}{a} \right) dy, \quad (2.19)$$

где $t = \frac{|\nu - \nu'|}{2\gamma_D}$, $s = \frac{\nu + \nu'}{2\gamma_D} - \frac{\nu}{\gamma_D}$, $a = \frac{\gamma}{\gamma_D}$ — отношение естественной ширины линии к доплеровской, а

$$U(a, x) = \frac{a}{\pi^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-y^2} dy}{(x-y)^2 + a^2} \quad (2.20)$$

так называемая функция Фойгта.

Использование функции перераспределения типа (2.19) значительно усложняет решение уравнения переноса. Поэтому на практике обычно пользуются приближенными функциями $W(\nu, \nu')$, но эти функции должны описывать основные закономерности процесса перераспределения излучения по частотам. Наиболее удачным приближением в настоящее время является приближение, предложенное Дж. Хаутгастом [13] и др. Оно заключается в том, что вероятность рассеяния кванта с частотой ν не зависит от частоты поглощенного кванта ν' , т. е. испускаемый квант полностью «забывает» историю собственного поглощения. Это приближение носит название полного перераспределения по частотам. Ряд экспериментов (например, [14], [15]) подтвердил его справедливость.

При полном перераспределении излучения по частотам функцию $Q(\nu, \nu')$ можно представить в виде

$$Q(\nu, \nu') = W(\nu, \nu') \sigma_{\nu'} = W(\nu) \sigma_{\nu}. \quad (2.21)$$

Из свойства (2.18) следует, что

$$W(\nu') \sigma_{\nu} = W(\nu) \sigma_{\nu'} \text{ или } W(\nu) = C \sigma_{\nu}.$$

Постоянную C можно определить из условия нормировки (2.16):

$$\int_0^{\infty} W(\nu) d\nu = 1 \quad \text{и} \quad C = \frac{1}{\int_0^{\infty} \sigma_{\nu} d\nu}.$$

Отсюда в приближении полного перераспределения излучения по частотам функция источников имеет вид

$$\alpha_{\nu} \varepsilon_{\nu} = \frac{\sigma_{\nu}}{4\pi \int_0^{\infty} \sigma_{\nu} d\nu} \int_0^{\infty} \sigma_{\nu'} d\nu' \int_{(4\pi)} I_{\nu'} d\Omega',$$

что формально совпадает с функцией источников в уравнении (2.14б).

Взаимодействие излучения с веществом (например, отражение, преломление, рассеяние излучения и т. д.) приводит к его частичной или полной поляризации. Поляризационные измерения в настоящее время достаточно широко распространены и являются «тонким инструментом» для выявления внутренней структуры исследуемых объектов. Пренебрежение состоянием поляризации излучения при теоретических расчетах приводит к значительным ошибкам.

В последнее время для описания поляризации излучения в светорассеивающих объектах применяется метод параметров Стокса (или параметров Стокса), незаслуженно забытый в течение многих лет [6]. Метод Стокса позволяет одновременно измерять основные характеристики излучения: интенсивность, степень поляризации, положение плоскости поляризации, степень эллиптичности. С помощью этого метода достигнуты определенные успехи при изучении взаимодействия поляризованного излучения с веществом. Сущность метода Стокса заключается в следующем.

Пусть в некотором направлении распространяется плоскополяризованная электромагнитная волна частоты $\nu = \omega/2\pi$. Представим ее электрический вектор напряженности в виде

$$E(\mathbf{r}, t) = \sum_{j=1}^2 E_j(\mathbf{r}, t) \mathbf{e}_j^0 = \sum_{j=1}^2 E_j(\mathbf{r}) e^{i\omega t} \mathbf{e}_j^0, \quad (2.22)$$

где $E_j(\mathbf{r})$ — амплитуды, в общем виде комплексные, не зависящие или слабо зависящие от времени t ; \mathbf{e}_j^0 ($j = 1, 2$) — единичные векторы, ортогональные направлению распространения световой волны.

По Винеру [17] определим матрицу интерференции в некоторой точке \mathbf{r} светового пучка для величин $E_1(\mathbf{r}, t)$, $E_2(\mathbf{r}, t)$ следующим образом:

$$\Phi_{ij}(\mathbf{r}, \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E_i(\mathbf{r}, t + \tau) E_j^*(\mathbf{r}, t) dt.$$

Зная вид матрицы интерференции, можно непосредственно найти некоторую совокупность наблюдаемых величин:

$$S_{ij}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{ij}(\mathbf{r}, \tau) e^{i\omega\tau} d\tau \quad (i, j = 1, 2).$$

Если внешнее излучение монохроматично, т. е. если

$$E_i(\mathbf{r}, t) = E_i(\mathbf{r}) e^{-i\omega_0 t} \quad (i = 1, 2),$$

а за интегральную матрицу, определяющую наблюдаемые величины, принять выражение

$$S_{ij}(\mathbf{r}) = \int_0^{\infty} S_{ij}(\mathbf{r}, \omega) d\omega = \frac{1}{2} E_i(\mathbf{r}) E_j^*(\mathbf{r}),$$

то нетрудно получить четыре параметра, весьма удобных для практического использования:

$$\begin{aligned} S_1 &= 2(S_{11} + S_{22}) = E_1 E_1^* + E_2 E_2^*, \\ S_2 &= 2(S_{11} - S_{22}) = E_1 E_1^* - E_2 E_2^*, \\ S_3 &= 2(S_{12} + S_{12}^*) = E_1 E_2^* + E_1^* E_2, \\ S_4 &= -2i(S_{12} - S_{12}^*) = -i(E_1 E_2^* - E_1^* E_2). \end{aligned} \tag{2.23}$$

Эти параметры, используя спиновые матрицы, можно записать в виде одного четырехмерного вектора \mathbf{S} , получившего название *вектор-параметра Стокса* (отсюда и название метода — *вектор-параметрический*) с компонентами $S_i = E \sigma_i E^*$, причем

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отметим ряд свойств параметров Стокса. Прежде всего выражения (2.23) представляют собой совокупность усредненных по времени форм, билинейных относительно электрического вектора напряженности \mathbf{E} , что

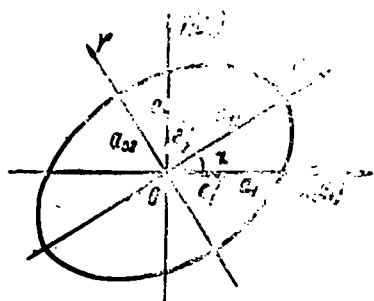


Рис. 3. К определению параметров Стокса для эллиптически-поляризованного излучения

вполне соответствует физическому смыслу экспериментально измеряемых характеристик излучения. Так как для некогерентных световых пучков перекрестные члены матрицы интерференции обращаются в нуль, параметры Стокса для них являются аддитивными величинами.

Физический смысл параметров Стокса проще всего установить на примере эллиптически-поляризованного света. Полагая $E_1 = a_1 e^{i\delta_1}$ и $E_2 = a_2 e^{i\delta_2}$, по (2.23) находим:

$$S_1 = a_1^2 + a_2^2, \quad S_2 = a_1^2 - a_2^2, \\ S_3 = 2a_1 a_2 \cos(\delta_1 - \delta_2), \quad S_4 = 2a_1 a_2 \sin(\delta_1 - \delta_2).$$

Приведем эти соотношения к нормальным осям эллипса, используя преобразования

$$a_1^2 = a_{01}^2 (\cos^2 \beta \cos^2 \chi + \sin^2 \beta \sin^2 \chi), \\ a_2^2 = a_{02}^2 (\cos^2 \beta \sin^2 \chi + \sin^2 \beta \cos^2 \chi), \\ \operatorname{tg}(\alpha + \delta_1) = -\operatorname{ctg} \chi \operatorname{ctg} \beta, \quad \operatorname{tg}(\alpha + \delta_2) = \operatorname{tg} \chi \operatorname{ctg} \beta, \\ \operatorname{tg} \delta = \frac{\operatorname{tg} 2\beta}{\sin 2\chi}.$$

Здесь a_{01} и a_{02} — амплитуды электрического вектора напряженности вдоль осей эллипса; χ — угол между e_1^0 и большой полуосью эллипса, а γ — угол, тангенс которого равен отношению осей эллипса (рис. 3).

Тогда для параметров Стокса получаем следующие соотношения:

$$S_1 = a_{01}^2 + a_{02}^2 = I, \quad S_2 = a_{01}^2 - a_{02}^2 = I \cos 2\gamma \cos 2\chi, \\ S_3 = (a_{01}^2 - a_{02}^2) \operatorname{tg} 2\chi = I \cos 2\gamma \sin 2\chi, \quad (2.24) \\ S_4 = (a_{01}^2 - a_{02}^2) \sin 2\chi \operatorname{tg} 2\gamma = I \sin 2\gamma.$$

Отсюда непосредственно видно, что:

а) I представляет собой интенсивность светового пучка;

б) $\frac{S_{31}}{S_{21}} = \frac{a_{01}^2 - a_{02}^2}{a_{01}^2 + a_{02}^2} \equiv P$ — степень поляризации света;

в) $\frac{S_3}{S_2} = \operatorname{tg} 2\chi$ — определяет положение плоскости поляризации;

г) $\frac{S_{11}}{S_1} = \sin 2\gamma$ — указывает на степень эллиптичности поляризованного луча.

Параметры Стокса, характеризующие эллиптически-поляризованный свет и определяемые формулами (2.24), связаны соотношением

$$S_1^2 = S_2^2 + S_3^2 + S_4^2,$$

что говорит об их взаимной зависимости. В общем случае произвольно поляризованного излучения [18—20] для них справедливо неравенство

$$S_1^2 > S_2^2 + S_3^2 + S_4^2.$$

В последнем случае Розенбергом [18] показано, что четвертой независимой величиной является параметр, определяющий степень неоднородности смеси световых пучков, т. е. степень различия в поляризации отдельных чистых компонент.

Так как параметры Стокса зависят от выбора системы координат, то необходимо знать закон преобразования этих параметров при вращении осей. Если вращение происходит в направлении часовой стрелки на угол δ , это преобразование равносильно применению к данной совокупности параметров Стокса следующего линейного преобразования [19, 20]:

$$M(\delta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\delta & \sin 2\delta & 0 \\ 0 & -\sin 2\delta & \cos 2\delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Важную роль при исследовании взаимодействия излучения с веществом играет установление законов преобразования параметров Стокса на элементарном объеме излу-

чаемого объекта. Эти законы в настоящее время установлены не только для рассеянного света [18—20], но и для люминесценции [21, 22], γ -излучения [23, 24], комптоновского рассеяния [25], а также для потоков элементарных частиц (см., например, [26]).

В общем виде матрицу преобразования параметров Стокса для светового пучка на элементарном объеме нетрудно получить, пользуясь свойствами линейности и однородности уравнений электродинамики, а именно:

$$E_i(\mathbf{r}, l) = \sum_k \mu_{ik}(\mathbf{r}, l; \mathbf{r}', l') E_k(\mathbf{r}', l') \quad (i, k = 1, 2). \quad (2.25)$$

Здесь $\|\mu_{ik}\|$ — матрица взаимодействия электрического вектора напряженности падающей световой волны с исследуемым веществом (она является в общем случае эрмитовой). Подставляя (2.25) в (2.23), находим:

$$S'_1 + S'_2 = \mu_{11}\mu_{11}^*(S_1 + S_2) + \mu_{11}\mu_{12}^*(S_3 + iS_4) + \\ + \mu_{12}\mu_{11}^*(S_3 - iS_4) + \mu_{12}\mu_{12}^*(S_1 - S_2);$$

$$S'_1 - S'_2 = \mu_{21}\mu_{21}^*(S_1 + S_2) + \mu_{21}\mu_{22}^*(S_3 + iS_4) + \\ + \mu_{22}\mu_{21}^*(S_3 - iS_4) + \mu_{22}\mu_{22}^*(S_1 - S_2);$$

$$S'_3 + iS'_4 = \mu_{11}\mu_{21}^*(S_1 + S_2) + \mu_{11}\mu_{22}^*(S_3 + iS_4) + \\ + \mu_{12}\mu_{21}^*(S_3 - iS_4) + \mu_{12}\mu_{22}^*(S_1 - S_2);$$

$$S'_3 - iS'_4 = \mu_{21}\mu_{11}^*(S_1 + S_2) + \mu_{21}\mu_{12}^*(S_3 + iS_4) + \\ + \mu_{22}\mu_{11}^*(S_3 - iS_4) + \mu_{22}\mu_{12}^*(S_1 - S_2).$$

Отсюда находим закон преобразования параметров Стокса на элементарном объеме:

$$S(\mathbf{r}, \theta, \varphi) = \frac{1}{2} \|D_{ik}(\theta, \varphi; \theta', \varphi')\| S(\mathbf{r}, \theta', \varphi'), \quad (2.26)$$

где

$$D_{11} = (\mu_{11}\mu_{11}^* + \mu_{12}\mu_{12}^*) + (\mu_{21}\mu_{21}^* + \mu_{22}\mu_{22}^*);$$

$$D_{12} = (\mu_{11}\mu_{11}^* - \mu_{12}\mu_{12}^*) + (\mu_{21}\mu_{21}^* - \mu_{22}\mu_{22}^*);$$

$$D_{21} = (\mu_{11}\mu_{11}^* + \mu_{12}\mu_{12}^*) - (\mu_{21}\mu_{21}^* + \mu_{22}\mu_{22}^*);$$

$$D_{22} = (\mu_{11}\mu_{11}^* - \mu_{12}\mu_{12}^*) - (\mu_{21}\mu_{21}^* - \mu_{22}\mu_{22}^*);$$

$$D_{31} = (\mu_{11}^*\mu_{21} + \mu_{11}\mu_{21}^*) + (\mu_{12}^*\mu_{22} + \mu_{12}\mu_{22}^*);$$

$$\begin{aligned}
 D_{32} &= (\mu_{11}^* \mu_{21} + \mu_{11} \mu_{21}^*) - (\mu_{12}^* \mu_{22} + \mu_{12} \mu_{22}^*); \\
 D_{41} &= i (\mu_{11}^* \mu_{21} - \mu_{11} \mu_{21}^*) + i (\mu_{12}^* \mu_{22} - \mu_{12} \mu_{22}^*); \\
 D_{42} &= i (\mu_{11}^* \mu_{21} - \mu_{11} \mu_{21}^*) + i (\mu_{12}^* \mu_{22} - \mu_{12} \mu_{22}^*);
 \end{aligned}
 \tag{2.26 a}$$

$$\begin{aligned}
 D_{13} &= (\mu_{11}^* \mu_{12} + \mu_{11} \mu_{12}^*) + (\mu_{21}^* \mu_{22} + \mu_{21} \mu_{22}^*); \\
 D_{14} &= i (\mu_{11}^* \mu_{12} - \mu_{11} \mu_{12}^*) + i (\mu_{21}^* \mu_{22} - \mu_{21} \mu_{22}^*); \\
 D_{23} &= (\mu_{11}^* \mu_{12} + \mu_{11} \mu_{12}^*) - (\mu_{21}^* \mu_{22} + \mu_{21} \mu_{22}^*); \\
 D_{24} &= i (\mu_{11}^* \mu_{12} - \mu_{11} \mu_{12}^*) - i (\mu_{21}^* \mu_{22} - \mu_{21} \mu_{22}^*); \\
 D_{33} &= (\mu_{11}^* \mu_{22} + \mu_{11} \mu_{22}^*) + (\mu_{12}^* \mu_{21} + \mu_{12} \mu_{21}^*); \\
 D_{34} &= i (\mu_{11}^* \mu_{22} - \mu_{11} \mu_{22}^*) - i (\mu_{12}^* \mu_{21} - \mu_{12} \mu_{21}^*); \\
 D_{43} &= i (\mu_{11}^* \mu_{22} - \mu_{11} \mu_{22}^*) + i (\mu_{12}^* \mu_{21} - \mu_{12} \mu_{21}^*); \\
 D_{44} &= (\mu_{11}^* \mu_{22} + \mu_{11} \mu_{22}^*) - (\mu_{12}^* \mu_{21} + \mu_{12} \mu_{21}^*).
 \end{aligned}$$

Если компоненты матрицы взаимодействия электрического вектора световой волны с веществом $\|\mu_{i\kappa}\|$ действительны, то матрица $\|D_{i\kappa}\|$ принимает более простой вид:

$$\|D_{i\kappa}\| = \begin{pmatrix}
 \mu_{11}^2 + \mu_{12}^2 + & \mu_{11}^2 - \mu_{12}^2 + & 2(\mu_{11}\mu_{12} + & 0 \\
 + \mu_{21}^2 + \mu_{22}^2 & + \mu_{21}^2 - \mu_{22}^2 & + \mu_{21}\mu_{22}) & \\
 \mu_{11}^2 + \mu_{12}^2 - & \mu_{11}^2 - \mu_{12}^2 - & 2(\mu_{11}\mu_{12} - & 0 \\
 - \mu_{21}^2 - \mu_{22}^2 & - \mu_{21}^2 + \mu_{22}^2 & - \mu_{21}\mu_{22}) & \\
 2(\mu_{11}\mu_{21} + & 2(\mu_{11}\mu_{21} - & 2(\mu_{11}\mu_{22} + & 0 \\
 + \mu_{12}\mu_{22}) & - \mu_{12}\mu_{22}) & + \mu_{12}\mu_{21}) & \\
 0 & 0 & 0 & 2(\mu_{11}\mu_{22} - \\
 & & & - \mu_{12}\mu_{21})
 \end{pmatrix}
 \tag{2.27}$$

Зная вид матрицы преобразования параметров Стокса, можно сформулировать уравнение переноса излучения с учетом состояния поляризации последнего. Как показано в [18—20], при исследовании уравнения переноса типа (1.57) фактически пренебрегают членами того же порядка, что и входящие в него члены.

Учет состояния поляризации в теории переноса излучения оказался возможным благодаря вектор-парамет-

рическому методу, а именно благодаря тому, что параметры Стокса являются аддитивными и представляют собой интенсивности излучения, препарированные различным образом при помощи компенсаторов и анализаторов. Уравнение переноса излучения в вектор-параметрическом виде было впервые сформулировано Розенбергом [18] и Чандрасекаром [20]:

$$\frac{dS_i(r, \theta, \varphi)}{dr} = -\alpha S_i(r, \theta, \varphi) + \int_{(4\pi)} \sum_k D_{ik}(\theta, \varphi; \theta', \varphi') S_k(r, \theta', \varphi') \frac{d\Omega'}{4\pi}. \quad (2.28)$$

Здесь $S_i(r, \theta, \varphi)$ — параметры Стокса исследуемого излучения в направлении $l(\theta, \varphi)$ в точке r ; $\|D_{ik}(\theta, \varphi; \theta', \varphi')\|$ — матрица их преобразования на элементарном объеме, нормированная на коэффициент рассеяния*); α — величина, определяющая в общем случае ослабление и дисперсию среды (обычно она записывается в виде четырехмерной матрицы) [19]. Если среда обладает собственным излучением, то в правой части уравнения (2.28) появляются параметры Стокса S_i^0 , характеризующие собственное излучение среды и отнесенные к единице объема.

Уравнение переноса излучения (2.28), представляющее собой систему четырех интегродифференциальных уравнений, позволяет одновременно исследовать интенсивность и поляризационные характеристики излучения, распространяющегося в данной среде. В настоящее время систему уравнений (2.28) чаще всего решают численными методами или рассматривают ее для весьма частных физических условий. Основные результаты подобных исследований изложены в гл. 7 (§ 2).

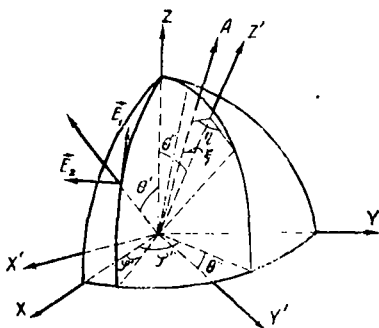
§3*. Матрицы преобразования параметров Стокса для когерентного и некогерентного рассеяния **)

Пусть на данную совокупность хаотически расположенных диполей, моделирующих элементарный объем, в направлении $l' = l(\theta', \varphi')$ в системе координат $OXYZ$

*) Элемент матрицы $\frac{1}{\sigma} D_{11}(\theta, \varphi; \theta', \varphi')$ представляет собой индикатриссу рассеяния излучения на элементарном объеме $\rho(\theta, \varphi; \theta', \varphi')$.

**) Подробное изложение материалов параграфов, отмеченных звездочкой, можно перенести на спецсеминары.

Рис. 4. К расчету излучения диполя



(рис. 4) падает поляризованный свет. Подобно (2.22), представим электрический вектор напряженности падающего света в виде

$$\mathbf{E} = (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) e^{i\omega t}, \quad (2.29)$$

где \mathbf{E}_1 — вектор, лежащий в меридиональной плоскости, а \mathbf{E}_2 — в плоскости, перпендикулярной к ней.

Параметры Стокса внешнего излучения в этом случае определяются соотношением (2.23). Нам требуется найти матрицу $\|D_{ik}(\theta, \varphi; \theta', \varphi')\|$, с помощью которой можно определить параметры Стокса излучения, испускаемого элементарным объемом в некотором направлении $\mathbf{l} = \mathbf{l}(\theta, \varphi)$. Решение этой задачи может быть проведено следующим образом. Сначала необходимо выразить составляющие колебаний диполя поглощения через компоненты \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 электрического вектора напряженности падающей волны. Затем от осциллятора поглощения следует перейти к осциллятору испускания (в общем случае они могут не совпадать по направлению между собой) и через составляющие последнего найти поле излучения, характеризуемое величинами \mathbf{E}'_1 и \mathbf{E}'_2 , в направлении $\mathbf{l} = \mathbf{l}(\theta, \varphi)$. Коэффициенты при \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 являются компонентами матрицы $\|\mu_{ik}(\theta, \varphi; \theta', \varphi')\|$, с помощью которой по (2.26) может быть построена матрица преобразования $\|D_{ik}(\theta, \varphi; \theta', \varphi')\|$. При этом является существенным, когерентно или нет наблюдаемое излучение с падающим. В случае когерентного рассеяния необходимо суммировать векторы напряженности электрического поля, т. е. усреднение по всем возможным ориентациям диполей необходимо проводить над элементами матрицы $\|\mu_{ik}(\theta, \varphi;$

θ', φ'). В случае некогерентного рассеяния излучения, например при исследовании люминесценции, усреднение проводится над элементами $\|D_{ik}(\theta, \varphi; \theta', \varphi')\|$. Мы рассмотрим последний случай, так как для рассеяния и люминесценции матрицы $\|D_{ik}(\theta, \varphi; \theta', \varphi')\|$ идентичны с точностью до физического смысла входящих в них параметров [22].

Предположим, что диполь поглощения и диполь испускания образуют между собой угол ξ . Выберем диполь поглощения в направлении $l'' = l(\theta'', \varphi'')$, которое примем за ось Z' новой системы координат $OX'Y'Z'$ (ось X' лежит в плоскости XOY). Тогда диполь испускания занимает некоторое положение OA , составляющее с осью Z' угол ξ и с осью Y' угол η (см. рис. 4).

Под действием внешнего излучения с электрическим вектором напряженности (2.29) диполь поглощения, а следовательно, и диполь испускания, имеет следующую амплитуду колебаний:

$$P = \alpha E \cos(\mathbf{E}, OZ') = \alpha (E_x \sin \theta'' \cos \varphi'' + E_y \sin \theta'' \sin \varphi'' + E_z \cos \theta''), \quad (2.30)$$

где α — некоторый коэффициент пропорциональности;

$$\begin{aligned} E_x &= E_1 \cos \theta' \cos \varphi' + E_2 \sin \varphi', \\ E_y &= -E_1 \cos \theta' \sin \varphi' - E_2 \cos \varphi', \\ E_z &= E_1 \sin \theta'. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Обозначая орты систем координат $OXYZ$ и $OX'Y'Z'$ соответственно через i, j, k и i', j', k' , для компонент колебаний диполя испускания вдоль осей X, Y и Z находим:

$$\begin{aligned} P_x &= P \cos(\mathbf{OA}, i) = l_1 P, \quad P_y = P \cos(\mathbf{OA}, j) = l_2 P, \\ P_z &= P \cos(\mathbf{OA}, k) = l_3 P, \end{aligned} \quad (2.32)$$

где

$$\begin{aligned} l_1 &= \sin \xi \sin \eta \sin \varphi'' + \sin \xi \cos \eta \cos \theta'' \cos \varphi'' + \\ &\quad + \cos \xi \sin \theta'' \cos \varphi''; \\ l_2 &= -\sin \xi \sin \eta \cos \varphi'' + \sin \xi \cos \eta \cos \theta'' \sin \varphi'' + \\ &\quad + \cos \xi \sin \theta'' \sin \varphi''; \\ l_3 &= -\sin \xi \cos \eta \sin \varphi'' + \cos \xi \cos \theta''. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Амплитуда напряженности электрического поля колеблющегося диполя в волновой зоне равна

$$E = \frac{k_1}{r} P \sin \Theta, \quad k_1 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (2.34)$$

(Θ — угол между направлением колебания диполя и направлением наблюдения; r — расстояние от диполя до точки наблюдения).

Направление электрического поля совпадает с направлением орта, лежащего в меридиональной плоскости, если за полярную ось принято направление диполя.

Воспользовавшись формулами сферической тригонометрии, получим:

$$E_1 = \frac{k_1}{r} (P_x \cos \theta \cos \varphi + P_y \cos \theta \sin \varphi - P_z \sin \theta), \quad (2.35)$$

$$E_2 = \frac{k_1}{r} (P_x \sin \varphi - P_y \cos \varphi).$$

Подставляя сюда величины (2.30) и (2.31), находим компоненты электрического вектора напряженности света, испускаемого диполем:

$$\begin{aligned} \frac{r}{k} E'_1 = & (-\alpha_1 \cos \theta' \cos \varphi' - \alpha_2 \cos \theta' \sin \varphi' + \\ & + \alpha_3 \sin \theta') E_1 + (\alpha_1 \sin \varphi' - \alpha_2 \cos \varphi') E_2, \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} \frac{r}{k} E'_2 = & (-\beta_1 \cos \theta' \cos \varphi' - \beta_2 \cos \theta' \sin \varphi' + \\ & + \beta_3 \sin \theta') E_1 + (\beta_1 \sin \varphi' - \beta_2 \cos \varphi') E_2, \end{aligned}$$

где

$$\alpha_i = a\delta_i, \quad \beta_i = b\delta_i, \quad k = \alpha k_1 \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$a = l_1 \cos \theta \cos \varphi + l_2 \cos \theta \sin \theta - l_3 \sin \theta,$$

$$b = l_1 \sin \varphi - l_2 \cos \varphi, \quad (2.37)$$

$$\delta_1 = \sin \theta'' \cos \varphi'', \quad \delta_2 = \sin \theta'' \sin \varphi'', \quad \delta_3 = \cos \theta''.$$

Отсюда, согласно (2.25), получаем матрицу взаимодействия электрического вектора напряженности падающей волны с одной излучающей системой, имеющей осциллятор поглощения в направлении $l''=l(\theta'', \varphi'')$ и осциллятор испускания в направлении $0A$:

$$\|\mu_{ik}\| = \frac{k}{r} \begin{pmatrix} -\alpha_1 \cos \theta' \cos \varphi' - \alpha_2 \cos \theta' \sin \varphi' + \\ + \alpha_3 \sin \theta' \alpha_1 \sin \varphi' - \alpha_2 \cos \varphi' \\ -\beta_1 \cos \theta' \cos \varphi' - \beta_3 \cos \theta' \sin \varphi' + \\ + \beta_3 \sin \theta' \beta_1 \sin \varphi' - \beta_2 \cos \varphi' \end{pmatrix}. \quad (2.38)$$

Для определения матрицы преобразования параметра Стокса на единичном объеме для некогерентного рассеяния величины $\mu_{ij\mu_{kl}}$ ($i, j, k, l=1, 2$), входящие в (2.38), необходимо усреднить по углу η (η определяет азимут диполя испускания относительно диполя поглощения) и просуммировать по всем излучающим системам, находящимся в единичном объеме. Этот процесс усреднения сводится к определению следующих величин:

$$\overline{\alpha_m \alpha_n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\eta \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \alpha_m \alpha_n \sin \theta'' d\theta'' d\varphi'',$$

$$\overline{\alpha_m \beta_n}, \quad \overline{\beta_m \beta_n}$$

$$(m, n = 1, 2, 3).$$

Здесь суммирование, ввиду хаотического расположения диполей поглощения и испускания, заменено интегрированием по всевозможным ориентациям излучающих систем. Подставляя эти величины в выражение для

$$\overline{\mu_{ij\mu_{kl}}} \sim \int_0^{2\pi} d\eta \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mu_{ij\mu_{kl}} \sin \theta'' d\theta'' d\varphi''$$

$$(i, j, k, l = 1, 2),$$

находим по (2.27) матрицу преобразования параметров Стокса на элементарном объеме для некогерентного рассеяния:

$$\begin{array}{r}
 \left(2 - \frac{p}{p} + \cos^2 \theta \cos^2 \theta' + \right. \\
 + \sin^2 \theta \sin^2 \theta' \cos^2 (\varphi' - \varphi) + \\
 + \frac{1}{2} \sin 2\theta \sin 2\theta' \cos (\varphi' - \varphi) \\
 \left. 1 - 2 \cos^2 \theta' + \cos^2 \theta \cos^2 \theta' - \right. \\
 - (1 + \cos^2 \theta) \sin^2 \theta' \cos^2 (\varphi' - \varphi) + \\
 + \frac{1}{2} \sin 2\theta \sin 2\theta' \cos (\varphi' - \varphi) \\
 \left. \cos \theta \sin^2 \theta' \sin^2 (\varphi' - \varphi) - \right. \\
 - \sin \theta \sin 2\theta' \sin (\varphi' - \varphi) \\
 \left. 0 \right) \\
 \\
 \left(1 - 2 \cos^2 \theta + \cos^2 \theta \cos^2 \theta' - \right. \\
 - \sin^2 \theta (1 + \cos^2 \theta') \cos^2 (\varphi' - \varphi) + \\
 + \frac{1}{2} \sin 2\theta \sin 2\theta' \cos (\varphi' - \varphi) \\
 \left. 1 - 2 \cos^2 \theta - 2 \cos^2 \theta' + \cos^2 \theta \cos^2 \theta' + \right. \\
 + (1 + \cos^2 \theta)(1 + \cos^2 \theta') \cos^2 (\varphi' - \varphi) + \\
 + \frac{1}{2} \sin 2\theta \sin 2\theta' \cos (\varphi' - \varphi) \\
 \left. - \cos \theta (1 + \cos^2 \theta') \sin^2 (\varphi' - \varphi) - \right. \\
 - \sin \theta \sin 2\theta' \sin (\varphi' - \varphi) \\
 \left. 0 \right) \\
 \\
 \left(\sin^2 \theta \cos \theta' \sin^2 (\varphi' - \varphi) - \right. \\
 - \sin 2\theta \sin \theta' \sin (\varphi' - \varphi) \\
 \left. 0 \right) \\
 \\
 \left(-(1 + \cos^2 \theta) \cos \theta' \sin^2 (\varphi' - \varphi) - \right. \\
 - \sin 2\theta \sin \theta' \sin (\varphi' - \varphi) \\
 \left. 0 \right) \\
 \\
 \left(-2 \cos \theta \cos \theta' \cos^2 (\varphi' - \varphi) - \right. \\
 - 2 \sin \theta \sin \theta' \cos (\varphi' - \varphi) \\
 \left. 0 \right) \\
 \\
 \left(0 \right) \\
 \left. \right) \quad (23.9)
 \end{array}$$

$$\|D_{ik}^{\text{некор}}\| = \frac{10p}{3-p} \beta$$

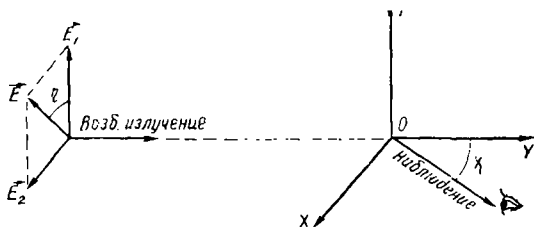


Рис. 5. Схема поляризационных диаграмм

Здесь

$$p = p(\nu, \nu') = \frac{3 \cos^2 \xi(\nu, \nu') - 1}{3 + \cos^2 \xi(\nu, \nu')} \quad (2.40)$$

является известной в теории люминесценции величиной — предельной степенью поляризации люминесценции частоты ν , испускаемой элементарным объемом при облучении его линейно-поляризованным светом частоты ν' .

Учитывая, что отношение энергии, испущенной элементарным объемом к поглощенной, равно квантовому выходу γ (аналогу вероятности выживания кванта λ в теории рассеяния света), нетрудно получить значение коэффициента β :

$$\beta = \frac{3\gamma\kappa}{80\pi} \quad (2.41)$$

Выражение (2.39) для люминесцирующих сред, для которых хорошо оправдывается принятая нами модель излучающего элементарного объема, является своеобразным обобщением всех существующих формул поляризованной люминесценции. Так, например, для случая поляризационных диаграмм (рис. 5), когда $\theta' = \varphi' = \pi/2$, $\theta = \pi/2$, $\varphi = \pi/2 - \chi$, при облучении линейно-поляризованным светом ($S_1 = E^2$, $S_2 = E^2 \cos 2\eta$, $S_3 = E^2 \sin 2\eta$, $S_4 = 0$) и естественным излучением ($S_1 = E^2$, $S_2 = S_3 = S_4 = 0$) без труда находим:

$$P_p = \frac{S'_2}{S'_1} = \frac{\cos^2 \eta - \cos^2 \chi \sin^2 \eta}{\frac{1}{p} - \sin^2 \chi \sin^2 \eta} \quad (2.42)$$

$$P_n = \frac{P_p \sin^2 \chi}{2 - P_p \sin^2 \chi}$$

а максимальная степень поляризации равна

$$P_{\max} = \frac{1}{S_1} \sqrt{S_2'^2 + S_3'^2} = \frac{1 - \sin^2 \chi \sin^2 \eta}{\frac{1}{p} - \sin^2 \chi \sin^2 \eta}. \quad (2.43)$$

При сравнении матрицы (2.39) с матрицей для рассеяния [19, 20] находим, что вид матриц совершенно одинаков, за исключением присутствия в матрице $\|D_{ik}^{\text{кор}}(\theta, \varphi; \theta', \varphi')\|$ члена

$$D_{44}(\theta, \varphi; \theta', \varphi') = D_0 (\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta'),$$

где D_0 — некоторая константа.

Отсутствие $D_{44}(\theta, \varphi; \theta', \varphi')$ в матрице для люминесценции объясняется свойствами выбранной модели, не допускающей эллиптической поляризации излучения.

Входящую в элемент матрицы $D_{11}(\theta, \varphi; \theta', \varphi')$ величину $\frac{2-p}{p} - 1 = \frac{2(1-p)}{p}$, можно выразить через степень

деполяризации $\Delta = \frac{I_{\parallel}}{I_{\perp}}$ (I_{\parallel} и I_{\perp} — интенсивность света в направлениях, соответственно параллельном и перпендикулярном к плоскости, содержащей направления падающего и наблюдаемого излучений):

$$\frac{2(1-p)}{p} = \frac{4\Delta}{1-\Delta}. \quad (2.44)$$

Для рассеяния света на изотропных частицах степень деполяризации изменяется в пределах [20]

$$0 \leq \Delta^{\text{кор}} \leq \frac{1}{3}. \quad (2.45)$$

Для люминесценции при облучении линейно-поляризованным светом [22]

$$\Delta^{\text{некор}} = \frac{1-p}{1+p} = \frac{2 - \cos^2 \xi}{1 + 2 \cos^2 \xi}, \quad \frac{1}{3} \leq \Delta^{\text{некор}} \leq 2. \quad (2.46)$$

Таким образом, указанное совпадение матриц для когерентного и некогерентного рассеяния открывает воз-

возможность применения результатов теории молекулярного рассеяния к исследованию распространения излучения в люминесцирующих средах.

§ 4. О справедливости уравнения переноса лучистой энергии

Сформулированное в гл. 1 и уточненное в данной главе уравнение переноса лучистой энергии является, как отмечалось ранее, своеобразным выражением закона сохранения световой энергии в приближении лучевой (или геометрической) оптики. Очевидно, что его справедливость ограничивается областью применимости законов лучевой оптики. Для корректного определения этой области необходимо на основе теории многократного рассеяния электромагнитных волн проанализировать взаимоотношение характеристик волнового поля (длины волны, масштаба неоднородности поля и др.) и микроскопических величин среды (радиуса и плотности рассеивающих центров, их радиуса корреляции и т. д.) с величинами, входящими в уравнение переноса лучистой энергии. В [27] строго показано, что при использовании обычного уравнения переноса излучения необходимо, чтобы средняя длина свободного пробега фотона была намного больше длины волны излучения и характерного размера эффективной неоднородности. Кроме того, само волновое поле должно быть слабо неоднородным в пределах указанных величин. Оценку применимости уравнения переноса нетрудно сделать, рассматривая, например, стационарные уравнения Максвелла для плоского однородного поглощающего слоя [28]:

$$\frac{dE}{dz} = 0, \quad \frac{dH}{dz} = -\frac{4\pi\sigma_0}{c} E, \quad (2.47)$$

где σ_0 — проводимость исследуемой среды. Умножая первое уравнение на ϵE (ϵ — диэлектрическая проницаемость среды), а второе на H и складывая, находим:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dz} (\epsilon E^2 + H^2) = -\frac{4\pi\sigma_0}{c} (EH). \quad (2.48)$$

Кроме того, по теореме Пойнтинга имеем еще одно уравнение, связывающее аналогичные величины:

$$\frac{d(EH)}{dz} = -\frac{4\pi\sigma_0}{c} E^2. \quad (2.49)$$

Введем в рассмотрение поток P и плотность ρ энергии согласно известным соотношениям:

$$P = \frac{c}{4\pi} (EH), \quad \rho = \frac{1}{8\pi} (\epsilon E^2 + H^2). \quad (2.50)$$

Тогда

$$\epsilon E^2 = 4\pi \left(\rho + \sqrt{\rho^2 - \frac{\epsilon}{c^2} P^2} \right).$$

Используя (2.48) и (2.49), приходим к уравнениям для P и ρ :

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dz} &= -\frac{4\pi\sigma_0}{c^2} P, \\ \frac{dP}{dz} &= -\frac{4\pi\sigma_0}{\epsilon} \left(\rho + \sqrt{\rho^2 - \frac{\epsilon}{c^2} P^2} \right). \end{aligned} \quad (2.51)$$

Запишем уравнения (2.51) для потоков P_1 и P_2 , распространяющихся в противоположных направлениях. Так как

$$P = P_1 - P_2, \quad \rho = \frac{\sqrt{\epsilon}}{c} (P_1 + P_2),$$

то эти уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{dP_1}{dz} &= -\frac{4\pi\sigma_0}{c\sqrt{\epsilon}} (P_1 + \sqrt{P_1 P_2}), \\ \frac{dP_2}{dz} &= \frac{4\pi\sigma_0}{c\sqrt{\epsilon}} (P_2 + \sqrt{P_1 P_2}). \end{aligned} \quad (2.52)$$

Сравнивая уравнения (2.52) с (1.12), приходим к выводу, что строгое рассмотрение уравнения переноса лучистой энергии приводит к появлению некоторого нелинейного члена в правой части.

Как показано в [28], основное различие между решением уравнения переноса типа

$$P_1(z) = P_1(0) \exp \left\{ - \frac{4\pi\sigma_0}{c \sqrt{\epsilon}} \cdot z \right\} = P_1(0) e^{-\kappa z}$$

и решением уравнений Максвелла для данного случая заключается в различии показателя поглощения на величину

$$\begin{aligned} \Delta\kappa &= \frac{4\pi\sigma_0}{c \sqrt{\epsilon}} - 2kn_2 = \frac{4\pi\sigma_0}{c} \left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} - \frac{1}{n_1} \right) = \\ &= \frac{2n_2^3}{\sqrt{\epsilon} (\sqrt{\epsilon} + n_1)} \cdot \frac{\omega}{c} \end{aligned} \quad (2.53)$$

(n_1 и n_2 — действительная и мнимая части показателя преломления среды соответственно).

