Физико-
Математическая
Библиотека
Инженера

Н. И. АХИЕЗЕР

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Издание второе, переработанное

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1970

517.2
А 95
УДК 517.7

Элементы теории эллиптических функций. Н. И. Ахиезер.

Книга представляет систематическое изложение теории эллиптических функций и некоторых ее приложений.

Основное содержание предназначено для инженеров, которым приходится применять эллиптические функции. Чтение книги не должно вызывать затруднений у лиц, знающих элементы математического анализа и теории функций в объеме первых пяти семестров физико-математических факультетов университетов и высших технических учебных заведений с повышенной программой по математике.

Рисунков 24, таблиц 27, библиографических ссылок 17.

Наум Ильич Ахиезер

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

(Серия: «Физико-математическая библиотека инженера»)

М., 1970 г., 304 стр. с илл.

Редактор *Л. Я. Цлаф*

Техн. редактор *С. Я. Шкляр* Корректор *Е. Я. Гороховская*

Сдано в набор 28/XI 1969 г. Подписано к печати 7/V 1970 г. Бумага 84×108 1/32. Физ. печ. л. 9,5. Усл. печ. л. 15,96. Уч.-изд. л. 14,80. Тираж 13 000 экз. Т-07836. Цена книги 1 р. 13 к. Заказ № 1282.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Московская типография № 16 Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР. Москва, Трехпрудный пер., 9

2-2-3
45-70

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Основное содержание этой книги, как и ее первого издания, вышедшего в 1948 году, предназначено для инженеров, которым приходится применять эллиптические функции.

При подготовке второго издания я в ряде мест улучшил первоначальный текст.

Добавлены числовые таблицы *). Кроме того, добавлена небольшая глава (десятая), посвященная обобщениям чебышевских полиномов. В ней эллиптические функции применяются к решению некоторых задач конструктивной теории функций, и, следовательно, эта глава является продолжением главы девятой, в которой изложены известные исследования П. Л. Чебышева и Е. И. Золотарева.

Хочу здесь с благодарностью вспомнить моего покойного друга Всеволода Константиновича Балтага, который прочел рукопись первого издания и сделал ряд полезных замечаний.

Автор

*) Заимствованные из польского перевода книги Oberhettinger — Magnus «Anwendung der elliptischen Funktionen in Physik und Technik» (Warszawa, 1963).

ГЛАВА I

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ОБ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ

1. О периодах однозначных аналитических функций. Во всем дальнейшем, если противное не будет оговорено, мы будем под функцией понимать однозначную аналитическую функцию, особенности которой не имеют предельных точек на конечном расстоянии. Если f — такая функция и если в каждой ее регулярной точке u имеет место равенство

$$f(u+\Omega)=f(u),$$

где Ω — некоторая константа, то число Ω называют *периодом* функции f. Нуль является тривиальным периодом. Функция, имеющая нетривиальные периоды, называется *периодической*.

Если

$$\Omega_1,\ \Omega_2,\ \ldots,\ \Omega_n$$

— периоды функции f, то при любых целых $m_1, m_2, \ldots$ $\ldots, m_n$ число

$$m_1\Omega_1+m_2\Omega_2+\ldots+m_n\Omega_n,$$

очевидно, также является ее периодом.

Если функции $f(u)$, $g(u)$ имеют период Ω, то тот же период имеют и функции

$$f(u+C),\quad f(u)\pm g(u),\quad f(u)\,g(u),\quad \frac{f(u)}{g(u)},\quad f'(u).$$

Докажем для примера последнее утверждение. С этой целью возьмем функцию

$$\frac{f(u+h)-f(u)}{h},$$

которая в силу предыдущих утверждений обладает периодом Ω. Поэтому в каждой ее регулярной точке u имеет место равенство

$$\frac{f(u+\Omega+h)-f(u+\Omega)}{h}=\frac{f(u+h)-f(u)}{h}.$$

Теперь остается сделать предельный переход при $h \to 0$.

Докажем, что для каждой отличной от константы периодической функции f существует такое $\mu > 0$, что любой нетривиальный период функции f удовлетворяет неравенству [1])

$$|\Omega| \geqslant \mu.$$

Допуская противное, примем, что f имеет нетривиальные периоды

$$\Omega_1,\ \Omega_2,\ \ldots,\ \Omega_n,\ \ldots$$

и что

$$\lim_{n\to\infty} \Omega_n = 0.$$

Так как для любой регулярной точки u функции f

$$f(u+\Omega_n)-f(u)=0$$

и, значит,

$$\frac{f(u+\Omega_n)-f(u)}{\Omega_n}=0,$$

то во всякой регулярной точке функции f

$$f'(u)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(u+\Omega_n)-f(u)}{\Omega_n}=0,$$

откуда следует, что f есть константа.

Простейшим примером функции с периодом Ω является $e^{2\pi i u/\Omega}$. Каждый период этой функции имеет вид $m\Omega$, где m — целое число. Таким образом, в рассматриваемом случае существует один *примитивный* период, а именно Ω. Всякий иной период есть целое кратное периода Ω.

[1]) Имея в виду этот факт, часто говорят: отличная от константы функция не может иметь *бесконечно малого периода*.

Поэтому рассматриваемая функция может быть названа *однопериодической* функцией.

Возникает вопрос: существуют ли функции с $n > 1$ примитивными периодами? При этом n периодов называют примитивными, если всякий период является линейной комбинацией этих периодов с целыми коэффициентами и если не всякий период может быть представлен как подобная комбинация меньшего числа фиксированных периодов.

Ответ на этот вопрос гласит: 1) *не существует отличной от константы функции с $n \geqslant 3$ примитивными периодами*; 2) *с двумя заданными примитивными периодами отличная от константы функция существует в том и только том случае, когда отношение этих периодов не вещественно.* Первое утверждение (относительно $n \geqslant 3$ периодов) и отрицательная часть второго утверждения (относящегося к случаю двух периодов) составляют содержание одной теоремы Якоби.

2. Доказательство теоремы Якоби. Будем изображать периоды данной функции f точками комплексной плоскости. Тогда в любой конечной части плоскости этих точек-периодов будет лишь конечное число, так как в противном случае они имели бы конечную предельную точку, следовательно, существовала бы последовательность периодов $\{\Omega_k\}_1^\infty$, имеющая конечный предел, а значит, f имела бы бесконечно малый период $\Omega_m - \Omega_k$ $(m, k \to \infty)$, что невозможно, поскольку функция предполагается отличной от константы.

Возьмем какой-нибудь нетривиальный период Ω и рассмотрим периоды $m\Omega$ $(m = \pm 1, \pm 2, \ldots)$; они лежат на некоторой прямой Z. A priori мыслимы два случая: 1) все периоды функции f лежат на прямой Z; 2) не все периоды функции f лежат на прямой Z.