Действительно, при $n_2 \ll 1$, т. е. для слабо поглощающих сред, решения совпадают и приближение геометрической оптики справедливо.

С увеличением поглощающей способности среды и при учете нестационарности отличие решения уравнения переноса излучения от решения уравнений Максвелла становится существенным и возникает необходимость рассмотрения нелинейных уравнений переноса излучения типа (2.52).

Уравнение переноса становится нелинейным и в случае, когда нельзя пренебречь влиянием излучения на состояние вещества. При распространении мощного излучения, например излучения оптических квантовых генераторов, необходимо учитывать зависимость коэффициента ослабления от плотности радиации. Этот сравнительно недавно возникший раздел теории переноса излучения рассмотрен в гл. 7.

Следует отметить важность учета явления перераспределения излучения по частотам. Дело в том, что до 50-х годов нашего столетия при решении задач теории переноса лучистой энергии широко использовался метод диффузии. Аналогия распространения фотонов и диффундирования классических частиц вполне очевидна. Однако это предполагает, что фотоны имеют одну и ту же длину свободного пробега и, кроме этого, закон распространения фотонов должен носить дифференциальный характер. Первое обстоятельство не учитывает воз-

возможность различия свойств фотонов с разными частотами. Для реальных случаев поглощение каждого фотона определенной частоты характеризуется вполне определенным коэффициентом поглощения. С другой стороны, результирующий поток лучистой энергии, приходящий в данную точку, является функцией от координат точек, из которых исходят лучи, и закон диффузии фотонов в среде носит существенно интегральный характер.

Важной особенностью распространения фотонов в среде является то, что после поглощения кванта данной частоты он может переизлучаться с некоторой другой частотой. Вероятность подобных процессов определяется физическими процессами, происходящими в данной совокупности элементарных квантовых систем. Явление перераспределения излучения по частотам при взаимодействии излучения с элементарным объемом вещества приводит, по существу, к нарушению закона сохранения энергии для квантов одной частоты, в то время как обычное уравнение переноса, для которого постулируется неизменность частоты кванта при взаимодействии с веществом, является его непосредственным выражением.

Уравнение переноса излучения с учетом перераспределения излучения по частотам и его состояния поляризации можно записать в следующем виде [22]:

$$\begin{aligned} & \frac{dS_i(r, l, \nu)}{dr} + \sum_k \alpha_k(r, l, \nu) S_k(r, l, \nu) = \\ & = \int_0^\infty W(r, \nu, \nu') d\nu' \int_{(4\pi)} \sum_k D_{ik}(r, l, \nu; l', \nu') S_k \times \\ & \quad \times (r, l', \nu') \frac{d\Omega'}{4\pi} + S_i^0(r, l, \nu) \end{aligned} \quad (2.54)$$

($i, k = 1, 2, 3, 4$).

Граничными условиями для системы уравнений (2.54) являются:

$$S_i(r, l, \nu)|_{r=R, (ln)<0} = S_i^{BH}(l_0, \nu_0). \quad (2.55)$$

Уравнение переноса излучения в виде (2.54) учитывает основные закономерности распространения излучения в исследуемом веществе.

Кроме учета состояния поляризации излучения и перераспределения излучения по частотам, трудности решения задач теории переноса излучения в сильной степени определяются геометрической моделью исследуемого объекта, а также чрезвычайно сложной спектральной структурой коэффициента ослабления α_ν (гл. 1, § 4, 5) и возможной его зависимостью от координат. Поэтому весьма целесообразным является исследование простейших частных случаев сформулированного в этой главе уравнения переноса излучения. Методы решения этих простейших уравнений можно и в дальнейшем использовать для выяснения влияния различных факторов на характеристики излучения, выходящего из исследуемого объекта.

§ 5. Решение уравнения переноса излучения в одномерном случае

Уравнение переноса излучения (1.46) в настоящее время точно решено в двух частных случаях: для одномерной среды и для полубесконечной плоской среды со сферической индикатрисой рассеяния (гл. 3).

Рассмотрим случай одномерной среды. Пусть процессы поглощения и рассеяния происходят на некотором отрезке прямой длиной x_0 . Обозначим долю излучения, рассеянного назад элементом длины dx , через β . Естественно вместо интенсивности излучения I ввести величины I_1 и I_2 (I_1 — интенсивность излучения, распространяющегося вдоль оси x ; I_2 — в направлении, ему противоположном). Тогда необходимо для этих направлений определить и функции источников. Последние определяются собственным излучением элемента dx в соответствующем направлении и величиной излучения, рассеянного в том же направлении:

$$\begin{aligned} \epsilon_1(x) &= \epsilon_{01}(x) + (1 - \beta)\lambda I_1(x) + \beta\lambda I_2(x), \\ \epsilon_2(x) &= \epsilon_{02}(x) + (1 - \beta)\lambda I_2(x) + \beta\lambda I_1(x), \end{aligned} \quad (2.56)$$

где $\lambda = \frac{\sigma}{\alpha} = \frac{\sigma}{\kappa + \sigma}$ — вероятность выживания кванта.

Уравнение переноса излучения в нашем случае представляет собой систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений [12]:

$$\frac{dI_1(\tau)}{d\tau} = -I_1(\tau) + \lambda [(1 - \beta) I_1(\tau) + \beta I_2(\tau)] + \epsilon_{01}(\tau), \quad (2.57)$$

$$\frac{dI_2(\tau)}{d\tau} = -I_2(\tau) + \lambda [\beta I_1(\tau) + (1 - \beta) I_2(\tau)] + \epsilon_{02}(\tau).$$

Здесь $\tau = \int_0^x \alpha(x) dx = \int_0^x [\kappa(x) + \sigma(x)] dx$ — оптическая глубина рассматриваемой среды.

Граничными условиями для системы (2.57) являются:

$$I_1(0) = I_{01} \quad \text{и} \quad I_2(\tau_0) = I_{02}, \quad (2.58)$$

где $\tau_0 = \int_0^{\tau_0} \alpha(x) dx$ — оптическая толщина всего слоя.

Для решения системы (2.57) введем новые функции, имеющие определенный физический смысл:

$$J = I_1 + I_2 \quad \text{и} \quad H = I_1 - I_2. \quad (2.59)$$

Величина J является удвоенной средней интенсивностью излучения, непосредственно связанной с плотностью излучения (1.4), а величина H по (1.7) — потоком излучения.

Складывая и вычитая уравнения (2.57), приходим к следующей системе уравнений:

$$\frac{dH}{d\tau} = -(1 - \lambda)J + j_1, \quad (2.60)$$

$$\frac{dJ}{d\tau} = -[1 - \lambda(1 - 2\beta)]H + j_2,$$

где $j_1 = j_1(\tau) = \epsilon_{01}(\tau) + \epsilon_{02}(\tau)$, $j_2 = j_2(\tau) = \epsilon_{01}(\tau) - \epsilon_{02}(\tau)$.

Анализ системы (2.60) показывает, что решения просто получаются, во-первых, при $\lambda = 1$, т. е. в случае чистого рассеяния, во-вторых, при $j_1 = j_2 = 0$ и, наконец, в случае, когда индикатриса рассеяния сферическая ($\beta = 1/2$).

При $\lambda = 1$ система уравнений (2.60) имеет вид

$$\frac{dH}{d\tau} = j_1, \quad \frac{dJ}{d\tau} = -2\beta H + j_2. \quad (2.61)$$

Решение этой системы:

$$H = j_1\tau + C_1, \quad J = j_2\tau - \beta j_1\tau^2 - 2\beta C_1\tau + C_2.$$

Определяя постоянные C_1 и C_2 с помощью соотношений (2.58) и (2.59), находим, что

$$H(\tau) = \frac{2(I_{01} - I_{02}) + j_2\tau_0}{2(1 + \beta\tau_0)} + \frac{1}{2} j_1(2\tau - \tau_0); \quad (2.62a)$$

$$J(\tau) = \frac{2I_{01}[1 + 2\beta(\tau_0 - \tau)] + 2I_{02}(1 + \beta\tau) + j_2(2\tau - \tau_0)}{2(1 + \beta\tau_0)} + \frac{1}{2} j_1[\tau_0 + 2\beta\tau(\tau_0 - \tau)]; \quad (2.62б)$$

$$I_1(\tau) \equiv \frac{1}{2} (J + H) = \frac{2I_{01}[1 + \beta(\tau_0 - \tau)] + 2\beta\tau I_{02} + j_2\tau}{2(1 + \beta\tau_0)} + \frac{1}{2} j_1\tau[1 + \beta(\tau_0 - \tau)]; \quad (2.62в)$$

$$I_2(\tau) \equiv \frac{1}{2} (J - H) = \frac{2\beta(\tau_0 - \tau)I_{01} + 2(1 + \beta\tau)I_{02} - j_2(\tau_0 - \tau)}{2(1 + \beta\tau_0)} + \frac{1}{2} j_1(\tau_0 - \tau)(1 + \beta\tau). \quad (2.62г)$$

Полученные выражения для интенсивностей излучения $I_1(\tau)$ и $I_2(\tau)$, потока $H(\tau)$ и величины $J(\tau)$, пропорциональной плотности излучения, можно без труда проанализировать. Согласно (2.62а), поток излучения состоит из постоянной величины, определяемой внешним излучением и свойствами среды, и переменной, определяемой только разностью излучательных способностей единицы длины в разные стороны. Это естественно, так как для изменения (увеличения или уменьшения) потока излучения существенна лишь разность противоположных по знаку процессов образования световой энергии в

среде. Если эта разность равна нулю, поток излучения в среде постоянен и нет причин для его изменения. Соотношения (2.62) показывают, что существенная роль принадлежит параметру β , определяющему вес того или иного процесса. Кроме того, во всех соотношениях встречаются величины $1 + \beta\tau$, $1 + \beta\tau_0$, $1 + \beta(\tau_0 - \tau)$, что говорит о вполне определенном их физическом смысле. Это нетрудно показать.

Полагая $I_{01} = I_0$ и $I_{02} = 0$, а также $\epsilon_{01} = \epsilon_{02} = 0$, можно найти коэффициенты отражения и пропускания исследуемой среды:

$$r \equiv \frac{I_2(0)}{I_0} = \frac{\beta\tau_0}{1 + \beta\tau_0}, \quad q \equiv \frac{I_1(\tau_0)}{I_0} = \frac{1}{1 + \beta\tau_0}. \quad (2.63)$$

Тогда

$$H = qI_0, \quad \overline{I(0)} = \frac{1}{2} J(0) = \frac{1+r}{2} J_0, \\ \overline{I(\tau_0)} = \frac{1}{2} J(\tau_0) = \frac{q}{2} I_0. \quad (2.64)$$

Как и следовало ожидать,

$$r + q = 1, \quad \overline{I(0)} - \overline{I(\tau_0)} = \frac{1}{2} (1 + r - q) I_0 = rI_0. \quad (2.65)$$

В случае $\epsilon_{01} = \epsilon_{02} = 0$ и $\lambda \neq 1$ система уравнений (2.60) имеет вид

$$\frac{dH}{d\tau} = -(1 - \lambda)J, \quad \frac{dJ}{d\tau} = -[1 - \lambda(1 - 2\beta)]H. \quad (2.66)$$

Отсюда находим, что величина $I(\tau)$ определяется уравнением.

$$\frac{d^2 J(\tau)}{d\tau^2} - k^2 J(\tau) = 0, \quad (2.67)$$

где

$$k = \sqrt{(1 - \lambda)[1 - \lambda(1 - 2\beta)]}. \quad (2.68)$$

Решением системы (2.66), следовательно, является

$$J(\tau) = A_1 e^{k\tau} + A_2 e^{-k\tau},$$

$$H(\tau) = - \frac{1}{1 - \lambda(1 - 2\beta)} \cdot \frac{dJ(\tau)}{d\tau} =$$

$$= - \frac{1 - \lambda}{k} (A_1 e^{k\tau} - A_2 e^{-k\tau}).$$

Определяя A_1 и A_2 из граничных условий (2.45), находим:

$$I_1(\tau) = \frac{1}{1 - R^2 e^{-2k\tau_0}} [(I_{02} - I_{01} R e^{-k\tau_0}) R e^{-k(\tau_0 - \tau)} +$$

$$+ (I_{01} - I_{02} R e^{-k\tau_0}) e^{-k\tau}], \quad (2.69)$$

$$I_2(\tau) = \frac{1}{1 - R^2 e^{-2k\tau_0}} [(I_{02} - I_{01} R e^{-k\tau_0}) e^{-k(\tau_0 - \tau)} +$$

$$+ (I_{01} - I_{02} R e^{-k\tau_0}) R e^{-k\tau}],$$

где

$$R = \frac{k - 1 + \lambda}{k + 1 - \lambda}. \quad (2.70)$$

Отсюда находим коэффициенты отражения и пропускания среды при $\lambda \neq 1$:

$$r = \frac{1 - e^{-2k\tau_0}}{1 - R^2 e^{-2k\tau_0}} R, \quad q = \frac{(1 - R^2) e^{-k\tau_0}}{1 - R^2 e^{-2k\tau_0}}. \quad (2.71)$$

Отсюда степень черноты слоя (или поглощательная способность слоя) равна

$$e = 1 - r - q = (1 - R) \frac{1 - e^{-k\tau_0}}{1 + R e^{-k\tau_0}}. \quad (2.72)$$

Следует отметить, что величина R является оптической характеристикой исследуемой среды, определяющей коэффициент отражения слоя бесконечно большой оптической толщины.

Глава 3

ТОЧНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

§ 1. Проблема Милна

Запишем уравнение переноса излучения (1.46) для плоской среды. Плоскопараллельный слой — простейшая геометрия исследуемой среды — служит хорошей моделью реальных объектов. Задачи распространения излучения для плоской среды сильно упрощаются, и именно этот случай в настоящее время наиболее подробно изучен.

Для плоской среды оптические характеристики (коэффициенты поглощения и рассеяния, индикатриса рассеяния на элементарном объеме) являются функциями от одной координаты, выбираемой обычно в направлении нормали к поверхности слоя (рис. 6). Так как

$$dr = \frac{dx}{\cos \theta} = \frac{dx}{\mu} \text{ и } \tau = \int_0^x \alpha(x) dx,$$

то для сферической индикатрисы рассеяния вместо уравнения (1.46) имеем

$$\mu \frac{dI(\tau, \mu)}{d\tau} + I(\tau, \mu) = \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^1 I(\tau, \mu') d\mu' + \varepsilon_0(\tau). \quad (3.1)$$

Граничные условия (1.47) для нашего случая запишутся в виде

$$I(0, \mu)|_{\mu > 0} = I_{01} f_1(\mu), \quad I(\tau_0, \mu)|_{\mu < 0} = I_{02} f_2(\mu), \quad (3.2)$$

где $\tau_0 = \int_0^{x_0} \alpha(x) dx$ — оптическая толщина всего слоя.

Условия (3.2) означают, что на граничную поверхность $x = 0$ слева, в направлении оси x , падает внешнее излуче-

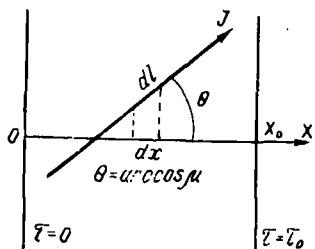


Рис. 6. К выводу уравнения переноса излучения для плоской среды

ние интенсивности I_{01} с угловым распределением $f_1(\mu)$, а справа на поверхность $x = x_0$ — излучение интенсивности I_{02} с угловым распределением $f_2(\mu)$. Условия (3.2) можно учесть непосредственно в уравнении (3.1). Для этого достаточно определить величину интенсивности внешнего излучения, приходящего в заданную точку слоя:

$$e_1(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^1 I^{\text{вн}}(\mu) e^{-\frac{\tau}{\mu}} d\mu = \frac{\lambda}{2} I_{01} \int_0^1 f_1(\mu) e^{-\frac{\tau}{\mu}} d\mu + \\ + \frac{\lambda}{2} I_{02} \int_{-1}^0 f_2(\mu) e^{-\frac{\tau_0 - \tau}{\mu}} d\mu. \quad (3.3)$$

Если индикатриса рассеяния на элементарном объеме не сферическая, то ее выражение необходимо внести под знак интеграла. При падении внешнего излучения на исследуемую среду под вполне определенным углом ($\theta^{\text{вн}} = \theta_{0i} = \arccos \mu_{0i}$, $i = 1, 2$) можно принять $f_i(\mu) \equiv \delta(\mu - \mu_{0i})$ (δ — функция Дирака) и соотношение (3.3) переписать в виде

$$e_1(\tau) = \frac{\lambda}{2} I_{01} e^{-\frac{\tau}{\mu_{01}}} + \frac{\lambda}{2} I_{02} e^{-\frac{\tau_0 - \tau}{\mu_{02}}}. \quad (3.3a)$$

Если теперь функцию $e_1(\tau)$ внесем в правую часть уравнения (3.1), то в этом случае необходимо пользоваться следующими граничными условиями:

$$I(0, \mu)|_{\mu > 0} = 0, \quad I(\tau_0, \mu)|_{\mu < 0} = 0, \quad (3.4)$$

которые выражают тот факт, что извне на исследуемую среду не может падать рассеянное излучение (естествен-

но, при этом предполагается, что отражение от граничных поверхностей слоя не учитывается).

Введем функцию источников:

$$e(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^1 I(\tau, \mu') d\mu' + e_0(\tau) + e_1(\tau), \quad (3.5)$$

где первый член учитывает рассеянное в среде излучение, второй — собственное излучение среды, а третий — излучение, обусловленное внешними источниками, и формально решим уравнение (3.1) при граничных условиях (3.4):

$$\mu \frac{dI(\tau, \mu)}{d\tau} + I(\tau, \mu) = e(\tau), \quad (3.6)$$

$$I(\tau, \mu) = \begin{cases} \int_0^{\tau} e(\tau') e^{-\frac{\tau-\tau'}{\mu}} \frac{d\tau'}{\mu} & \text{при } \mu > 0, \\ -\int_{\tau}^{\tau_0} e(\tau') e^{-\frac{\tau-\tau'}{\mu}} \frac{d\tau'}{\mu} & \text{при } \mu < 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

Подставляя (3.7) в выражение (3.5), находим интегральное уравнение для функции источников:

$$\begin{aligned} e(\tau) &= \frac{\lambda}{2} \left\{ \int_0^{\tau} e(\tau') d\tau' \int_0^1 e^{-\frac{\tau-\tau'}{\mu}} \frac{d\mu}{\mu} - \right. \\ &\quad \left. - \int_{\tau}^{\tau_0} e(\tau') d\tau' \int_{-1}^0 e^{-\frac{\tau-\tau'}{\mu}} \frac{d\mu}{\mu} \right\} + e_0(\tau) + e_1(\tau) = \\ &= \frac{\lambda}{2} \left\{ \int_0^{\tau} E_1(\tau - \tau') e(\tau') d\tau' + \int_{\tau}^{\tau_0} E_1(\tau' - \tau) e(\tau') d\tau' \right\} + \\ &\quad + e_0(\tau) + e_1(\tau), \end{aligned}$$

где $E_n(\tau) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-\tau s}}{s^n} ds$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) — интегрально-по-

казательная функция, свойства которой приведены в конце данного параграфа.

Полученное уравнение для функции источников можно записать в более удобном виде:

$$e(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} E_1(|\tau - \tau'|) e(\tau') d\tau' + e_1(\tau) + e_0(\tau). \quad (3.8)$$

Уравнение переноса излучения в интегральной форме было впервые получено Милном [1] применительно к переносу излучения через атмосферу звезды. При этом Милном сделаны предположения об отсутствии в атмосфере источников и стоков энергии и ее стационарном состоянии. Граничные условия полагались в виде

$$I(0, \mu)|_{\mu > 0} = 0, \quad (3.9)$$

а второе условие заключается в задании некоторого потока H . Таким образом, при $e_0 = e_1 = 0$, $\tau_0 \rightarrow \infty$ и $\lambda = 1$ (чистое рассеяние) из (3.8) получаем известное уравнение Милна:

$$e(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} E_1(|\tau - \tau'|) e(\tau') d\tau'. \quad (3.10)$$

Часто уравнение Милна записывают в виде

$$e(\tau) = \Lambda \{e(\tau')\} \quad (3.11)$$

и интегральный оператор Λ называют *первым оператором Милна*.

Для проблемы Милна вместо (3.10) можно использовать интегральное уравнение для потока энергии, определяемого соотношением (1.7):

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 I(\tau, \mu) \mu d\mu = H.$$

Для удобства введем новую величину: $P = -H/\pi > 0$. Подставляя сюда соотношение для интенсивности излучения по (3.7), в случае $\lambda = 1$ и $\tau_0 \rightarrow \infty$ находим:

$$\left(- \right) \int_0^1 d\mu \int_0^{\tau} e(\tau') e^{-\frac{\tau-\tau'}{\mu}} d\tau' - \int_0^1 d\mu \int_{-1}^0 e(\tau') e^{-\frac{\tau-\tau'}{\mu}} d\tau' = P$$

или

$$P = 2 \int_{\tau}^{\infty} E_2(\tau' - \tau) e(\tau') d\tau' - 2 \int_0^{\tau} E_2(\tau - \tau') e(\tau') d\tau' = \\ = \Phi \{e(\tau')\}.$$

Таким образом, второе интегральное уравнение Милна имеет вид

$$P = \Phi \{e(\tau')\}, \quad (3.12)$$

где величина P задается условиями задачи.

Интегральный оператор Φ — второй оператор Милна. (Свойства интегральных операторов Милна обсуждаются в конце параграфа.)

Обратимся к проблеме Милна. Уравнение (3.8) можно решить для $\lambda \neq 1$ и $e_1 \neq 0$ методом Винера—Хопфа с помощью преобразования Фурье. Аналогичным путем Фок [29] впервые получил точное решение (3.10). Пусть уравнение (3.10) справедливо для $-\infty < \tau < \infty$. При получении решения будем полагать $e(\tau) \equiv 0$ при $\tau < 0$, что и будет соответствовать физическому смыслу задачи. Для $0 < \tau < \infty$ и $-\infty < \tau < 0$ введем два преобразования Фурье:

$$F^+(p) = \int_0^{\infty} e(\tau) e^{i p \tau} d\tau \quad \text{и} \quad F^-(p) = \int_{-\infty}^0 e(\tau) e^{i p \tau} d\tau. \quad (3.13)$$

Умножая уравнение (3.10) на $e^{i p \tau}$ и интегрируя по τ , приходим к соотношению

$$F^+(p) + F^-(p) = -\frac{F^+(p)}{p} \operatorname{arctg} p$$

или

$$F^+(p) \left(1 - \frac{1}{p} \operatorname{arctg} p \right) = -F^-(p). \quad (3.14)$$

Исследование свойств регулярности исходных функций и применение интеграла Коши для интенсивности выходящего излучения приводят к выражению

$$I(0, \mu, \mu_{01}) = \frac{\lambda}{4\pi} \mu_{01} J_{01} \frac{\Phi(\mu) \Phi(\mu_{01})}{\mu + \mu_{01}}, \quad (3.15)$$

где функция $\varphi(\mu)$ определяется соотношением

$$\ln \varphi(\mu) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left(1 - \lambda \frac{\operatorname{arctg} u}{u} \right) \frac{\mu du}{1 + \mu^2 u^2}. \quad (3.16)$$

Представление, подобное (3.15), было ранее получено Амбарцумяном [30], а функция $\varphi(\mu)$ с тех пор называется *функцией Амбарцумяна*.

Свойства интегрально-показательной функции и интегральных операторов Милна

1. *Интегрально-показательная функция $E_n(x)$.*

$$E_n(x) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-xs}}{s^n} ds \quad (x \geq 0, n \geq 0);$$

$$E_1(x) = -E_1(-x), \quad E_i(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^s}{s} ds;$$

$$E_1(x) = -c - \ln|x| + x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2!} + \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3!} - \frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{4!} + \dots;$$

$$E_i(x) = c + \ln|x| + x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2!} + \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3!} + \frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{4!} + \dots$$

($c = 0,5772156 \dots$ — постоянная Эйлера);

$$x \rightarrow 0, \quad E_1(x) \sim \ln \frac{1}{|x|}, \quad E_i(x) \sim \ln|x|;$$

$$x \rightarrow \infty, \quad E_1(x) \sim x^{-1} e^{-x}, \quad E_i(x) \sim x^{-i} e^{-x};$$

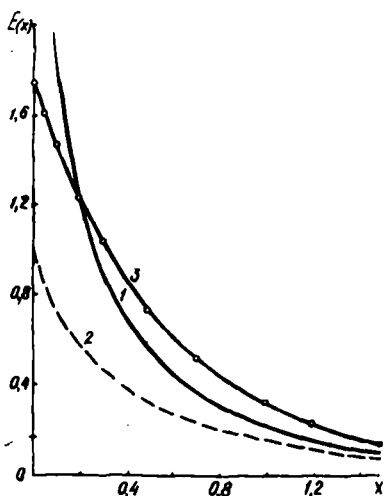
$$x \geq 1, \quad E_1(x) \cong e^{-x} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1 \cdot 2}{x^3} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{x^4} + \dots \right);$$

$$nE_{n+1}(x) = e^{-x} - xE_n(x), \quad E_{n+1}(x) = \int_x^{\infty} E_n(x) dx, \quad \frac{dE_{n+1}(x)}{dx} = -E_n(x).$$

Функции $E_1(x)$ и $E_2(x)$ графически представлены на рис. 7. На практике часто используют приближенное соотношение:

$$E_1(x) \cong \sqrt{3} \exp(-\sqrt{3} \cdot x).$$

Рис. 7. Функции $E_1(x)$ (кривая 1), $E_2(x)$ (2) и $\sqrt{3} \exp(-\sqrt{3}x)$ (3)



2. Свойства первого интегрального оператора Милна

$$\Lambda \{ f(x') \} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} E_1(|x - x'|) f(x') dx';$$

$$\Lambda_0 \{ f(x') \} = \Lambda \{ f \} (x')|_{x=0} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} E_1(x') f(x') dx'; \quad (1)$$

$$\Lambda_0 \{ c \} = \frac{1}{2} c \int_0^{\infty} E_1(x') dx' = \frac{1}{2} c; \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_0 \{ cx' \} &= \frac{1}{2} c \int_0^{\infty} x' E_1(x') dx' = \frac{1}{2} c \left[x' E_2(x') \right]_0^{\infty} - \\ &\quad - \int_0^{\infty} E_2(x') dx' \Big] = \frac{1}{4} c; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_0 \{ e^{-cx'} \} &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-cx'} E_1(x') dx' = \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{ds}{s} \int_0^{\infty} e^{-(c+s)x'} dx' = \\ &= \frac{1}{2c} \ln(1+c); \end{aligned} \quad (4)$$

$$\Lambda \{c\} = \frac{1}{2} c \int_0^{\infty} E_1(|x-x'|) dx' = \frac{1}{2} c \left[\int_0^x E_1(x-x') dx' + \int_x^{\infty} E_1(x'-x) dx' \right] = \frac{1}{2} c \left[\int_1^{\infty} \frac{e^{-sx}}{s} ds \int_0^x e^{sx'} dx' + \int_1^{\infty} \frac{e^{sx}}{s} ds \int_x^{\infty} e^{-sx'} dx' \right] = c \left[1 - \frac{1}{2} E_2(x) \right]; \quad (5)$$

$$\Lambda \{cx'\} = c \left[x + \frac{1}{2} E_3(x) \right]. \quad (6)$$

Функции $\Lambda \{E_n(x')\}$ протабулированы Кургаиновым [31].

3. *Определение коммутанта* $\left[\frac{d}{dx}, \Lambda \right]$. Покажем, что

$$\frac{d}{dx} \Lambda \left\{ f(x') \right\} - \Lambda \left\{ \frac{df(x')}{dx'} \right\} = \frac{1}{2} f(0) E_1(x). \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \Lambda \left\{ f(x') \right\} - \Lambda \left\{ \frac{df(x')}{dx'} \right\} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{d}{dx} \int_0^x f(x') E_1(x-x') dx' + \right. \\ &+ \frac{d}{dx} \int_x^{\infty} f(x') E_1(x'-x) dx' - \int_0^x \frac{df(x')}{dx'} E_1(x-x') dx' - \\ &- \left. \int_x^{\infty} \frac{df(x')}{dx'} E_1(x'-x) dx' \right\} = \frac{1}{2} \left\{ - \int_0^x \frac{f(x')}{x-x'} e^{-(x-x')} dx' + \right. \\ &+ \left. f(x') E_1(x-x') \right|_{x' \rightarrow x} + \int_x^{\infty} \frac{f(x')}{x'-x} e^{-(x'-x)} dx' - \\ &- \left. f(x') E_1(x'-x) \right|_{x' \rightarrow x} - f(x') E_1(x-x') \Big|_{x' \rightarrow x} + f(0) E_1(x) + \\ &+ \int_0^x \frac{f(x')}{x-x'} e^{-(x-x')} dx' - f(x') E_1(x'-x) \Big|_{x' \rightarrow \infty} + \end{aligned}$$

$$+ f(x') E_1(x' - x) \Big|_{x' \rightarrow x} - \int_x^\infty \frac{f(x')}{x' - x} e^{-(x' - x)} dx' \Big\} = \frac{1}{2} f(0) E_1(x),$$

что и требовалось доказать. Как видно из доказательства, функция $f(x)$ должна с ростом x возрастать не сильнее, чем xe^x .

4. «Симметрия» оператора Λ .

$$\int_0^\infty f(\tau, \alpha) \Lambda \{f(\tau', \beta)\} d\tau = \int_0^\infty f(\tau, \beta) \Lambda \{f(\tau', \alpha)\} d\tau. \quad (8)$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty f(\tau, \alpha) \Lambda \{f(\tau', \beta)\} d\tau - \int_0^\infty f(\tau, \beta) \Lambda \{f(\tau', \alpha)\} d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty d\tau \int_0^\infty d\tau' [f(\tau, \alpha) f(\tau', \beta) - f(\tau, \beta) f(\tau', \alpha)] E_1(|\tau - \tau'|) = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty d\tau \int_0^\tau d\tau' [f(\tau, \alpha) f(\tau', \beta) - f(\tau, \beta) f(\tau', \alpha)] E_1(\tau - \tau') + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^\infty d\tau \int_\tau^\infty d\tau' [f(\tau, \alpha) f(\tau', \beta) - f(\tau, \beta) f(\tau', \alpha)] E_1(\tau' - \tau) = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty d\tau' \int_0^{\tau'} d\tau [f(\tau', \alpha) f(\tau, \beta) - f(\tau', \beta) f(\tau, \alpha)] E_1(\tau' - \tau) + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^\infty d\tau' \int_\tau^\infty d\tau [f(\tau', \alpha) f(\tau, \beta) - f(\tau', \beta) f(\tau, \alpha)] E_1(\tau - \tau') = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty d\tau' \int_0^\infty d\tau [f(\tau', \alpha) f(\tau, \beta) - f(\tau', \beta) f(\tau, \alpha)] E_1(|\tau - \tau'|) = -I, \end{aligned}$$

$I = -I$, $I \equiv 0$, что и требовалось доказать.

5. Свойства второго интегрального оператора Милна.

$$\Phi \{f(x')\} = 2 \int_x^\infty f(x') E_2(x' - x) dx - 2 \int_0^x f(x') E_2(x' - x) dx'. \quad (9)$$

$$\Phi_0 \{f(x')\} = \Phi \{f(x')\}_{x=0} = 2 \int_0^{\infty} f(x') E_2(x') dx'. \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 \{c\} &= 2c \int_0^{\infty} E_2(x') dx' = c, \quad \Phi_0 \{cx'\} = 2c \int_0^{\infty} x' E_2(x') dx' = \frac{2}{3}c, \\ \Phi_0 \{E_2(x')\} &= 2 \int_0^{\infty} E_2(x') dx' = \frac{4}{3} (1 - \ln 2), \\ \Phi_0 \{E_3(x')\} &= 2 \int_0^{\infty} E_3(x') E_3(x') dx' = \frac{1}{4}. \end{aligned} \right\} (11)$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi \{c\} &= 2c \left[\int_x^{\infty} E_2(x' - x) dx' - \int_0^x E_2(x - x') dx' \right] = 2cE_3(x), \\ \Phi \{cx'\} &= 2c \left[\int_x^{\infty} x' E_2(x' - x) dx' - \int_0^x x' E_2(x - x') dx' \right] = \\ &= 2c \left[\frac{2}{3} - E_4(x) \right], \\ \frac{d}{dx} \Phi \{f(x')\} &= 4 [\Lambda \{f(x')\} - f(x)], \end{aligned} \right\} (12)$$

$$\frac{d}{dx} \Phi \{f(x')\} = 4 [\Lambda \{f(x')\} - f(x)], \quad (13)$$

так как

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \Phi \{f(x')\} &= 2 \left\{ \int_x^{\infty} E_1(x' - x) f(x') dx' - E_2(x' - x) f(x') \Big|_{x' \rightarrow x} + \right. \\ &+ \int_0^x E_1(x - x') f(x') dx' - E_2(x - x') f(x') \Big|_{x' \rightarrow x} \Big\} = \\ &= 2 \left\{ \int_0^{\infty} E_1(|x - x'|) f(x') dx' - 2f(x) \right\} = 4 [\Lambda \{f(x')\} - f(x)]. \end{aligned}$$

§ 2. Аналитический метод Амбарцумяна

Идея метода Амбарцумяна [30] заключается в преобразовании первого интегрального уравнения Милна в нелинейное интегральное уравнение относительно функ-

ции $I(0, \mu)$, выражающейся непосредственно через $\varphi(\mu)$ (3.16). Несколько позже [32] Амбарцумяном было показано, что подобное уравнение для интенсивности излучения можно получить из чисто физических соображений (§ 3 настоящей главы).

Метод Амбарцумяна основан на некоммутативности первого интегрального оператора Милна Λ и дифференциального оператора $\frac{d}{d\tau}$. По формуле (7) § 1 имеем:

$$\frac{d}{d\tau} \Lambda \{e(\tau')\} - \Lambda \left\{ \frac{de(\tau')}{d\tau'} \right\} = \frac{1}{2} e(0) E_1(\tau). \quad (3.17)$$

Так как

$$\frac{de(\tau)}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \Lambda \{e(\tau')\},$$

то

$$\frac{de(\tau)}{d\tau} = \Lambda \left\{ \frac{de(\tau')}{d\tau'} \right\} + \frac{1}{2} e(0) E_1(\tau)$$

или

$$e'(\tau) = \Lambda \{e'(\tau')\} + \frac{1}{2} e(0) \int_1^{\infty} \frac{e^{-\tau s}}{s} ds. \quad (3.18)$$

Соотношение (3.18) является неоднородным интегральным уравнением, причем второй член справа можно представить как суперпозицию членов типа $A(k) e^{-\tau k}$, где $A(k) = \frac{1}{2k} e(0)$. Если положить

$$e(\tau, k) = \Lambda \{e(\tau', k)\} + e^{-\tau k}, \quad (3.19)$$

то, интегрируя это выражение с весом $A(k)$, получаем:

$$\int_1^{\infty} A(k) e(\tau, k) dk = \Lambda \left\{ \int_1^{\infty} A(k) e(\tau', k) dk \right\} + \int_1^{\infty} A(k) e^{-\tau k} dk. \quad (3.20)$$

Сравнивая уравнения (3.18) и (3.20), можно сделать предположение*), что выражение

$$\varepsilon'(\tau) = \int_1^{\infty} A(k) \varepsilon(\tau, k) dk \quad (3.21)$$

является решением уравнения (3.18).

Применим к (3.21) преобразование Лапласа:

$$L\{\varepsilon'(\tau)\} = s \int_0^{\infty} \varepsilon(\tau) e^{-s\tau} d\tau.$$

Учитывая, что $L\{\varepsilon'(\tau)\} = sL\{\varepsilon(\tau)\} - s\varepsilon(0)$, находим:

$$sL\{\varepsilon(\tau)\} - s\varepsilon(0) = \int_1^{\infty} A(k) L\{\varepsilon(\tau, k)\} dk.$$

Обозначим $L\{\varepsilon(\tau)\} = b(s)$ и $L\{\varepsilon(\tau, k)\} = b(s, k)$. Тогда

$$sb(s) - s\varepsilon(0) = \int_1^{\infty} A(k) b(s, k) dk,$$

где $A(k) = \varepsilon(0)/2k$.

Отсюда находим уравнение для $b(s)$:

$$b(s) = \varepsilon(0) \left[1 + \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{b(s, k)}{sk} dk \right]. \quad (3.22)$$

Величина $\frac{1}{s} b(s, k)$ обладает замечательным свойством, позволяющим непосредственно прийти к окончательному результату. Оказывается, величина

$$\frac{b(s, k)}{s} = R(s, k) \quad (3.23)$$

симметрична относительно перестановки своих аргументов:

$$R(s, k) \equiv R(k, s). \quad (3.24)$$

*) Это предположение, как показано в конце этого параграфа, действительно выполняется.

Покажем это. По определению:

$$R(s, k) = \int_0^{\infty} \varepsilon(\tau, k) e^{-\tau s} d\tau \text{ и } R(k, s) = \int_0^{\infty} \varepsilon(\tau, s) e^{-\tau k} d\tau.$$

Нетрудно показать, что

$$\int_0^{\infty} \varepsilon(\tau, s) \Lambda \{ \varepsilon(\tau', k) \} d\tau = \int_0^{\infty} \varepsilon(\tau, k) \Lambda \{ \varepsilon(\tau', s) \} d\tau \quad (3.25)$$

(см. формулу (8) § 1) и поэтому из соотношений

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \varepsilon(\tau, k) \varepsilon(\tau, s) d\tau &= \int_0^{\infty} \varepsilon(\tau, s) \Lambda \{ \varepsilon(\tau', k) \} d\tau + \\ &+ \int_0^{\infty} e^{-\tau k} \varepsilon(\tau, s) d\tau \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \varepsilon(\tau, s) \varepsilon(\tau, k) d\tau &= \int_0^{\infty} \varepsilon(\tau, k) \Lambda \{ \varepsilon(\tau', s) \} d\tau + \\ &+ \int_0^{\infty} e^{-\tau s} \varepsilon(\tau, k) d\tau \end{aligned}$$

приходим к свойству (3.24).

Таким образом, по (3.22):

$$b(s) = \varepsilon(0) \left[1 + \frac{1}{2} \int_1^{\infty} R(s, k) \frac{dk}{k} \right].$$

Полагая в (3.19) $\tau=0$, находим:

$$\begin{aligned} \varepsilon(0, k) = \Lambda_0 \{ \varepsilon(\tau', k) \} + 1 &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} E_1(\tau) \varepsilon(\tau, k) d\tau + 1 = \\ &= 1 + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \varepsilon(\tau, k) d\tau \int_1^{\infty} \frac{e^{-\tau s}}{s} ds = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{ds}{s^2} s \int_0^{\infty} \varepsilon(\tau, k) e^{-\tau s} d\tau = \\
&= 1 + \frac{1}{2} \int_1^{\infty} L\{\varepsilon(\tau', k)\} \frac{ds}{s^2}.
\end{aligned}$$

Так как

$$R(s, k) = \int_0^{\infty} \varepsilon(\tau, k) e^{-\tau s} d\tau = \frac{1}{s} L\{\varepsilon(\tau', k)\},$$

то

$$\varepsilon(0, k) = 1 + \frac{1}{2} \int_1^{\infty} R(s, k) \frac{ds}{s}. \quad (3.26)$$

Аналогично находим

$$\varepsilon(0, s) = 1 + \frac{1}{2} \int_1^{\infty} R(s, k) \frac{dk}{k}. \quad (3.26a)$$

Тогда (3.22) можно переписать в виде

$$b(s) = \varepsilon(0) \varepsilon(0, s). \quad (3.27)$$

Последнее соотношение имеет вполне определенный физический смысл. Действительно,

$$b(s) = L\{\varepsilon(\tau')\} = s \int_0^{\infty} \varepsilon(\tau) e^{-s\tau} d\tau.$$

Полагая здесь $s = 1/\mu$, находим, что

$$b\left(\frac{1}{\mu}\right) = \int_0^{\infty} \varepsilon(\tau) e^{-\frac{\tau}{\mu}} \frac{d\tau}{\mu}, \quad (3.28)$$

а это по (3.7) есть не что иное, как интенсивность излучения, выходящего из бесконечного слоя, если левую полусферу считать положительной. Поэтому нам необходимо установить смысл величин $\varepsilon(0)$ и $\varepsilon(0, s)$, которыми определяется $b(s) \equiv I(0, \mu)$.

Применим свойство (3.17) к функции $e(\tau, k)$:

$$\frac{d}{d\tau} \Lambda \{e(\tau', k)\} - \Lambda \left\{ \frac{\partial e(\tau', k)}{\partial \tau} \right\} = \frac{1}{2} e(0, k) E_1(\tau).$$

Но, в силу (3.19),

$$\Lambda \{e(\tau', k)\} = e(\tau, k) - e^{-\tau k}.$$

Поэтому

$$e'(\tau, k) = \Lambda \{e'(\tau', k)\} - ke^{-k\tau} + \int_1^{\infty} A(k, k') e^{-\tau k'} dk', \quad (3.29)$$

где

$$A(k, k') = \frac{1}{2k^2} e(0, k).$$

Проинтегрируем (3.19) по k' с весом $A(k, k')$:

$$\int_1^{\infty} e(\tau, k') A(k, k') dk' = \Lambda \left\{ \int_1^{\infty} e(\tau', k') A(k, k') dk' \right\} + \\ + \int_1^{\infty} A(k, k') e^{-\tau k'} dk'.$$

Сравнивая это выражение с (3.29) с учетом (3.19), можно принять за решение (3.29) функцию

$$e'(\tau, k) = \int_1^{\infty} e(\tau, k') A(k, k') dk' - ke(\tau, k). \quad (3.30)$$

Применим к (3.30) преобразование Лапласа:

$$sL \{e(\tau', k)\} - se(0, k) = \\ = \int_1^{\infty} A(k, k') L \{e(\tau', k')\} dk' - kL \{e(\tau', k)\}$$

или в введенных нами обозначениях

$$(s + k)R(s, k) = e(0, k) + \int_1^{\infty} A(k, k') R(s, k') dk' =$$

$$= \varepsilon(0, k) + \frac{1}{2} \varepsilon(0, k) \int_1^{\infty} R(s, k') \frac{dk'}{k'}$$

С учетом (3.26) последнее соотношение можно переписать в виде $(s+k)R(s, k) = \varepsilon(0, k)\varepsilon(0, s)$ или

$$R(s, k) = \frac{\varepsilon(0, s)\varepsilon(0, k)}{s+k} \quad (3.31)$$

Подставляя (3.31) в (3.26) или (3.26а), находим уравнение, определяющее функцию $\varepsilon(0, k)$:

$$\varepsilon(0, k) = 1 + \frac{1}{2} \varepsilon(0, k) \int_1^{\infty} \frac{\varepsilon(0, s)}{s(s+k)} ds \quad (3.32)$$

или

$$\varepsilon(0, s) = 1 + \frac{1}{2} \varepsilon(0, s) \int_1^{\infty} \frac{\varepsilon(0, k)}{k(s+k)} dk \quad (3.32а)$$

При $s = \frac{1}{\mu}$ и $k = \frac{1}{\mu'}$ $\varepsilon\left(0, \frac{1}{\mu}\right) \equiv \varphi(\mu)$ — известная функция Амбарцумяна, определяемая уравнением

$$\varphi(\mu) = 1 + \frac{1}{2} \mu\varphi(\mu) \int_0^1 \frac{\varphi(\mu')}{\mu + \mu'} d\mu' \quad (3.33)$$

Остается теперь определить величину $\varepsilon(0)$. Для этого обратимся к выражению для средней интенсивности выходящего из слоя излучения:

$$\overline{I(0)} = \frac{1}{2} \int_0^1 I(0, \mu) d\mu = \varepsilon(0).$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{2} \int_0^1 I(0, \mu) d\mu = \frac{1}{2} \varepsilon(0) \int_0^1 \varphi(\mu) d\mu.$$

Поэтому

$$\int_0^1 \varphi(\mu) d\mu = 2. \quad (3.34)$$

Это дает возможность записать уравнение (3.33) в несколько другом виде:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \varphi(\mu') d\mu', \quad \frac{1}{\varphi(\mu)} = 1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\varphi(\mu') d\mu'}{\mu + \mu'} = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\varphi(\mu') \mu'}{\mu + \mu'} d\mu' \end{aligned}$$

или

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\varphi(\mu) \varphi(\mu') \mu'}{\mu + \mu'} d\mu' = 1. \quad (3.35)$$

По (1.7) находим:

$$\int_0^1 I(0, \mu) \mu d\mu = \frac{P}{2} = \varepsilon(0) \int_0^1 \varphi(\mu) \mu d\mu.$$

Выражение для первого момента функции $\varphi(\mu)$ нетрудно найти из (3.35). Действительно, умножая (3.35) на μ^2 и интегрируя по μ от 0 до 1, получаем:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \mu^2 d\mu &= \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\varphi(\mu) \varphi(\mu') \mu^2 \mu'}{\mu + \mu'} d\mu d\mu' = \\ &\equiv \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\varphi(\mu) \varphi(\mu') \mu \mu'^2}{\mu + \mu'} d\mu d\mu', \end{aligned}$$

т. е.

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \varphi(\mu) \varphi(\mu') \mu \mu' d\mu d\mu'.$$

Отсюда

$$\int_0^1 \varphi(\mu) \mu d\mu = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Тогда

$$\frac{1}{2} P = \frac{2}{\sqrt{3}} \varepsilon(0) \quad \text{или} \quad \varepsilon(0) = \frac{\sqrt{3}}{4} P. \quad (3.36)$$

Таким образом, интенсивность излучения, выходящего из полубесконечного слоя, равна

$$I(0, \mu) = \frac{\sqrt{3}}{4} P \cdot \varphi(\mu).$$

Следует заметить, что функция

$$R(s, k) = \frac{1}{s} b(s, k) = \mu I(0, \mu, \mu_0) = \int_0^{\infty} \varepsilon(\tau, \mu_0) e^{-\frac{\tau}{\mu}} d\tau$$

имеет также определенный физический смысл. Эта величина определяется только функциями Амбарцумяна:

$$R(s, k) = \frac{\varepsilon(0, s) \varepsilon(0, k)}{s + k} = \frac{\varphi(\mu) \varphi(\mu_0)}{\mu + \mu_0} \mu \mu_0$$

и определяет интенсивность излучения, выходящего из полубесконечного слоя, при падении на него излучения в направлении $\theta_0 = \arcsin \mu_0$.

В заключение покажем, что решения уравнений (3.18) и (3.19) действительно носят общий характер.

Выберем для общности решение уравнения (3.21) в виде

$$\varepsilon'(\tau) = \int_1^{\infty} A(k) \varepsilon(\tau, k) dk + f(\tau).$$

Подставляя это выражение в уравнение (3.18), получаем

$$f(\tau) = \Lambda \{f(\tau')\},$$

т. е. выбранная функция $f(\tau)$ должна удовлетворять первому интегральному уравнению Милна. Отсюда следует,

что $f(\tau)$ от решения должна отличаться лишь некоторой константой: $f(\tau) = C \cdot \varepsilon(\tau)$.

Тогда, согласно (3.18), при применении преобразования Лапласа имеем:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{C}{s}\right) b(s) &= \varepsilon(0) \left(1 + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} R(s, k) \frac{dk}{k}\right) = \\ &= \varepsilon(0) \varepsilon(0, s). \end{aligned}$$

Полагая $s = \frac{1}{\mu}$, находим: $(1 - \mu C) I(0, \mu) = \varepsilon(0) \varphi(\mu)$.

Так как

$$\varepsilon(0) = \frac{1}{2} \int_0^1 I(0, \mu) d\mu \quad \text{и} \quad P=2 \int_0^1 I(0, \mu) \mu d\mu,$$

то

$$2\varepsilon(0) - \frac{1}{2} CP = \varepsilon(0) \int_0^1 \varphi(\mu) d\mu$$

или

$$2\varepsilon(0) - \frac{1}{2} CP = \varepsilon(0) \cdot 2,$$

что ведет к $C \equiv 0$.

Для уравнения (3.29) получаем аналогично:

$$(s+k)R(s, k) = \varepsilon(0, k) \varepsilon(0, s) + \frac{1}{s} C \cdot b(s).$$

Так как функция $R(s, k)$ симметрична относительно аргументов, то это также должно вести к $C \equiv 0$. Таким образом, выбираемые решения для уравнений (3.18) и (3.19) действительно носят общий характер.

§ 3. Принцип инвариантности Амбарцумяна

Формула для определения интенсивности выходящего из полубесконечного слоя излучения и интегральное уравнение для функции $\varphi(\mu)$ были получены Амбарцумяном [32] из чисто физических соображений. В основу

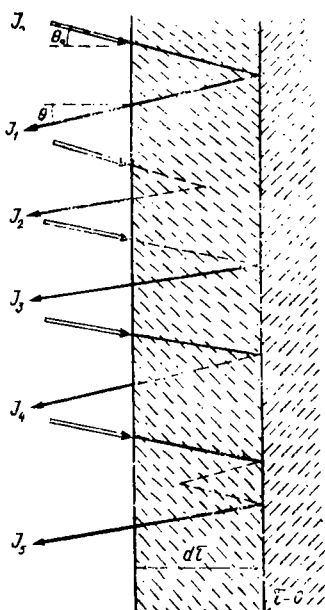


Рис. 8. К принципу инвариантности Амбарцумяна

своих рассуждений Амбарцумяном был положен следующий принцип инвариантности*): *отражательная способность полубесконечной среды не изменяется при добавлении к ней слоя бесконечно малой оптической толщины.*

Рассмотрим, какие процессы взаимодействия излучения с веществом возникают в среде при добавлении к ней слоя толщины $d\tau$. Для простоты остановимся сначала на одномерном случае. Пусть на среду с отражательной способностью r_0 падает излучение интенсивности I_0 . Среда характеризуется некоторой вероятностью выживания кванта λ и долей рассеяния назад β . При рассмотрении возможных процессов будем пренебрегать

величинами второго и выше порядков малости. Для удобства рассмотрения на рис. 8 направления внешнего и наблюдаемого излучений разнесены в пространстве. За закон ослабления излучения дополнительным слоем в первом приближении можно принять

$$I = I_0(1 - d\tau).$$

С точностью до величин второго порядка малости добавление элементарного слоя приводит к появлению следующих процессов:

1) внешнее излучение после ослабления в слое $d\tau$ может отразиться от поверхности $\tau=0$ и выйти из среды:

$$I_1 = I_0(1 - d\tau)r_0(1 - d\tau);$$

2) рассеяние в слое $d\tau$:

$$I_2 = I_0\lambda\beta d\tau;$$

*) Иногда этот принцип неудачно называют «принципом сложения слоев».

3) рассеянное вперед излучение может отразиться от поверхности $\tau = 0$:

$$I_3 = I_0 \lambda (1 - \beta) d\tau \cdot r_0 (1 - d\tau);$$

4) ослабленное слоем $d\tau$ внешнее излучение может отразиться от поверхности $\tau=0$ и испытать рассеяние вперед:

$$I_4 = I_0 (1 - d\tau) r_0 \lambda (1 - \beta) d\tau;$$

5) после отражения от поверхности $\tau=0$ излучение испытывает рассеяние назад и это рассеянное излучение вновь отражается от поверхности $\tau=0$ и выходит из среды:

$$I_5 = I_0 (1 - d\tau) r_0 \cdot \lambda \beta d\tau \cdot r_0 (1 - d\tau).$$

Согласно принципу инвариантности,

$$I_{\text{отр}} = r_0 I_0 = \sum_{i=1}^5 I_i,$$

т. е.

$$I_0 r_0 = I_0 r_0 (1 - 2d\tau) + I_0 \beta \lambda d\tau + 2I_0 r_0 (1 - \beta) \lambda d\tau + I_0 r_0^2 \lambda \beta d\tau.$$

Отсюда находим соотношение для отражательной способности полубесконечного слоя:

$$r_0^2 - 2r_0 \left(1 + \frac{1 - \lambda}{\lambda \beta} \right) + 1 = 0.$$

Рассмотрим процессы отражения и рассеяния, возникающие при добавлении слоя $d\tau$ к плоскому слою бесконечной оптической толщины. Обозначая отражательную способность плоской полубесконечной среды через $\rho(\mu, \mu_0)$ ($\theta_0 = \arccos \mu_0$ определяет направление внешнего излучения, а $\theta = \arccos \mu$ — направление выходящего излучения, см. рис. 8), аналогично можно найти величину интенсивности излучения, возникающего за счет слоя $d\tau$:

$$I(0, \mu, \mu_0) = I_0 \underline{\mu_0} \rho(\mu, \mu_0) = \sum_{i=1}^5 I_i. \quad (3.37)$$

Здесь

$$\begin{aligned} I_1 &= I_0 \mu_0 \left(1 - \frac{d\tau}{\mu_0} \right) \rho(\mu, \mu_0) \left(1 - \frac{d\tau}{\mu} \right) \cong \\ &\cong I_0 \mu_0 \rho(\mu, \mu_0) - I_0 \rho(\mu, \mu_0) d\tau - I_0 \frac{\mu_0}{\mu} \rho(\mu, \mu_0) d\tau; \end{aligned}$$

$$I_2 = \frac{\lambda}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{d\tau}{\mu} \cong \frac{\lambda}{4\mu} I_0 d\tau;$$

$$I_3 = \left(1 - \frac{d\tau}{\mu}\right) \frac{\lambda d\tau}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 I_0 \rho(\mu, \mu') d\mu' d\varphi' \cong$$

$$\cong \frac{\lambda d\tau}{2} I_0 \int_0^1 \rho(\mu, \mu') d\mu';$$

$$I_4 = \frac{\lambda}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 I_0 \mu_0 \rho(\mu', \mu_0) \left(1 - \frac{d\tau}{\mu_0}\right) d\varphi d\mu' \frac{d\tau}{\mu} \cong$$

$$\cong \frac{\lambda d\tau}{2\mu} I_0 \mu_0 \int_0^1 \rho(\mu', \mu_0) d\mu';$$

$$I_5 = \left(1 - \frac{d\tau}{\mu}\right) d\tau \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho(\mu, \mu'') d\mu'' d\varphi'' \frac{1}{\pi} \times$$

$$\times \frac{\lambda}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho(\mu', \mu_0) I_0 \mu_0 \left(1 - \frac{d\tau}{\mu_0}\right) d\mu' d\varphi' \cong$$

$$\cong \lambda d\tau I_0 \mu_0 \int_0^1 \rho(\mu, \mu'') d\mu'' \int_0^1 \rho(\mu', \mu_0) d\mu'.$$

По (3.37) находим уравнение для отражательной способности слоя:

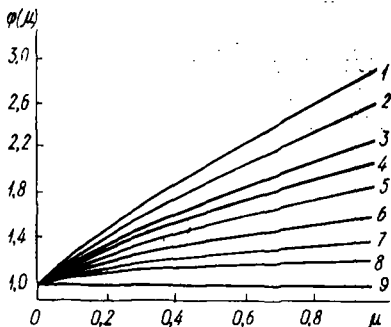
$$\rho(\mu, \mu_0) (\mu + \mu_0) = \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{2} \mu \int_0^1 \rho(\mu, \mu') d\mu' +$$

$$+ \frac{\lambda}{2} \mu_0 \int_0^1 \rho(\mu, \mu_0) d\mu +$$

$$+ \lambda \mu \mu_0 \int_0^1 \rho(\mu, \mu'') d\mu'' \int_0^1 \rho(\mu', \mu_0) d\mu'$$

Рис. 9. Функция Амбарцумяна $\varphi(\mu)$ при различных значениях вероятности выживания кванта:

1— $\lambda=1,0$; 2—0,995; 3—0,975; 4—0,95;
5—0,9; 6—0,8; 7—0,6; 8—0,4; 9—0



или после преобразований:

$$\rho(\mu, \mu_0) = \frac{\lambda}{4(\mu + \mu_0)} \left[1 + 2\mu \int_0^1 \rho(\mu, \mu') d\mu' \right] \times \\ \times \left[1 + 2\mu_0 \int_0^1 \rho(\mu, \mu_0) d\mu \right]. \quad (3.38)$$

Уравнению (3.38) удовлетворяет также и функция $\rho(\mu_0, \mu)$, т. е. единственность решения нашей задачи требует симметрии функции $\rho(\mu, \mu_0)$:

$$\rho(\mu, \mu_0) \equiv \rho(\mu_0, \mu). \quad (3.39)$$

Это условие ведет к соотношению

$$\rho(\mu, \mu_0) = \frac{\lambda}{4} \cdot \frac{\varphi(\mu) \varphi(\mu_0)}{\mu + \mu_0}, \quad (3.38a)$$

где

$$\varphi(\mu) = 1 + 2\mu \int_0^1 \rho(\mu, \mu') d\mu'$$

или

$$\varphi(\mu) = 1 + \frac{\lambda}{2} \mu \varphi(\mu) \int_0^1 \frac{\varphi(\mu')}{\mu + \mu'} d\mu'. \quad (3.40)$$

Таким образом, для функции $\varphi(\mu)$ получено уравнение, аналогичное уравнению (3.33), для любого λ . Из (3.40) вид-

но, что при $\lambda=0$ $\varphi(\mu) = 1$. Как показывают непосредственные (численные) расчеты интегрального уравнения (3.40), функция $\varphi(\mu)$ для $\lambda=0 \div 0,5$ почти не зависит от λ (рис. 9). При $\lambda=1$ и $\mu=1$ функция $\varphi(\mu)$ достигает своего максимального значения:

$$\varphi_{\max} = 2,9078 \dots \quad (3.41)$$

§ 4. Расчет альбедо полубесконечной среды

Отношение энергии, выходящей из среды за единицу времени, к величине энергии, падающей на единицу поверхности за единицу времени, называется *альбедо среды*. Так как падающая энергия равна

$$E_0 = \pi \mu_0 I_0,$$

а энергия выходящего из среды излучения —

$$E = \int_{(2\pi)} I(0, \mu, \mu_0) \mu \Omega = 2\pi \mu_0 I_0 \int_0^1 \rho(\mu, \mu_0) \mu d\mu,$$

то альбедо среды в нашем случае равно

$$A = A(\mu_0) = \frac{E}{E_0} = 2 \int_0^1 \rho(\mu, \mu_0) \mu d\mu. \quad (3.42)$$

Из этого соотношения следует, что в частном случае, при $\rho(\mu, \mu_0) = \rho_0 = \text{const}$, т. е. при независимости коэффициента отражения от направления (условие ламбертовского отражения), величина A есть не что иное, как коэффициент отражения среды.

Согласно (3.38а),

$$A = \frac{\lambda}{2} \varphi(\mu_0) \int_0^1 \frac{\mu \varphi(\mu)}{\mu + \mu_0} d\mu.$$

Используя уравнение для функции Амбарцумяна (3.40), имеем:

$$A = \frac{\lambda}{2} \varphi(\mu_0) \int_0^1 \varphi(\mu) d\mu - \frac{\lambda}{2} \mu_0 \varphi(\mu_0) \int_0^1 \frac{\varphi(\mu)}{\mu + \mu_0} d\mu =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\lambda}{2} \varphi(\mu_0) \int_0^1 \varphi(\mu) d\mu + 1 - \varphi(\mu_0) = \\
&= 1 - \varphi(\mu_0) \left[1 - \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \varphi(\mu) d\mu \right] = 1 - \varphi(\mu_0) \left(1 - \frac{\lambda}{2} \alpha_0 \right),
\end{aligned}$$

где

$$\alpha_0 = \int_0^1 \varphi(\mu) d\mu.$$

Таким образом, задача свелась к определению нулевого момента функции Амбарцумяна при $\lambda \neq 1$ (в отличие от (3.34)).

По (3.40):

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \varphi(\mu) d\mu &= 1 + \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\varphi(\mu) \varphi(\mu') \mu}{\mu + \mu'} d\mu d\mu' = \\
&= 1 + \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \varphi(\mu) d\mu \int_0^1 \varphi(\mu') d\mu' - \\
&\quad - \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\varphi(\mu) \varphi(\mu') \mu'}{\mu + \mu'} d\mu d\mu'.
\end{aligned}$$

Отсюда $\alpha_0 = 1 + \alpha_0^2 \lambda / 2 - (\alpha_0 - 1)$ или $\alpha_0^2 \lambda / 4 - \alpha_0 - 1 = 0$.

Тогда

$$\alpha_0 = \int_0^1 \varphi(\mu) d\mu = \frac{2}{\lambda} (1 - \sqrt{1 - \lambda}). \quad (3.43)$$

Выбор положительного знака перед корнем обусловлен тем, что при $\lambda = 0$ $\varphi = 1$ и $\alpha_0 = 1$. Следовательно, альbedo полубесконечной среды определяется соотношением

$$A = A(\mu_0) = 1 - \varphi(\mu_0) \sqrt{1 - \lambda}. \quad (3.44)$$

Это соотношение дает возможность найти излучательную способность полубесконечной плоской среды:

$$\varepsilon = 1 - A = \varphi(\mu_0) + \overline{1 - \lambda}. \quad (3.45)$$

§ 3*. Функции Амбарцумяна для конечного слоя

Для слоя конечной оптической толщины необходимо ввести в рассмотрение две функции Амбарцумяна: $\varphi(\mu)$ и $\psi(\mu)$. Интегральные уравнения для них получаются так же, как в § 2. Интегральное уравнение переноса в этом случае имеет вид

$$\varepsilon(\tau, \mu_0) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} E_1(|\tau - \tau'|) \varepsilon(\tau', \mu_0) d\tau' + \frac{\lambda}{4} I_0 e^{-\frac{\tau}{\mu_0}}. \quad (3.46)$$

Преобразуя (3.41) с помощью (3.17), приходим к соотношению

$$\begin{aligned} \varepsilon'(\tau, \mu_0) = & -\frac{1}{\mu_0} \varepsilon(\tau, \mu_0) + \\ & + \frac{1}{2} \varepsilon(0, \mu_0) \int_0^1 \varepsilon(\tau, \mu) \frac{d\mu}{\mu}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \varepsilon'(\tau, \mu_0) = & -\frac{1}{\mu_0} \varepsilon(\tau, \mu_0) + \frac{2}{I} \varepsilon(0, \mu_0) \int_0^1 \varepsilon(\tau, \mu) \frac{d\mu}{\mu} - \\ & - \frac{2}{I_0} \varepsilon(\tau_0, \mu_0) \int_0^1 \varepsilon(\tau_0 - \tau, \mu) \frac{d\mu}{\mu}. \end{aligned}$$

Умножая это выражение на $e^{-\frac{\tau}{\mu}}$, а затем на $e^{-\frac{\tau_0 - \tau}{\mu}}$ и интегрируя по τ от 0 до τ_0 с помощью коэффициентов диффузного отражения и пропускания

$$I_0 \mu_0 \rho(\mu, \mu_0) = \int_0^{\tau_0} \varepsilon(\tau, \mu_0) e^{-\frac{\tau}{\mu}} \frac{d\tau}{\mu};$$

$$I_0 \mu_0 g(\mu, \mu_0) = \int_0^{\tau_0} \varepsilon(\tau, \mu_0) e^{-\frac{\tau_0 - \tau}{\mu}} \frac{d\tau}{\mu}$$

получаем уравнения для искомых функций:

$$\varphi(\mu) = 1 + 2\mu \int_0^1 \rho(\mu, \mu') d\mu', \quad (3.48)$$

$$\psi(\mu) = e^{-\frac{\tau_0}{\mu}} + 2\mu \int_0^1 g(\mu, \mu') d\mu'.$$

Здесь

$$\begin{aligned} \rho(\mu, \mu_0) &= \frac{\lambda}{4} \cdot \frac{\varphi(\mu) \varphi(\mu_0) - \psi(\mu) \psi(\mu_0)}{\mu + \mu_0}, \\ g(\mu, \mu_0) &= \frac{\lambda}{4} \cdot \frac{\varphi(\mu_0) \psi(\mu) - \varphi(\mu) \psi(\mu_0)}{\mu - \mu_0}. \end{aligned} \quad (3.48a)$$

При $\lambda = 1$ появляется неопределенность в решении системы интегральных уравнений типа

$$\Phi(\mu) = \varphi(\mu) + \mu C [\varphi(\mu) + \psi(\mu)],$$

$$\Psi(\mu) = \varphi(\mu) - \mu C [\varphi(\mu) + \psi(\mu)].$$

Эта неопределенность устраняется условием постоянства потока и существования так называемого K -интеграла:

$$K = \int_{(4\pi)} I(\tau, \mu) \mu^2 d\Omega.$$

Интегральные уравнения для $\varphi(\mu)$ и $\psi(\mu)$ по (3.43) можно записать в виде

$$\varphi(\mu) = 1 + \frac{\lambda}{2} \mu \int_0^1 \frac{\varphi(\mu) \varphi(\mu') - \psi(\mu) \psi(\mu')}{\mu + \mu'} d\mu', \quad (3.49)$$

$$\psi(\mu) = e^{-\frac{\tau_0}{\mu}} + \frac{\lambda}{2} \mu \int_0^1 \frac{\varphi(\mu') \psi(\mu) - \varphi(\mu) \psi(\mu')}{\mu - \mu'} d\mu'.$$

Так как решение задач о распространении излучения в плоской среде при различных условиях почти всегда можно записать через функции $\varphi(\mu)$ и $\psi(\mu)$, то табулированию этих функций в настоящее время придается очень важное значение.

Аналитические приближенные выражения функций $\varphi(\mu)$ и $\psi(\mu)$ можно получить из интегральных уравнений (3.49), если воспользоваться приближенно выполняемым на практике условием равенства средней интенсивности выходящего излучения величине интенсивности излучения, выходящего под углом 60° *). Согласно этому условию, подынтегральные функции в (3.49) можно заменить их значением в точке $\mu' = 1/2$ [35]:

$$\begin{aligned}\varphi(\mu) &\cong 1 + \frac{\lambda\mu}{2\mu + 1} \left[\varphi\left(\frac{1}{2}\right) \varphi(\mu) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \psi(\mu) \right], \\ \psi(\mu) &\cong e^{-\frac{\tau_0}{\mu}} + \frac{\lambda\mu}{2\mu - 1} \left[\varphi\left(\frac{1}{2}\right) \psi(\mu) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \varphi(\mu) \right].\end{aligned}\quad (3.50)$$

В случае чистого рассеяния ($\lambda \rightarrow 1$) из (3.50) можно получить [35]:

$$\begin{aligned}\varphi_1(\mu) &= \frac{(2\mu + 1)(1 + \tau_0 - \mu)}{1 + \tau_0} + \frac{(2\mu - 1)\mu}{1 + \tau_0} e^{-\frac{\tau_0}{\mu}}, \\ \psi_1(\mu) &= \frac{(2\mu + 1)\mu}{1 + \tau_0} - \frac{(2\mu - 1)(1 + \tau_0 + \mu)}{1 + \tau_0} e^{-\frac{\tau_0}{\mu}}.\end{aligned}\quad (3.51)$$

Величины (3.51) совпадают с точками в пределах 10%-ной погрешности и ими можно воспользоваться как первым приближением при решении уравнений (3.49):

$$\varphi(\mu) = \lambda\varphi_1(\mu) + 1 - \lambda \quad (3.52)$$

и

$$\psi(\mu) = \lambda\psi_1(\mu) + (1 - \lambda) e^{-\frac{\tau_0}{\mu}}.$$

*) Это условие становится строгим при распространении в среде полностью диффузного излучения [33, 34].

Для слабодиссипирующих сред ($\lambda \ll 1$) решение (3.44) можно искать в виде ряда:

$$\varphi(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \varphi^n(\mu) \quad \text{и} \quad \psi(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \psi^n(\mu), \quad (3.53)$$

причем

$$\varphi^{(0)}(\mu) = 1 \quad \text{и} \quad \psi^{(0)}(\mu) = e^{-\frac{\tau_0}{\mu}}.$$

По [35]:

$$\varphi(\mu) = 1 + \frac{\lambda\mu}{2\mu+1} \left(1 - e^{-\frac{2\mu+1}{\mu}\tau_0}\right), \quad (3.54)$$

$$\psi(\mu) = e^{-\frac{\tau_0}{\mu}} + \frac{\lambda\mu e^{-\frac{\tau_0}{\mu}}}{2\mu-1} \left(1 - e^{-\frac{2\mu-1}{\mu}\tau_0}\right).$$

Пользуясь соотношениями (3.50), можно без труда найти приближенное выражение для $\varphi(\mu)$ для полубесконечного слоя [35]*):

$$\tau_0 \rightarrow \infty, \quad \varphi_a(\mu) = \frac{1+2\mu}{1+2\mu\sqrt{1-\lambda}}. \quad (3.55)$$

Приближение (3.55) можно подставить под интеграл первого уравнения (3.49) и получить более точную величину $\varphi(\mu)$:

$$\begin{aligned} \varphi_b(\mu) = & 1 + \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{\mu(1+2\mu)}{1-4\mu^2(1-\lambda)} \times \\ & \times \left[\frac{1-\sqrt{1-\lambda}}{\sqrt{1-\lambda}} \ln(1+2\sqrt{1-\lambda}) + (1-2\mu) \ln \frac{1+\mu}{\mu} \right]. \quad (3.56) \end{aligned}$$

Сравнение результатов численных расчетов $\varphi_a(\mu)$ и $\varphi_b(\mu)$ с точными значениями $\varphi(\mu)$ приведено в табл. I.

С помощью приближенных представлений функций Амбарцумяна $\varphi(\mu)$ и $\psi(\mu)$ можно рассчитать интенсивность

*) При $\tau_0 \rightarrow \infty$ $\psi(\mu) \rightarrow 0$.

Приближенные и точные значения функции $\varphi(\mu)$ [35]

λ	0,2			0,4			0,8			1,0		
	φ_a	φ_b	φ	φ_a	φ_b	φ	φ_a	φ_b	φ	φ_a	φ_b	φ
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
0,2	1,03	1,04	1,04	1,07	1,08	1,09	1,19	1,22	1,23	1,40	1,43	1,45
0,4	1,05	1,06	1,06	1,11	1,12	1,13	1,33	1,34	1,36	1,80	1,81	1,83
0,6	1,06	1,07	1,07	1,14	1,15	1,15	1,43	1,44	1,46	2,20	2,19	2,19
0,8	1,07	1,07	1,07	1,16	1,17	1,17	1,52	1,52	1,54	2,60	2,57	2,55
1,0	1,08	1,08	1,08	1,18	1,18	1,18	1,58	1,58	1,60	3,00	2,96	2,91

излучения, выходящего из плоского слоя конечной оптической толщины, из соотношений

$$I(0, \mu, \mu_0) = \rho(\mu, \mu_0) \mu_0 I_0$$

и

$$I(\tau_0, \mu, \mu_0) = q(\mu, \mu_0) \mu_0 I_0,$$

где коэффициенты $\rho(\mu, \mu_0)$ и $q(\mu, \mu_0)$ определяются выражениями (3.48а).

§ 6. Определение функции источников внутри слоя. Метод Соболева — Кейса

Для определения функции источников внутри слоя введем в рассмотрение функцию

$$\Phi(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^1 \varepsilon(\tau, \mu') \frac{d\mu'}{\mu'}.$$

Тогда уравнение (3.42) можно переписать в виде

$$\varepsilon'(\tau, \mu) + \frac{1}{\mu} \varepsilon(\tau, \mu) = \varphi(\mu) \Phi(\tau).$$

Его формальным решением является

$$\varepsilon(\tau, \mu) = e^{-\frac{\tau}{\mu}} \left\{ \int_0^{\tau} \varphi(\mu) \Phi(\tau') e^{\frac{\tau'}{\mu}} d\tau' + C \right\}.$$

Постоянную C можно определить из условия

$$\varepsilon(\tau, \mu)|_{\tau=0} = \varepsilon(0, \mu) = \varphi(\mu).$$

Таким образом, получаем:

$$\varepsilon(\tau, \mu) = \varphi(\mu) e^{-\frac{\tau}{\mu}} \left[1 + \int_0^{\tau} \Phi(\tau') e^{\frac{\tau'}{\mu}} d\tau' \right]. \quad (3.57)$$

Проинтегрируем это выражение по μ с весовой функцией $\frac{1}{2\mu}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^1 \varepsilon(\tau, \mu') \frac{d\mu'}{\mu'} &= \Phi(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^1 \varphi(\mu') e^{-\frac{\tau}{\mu'}} \frac{d\mu'}{\mu'} + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^1 \varphi(\mu') e^{-\frac{\tau}{\mu'}} \frac{d\mu'}{\mu'} \int_0^{\tau} \Phi(\tau') e^{\frac{\tau'}{\mu'}} d\tau' \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \Phi(\tau) &= \frac{1}{2} \int_0^1 \varphi(\mu') e^{-\frac{\tau}{\mu'}} \frac{d\mu'}{\mu'} + \\ &+ \int_0^{\tau} \Phi(\tau') d\tau' \cdot \frac{1}{2} \int_0^1 \varphi(\mu') e^{-\frac{\tau-\tau'}{\mu'}} \frac{d\mu'}{\mu'}. \end{aligned}$$

Отсюда находим интегральное уравнение для определения функции $\Phi(\tau)$:

$$\Phi(\tau) = K(\tau) + \int_0^{\tau} \Phi(\tau') K(\tau - \tau') d\tau', \quad (3.58)$$

где

$$K(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^1 \varphi(\mu) e^{-\frac{\tau}{\mu}} \frac{d\mu}{\mu}.$$

Соотношение (3.58) является известным *уравнением Вольтерра*. Определяя из (3.58) функцию $\Phi(\tau)$, по соотношению (3.57) нетрудно определить функцию источника для произвольной точки внутри слоя.

К уравнению типа (3.58) сводится и общее уравнение переноса излучения:

$$\varepsilon(\tau) = \int_0^{\infty} K(|\tau - \tau'|) \varepsilon(\tau') d\tau' + \varepsilon_0(\tau). \quad (3.59)$$

Ядро этого уравнения для монохроматического излучения определяется выражением

$$K(\tau) = \frac{\lambda}{2} E_1(\tau) \quad (3.60)$$

(см. § 1 этой главы), а для переноса излучения в спектральной линии (глава 6, § 1) —

$$K(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2(x) E_1[\alpha(x)\tau] dx \quad (3.61)$$

(функция $\alpha(x)$ определяет контур спектральной линии).

Для решения интегрального уравнения (3.59) применим метод, предложенный и довольно детально разработанный Соболевым [36] и Кейсом [37].

Введем в рассмотрение резольвентную функцию (или просто резольвенту) $\Gamma(\tau, \tau')$, которая связана с функцией Грина соотношением

$$G(\tau, \tau') = \Gamma(\tau, \tau') + \delta(\tau - \tau'), \quad (3.62)$$

и запишем для нее уравнение [36]:

$$\Gamma(\tau, \tau') = \int_0^{\infty} K(|\tau - t|) \Gamma(t, \tau') dt + K(|\tau - \tau'|). \quad (3.63)$$

Определив из этого уравнения резольвенту, нетрудно, как известно [11], записать решение уравнения (3.59) в виде

$$\varepsilon(\tau) = \int_0^{\infty} \Gamma(\tau, \tau') \varepsilon_0(\tau') d\tau' + \varepsilon_0(\tau). \quad (3.64)$$

Из вида уравнения (3.63) можно заключить, что

$$\Gamma(\tau, \tau') \equiv \Gamma(\tau', \tau). \quad (3.65)$$

Кроме того, резольвенту $\Gamma(\tau, \tau')$ можно выразить через функцию одной переменной, а именно через функцию

$$\Phi(\tau) \equiv \Gamma(\tau, 0) = \Gamma(0, \tau). \quad (3.66)$$

Продифференцируем (3.63) сначала по τ , затем по τ' и сложим полученные уравнения:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \tau} + \frac{\partial \Gamma}{\partial \tau'} = \int_0^{\infty} K(|\tau - t|) \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \tau} + \frac{\partial \Gamma}{\partial \tau'} \right) dt + \Phi(\tau') K(\tau). \quad (3.67)$$

Теперь положим в уравнении (3.63) $\tau' = 0$ и с учетом (3.66) запишем его в виде

$$\Phi(\tau) = \int_0^{\infty} K(|\tau - t|) \Phi(t) dt + K(\tau). \quad (3.68)$$

Таким образом, мы получим уравнение, подобное (3.58), но из сравнения (3.67) и (3.68) видно, что решение интегрального уравнения (3.59) сводится к решению дифференциального уравнения

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \tau} + \frac{\partial \Gamma}{\partial \tau'} = \Phi(\tau) \Phi(\tau'). \quad (3.69)$$

Решением последнего уравнения является

$$\Gamma(\tau, \tau') = \Phi(\tau' - \tau) + \int_0^{\tau} \Phi(\tau - t) \Phi(\tau' - t) dt \quad \text{при } \tau' > \tau$$

или в общем случае

$$\Gamma(\tau, \tau') = \Phi(|\tau - \tau'|) + \int_0^{\tau^*} \Phi(\tau - t) \Phi(\tau' - t) dt, \quad (3.70)$$

где τ^* — наименьшая из величин τ и τ' .

Из сказанного следует, что введенная в рассмотрение функция $\Phi(\tau) = \Gamma(\tau, 0) = \Gamma(0, \tau)$ играет основополагающую роль при решении уравнения переноса, аналогичную роли функций Амбарцумяна. И действительно, между ними существует связь — функция Амбарцумяна является с точ-

ностью до постоянного коэффициента отображением функции $\Phi(\tau)$ при интегральном преобразовании Лапласа. Чтобы это показать, обратимся к частному случаю уравнения (3.59):

$$\varepsilon(\tau, k) = \int_0^{\infty} K(|\tau - \tau'|) \varepsilon(\tau', k) d\tau' + e^{-k\tau}. \quad (3.71)$$

По (3.64) находим:

$$\varepsilon(\tau, k) = \int_0^{\infty} \Gamma(\tau', \tau) e^{-k\tau'} d\tau' + e^{-k\tau}. \quad (3.72)$$

Умножим (3.47) на $e^{-k\tau'}$ и проинтегрируем по τ' с учетом (3.72):

$$\frac{\partial \varepsilon(\tau, k)}{\partial \tau} = -k\varepsilon(\tau, k) + \Phi(\tau) \left[1 + \int_0^{\infty} \Phi(\tau') e^{-k\tau'} d\tau' \right].$$

Но так как

$$\varepsilon(0, k) = 1 + \int_0^{\infty} \Phi(\tau) e^{-k\tau} d\tau, \quad (3.73)$$

то уравнение для $\varepsilon(\tau, k)$ можно переписать в виде

$$\frac{\partial \varepsilon(\tau, k)}{\partial \tau} = -\varepsilon(\tau, k) + \varepsilon(0, k) \Phi(\tau)$$

или

$$\varepsilon(\tau, k) = \varepsilon(0, k) \left[e^{-k\tau} + \int_0^{\tau} e^{-k(\tau-\tau')} \Phi(\tau') d\tau' \right]. \quad (3.74)$$

Учитывая, что во всех задачах теории переноса излучения ядро интегрального уравнения имеет обычно вид

$$K(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_a^b A(y) e^{-\tau y} dy,$$

нетрудно найти связь между соотношениями (3.73) и (3.74) с аналогичными расчетами для функции Амбарцумяна, изложенными в § 2 этой главы.