Разберем первый случай. Так как на отрезке прямой Z от точки $-\Omega$ до точки $+\Omega$ лежит лишь конечное число точек-периодов, то найдется нетривиальный период с наименьшим модулем, и мы можем, не нарушая общности, принять, что этим периодом является как раз Ω. Поскольку все периоды лежат на прямой Z, то всякий период представим в виде $t\Omega$, где t вещественно; при этом t удовлетворяет неравенству $|t| \geqslant 1$, так как Ω есть нетривиальный период с наименьшим модулем. Докажем, что t пробегает лишь целые значения. Отсюда будет вытекать, что Ω — примитивный период, а f — функция однопериодическая.

Пусть

$$t = m + r,$$

где m — целое число и $0 \leqslant r < 1$. Так как, кроме $t\Omega$, еще и $m\Omega$ есть период функции f, то периодом является также

$$r\Omega = t\Omega - m\Omega,$$

что, как мы установили, невозможно, если $0 < r < 1$. Следовательно, $r = 0$, т. е. t — число целое.

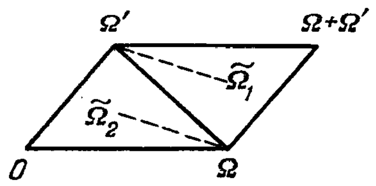


Рис. 1.

Перейдем ко второму случаю. Пусть не все периоды функции f лежат на прямой Z. Обозначим один из нележащих на Z периодов через Ω' и рассмотрим треугольник с вершинами 0, Ω, Ω'. Внутри и на границе этого треугольника, по доказанному, может лежать лишь конечное число точек-периодов. Беря вместо одной из отличных от 0 вершин нашего треугольника какую-нибудь точку-период, лежащую внутри (или на стороне), мы получим аналогичный треугольник с меньшим числом точек-периодов в нем. Продолжая эту редукцию, мы придем к треугольнику, внутри и на сторонах которого вообще не будет точек-периодов, если не считать вершин. Не нарушая общности, мы можем принять, что этим «пустым» треугольником является первоначальный треугольник с вершинами 0, Ω, Ω'. Построим теперь параллелограмм с вершинами 0, Ω, $\Omega + \Omega'$, Ω' (рис. 1). Рассмотренный ранее пустой треугольник с вершинами 0, Ω, Ω' представляет «левую» половину этого параллелограмма. Мы утверждаем, что «правая» половина параллелограмма также является пустым треугольником, т. е. не содержит точек-периодов ни внутри, ни на сторонах (если не считать вершин). Действительно, если бы правой половине

принадлежала точка-период $\widetilde{\Omega}_1$, то левой половине принадлежала бы точка-период $\Omega + \Omega' - \widetilde{\Omega}_1 = \widetilde{\Omega}_2$, а левая половина пуста в силу ее построения. Итак, построенный параллелограмм пуст. Возьмем теперь какой-нибудь период Ω^* нашей функции. Его можно, и притом единственным образом, представить в виде

$$\Omega^* = t\Omega + t'\Omega',$$

где t, t' — вещественные числа. Это представление равносильно разложению вектора Ω^* по векторам Ω, Ω'.

Если мы докажем, что t, t' — числа целые, то будет доказано, что при реализации второго случая нашей альтернативы число примитивных периодов равно двум, а их отношение не вещественно. Тем самым теорема Якоби будет полностью доказана.

Итак, пусть

$$t = m + r, \qquad t' = m' + r',$$

где m, m' — числа целые и $0 \leqslant r < 1$, $0 \leqslant r' < 1$. Мы должны доказать, что $r = r' = 0$.

Так как $m\Omega$, $m'\Omega'$ — периоды функции f, то периодом является также

$$\Omega_1^* = \Omega^* - m\Omega - m'\Omega' = r\Omega + r'\Omega'.$$

Точка-период Ω_1^* лежит в построенном нами параллелограмме с вершинами 0, Ω, $\Omega + \Omega'$, Ω' и, следовательно, должна совпадать с одной из вершин этого параллелограмма, так как параллелограмм пуст. Таким образом, каждое из чисел r, r' должно равняться нулю или единице. В силу неравенств

$$0 \leqslant r < 1, \qquad 0 \leqslant r' < 1$$

будем иметь

$$r = 0, \qquad r' = 0,$$

что и требовалось доказать.

3. Тэта-функции. Прекрасные примеры периодических функций дают тригонометрические ряды. Мы рассмотрим здесь тригонометрические ряды, которыми определяются так называемые *тэта-функции*. В качестве основной тэта-функции примем

$$\vartheta_3(v)=\vartheta_3(v\,|\,\tau)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{(m^2\tau+2mv)\pi i}. \tag{1}$$

Здесь v — аргумент, а τ — параметр, мнимая часть которого положительна: $\Im\tau>0$. При этом условии величина $h=e^{\pi i\tau}$ по модулю меньше единицы, что влечет абсолютную сходимость рассматриваемого ряда для любого конечного v.

Нетрудно привести $\vartheta_3(v)$ к виду

$$\vartheta_3(v)=1+2h\cos 2\pi v+2h^4\cos 4\pi v+2h^9\cos 6\pi v+\ldots$$

Таким образом, $\vartheta_3(v)$ — четная целая функция от v с периодом 1.

На основании (1)

$$\begin{aligned}\vartheta_3(v+\tau)&=\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{(m^2\tau+2mv+2m\tau)\pi i}=\\&=e^{-\pi i(\tau+2v)}\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{[(m+1)^2\tau+2(m+1)v]\pi i}=\\&=e^{-\pi i(\tau+2v)}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{(n^2\tau+2nv)\pi i}.\end{aligned}$$

Мы видим, следовательно, что

$$\vartheta_3(v+\tau)=e^{-\pi i(2v+\tau)}\vartheta_3(v). \tag{2}$$

Прологарифмируем обе части равенства (2) и затем возьмем от обеих частей вторую производную по v. Мы получим тогда равенство

$$\frac{d^2}{dv^2}\ln\vartheta_3(v+\tau)=\frac{d^2}{dv^2}\ln\vartheta_3(v).$$

Так как, кроме того,

$$\frac{d^2}{dv^2}\ln\vartheta_3(v+1)=\frac{d^2}{dv^2}\ln\vartheta_3(v),$$

то

$$\varphi(v)=\frac{d^2}{dv^2}\ln\vartheta_3(v)$$

представляет пример функции с периодами 1, τ, отношение которых невещественно; это — функция *двоякопериодическая*. Заметим, что $\varphi(v)$ есть функция мероморфная и все ее полюсы двукратны. Действительно, $\vartheta_3(v)$ — целая функция, так что единственными особенностями ее логарифмической производной являются простые полюсы, совпадающие с нулями функции $\vartheta_3(v)$, а следовательно, единственными особенностями функции $\varphi(v)$ будут полюсы порядка 2.