Глава 4

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ,
ОСНОВАННЫЕ НА УСРЕДНЕНИИ УГЛОВОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
ИЗЛУЧЕНИЯ И ЕГО ПРИБЛИЖЕННОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

§ 1. Метод Шварцшильда — Шустера

Рассмотрим простейший метод решения уравнения переноса излучения — *метод Шварцшильда — Шустера*. Сущность метода состоит в том, что вместо искомой величины $I(\tau, \mu)$ определяются усредненные по полусферам интенсивности:

$$I_1(\tau) = \int_0^1 I(\tau, \mu) d\mu \quad \text{и} \quad I_2(\tau) = \int_{-1}^0 I(\tau, \mu) d\mu. \quad (4.1)$$

Интегрируя, например, уравнение переноса излучения для проблемы Милна по полусферам и вынося за интеграл среднее значение $\mu = \cos \theta$ (предположение Шустера), находим:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \int_0^1 I(\tau, \mu) \mu d\mu &\cong \frac{1}{2} \cdot \frac{dI_1(\tau)}{d\tau} = -I_1(\tau) + \\ &+ \frac{1}{2} [I_1(\tau) + I_2(\tau)], \\ \frac{d}{d\tau} \int_{-1}^0 I(\tau, \mu) \mu d\mu &\cong -\frac{1}{2} \cdot \frac{dI_2(\tau)}{d\tau} = -I_2(\tau) + \\ &+ \frac{1}{2} [I_1(\tau) + I_2(\tau)]. \end{aligned}$$

Приходим к очень простой системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dI_1}{d\tau} = -I_1 + I_2, \quad -\frac{dI_2}{d\tau} = -I_2 + I_1 \quad (4.2)$$

с граничным условием

$$I_1(0) = 0 \quad (4.3)$$

и условием постоянства потока. Последнее условие автоматически получается из (4.2), если принять по (1.9а) за поток излучения выражение

$$H = \pi(I_1 - I_2) = -\pi P \quad (4.4)$$

(поток излучения направлен в сторону, противоположную оси X). Действительно, складывая уравнения (4.2), получаем

$$\frac{d(I_1 - I_2)}{d\tau} = 0,$$

т. е. $I_1 - I_2 = \text{const}$. Отсюда следует, что поток излучения H является интегралом системы (4.2). Это свойство потока излучения, как будет показано в § 2 данной главы, носит общий характер.

Разность уравнений (4.2) дает

$$\frac{d}{d\tau} (I_1 + I_2) = 2(I_2 - I_1) = 2P$$

или

$$I_1 + I_2 = 2\tau P + C. \quad (4.5)$$

Из (4.4) и (4.5) находим $I_1(\tau)$:

$$I_1(\tau) = \frac{1}{2} (2\tau - 1)P + \frac{C}{2}.$$

Условие (4.3) дает для C следующее значение: $C = P$. Таким образом, решением системы (4.2) является:

$$I_1(\tau) = \tau P \text{ и } I_2(\tau) = (\tau + 1)P. \quad (4.6)$$

Так как усредненная интенсивность излучения связана с плотностью излучения (1.4):

$$\rho = \frac{2\pi}{c} \int_{-1}^1 I(\tau, \mu) d\mu = \frac{2\pi}{c} (I_1 + I_2)$$

(c — скорость света) и, с другой стороны, по закону Стефана — Больцмана (1.21), $\rho = \sigma T^4$, можно установить важ-

ное соотношение между температурой и оптической глубиной рассматриваемой среды:

$$\sigma T^4 = \frac{2\pi}{c} P (1 + 2\tau)$$

или

$$T^4 = T_0^4 (1 + 2\tau). \quad (4.7)$$

Здесь

$$T_0^4 = \frac{2H}{c\sigma} \quad (4.8)$$

имеет простейший физический смысл: T_0 — значение температуры, соответствующее граничной поверхности $\tau=0$.

Соотношение (4.7) сыграло значительную роль в астрофизических исследованиях, ибо позволяет по известным значениям T_0 и τ определять температуру небесных тел и их центральных частей или, наоборот, по рассчитанным другими методами значениям T и T_0 определять оптические характеристики небесных тел и атмосферы.

Найденную функцию источников

$$\varepsilon(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I(\tau, \mu) d\mu = \frac{1}{2} [I_1(\tau) + I_2(\tau)] = P \left(\tau + \frac{1}{2} \right) \quad (4.9)$$

можно использовать для получения приближенного углового распределения интенсивности выходящего излучения:

$$I(0, \mu)|_{\mu < 0} = - \int_0^{\infty} \varepsilon(\tau') e^{-\frac{\tau'}{\mu}} \frac{d\tau'}{\mu} = P \left(|\mu| + \frac{1}{2} \right). \quad (4.10)$$

Более общее решение уравнения переноса излучения в светорассеивающей среде с равномерно распределенными источниками в приближении Шварцшильда — Шустера найдено и проанализировано в § 5, гл. 4. Сравнение функции источников (4.9), а также углового распределения интенсивности выходящего излучения (4.10) с точным решением уравнения переноса приведено в табл. 2. Из таблицы видно, что погрешность решения проблемы Милна

Сравнение результатов решений уравнения переноса приближенными методами с точным решением для полубесконечного слоя ($\lambda = 1$)

Метод	$e(\tau) = \bar{I}$	$e(\tau)/\tau \rightarrow 0$	$e(\tau)/\tau \rightarrow \infty$	$I(0, \mu)/\mu < 0$	Δ
Приближение Шварцшильда — Шустера	$P \left(\tau + \frac{1}{2} \right)$	$\frac{1}{2} P$	τP	$P \left(\frac{1}{2} + \mu \right)$	3,00
	$\frac{3}{4} P \left(\tau + \frac{2}{3} \right)$	$\frac{1}{2} P$	$\frac{3}{4} \tau P$	$\frac{3}{4} P \left(\frac{2}{3} + \mu \right)$	2,50
Метод Чандрасекара ($n = 1$)	$\frac{3}{4} P \left(\tau + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$	$\frac{\sqrt{3}}{4} P$	$\frac{3}{4} \tau P$	$\frac{3}{4} P \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \mu \right)$	2,73
	$\frac{3}{4} P \left(\tau + \frac{2}{3} \right)$	$\frac{1}{2} P$	$\frac{3}{4} \tau P$	$\frac{3}{4} P \left(\frac{2}{3} + \mu \right)$	2,50
Метод сферических гармоник ($n = 1$)	$\frac{3}{4} P \left(\tau + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$	$\frac{\sqrt{3}}{4} P$	$\frac{3}{4} \tau P$	$\frac{3}{4} P \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \mu \right)$	2,73
	$\frac{3}{4} P \left(\tau + \frac{2}{3} \right)$	$\frac{1}{2} P$	$\frac{3}{4} \tau P$	$\frac{3}{4} P \left(\frac{2}{3} + \mu \right)$	2,50
Условие Маршака					
Условие Марка					
Точное решение	• —	$\frac{\sqrt{3}}{4} P$	$\frac{3}{4} \tau P$	—	2,90

для функции источника в приближении Шварцшильда—Шустера составляет около 33% для больших оптических толщин и уменьшается в два раза при $\tau \rightarrow 0$. Следует отметить, что соотношение (4.10) довольно точно описывает угловое распределение интенсивности выходящего излучения. Погрешность в определении параметра углового распределения выходящего из среды излучения

$$\Delta = \frac{I(0, \mu)|_{\mu=1}}{I(0, \mu)|_{\mu=0}} \quad (4.11)$$

составляет менее 4%. Аналогичный результат получен и при решении более общей задачи (см. § 5).

§ 2. Метод Эддингтона

Метод Эддингтона основан на предположении

$$\int_{(4\pi)} I(\tau, \mu) \mu^2 d\Omega \cong \frac{4\pi}{3} \overline{I(\tau)}, \quad (4.12)$$

где $\overline{I(\tau)} = \frac{1}{4\pi} \int_{(4\pi)} I(\tau, \mu) d\Omega$ — усредненная по направлениям интенсивность излучения.

Соотношение (4.12) позволяет свести уравнение переноса излучения к дифференциальному уравнению для $\overline{I(\tau)}$. Однако прежде всего убедимся в том, что для проблемы Милна поток излучения действительно является интегралом уравнения переноса. Проинтегрируем уравнение (3.1) по направлениям:

$$\begin{aligned} & \int_{(4\pi)} \mu \frac{dI(\tau, \mu)}{d\tau} \cdot \frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{dH}{d\tau} = \\ & = - \int_{(4\pi)} I(\tau, \mu) \frac{d\Omega}{4\pi} + \int_{(4\pi)} \overline{I(\tau)} \frac{d\Omega}{4\pi} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда $H = \text{const}$.

Умножая уравнение переноса на μ , а затем интегрируя по направлениям, находим:

$$\frac{d}{d\tau} \int_{4\pi} I(\tau, \mu) \mu^2 d\Omega = - \int_{(4\pi)} \mu I(\tau, \mu) d\Omega + \int_{(4\pi)} \overline{I(\tau)} \mu d\Omega.$$

Принимая во внимание условие (4.12) и равенство нулю второго члена, получаем уравнение для определения $\overline{I(\tau)}$:

$$\frac{4\pi}{3} \cdot \frac{d\overline{I(\tau)}}{d\tau} = -H.$$

Отсюда

$$\overline{I(\tau)} = -\frac{3}{4\pi} H\tau + C = \frac{3}{4} P\tau + C.$$

Постоянную C определим из условия отсутствия потока излучения, падающего извне на граничную поверхность $\tau=0$:

$$\overline{I(0)} = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 I(0, \mu) d\mu \text{ и } \int_{-1}^0 I(0, \mu) \mu d\mu = \frac{H}{2\pi} \cong -\overline{I(0)}.$$

Таким образом, при $\tau=0$ должно выполняться условие

$$\overline{I(0)} = -\frac{H}{2\pi} = \frac{1}{2} P. \quad (4.13)$$

Тогда $C = 1/2P$ и решение для $\overline{I(\tau)}$ записывается в виде

$$\overline{I(\tau)} = \frac{3}{4} P \left(\tau + \frac{2}{3} \right). \quad (4.14)$$

Аналогично соотношениям (4.7) и (4.10) находим

$$T^4 = T_0^4 \left(1 + \frac{3}{2} \tau \right) \quad (4.15)$$

и

$$I(0, \mu)|_{\mu < 0} = \frac{3}{4} P \left(\frac{2}{3} + |\mu| \right), \quad (4.16)$$

где величина T_0 определяется выражением (4.8).

Сравнение выражений (4.14) и (4.16) с точными (см. табл. 2) показывает, что решение уравнения переноса

излучения для проблемы Милна в приближении Эддингтона при $\tau_0 \rightarrow \infty$ совпадает с точным решением. В области малых оптических толщин погрешность соотношения (4.14) совпадает с погрешностью приближения Шварцшильда — Шустера. Что касается углового распределения выходящего излучения, то формула (4.16) менее точно определяет параметр углового распределения выходящего излучения Δ (4.11).

§ 3. Метод Чандрасекара

Метод Чандрасекара (его иногда называют *методом квадратурных формул*) является своеобразным обобщением методов Шварцшильда — Шустера и Эддингтона. Его сущность заключается в представлении интегрального члена уравнения переноса излучения в виде гауссовой суммы:

$$\int_{-1}^1 I(\tau, \mu) d\mu = \sum_{j=-n}^n a_j I(\tau, \mu_j) \equiv \sum_{j=-n}^n a_j I_j, \quad (4.17)$$

где μ_j являются корнями полиномов Лежандра и определяются из условия

$$P_{2n}(\mu) = 0. \quad (4.18)$$

Процедура (4.17) сводит уравнение переноса излучения к системе $2n$ обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\mu_i \frac{dI_i}{d\tau} = -I_i + \frac{1}{2} \sum_{j=-n}^n a_j I_j \quad (4.19)$$

с условием, что при $j > 0$

$$I_j(0) = 0. \quad (4.20)$$

Заметим, что $\mu_{-j} = -\mu_j$, и для определенности положим $a_j = a_{-j}$. Полагая

$$I_i(\tau) = A_i e^{-k\tau}, \quad (4.21)$$

находим:

$$(1 - k\mu_i) A_i = \frac{1}{2} \sum_{j=-n}^n a_j A_j. \quad (4.22)$$

Так как правая часть (4.22) не зависит от индекса, то, принимая

$$\frac{1}{2} \sum_{j=-n}^n a_j A_j = C,$$

приходим к выражению для A_i : $A_i = C/(1 - k\mu_i)$.

Следовательно, характеристическим уравнением для системы (4.19) является

$$\frac{1}{2} \sum_{j=-n}^n \frac{a_j}{1 - k\mu_j} = 1. \quad (4.23)$$

Так как

$$\frac{a_{-j}}{1 - k\mu_{-j}} + \frac{a_j}{1 - k\mu_j} = \frac{a_j}{1 + k\mu_j} + \frac{a_j}{1 - k\mu_j} = \frac{2a_j}{1 - k^2\mu_j^2},$$

то характеристическое уравнение можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{1 - k^2\mu_i^2} = 1. \quad (4.24)$$

Нетрудно показать, что выражение (4.24) представляет собой полином $2n$ -й степени. Однако в силу равенства единице полного веса ($\sum_i a_i = 1$) уравнение (4.24) имеет всего лишь $2(n-1)$ корней: $\pm k_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, \dots, n-1$). Таким образом, согласно (4.21), получаем решение в виде

$$I_i(\tau) = \sum_{\alpha=1}^{n-1} \left[\frac{C'_\alpha e^{-k_\alpha \tau}}{1 - k_\alpha \mu_i} + \frac{C'_\alpha e^{k_\alpha \tau}}{1 + k_\alpha \mu_i} \right]. \quad (4.25)$$

Кроме того, частным решением уравнения переноса излучения является функция

$$I_i(\tau) = b(\tau - \mu_i \div Q), \quad (4.26)$$

где b и Q — некоторые произвольные постоянные.

Это нетрудно проверить непосредственной подстановкой (4.26) в уравнение (4.19). Дополнительное частное решение в виде (4.26) вытекает из непосредственного решения уравнения переноса в приближении Эддингтона. Комбинация (4.25) и (4.26) и является решением системы уравнений

(4.19). Итак, необходимо найти $2(n-1)$ констант C'_α и $C'_{-\alpha}$ и две константы в (4.26). Однако вторая часть соотношения (4.25) не подходит для решения по физическому смыслу: функция $e^{-\tau}I(\tau, \mu)$ должна стремиться к нулю при $\tau \rightarrow \infty$. Поэтому положим $C_{-\alpha} \equiv 0$. Тогда остается определить $(n+1)$ произвольную постоянную, а решение системы (4.19) можно записать в виде

$$I_i(\tau) = b \left(Q - \mu_i + \tau + \sum_{\alpha=1}^{n-1} \frac{C_\alpha e^{-k_\alpha \tau}}{1 - k_\alpha \mu_i} \right). \quad (4.27)$$

Условие (4.20) определяет n произвольных констант C_α и Q ($\alpha = 1, 2, \dots, n-1$):

$$Q - \mu_i + \sum_{\alpha=1}^{n-1} \frac{C_\alpha}{1 - k_\alpha \mu_i} = 0. \quad (4.28)$$

А постоянную b можно найти из условия постоянства потока:

$$2\pi \int_{-1}^1 I(\tau, \mu) \mu d\mu = 2\pi \sum_{j=-n}^n a_j \mu_j I_j = H.$$

Подставляя сюда выражение (4.27), сумму последнего соотношения можно представить в виде

$$b(Q + \tau) \sum_{j=-n}^n a_j \mu_j + b \sum_{\alpha=1}^{n-1} C_\alpha e^{-k_\alpha \tau} \times \\ \times \sum_{j=-n}^n \frac{a_j \mu_j}{1 - k_\alpha \mu_j} - b \sum_{j=-n}^n a_j \mu_j^2.$$

Первая сумма равна нулю из очевидного представления:

$$\int_{-1}^1 f(\mu) d\mu = \sum_{j=-n}^n a_j f(\mu_j), \quad f(\mu) = \mu, \quad \sum_{j=-n}^n a_j \mu_j = 0. \quad (4.29)$$

Для второй суммы находим:

$$\sum_{j=-n}^n \frac{a_j \mu_j}{1 - k_\alpha \mu_j} = \frac{1}{k_\alpha} \sum_{j=-n}^n a_j \frac{k_\alpha \mu_j}{1 - k_\alpha \mu_j} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{k_\alpha} \sum_{j=-n}^n a_j \left[\frac{1}{1 - k_\alpha \mu_j} - 1 \right] = \\
&= \frac{1}{k_\alpha} \sum_{j=-n}^n \frac{a_j}{1 - k_\alpha \mu_j} - \frac{1}{k_\alpha} \sum_{j=-n}^n a_j = 0,
\end{aligned}$$

так как $\sum_I a_j = 2$ и по (4.23) $\sum_{j=-n}^n \frac{a_j}{1 - k\mu_j} = 2$.

Тогда, учитывая, что, аналогично (4.29),

$$\sum_{j=-n}^n a_j \mu_j^2 = \frac{2}{3},$$

находим постоянную b :

$$-2\pi \cdot \frac{2}{3} b = H \text{ или } b = \frac{3}{4} P. \quad (4.30)$$

Используя (4.27), для функции источника получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\tau) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I(\tau, \mu) d\mu = \frac{1}{2} \sum_{j=-n}^n a_j I_j(\tau) = \\
&= \frac{3}{4} P \left(Q + \tau + \sum_{\alpha=1}^{n-1} C_\alpha e^{-k_\alpha \tau} \right). \quad (4.31)
\end{aligned}$$

Нетрудно определить и угловое распределение выходящего из среды излучения:

$$\begin{aligned}
I(0, \mu)|_{\mu < 0} &= - \int_0^\infty \varepsilon(\tau') e^{\frac{\tau'}{\mu}} \frac{d\tau'}{\mu} = \\
&= \frac{3}{4} P \left(Q + |\mu| + \sum_{\alpha=1}^{n-1} \frac{C_\alpha}{1 + k_\alpha |\mu|} \right). \quad (4.32)
\end{aligned}$$

Рассмотрим в качестве примера первое приближение метода Чандрасекара ($n = 1$). В этом случае $a_1 = a_{-1} = 1$. Корнями $P_2(\mu)$ являются $\mu_1 = -\mu_{-1} = 1/\sqrt{3}$, ибо $3\mu^2 - 1 = 0$. Вместо системы (4.19) имеем систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{dI_1(\tau)}{d\tau} = -I_1(\tau) + \frac{1}{2} [I_1(\tau) + I_{-1}(\tau)];$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{dI_{-1}(\tau)}{d\tau} = -I_{-1}(\tau) + \frac{1}{2} [I_1(\tau) + I_{-1}(\tau)]$$

или

$$\frac{dI_1}{d\xi} = -I_1 + I_{-1} \quad \text{и} \quad -\frac{dI_{-1}}{d\xi} = -I_{-1} + I_1,$$

$$\text{где } d\xi = \frac{\sqrt{3}}{2} d\tau.$$

Получили систему уравнений, аналогичную системе (4.2). Поэтому выпишем окончательные результаты:

$$\varepsilon(\tau) = \frac{3}{4} P \left(\tau + \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \quad (4.33)$$

$$I(0, \mu)|_{\mu=0} = \frac{3}{4} P \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + |\mu| \right). \quad (4.34)$$

Сравнение соотношения (4.33) и параметра углового распределения Δ с точными выражениями приведено в табл. 2. Вероятно, среднее значение $\bar{\mu} = \cos \theta$, выбранное в методе Шварцшильда — Шустера, несколько занижено. Значение $\bar{\mu} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ для проблемы Милна более реально

отражает действительность. В общем случае величина $\bar{\mu}$ определяется оптическими характеристиками среды и условиями эксперимента. Следует отметить, что погрешность в определении параметра углового распределения Δ сильно падает с возрастанием номера приближения. По [20] во втором приближении метода Chandrasekara погрешность расчета величины Δ составляет 1,43%, в третьем приближении 0,62, а в четвертом всего 0,34%.

В связи с развитием вычислительной техники метод Chandrasekara с успехом применяется для решения важных задач теории переноса излучения. В частности, с помощью этого метода достаточно точно в настоящее время протабулированы функции Амбарцумяна, причем к довольно точным результатам приводит уже четвертое приближение изложенного метода.

§ 4. Метод сферических гармоник

Метод сферических гармоник (или метод разложения интенсивности излучения по полиномам Лежандра) был предложен еще Эддингтоном. Использование полиномов Лежандра вполне естественно, так как они представляют собой полный набор ортогональных функций в интервале $(-1, 1)$, т. е. в интервале изменения искомой величины. Метод широко применяется в практических расчетах, особенно при расчетах ядерных реакторов. Большое количество задач решено с помощью метода сферических гармоник Чандрасекаром. Дальнейшее математическое обоснование и развитие метод получил в работах Вика, Марка, Курганова, Маршака, Марчука и других видных специалистов ядерной физики.

Представим искомую интенсивность излучения в виде разложения по полиномам Лежандра [38, 39]:

$$I(\tau, \mu) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) A_n(\tau) P_n(\mu), \quad (4.35)$$

где $A_n(\tau)$ — некоторые весовые функции, представляющие собой моменты сферических гармоник углового распределения.

Напомним, что

$$P_0(\mu) = 1, \quad P_1(\mu) = \mu, \quad P_2(\mu) = \frac{1}{2}(3\mu^2 - 1), \quad (4.36)$$

$$P_3(\mu) = \frac{1}{2}\mu(5\mu^3 - 3), \dots,$$

$$\int_{-1}^1 P_i(\mu) P_j(\mu) d\mu = \frac{2}{2i+1} \delta_{ij}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ 1 & \text{при } i = j, \end{cases} \quad (4.37)$$

$$(2i+1)\mu P_i(\mu) = (i+1)P_{i+1}(\mu) + iP_{i-1}(\mu). \quad (4.38)$$

Для $n=0,1$ можно легко установить физический смысл $A_n(\tau)$. Так как по (4.37)

$$A_n(\tau) = \int_{(4\pi)} I(\tau, \mu) P_n(\mu) d\Omega = 2\pi \int_{-1}^1 I(\tau, \mu) P_n(\mu) d\mu, \quad (4.39)$$

то, согласно (4.36), находим:

$$A_0(\tau) = \int_{(4\pi)} I(\tau, \mu) P_0(\mu) d\Omega = \int_{(4\pi)} I(\tau, \mu) d\Omega = 4\pi \bar{I}(\tau),$$

$$A_1(\tau) = \int_{(4\pi)} I(\tau, \mu) P_1(\mu) d\Omega = \int_{(4\pi)} I(\tau, \mu) \mu d\mu = H. \quad (4.40)$$

Значит, нулевой момент сферических гармоник углового распределения $A_0(\tau)$ определяется усредненной интенсивностью излучения, а первый момент $A_1(\tau)$ в точности равен потоку излучения.

С учетом (4.40) уравнение переноса излучения (1.49) можно записать в виде

$$\mu \frac{dI(\tau, \mu)}{d\tau} = -I(\tau, \mu) + \frac{\lambda}{4\pi} A_0(\tau), \quad (4.41)$$

где $\lambda = \frac{\sigma}{\kappa + \sigma}$ — вероятность выживания кванта.

Граничным условием для (4.41) является

$$I(0, \mu)_{\mu > 0} = 0. \quad (4.42)$$

Подставим (4.35) в уравнение (4.41). Пользуясь свойством (4.38), явным представлением $P_0(\mu)$ и $P_1(\mu)$ по (4.36) и приравнявая коэффициенты при полиномах Лежандра одного и того же порядка, приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для определения весовых функций $A_n(\tau)$:

$$(1 - \lambda) A_0(\tau) + \frac{dA_1(\tau)}{d\tau} = 0,$$

$$\frac{dA_0(\tau)}{d\tau} + 3A_1(\tau) + 2 \cdot \frac{dA_2(\tau)}{d\tau} = 0,$$

$$2 \cdot \frac{dA_1(\tau)}{d\tau} + 5A_2(\tau) + 3 \cdot \frac{dA_3(\tau)}{d\tau} = 0, \quad (4.43)$$

.....

$$i \frac{dA_{i-1}(\tau)}{d\tau} + (i+1) \frac{dA_{i+1}(\tau)}{d\tau} + (2i+1)(1 - \lambda \delta_{0i}) A_i(\tau) = 0,$$

.....

Интересно сразу же отметить случай $\lambda = 1$ (чистое рассеяние). Первое уравнение системы (4.43) тогда переходит в $\frac{dA_1(\tau)}{d\tau} = 0$, т. е. $A_1(\tau) = \text{const}$. Это известный результат:

$A_1(\tau)$ по (4.40) есть поток излучения, а он постоянен для чисто рассеивающей среды.

Система уравнений (4.43) является бесконечной. На практике обычно ограничиваются некоторым n -м приближением. Для этого полагают условие

$$\frac{dA_{n+1}(\tau)}{d\tau} \equiv 0,$$

т. е.

$$\frac{dA_{n+1}(\tau)}{d\tau} = \int_{(4\pi)} \frac{dI(\tau, \mu)}{d\tau} P_{n+1}(\mu) d\Omega = 0. \quad (4.44)$$

При этом система (4.43) представляет собой систему $(n+1)$ уравнения для $(n+1)$ функции:

$$A_0(\tau), A_1(\tau), \dots, A_n(\tau).$$

Полагая

$$A_i(\tau) = g_i e^{-v\tau} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n), \quad (4.45)$$

приходим к алгебраической системе уравнений для неизвестных постоянных g_i :

$$-v[(i+1)g_{i+1} + ig_{i-1}] + (2i+1)(1-\lambda\delta_{0i})g_i = 0. \quad (4.46)$$

Условие разрешимости этой системы — равенство нулю Δ определителя — дает характеристическое уравнение вида

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -v & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -v & 3 & -2v & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -2v & 5 & -3v & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2n-1 & -nv \\ 0 & 0 & 0 & 9 & \dots & -nv & 2n+1 \end{vmatrix} = 0 \quad (4.47)$$

При $\lambda \neq 1$ уравнение (4.47) определяет $(n + 1)$ корней: $\nu_0, \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_\alpha, \dots, \nu_n$. Подставляя эти корни в систему (4.46), находим постоянные $g_i = g_i(\nu_\alpha)$ и общее решение для весовых функций $A_n(\tau)$:

$$A_n(\tau) = \sum_{\alpha} C_{\alpha} g_n(\nu_{\alpha}) e^{-\nu_{\alpha} \tau} \quad (\alpha = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (4.48)$$

В случае $\lambda = 1$ уравнение (4.47) имеет двойной нулевой корень. По общей теории линейных дифференциальных уравнений вклад этих корней в решение (4.48) для $A_0(\tau)$ равен $C_1 + C_2 \tau$, для $A_1(\tau)$ $C_2/3$, а для $A_n(\tau)$ ($n \geq 2$) он отсутствует (C_1 и C_2 — некоторые произвольные постоянные).

Интересно заметить, что при $n \rightarrow \infty$ для определения корней характеристического уравнения (4.47) можно пользоваться соотношением

$$\nu = \frac{1}{2n} \operatorname{Im} \left| \frac{1+n}{1-n} \right|. \quad (4.49)$$

Для определения произвольных постоянных C_{α} ($\alpha = 0, 1, 2, \dots$), входящих в $A_n(\tau)$ и, следовательно, в решение уравнения переноса излучения (4.35), необходимо воспользоваться, казалось бы, граничным условием (4.42). Однако непосредственное его использование приводит к неопределенности нахождения постоянных C_{α} :

$$P_0(\mu) \sum_{\alpha} C_{\alpha} g_0(\nu_{\alpha}) + 3P_1(\mu) \sum_{\alpha} C_{\alpha} g_1(\nu_{\alpha}) + \dots + \\ + (2n + 1)P_n(\mu) \sum_{\alpha} C_{\alpha} g_n(\nu_{\alpha}) = 0, \quad (4.50)$$

так как μ — непрерывная величина и получается фактически бесконечное число условий. Следовательно, необходимо каким-нибудь образом задать определенный набор $(n + 1)$ значений μ_j ($j = 0, 1, 2, \dots, n$). В настоящее время или непосредственно задают значения μ_j по некоторому закону, или определяют такие функции $\varphi_j(\mu)$, которые были бы ортогональны величине $I(0, \mu)$ на интервале $(0 \leq \mu \leq 1)$:

$$\int_0^1 I(0, \mu) \varphi_j(\mu) d\mu = 0 \quad (j = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (4.51)$$

В первом случае набор значений μ_j можно найти из условия

$$P_{n+1}(\mu_j) = 0.$$

Использование этих значений для (4.50) приводит к так называемым *граничным условиям Марка*.

Полным набором ортогональных функций в интервале $(0, 1)$ являются полиномы Лежандра $P_{2i-1}(\mu)$. Так как для $P_{2i-1}(\mu)$ наивысшая степень μ равна $2i-1$, то в качестве $\varphi_i(\mu)$ можно выбрать μ^{2i-1} :

$$\int_0^1 I(0, \mu) \mu^{2i-1} d\mu = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n+1). \quad (4.52)$$

Условия (4.52) носят название *граничных условий Маршака*. Непосредственные расчеты показывают, что в приближениях низкого порядка (до P_5 -го приближения) граничные условия Маршака приводят к более точным результатам. Это связано, вероятно, с тем, что, например, при $n=1$ условие (4.52) имеет простой физический смысл — задание потока излучения на граничной поверхности $\tau=0$.

Следует отметить, что на практике обычно пользуются нечетными приближениями метода сферических гармоник. Это можно объяснить следующим образом. При $\lambda > 1$ (этот случай реализуется в ядерной физике и означает факт рождения частиц при взаимодействии корпускулярного излучения с веществом) решение уравнения переноса излучения методом сферических гармоник носит осциллирующий характер. Однако, начиная с $\lambda \geq 2,25$, осцилляции решений в четных приближениях исчезают, что говорит о некотором несоответствии решений в этих приближениях действительным процессам распространения излучения в среде.

Для примера рассмотрим P_1 -е приближение метода сферических гармоник. Интенсивность излучения в P_1 -м приближении равна

$$\begin{aligned} I(\tau, \mu) &= \frac{1}{4\pi} \left[A_0(\tau) P_0(\mu) + 3A_1(\tau) P_1(\mu) \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[A_0(\tau) + 3\mu A_1(\tau) \right]. \end{aligned}$$

Для определения весовых функций $A_0(\tau)$ и $A_1(\tau)$ (а фактически усредненной интенсивности и потока излучения) имеем (по 4.43) систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dA_1(\tau)}{d\tau} + (1 - \lambda)A_0(\tau) = 0, \quad \frac{dA_0(\tau)}{d\tau} + 3A_1(\tau) = 0.$$

Полученная система уравнений эквивалентна обычному уравнению диффузии:

$$\frac{d^2 A_0(\tau)}{d\tau^2} = 3(1 - \lambda) A_0(\tau). \quad (4.53)$$

Марчуком показано [39], что P_n -е приближение метода сферических гармоник является своеобразным обобщением известного диффузионного приближения.

Обозначая

$$\gamma = \sqrt{3(1 - \lambda)}, \quad (4.54)$$

нетрудно найти:

$$A_0(\tau) = C_0 e^{\gamma\tau} + C_1 e^{-\gamma\tau}, \quad A_1(\tau) = \frac{1}{3} \gamma (C_1 e^{-\gamma\tau} - C_0 e^{\gamma\tau}).$$

Таким образом,

$$I(\tau, \mu) = \frac{1}{4\pi} \{C_0 e^{\gamma\tau} + C_1 e^{-\gamma\tau} + \gamma\mu (C_1 e^{-\gamma\tau} - C_0 e^{\gamma\tau})\}. \quad (4.55)$$

Применяя условие Маршака для P_1 -го приближения:

$$\int_0^1 I(0, \mu) \mu d\mu = 0,$$

находим связь между произвольными постоянными C_0 и C_1 :

$$C_1 = -\frac{3 - 2\gamma}{3 + 2\gamma} C_0.$$

Тогда решение (4.55) имеет вид

$$I(\tau, \mu) = \frac{C_0}{4\pi} \left[(1 - \gamma\mu) e^{\gamma\tau} - (1 + \gamma\mu) \frac{3 - 2\gamma}{3 + 2\gamma} e^{-\gamma\tau} \right]. \quad (4.56)$$

По условию Марка $\left(\mu_j = \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ получаем:

$$I(\tau, \mu) = \frac{C_0}{4\pi} \left[(1 - \gamma\mu) e^{\gamma\tau} - \frac{\sqrt{3} - \gamma}{\sqrt{3} + \gamma} (1 + \gamma\mu) e^{-\gamma\tau} \right]. \quad (4.57)$$

Входящая в выражения (4.56) и (4.57) постоянная C_0 определяется из условия задания интенсивности излучения I_0 на границе $\tau = \tau_0$. Для краткости величину C_0 можно представить так:

$$C_0 = 4\pi I_0 [\dots]_{\tau=\tau_0, \mu<0}^{-1}. \quad (4.58)$$

Обратимся к решению проблемы Милна в первом приближении метода сферических гармоник. Как ранее указывалось, в случае $\lambda=1$ весовые функции нулевого и первого порядков имеют вид

$$A_0 = C_1 + C_2\tau, \quad A_1 = H = -\pi P = -\frac{C_2}{3}.$$

Тогда решением проблемы Милна является

$$I(\tau, \mu) = \frac{1}{4\pi} [C_1 + 3\pi P(\tau - \mu)]. \quad (4.59)$$

Постоянную C_1 можно определить, используя граничные условия Маршака или Марка. В первом случае имеем:

$$\int_0^1 I(0, \mu) \mu d\mu = 0 \quad \text{или} \quad \frac{1}{2} C_1 - \pi P = 0.$$

Отсюда

$$I(\tau, \mu) = \frac{3}{4} P \left(\tau - \mu + \frac{2}{3} \right). \quad (4.59a)$$

При использовании граничных условий Марка получаем:

$$P_2(\mu) = \frac{1}{2} (3\mu^2 - 1) = 0, \quad \mu = \pm \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$I\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0, \quad (4.59b)$$

$$I(\tau, \mu) = \frac{3}{4} P\left(\tau - \mu + \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Функция источников для обоих случаев имеет вид

$$e(\tau) = \begin{cases} \frac{3}{4} P\left(\tau + \frac{2}{3}\right) & \text{(при граничных условиях Маршака);} \\ \frac{3}{4} P\left(\tau + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) & \text{(при граничных условиях Марка).} \end{cases}$$

Сопоставление решения проблемы Милна в первом приближении метода сферических гармоник с точным решением проведено в табл. 2. Как видно из таблицы, для задачи Милна метод сферических гармоник приводит к достаточно хорошим результатам.

§ 3*. Характеристики свечения светорассеивающих сред с равномерно распределенными источниками

Решение задачи о распространении излучения в средах с равномерно распределенными источниками имеет большое значение для исследования теплового свечения светорассеивающих объектов (пламени, облаков и т. д.), а также при расчетах параметров энергетических установок, так как роль теплоносителей в них обычно выполняет система «газ—твердые частицы». Будем полагать условие локального термодинамического равновесия, т. е. $e_0(\tau) = \kappa I_{\nu p}$, а граничные условия для общности:

$$I(0, \mu)|_{\mu>0} = I_{01}, \quad I(z_0, \mu)|_{\mu<0} = I_{02}. \quad (4.60)$$

Для использования метода Шварцшильда—Шустера введем полусферическую долю рассеяния излучения назад в следующем виде:

$$\beta I_1(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 d\mu \int_0^1 p(\mu, \mu') I(z, \mu') d\mu' \quad (4.61)$$

или

$$\beta I_2(z) = \frac{1}{2} \int_0^1 d\mu \int_{-1}^0 p(\mu, \mu') I(z, \mu') d\mu',$$

где $I_1(z)$ и $I_2(z)$ — усредненные по полусферам интенсивности излучения, определяемые соотношениями (4.1).

Тогда решение уравнения переноса излучения в приближении Шварцшильда—Шустера имеет вид

$$I_1(\tau)/I_{\nu p} = 1 - A_1 e^{-k\tau} - A_2 R e^{-k(\tau_0 - \tau)}, \quad (4.62)$$

$$I_2(\tau)/I_{\nu p} = 1 - A_1 R e^{-k\tau} - A_2 e^{-k(\tau_0 - \tau)}.$$

Здесь

$$aA_1 = 1 - E_1 - R(1 - E_2) e^{-k\tau_0},$$

$$aA_2 = 1 - E_2 - R(1 - E_1) e^{-k\tau_0}, \quad a = 1 - R^2 e^{-2k\tau_0}, \quad (4.63)$$

$$R = \frac{\delta - 1}{\delta + 1}, \quad \delta = \left(1 + \frac{2\beta\lambda}{1 - \lambda} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad k = 2\delta(1 - \lambda),$$

$$E_i = \frac{I_{0i}}{I_{\nu p}} \quad (i = 1, 2), \quad \lambda = \frac{\sigma}{\kappa + \sigma}, \quad \tau = (\kappa + \sigma)z. \quad (4.64)$$

Следует отметить, что если температура частиц $T_{\text{част}}$ отличается от температуры газов $T_{\text{газ}}$, то под величиной $I_{\nu p}$ в выражении (4.62) подразумевается величина

$$I_{\nu p} = \frac{1}{\kappa_{\text{газ}} + \kappa_{\text{част}}} [\kappa_{\text{газ}} I_{\nu p}(T_{\text{газ}}) + \kappa_{\text{част}} I_{\nu p}(T_{\text{част}})]. \quad (4.65)$$

Полагая $E_1 = E_2 = 0$, находим известное соотношение для степени черноты светорассеивающего слоя [40]:

$$\varepsilon_0 = \frac{I_1(\tau_0)}{I_{\nu p}} = \frac{I_2(0)}{I_{\nu p}} = (1 - R) \frac{1 - e^{-k\tau_0}}{1 + R e^{-k\tau_0}}. \quad (4.66)$$

Из (4.62) нетрудно получить коэффициенты отражения и пропускания, которые, как и степень черноты (4.66), совпадают по внешнему виду с выражением (2.72) (§ 5, гл. 2). Из (4.66) видно, что R есть коэффициент диффузного отражения слоя бесконечно большой оптической толщины.