Кроме $\vartheta_3(v)$, вводятся еще три тэта-функции

$$\vartheta_k(v)=\vartheta_k(v\,|\,\tau)\qquad (k=0,\ 1,\ 2).$$

Их можно определить с помощью равенств

$$\begin{aligned}\vartheta_0(v)&=\vartheta_3\left(v+\frac{1}{2}\right),\\ \vartheta_1(v)&=ie^{-\pi i(v-\tau/4)}\vartheta_3\left(v+\frac{1-\tau}{2}\right),\\ \vartheta_2(v)&=e^{-\pi i(v-\tau/4)}\vartheta_3\left(v-\frac{\tau}{2}\right).\end{aligned}$$

Опираясь на эти определения, нетрудно получить разложения всех тэта-функций в ряды Фурье, а также вывести формулы приведения для тэта-функций, напоминающие известные формулы тригонометрии. Все это содержится в таблице VIII (приложение I).

Заканчивая настоящий параграф, заметим, что отношения

$$\varphi_1(v)=\frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_0(v)},\quad \varphi_2(v)=\frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_0(v)},\quad \varphi_3(v)=\frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_0(v)},$$

как это следует из приведенных в таблице VIII формул, удовлетворяют следующим равенствам:

$$\begin{aligned}\varphi_1(v+1)&=-\varphi_1(v), &\quad \varphi_1(v+\tau)&=\varphi_1(v),\\ \varphi_2(v+1)&=-\varphi_2(v), &\quad \varphi_2(v+\tau)&=-\varphi_2(v),\\ \varphi_3(v+1)&=\varphi_3(v), &\quad \varphi_3(v+\tau)&=-\varphi_3(v).\end{aligned}$$

Поэтому функция $\varphi_1(v)$ имеет периоды 2, τ, функция $\varphi_2(v)$ — периоды 2, $1+\tau$ и, наконец, функция $\varphi_3(v)$ —

периоды 1, 2τ. Каждая из функций $\varphi_k(v)$ есть функция мероморфная. Таким образом, мы имеем второе доказательство существования мероморфных двоякопериодических функций.

Мероморфные двоякопериодические функции носят название функций *эллиптических*. Происхождение этого термина будет объяснено ниже.

4. Теоремы Лиувилля. Будем рассматривать эллиптические функции с примитивными периодами Ω, Ω' и условимся, если противное не оговорено, считать, что отношение $\tau = \Omega'/\Omega$ имеет положительную мнимую часть. Возьмем в комплексной плоскости некоторую точку c и построим параллелограмм с вершинами[1] c, $c+\Omega$, $c+\Omega+\Omega'$, $c+\Omega'$. Из четырех вершин к параллелограмму отнесем только вершину c, а из четырех сторон отнесем те, которые сходятся в точке c. Определенное таким образом точечное множество назовем параллелограммом периодов. Будем называть две точки u', u'' *сравнимыми по модулю* периодов Ω, Ω', или *эквивалентными*, если

$$u'' - u' = m\Omega + m'\Omega',$$

где m, m' — числа целые, и будем писать

$$u'' \equiv u' \,(\mathrm{mod}\,(\Omega,\ \Omega')).$$

В силу нашего определения в параллелограмме периодов нет ни одной пары эквивалентных точек. С другой стороны, какова бы ни была точка u, в параллелограмме периодов найдется эквивалентная ей точка и притом, разумеется, одна. В самом деле, можно найти вещественные числа t, t' так, чтобы

$$u - c = t\Omega + t'\Omega'.$$

Полагая

$$t = m + r, \qquad t' = m' + r',$$

где m, m' — числа целые и $0 \leqslant r < 1$, $0 \leqslant r' < 1$, найдем

$$u - (c + r\Omega + r'\Omega') = m\Omega + m'\Omega'.$$

[1]) Этот переход от вершины к вершине отвечает обходу границы параллелограмма в положительном направлении, так как $\mathfrak{J}(\Omega'/\Omega) > 0$.

Следовательно, точка u эквивалентна точке

$$c + r\Omega + r'\Omega',$$

принадлежащей параллелограмму периодов.

При изучении эллиптической функции можно ограничиться ее рассмотрением в каком-нибудь параллелограмме периодов.

Начальная вершина c параллелограмма произвольна. Благодаря этой произвольности мы сможем строить параллелограмм периодов так, чтобы на его сторонах функция не принимала каких-либо наперед указанных значений, например, не обращалась в бесконечность. Такой выбор параллелограмма периодов возможен, так как эллиптическая функция, как всякая мероморфная функция, принимает в конечной области каждое свое значение конечное число раз.

Все точки, сравнимые между собой по модулю периодов, образуют, как принято говорить, правильную систему или сетку точек на плоскости. Каждой такой системе отвечает некоторая сетка параллелограммов, которые, примыкая друг к другу, покрывают всю плоскость.

Пусть $f(u)$ — эллиптическая функция с примитивными периодами Ω, Ω' и пусть параллелограмм периодов выбран так, что $f(u)$ на его сторонах регулярна.

Проинтегрируем $f(u)$ по контуру параллелограмма. По теореме Коши результат интегрирования представляет умноженную на $2\pi i$ сумму вычетов функции $f(u)$ относительно всех полюсов, лежащих внутри параллелограмма. С другой стороны,

$$\int_{\square} f(u)\,du = \int_{c}^{c+\Omega} f(u)\,du + \int_{c+\Omega}^{c+\Omega+\Omega'} f(u)\,du + \int_{c+\Omega+\Omega'}^{c+\Omega'} f(u)\,du + \int_{c+\Omega'}^{c} f(u)\,du.$$

Делая в третьем интеграле правой части подстановку $u = v + \Omega'$, получим

$$\int_{c+\Omega+\Omega'}^{c+\Omega'} f(u)\,du = \int_{c+\Omega}^{c} f(v+\Omega')\,dv = \int_{c+\Omega}^{c} f(v)\,dv,$$

так как

$$f(v+\Omega')=f(v).$$

Следовательно, третий интеграл взаимно уничтожается с первым. Подобным образом взаимно уничтожаются второй и четвертый интегралы. Итак,

$$\int_{\square} f(u)\,du=0,$$

а значит, равна нулю сумма вычетов функции $f(u)$ относительно всех полюсов, лежащих внутри рассматриваемого параллелограмма. В силу нашего определения из двух параллельных сторон параллелограмму периодов принадлежит только одна. Поэтому полученный результат справедлив и в том случае, когда функция имеет полюсы на границе параллелограмма. Нужно лишь взять все полюсы, лежащие *в* параллелограмме (а не только *внутри* его).

Из нашего результата вытекают важные следствия. Переходя к ним, условимся называть a-точками функции те точки, в которых функция принимает значение a.