Влияние граничных поверхностей на степень черноты слоя нетрудно установить, полагая в (4.62) $E_1 = E_2 = E_0$:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{R + e^{-k\tau_0}}{1 + R e^{-k\tau_0}} E_0. \quad (4.67)$$

С помощью выражений (4.62) — (4.64) можно изучать как характеристики выходящего излучения, так и их

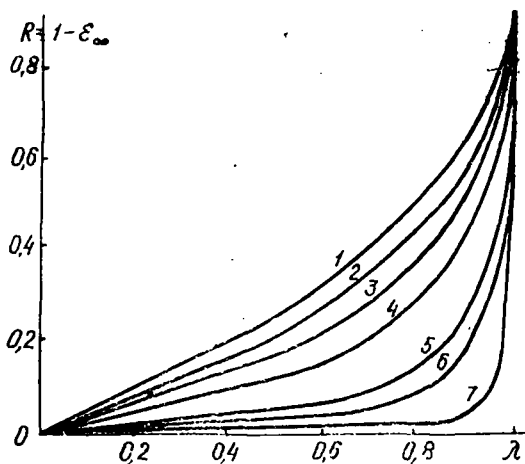


Рис. 10. Влияние параметра β на отражательную способность полубесконечного слоя:

1— $\beta=1,0$; 2—0,7; 3—0,5; 4—0,3. 5—0,1; 6—0,05; 7—0,01

распределение внутри исследуемой среды в зависимости от оптических параметров среды и условий эксперимента. Анализ показывает, что интенсивность выходящего излучения сильно зависит от вероятности выживания кванта λ и оптической толщины τ_0 . С увеличением оптической толщины τ_0 ($\tau_0 > 1$) возрастает роль параметра β — доли рассеянного назад излучения. Его влияние на отражательную способность полубесконечного слоя показано на рис. 10. Нетрудно показать, что параметр β связан со степенью вытянутости часто используемой на практике индикатрисы рассеяния $p(\mu, \mu') = a + 2(1-a) \times \times \delta(\mu - \mu')$ соотношением

$$\beta = 0,5a. \quad (4.68)$$

Характер распределения излучения вдоль слоя в значительной мере определяется величинами τ_0 и λ . Увеличение оптической толщины и вероятности выживания кванта приводит к появлению максимума излучения внутри слоя. Для сильно рассеивающих сред величина максимума одностороннего потока может значительно превышать величину выходящего из слоя излучения. Положение максимума одностороннего потока излуче-

ния нетрудно установить, если известны характеристики среды (τ_0 и R) и условия на граничных поверхностях (вернее, отношение $\frac{A_1}{A_2}$):

$$\tau_{\max} = \frac{\tau_0}{2} \left(1 + k\tau_0 \ln \frac{A_1}{A_2 R} \right), \quad (4.69)$$

а для плотности излучения в среде —

$$\tau_{\max} = \frac{\tau_0}{2} \left(1 + k\tau_0 \ln \frac{A_1}{A_2} \right). \quad (4.70)$$

При $E_1 = E_2$ максимум плотности излучения всегда приходится на середину слоя. Нетрудно видеть, что максимум плотности излучения в среде будет появляться всегда, когда

$$-1 < k\tau_0 \ln \frac{A_1}{A_2} < 1. \quad (4.71)$$

Так как функция источников в нашем случае равна

$$\varepsilon(\tau) = \frac{\lambda}{2} [I_1(\tau) + I_2(\tau)] + (1 - \lambda) I_{\nu p},$$

то, согласно (3.7), решение (4.62) можно использовать для определения углового распределения интенсивности излучения. Для угловой зависимости степени черноты находим:

$$\begin{aligned} \varepsilon = \varepsilon(0, \mu) = 1 - \beta\lambda(1 - R) \times \\ \times \left\{ \frac{1 - \exp \left[-\delta^2(1 - \lambda) \frac{\tau_0}{\mu} - k\tau_0 \right]}{\delta^2(1 - \lambda) + k\mu} A_1 + \right. \\ \left. + \frac{\exp(-k\tau_0) - \exp \left[-\delta^2(1 - \lambda) \frac{\tau_0}{\mu} \right]}{\delta^2(1 - \lambda) - k\mu} A_2 \right\}. \quad (4.72) \end{aligned}$$

Для полубесконечного слоя выражение значительно упрощается:

$$\varepsilon_{\infty} = \varepsilon_{\infty}(\mu) = \frac{1 + 2\mu}{\delta + 2\mu}. \quad (4.73)$$

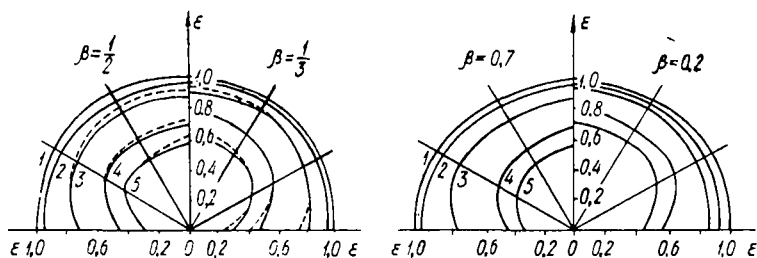


Рис. 11. Индикатриса свечения слоя при различных значениях λ и β :
 — расчет по формуле (4.72); — — — данные [63, 87]; 1— $\lambda=0$; 2—0.1; 3—0.4;
 4—0.8; 5—0.9

Рис. 11 показывает довольно хорошее совпадение выражения (4.73) с точным решением уравнения переноса излучения для полубесконечной среды (3.45). На этом же рисунке показано влияние параметра β (степени вытянутости индикатрисы рассеяния) на угловое распределение интенсивности свечения светорассеивающего полубесконечного слоя.

Справедливость полученного решения (4.62)—(4.64) для малых оптических толщин подтверждается анализом решения в приближении однократного рассеяния.

Расчет поставленной задачи методом сферических гармоник в P_1 -м и P_3 -м приближениях дает менее удовлетворительные результаты, чем данные, рассчитываемые по формуле (4.72). Правда, погрешность метода уменьшается с ростом вероятности выживания кванта (для $\tau_0 \rightarrow \infty$ P_3 -е приближение дает погрешность порядка 2%).

Глава 5

ИТЕРАЦИОННЫЕ, ВАРИАЦИОННЫЕ И ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

§ 1. Итерационные методы

Основная идея итерационных методов заключается в подборе некоторых пробных функций и их подстановке в интегральные операторы Милна (или в интегральный член уравнения переноса излучения). Полученное при этом решение (первая итерация) подставляется опять в интегральный оператор и т. д. При достаточно большом количестве шагов итераций решение уравнения переноса излучения приближается к точному решению (теорема Хопфа). К сожалению, аналитически получить третью и более высокого порядка итерацию чрезвычайно трудно. Но тем не менее уже первая итерация при удачном выборе пробной функции может привести к удовлетворительному результату. Многообразие итерационных методов объясняется различным выбором пробных функций и количеством взятых итераций. Рассмотрим основные из них.

Метод Унзольда—Майе. В качестве пробной функции источников выберем решение проблемы Милна ($\lambda=1$, $\tau_0 \rightarrow \infty$) в приближении Эддингтона (4.14):

$$\epsilon_1(\tau) = \frac{3}{4} P \left(\tau + \frac{2}{3} \right), \quad P = -\frac{H}{\pi}.$$

Математически идея итерационных методов сводится к отысканию функции $\epsilon_n(\tau)$, если известна функция $\epsilon_{n-1}(\tau)$:

$$\epsilon_n(\tau) = \Lambda \{ \epsilon_{n-1}(\tau') \}. \quad (5.1)$$

Подставляя сюда $\epsilon_1(\tau)$ и пользуясь свойствами первого интегрального оператора Милна (стр. 61), находим

$$\begin{aligned} \epsilon_2(\tau) = & \frac{3}{4} P \Lambda \{ \tau' \} + \frac{1}{2} P \Lambda \{ 1 \} = \frac{3}{4} P \left\{ \tau + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} E_3(\tau) + \frac{2}{3} \left[1 - \frac{1}{2} E_2(\tau) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Точность приближения Унзо́льда — Майе (5.2) в зависимости от оптической толщины указана в табл. 3.

Метод Плачека. Пробная функция выбирается в виде

$$\varepsilon_1(\tau) = \frac{3}{4} P (\tau + a - L e^{-c\tau}), \quad (5.3)$$

где значение a взято Плачеком довольно точное, получаемое из вариационных методов (см. § 2 данной главы): $a = 0,71044609$. Постоянные L и c можно определить из условий, что $\varepsilon_1(\tau)$ и $\varepsilon_2(\tau)$ совпадают с точным решением на граничной поверхности $\tau=0$:

$$\varepsilon_1(0) = \frac{\sqrt{3}}{4} P,$$

$$\varepsilon_2(0) = \Lambda_0 \{ \varepsilon_1(\tau') \} = \frac{\sqrt{3}}{4} P,$$

где $\Lambda_0 = \Lambda |_{\tau=0}$.

Отсюда находим: $L = 0,133096$, $c = 3,68962$. Тогда пробная функция источника (а фактически первое приближение Плачека) имеет вид

$$\varepsilon_1(\tau) = \frac{3}{4} P (\tau + 0,710446 - 0,133096 e^{-3,68962\tau}). \quad (5.4)$$

Второе приближение Плачека состоит в переопределении постоянных L и c при действии на функцию (5.3) не оператора Λ_0 , а Λ : $L = 0,113536$, $c = 2,62032$. Тогда

$$\varepsilon_2(\tau) = \frac{3}{4} P [\tau + 0,710446 - 0,355223 E_2(\tau) + 0,5 E_3(\tau)]. \quad (5.5)$$

Второе приближение Плачека (5.5) (лучше все-таки назвать второй метод Плачека) по точности значительно превосходит, как показывает табл. 3, приближение Унзо́льда—Майе.

Следует отметить, что угловое распределение выходящего излучения (или, как принято в астрофизических исследованиях, закон потемнения к краю) при использовании метода Плачека также достаточно близко к

Таблица 3

Погрешность итерационных методов при определении функции источников, %

τ	0	0,05	0,1	0,2	0,3	0,5	1,0	1,5	2	∞
Метод										
Уизольда—Майе	1,04	1,13	0,83	0,20	-0,31	-1,00	-0,56	—	-1,43	0
I приближение Плачека	0	-1,7	-1,3	-0,4	0,30	0,80	0,50	0,20	0,10	0
II приближение Плачека	0	-0,06	-0,14	-0,17	-0,12	0	0,13	0,10	0,06	0
I приближение Уизольда	-1,1	-2,6	-2,3	-1,4	-0,8	-0,5	-0,7	-0,8	—	—
II приближение Уизольда	-1,1	-1,1	-1,1	-1,0	-0,8	-0,7	-0,7	-0,7	—	—

точному решению уравнения переноса излучения (табл. 4):

Таблица 4

Точность расчета углового распределения
выходящего излучения по методу Плачека, %

Метод \ μ	0	0,1	0,2	0,3	0,5	0,6	0,8	1,0
I приближение Плачека	0	-0,96	-0,42	-0,11	0,14	0,18	0,20	0,19
II приближение Плачека	0	-0,09	-0,08	-0,05	0	0,02	0,03	0,04

$$I_1(0, \mu) = \frac{3}{4} P \left(\mu + 0,710446 - \frac{0,133096}{1 + 3,68962\mu} \right),$$

$$I_2(0, \mu) = P \left[0,45392 + 0,375\mu + \right. \\ \left. + (0,2664 + 0,375\mu) \mu \ln \left(1 + \frac{1}{\mu} \right) \right].$$

Метод Унзольда. Для определения постоянных a , L и c , входящих в пробную функцию источника (5.3), Унзольд воспользовался свойством оператора Λ перевода функции источника в самое себя. Необходимая система трех уравнений определялась для трех значений оптической глубины τ . Для $\tau_1=0$, $\tau_2=0,3$ и $\tau_3=1,0$ имеем: $a=0,688$, $L=0,117$ и $c=4,24$.

Таким образом, функцию источников (5.3) можно записать в виде

$$\epsilon_1(\tau) = \frac{3}{4} P (\tau + 0,688 - 0,117e^{-4,24\tau}),$$

и тогда

$$\epsilon_2(\tau) = \frac{3}{4} P [\tau + 0,688 - 0,344E_2(\tau) + 0,5E_3(\tau)]. \quad (5.6)$$

Как видно из табл. 3, первое и второе приближения Унзольда имеют вполне удовлетворительную точность.

Метод последовательных приближений. В отличие от предыдущих метод последовательных приближений имеет вполне определенный физический смысл. Величину искомой интенсивности излучения можно представить в виде ряда по степеням вероятности выживания кванта λ :

$$I(\tau, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n I^{(n)}(\tau, \mu). \quad (5.7)$$

Такое представление означает, что мы вводим в рассмотрение величины n -кратно рассеянного излучения: $I^{(0)}(\tau, \mu)$ — интенсивность излучения, распространяющегося в среде без учета процессов рассеяния; $I^{(1)}(\tau, \mu)$ — интенсивность однажды рассеянного излучения; $I^{(2)}(\tau, \mu)$ — интенсивность излучения, испытавшего два акта рассеяния, и т. д. С математической точки зрения представление интенсивности излучения в виде (5.7) требует дополнительных исследований о скорости его сходимости. Сходимость существенно зависит как от величины вероятности выживания кванта, так и от оптической толщины рассматриваемого слоя. В атмосферной оптике, например, хорошая сходимость последовательных приближений обеспечивается малыми значениями оптической толщины чистой атмосферы, изменяющейся в пределах от 0,1 до 0,7 [41].

Подставляя ряд (5.7) в уравнение переноса излучения

$$\begin{aligned} & \mu \frac{dI(\tau, \mu)}{d\tau} + I(\tau, \mu) = \\ & = \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^1 \rho(\mu, \mu') I(\tau, \mu') d\mu' + (1 - \lambda) \varepsilon_1(\tau) \end{aligned} \quad (5.8)$$

(здесь $\varepsilon_1(\tau)$ — функция источников, определяемая излучательной способностью элементарного объема среды вследствие наличия внутренних источников) и приравнявая члены с одинаковыми степенями λ , находим систему дифференциальных уравнений для последовательного определения $I^{(n)}(\tau, \mu)$:

$$\begin{aligned} & \mu \frac{dI^{(0)}(\tau, \mu)}{d\tau} + I^{(0)}(\tau, \mu) = \varepsilon_1(\tau), \\ & \mu \frac{dI^{(1)}(\tau, \mu)}{d\tau} + I^{(1)}(\tau, \mu) = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \rho(\mu, \mu') I^{(0)}(\tau, \mu') d\mu' - e_1(\tau),$$

$$\mu \frac{dI^{(2)}(\tau, \mu)}{d\tau} + I^{(2)}(\tau, \mu) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \rho(\mu, \mu') I^{(1)}(\tau, \mu') d\mu',$$

(5.9)

.....

$$\mu \frac{dI^{(n)}(\tau, \mu)}{d\tau} + I^{(n)}(\tau, \mu) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \rho(\mu, \mu') I^{(n-1)}(\tau, \mu') d\mu',$$

.....

Граничными условиями для системы (5.9) являются:

$$I^{(0)}(0, \mu)|_{\mu>0} = I_0, \quad I^{(i)}(0, \mu)|_{\mu>0} = 0, \quad I^{(n)}(\tau_0, \mu)|_{\mu<0} = 0,$$

(5.10)

$$n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$i = 1, 2, 3, \dots,$$

где I_0 — интенсивность излучения, падающего извне на границу $x=0$ ($\tau=0$).

В случае $e_1(\tau) = 0$ соотношения для интенсивности однократно рассеянного излучения были получены Фесенковым еще в 1916 г.:

$$\rho^{(1)}(\mu, \mu_0) = \frac{I^{(1)}(0, \mu)|_{\mu<0}}{I_0 \mu_0} = \frac{\lambda \rho(\mu, \mu_0)}{4(\mu_0 + |\mu|)} \left(1 - e^{-\frac{|\mu| + \mu_0}{|\mu| \mu_0} \tau_0}\right),$$

(5.11)

$$\sigma^{(1)}(\mu, \mu_0) = \frac{I^{(1)}(\tau_0, \mu)|_{\mu>0}}{I_0 \mu_0} = \frac{\lambda \rho(\mu, \mu_0)}{4(\mu_0 - \mu)} \left(e^{-\frac{\tau_0}{\mu_0}} - e^{-\frac{\tau_0}{\mu}}\right).$$

(5.12)

Подробные исследования Кузнецова и Овчинского [41] об использовании метода последовательных приближений для решения задач атмосферной оптики показали, что для видимой области спектра ($\tau=0,2 \div 0,4$,

$\lambda \cong 1$) учет однократного рассеяния обеспечивает точность в 30%, а двукратного — в 15%. Поэтому для этих специфических условий учет двукратного рассеяния вполне достаточен при интерпретации экспериментальных данных. Аналитические выражения характеристик светового поля во втором приближении с учетом состояния поляризации получены и проанализированы в [42].

§ 2. Вариационные методы

Для решения задач теории переноса одновременно с итерационными широко использовались вариационные методы. Очень часто они применялись одновременно, как это видно на примере метода Плачека. Эти методы замечательны тем, что с их помощью можно получить какую угодно точность. Основы применения вариационных методов к решению задач теории переноса излучения изложены в работах Дэвисона, Маршака, Курганова, Владимирова [43] и других. В одних работах (Дэвисон, Курганов) используется второй интегральный оператор Милна с условием постоянства потока, в других (Маршак, Лекейн) — первый интегральный оператор Милна, в третьих (Владимиров) — непосредственно интегральный оператор в правой части уравнения переноса излучения. Но сущность этих методов одна. Из некоторых физических или математических предпосылок строится некоторая функция $F(x)$, близкая к искомой $f(x)$ и содержащая некоторые произвольные постоянные A_0, A_1, \dots, A_n . Далее по определенным правилам строится некоторый функционал:

$$\sigma = \sigma(A_0, A_1, \dots, A_n) = \int_0^{x_0} \Psi[F(x), f(x)] dx \quad (5.13)$$

(Ψ — обычно квадратичная функция относительно $f(x)$ и $F(x)$) и из условия его минимума определяются произвольные постоянные A_n :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial A_0} = 0, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial A_1} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial A_n} = 0. \quad (5.14)$$

Погрешность вариационных методов уменьшается при удачном выборе функций $F(x)$ и увеличении произвольных постоянных A_n .

При использовании первого интегрального оператора Милна пробную функцию можно выбрать в виде

$$\begin{aligned}
 F(\tau) &= \frac{3}{4} P\Phi\{\tau' + q(\tau')\} = \frac{3}{4} P\Phi\{A_0 u_0(\tau') + \\
 &+ A_1 u_1(\tau') + \dots + A_n u_n(\tau')\} = \frac{3}{4} P\Phi\{A_0 + \tau' + \\
 &+ A_2 u_2(\tau') + \dots + A_n u_n(\tau')\}. \quad (5.15)
 \end{aligned}$$

Такой выбор пробной функции ($A_1 \equiv 1$, $u_1(\tau) = \tau$) обеспечивает постоянство потока световой энергии для проблемы Милна. Функционал в этом случае для проблемы Милна можно записать так:

$$\sigma(A_0, A_1, \dots, A_n) = \int_0^{\infty} \left[\frac{F(\tau)}{P} - 1 \right]^2 d\tau. \quad (5.16)$$

Для простоты положим сначала, что функция источников имеет вид

$$\varepsilon(\tau) = \frac{3}{4} P(A_0 + A_1 \tau).$$

Тогда, используя свойства оператора Φ (§ 1, гл. 3), находим:

$$\begin{aligned}
 F(\tau) &= \frac{3}{4} P\Phi\{A_0 + A_1 \tau'\} = \frac{3}{4} P \left\{ 2A_0 E_3(\tau) + \right. \\
 &\left. + A_1 \left[\frac{4}{3} - 2E_4(\tau) \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

При $\tau \rightarrow \infty$ $F(\tau) \rightarrow P$. Отсюда из $F = \frac{3}{4} P \cdot \frac{4}{3} A_1 = P$ находим, что $A_1 = 1$. Поэтому

$$\frac{F(\tau)}{P} - 1 = \frac{3}{2} [A_0 E_3(\tau) - E_4(\tau)].$$

Для определения постоянной A_0 имеем:

$$\frac{d\sigma}{dA_0} = \frac{9}{4} \cdot \frac{d}{dA_0} \int_0^{\infty} [E_3^2(\tau) A_0^2 - 2E_3(\tau) E_4(\tau) A_0 + E_4^2(\tau)] d\tau = \frac{9}{2} (A_0 J_{33} - J_{34}) = 0,$$

где величины

$$J_{mn} = \int_0^{\infty} E_n(\tau) E_m(\tau) d\tau$$

приведены в монографии Курганова [31]. Тогда

$$A_0 = \frac{J_{34}}{J_{33}} = \frac{5}{18(2\ln 2 - 1)} = 0,71908 \dots$$

Таким образом, функцию источников получаем в виде

$$\varepsilon(\tau) = \frac{3}{4} P[\tau + q(\tau)] = \frac{3}{4} P(\tau + 0,71908 \dots). \quad (5.17)$$

Заметим, что величина A_0 отличается от точного значения $q(\tau)$ при $\tau \rightarrow \infty$ всего лишь на 1,2%, но при $\tau \rightarrow 0$ она дает погрешность порядка 25%. При использовании в качестве $u_n(\tau)$ в выражении (5.15) интегрально-показательных функций $E_n(\tau)$ погрешность метода резко уменьшается и уже при $n \geq 3$ она составляет доли процента. Следует отметить, что при получении решения типа (5.17) нетрудно найти один из основных законов астрофизики — закон потемнения к краю, т. е. угловое распределение из среды излучения:

$$I(0, \mu) = \int_0^{\infty} \varepsilon(\tau') e^{-\frac{\tau'}{\mu}} \frac{d\tau'}{\mu} = \frac{3}{4} P(A_0 + A_1 \xi_1 + A_2 \xi_2 + \dots + A_n \xi_n), \quad (5.18)$$

где $\xi_n = \xi_n(\mu) = \int_0^{\infty} E_n(\tau) e^{-\frac{\tau}{\mu}} \frac{d\tau}{\mu}$. Отметим, что при $n > 5$ закон

потемнения к краю получается уже практически точным (табл. 5).

Закон потемнения к краю

μ	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$I(0, \mu) / \frac{3}{4}P$	0,577	0,720	0,837	0,948	1,056	1,162	1,267	1,371	1,474	1,577	1,679

В вариационном методе Маршака и Ле-Кейна использован первый интегральный оператор Милна. Подставляя в уравнение

$$\varepsilon(\tau) = \Lambda \{ \varepsilon(\tau') \}$$

функцию

$$\varepsilon(\tau) = \frac{3}{4} P [\tau + q(\tau)],$$

находим

$$q(\tau) = \Lambda \{ q(\tau') \} + \frac{1}{2} E_3(\tau).$$

Из чисто математических соображений, пользуясь свойством интегральных операторов Милна (§ 1, гл. 3):

$$\frac{d}{d\tau} \Phi \{ \varepsilon \} = 4 [\Lambda \{ \varepsilon \} - \varepsilon],$$

можно построить следующий функционал:

$$\sigma = \frac{\int_0^{\infty} q(\tau) [q(\tau) - \Lambda \{ q \}] d\tau}{\left[\frac{1}{2} \int_0^{\infty} q(\tau) E_3(\tau) d\tau \right]^2}. \quad (5.19)$$

При использовании функции $q(\tau)$ в виде

$$q(\tau) = A_0 + \sum_{m=2}^n A_m E_m(\tau)$$

Ле-Кейном для $n = 3$ получено выражение

$$q(\tau) = 0,710446 - 0,243608 E_2(\tau) + 0,224409 E_3(\tau),$$

что дает погрешность при $\tau \rightarrow 0$ всего 0,29 % и почти точное значение при $\tau \rightarrow \infty$.

Кургановым был предложен более простой функционал, нежели (5.19):

$$\sigma = \int_0^{\infty} q(\tau) [q(\tau) - \Lambda\{q(\tau')\} - E_3(\tau)] d\tau. \quad (5.20)$$

Более общий функционал типа (5.20) использовался в работах Владимирова [43]. Следует отметить, что использование функционала (5.20) гораздо удобнее, хотя и несколько ухудшается погрешность расчетов. У Курганова погрешность определения функции $q(\tau)$ при $\tau \rightarrow 0$ составила 0,42%.

§ 3. Обобщенный вариационный принцип

В предыдущем параграфе построение функционалов носило довольно частный характер. Однако, используя основные этапы подобных операций, можно построить общую схему отыскания функционалов для решения проблемы Милна. Каждый вариационный принцип предполагает наличие некоторой «остаточной» разности. Для первого и второго интегральных операторов (или интегральных уравнений) Милна эту разность выберем таким образом:

$$\rho(\tau) = \frac{\Lambda\{\varepsilon\} - \varepsilon}{\frac{3}{4}P} = \Lambda\{q\} - q + \frac{1}{2}E_3(\tau) \quad (5.21)$$

и

$$\rho(\tau) = \frac{\Phi\{\varepsilon\} - P}{P} = \frac{3}{4}\Phi\{\tau' + q(\tau')\} - 1. \quad (5.22)$$

Теперь построим функционал в виде

$$R(\rho, \omega) = \int_0^{\infty} \rho(\tau) \omega(\tau) d\tau, \quad (5.23)$$

где $\omega(\tau)$ является некоторой произвольной весовой функцией. Очевидно, что если $\rho(\tau)$ выбрано так, что (5.23) близко к нулю для возможно большего количества весо-

вых функций $\omega(\tau)$, это означает правильность определения остаточной разности $\rho(\tau)$. Отсюда следует принцип, предложенный Кургановым: *из данной совокупности приближенных решений лучшими являются те, которые стремятся обратить в нуль функционал R для наиболее широкого класса весовых функций.*

Для удобства применения этого принципа функцию $\omega(\tau)$ можно задавать в виде набора некоторых произвольных функций:

$$\omega(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \omega_n(\tau),$$

где c_n — некоторые произвольные постоянные.

Тогда обобщенный принцип математически можно записать в следующем виде:

$$\int_0^{\infty} \rho(\tau) \omega_n(\tau) d\tau = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.24)$$

Обычно функцию $\varepsilon(\tau)$ выбирают в виде ряда

$$\varepsilon(\tau) = \frac{3}{4} P \left[A_0 + \tau + \sum_{n=2}^{\infty} A_n E_n(\tau) \right]. \quad (5.25)$$

Использование (5.25) для (5.21) и (5.24) приводит к известному методу Мензела — Сена. Для остаточной разности $\rho(\tau)$ находим:

$$\begin{aligned} \rho(\tau) &= \frac{\Lambda\{\varepsilon\} - \varepsilon}{\frac{3}{4} H} = -\frac{1}{2} A_0 E_2(\tau) + \\ &+ \frac{1}{2} E_3(\tau) + \sum_{n=2}^N (\lambda_n - E_n) A_n, \end{aligned}$$

где $\lambda_n = \Lambda\{E_n(\tau)\}$.

Выбирая в качестве $\omega_n(\tau)$ полином $(n-1)$ -й степени, вместо (5.24) имеем:

$$\frac{2}{nl} \int_0^{\infty} \rho(\tau) \tau^n d\tau = -\frac{A_0}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \sum_{i=2}^m T_{ni} A_i = 0,$$

где

$$T_{ni} = \frac{2}{n!} \int_0^{\infty} (\lambda_i - E_i) \tau^n d\tau =$$

$$= \frac{f_{n+i} + f_{n+1} - f_{i-1} + (-1)^{n+i} g_{n+i} + [1 + (-1)^{n+i}] \ln 2}{n+i+1} -$$

$$- \frac{2}{n+i};$$

$$f_n = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}, \quad g_n = \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^j}{j}, \quad n=0, 1, 2, \dots, \quad j=2, 3, \dots$$

Таким образом, неизвестные постоянные A_n можно определить из следующей системы алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=2}^m T_{nj} A_j = \frac{A_0}{n+2} - \frac{1}{n+3}. \quad (5.26)$$

Функция $q(\tau)$, полученная методом Мензела — Сена для $m=5$, имеет вид

$$q(\tau) = 0,71044936 - 0,27186451 E_2(\tau) + 0,41860309 E_3(\tau) -$$

$$- 0,31239946 E_4(\tau) + 0,13433965 E_5(\tau). \quad (5.27)$$

Расчет по (5.27) дает погрешность лишь 10^{-5} — $10^{-4}\%$ для всего интервала изменения оптических толщин.

В заключение отметим, что если в качестве пробных функций выбирать используемые остаточные разности, то мы приходим к вариационным методам, которые подобны методам, рассмотренным в предыдущем параграфе.

§ 4*. Метод Монте-Карло

Изложенные выше методы не позволяют решать задачи теории переноса излучения, в которых наряду с перераспределением по частотам и неизотропностью актов рассеяния необходимо учитывать такие важные факторы, как неоднородность среды и ее произвольную трехмерную конфигурацию. В настоящее время одним из основных методов решения подобных задач является *метод Монте-Карло*, или *метод статистических испытаний*. Этот метод, являясь чисто численным и индуктивным, принадлежит к вероятностным методам (об этом говорит и само название метода). Основная идея метода Монте-Карло заключается в моделировании реального физического процесса (в частности, траектории фотона), которое производится с использованием таблиц случайных чисел. При моделировании траектории фотона последовательно учитываются акты взаимодействия фотона с элементарными объемами вещества вплоть до исчезновения рассматриваемого фотона (до выхода его из среды или поглощения его средой).

При решении задач теории переноса излучения методом Монте-Карло с помощью прямого моделирования необходимо сначала выбрать некоторое число N пробных фотонов. Прослеживая историю распространения этих фотонов в среде и статистически усредняя результаты, можно отыскать искомые характеристики выходящего излучения. Так как при этом относительная ошибка расчетов пропорциональна $1/\sqrt{N}$, то число N должно выбираться достаточно большим. Из фотонов выделяется i -й фотон. Согласно таблицам случайных чисел (см., например, [44]), выбирается некоторый элементарный телесный угол $d\Omega_j^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, n$), в котором распространяется i -й фотон. Набор случайных чисел можно получить с помощью генератора случайных чисел и таблиц псевдослучайных чисел. Последние достаточно случайны, хотя и получаются по вполне определенному закону. Например, в [45] они определяются как остаток при делении $23 a_n$ на $(10^8 + 1)$, где $n = 0, 1, 2, \dots$ — некоторое произвольное восьмизначное число. Набор чисел, получаемых таким образом, имеет повторяемость через 5882352 числа, и поэтому его можно считать достаточно случайным. Если эти

числа разделить на 10^8 , получается набор псевдослучайных чисел между 0 и 1.

После выбора $d\Omega^{(l)}$ необходимо определить величину пробега l -го фотона $R_l^{(l)}$ ($l = 1, 2, \dots, m$) с учетом оптических свойств среды. Обычно при определении $R_l^{(l)}$ используют закон Бугера. При этом следует учитывать возможность выхода кванта из среды или его поглощения. Если R_0 является граничной поверхностью среды, то при $R_l^{(l)} \geq R_0$ фотон покидает среду и его историю можно считать оконченной, а при $R_l^{(l)} < R_0$ фотон или испытывает поглощение (конец истории), или распространение его в среде продолжается. Таким образом, перед каждым актом рассеяния (или поглощения) состояние фотона можно охарактеризовать некоторой совокупностью чисел

$$s_k = s_k(l_k, R_k, \lambda_k), \quad k = 1, 2, \dots, k_0,$$

где под λ_k подразумевается вероятность выживания кванта, причем при $k < k_0$ $\lambda_k \equiv 1$, а при $k = k_0$ $\lambda_k \equiv 0$ (факт исчезновения фотона). Набор этих чисел образует цепь Маркова, которую можно охарактеризовать некоторой плотностью $\Psi\{s_k, s_{k+1}\}$. Функция Ψ определяет вероятность перехода фотона из k -го в $(k+1)$ -е состояние. Принимая во внимание закон Бугера, функцию Ψ можно представить в следующем виде [24]:

$$\text{при } \lambda_k = \lambda_{k+1} = 1$$

$$\Psi\{s_k, s_{k+1}\} = \lambda_k p(l_{k+1}, l_k) (\kappa + \sigma) e^{-(\kappa + \sigma)(r_{k+1} - r_k) l_{k+1}};$$

$$\text{при } \lambda_k = 1, \lambda_{k+1} = 0$$

$$\Psi\{s_k, s_{k+1}\} = 1 - \frac{\sigma}{\kappa + \sigma} = \frac{\kappa}{\kappa + \sigma};$$

$$\text{при } \lambda_k = 0$$

$$\Psi\{s_k, s_{k+1}\} = 0.$$

Функция плотности $\Psi\{s_k, s_{k+1}\}$ позволяет находить распределение фотонов при $(k+1)$ -м столкновении, если известно распределение при k -м столкновении. Такое последовательное определение распределения фотонов аналогично обычному процессу итераций и при достаточно большом количестве шагов ($k_0, n, m = 10 \div 100$) эквивалентно интегральному уравнению переноса излучения. Кроме того, функция $\Psi\{s_k, s_{k+1}\}$ позволяет определить начальное распре-

деление фотонов в среде, от которого существенно зависит сходимость рассматриваемого метода.

Так, начальное распределение фотонов можно задать в виде

$$\begin{aligned}
 F(s_1) &= \int_0^{\infty} \Psi \{s_1, s_0\} e_0(r - x l, l) dx = \\
 &= \int_0^{\infty} (\kappa + \sigma) e^{-(\kappa + \sigma)x} e_0(r - x l, l) dx. \quad (5.28)
 \end{aligned}$$

Для точечного коллимированного источника излучения

$$e_0(r, l) = \delta(r - r_0) \delta(l - l_0)$$

и поэтому

$$F(s_1) = (\kappa + \sigma) e^{-(\kappa + \sigma)(r - r_0) l_0} \delta(l - l_0).$$

Следует отметить, что применение метода Монте-Карло связано с большим объемом вычислительной работы, который доступен лишь для очень быстродействующих машин. Поэтому в настоящее время уделяется большое внимание вопросам ускорения сходимости метода Монте-Карло. В сильной степени ускорение метода достигается использованием на промежуточных этапах некоторых простейших аналитических решений. Сходимость существенно зависит и от числа выбираемых фотонов. В пределах задаваемой точности можно выбрать оптимальное число систем и, кроме того, выделить наиболее существенные области. Для выделения последних обычно пользуются теоремой перестановки источников [38]: если ρ — решение интегрального уравнения

$$\rho(r) = \iiint_{(V)} \rho(r') K(|r - r'|) dV' + q(r), \quad (5.29)$$

то вместо исходного уравнения можно рассматривать два следующих:

$$\rho_a(r) = \iiint_{(V_a)} \rho_a(r') K(|r - r'|) dV' + q(r) \quad (5.30)$$

и

$$\rho_b(r) = \iiint_{(V_a + V_b)} \rho_b(r) K(|r - r''|) dV' +$$

$$+ \iiint_{(V_b)} \rho_a(\mathbf{r}) K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) dV', \quad (5.31)$$

где $V_a + V_b = V$ и $\rho_a + \rho_b = \rho$.

При $\rho_a \ll \rho_b$ решение исходного уравнения (5.29) можно заменить на решение уравнения (5.31).

Ускорения сходимости можно добиться и анализом свойств симметрии. Так, например, с точки зрения моделирования траекторий фотонов сферически симметричная среда с изотропным рассеянием вполне эквивалентна плоской системе с анизотропным рассеянием.

Большим преимуществом метода Монте-Карло перед аналитическими методами решения уравнения переноса излучения является возможность использования получаемых результатов для исследования учета различных дополнительных факторов (отражение и поглощение на граничной поверхности, состояние поляризации и т. д.).

Существующая система алгоритмов и программ для решения задач теории переноса излучения [46, 47] позволяет определять радиационный режим в реальной земной атмосфере, характеристики излучения неоднородной среды, в которой распространяется узкий пучок света, и т. д.

§ 5. Метод Соболева

Метод Соболева основан на понятии вероятности выхода кванта из данной точки среды [12]. Если известно распределение источников излучения внутри среды, то его простое интегрирование по объему с учетом вероятности выхода кванта из данной точки среды позволяет непосредственно найти интенсивность выходящего излучения. При этом основные расчеты сводятся к нахождению количества световой энергии, поглощаемой в данной точке среды. Сама величина вероятности выхода кванта из данной точки среды, как показано Соболевым, с точностью до постоянного множителя совпадает с функцией источников. Поэтому для ее определения могут быть использованы уже известные методы.

Пусть $p(\tau, \mu) d\Omega$ — вероятность того, что после поглощения в точке τ квант выйдет из среды под углом $\theta = \arccos \mu$ относительно нормали к внешней поверхности среды внутри

телесного угла $d\Omega$. Если $f(\tau) d\tau$ — мощность светового излучения, поглощаемого элементарным объемом в точке τ , то из среды выходит только часть световой энергии: $f(\tau) d\tau \times \times p(\tau, \mu) d\Omega$. Отсюда интенсивность излучения, выходящего из среды под углом $\theta = \arccos \mu$ к нормали, равна:

$$I(0, \mu) = \int_0^{\tau_0} p(\tau, \mu) f(\tau) \frac{d\tau}{\mu}. \quad (5.32)$$

Для искомой функции $p(\tau, \mu)$ нетрудно найти как интегральное, так и дифференциальное уравнения. Величина вероятности выхода кванта из данной точки среды определяется вероятностью двух независимых процессов. Квант может выйти из среды как без процессов рассеяния, так и после многократных актов рассеяния. Оче-

видно, вероятность первого процесса равна $\frac{\lambda}{4\pi} e^{-\frac{\tau}{\mu}}$, что

определяет только вероятность поглощения кванта при прохождении им оптической толщины τ в направлении $\theta = \arccos \mu$. Чтобы охарактеризовать выход кванта из данной точки среды с учетом актов рассеяния, необходимо рассмотреть историю распространения кванта из точки τ в некоторую точку τ' и затем проинтегрировать полученный результат по всему объему. В точке τ квант возникает с вероятностью, равной

$$\frac{\lambda}{4\pi} \int_{(2\pi)} d\Omega' = \frac{\lambda}{4\pi} \cdot 2\pi d\mu'.$$

Этот квант может быть поглощен в некотором элементарном объеме в точке τ' . Вероятность этого события составляет

$$e^{-\frac{|\tau-\tau'|}{\mu'}} \frac{d\tau'}{\mu'}.$$

Поэтому вероятность акта переизлучения кванта, возникшего в точке τ , равна

$$\frac{\lambda}{4\pi} 2\pi d\tau' \int_0^1 e^{-\frac{|\tau-\tau'|}{\mu'}} \frac{d\mu'}{\mu'} \dots$$

Вероятность выхода кванта из среды после многократных процессов рассеяния определяется выражением

$$\frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau} E_1(|\tau - \tau'|) \rho(\tau', \mu) d\tau'.$$

Таким образом, интегральным уравнением для определения вероятности кванта из среды является

$$\rho(\tau, \mu) = \frac{\lambda}{4\pi} e^{-\frac{\tau}{\mu}} + \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau} E_1(|\tau - \tau'|) \rho(\tau', \mu) d\tau'. \quad (5.33)$$

При сравнении полученного уравнения с (3.41) находим, что

$$\rho(\tau, \mu) = \frac{e(\tau, \mu)}{\pi I_0}. \quad (5.34)$$

Соотношение (5.34) указывает на тождественность рассмотрения величин $\rho(\tau, \mu)$ и $e(\tau, \mu)$.

Чтобы найти дифференциальное уравнение для функции $\rho(\tau, \mu)$, необходимо рассчитать вероятность выхода кванта из точки $(\tau + \Delta\tau)$. Если воспользоваться изложенными выше рассуждениями и пренебречь величинами второго порядка малости, получаем:

$$\begin{aligned} \rho(\tau + \Delta\tau, \mu) &= \rho(\tau, \mu) \left(1 - \frac{\Delta\tau}{\mu} \right) + \\ &+ 2\pi \int_0^1 \rho(\tau, \mu') \frac{\Delta\tau}{\mu'} d\mu' \cdot \rho(0, \mu) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{d\rho(\tau, \mu)}{d\tau} + \frac{1}{\mu} \rho(\tau, \mu) &= \\ &= 2\pi \rho(0, \mu) \int_0^1 \rho(\tau, \mu') \frac{d\mu'}{\mu'}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

По (5.33)

$$\rho(0, \mu) = \frac{\lambda}{4\pi} + \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_2} \rho(\tau', \mu) E_1(\tau') d\tau'.$$

Величину $\rho(0, \mu)$, как и $\rho(\tau, \mu)$, можно без труда выразить в явном виде через известные функции Амбарцумяна. Пусть на исследуемую среду под углом $\theta_0 = \arccos \mu_0$ к нормали слоя падает параллельный световой пучок интенсивности πI_0 . В этом случае

$$f(\tau) = \pi I_0 e^{-\frac{\tau}{\mu_0}}.$$

Тогда по (5.32)

$$I(0, \mu, \mu_0) = \pi I_0 \int_0^{\tau_2} \rho(\tau, \mu) e^{-\frac{\tau}{\mu_0}} \frac{d\tau}{\mu}. \quad (5.37)$$

Отсюда находим, что

$$I(0, \mu, \mu_0) \mu = \pi I_0 \int_0^{\tau_2} \rho(\tau, \mu) e^{-\frac{\tau}{\mu_0}} d\tau$$

и

$$I(0, \mu_0, \mu) \mu_0 = \pi I_0 \int_0^{\tau_2} \rho(\tau, \mu_0) e^{-\frac{\tau}{\mu}} d\tau.$$

Но так как

$$I(0, \mu, \mu_0) = \int_0^{\tau_2} \rho(\tau, \mu_0) e^{-\frac{\tau}{\mu}} \frac{d\tau}{\mu},$$

то из (5.34) следует закон обратимости:

$$I(0, \mu, \mu_0) \mu = I(0, \mu_0, \mu) \mu_0. \quad (5.38)$$

Если выразить интенсивность выходящего излучения через коэффициент диффузного излучения $\rho(\mu, \mu_0)$, то соотношение (5.38) можно переписать в виде

$$\rho(\mu, \mu_0) = \rho(\mu_0, \mu) \quad (5.39)$$

и, кроме того, переопределить величину $\rho(\mu, \mu_0)$:

$$\rho(\mu, \mu_0) = \pi \int_0^{\tau} e^{-\frac{\tau}{\mu}} \rho(\tau, \mu_0) \frac{d\tau}{\mu_0}. \quad (5.40)$$

Умножая (5.35) на $e^{-\frac{\tau}{\eta}}$ и интегрируя по τ , находим:

$$(\mu + \eta) \rho(\mu, \eta) = \pi \rho(0, \mu) \left[1 + 2\eta \int_0^1 \rho(\mu', \eta) d\mu' \right]$$

или, так как

$$\begin{aligned} \rho(0, \mu) &= \frac{\lambda}{4\pi} \left[1 + 2\mu \int_0^1 \rho(\mu, \mu') d\mu' \right], \\ \rho(\mu, \eta) &= \frac{\lambda}{4} \cdot \frac{\varphi(\mu) \varphi(\eta)}{\mu + \eta}. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \varphi(\mu) &= 1 + 2\mu \int_0^1 \rho(\mu, \mu') d\mu' = \\ &= 1 + \frac{\lambda}{2} \mu \varphi(\mu) \int_0^1 \frac{\varphi(\mu')}{\mu + \mu'} d\mu', \end{aligned} \quad (5.42)$$

т. е. получено известное интегральное уравнение для функции Амбарцумяна $\varphi(\mu)$.

Согласно (5.41), можно найти выражение и для $\rho(0, \mu)$:

$$\rho(0, \mu) = \frac{\lambda}{4\pi} \varphi(\mu). \quad (5.43)$$

Если обозначить

$$2\pi \int_0^1 \rho(\tau, \eta) \frac{d\eta}{\eta} = \Phi(\tau),$$

то по аналогии с § 6 гл. 3 можно получить для функции $\Phi(\tau)$ уравнение Вольтерра:

$$\Phi(\tau) = K(\tau) + \int_0^{\tau} K(\tau - \tau') \Phi(\tau') d\tau', \quad (5.44)$$

где

$$K(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \varphi(\mu) e^{-\frac{\tau}{\mu}} \frac{d\mu}{\mu}. \quad (5.45)$$

Зная $\Phi(\tau)$, можно определить и вероятность выхода кванта из среды:

$$p(\tau, \mu) = p(0, \mu) \left[e^{-\frac{\tau}{\mu}} + \int_0^{\tau} e^{-\frac{\tau-\tau'}{\mu}} \Phi(\tau') d\tau' \right]. \quad (5.46)$$

Глава 6

ПРОБЛЕМА СЕЛЕКТИВНОСТИ В ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

§ 1. Общее решение уравнения переноса для селективно излучающих сред

Изучение закономерностей испускания излучения молекулярными газами является важнейшей проблемой молекулярной спектроскопии. Успехи в решении этой проблемы в значительной степени способствуют развитию оптики атмосферы, теории лучистого теплообмена в горящих смесях, спектроскопии светорассеивающих сред и т. д.

В отличие от линейчатых спектров атомов, как уже отмечалось в гл. 1, спектры поглощения молекул характеризуются наличием систем полос сложной структуры. Это объясняется одновременным изменением энергии молекул во всех трех формах движения (электронной, колебательной и вращательной). Для детального рассмотрения структуры инфракрасного спектра излучения (поглощения) необходимо выбирать очень малый спектральный интервал, приближенно равный $1/5$ ширины спектральной линии, а это составляет 10^{-4} — 10^{-2} см^{-1} . В большинстве случаев измерения со столь высокой разрешающей способностью невозможны. К тому же теоретические расчеты поглощения в инфракрасной области спектра, обычно составляющей несколько тысяч см^{-1} , представляют чрезвычайно трудоемкую задачу даже для быстродействующих машин. Поэтому на практике обычно выбирают спектральный интервал, содержащий несколько линий. Если считать, что в этом интервале, как и во всей полосе поглощения, спектральные линии находятся на одинаковом расстоянии друг от друга, то такое представление полосы называется *регулярной моделью полосы поглощения* (или *моделью Эльзассера*) [10, 48, 49]. В случае представления полосы поглощения набором случайно расположенных линий модель полосы называется *хаотической, случайной* (или *моделью Гуди*) [10, 48, 50]. В на-

стоящее время при изучении спектральных излучательных способностей молекулярных газов обычно ограничиваются этими двумя моделями полос поглощения различными комбинациями. То обстоятельство, что спектральные интервалы моделей полос поглощения представляющих бесконечные наборы линий, обладающих одинаковыми статистическими свойствами, служит источником погрешностей расчетов излучательной способности реальных газов.

Уравнение переноса лучистой энергии для излучающей среды при условии локального термодинамического равновесия (1.20) можно записать, согласно (1.14), в следующем виде:

$$\frac{dI_{\nu}(z)}{dz} = k_{\nu}(z) [B_{\nu}(T) - I_{\nu}(z)], \quad T = T(z). \quad (6.1)$$

Решением уравнения (6.1) в случае отсутствия внешнего излучения является выражение

$$I_{\nu}(z_0) = \int_0^{z_0} k_{\nu}(z) B_{\nu}[T(z)] e^{-\int_z^{z_0} k_{\nu}(z') dz'} dz \quad (6.2)$$

или, так как

$$k_{\nu}(z) dz e^{-\int_z^{z_0} k_{\nu}(z') dz'} = -\frac{d}{dz} \left[1 - e^{-\int_z^{z_0} k_{\nu}(z') dz'} \right] =$$

$$= -\frac{dA_{\nu}(z, z_0)}{dz} dz,$$

$$I_{\nu}(z_0) = -\int_0^{z_0} B_{\nu}(z) \frac{dA_{\nu}(z, z_0)}{dz} dz. \quad (6.3)$$

Интенсивность излучения (6.3) необходимо усреднить по некоторому спектральному интервалу $\Delta\nu$, содержащему несколько спектральных линий. Очевидно, что для подобных спектральных интервалов функцию Планка можно с большой точностью считать постоянной, и тогда

$$\begin{aligned} \overline{I_{\nu}(z_0)}^{\Delta\nu} &= - \int_0^{z_0} \overline{B_{\nu}(z)}^{\Delta\nu} \frac{d}{dz} \int_{(\Delta\nu)} A_{\nu}(z, z_0) dv dz = \\ &= - \int_0^{z_0} \overline{B_{\nu}(z)}^{\Delta\nu} \frac{dA_{\nu}(z, z_0)}{dz}^{\Delta\nu} dz. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Таким образом, определение интенсивности излучения молекулярных газов в некотором спектральном интервале фактически сводится к отысканию усредненной поглощательной (или излучательной) способности:

$$\overline{A_{\nu}(z, z_0)}^{\Delta\nu} = \int_{(\Delta\nu)} \left[1 - e^{-\int_z^{z_0} k_{\nu}(z') dz'} \right] dv. \quad (6.5)$$

В случае однородного по температуре и плотности слоя молекулярного газа по (6.4) имеем:

$$\begin{aligned} \overline{I_{\nu}(z_0)} &= \overline{B_{\nu}(T)} \int_{(\Delta\nu)} [1 - e^{-k_{\nu} z_0}] dv = \overline{B_{\nu}(T)} \int_{(\Delta\nu)} A_{\nu}(0, z_0) dv = \\ &= \overline{B_{\nu}(T)} \overline{A_{\nu}(0, z_0)} \Delta\nu. \end{aligned}$$

Здесь черта означает усреднение по спектральному интервалу $\Delta\nu$, а

$$A_{\nu} = A_{\nu}(0, z_0) = 1 - e^{-k_{\nu} z_0}, \quad \overline{A_{\nu}} = \frac{1}{\Delta\nu} \int_{(\Delta\nu)} A_{\nu}(0, z_0) dv. \quad (6.6)$$

§ 2. Поглощение (испускание) излучения изолированной линией

Рассмотрим наиболее простой случай, когда можно считать, что перекрытием спектральных линий можно пренебречь. В этом случае и для модели Эльзассера и для модели Гуди можно ограничиться изучением закономерностей поглощения отдельной спектральной линией.

В соотношениях (6.5) и (6.6) k_{ν} — спектральный коэффициент поглощения, определяемый в зависимости от

физических условий формулами (1.30) — (1.35). **Интегральное** (или *полное*) **поглощение** отдельной **спектральной** линией равно

$$W(z_0) = \int_{-\infty}^{\infty} A_\nu d\nu = \int_{-\infty}^{\infty} (1 - e^{-k_\nu z_0}) d\nu. \quad (6.7)$$

Полное поглощение (6.7) часто называют *кривой роста*, или *эквивалентной шириной линии*. Обозначая расстояние между линиями через d , можно найти среднее поглощение отдельной линией:

$$\bar{A} = \frac{1}{d} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - e^{-k_\nu z_0}) d\nu. \quad (6.8)$$

Введем безразмерные параметры:

$$x = \frac{\nu - \nu_0}{d}, \quad y = \frac{\gamma_L}{d}, \quad u = \frac{S z_0}{2\pi\gamma_L}. \quad (6.9)$$

Тогда величину \bar{A} для лоренцевской линии можно записать в виде

$$\bar{A}_L = \int_{-\infty}^{\infty} (1 - e^{-\frac{2uy^2}{x^2+y^2}}) dx = 2\pi y L(u). \quad (6.10)$$

Здесь $L(u)$ — так называемая функция Ладенбурга—Райхе, равная

$$L(u) = ue^{-u} [I_0(u) + I_1(u)], \quad (6.11)$$

$I_0(u)$ и $I_1(u)$ — функция Бесселя первого рода от мнимого аргумента нулевого и первого порядка соответственно. Достаточно подробные значения функции $L(u)$ приведены в монографии [10]. Асимптотическими разложениями этой функции являются следующие выражения:

$$u \ll 1,$$

$$L(u) = u \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 5\cdot 3\cdot 1}{n!(n+1)!} u^n \right];$$

$$u \gg 1, L(u) = \sqrt{\frac{2u}{\pi}} \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^2(2n-3)^2 \dots 5^2 \cdot 3^2 \cdot 1^2}{n!} \cdot \frac{1}{(8u)^n} \right].$$

В первом случае можно положить $L(u) = u$ и тогда, согласно (6.10), излучательная способность

$$A_L = 2\pi u i = \frac{S}{d} z_0. \quad (6.12)$$

Аналогичное выражение можно получить из (6.8) при малых значениях величины $k_v z_0$ ($k_v z_0 \ll 1$):

$$\bar{A}_L = \frac{1}{d} \int_{-\infty}^{\infty} k_v z_0 dv = \frac{z_0}{d} \int_{-\infty}^{\infty} k_v dv = \frac{S}{d} z_0,$$

так как по определению $S = \int_{-\infty}^{\infty} k_v dv$.

Таким образом, в случае малости оптической толщины среднее поглощение (или испускание) прямо пропорционально ей. Поэтому закон (6.12) называется *линейным*. Линейность закона обеспечивается малостью оптической толщины при любых значениях частоты. Вот почему случай $u \ll 1$ иногда называют *приближением слабой линии*.

При $u \gg 1$ (*приближение сильной линии*)

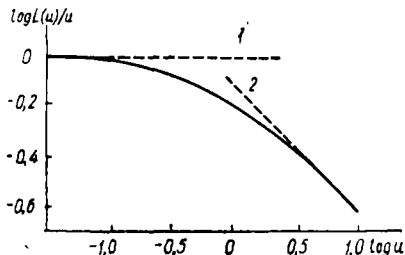
$$\bar{A}_L = 2u \sqrt{2\pi i}. \quad (6.13)$$

К этому же результату мы приходим, полагая в (6.10) $u \ll x$, т. е. пренебрегая полушириной спектральной линии. Подобное пренебрежение физически оправдано, так как это приводит к сильному увеличению коэффициента поглощения в центре линии, а в этой области он настолько велик, что дальнейшее его увеличение почти не сказывается на величине среднего поглощения.

Закон (6.13) известен также как *закон квадратного корня*. Функция $\log \frac{L(u)}{u}$, изображенная на рис. 12, по-

Рис. 12. Графическое представление функции Ладеибурга — Райхе:

1—линейный закон; 2—закон квадратного корня



казывает, что переход от линейного закона к закону квадратного корня осуществляется достаточно быстро и уже практически при $u > 3$ можно использовать соотношение (6.13). Таким образом, получено явное подтверждение несправедливости закона Бугера даже для одной изолированной линии.

Для доплеровского контура спектральной линии среднее поглощение (или среднее испускание) определяется следующим выражением:

$$\bar{A}_D = \frac{\gamma_D}{d} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - e^{-ve^{-x^2}}) dx, \quad (6.14)$$

где $x = \frac{v}{\gamma_D}$, а $v = \frac{Sz_0}{\gamma_D \sqrt{\pi}}$ — оптическая толщина в центре линии. Если подынтегральную экспоненту разложить в ряд по степеням v , то для средней излучательной способности получается медленно сходящийся ряд [10]:

$$\bar{A}_D = \sqrt{\pi} v \frac{\gamma_D}{d} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{v^n}{n! \sqrt{n}} \right].$$

В приближении слабой линии ($v \ll 1$) получаем

$$\bar{A}_D = \sqrt{\pi} v \frac{\gamma_D}{d} = \frac{S}{d} z_0, \quad (6.12a)$$

т. е. уже рассмотренный линейный закон.

При $v \gg 1$ для \bar{A}_D можно найти [10]:

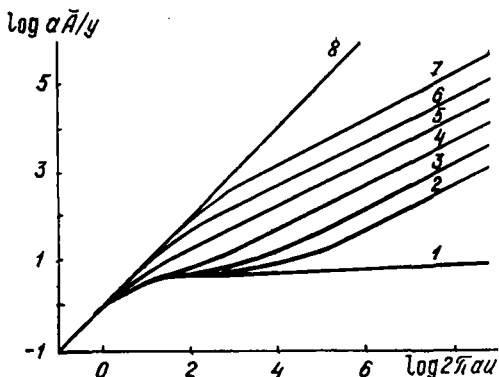


Рис. 13. Среднее поглощение комбинированного контура спектральной линии ($a = \gamma_L / \gamma_D$):

1— $a=0$ (доплеровский контур); 2—0,001; 3—0,01; 4—0,1; 5—1; 6—10; 7—100; 8— $a \rightarrow \infty$ (лоренцевский контур)

$$\bar{A}_D = \frac{2\gamma_D}{d} \left[(\ln v)^{\frac{1}{2}} + 0,2886 (\ln v)^{-\frac{1}{2}} - \right. \\ \left. - 0,1335 (\ln v)^{-\frac{3}{2}} + 0,0070 (\ln v)^{-\frac{5}{2}} - \dots \right]. \quad (6.13a)$$

Закон (6.13a) определяет гораздо более медленное увеличение \bar{A}_D с ростом оптической толщины, чем для лоренцевского контура линии. Это связано с очень сильным уменьшением величины коэффициента поглощения при доплеровском уширении для частот вдали от центра линии. Если ограничиться первым членом в (6.13a):

$$\bar{A}_D = \frac{2\gamma_D}{d} (\ln v)^{\frac{1}{2}},$$

то среднее поглощение (или среднее испускание) доплеровской линии можно отождествить с поглощением (испусканием) прямоугольного контура спектральной линии с полушириной, равной

$$\gamma_n = \gamma_D (\ln v)^{\frac{1}{2}}.$$

Для комбинированного контура спектральной линии, описываемого выражением типа (2.20), средняя излуча-

тельная способность рассчитывается только численно. На рис. 13 приведена зависимость среднего поглощения (или среднего испускания) для лоренц-доплеровского контура линии в зависимости от параметра $\frac{\gamma_L}{\nu} u = au$ [10].

Следует отметить, что если в областях, близких к центру, решающая роль принадлежит доплеровскому уширению, то вдали от центра средняя поглощательная (излучательная) способность определяется только лоренцевскими крыльями линии, что соответствует на рис. 13 появлению семейства параллельных кривых с тангенсом угла наклона, равным $1/2$ (кривая с тангенсом угла наклона, равным 1 , соответствует случаю слабой лоренцевской линии).

§ 3. Закономерности поглощения (испускания) для моделей Эльзассера и Гуди

За модель Эльзассера принимается бесконечный набор равноудаленных друг от друга спектральных линий одинаковой интенсивности. Коэффициент поглощения в случае лоренцевского контура спектральных линий можно записать в виде

$$k_\nu = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{S}{\pi} \cdot \frac{\gamma_L}{(\nu - nd)^2 + \gamma_L^2}. \quad (6.15)$$

Используя обозначения (6.9), вместо (6.15) можно записать:

$$k_{\nu z_0} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2uy^2}{(x - n)^2 + y^2} = 2\pi uy \frac{\text{sh } 2\pi y}{\text{ch } 2\pi y - \cos 2\pi x}.$$

Определим среднее поглощение на частотном интервале $\left(\nu - \frac{1}{2}d, \nu + \frac{1}{2}d \right)$:

$$\bar{A}_e = 1 - \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \exp \left\{ -2\pi uy \frac{\text{sh } 2\pi y}{\text{ch } 2\pi y - \cos 2\pi x} \right\} dx. \quad (6.16)$$

Вводя величины

$$\begin{aligned} x' = 2\pi x &= \frac{2\pi y}{d}, & y' &= 2\pi y = \frac{2\pi\gamma_L}{d}, \\ u' &= 2\pi u = \frac{S}{\gamma_L} z_0, \end{aligned} \quad (6.17)$$

выражение (6.16) можно свести к более удобному для исследования соотношению:

$$\bar{A}_e = \text{sh } y \int_0^{\infty} I_0(\xi) e^{-\xi \text{ch } y} d\xi,$$

где

$$\omega = \frac{u'}{\text{sh } y} = \frac{S z_0}{\gamma_L \text{sh } \frac{\gamma_L}{d}},$$

или после преобразований находим [48]:

$$\begin{aligned} \bar{A}_e &= \beta u e^{-u(1+y'^{\frac{3}{2}})} [I_0(u) + I_1(u)] + \\ &+ y'^{\frac{3}{2}} \int_0^u I_0(\xi) e^{-\xi(1+y'^{\frac{3}{2}})} \xi d\xi. \end{aligned} \quad (6.18)$$

При $u \ll 1$ $\bar{A}_e = y' u = S z_0 / d$ (линейный закон).

При $u \gg 1$, разлагая функцию Бесселя, находим:

$$\bar{A}_e = \Phi \left(\sqrt{\frac{1}{2} y'^2 u} \right) = \Phi \left(\frac{1}{d} \sqrt{\pi S \gamma_L z_0} \right), \quad (6.19)$$

где $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx$ — интеграл вероятности ошибки,

который подробно протабулирован.

Отсюда при $u \gg 1$ и $y' u \ll 1$ находим закон квадратного корня:

$$\bar{A}_e = y' \sqrt{\frac{2u}{\pi}} = \frac{2}{d} \sqrt{\pi \gamma_L S z_0}. \quad (6.20)$$

В случае $u \approx 1$ и $y' u \ll 1$

$$\bar{A}_e = 2\pi u e^{-u} [I_0(u) + I_1(u)],$$

т. е. приходим к соотношению (6.6).

Статистическая модель Гуди предполагает случайное распределение положений и интенсивностей спектральных линий. Пусть распределение линий равномерное. Это означает, что вероятность распределения линий в рассматриваемом спектре равна

$$\frac{\prod_{i=1}^n dv_i}{(nd)^n},$$

где d — среднее расстояние между линиями.

Обозначая через $P(S, S_0)$ плотность вероятности распределения интенсивностей спектральных линий, определим вероятность осуществления всего спектра:

$$dW = \prod_{i=1}^n \frac{dv_i}{(nd)^n} P(S, S_0) dS.$$

Таким образом, среднее пропускание в нашем случае равно

$$\bar{T}_G = \int T_\nu(\nu_i, S) dW(\nu_i, S).$$

Считая, что все линии одинакового лоренцевского контура, имеем:

$$T_\nu(\nu_i, S) = \exp \left\{ - \frac{Sz_0}{\pi} \cdot \frac{\gamma_L}{(\nu_i - \nu)^2 + \gamma_L^2} \right\},$$

$$\begin{aligned} \bar{T}_G &= \int_{\nu_0}^{\nu_0+nd} \int_0^\infty \prod_{i=1}^n \frac{1}{(nd)^n} P(S, S_0) e^{-\frac{Sz_0}{\pi} \cdot \frac{\gamma_L}{(\nu_i - \nu)^2 + \gamma_L^2}} dS d\nu = \\ &= \prod_{i=1}^n \int_{-\frac{nd}{2}}^{\frac{nd}{2}} \int_0^\infty \frac{1}{(nd)^n} P(S, S_0) e^{-\frac{Sz_0}{\pi} \cdot \frac{\gamma_L}{x_i^2 + \gamma_L^2}} dS dx = \\ &= \left\{ \frac{1}{nd} \int_0^\infty \int_{-\frac{nd}{2}}^{\frac{nd}{2}} P(S, S_0) e^{-\frac{Sz_0}{\pi} \cdot \frac{\gamma_L}{x^2 + \gamma_L^2}} dS dx \right\}^n. \end{aligned}$$

Последнее выражение можно переписать в другом виде, учитывая нормировку функции $P(S, S_0)$:

$$\bar{T}_G = \left\{ 1 - \frac{1}{nd} \int_{-\frac{nd}{2}}^{\frac{nd}{2}} P(S, S_0) \left(1 - e^{-\frac{Sz_0}{\pi} \frac{\nu_L}{x^2 + \nu_L^2}} \right) dx dS \right\}^n$$

или, так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\alpha}{n} \right)^n = e^{-\alpha}$,

$$\bar{T}_G = \exp \left\{ -\frac{1}{d} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} P(S, S_0) \left(1 - e^{-\frac{Sz_0}{\pi} \frac{\nu_L}{x^2 + \nu_L^2}} \right) dx dS \right\}.$$

Отсюда можно найти и среднее поглощение для модели Гуди с лоренцевским контуром:

$$\begin{aligned} \bar{A}_G &= 1 - \bar{T}_G = \\ &= 1 - \exp \left\{ -\frac{1}{d} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} P(S, S_0) \left(1 - e^{-\frac{Sz_0}{\pi} \frac{\nu_L}{x^2 + \nu_L^2}} \right) dx dS \right\} \end{aligned} \quad (6.21)$$

или, согласно (6.10),

$$\bar{A}_G = 1 - \exp \left\{ -\int_0^{\infty} \bar{A}_L(S) P(S, S_0) dS \right\}. \quad (6.22)$$

Для $P(S, S_0)$ обычно используют представления

$$P(S, S_0) = \delta(S - S_0), \quad P(S, S_0) = \frac{1}{S_0} e^{-\frac{S}{S_0}}. \quad (6.23)$$

Первое выражение (6.19) означает, что для модели Гуди выбраны линии одинаковой интенсивности. Этот случай достаточно прост для анализа среднего пропускания по (6.22):

$$\bar{A}_G = 1 - \exp \left\{ -\bar{A}_L(S_0) \right\}, \quad (6.24)$$

где

$$\overline{A_L(S_0)} = 2\pi y L(u), \quad y = \frac{\gamma_L}{d}, \quad u = \frac{S_0 z_0}{2\pi \gamma_L}.$$

Для второго выражения (6.23) величина излучательной способности существенно отлична от (6.24).

Запишем общее выражение среднего пропускания $\bar{T}_G = 1 - \bar{A}_G$ для обоих случаев распределения сил спектральных линий в спектре (6.23):

$$-\ln \bar{T}_G = \frac{2\pi\gamma}{d} f(u). \quad (6.25)$$

Здесь

$$f(u) = \begin{cases} L(u) - \text{функция Ладенбурга — Райхе при} \\ P(S, S_0) = \delta(S - S_0), & (6.26) \\ u \left(1 + \frac{\pi}{2} u\right)^{\frac{1}{2}} \text{ при } P(S, S_0) = \frac{1}{S_0} e^{-\frac{S}{S_0}}, \end{cases}$$

а $u = Sz_0/2\pi\gamma$.

Интересно отметить, что если формально использовать для T_G закон Бугера:

$$-\ln \bar{T}_G = k_{\text{эфф}} \cdot z_0, \quad (6.27)$$

то во втором случае (6.23), наиболее часто используемом на практике,

$$k_{\text{эфф}} = \frac{k_0}{\sqrt{1 + az_0}}, \quad (6.28)$$

где $k_0 = \frac{S}{d}$, $a = \frac{S}{4\gamma}$ — так называемый *параметр тонкой структуры*.

Представляя $a = \frac{S/d}{4\gamma/d} = k_0 \cdot \frac{d}{4\gamma}$, нетрудно при использовании (6.28) прийти как к линейному, так и к квадратичному законам. Соотношение (6.28) весьма удобно при практических расчетах и, кроме того, указывает на пределы применимости закона Бугера при расчете как пропускания, так и излучательной способности однородных молеку-

лярных газов. Так, например, в [51] на основании обобщения экспериментальных результатов излучательной способности водяных паров при повышенных температурах показано, что теоретические расчеты достаточно надежно можно проводить по соотношению (6.28).

На практике иногда используют комбинацию моделей Эльзассера и Гуди. Это приводит к большому набору моделей. И поэтому для того или иного участка спектра всегда можно подобрать соответствующую модель полосы. Однако в каждом случае моделирование реальной полосы поглощения содержит вполне определенную ошибку. Сравнивая результаты теоретических расчетов с экспериментальными данными, погрешность расчетов можно уменьшить, изменяя основные параметры модели или вводя некоторые поправки.

Для двухатомных газов применение моделей вполне себя оправдало, а в случае трех- (и более) атомных газов в настоящее время возникают определенные трудности практического расчета излучательной способности.

§ 4. Методика расчета излучения неоднородных и неизотермических газов (методика Куртиса — Годсона)

До сих пор нами изучалась усредненная по частоте величина A_ν , определяемая соотношением (6.6). Однако на практике обычно имеют дело с неоднородным распределением молекулярных газов по плотности и температуре. В этом случае задача в значительной степени усложняется и расчет излучательной способности молекулярных газов необходимо проводить по формуле

$$\bar{A}_\nu = \overline{A_\nu(0, z_0)} = \frac{1}{\Delta\nu} \int_{(\Delta\nu)} \left[1 - e^{-\int_0^{z_0} k_\nu(z) dz} \right] d\nu. \quad (6.29)$$

Здесь величина $k_\nu(z)$ зависит от температуры и давления (и следовательно, от координаты) в случае лоренцевского уширения и от температуры при доплеровском уширении спектральных линий.

В настоящее время для расчета соотношения (6.29) чаще всего используется методика, предложенная незави-

симо друг от друга Куртисом [52] и Годсоном [53]. Сущность этой методики заключается в том, что излучательная способность неоднородного слоя заменяется излучательной способностью некоторого (гипотетического) однородного слоя так, чтобы в предельных случаях (в приближениях сильной и слабой линий) рассматриваемые величины в точности совпадали между собой. Рассмотрим наиболее простейший вариант методики Куртиса — Годсона применительно к полосе Эльзассера с лоренцевским контуром спектральных линий. В данном случае соотношение (6.29) можно записать в следующем виде:

$$\bar{A}_\nu = \frac{1}{\Delta\nu} \int_{(\Delta\nu)} \left[1 - \exp \left\{ - \int_0^{z_0} \frac{dz}{\pi} \sum_n \frac{S_n(z) \gamma_n(z)}{(\nu - \nu_n)^2 + \gamma_n^2(z)} \right\} \right] d\nu. \quad (6.30)$$

За излучательную способность гипотетического слоя примем величину

$$\bar{A}_\nu^* = \frac{1}{\Delta\nu} \int_{(\Delta\nu)} \left[1 - \exp \left\{ - \frac{z_0}{\pi} \sum_n \frac{\tilde{S}_n \tilde{\gamma}_n}{(\nu - \nu_n)^2 + \tilde{\gamma}_n^2} \right\} \right] d\nu. \quad (6.31)$$

Для определения введенных констант \tilde{S}_n и $\tilde{\gamma}_n$ в выражении (6.31) воспользуемся условием совпадения величин (6.30) и (6.31) в приближениях слабой и сильной линий. В первом случае из (6.29) находим:

$$\begin{aligned} \bar{A}_\nu &= \frac{1}{\Delta\nu} \int_{(\Delta\nu)} d\nu \int_0^{z_0} k_\nu(z) dz = \frac{1}{\Delta\nu} \int_0^{z_0} dz \int_{(\Delta\nu)} k_\nu(z) dz = \\ &= \frac{1}{\Delta\nu} \sum_n \int_0^{z_0} S_n(z) dz. \end{aligned}$$

С другой стороны, в том же приближении по (6.31)

$$\bar{A}_\nu^* = \frac{z_0}{\Delta\nu} \sum_n \tilde{S}_n.$$

Из последних двух соотношений находим, что

$$\tilde{S}_n = \frac{1}{z_0} \int_0^{z_0} S_n(z) dz. \quad (6.32)$$

В приближении сильной линии запишем (6.30) и (6.31) для малых толщин слоя:

$$\begin{aligned} \bar{A}_v &= \frac{1}{\Delta v} \int_{(\Delta v)} dv \int_0^{z_0} \frac{dz}{\pi} \sum_n \frac{S_n(z) \gamma_n(z)}{(v - v_n)^2 + \gamma_n^2} = \\ &= \frac{1}{\pi \Delta v} \sum_n \int_0^{z_0} S_n(z) \gamma_n(z) dz \int_{(\Delta v)} \frac{dv}{(v - v_n)^2 + \tilde{\gamma}_n^2} = \\ &= \frac{1}{\Delta v} \sum_n \frac{1}{\tilde{\gamma}_n} \int_0^{z_0} S_n(z) \gamma_n(z) dz. \end{aligned}$$

$$\bar{A}_v^* = \frac{1}{\Delta v} \int_{(\Delta v)} dv \frac{z_0}{\pi} \sum_n \frac{\tilde{\gamma}_n \tilde{S}_n}{(v - v_n)^2 + \tilde{\gamma}_n^2} = \frac{1}{\Delta v} \sum_n z_0 \tilde{S}_n.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{\gamma}_n} \int_0^{z_0} S_n(z) \gamma_n(z) dz &= z_0 \tilde{S}_n = \int_0^{z_0} S_n(z) dz, \\ \tilde{\gamma}_n &= \frac{\int_0^{z_0} S_n(z) \gamma_n(z) dz}{\int_0^{z_0} S_n(z) dz}. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Применение методики Куртиса — Годсона к статистической модели полосы поглощения не содержит особых трудностей, но, согласно (6.25) и (6.26), прежде всего необходимо

определить не \tilde{S} и $\tilde{\gamma}$, а $\left(\frac{\tilde{\gamma}}{d}\right)$ и $\tilde{u} = \left[\frac{\left(\frac{\tilde{S}}{d}\right) z_0}{2\pi \left(\frac{\tilde{\gamma}}{d}\right)} \right]$

54]. Таким образом, для применения методики Куртиса —

Годсона необходимо знать спектральные характеристики однородного слоя. Многочисленные сравнения экспериментальных данных и результатов расчетов по методике Куртиса — Годсона указывают на удовлетворительную точность этой методики. Более того, авторы [54] считают, что погрешность теоретических расчетов обусловлена не приближенным характером методики, а в основном некорректностью используемых моделей.

В заключение кратко остановимся на методике расчета неоднородных молекулярных газов, предложенной Симмонсом [55] и фактически представляющей несколько видоизмененную методику Куртиса — Годсона. Для упрощения рассмотрим случай изолированных линий. Вместо

$$k_{\nu}(z) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{S(z) \gamma(z)}{(\nu - \nu_0)^2 + \gamma^2(z)}$$

Симмонс предложил использовать величину

$$k_{\nu}(z) = \frac{1}{\pi} F(P, T) \frac{S(z_0) \gamma_0}{(\nu - \nu_0)^2 + \gamma_0^2}. \quad (6.34)$$

Здесь

$$\gamma_0 = \frac{1}{z_0} \int_0^{z_0} \gamma(z) \frac{T_0}{T(z)} dz, \quad T_0 = z_0 \left[\int_0^{z_0} \frac{dz}{T(z)} \right]^{-1}, \quad (6.35)$$

$$F(P, T) = \left[\frac{\gamma(z)}{\gamma_0} \right]^{\eta}, \quad \eta = L(\omega) \sqrt{\frac{\pi}{2\omega}}, \quad \omega \cong 0,05 z_0 P,$$

$L(\omega)$ — функция Ладенбурга — Райхе.

Как нетрудно заметить, соотношение (6.34) действительно переходит в формулы приближений слабой и сильной линий при $\omega \ll 1$ и $\omega \gg 1$ соответственно:

$$\omega \ll 1, \quad \eta \rightarrow 0, \quad k_{\nu}(z) = \frac{S(z)}{\pi} \cdot \frac{\gamma_0}{(\nu - \nu_0)^2 + \gamma_0^2},$$

$$\omega \gg 1, \quad f(\omega) \approx \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}, \quad \eta \rightarrow 1,$$

$$k_{\nu}(z) = \frac{S(z)}{\pi} \cdot \frac{\gamma(z)}{\gamma_0} \cdot \frac{\gamma_0}{(\nu - \nu_0)^2 + \gamma_0^2}.$$

В данном случае пропускание неоднородного слоя в случае (6.34) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \bar{T}_v &= \int_{-\infty}^{\infty} dv \exp \left[-\frac{\gamma_0/\pi}{v^2 + \gamma_0^2} \int_0^{z_0} S(z) F(z) dz \right] = \\ &= \frac{2\pi\gamma_0}{d} L \left\{ \frac{1}{2\pi\gamma_0} \int_0^{z_0} S(z) F(z) dz \right\}. \end{aligned} \quad (6.36)$$

§ 5. Распространение излучения в среде при полном перераспределении по частотам

Исследование распространения излучения в среде с учетом перераспределения по частотам является одним из труднейших разделов современной теории переноса лучистой энергии. Эта проблема, возникшая в астрофизике при интерпретации спектров небесных тел, в настоящее время чрезвычайно важна для многих разделов физики: физики плазмы, радиационной газодинамики, теоретической и прикладной спектроскопии и т. д. Учет перераспределения по частотам при распространении излучения в среде связан с большими математическими трудностями, и поэтому обычно прибегают к отысканию асимптотических решений уравнения переноса [11, 56—58] либо к непосредственному численному его решению [8, 9, 12, 58, 59]. Современное состояние этой проблемы подробно изложено в [11]. Рассмотрим основные результаты решения уравнения переноса излучения в спектральных линиях.

Введем обозначения:

$$x = \frac{v - v_0}{\gamma}, \quad k(v) = k(v_0) \alpha_1(x), \quad d\tau = k(v_0) dz \quad (6.37)$$

(γ_0 — центр спектральной линии; γ — ее полуширина).

Функция $\alpha_1(x) = A\alpha(x)$ определяет контур спектральной линии, и для нее можно положить условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha_1(x) dx = A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x) dx = 1. \quad (6.38)$$

Тогда для лоренцевского, допллеровского и **комбинированного** (фойгтовского) контуров спектральных **линий** соответственно имеем:

$$\gamma_L = (\gamma_L)_0 \frac{P}{P_0} \left(\frac{T_0}{T} \right)^{1/2}, \quad \alpha_L(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad A_L = \frac{1}{\pi}, \quad (6.39)$$

$$\gamma_D = \frac{v_0}{c} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{1/2}, \quad \alpha_D(x) = e^{-x^2}, \quad A_D = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad (6.40)$$

$$\gamma_v \equiv \gamma_D, \quad \alpha_v(x) = \frac{U(a, x)}{U(a, 0)}, \quad A_v = U(a, 0). \quad (6.41)$$

Здесь P и T — давление и температура исследуемой среды; m — масса молекулы; k — постоянная Больцмана, а функция Фойгта $U(a, x)$ определяется выражением (2.20).

В принятых обозначениях с учетом соотношения (2.8) уравнение переноса излучения для плоского слоя можно записать в виде [11]

$$\begin{aligned} \mu \frac{dI_x(\tau, \mu)}{d\tau} = & -\alpha(x) I_x(\tau, \mu) + \\ & + \frac{\lambda}{2} A \alpha(x) \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x') dx' \int_{-1}^1 I_{x'}(\tau, \mu') d\mu' + \alpha(x) \varepsilon_0(\tau), \end{aligned} \quad (6.42)$$

где величина $\alpha(x) \varepsilon_0(\tau) \equiv \frac{J_0(\tau)}{k(v_0)}$ характеризует распределение источников излучения внутри среды.

За граничные условия для уравнения (6.42) можно принять условия (1.47). В дальнейшем будем рассматривать полубесконечную среду. Для слоя конечной оптической толщины приведем лишь основные результаты.

Обычно вместо уравнения (6.42) рассматривают интегральное уравнение для функции источников $\varepsilon(\tau)$:

$$\varepsilon(\tau) = \frac{\lambda}{2} A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x') dx' \int_{-1}^1 I_{x'}(\tau, \mu') d\mu' + \varepsilon_0(\tau). \quad (6.43)$$

Интегральное уравнение для $\varepsilon(\tau)$ нетрудно получить, формально решая уравнение (6.42):

$$\mu \frac{dI_x(\tau, \mu)}{d\tau} = -\alpha(x) I_x(\tau, \mu) + \alpha(x) \varepsilon(\tau)$$

и подставляя его решение

$$I_x(\tau, \mu) = \begin{cases} \alpha(x) e^{-\frac{\alpha(x)}{\mu} \tau} \int_0^{\tau} \varepsilon(\tau') e^{\frac{\alpha(x)}{\mu} \tau'} \frac{d\tau'}{\mu} & \text{для } \mu > 0, \\ -\alpha(x) e^{-\frac{\alpha(x)}{\mu} \tau} \int_{\tau}^{\tau_0} \varepsilon(\tau') e^{\frac{\alpha(x)}{\mu} \tau'} \frac{d\tau'}{\mu} & \text{для } \mu < 0 \end{cases} \quad (6.44)$$

в соотношение (6.43). Это интегральное уравнение можно записать в виде [11]

$$\varepsilon(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} K(|\tau - \tau'|) \varepsilon(\tau') d\tau' + \varepsilon_0(\tau), \quad (6.45)$$

где

$$K(\tau) = A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2(x) E_1[\alpha(x)\tau] dx. \quad (6.46)$$

Уравнение (6.45) можно преобразовать, если принять во внимание, что в соотношении (6.44) величины $\alpha(x)$ и μ входят в одной и той же комбинации. Обозначая $\frac{\mu}{\alpha(x)} = \zeta$, функцию источников $\varepsilon(\tau)$ можно переписать в виде

$$\varepsilon(\tau) = \frac{\lambda}{2} A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2(x') dx' \int_{-\frac{1}{\alpha(x')}}^{\frac{1}{\alpha(x')}} I(\tau, \zeta') d\zeta' + \varepsilon_0(\tau)$$

или

$$\varepsilon(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} I(\tau, \zeta') G(\zeta') d\zeta' + \varepsilon_0(\tau), \quad (6.47)$$

где

$$G(\zeta) = \begin{cases} a_1 = A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2(x') dx' & \text{при } |\zeta| \leq 1, \\ 2A \int_{x(\zeta)}^{\infty} \alpha^2(x') dx' & \text{при } |\zeta| > 1. \end{cases} \quad (6.48)$$

Заметим, что в случае замены $\frac{\mu}{\alpha(x)} = \zeta$

$$I_x(\tau, \mu) \equiv I(\tau, \mu, x) = I(\tau, \zeta).$$

В (6.48) функция $x(\zeta)$ определяется из условия

$$\alpha[x(\zeta)] = \frac{1}{|\zeta|}, \quad x(\zeta) > 0.$$

Так как

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} I(\tau, \zeta') G(\zeta') d\zeta' = \\ & = A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x') dx' \int_{-1}^1 I\left(\tau, \frac{\mu'}{\alpha(x')}\right) d\mu', \end{aligned}$$

то при $I \equiv 1$

$$\int_0^{\infty} G_L(\zeta) d\zeta = 1.$$

Другим свойством функции $G(\zeta)$ является, как нетрудно убедиться,

$$G(\zeta) = G(-\zeta).$$

Для лоренцевского и доплеровского контуров спектральных линий функция $G(\zeta)$ соответственно равна:

$$G_L(\zeta) = \begin{cases} a_1^L = \frac{1}{2}, & |\zeta| \leq 1, \\ \frac{1}{\pi} \left(\arcsin \frac{1}{\sqrt{\zeta}} - \frac{\sqrt{\zeta-1}}{\zeta} \right), & |\zeta| > 1, \end{cases} \quad (6.49)$$

$$G_D(\zeta) = \begin{cases} a_1^D = \frac{1}{\sqrt{2}}, & |\zeta| \leq 1, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{2 \ln \zeta}} e^{-t^2} dt \right), & |\zeta| > 1. \end{cases} \quad (6.50)$$

Для упрощения дальнейшего рассмотрения исследуемого вопроса будем полагать, что в среде бесконечной оптической толщины источники излучения равномерно распределены, т. е.

$$\varepsilon_0(\tau) = \varepsilon_0 = \text{const.} \quad (6.51)$$

Дифференцируя по τ интегральное уравнение для $\varepsilon(\tau, \lambda)$, находим:

$$\varepsilon'(\tau, \lambda) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} K(|\tau - \tau'|) \varepsilon'(\tau, \lambda) d\tau' + \frac{\lambda}{2} \varepsilon(0, \lambda) K(\tau). \quad (6.52)$$

Из сравнения этого уравнения с уравнением для функции (5.44) получаем:

$$\varepsilon'(\tau, \lambda) = \varepsilon(0, \lambda) \Phi(\tau, \lambda). \quad (6.53)$$

Так как при $\tau \rightarrow \infty$ $\varepsilon(\tau, \lambda) = \frac{\varepsilon_0}{1 - \lambda}$, т. е. $\varepsilon(\tau, \lambda)$ стремится к функции источников для бесконечной среды, то по (6.53)

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_0}{1 - \lambda} &= \varepsilon(0, \lambda) \left[1 + \int_0^{\infty} \Phi(\tau', \lambda) d\tau' \right] = \\ &= \varepsilon(0, \lambda) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda}} - 1 \right) \end{aligned}$$

или

$$\varepsilon(0, \lambda) = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{1 - \lambda}}. \quad (6.54)$$

Следовательно,

$$\varepsilon(\tau, \lambda) = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{1 - \lambda}} \left[1 + \int_0^{\tau} \Phi(\tau', \lambda) d\tau' \right]. \quad (6.55)$$

Рассчитав $\varepsilon(\tau, \lambda)$ по (6.55), можно получить интенсивность излучения, выходящего из слоя:

$$I(0, \mu, x, \lambda) = \int_0^{\infty} \varepsilon(\tau, \lambda) e^{-\frac{\alpha(x)}{\mu} \tau} \alpha(x) \frac{d\tau}{\mu}.$$

Подставляя сюда (6.55) и интегрируя по частям, находим:

$$I(0, \mu, x, \lambda) = \frac{\varepsilon_0}{1 - \lambda} H\left(\frac{\mu}{\alpha(x)}, \lambda\right), \quad (6.56)$$

где функция $H(\zeta, \lambda)$, являющаяся обобщением функции Амбарцумяна, удовлетворяет уравнению [11]

$$H(\zeta, \lambda) = 1 + \frac{\lambda}{2} \zeta H(\zeta, \lambda) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H(\zeta', \lambda)}{\zeta + \zeta'} d\zeta'. \quad (6.57)$$

При условии локального термодинамического равновесия функция источников имеет вид (см. § 5, гл. 6)

$$\varepsilon_0(\tau) = (1 - \lambda) B(T). \quad (6.58)$$

Здесь $B(T)$ — интенсивность планковской радиации при температуре T .