1° Беря вместо эллиптической функции $f(u)$ эллиптическую функцию

$$\varphi(u)=\frac{f'(u)}{f(u)-a},$$

где a — константа, найдем, что *правильно подсчитанное* (т. е. подсчитанное с учетом кратности) *число полюсов отличной от константы эллиптической функции $f(u)$ в параллелограмме периодов равно правильно подсчитанному числу a-точек, каково бы ни было a.*

2° *Не существует отличной от константы эллиптической функции, регулярной в параллелограмме периодов.* Действительно, для такой функции равнялось бы нулю число полюсов, а значит, в силу предыдущего предложения и число a-точек, каково бы ни было a, что абсурдно [1]).

3° *Число полюсов эллиптической функции в параллелограмме периодов, подсчитанное с учетом кратности*

---

[1]) Предложение 2° вытекает также из того, что регулярная в каком-нибудь параллелограмме периодов функция в силу периодичности регулярна и ограничена во всей открытой плоскости.

(его называют *порядком* эллиптической функции), *не может быть меньше, чем два.*

Таким образом, a priori мыслимы два типа простейших эллиптических функций: функция первого типа имеет в параллелограмме периодов один полюс второго порядка с вычетом, равным нулю; функция второго типа имеет два различных полюса первого порядка с вычетами, которые отличаются лишь знаком. В дальнейшем функции обоих типов будут построены.

Все эти предложения носят название т е о р е м Л и у в и л л я. Ему принадлежит еще одна теорема. Переходя к ней, обозначим через

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_m$$

лежащие в параллелограмме периодов a-точки функции $f(u)$, причем каждая точка пишется столько раз, сколько единиц имеет ее кратность. Далее, через

$$\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_m$$

обозначим полюсы функции, записанные по тому же принципу. При этом, конечно, предполагается, что $f(u)$ отлична от константы.

В силу теоремы Коши

$$2\pi i\left\{\sum_{k=1}^{m}\alpha_k-\sum_{k=1}^{m}\beta_k\right\}=\int_{\square} u\frac{f'(u)}{f(u)-a}\,du,$$

причем здесь принято, что на контуре рассматриваемого параллелограмма $f(u)$ не принимает значения a и не имеет полюсов. Вычисляя контурный интеграл, как и выше, найдем

$$\int_{\square} u\,\frac{f'(u)}{f(u)-a}\,du=$$

$$=\int_{c}^{c+\Omega} u\,\frac{f'(u)}{f(u)-a}\,du+\int_{c+\Omega}^{c+\Omega+\Omega'}+\int_{c+\Omega+\Omega'}^{c+\Omega'}+\int_{c+\Omega'}^{c}=$$

$$=J_1+J_2+J_3+J_4.$$

Делая в интеграле J_3 подстановку $u = v + \Omega'$, получим

$$J_3 = \int\limits_{c+\Omega}^{c} (v+\Omega') \frac{f'(v)}{f(v)-a}\, dv.$$

Поэтому

$$J_1 + J_3 = \Omega' \int\limits_{c+\Omega}^{c} \frac{f'(v)}{f(v)-a}\, dv =$$

$$= \Omega' \{\ln [f(c) - a] - \ln [f(c+\Omega) - a]\};$$

а так как $f(c) - a = f(c+\Omega) - a$, то $\ln [f(c) - a]$ отличается от $\ln [f(c+\Omega) - a]$ только на целое кратное $2\pi i$, поэтому

$$J_1 + J_3 = \Omega' \cdot 2n'\pi i.$$

Подобным образом доказывается, что

$$J_2 + J_4 = \Omega \cdot 2n\pi i.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k - \sum_{k=1}^{m} \beta_k = n\Omega + n'\Omega',$$

т. е.

4° *Сумма a-точек функции $f(u)$ при любом a сравнима по модулю периодов с суммой полюсов этой функции, если рассматриваются все a-точки и полюсы, принадлежащие одному параллелограмму периодов.*

5. Функция Вейерштрасса $\wp(u)$. Рассмотрим ряд [1])

$$\sum_{m,\, m'}{}' \frac{1}{|2m\omega + 2m'\omega'|^p}, \tag{1}$$

где суммирование распространено на все целые m, m', кроме пары [2]) $m = m' = 0$, а числа ω, ω' удовлетворяют сделанному выше предположению. Докажем, что написанный ряд сходится при $p > 2$ и расходится при $p \leqslant 2$.

---

[1]) Начиная с этого параграфа мы будем часто вводить в обозначение периодов множитель 2 (полагая $\Omega = 2\omega$, $\Omega' = 2\omega'$).

[2]) Это обстоятельство и отмечается штрихом у знака суммы.

Мы имеем здесь некоторую правильную систему точек

$$2m\omega + 2m'\omega',$$

из которой удалена точка 0. Возьмем прежде всего восемь точек

$$\pm 2\omega, \quad \pm(2\omega + 2\omega'), \quad \pm 2\omega', \quad \pm(2\omega - 2\omega') \tag{2}$$

нашей правильной системы. Эти точки являются вершинами четырех параллелограммов, сходящихся в точке 0 (рис. 2) и образуют первое окаймление точки 0. Пусть минимальное расстояние вершины системы (2) от точки 0 есть d, а максимальное — D. Тогда сумма восьми членов ряда (1), отвечающих вершинам (2), удовлетворяет неравенствам

$$\frac{8}{D^p} \leqslant S_1 \leqslant \frac{8}{d^p}.$$

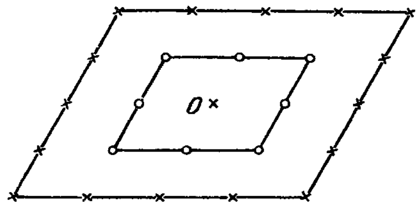


Рис. 2.

Возьмем теперь те вершины нашей правильной системы, которые принадлежат второму окаймлению точки 0. Этих вершин будет 16, минимальным и максимальным расстоянием от точки 0 до них будут соответственно числа $2d$, $2D$. Поэтому в ряде (1) этим шестнадцати вершинам отвечает сумма S_2, удовлетворяющая неравенствам

$$\frac{16}{(2D)^p} \leqslant S_2 \leqslant \frac{16}{(2d)^p};$$

n-е окаймление будет состоять из $8n$ вершин, и ему будет соответствовать сумма S_n, удовлетворяющая неравенствам

$$\frac{8n}{(nD)^p} \leqslant S_n \leqslant \frac{8n}{(nd)^p}.$$

Сходимость нашего ряда (1) эквивалентна сходимости ряда

$$S_1 + S_2 + \ldots + S_n + \ldots,$$

и наше утверждение является непосредственным следствием того, что

$$S_n \leqslant \frac{8}{d^p n^{p-1}} \quad \text{и} \quad S_n \geqslant \frac{8}{D^p n^{p-1}}.$$

В силу доказанного ряд

$$\sum_{m,\, m'} \frac{1}{(u - 2m\omega - 2m'\omega')^3} \tag{3}$$

сходится абсолютно и равномерно в каждой ограниченной области плоскости u, если из него удалить то конечное число членов, которые в этой области обращаются в бесконечность. Поэтому сумма ряда (3) есть мероморфная функция, единственными полюсами (и притом третьего порядка) которой являются точки $2m\omega + 2m'\omega'$.