Заметим, что при решении уравнения переноса излучения в спектральной линии частотной зависимостью функции $B(T)$ можно пренебречь. Тогда по (6.56)

$$I(0, \mu, x, \lambda) = \sqrt{1 - \lambda} B(T) H\left(\frac{\mu}{\alpha(x)}, \lambda\right). \quad (6.59)$$

На рис. 14 приведена частотная зависимость степени черноты полубесконечного слоя

$$E = \frac{I(0, \mu, x, \lambda)}{B(T)}$$

для доплеровского контура спектральной линии при различных значениях вероятности выживания кванта и угла наблюдения. Из рисунка видно, что среда излучает планковскую радиацию, на фоне которой отчетливо виден профиль спектральной линии, причем картина стано-

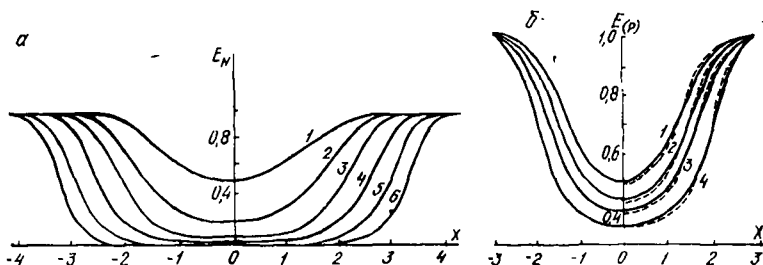


Рис. 14. Степень черноты полубесконечного слоя при различных значениях вероятности выживания кванта (а) и угла наблюдения (б):

для (а): 1— $\lambda=10^{-1}$; 2— 10^{-2} ; 3— 10^{-3} ; 4— 10^{-4} ; 5— 10^{-5} ; 6— 10^{-6} ; для (б): 1— $\lambda=10^{-1}$, $1-\mu=1$ (E_N), 2— $\mu=0,5$, 3— $0,3$, 4— $0,1$; — — расчет по формуле (6.85а)

вятся более четкой с увеличением вероятности выживания кванта и угла наблюдения.

Интерес представляет и задача о диффузном отражении параллельного пучка монохроматического излучения. Заметим, что эта задача аналогична рассмотрению распределения излучения в среде, где источники экспоненциально убывают с глубиной.

В случае диффузного отражения задача сводится к отысканию функции источников из уравнения

$$e(\tau, \mu_0, x_0) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} K(|\tau - \tau'|) e(\tau', \mu_0, x_0) d\tau' + \frac{\lambda A}{4\pi\Delta\nu} \alpha(x_0) e^{-\frac{\alpha(x_0)}{\mu} \tau}, \quad (6.60)$$

где $\theta_0 = \arccos \mu_0$ — угол падения внешнего излучения, а x_0 — его безразмерная частота.

При введении функции

$$p(\tau, \zeta_0) = \frac{\Delta\nu}{A\alpha(x_0)} e(\tau, \mu_0, x_0)$$

по (5.34) решение нашей задачи можно записать в виде

$$I(0, \zeta) = \frac{A}{\Delta\nu} \int_0^{\infty} p(\tau, \zeta) e^{-\frac{\tau}{\zeta_0}} \alpha(x_0) \frac{d\tau}{\zeta}, \quad (6.61)$$

где $\zeta_0 = \mu_0/\alpha(x_0)$.

Для отыскания $p(\tau, \zeta)$ умножим уравнение (5.35) на $e^{-\frac{\tau}{\zeta_0}}$ и проинтегрируем его по τ от 0 до ∞ :

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{\zeta_0}} \frac{\partial p(\tau, \zeta)}{\partial \tau} d\tau = -\frac{1}{\zeta_0} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{\zeta_0}} p(\tau, \zeta) d\tau +$$

$$+ \frac{\lambda}{4\pi} H(\zeta, \lambda) \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{\zeta_0}} \Phi(\tau) d\tau$$

или

$$-\frac{\lambda}{4\pi} H(\zeta, \lambda) + \frac{1}{\zeta_0} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{\zeta_0}} p(\tau, \zeta) d\tau =$$

$$= -\frac{1}{\zeta} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{\zeta_0}} p(\tau, \zeta) d\tau + \frac{\lambda}{4\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{\zeta_0}} \Phi(\tau) d\tau.$$

Так как

$$H(\zeta, \lambda) = 1 + \int_0^{\infty} \Phi(\tau') e^{-\frac{\tau'}{\zeta}} d\tau',$$

то имеем окончательно:

$$I(0, \zeta) = \frac{\lambda A \mu_0}{4\pi \Delta v} \cdot \frac{H(\zeta, \lambda) H(\zeta_0, \lambda)}{\zeta + \zeta_0} \quad (6.62)$$

и при возвращении к старым переменным:

$$I(0, \mu, x) =$$

$$= \frac{\lambda A}{4\pi \Delta v} \cdot \frac{H\left(\frac{\mu}{\alpha(x)}, \lambda\right) H\left(\frac{\mu_0}{\alpha(x_0)}, \lambda\right)}{\mu + \mu_0 \frac{\alpha(x)}{\alpha(x_0)}} \alpha(x) \mu_0. \quad (6.63)$$

Для анализа спектральной зависимости отраженного излучения введем безразмерную величину

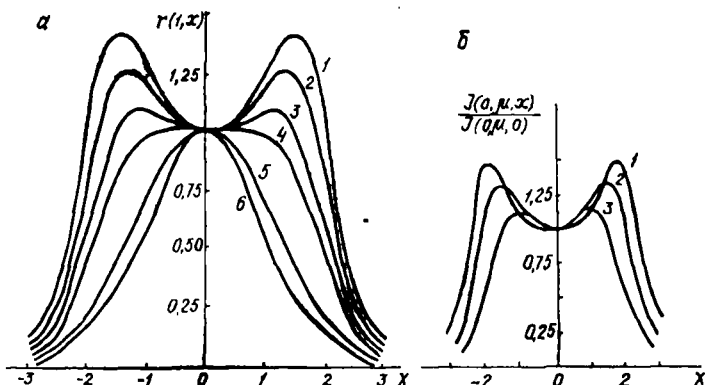


Рис. 15. Зависимость интенсивности выходящего излучения от параметра $\zeta_0 = \mu_0 / \alpha(x_0)$ (а) и угла наблюдения (б):

для (а): 1— $1/\zeta_0=0,15$; 2— $0,2$; 3— $0,3$; 4— $0,5$; 5— $2,0$; 6— $\zeta_0 \rightarrow 0$; для (б): 1/ $\zeta_0=0,3$,
1— $\mu=0$; 2— $0,3$; 3— $1,0$

$$r(\mu, x) = \frac{I(0, \mu, x)}{I(0, 1, 0)} = \frac{[\mu_0 + \alpha(x_0)] \alpha(x) H\left(\frac{\mu}{\alpha(x)}, \lambda\right)}{[\mu \alpha(x_0) + \mu_0 \alpha(x)] H(1, \lambda)} \quad (6.64)$$

Так как функция $H(\zeta, \lambda)$ протабулирована в настоящее время достаточно подробно [11], то соотношение (6.64) можно рассчитать численно. Случай чистого рассеяния ($\lambda = 1$) изображен на рис. 15. При $\zeta_0 = \frac{\mu_0}{\alpha(x_0)} \ll 1$, т. е. при

падении внешнего излучения под малыми углами при x_0 , близком к центру линии, отчетливо наблюдается линия излучения, ширина которой растет с увеличением ζ_0 . При некотором значении ζ_0 начинает появляться провал в центре линии. При дальнейшем увеличении ζ_0 глубина провала и расстояние между максимумами увеличиваются. Таким образом, при падении излучения с частотой в области крыльев линий ($\zeta_0 \rightarrow \infty$, $\mu_0 \neq 0$) функция $r(\mu, x)$ становится возрастающей, что объясняется проникновением внешнего излучения на довольно большие глубины. При $\zeta_0 \rightarrow \infty$ имеем:

$$r(\mu, x) = \frac{H\left(\frac{\mu}{\alpha(x)}, \lambda\right)}{H(1, \lambda)} \quad (6.65)$$

Альbedo полубесконечной среды в нашем случае определяется выражением

$$\begin{aligned}
 A_{\zeta_0} &= \frac{E}{E_0} = \frac{2\pi}{\mu_0} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_0^1 I(0, \mu, x) \mu d\mu = \\
 &= \frac{\lambda}{2} AH(\zeta_0, \lambda) \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_0^1 \frac{H\left(\frac{\mu}{\alpha(x)}, \lambda\right)}{\frac{\mu}{\alpha(x)} + \zeta_0} \mu d\mu = \\
 &= \frac{\lambda}{2} AH(\zeta_0, \lambda) \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_0^{\frac{1}{\alpha(x)}} \frac{\zeta H(\zeta, \lambda)}{\zeta + \zeta_0} d\zeta = \\
 &= \frac{\lambda}{2} H(\zeta_0, \lambda) \int_0^{\infty} \frac{\zeta H(\zeta, \lambda)}{\zeta + \zeta_0} G(\zeta) d\zeta
 \end{aligned}$$

или, так как по (6.59) и (6.63)

$$\frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} \frac{\zeta H(\zeta, \lambda)}{\zeta + \zeta_0} G(\zeta) d\zeta = \frac{1}{H(\zeta_0, \lambda)} - \sqrt{1 - \lambda},$$

имеем окончательно:

$$A_{\zeta_0} = 1 - H(\zeta_0, \lambda) \sqrt{1 - \lambda}. \quad (6.66)$$

Соотношение (6.66), а также некоторые другие выражения, полученные в этом параграфе, аналогичны соответствующим выражениям для монохроматического излучения.

В заключение отметим, что решение подобных задач для слоя конечной оптической толщины получить гораздо сложнее. В. В. Ивановым [11] приведены выражения для интенсивности выходящего излучения в случае

$$\varepsilon_0(\tau) = \sum_{l=1}^n \varepsilon_{0l} \exp\left(-\frac{\tau}{\zeta_0}\right).$$

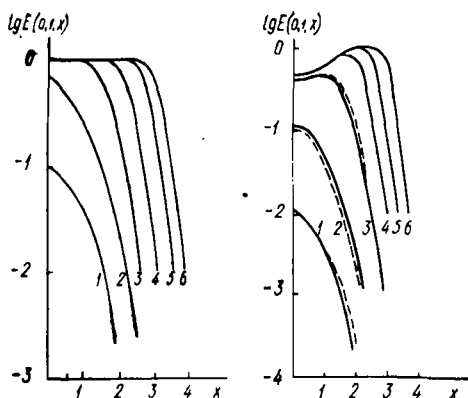


Рис. 16. Степень черноты плоского слоя при различных значениях оптической толщины для $\lambda=0$ (слева) и $\lambda=0,9$ (справа):

1— $\tau_0=10^{-1}$; 2— 10^0 ; 3— 10^1 ; 4— 10^2 ; 5— 10^3 ; 6— 10^4 ; — — — расчет по формуле (6.85)

При равномерном распределении источников ($n=1$, $\zeta_0 \rightarrow \infty$, $\epsilon_{01} = \text{const}$) степень черноты слоя равна

$$E = X(\infty) [X(\zeta) - Y(\zeta)] \zeta \frac{\alpha(x)}{\mu}, \quad (6.67)$$

где $X(\zeta)$ и $Y(\zeta)$ являются обобщениями функций Амбарцумяна для слоя конечной оптической толщины:

$$X(\tau_0, \zeta) = 1 + \int_0^{\tau_0} e^{-\frac{\tau}{\zeta}} \Phi(\tau, \tau_0) d\tau, \quad (6.68)$$

$$Y(\tau_0, \zeta) = e^{-\frac{\tau_0}{\zeta}} + \int_0^{\tau_0} e^{-\frac{\tau_0-\tau}{\zeta}} \Phi(\tau, \tau_0) d\tau.$$

Из (6.68) видно, что при $\tau_0 \rightarrow \infty$

$$X(\tau_0, \zeta) \rightarrow H(\zeta, \lambda), \quad Y(\tau_0, \zeta) \rightarrow 0.$$

Данные расчета соотношения (6.67) изображены на рис. 16.

§ 6*. Приближенный метод расчета
 спектроскопических характеристик свечения
 плоской среды при полном перераспределении
 излучения по частотам

Представим функцию источников (6.43) в виде

$$e(\tau) = \frac{\lambda}{2} A [I_1(\tau) + I_2(\tau)] + e_0(\tau). \quad (6.69)$$

Здесь величины

$$\begin{aligned} I_1(\tau) &= \int_{-\infty}^{\tau} \alpha(x) dx \int_0^1 I(\tau, \mu, x) d\mu = \\ &= \int_0^{\tau} e(\tau') d\tau' \int_{-\infty}^{\tau} \alpha^2(x) E_1[\alpha(x)(\tau - \tau')] dx \end{aligned} \quad (6.70)$$

и

$$\begin{aligned} I_2(\tau) &= \int_{-\infty}^{\tau} \alpha(x) dx \int_{-1}^0 I(\tau, \mu, x) d\mu = \\ &= \int_{\tau}^{\tau_0} e(\tau') d\tau' \int_{-\infty}^{\tau} \alpha^2(x) E_1[\alpha(x)(\tau' - \tau)] dx \end{aligned} \quad (6.71)$$

представляют собой интенсивности излучения, усредненные как по направлениям, так и по частотам с весом безразмерного контура спектральной линии. Такое представление позволяет свести исходное интегродифференциальное уравнение к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} [m_i(\tau) I_i(\tau)] &= -n_i(\tau) I_i(\tau) + \\ &+ a \sum_k I_k(\tau) + p e_0(\tau), \quad i, k = 1, 2, \end{aligned} \quad (6.72)$$

где

$$p = \int_{-\infty}^{\tau} \alpha^2(x) dx, \quad a = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\tau} \alpha^2(x) dx / \int_{-\infty}^{\tau} \alpha(x) dx, \quad (6.73)$$

а коэффициенты $m_i(\tau)$ и $n_i(\tau)$ ($i = 1, 2$) являются пока неопределенными функциями:

$$m_1(\tau) = \frac{1}{I_1(\tau)} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x) dx \int_0^1 \mu I(\tau, \mu, x) d\mu =$$

$$= \frac{1}{I_1(\tau)} \int_0^{\tau} \varepsilon(\tau') d\tau' \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2(x) E_2[\alpha(x)(\tau - \tau')] dx, \quad (6.74a)$$

$$m_2(\tau) = \frac{1}{I_2(\tau)} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x) dx \int_{-1}^0 \mu I(\tau, \mu, x) d\mu =$$

$$= -\frac{1}{I_2(\tau)} \int_{\tau}^{\tau_0} \varepsilon(\tau') d\tau' \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2(x) E_2[\alpha(x)(\tau' - \tau)] dx, \quad (6.74b)$$

$$n_1(\tau) = \frac{1}{I_1(\tau)} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2(x) dx \int_0^1 I(\tau, \mu, x) d\mu =$$

$$= \frac{1}{I_1(\tau)} \int_0^{\tau} \varepsilon(\tau') d\tau' \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^3(x) E_1[\alpha(x)(\tau - \tau')] dx, \quad (6.75a)$$

$$n_2(\tau) = \frac{1}{I_2(\tau)} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2(x) dx \int_1^0 I(\tau, \mu, x) d\mu =$$

$$= \frac{1}{I_2(\tau)} \int_{\tau}^{\tau_0} \varepsilon(\tau') d\tau' \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^3(x) E_1[\alpha(x)(\tau' - \tau)] dx. \quad (6.75b)$$

Граничные условия для системы уравнений (6.72) можно записать в виде

$$I_1(0) = 0, \quad I_2(\tau_0) = 0. \quad (6.76)$$

Выражения (6.74) и (6.75), которыми существенно определяется анализ системы уравнений (6.72), являются, как нетрудно заметить, своеобразными обобщениями среднего

косинуса и первого момента спектральной линии. Из этих выражений видно, что

$$|m_1(\tau)| = |m_2(\tau_0 - \tau)| \text{ и } n_1(\tau) = n_2(\tau_0 - \tau). \quad (6.77)$$

Конкретный вид коэффициентов $m_i(\tau)$ и $n_i(\tau)$ можно установить при рассмотрении светового поля на больших глубинах. В этом случае можно воспользоваться условием [11], что

$$e(\tau) |_{\tau \rightarrow \infty} \rightarrow e_0 / (1 - \dots) \quad (6.78)$$

Полагая $e_0 = \text{const}$ (источники излучения равномерно распределены в среде), находим:

$$m_1(\tau) = -m_2(\tau) \rightarrow \frac{1}{2},$$

$$n_1(\tau) = n_2(\tau) = n_0 \rightarrow \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2(x) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x) dx}. \quad (6.79)$$

В случае лоренцевского уширения спектральной линии $n_0^L = \frac{1}{2}$, а доплеровского $n_0^D = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Как показано в дальнейшем, соотношения (6.79) можно установить из чисто физических соображений. Для получения приближенного аналитического решения имеет смысл на первом этапе исследований положить $m_1 = -m_2 = m = \text{const}$ и $n_1 = n_2 = n = \text{const}$. В данном случае система уравнений (6.72) при граничных условиях (6.76) решается достаточно просто и функцию источников, согласно (6.69), можно записать в следующем виде:

$$e(\tau) = e_0 \left\{ 1 + \frac{2a}{n - 2a} \left[1 - \frac{1 + R}{2} \cdot \frac{e^{-k\tau} + e^{-k(\tau_0 - \tau)}}{1 + R e^{-k\tau_0}} \right] \right\}, \quad (6.80)$$

где

$$k = \frac{1}{m} \sqrt{n(n - 2a)}, \quad R = \frac{1}{a} [n - a - \sqrt{n(n - 2a)}]. \quad (6.81)$$

Применение условия (6.78) к выражению (6.80) определяет значение коэффициента n , в точности совпадающее с (6.79). Использование этого значения n значительно упрощает полученные выражения (6.80) и (6.81):

$$e(\tau) = \frac{e_0}{1-\lambda} \left[1 - (1 - \sqrt{1-\lambda}) \frac{e^{-k\tau} + e^{-k(\tau_0-\tau)}}{1 + Re^{-k\tau_0}} \right], \quad (6.82)$$

$$k = \frac{\rho A}{m} \sqrt{1-\lambda}, \quad R = \frac{1}{\lambda} (2 - \lambda - 2\sqrt{1-\lambda}). \quad (6.83)$$

Следует отметить, что указанный выбор постоянной n не ухудшает расчета функции источников для малых оптических толщин. Действительно, для полубесконечной среды при $\tau \rightarrow 0$ находим:

$$e(\tau) |_{\tau \rightarrow 0, \tau_0 \rightarrow \infty} = \sqrt{1-\lambda} e_0, \quad (6.84)$$

что совпадает с точным решением уравнения переноса излучения [59].

С помощью выражения (6.82) нетрудно найти интенсивность излучения с учетом полного перераспределения по частотам. Так, например, для излучения, выходящего из среды конечной оптической толщины,

$$I(0, \mu, x) = \frac{e_0}{1-\lambda} \left\{ 1 - e^{-\frac{\tau_0}{\zeta}} - \frac{1 - \sqrt{1-\lambda}}{1 + Re^{-k\tau_0}} \left[\frac{1 - e^{-\frac{\tau_0}{\zeta} - (1+k\zeta)\frac{\tau_0}{\zeta}}}{1 + k\zeta} + \frac{e^{-k\tau_0} - e^{-\frac{\tau_0}{\zeta}}}{1 - k\zeta} \right] \right\}, \quad (6.85)$$

где введено обозначение

$$\zeta = \frac{\mu}{\alpha(x)}. \quad (6.86)$$

То, что интенсивность излучения зависит от отношения величин μ и $\alpha(x)$, говорит о физической тождественности влияния таких факторов, как угол наблюдения и исследуемая частота, при рассмотрении распространения излучения с учетом перераспределения по частотам. Выражения (6.82) и (6.85) особенно просты в случае полубесконечного слоя:

$$e(\tau) = \frac{e_0}{1-\lambda} [1 - (1 - \sqrt{1-\lambda}) e^{-k\tau}] \quad (6.82a)$$

и

$$I(0, \mu, x) = \frac{e_0}{1-\lambda} \left(1 - \frac{1 - \sqrt{1-\lambda}}{1 + k\xi} \right). \quad (6.85a)$$

Полученные в этом параграфе выражения для $e(\tau)$ и $I(0, \mu, x)$ просты и удобны для практического использования и, как показывают численные расчеты, хорошо совпадают с результатами точных расчетов уравнения переноса излучения [8, 9, 58, 59]. Численные расчеты выражений (6.85) и (6.85a) в зависимости от частоты, оптической толщины, угла наблюдения и скорости выживания кванта показаны на рис. 14 и 16 наряду с результатами численного интегрирования уравнения переноса [8, 9, 12, 58, 59]. В областях $\lambda > 0,99$, представляющих интерес для астрофизических исследований, указанными соотношениями для $e(\tau)$ и $I(\tau, \mu, x)$ следует пользоваться с осторожностью. В этих случаях более корректно использовать асимптотические решения уравнения переноса излучения согласно [11] или, в крайнем случае, вводить необходимые поправки в выражение для m и, следовательно, для k .

Глава (7)

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

§ 1. Проблема распространения узкого пучка излучения

Распространение **узкого** пучка излучения в светорассеивающей и поглощающей среде давно привлекает внимание ученых. Эта задача является наиболее важной при изучении светового поля, создаваемого в исследуемой среде ограниченными в пространстве источниками радиации. В настоящее время вопрос об изучении закономерностей распространения светового узкого пучка является актуальным и в связи с разработкой вопросов лазерной локации.

Необходимость определения характеристик светового поля, создаваемого узким пучком излучения, появилась, по существу, впервые при зондировании атмосферы прожекторным лучом. При этом, естественно, возникли две основные задачи: а) определение видимости в атмосфере удаленных предметов, освещаемых прожекторным лучом, и б) изучение оптических характеристик атмосферы с помощью прожекторного луча. В первых работах [60, 61] при весьма частных предположениях о свойствах исследуемой среды и условиях проведения эксперимента в приближении одно- и двукратного рассеяния сделана оценка видимости предмета, освещенного прожекторным лучом. В приближении однократного рассеяния яркость прожекторного луча под некоторым углом θ к направлению распространения луча определяется выражением [61]

$$I(\theta) = \frac{\sigma(\theta) l}{4\pi} \cdot \frac{\text{sh} \left(\alpha l \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)}{\alpha l \sin^2 \frac{\theta}{2}} E(z_0) e^{-\alpha z_0}. \quad (7.1)$$

Здесь $\sigma(\theta)$ и l — коэффициент рассеяния и толщина пучка в направлении θ соответственно; α — коэффициент

ослабления среды; $E(z_0)$ — освещенность центра прожекторного луча на расстоянии z_0 от точки наблюдения.

Наиболее полными теоретическими исследованиями распространения прожекторного луча являются в настоящее время работы Розенберга и Фейгельсон, основные результаты которых изложены в [62]. Сравнение полученных теоретических результатов с многочисленными экспериментальными данными показывает, что расчеты качественно согласуются с экспериментом. Точные совпадения, конечно, трудно получить вследствие изменчивости атмосферных условий, а также существования неоднородного распределения оптических характеристик в реальной атмосфере. Именно поэтому большое значение имеет постановка эксперимента по изучению распространения узкого пучка излучения в лабораторных условиях [63]. Основная трудность эксперимента связана с необходимостью регистрации чрезвычайно малых световых потоков по сравнению с потоками самого пучка (рис. 17). При увеличении оптической толщины среды по нормали к ее поверхности τ_h , как показывает рис. 17, в сильной степени возрастает роль процессов рассеяния, причем величина максимума излучения постепенно сглаживается, а его положение существенно определяется направлением наблюдения.

Закономерности распространения узкого светового пучка можно достаточно просто и качественно правильно определить, решая уравнение переноса излучения в приближении Шварцшильда — Шустера с использованием осевой симметрии задачи и представления искомой интенсивности в виде суммы прямой и рассеянной радиации [64].

Идея использования усредненных по направлению характеристик светового поля в среде с ограниченными источниками излучения широко используется в настоящее время [65—70].

В цилиндрической системе координат уравнение переноса излучения имеет вид [68—71]

$$\cos \theta \frac{\partial I(t, \tau, \theta, \varphi)}{\partial t} + \sin \theta \cos \varphi \frac{\partial I(t, \tau, \theta, \varphi)}{\partial \tau} - \frac{\sin \theta \sin \varphi}{\tau} \cdot \frac{\partial I(t, \tau, \theta, \varphi)}{\partial \varphi} = -I(t, \tau, \theta, \varphi) +$$

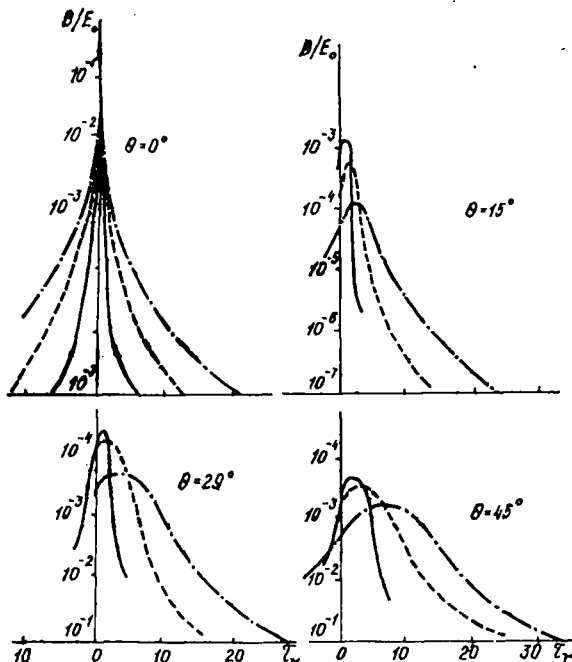


Рис. 17. Распределение светового поля в среде, освещаемой узким пучком излучения ($\lambda=0,9$) [63]:

$$-\tau_h = 4,8; \quad \text{---} \tau_h = 9,4; \quad \text{-}\cdot\text{-} \tau_h = 16,6$$

$$+ \frac{\lambda}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} p(\theta, \varphi; \theta', \varphi') I(t, \tau; \theta', \varphi') \sin \theta' d\theta' d\varphi', \quad (7.2)$$

где $t = az$ и $\tau = ar$ — оптические глубины вдоль осей z и r .
Это уравнение с помощью усредненных величин

$$I = \int_{(4\pi)} I \frac{d\Omega}{4\pi}, \quad F_i = \int_{(4\pi)} I n_i \frac{d\Omega}{4\pi},$$

$$K_{ij} = \int_{(4\pi)} I n_i n_j \frac{d\Omega}{4\pi}, \quad (7.3)$$

где n_i — направляющие косинусы, можно представить системой трех обыкновенных дифференциальных уравнений. В приближении Эддингтона [65—67]:

$$K_{ij} = \frac{1}{3} J \text{ при } i = j \text{ и } K_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j \quad (7.4)$$

система уравнений сводится к следующему уравнению для определения средней интенсивности излучения:

$$\Delta J(t, r) - k^2 J(t, r) = -s_0(t, r) \quad (7.5)$$

где $k^2 = 3(1 - \lambda)$ для сферической индикатрисы рассеяния на элементарном объеме среды, а $s_0(t, r)$ определяет распределение источников излучения в исследуемой среде.

С помощью уравнения (7.5) можно решить целый круг задач по определению светового поля в среде, создаваемого точечным и линейным источниками излучения, а также коллимированным световым пучком. Так, в случае коллимированного пучка, падающего на полубесконечную светорассеивающую среду, решение для освещенной ($\rho < \rho_0$) и неосвещенной ($\rho > \rho_0$) частей среды имеет следующий вид [68]:

$$J(z, \rho) = \begin{cases} \frac{3\lambda S_0}{4(1 - k^2)} \left(\frac{5e^{-kz}}{3 + 2k} - e^{-z} \right) - \\ - \frac{45\lambda S_0}{2\pi} \int_0^{\infty} f_0(z, \xi) f_1(\rho, \xi) d\xi \quad (\rho < \rho_0), \\ \frac{45\lambda S_0}{2\pi} \int_0^{\infty} f_0(z, \xi) f_2(\rho, \xi) d\xi \quad (\rho > \rho_0), \end{cases} \quad (7.6)$$

где

$$f_0(z, \xi) = \frac{\xi (k\xi \cos kz\xi + \sin kz\xi)}{(1 + \xi^2)(1 + k^2\xi^2)(9 + 4k^2\xi^2)},$$

$$f_1(\rho, \xi) = \frac{1}{1 + \Delta}, \quad f_2(\rho, \xi) = \frac{\Delta}{1 + \Delta},$$

$$\Delta = \frac{I_1(k\rho \sqrt{1 + \xi^2}) K_0(k\rho \sqrt{1 + e^2})}{I_0(k\rho \sqrt{1 + \xi^2}) K_1(k\rho \sqrt{1 + \xi^2})},$$

$I_n(x)$ и $K_n(x)$ — функции Бесселя первого и второго рода n -го порядка от мнимого аргумента.

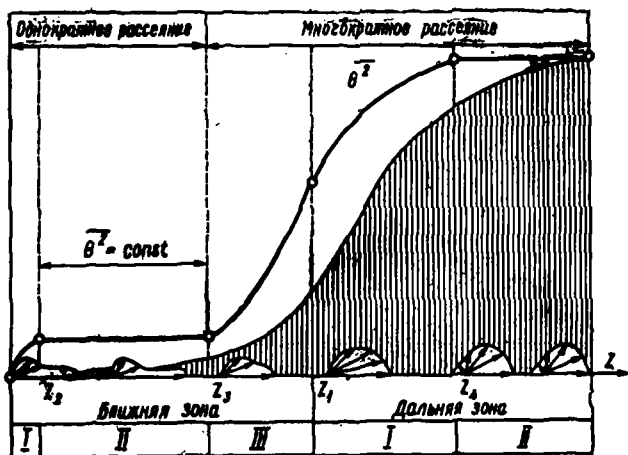


Рис. 18. Изменение структуры узкого пучка излучения вдоль рассеивающего слоя [74]

В работах [71, 72] подробно рассмотрен вопрос о диффузном отражении коллимированного пучка излучения плоской, цилиндрической и сферической средами. Однако найденные методом инвариантности функциональные соотношения для функций отражения и пропускания чрезвычайно сложны и их крайне трудно использовать для интерпретации экспериментальных данных.

Кацевым [73] определены характеристики диффузного отражения узкого пучка излучения от двумерной полубесконечной среды с помощью функции Амбарцумяна, интегральное уравнение для которой получено в области Фурье-изображения.

Проблема распространения светового пучка значительно упрощается для сред с сильно анизотропным рассеянием. Так, в [74] при использовании приближения малых углов найдены и проанализированы аналитические представления зависимости расплывания светового пучка и среднего квадрата угла прихода лучей от оптических свойств среды и характеристик внешней узконаправленной радиации. Качественное представление об изменении структуры узкого пучка (его структура определяется эффективным радиусом \bar{r} и дисперсией угла

прихода лучей $\bar{\theta}^2$) показано на рис. 18. Из рисунка видно, что исследуемую среду можно разбить на несколько качественно различных зон с вполне определенными границами. Деление на ближнюю и дальнюю зоны связано с сопоставлением величин интенсивностей прямой и рассеянной радиации. Границу между этими зонами можно найти из условия [74]

$$\sigma \cdot z_1 = 3 \ln(\sigma z_1) \rightarrow \dots$$

где

$$C = \frac{3\sigma^2 S_0}{\pi \bar{\gamma}^2}, \quad \bar{\gamma}^2 = \int_{(4\pi)} \gamma^2 p(\gamma) \frac{d\Omega}{4\pi},$$

а S_0 — начальное сечение пучка.

Границы других указанных зон можно установить приближенно:

$$z_2 \sim \frac{V\bar{S}}{v\bar{\gamma}^2}, \quad \sigma z_4 \geq 4 \left[\frac{2\lambda}{(1-\lambda)\bar{\gamma}^2} \right]$$

при $v\bar{\gamma}^2 \ll \left(\frac{1-\lambda}{2\lambda} \right)^{\frac{1}{2}}$.

Для первой ближней зоны следует отметить строгое выполнение закона Бугера, а для второй дальней зоны — отсутствие влияния свойств внешнего пучка и сохранения формы тела яркости в среде, что является определением так называемого *глубинного светового режима* в среде (см. следующий параграф).

В последнее время задачи по определению светового поля в среде с ограниченными по пространству источниками излучения иногда решаются с помощью метода Монте-Карло (см. § 4, гл. 5) или методом непосредственного численного расчета исходного интегродифференциального уравнения (7.2), для чего привлекаются мощные быстродействующие вычислительные машины. Однако расчеты весьма частных ситуаций не позволяют делать физических обобщений о закономерностях распространения лучистой энергии в исследуемых средах, особенно в случаях неоднородных сред и несферичности индикатрис рассеяния.

§ 2. Учет состояния поляризации в теории переноса излучения

Наиболее полное теоретическое изучение состояния поляризации излучения, взаимодействующего с веществом, стало возможным благодаря работам, где уравнение переноса излучения сформулировано для параметров Стокса [12, 18, 20]. Как было отмечено в гл. 2, параметры Стокса позволяют одновременно исследовать интенсивность и основные поляризационные характеристики излучения (степень поляризации, положение плоскости поляризации, степень эллиптичности). Кроме того, уравнение переноса излучения с учетом состояния поляризации является более строгим по сравнению с обычно рассматриваемым уравнением переноса, в котором фактически опущены члены того же порядка, что и исследуемые.

В настоящее время наиболее актуальные задачи о распространении поляризованного излучения в светорассеивающих средах решены в основном численными методами. Так, например, Соболевым [12] система интегродифференциальных уравнений (2.38) сведена к системе интегральных уравнений, решение которой затем найдено численно. Конкретные расчеты указывают на необходимость учета состояния поляризации при определении величины интенсивности излучения. В случае релеевского рассеяния при отражении от слоя бесконечной оптической толщины погрешность расчетов достигает 9—10%. Аналитическое представление поляризационных характеристик излучения, взаимодействующего с конечным объемом исследуемого вещества, с учетом двукратного рассеянного излучения получено и подробно проанализировано в [22].

С помощью замены интеграла в уравнении переноса излучения гауссовой суммой Чандрасекаром [20] рассчитаны параметры Стокса для релеевского рассеяния в случае диффузного отражения света от полубесконечной атмосферы и диффузного отражения и пропускания через слой конечной оптической толщины. Для полубесконечного слоя найдены так называемые «законы потемнения к краю», т. е. угловые зависимости компонент интенсивности вдоль двух взаимно перпендикулярных направлений. Эти компоненты, равные между собой в центре (наблюдение перпендикулярно к слою), различаются у края

(наблюдение перпендикулярно к нормали к слою) приблизительно на 25%. В то же время степень поляризации выходящего из среды излучения меняется от 0 в центре до 11,7% у края. Изучение закономерностей распространения поляризованного излучения в атмосферах с релеевской индикатрисой рассеяния удобно проводить с помощью подробных таблиц численных значений параметров Стокса [75]. Благодаря указанным основополагающим работам в настоящее время можно считать решенной проблему поляризации **дневного неба**.

Теоретические исследования **состояния** поляризации многократно рассеянного излучения в **значительной** мере расширяют и экспериментальные возможности изучения оптических характеристик веществ. Так, решение уравнения переноса поляризованного излучения для диффузного отражения от **сильно поглощающих** сред позволило предложить довольно **простой экспериментальный** метод определения коэффициента рассеяния окрашенных растворов [76, 77]. Связь между матрицами преобразования параметров Стокса для когерентного и некогерентного рассеяния, указанная в гл. 2, дает возможность перенести ряд результатов, полученных в теории когерентного рассеяния, в область исследования свойств некогерентно рассеивающих объектов (таких, например, как люминесцирующие среды), что позволяет более корректно изучать природу элементарных излучателей, внутреннюю пространственную конфигурацию молекул и т. д.

Остановимся на единственно решаемой математически до конца задаче переноса поляризованного излучения в светорассеивающей среде — определении поляризационных характеристик **глубинного светового режима** [22, 78, 79]. Глубинным световым режимом в среде обычно называют тот режим, при котором влияние внешнего излучения становится пренебрежимо малым и не меняется угловое распределение интенсивности излучения, существенно определяемое оптическими свойствами исследуемой среды. Экспериментальные данные [80—82] подтверждают подобное состояние светового поля в исследуемых средах. Отметим, что в результате теоретических и экспериментальных исследований разработан эффективный метод **раздельного определения** коэффициентов поглощения и рассеяния мутных сред [80].