Положим

$$Q(u) = -2 \sum_{m,\, m'} \frac{1}{(u - 2m\omega - 2m'\omega')^3}.$$

Покажем, что эта функция имеет периоды 2ω, $2\omega'$. Действительно,

$$Q(u + 2\omega) = -2 \sum_{m,\, m'} \frac{1}{(u + 2\omega - 2m\omega - 2m'\omega')^3}.$$

Полагая $m - 1 = n$, перепишем эту формулу в виде

$$Q(u + 2\omega) = -2 \sum_{n,\, m'} \frac{1}{(u - 2n\omega - 2m'\omega')^3}.$$

А так как пара (n, m') пробегает ту же совокупность, что и пара (m, m'), то правая часть полученной формулы есть $Q(u)$, и равенство

$$Q(u + 2\omega) = Q(u)$$

доказано. Точно так же доказывается, что

$$Q(u + 2\omega') = Q(u).$$

Аналогичные рассуждения показывают, что $Q(u)$ есть нечетная функция. Действительно,

$$Q(-u) = 2 \sum_{m,\, m'} \frac{1}{(u + 2m\omega + 2m'\omega')^3} =$$

$$= 2 \sum_{n,\, n'} \frac{1}{(u - 2n\omega - 2n'\omega')^3} = -Q(u).$$

Здесь принято во внимание, что пары (m, m'), (n, n'), где $n = -m$, $n' = -m'$, пробегают одну и ту же совокупность.

Теперь с помощью интегрирования введем функцию

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \int_0^u \left\{ Q(u) + \frac{2}{u^3} \right\} du.$$

При этом предполагается, что путь интегрирования не проходит через вершины сетки периодов, отличные от точки $u = 0$. Таким образом,

$$\wp'(u) = Q(u), \tag{4}$$

а с другой стороны, почленное интегрирование дает

$$\wp(u) =$$

$$= \frac{1}{u^2} + {\sum_{m,\, m'}}' \left\{ \frac{1}{(u - 2m\omega - 2m'\omega')^2} - \frac{1}{(2m\omega + 2m'\omega')^2} \right\}. \tag{5}$$

Так как $Q(u)$ — функция нечетная, то $\wp(u)$ — функция четная. Это обстоятельство можно без труда получить также и с помощью представления (5).

Далее, поскольку $Q(u)$ имеет период 2ω, то в силу (4)

$$\wp'(u + 2\omega) = \wp'(u)$$

и, значит,

$$\wp(u + 2\omega) = \wp(u) + c, \tag{6}$$

где c — константа.

Из разложения (5) вытекает, что единственными полюсами функции $\wp(u)$ являются точки $2m\omega + 2m'\omega'$, поэтому в точках ω, ω' функция $\wp(u)$ конечна. А так как подстановка $u = -\omega$ в формулу (6) дает

$$\wp(\omega) = \wp(-\omega) + c,$$

то в силу четности функции $\wp(u)$ для константы c получается значение 0, т. е.

$$\wp(u + 2\omega) = \wp(u).$$

Аналогично проверяется, что

$$\wp(u + 2\omega') = \wp(u).$$

Мы видим, что $\wp(u)$ есть эллиптическая функция второго порядка, так как в каждом параллелограмме периодов она имеет всего один полюс порядка 2. Таким образом, $\wp(u)$ есть одна из простейших эллиптических функций в том смысле, какой этому слову придан в § 4. Она является основной в теории Вейерштрасса.

6. Дифференциальное уравнение функции $\wp(u)$. В окрестности точки $u = 0$ функция $\wp(u)$ имеет вид [1])

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + 3u^2 \sum_{m,m'}{}' \frac{1}{(2m\omega + 2m'\omega')^4} + 5u^4 \sum_{m,m'}{}' \frac{1}{(2m\omega + 2m'\omega')^6} + \ldots$$

Приняты обозначения

$$\sum_{m,m'}{}' \frac{1}{(2m\omega + 2m'\omega')^4} = \frac{g_2}{60}, \quad \sum_{m,m'}{}' \frac{1}{(2m\omega + 2m'\omega')^6} = \frac{g_3}{140}.$$

[1]) Дальнейшие коэффициенты (с точностью до некоторых числовых множителей) равны рядам

$$\sum_{m,m'}{}' \frac{1}{(2m\omega + 2m'\omega')^{2l}} \qquad (l = 4,\ 5,\ 6,\ \ldots).$$

Мы еще встретимся с ними в § 10.

В этих обозначениях будем иметь

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{20}u^2 + \frac{g_3}{28}u^4 + \ldots \tag{1}$$

Отсюда

$$\wp'(u) = -\frac{2}{u^3} + \frac{g_2}{10}u + \frac{g_3}{7}u^3 + \ldots$$

Поэтому

$$[\wp'(u)]^2 = \frac{4}{u^6}\left\{1 - \frac{g_2}{10}u^4 - \frac{g_3}{7}u^6 + \ldots\right\},$$

$$[\wp(u)]^3 = \frac{1}{u^6}\left\{1 + \frac{3g_2}{20}u^4 + \frac{3g_3}{28}u^6 + \ldots\right\}.$$

В силу этих разложений и (1)

$$[\wp'(u)]^2 - 4[\wp(u)]^3 + g_2\wp(u) = -g_3 + Au^2 + Bu^4 + \ldots$$

Левая часть есть эллиптическая функция с периодами 2ω, $2\omega'$. Ее полюсами могут быть только точки $2m\omega + 2m'\omega'$. А так как в точке $u = 0$, как показывает написанная формула, эта функция регулярна и равна $-g_3$, то она регулярна во всяком параллелограмме периодов, для которого $u = 0$ есть внутренняя точка, и, следовательно, по теореме Лиувилля есть константа. Итак, мы получили соотношение

$$[\wp'(u)]^2 = 4[\wp(u)]^3 - g_2\wp(u) - g_3. \tag{2}$$

Иначе говоря, $\wp(u)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$z'^2 = 4z^3 - g_2 z - g_3.$$

Уравнение (2) позволяет выразить все производные от $\wp(u)$ через $\wp(u)$ и $\wp'(u)$; например,

$$\wp'' = 6\wp^2 - \frac{1}{2}g_2,$$

$$\wp''' = 12\wp\wp',$$

$$\wp^{(IV)} = 120\wp^3 - 18g_2\wp - 12g_3.$$

Положим

$$4z^3 - g_2 z - g_3 = 4(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3).$$

Тогда

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0, \tag{3}$$

$$e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_1 = -\frac{1}{4} g_2, \tag{4}$$

$$e_1 e_2 e_3 = \frac{1}{4} g_3. \tag{5}$$

Из (3) и (4) следует, что

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = \frac{1}{2} g_2.$$

Замечая, что $\wp'(u)$ — нечетная функция и полагая в равенстве

$$\wp'(u + 2\omega) = \wp'(u)$$

$u = -\omega$, найдем, что $\wp'(\omega) = 0$ (следует иметь в виду, что $\wp'(\omega)$ конечно). Подобным образом можно обнаружить, что

$$\wp'(\omega') = 0, \qquad \wp'(\omega + \omega') = 0.$$

Мы видим, что точки ω, $\omega + \omega'$, ω' являются нулями функции $\wp'(u)$ и притом простыми нулями, так как $\wp'(u)$ — эллиптическая функция третьего порядка.