Условие постоянства тела яркости при глубинном световом режиме приводит, согласно (2.28), к следующей системе интегральных уравнений для определения угловых зависимостей параметров Стокса $s_i(\mu)$ [78, 79]:

$$\frac{1}{\lambda} (1 - k\mu) s_i(\mu) = \frac{3\rho_0}{8\pi(3 - \rho_0)} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \sum_k d_{ik}(\mu, \varphi; \mu', \varphi') \times \\ \times s_k(\mu') d\varphi' d\mu' \quad (i, k = 1, 2, 3, 4), \quad (7.7)$$

где $\rho_0 = \frac{1 - \Delta}{1 + \Delta}$; Δ — степень деполаризации; $\|d_{ik}(\mu, \varphi; \mu', \varphi')\|$ — матрица преобразования параметров Стокса на элементарном объеме [22, 78]; k — некоторая постоянная, характеризующая оптические свойства среды.

Общим решением системы (7.7) является

$$s_i(\mu) = \frac{\lambda}{1 - k\mu} (A_i + B_i \mu^2), \quad (7.8)$$

причем $i = 1, 2$, так как при азимутальной независимости определение $s_3(\mu)$ и $s_4(\mu)$ не зависит от $s_1(\mu)$ и $s_2(\mu)$. Подстановка (7.8) в (7.7) приводит к характеристическому уравнению $k = k(\lambda, \Delta)$ [79]:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2a} [(6 + b) i_1 - 8i_2 + 6i_3 + \\ + \sqrt{(4 + b^2) i_1^2 + 12(8 + b) i_2^2 + 36 i_3^2 - 8(4 - b) i_1 i_2 + \dots} \\ \dots + 4(2 - 3b) i_1 i_3 - 96 i_2 i_3], \quad (7.9)$$

где

$$a = \frac{16}{3} \cdot \frac{1 + 2\Delta}{1 - \Delta}, \quad b = \frac{8\Delta}{1 - \Delta},$$

$$i_1 = \frac{1}{k} \ln \left| \frac{1 + k}{1 - k} \right|, \quad i_2 = \frac{1}{k^3} \left(\ln \left| \frac{1 + k}{1 - k} \right| - 2k \right),$$

$$i_3 = \frac{1}{k^5} \left(\ln \left| \frac{1 + k}{1 - k} \right| - 2k - \frac{2}{3} k^3 \right).$$

Значения вероятности выживания кванта
в зависимости от величин k и p_0 [22]

$k \backslash p_0$	1	0,5	0,4	0,2	0
0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
0,05	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999
0,10	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997
0,20	0,987	0,987	0,987	0,987	0,987
0,30	0,969	0,969	0,969	0,969	0,969
0,40	0,943	0,944	0,944	0,944	0,944
0,50	0,908	0,910	0,910	0,910	0,910
0,60	0,861	0,865	0,865	0,866	0,866
0,70	0,798	0,805	0,806	0,807	0,807
0,80	0,712	0,725	0,726	0,727	0,728
0,85	0,655	0,672	0,673	0,675	0,677
0,90	0,852	0,604	0,606	0,609	0,611
0,93	0,525	0,551	0,554	0,558	0,561
0,95	0,478	0,507	0,510	0,515	0,519
0,97	0,418	0,450	0,453	0,459	0,464
0,99	0,322	0,356	0,361	0,368	0,374

Как показывают численные расчеты зависимости $k = k(\lambda, \Delta)$ (табл. 6), влияние степени деполяризации Δ на величину k крайне незначительно, особенно при малых значениях k .

С помощью функции $P(0)$:

$$P(0) = \frac{3i_2 - i_1}{a - 3i_1 + 7i_2 - 6i_3} \quad (7.10)$$

можно записать угловое распределение интенсивности и степени поляризации излучения при глубинном световом режиме:

$$i(\mu) = \frac{\lambda}{1 - k\mu} [1 + \mu^2 P(0)] \quad \text{и} \quad P(\mu) = \frac{1 - \mu^2}{1 + \mu^2 P(0)} P(0). \quad (7.11)$$

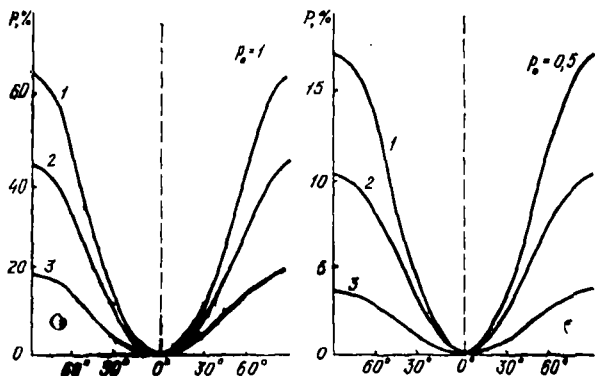


Рис. 19. Угловое распределение степени поляризации излучения:

1— $k=0,99$; 2— $0,96$; 3— $0,7$

Функция (7.10) представляет собой степень поляризации при $\mu=0$, т. е. при наблюдении, перпендикулярном к нормали к поверхности исследуемого слоя. При $\mu \rightarrow 1$ степень поляризации стремится к нулю (рис. 19), причем при углах, дополняющих друг друга до 180° , значения степени поляризации совпадают. Зависимости (7.11) позволяют установить непосредственную связь величин интенсивности и степени поляризации излучения с такими характеристиками среды, как коэффициенты рассеяния и поглощения (рис. 20). Зависимости (7.9) и (7.11) хорошо согласуются с экспериментальными данными [80—82].

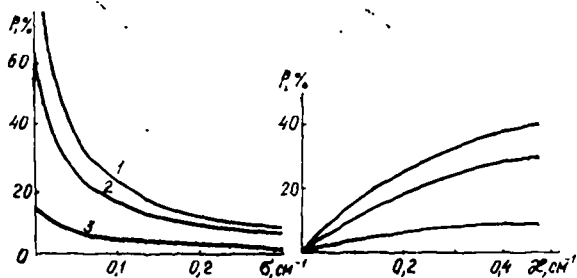


Рис. 20. Зависимость степени поляризации от коэффициента рассеяния ($\kappa=0,03 \text{ см}^{-1}$) и коэффициента поглощения ($\sigma=0,06 \text{ см}^{-1}$) при различных углах наблюдения:

1— $\theta=90^\circ$; 2— $120^\circ(60^\circ)$; 3— $150^\circ(30^\circ)$

§ 3. Элементы нестационарной теории переноса излучения

Необходимость рассмотрения нестационарных явлений в теории переноса излучения обусловлена конечностью времени пребывания квантов в исследуемой среде и времени взаимодействия излучения с элементарным объемом вещества. Кроме того, применение импульсных источников света, в том числе и оптических квантовых генераторов, в значительной мере расширяет возможности спектроскопии светорассеивающих сред. Полагая, что вероятность испускания излучения элементарным объемом определяется обычным законом затухания:

$$e^{-\frac{t}{\tau}} \frac{dt}{\tau}$$

(τ — среднее время жизни квантовой системы в возбужденном состоянии), нетрудно сформулировать нестационарное уравнение переноса излучения для плоского слоя светорассеивающей среды [12, 83, 84]:

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial I(z, l, t)}{\partial z} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial I(z, l, t)}{\partial t} = & -\alpha I(z, l, t) + \\ & + \frac{\lambda \alpha}{4\pi} \int_0^t e^{-\frac{t-t'}{\tau}} \frac{dt'}{\tau} \int_{(4\pi)} p(l, l') I(z, l', t') d\Omega' + \\ & + \alpha \epsilon_0(z, t). \end{aligned} \quad (7.12)$$

Для решения уравнения (7.12), помимо граничных условий типа (3.2), необходимо знать и начальные условия, определяющие мощность источников в начальный момент времени. Анализ уравнения (7.12) в практически важных случаях упрощается при введении в рассмотрение среднего времени пребывания кванта в среде: $t_\alpha = 1/\alpha$ ($1/\alpha$ — средняя длина свободного пробега фотона в исследуемой среде). Преобразуя уравнение (7.12) с помощью следующих безразмерных величин:

$$u = \frac{t}{\tau + t_\alpha}, \quad \beta_1 = \frac{\tau}{\tau + t_\alpha}, \quad \beta_2 = \frac{t_\alpha}{\tau + t_\alpha}, \quad dt = \alpha dz, \quad (7.13)$$

находим:

$$\mu \frac{\partial I}{\partial \tau} + \beta_2 \frac{\partial I}{\partial u} + I = \frac{\lambda}{4\pi\beta_1} \int_0^u e^{-\frac{u-u'}{\beta_1}} \times \\ \times du' \int_{(4\pi)} p(l, l') I(\tau, l', u') d\Omega' + \varepsilon_0(\tau, u). \quad (7.14)$$

Следует отметить два широких класса нестационарных задач: 1) $\beta_1 \rightarrow 0$ и 2) $\beta_2 \rightarrow 0$. Первый случай соответствует $t_\alpha \gg \tau$ и определяет в основном круг астрофизических задач. Действительно, при $\tau \cong 10^{-8}$ с и $n \ll 10^{10}$ имеем $t_\alpha \gg \tau$. При $n \cong 10^{10}$ $t_\alpha \cong \tau$. В случае постановки эксперимента в обычных лабораторных условиях с хорошей степенью точности можно положить $\beta_2 \cong 0$. Для рассеивающих сред актами переизлучения можно пренебречь и уравнение переноса можно записать в более простом виде:

$$\mu \frac{\partial I}{\partial \tau} + \frac{\partial I}{\partial u} + I = \frac{\lambda}{4\pi} \int_{(4\pi)} p(l, l') I(\tau, l', u) d\Omega' + \varepsilon_0(\tau, u). \quad (7.15)$$

В настоящее время для решения нестационарных задач теории переноса излучения широко применяется преобразование Лапласа. Нестационарное уравнение переноса излучения в данном случае переходит в обычное уравнение. Действительно, если обозначить

$$I(\tau, \mu, s) = \int_0^\infty e^{-su} I_*(\tau, \mu, u) du, \\ \varepsilon(\tau, s) = \int_0^\infty e^{-su} \varepsilon_0(\tau, u) du, \quad (7.16)$$

то при применении преобразования Лапласа к уравнению (7.14) в случае $p(l, l) \equiv 1$ находим:

$$\frac{\mu}{1 + \beta_2 s} \cdot \frac{\partial I(\tau, \mu, s)}{\partial \tau} = -I(\tau, \mu, s) + \\ + \frac{\lambda}{2(1 + \beta_1 s)(1 + \beta_2 s)} \int_{-1}^1 I(\tau, \mu', s) d\mu' + \frac{\varepsilon(\tau, s)}{1 + \beta_2 s}, \quad (7.17)$$

причем здесь полагается $I(\tau, \mu, 0) = 0$.

Уравнение (7.17) аналогично обычному уравнению переноса излучения типа (3.1), если в последнем сделать замену

$$\tau \rightarrow \tau(1 + \beta_2 s) \text{ и } \lambda \rightarrow \frac{\lambda}{(1 + \beta_1 s)(1 + \beta_2 s)}. \quad (7.18)$$

Полное совпадение между этими уравнениями будет для представляющего интерес случая, когда среда освещается излучением импульсного источника. В этом случае можно положить

$$e_0(\tau, u) = e_0(\tau) \delta(u),$$

где $\delta(u)$ — функция Дирака.

Следует отметить, что задача отыскания оригинала функции математически весьма сложна и громоздка, хотя использование метода преобразования Лапласа позволяет находить некоторые асимптотические решения нестационарных задач.

Асимптотические оценки для распространения нестационарного излучения в рассеивающих средах могут быть получены с помощью методов, изложенных в гл. 4 и § 1 данной главы [85, 86]. Так, например, в [86] исследовано нестационарное рассеяние узкого пучка радиации и определена мощность обратно рассеянной радиации при больших значениях времени:

$$W(t) = \frac{3}{8\pi^2} \sigma^3 e^{-(\alpha-\sigma)t} \left[\frac{1}{3\pi} \left(1 + \frac{3b}{3-b} \right) \right]^{-\frac{1}{2}},$$

где

$$b = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 \mu \gamma(\mu) d\mu.$$

Рассмотрим с физической точки зрения основные закономерности нестационарного рассеяния света. Представим интенсивность рассеянного излучения в ряд по различной степени кратности рассеяния (§ 1, гл. 5). При $\tau = 0$

$$I(0, \mu) = \sum_{m=1}^N \lambda^m I^{(m)}(0, \mu).$$

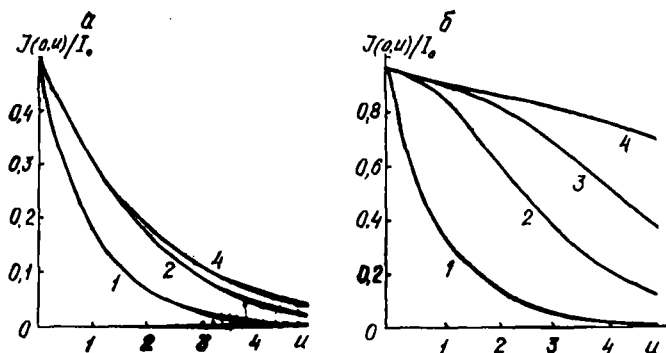


Рис. 21. Влияние различных порядков рассеяния на расплывание светового импульса, распространяющегося в рассеивающей среде при $\lambda=0,5$ (а) и $\lambda=0,95$ (б):

1— $N=1$; 2—3; 3—5; 4—9

Согласно (7.18), решение нестационарной задачи можно записать в виде (при $\beta_1 = 0$ и $\beta_2 = 1$)

$$I(0, \mu, s) = \sum_{m=1}^N \frac{\lambda^m}{(1+s)^m} I^{(m)}(0, \mu).$$

Оригиналом последнего выражения является

$$I(0, \mu, u) = \sum_{m=1}^N \frac{u^{m-1}}{(m-1)!} e^{-u} \lambda^m I^{(m)}(0, \mu). \quad (7.19)$$

Полученное соотношение позволяет качественно изучить закономерности временного изменения импульса в светорассеивающей среде. Усредняя выражение (7.19) по направлениям и полагая [41, 87], что при $\lambda < 1$ в предельно возможном случае

$$I_0 = I^{(m)}(0) = \int_0^1 I^{(m)}(0, \mu) d\mu, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

находим, что

$$I(0, u) = \int_0^1 I(0, \mu, u) d\mu = I_0 \sum_{m=1}^N \frac{u^{m-1}}{(m-1)!} e^{-u} \lambda^m. \quad (7.20)$$

Расчет соотношения (7.20) представлен на рис. 21. Рисунок показывает механизм расплывания во времени

светового импульса в рассеивающей среде и, кроме того, вклад рассеяний различных порядков в это расплывание. Полуширина рассеянного импульса существенно зависит от вероятности выживания кванта и оптической толщины исследуемого слоя, так как величины $I^{(m)}(0, \mu)$ существенно определяются последней.

При использовании метода моментов для решения нестационарных задач теории переноса излучения [88, 89] появляется возможность определения основных характеристик рассеянного света без необходимости решения уравнения (7.14). К таким характеристикам, обычно измеряемым в различных экспериментах, относятся среднее время пребывания кванта в среде до прихода его в данную точку u , временная дисперсия рассеянного светового сигнала D и длительность высвечивания среды T . Кроме того, как известно, при наличии совокупности моментов функции можно восстановить и саму функцию.

Рассмотрим случай освещения среды δ -образным импульсом. Выражения для моментов функции

$$M_n = \int_0^{\infty} u^n I(\tau, \mu, u) du, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (7.21)$$

в случае $\beta_1 = 1$ и $\beta_2 = 0$ нетрудно найти через интенсивность излучения, определяемую из стационарной задачи, $I_{\text{стац}}$ [88]:

$$M_0 = I_{\text{стац}}(\tau, \mu), \quad M_1 = \lambda \frac{\partial I_{\text{стац}}}{\partial \lambda},$$

$$M_2 = \lambda^2 \frac{\partial^2 I_{\text{стац}}}{\partial \lambda^2} + 2\lambda \frac{\partial I_{\text{стац}}}{\partial \lambda},$$

$$M_3 = \lambda^3 \frac{\partial^3 I_{\text{стац}}}{\partial \lambda^3} + 6\lambda^2 \frac{\partial^2 I_{\text{стац}}}{\partial \lambda^2} + 6\lambda \frac{\partial I_{\text{стац}}}{\partial \lambda}$$

и т. д.

Среднее время пребывания кванта в среде до прихода его в данную точку равно

$$\bar{u} = \frac{\int_0^{\infty} u I(\tau, \mu, u) du}{\int_0^{\infty} I(\tau, \mu, u) du} = \frac{M_1}{M_0} = \lambda \frac{\partial \ln I_{\text{стац}}}{\partial \lambda}.$$

Для временной дисперсии интенсивности рассеянного света

$$D_0 = \frac{M_2}{M_0} - \bar{u}^2 = \lambda^2 \frac{\partial^2 \ln I_{\text{стац}}}{\partial \lambda^2} + 2\lambda \frac{\partial \ln I_{\text{стац}}}{\partial \lambda}.$$

Если закон высвечивания среды определяется функцией $I_\infty(\tau, \mu, u)$, то время высвечивания среды можно записать в виде

$$\begin{aligned} T &= \frac{\int_0^\infty u I_\infty(\tau, \mu, u) du}{\int_0^\infty I_\infty(\tau, \mu, u) du} = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_2}{M_1} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (\lambda I_{\text{стац}})}{\partial \lambda^2} : \frac{\partial I_{\text{стац}}}{\partial \lambda}. \end{aligned}$$

Таким образом, зная три первых момента искомой функции $I(\tau, \mu, u)$, можно найти экспериментально измеряемые величины D_0 и T .

§ 4. Нелинейная теория переноса излучения

Решение ряда астрофизических задач, а также развитие теории квантовых оптических генераторов привело к необходимости исследования распространения излучения в средах, оптические характеристики которых зависят от плотности излучения. Как известно, явлениями нелинейности можно пренебрегать в случае, когда амплитуда световых колебаний намного слабее внутренних полей рассматриваемых атомов и молекул. Для мощного лазерного излучения линейность материального уравнения, т. е. соотношения между поляризацией среды и напряженностью электрического поля световой волны, нарушается и выражение для поляризации содержит члены, пропорциональные второй, третьей и т. д. степеням напряженности электрического поля, пренебрегать которыми уже нельзя. Это приводит к физически новым закономерностям распространения электромагнитных волн. Так, при распространении мощного излучения в среде могут происходить такие явления, как генерация гармоник, многофотонное поглощение, самофокусировка

и самоканализация световых пучков и т. д. Обычно при решении задач нелинейной оптики используют непосредственно уравнения Максвелла [90]. Очень часто получаемые решения являются обобщениями обычных законов волновой оптики. Так, например, рассмотрение явлений на поверхности раздела линейной и нелинейной сред привело к обобщению известных формул Френеля [91]. Однако и с точки зрения лучевой оптики можно достаточно корректно решить ряд задач по изучению закономерностей распространения излучения в нелинейных средах [63, 92—94].

Нелинейность оптических характеристик светорассеивающих сред определяется зависимостью показателя преломления n и поглощательной способности κ от плотности радиации u [95]:

$$n(\nu) = n_0 + \frac{c^3 A_{ij}}{32n_0\pi^3\nu^2} \cdot \frac{(N_i - N_j)(\nu_{ij} - \nu)}{(\nu_{ij} - \nu)^2 + \gamma_{ij}^2}, \quad (7.22)$$

$$\kappa(\nu) = \frac{c^3 A_{ij}}{64n_0\pi^3\nu^2} \cdot \frac{(N_i - N_j)\gamma_{ij}}{(\nu_{ij} - \nu)^2 + \gamma_{ij}^2},$$

причем

$$N_i - N_j = \frac{N_i(u=0) - N_j(u=0)}{1 + \alpha_{ij}(\nu_0)u}, \quad (7.23)$$

где $\alpha_{ij}(\nu_0)$ — некоторый параметр нелинейности, определяемый свойствами квантовой системы [94].

Согласно (7.22) и (7.23), коэффициент поглощения среды в зависимости от плотности радиации можно представить в виде

$$k = \frac{k_0}{1 + \alpha' u}. \quad (7.24)$$

Дифференциальный закон ослабления в данном случае при $\sigma = \text{const}$

$$dI = - \left(\frac{k_0}{1 + \alpha I} + \sigma \right) I dx$$

определяет следующее изменение интенсивности излучения, выходящего из слоя оптической толщины $\tau_0 = (k_0 + \sigma) x_0$:

$$\frac{I}{I_0} \left(\frac{1 + \lambda \alpha I}{1 + \lambda \alpha I_0} \right)^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} = e^{-\tau_0}. \quad (7.25)$$

При $\lambda \rightarrow 0$, т. е. в случае чисто поглощающей среды, вместо (7.25) имеем

$$I e^{\alpha l} / I_0 e^{\alpha l_0} = e^{-\tau_0}. \quad (7.25a)$$

При $\lambda \rightarrow 1$ и $\alpha \rightarrow 0$ (нелинейность среды незначительна) соотношения (7.25) и (7.25a) переходят в известную формулу Бугера: $I = I_0 e^{-\tau_0}$. При больших оптических толщинах среды, когда $\lambda \alpha l \ll 1$, имеем известный результат [63, 95]:

$$I = I_0 (1 + \lambda \alpha l_0)^{\frac{k_0}{\sigma}} e^{-\tau_0}. \quad (7.26)$$

В случае $\lambda \neq 1$ и $\alpha l_0 \gg 1$, согласно (7.25), находим:

$$\frac{I}{I_0} \left(\frac{I}{I_0} \right)^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} = e^{-\tau_0}, \quad \text{или} \quad \frac{I}{I_0} = e^{-\lambda \tau_0} = e^{-\sigma x_0},$$

т. е. среда становится в этом случае чисто рассеивающей.

При создании в среде состояния инверсной заселенности для рассматриваемого в задаче ($i \rightarrow j$)-го перехода величина

$\lambda = \frac{\sigma}{k_0 + \sigma}$ может принимать отрицательные значения, если

$\sigma < |k_0|$. В данном случае среда усиливает падающий на нее сигнал и тем сильнее, чем больше величина $|k_0|$ и меньше σ и αl_0 . Нетрудно убедиться в том, что при $\alpha l_0 = -\lambda$ пропускание среды равно 1. Подробное исследование усиления рассеивающим слоем излучения проведено в [95].

Численный анализ соотношения (7.25) провести несложно, ибо оно в сущности означает:

$$J = J_0 e^{-\tau_0}, \quad J = \alpha I (1 + \lambda \alpha I)^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}.$$

На рис. 22 представлена зависимость $\ln J$ от αI при различных значениях вероятности выживания кванта λ . По заданному значению величины падающего потока αI_0 (точка A на рис. 22) и для соответствующего значения λ находим значение функции $\ln J = \ln [J(\alpha I)]$ (точка B). Затем это значение уменьшаем на величину τ_0 (точка C) и для той же кривой $\ln J = \ln [J(\alpha I)]$ находим соответствующее значение αI (точка D или E). Тогда величина коэффициента пропускания равна

$$T = \frac{(\alpha I)_E}{(\alpha I)_A}.$$

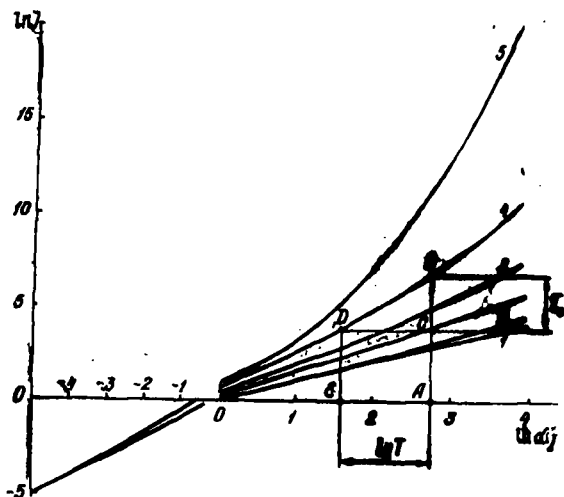


Рис. 22. Определение коэффициента пропускания **нелинейной светорассеивающей среды**:
 1— $\lambda=1,0$; 2—0,9; 3—0,5; 4—0,3; 5—0,1

Основные зависимости пропускания излучения **нелинейной средой** представлены на рис. 23. Следует отметить, что результаты численных расчетов соотношения (7.25) хорошо согласуются с экспериментальными данными [96].

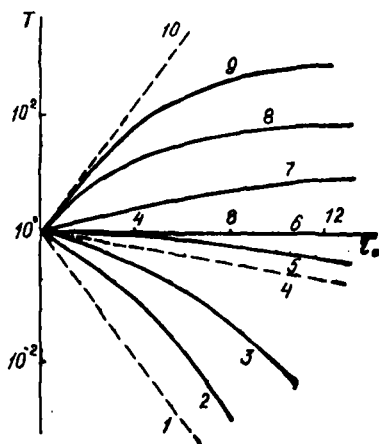


Рис. 23. Зависимость коэффициента пропускания от величины $\tau_0 = (k_0 + \sigma)x_0$ [95]:

$\lambda=1/11$ ($|k_0/\sigma=10$): 1— $\alpha I_0=0$; 2—3;
 3—10; 4— $\alpha I_0 \rightarrow \infty$;
 $\lambda=-1/9$ ($|k_0/\sigma=-10$): 5— $\alpha I_0=20$; 6—9;
 7—1; 8—0,1; 9—0,01; 10—0

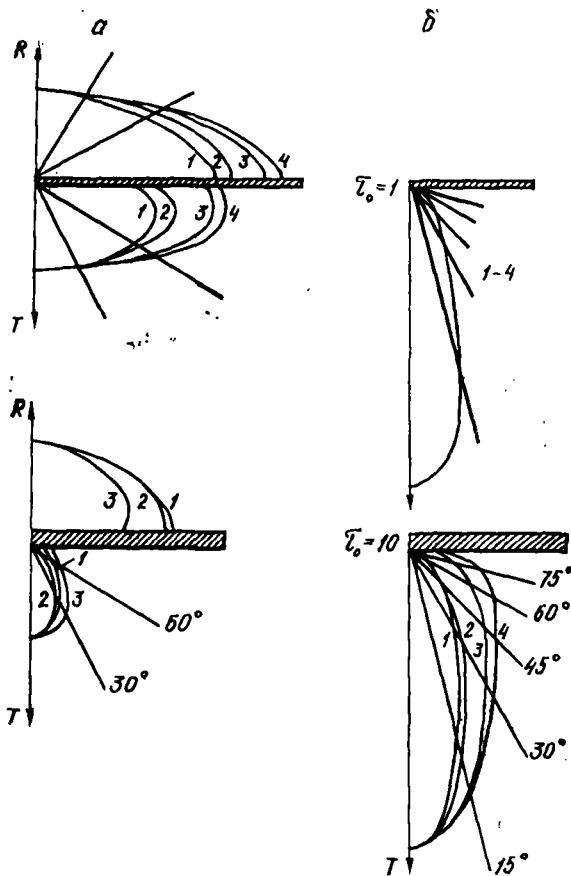


Рис. 24. Угловое распределение излучения, выходящего из слоев $\tau_0=1$ и $\tau_0=10$ при $\rho(\gamma)=1$ (а) и $\rho(\gamma)=0,21/(1,1-\cos\gamma)^2$ (б) [95]:

1— $\alpha I_0=0$; 2—1; 3—10; 4— $\alpha I_0 \rightarrow \infty$

В [97] предпринята попытка численного расчета уравнения переноса излучения для рассматриваемого случая с двумя типами индикатрис рассеяния: $\rho(\gamma)=1$ (сферическая индикатриса) и $\rho(\gamma)=0,21/(1,1-\cos\gamma)^2$ (сильно вытянутая индикатриса, $\int_{-1}^0 \rho(\gamma) d\gamma / \int_0^1 \rho(\gamma) d\gamma = 0,05$). На рис. 24 представлены данные расчета углового распределения диф-

фузно отраженного и диффузно пропущенного излучения для индикатрис рассеяния указанных типов ($\lambda = 0,5$). Характер углового распределения интенсивности излучения в сильной степени зависит от оптической толщины, что связано со значительным изменением коэффициента ослабления вдоль слоя. Сравнение полученных данных с расчетом уравнения переноса излучения в двухпоточковом приближении [98] показывает, что точность последнего вполне удовлетворительна для решения нелинейных задач теории переноса излучения.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. A. Milne. Radiative equilibrium in the outer layers of a star, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.*, **81**, 361, 1921.
2. К. С. Шифрин. Рассеяние света в мутной среде. М., Гостехиздат, 1951.
3. Г. Вайде Хюлст. Рассеяние света малыми частицами. М., ИЛ, 1961.
4. W. M. Irwine. *J. Opt. Soc. Am.*, **55**, № 1, 16, 1965.
5. G. N. Plass. *Appl. Opt.*, **5**, № 2, 279, 1966.
6. Н. Н. Соболев. *УФН*, **9**, 425, 1967.
7. S. E. Gilles, W. G. Vincenti. *J.Q.S.R.T.*, **10**, 71, 1970.
8. J. T. Jefferies. Spectral line formation, Blaisdell Publ. Co. Waltham, Mass., 1968.
9. D. G. Hummer, G. Rybicki. Computational Methods for Non-LTE line-transfer problems, «Methods in Computational Physics», v. 7, pp. 53—127. New York—London, Acad. Press, 1967.
10. Р. М. Гуди. Атмосферная радиация. М., «Мир», 1966.
11. В. В. Иванов. Перенос излучения и спектры небесных тел. М., «Наука», 1969.
12. В. В. Соболев. Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет. М., ГИТТЛ, 1956.
13. J. Houtgast. The variations in the profiles of strong Fraunhofer lines along a radius of the solar disc. Utrecht., 1942.
14. Л. М. Биберман, И. М. Гуревич. *ЖЭТФ*, **19**, 507, 1949.
15. A. V. Phelps, A. O. McCobrey. *Phys. Rev.*, **118**, 1561, 1960.
16. S. Stokes. *Trans. Cambr. Philos. Soc.*, **9**, 399, 1852.
17. N. Winer. *Acta Math.*, **55**, 117, 1930.
18. Г. В. Розенберг. Докт. дисс. М., 1954.
19. Г. В. Розенберг. *УФН*, **58**, 77, 1955.
20. С. Чандрасекар. Перенос лучистой энергии. М., ИЛ, 1953.
21. А. М. Самсон, К. С. Адзериho. Оптика и спектроскопия, **12**, 239, 1962.
22. К. С. Адзериho. Канд. дисс. Минск, 1965.
23. U. Fa no. *J. Opt. Soc. Am.*, **39**, 859, 1949.
24. У. Фаио, Л. Спейсер, М. Бергер. Перенос гамма-излучения. М., Атомиздат, 1963.
25. F. W. Lipp s, H. A. Tolhoek. *Physica*, **20**, 395, 1954.
26. W. H. McMaster. *Am. J. Phys.*, **20**, 351, 1954. *Revs. Mod. Phys.*, **33**, № 1, 8, 1961.

- 27. Ю. Н. Барабанников, В. М. Финкельберг. Метод функций Грина в теории многократного рассеяния волн.—В сб.: Теоретические и прикладные проблемы рассеяния света. Минск, «Наука и техника», 1971, 171—187.
- 28. А. П. Хапалюк. Оптика и спектроскопия, 19, 387, 1965.
- 29. В. А. Фок. Матем. сб., 14 (56), № 1-2, 1944.
- 30. В. А. Амбарцумян. Астрон. ж., 19, № 3, 1942.
- 31. V. Kounganoff, J. W. Busbridge. Basic methods in transfer problems. Oxford, 1952.
- 32. В. А. Амбарцумян. ЖЭТФ, 13, вып. 9-10, 1943.
- 33. М. М. Гуревич. Труды ГОИ, 6, 1, 1931.
- 34. А. Гершуни. Труды ГОИ, 11, 48, 1934.
- 35. А. М. Самсон. ИФЖ, 1, 65, 1958.
- 36. В. В. Соболев. Курс теоретической астрофизики. М., «Наука», 1967.
- 37. К. М. Case. Ann. Phys., 2, 384, 1957.
- 38. Б. Дэвнсон. Теория переноса нейтронов. М., Атомиздат, 1960.
- 39. Г. И. Марчук. Методы расчета атомных реакторов. М., Атомиздат, 1961.
- 40. Fr. Rössler. Optica Acta, 11, 21, 1964.
- 41. Е. С. Кузнецов, Б. В. Овчинский. Результаты численного решения интегрального уравнения теории рассеяния света в атмосфере. Труды ГОИ, № 4, 1949.
- 42. К. С. Адзерихо, А. М. Самсон. Оптика и спектроскопия, 15, 226, 1963.
- 43. В. С. Владимиров. Вычислительная математика, 7, 46, 1961.
- 44. M. Kendall, B. Smith. Random Sampling Numbers, Tracts for Computers IV. Cambridge, 1954.
- 45. O. Taussky, J. Todd. Generation Pseudo-random Numbers. —In: Monte-Carlo methods, ed. H. A. Meyer. New York, Wiley, 1956.
- 46. Б. М. Голубицкий. Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 2, № 11, 1200, 1966; 5, № 7, 749, 1969.
- 47. Г. И. Марчук, Г. А. Михайлов, М. А. Назаралиев, Р. А. Дарбияи. Решение прямых и некоторых обратных задач атмосферной оптики методом Монте-Карло. Новосибирск, «Наука», 1968.
- 48. В. Е. Зуев. Распространение видимых и инфракрасных волн в атмосфере. М., «Сов. радио», 1970.
- 49. W. M. Elsasser. Heat transfer by infrared radiation in the atmosphere. Harvard, 1942.
- 50. R. M. Goody. Quart. J. Roy. Met. Soc., 78, № 336, 1952.
- 51. C. C. Ferriso, Ludwig, Thomson. J.Q.S.R.T., 6, 241, 1964.
- 52. A. R. Curtis. Quart. J. Roy. Met. Soc., 78, 638, 1952.
- 53. W. L. Godson. Quart. J. Roy. Met. Soc., 79, 367, 1953.
- 54. В. Krakow, H. J. Babrov, G. J. Maclean, A. L. Shabolt. Appl. Opt., 5, 1791, 1966.
- 55. F. S. Simmons. Appl. Opt., 5, 1801, 1966; 6, 1423, 1967; J.Q.S.R.T., 7, 111, 1967.
- 56. В. В. Иванов. Астрофизика, 4, 5, 1968; 6, 643, 1970.
- 57. V. V. Ivanov. J.Q.S.R.T., 10, № 5, 665—694, 1970.
- 58. D. G. Hummer, J. C. Stewart. Astrophys. J., 146, 290, 1966.

59. D. G. Hummer. J.Q.S.R.T., 8, 193, 1968.
60. J. Roscard. Rev. d'optique, 11, 193, 257, 439, 1932.
61. А. А. Гершун. Труды ГОИ, 11, 3, 1936.
62. Ю. С. Георгиевский и др. Прожекторный луч в атмосфере. Изд-во АН СССР. М., 1960.
63. А. П. Иванов. Оптика рассеивающих сред. Минск, «Наука и техника», 1968.
64. F. Kottler. Progress in Optics, v. 3, p. 3, North Holland Publ. Company. Amsterdam, 1964.
65. J. T. Jefferies. Optica Acta, 2, 109, 163, 1955.
66. R. G. Giovanelli. Optica Acta, 3, 24, 49, 127, 1956.
67. R. G. Giovanelli, J. T. Jefferies. Proc. Phys. Soc., B69, 1077, 1956.
68. А. К. Колесов. Вестник ЛГУ, № 1, 101, 1959; № 1, 160, 1966.
69. Д. И. Нагирнер. Вестник ЛГУ, № 13, 147, 1960.
70. А. К. Колесов, Д. И. Нагирнер. Вестник ЛГУ, № 7, 125, 1964.
71. Uesugi Abira, Tsujita Joji. Publ. Astron. Soc. of Japan., 21, 370, 1969.
72. S. Chandrasekhar. Proc. Nat. Acad. Sci., USA, 44, 933, 1958.
73. И. Л. Кацев. Вестн. АН БССР, сер. физ.-матем. наук, № 1, 103, 1973.
74. Л. С. Долин. Изв. вузов. Радиофизика, 7, 380, 1964; 9, 61, 1966.
75. K. L. Coulson, J. V. Dave, S. Sekera. Tables, Univ. Calif. Press, 1960.
76. Г. В. Розенберг. ДАН СССР, 98, 201, 1954.
77. А. А. Ильина, Г. В. Розенберг. ДАН СССР, 98, 365, 1954.
78. Г. В. Розенберг. Оптика и спектроскопия, 7, 407, 1959.
79. А. М. Самсон, К. С. Адзернхо. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 7, 1125, 1963.
80. В. А. Тимофеев. Изв. АН СССР, сер. геофиз., 23, 3, 1957; 5, 766, 1961; Оптика и спектроскопия, 10, 4, 1962; ДАН СССР, 140, 2, 1961.
81. J. Lenoble. J. Phys. et Rad., 18, 11, 1957; Comp. Rend., 246, 7, 1958.
82. A. Ivanoff, T. H. Waterman. J. Mar. Res., № 16, 1958.
83. И. Н. Мнинн. Вестник ЛГУ, № 13, 137, 1959; № 19, 124, 1962.
84. И. Н. Мнинн. Теория нестационарного поля излучения. — В сб.: Теоретические и прикладные проблемы рассеяния света. Под ред. Б. И. Степанова и А. П. Иванова. Минск, «Наука и техника», 1971.
85. С. Д. Гутшабаш. Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 8, № 11, 1154, 1972.
86. В. М. Кочетков. Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 6, № 6, 1970.
87. Ю. И. Чекалинская. Изв. АН СССР, сер. физ., 21, № 11, 1494, 1957.
88. И. Л. Кацев. ДАН БССР, 13, № 2, 118—121, 1969.

89. А. М. Самсои. Ж. прикл. спектроскопии, 10, № 6, 940, 1969.
90. Н. Бломбергс. Нелинейная оптика. М., «Мир», 1966.
91. N. Bloembergen, P. S. Pershan. Phys. Rev., 128, 606, 1962.
92. Б. И. Степанов, В. П. Грибковский. Введение в теорию люминесценции. Минск, 1963.
93. Э. П. Зега. Ж. прикл. спектроскопии, 10, № 6, 940, 1969.
94. Методы расчета оптических квантовых генераторов, т. 1. Минск, 1966.
95. Э. П. Зега. Распространение света в среде с оптическими характеристиками, зависящими от плотности радиации. — В сб.: Теоретические и прикладные проблемы рассеяния света. Минск, «Наука и техника», 1971.
96. В. С. Рубанов, Н. И. Китаев. ДАН ВССР, № 1, 21, 1968.
97. Т. А. Гермогенова, Э. П. Зега. Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 3, № 2, 165, 1967.
98. Э. П. Зега. Канд. дисс. Минск, 1966.

ОГЛАВЛЕНИЕ

От редактора	4
От автора	4
Глава 1. Основные понятия. Уравнение переноса лучистой энергии	5
Глава 2. Общее уравнение переноса излучения	23
Глава 3. Точные методы решения уравнения переноса излучения	55
Глава 4. Методы решения уравнения переноса излучения, основанные на усреднении углового распределения излучения и его приближенном представлении	89
Глава 5. Итерационные, вариационные и вероятностные методы решения уравнения переноса излучения	113
Глава 6. Проблема селективности в теории переноса излучения	124
Глава 7. Современные проблемы теории переноса излучения	166
Литература	184

Казимир Сергеевич Адзерихо

ЛЕКЦИИ

ПО ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА ЛУЧИСТОЙ ЭНЕРГИИ

Редакторы Т. Г. Минчукова, Т. М. Белая
Обложка В. Т. Лапицкого
Художественный редактор И. Е. Беленькая
Технический редактор Н. Ф. Кленова
Корректор Л. В. Лебедева

АТ 09639. Сдано в набор 22/XI 1974 г. Подписано к печати 1/IX 1976 г.
Формат 84×108¹/₃₂. Бумага типографская № 1. Физ. печ. л. 6. Усл. печ. л. 10.
Учетн.-изд. л. 10,19. Тираж 2500 экз. Заказ 490. Цена 37 коп. Издательство
Белорусского государственного университета им. В. И. Ленина, Минск, ул. Кирова, 24. Типография им. Ф. Скорины издательства «Наука и техника» АП
БССР и Госкомиздата СМ БССР по делам издательства, полиграфии и книжной торговли, Минск, Ленинский проспект, 68.