Заметим теперь, что величины

$$\wp(\omega), \qquad \wp(\omega + \omega'), \qquad \wp(\omega')$$

все различны между собой. Действительно, если бы, например, имело место равенство $\wp(\omega) = \wp(\omega + \omega')$, то эллиптическая функция второго порядка $\wp(u) - \wp(\omega)$ имела бы два нуля второго порядка: ω, $\omega + \omega'$, что невозможно.

В силу (2) величины $\wp(\omega)$, $\wp(\omega + \omega')$, $\wp(\omega')$ совпадают с корнями многочлена $4z^3 - g_2 z - g_3$. Поэтому числа e_1, e_2, e_3 все различны между собой.

Часто удобнее пользоваться обозначениями

$$2\omega_1 = 2\omega,$$

$$2\omega_2 = -2\omega - 2\omega' \qquad \left(\tau = \frac{\omega_3}{\omega_1}, \quad \Im\tau > 0\right),$$

$$2\omega_3 = 2\omega',$$

так что $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$. При этом полагают

$$\wp(\omega_k) = e_k \qquad (k = 1,\ 2,\ 3).$$

Не мешает заметить, что из формул (3)—(5) получается следующее представление *дискриминанта*:

$$g_2^3 - 27 g_3^2 = 16 (e_1 - e_2)^2 (e_2 - e_3)^2 (e_3 - e_1)^2,$$

а также равенство

$$\frac{3}{2} g_2 = (e_1 - e_2)^2 + (e_2 - e_3)^2 + (e_3 - e_1)^2.$$

Отсюда, между прочим, находим

$$J \equiv \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27 g_3^2} = \frac{[(e_1 - e_2)^2 + (e_2 - e_3)^2 + (e_3 - e_1)^2]^3}{2 \cdot 27 \cdot (e_1 - e_2)^2 (e_2 - e_3)^2 (e_3 - e_1)^2}. \tag{6}$$

Эта формула понадобится нам в дальнейшем.

ГЛАВА II

МОДУЛЯРНАЯ ФУНКЦИЯ

7. Инварианты. В дальнейшем нам придется рассматривать рациональные функции от x и $\sqrt{\varphi(x)}$, где

$$\varphi(x) = a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4 \tag{1}$$

произвольно заданный многочлен четвертой степени без кратных корней.

Коэффициент a_0 может равняться нулю. Если это имеет место, то один из корней многочлена (1) «удалился» на бесконечность. При $a_0 = 0$ коэффициент a_1 мы будем считать отличным от нуля. Это можно было бы не оговаривать, так как обращение в нуль обоих коэффициентов a_0, a_1 означает наличие у многочлена (1) кратного корня на бесконечности.

Если подвергнуть x дробно-линейному преобразованию

$$x = \frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta} \qquad \left(D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0\right), \tag{2}$$

то упомянутая рациональная функция превратится в некоторую рациональную функцию от y и корня квадратного из какого-то нового многочлена

$$\psi(y) = b_0 y^4 + 4b_1 y^3 + 6b_2 y^2 + 4b_3 y + b_4.$$

Действительно,

$$R_1(x, \sqrt{\varphi(x)}) =$$
$$= R_1\left(\frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta}, \frac{\sqrt{\psi(y)}}{(\gamma y + \delta)^2}\right) = R_2(y, \sqrt{\psi(y)}).$$

Коэффициентами преобразования (2) естественно распорядиться так, чтобы новый многочлен имел особо удобную форму для требуемых рассмотрений. Одной из таких форм является каноническая форма

$$\psi(y) = 4y^3 - g_2 y - g_3, \tag{3}$$

которая встретилась у нас в § 6 и в теорию эллиптических функций была введена Вейерштрассом.

Форма (3) характеризуется в первую очередь отсутствием членов с четвертой и второй степенью независимой переменной. В существовании преобразования (2), приводящего к такой форме, можно убедиться без подробных вычислений. Действительно, если взять какой-нибудь корень многочлена $\varphi(x)$, скажем, c, и положить

$$x = c + 1/z,$$

то мы получим

$$\varphi(x) = \frac{\varphi'(c)\, z^3 + \frac{1}{2}\varphi''(c)\, z^2 + \ldots}{z^4},$$

где $\varphi'(c) \neq 0$, так как $\varphi(x)$ кратных корней не имеет. Если далее положить

$$z = Ay + B,$$

то при надлежащем выборе числа B коэффициент при y^2 будет равен нулю. Затем, выбирая надлежащим образом число A, добьемся того, что коэффициент при y^3 будет равен 4, т. е. многочлен $\psi(y)$ будет иметь вид (3).

Чтобы получить окончательные выражения для новых коэффициентов через старые, полезны так называемые инварианты. Определение инвариантов мы дадим несколько позже, после рассмотрений, которыми теперь займемся.

Для удобства перейдем от многочленов от одной переменной к однородным функциям, т. е. формам, от двух переменных:

$$\varphi(x) = \varphi\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \frac{\varphi(x_1, x_2)}{x_2^4},$$

где

$$\varphi(x_1, x_2) = a_0x_1^4 + 4a_1x_1^3x_2 + 6a_2x_1^2x_2^2 + 4a_3x_1x_2^3 + a_4x_2^4.$$

В таком случае вместо преобразования (2) нам придется рассматривать преобразование одной пары переменных в другую:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha y_1 + \beta y_2, \\ x_2 &= \gamma y_1 + \delta y_2 \end{aligned} \qquad \left(D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0\right). \tag{4}$$

При этом мы придем к равенству

$$\varphi(x_1, x_2) = \\ = b_0y_1^4 + 4b_1y_1^3y_2 + 6b_2y_1^2y_2^2 + 4b_3y_1y_2^3 + b_4y_2^4 = \psi(y_1, y_2)$$

и для получения многочлена $\psi(y)$ останется положить

$$y = \frac{y_1}{y_2}, \qquad \psi(y) = \psi\left(\frac{y_1}{y_2}, 1\right) = \frac{\psi(y_1, y_2)}{y_2^4}.$$

При введенных обозначениях *справедливы следующие соотношения*:

$$b_0b_4 - 4b_1b_3 + 3b_2^2 = D^4(a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2) \tag{5}$$

и

$$\begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix} = D^6 \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Для доказательства заметим, что общее преобразование (4) можно получить с помощью суперпозиции (не более четырех) частных преобразований вида

$$\text{(I)}\ \begin{aligned} x_1 &= Dy_1, \\ x_2 &= y_2; \end{aligned} \qquad \text{(II)}\ \begin{aligned} x_1 &= -y_2, \\ x_2 &= y_1; \end{aligned} \qquad \text{(III)}\ \begin{aligned} x_1 &= y_1 + Ay_2, \\ x_2 &= y_2. \end{aligned}$$

Так как определитель общего преобразования равен произведению определителей составляющих его простых преобразований, то достаточно убедиться в справедливости соотношений (5), (6) для каждого из этих более простых преобразований. Для преобразований (I), (II) наше утверждение почти тривиально. В случае преобразования (III) будем иметь равенства

$$b_0 = a_0, \quad b_1 = a_0A + a_1, \quad b_2 = a_0A^2 + 2a_1A + a_2,$$
$$b_3 = a_0A^3 + 3a_1A^2 + 3a_2A + a_3,$$
$$b_4 = a_0A^4 + 4a_1A^3 + 6a_2A^2 + 4a_3A + a_4,$$

с помощью которых соотношения (5), (6) (с $D = 1$) проверяются очень просто.

Функцию $\Phi(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ от коэффициентов формы $\varphi(x_1, x_2)$ называют *относительным инвариантом* веса m, если при всех преобразованиях вида (4) имеет место равенство

$$\Phi(b_0, b_1, b_2, b_3, b_4) = D^m\,\Phi(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4).$$

Если вес равен нулю, то инвариант называется *абсолютным*.

В силу полученных нами соотношений (5) и (6) выражения g_2, g_3, определяемые формулами

$$g_2 = a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2 \tag{7}$$

и

$$g_3 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}, \tag{8}$$

являются относительными инвариантами формы $\varphi(x_1, x_2)$ веса 4 и, соответственно, веса 6.

Величина

$$J = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2}$$

является абсолютным инвариантом.

А теперь возвратимся от форм к многочленам.

Докажем следующее предложение: *для всякого многочлена* (1) *можно найти дробно-линейное преобразование*

$$x = \frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta}$$

с определителем

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = 1$$

такое, что

$$\varphi(x) = \frac{4y^3 - g_2 y - g_3}{(\gamma y + \delta)^4},$$

где g_2, g_3 *определяются формулами* (7), (8).

Взяв какое-нибудь преобразование (2), найдем

$$\varphi(x) = \frac{b_0 y^4 + 4b_1 y^3 + 6b_2 y^2 + 4b_3 y + b_4}{(\gamma y + \delta)^4}.$$

Из рассмотрений в начале параграфа следует, что преобразование (2) можно выбрать так, чтобы $b_0 = b_2 = 0$, $b_1 = 1$. Применяя соотношения (5) и (6), найдем

$$-4b_3 = D^4 g_2, \qquad -b_4 = D^6 g_3,$$

где D — определитель преобразования (2). Таким образом,

$$\varphi(x) = \frac{4y^3 - D^4 g_2 y - D^6 g_3}{(\gamma y + \delta)^4}.$$

Если $D = 1$, то наше предложение доказано. Если же $D \neq 1$, то нужно перейти от y к новой переменной (назовем ее y_1) по формуле

$$y = D^2 y_1,$$

так что

$$x = \frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta} = \frac{\alpha D^2 y_1 + \beta}{\gamma D^2 y_1 + \delta} = \frac{\alpha_1 y_1 + \beta_1}{\gamma_1 y_1 + \delta_1},$$

где мы положили

$$\alpha_1 = D^{1/2}\alpha, \qquad \beta_1 = D^{-3/2}\beta,$$
$$\gamma_1 = D^{1/2}\gamma, \qquad \delta_1 = D^{-3/2}\delta.$$

Теперь

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{vmatrix} = 1,$$

а с другой стороны,

$$\varphi(x) = \frac{4y_1^3 - g_2 y_1 - g_3}{(\gamma_1 y_1 + \delta_1)^4}.$$

8. Модулярные формы. Два числа 2ω, $2\omega'$, отношение которых

$$\tau = \frac{\omega'}{\omega} \tag{1}$$

имеет отличную от нуля мнимую часть, порождают, как мы знаем, некоторую правильную систему точек на плоскости. Ту же правильную систему точек можно получить, отправляясь от некоторых других пар чисел.

Нетрудно видеть, что пары $(2\omega,\ 2\omega')$, $(2\tilde{\omega},\ 2\tilde{\omega}')$ порождают одну и ту же правильную систему, если числа 2ω, $2\omega'$ являются линейными комбинациями с целыми коэффициентами чисел $2\tilde{\omega}$, $2\tilde{\omega}'$, а числа $2\tilde{\omega}$, $2\tilde{\omega}'$ являются аналогичными комбинациями чисел 2ω, $2\omega'$. Чтобы это имело место, необходимо и достаточно выполнение равенств

$$\tilde{\omega}' = \alpha\omega' + \beta\omega, \qquad \tilde{\omega} = \gamma\omega' + \delta\omega, \tag{2}$$

где α, β, γ, δ — целые числа, связанные соотношением

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1. \tag{3}$$

Если мы потребуем, чтобы мнимая часть отношения $\tilde{\omega}'/\tilde{\omega}$ имела тот же знак, что и мнимая часть отношения ω'/ω, то в соотношении (3) знак минус должен быть отброшен [1]). В этом случае пары $(2\omega,\ 2\omega')$, $(2\tilde{\omega},\ 2\tilde{\omega}')$ будем называть *эквивалентными*.

[1]) Действительно, из

$$\tilde{\tau} = \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}$$

следует

$$\Im\tilde{\tau} = \Im\tau\,\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{|\gamma\tau + \delta|^2}.$$

Величины

$$g_2 = 60 \sum_{m,\, m'}{}' \frac{1}{(2m\omega + 2m'\omega')^4} = g_2(\omega,\ \omega'),$$

$$g_3 = 140 \sum_{m,\, m'}{}' \frac{1}{(2m\omega + 2m'\omega')^6} = g_3(\omega,\ \omega'),$$

к которым мы пришли в § 6, отправляясь от пары примитивных периодов, являются относительными инвариантами (см. § 7) многочлена от $\wp(u)$, который представляет $[\wp'(u)]^2$.

Теперь мы будем рассматривать эти величины как функции от пары $(2\omega,\ 2\omega')$. Они, как легко видеть, не изменятся, если вместо пары $(2\omega,\ 2\omega')$ взять другую пару, порождающую ту же правильную систему точек. В частности, g_2, g_3 не меняются при переходе от пары $(2\omega,\ 2\omega')$ к эквивалентной паре $(2\widetilde{\omega},\ 2\widetilde{\omega}')$. С другой стороны, непосредственно из определения величин g_2, g_3 вытекает, что

$$g_2(t\omega,\ t\omega') = \frac{1}{t^4}\, g_2(\omega,\ \omega'),$$

$$g_3(t\omega,\ t\omega') = \frac{1}{t^6}\, g_3(\omega,\ \omega').$$

Замена пары $(2\omega,\ 2\omega')$ парой $(2t\omega,\ 2t\omega')$ соответствует переходу от первоначальной сетки к сетке подобной. Как видим, относительно таких преобразований величины g_2, g_3 не инвариантны. Величина же

$$J = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2},$$

очевидно, остается без изменения не только при переходе от пары $(2\omega,\ 2\omega')$ к эквивалентной паре $(2\widetilde{\omega},\ 2\widetilde{\omega}')$, но также и при переходе от пары $(2\omega,\ 2\omega')$ к паре $(2t\omega,\ 2t\omega')$, порождающей подобную сетку. Эта величина J, названная в § 7 абсолютным инвариантом, является, таким образом, функцией от одной переменной, а именно от

отношения $\tau = \omega'/\omega$ и обладает следующим свойством: *при любых целых* α, β, γ, δ, *связанных соотношением*

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1, \qquad (4)$$

имеет место равенство

$$J\left(\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}\right) = J(\tau).$$

Линейную подстановку

$$\tau' = \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta},$$

где α, β, γ, δ — целые числа, связанные соотношением (4) [1]), называют *модулярной подстановкой.*

Аналитическую же функцию, инвариантную относительно модулярных подстановок, называют *модулярной функцией.* Ниже будет показано, что $J(\tau)$ — аналитическая функция. Поэтому $J(\tau)$ есть модулярная функция. Что же касается инвариантов g_2, g_3, которые не являются функциями от τ, то их естественно назвать *модулярными формами* от ω, ω'.

Будем обозначать модулярные подстановки буквами S, T, ... Например, если

$$\tau' = \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta},$$

то будем писать

$$\tau' = S\tau \qquad (5)$$

и

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha & -\beta \\ -\gamma & -\delta \end{pmatrix}.$$

Таким образом, две матрицы

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\alpha & -\beta \\ -\gamma & -\delta \end{pmatrix}$$

мы здесь не считаем различными [2]).

[1]) Соотношение (4) выражает, что детерминант рассматриваемой подстановки равен 1.

[2]) Это допустимо, так как единственной операцией, которую мы будем над матрицами производить, является перемножение.

Тождественная подстановка $\tau' = \tau$ также является модулярной. Ее обозначают буквой I:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Запись (5) подчеркивает, что τ' мы рассматриваем как результат применения некоторой операции к τ.

Если

$$\tau' = \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta} = S\tau,$$

то

$$\tau = \frac{-\delta\tau' + \beta}{\gamma\tau' - \alpha} = \frac{\delta\tau' - \beta}{-\gamma\tau' + \alpha}.$$

Подстановку

$$\begin{pmatrix} -\delta & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix},$$

которая также является модулярной, называют обратной по отношению к подстановке

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = S$$

и обозначают символом S^{-1}.

Применяя к τ модулярную подстановку S_1, а затем применяя к результату, т. е. к $S_1\tau$, модулярную подстановку S_2, получим какое-то τ'. Легко выразить τ' через τ. Пусть

$$\tau^* = S_1\tau, \qquad \tau' = S_2\tau^*.$$

Тогда

$$\tau' = \frac{\alpha_2\tau^* + \beta_2}{\gamma_2\tau^* + \delta_2} = \frac{\alpha_2(\alpha_1\tau + \beta_1) + \beta_2(\gamma_1\tau + \delta_1)}{\gamma_2(\alpha_1\tau + \beta_1) + \delta_2(\gamma_1\tau + \delta_1)} =$$

$$= \frac{(\alpha_2\alpha_1 + \beta_2\gamma_1)\tau + (\alpha_2\beta_1 + \beta_2\delta_1)}{(\gamma_2\alpha_1 + \delta_2\gamma_1)\tau + (\gamma_2\beta_1 + \delta_2\delta_1)}.$$

Мы видим, что τ' можно получить применением к τ некоторой подстановки S. Матрица этой подстановки

$$\begin{pmatrix} \alpha_2\alpha_1 + \beta_2\gamma_1 & \alpha_2\beta_1 + \beta_2\delta_1 \\ \gamma_2\alpha_1 + \delta_2\gamma_1 & \gamma_2\beta_1 + \delta_2\delta_1 \end{pmatrix}$$

является произведением матриц подстановок S_2 и S_1. Поэтому детерминант матрицы подстановки S равен 1, т. е. S есть также подстановка модулярная. Эту подстановку S, которая является результатом композиции подстановок S_2, S_1, принято называть произведением подстановок S_2, S_1. При этом пишут

$$S = S_2S_1 \quad \text{и} \quad \tau' = (S_2S_1)\tau = S_2S_1\tau,$$

если $\tau' = S_2(S_1\tau)$.

Перемножая подстановки в другом порядке, получим

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\gamma_2 & \alpha_1\beta_2 + \beta_1\delta_2 \\ \gamma_1\alpha_2 + \delta_1\gamma_2 & \gamma_1\beta_2 + \delta_1\delta_2 \end{pmatrix}.$$

Мы видим, что, вообще говоря, $S_1S_2 \neq S_2S_1$, т. е. операция умножения не коммутативна. Поэтому нужно различать умножение на подстановку справа от умножения слева.

Относительно рассмотренной нами операции умножения совокупность всех модулярных подстановок образует *группу*, причем обратным элементом для S является S^{-1}. Действительно,

$$SS^{-1} = \begin{pmatrix} -\alpha\delta + \beta\gamma & \alpha\beta - \beta\alpha \\ -\gamma\delta + \delta\gamma & \beta\gamma - \alpha\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = I$$

и

$$S^{-1}S = I.$$

Функция $J(\tau)$ инвариантна относительно этой группы преобразований. Часто приходится рассматривать другие группы дробно-линейных преобразований. Всякий раз аналитическую функцию, инвариантную относительно такой группы преобразований, называют *автоморфной функцией*. Таким образом, абсолютный инвариант $J(\tau)$ представляет пример автоморфной функции. Более простыми примерами автоморфных функций являются функции периодические.

9. Фундаментальная область группы Σ. Двоякопериодическую функцию достаточно изучить в каком-нибудь параллелограмме периодов. Группа подстановок, относительно которых двоякопериодическая функция инвариантна, порождается двумя основными подстановками:

$$\left.\begin{aligned} S:\quad \tilde{u} &= u + 2\omega, \\ S':\quad \tilde{u} &= u + 2\omega', \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

т. е. всякая подстановка этой группы является результатом композиции (перемножения) этих подстановок.

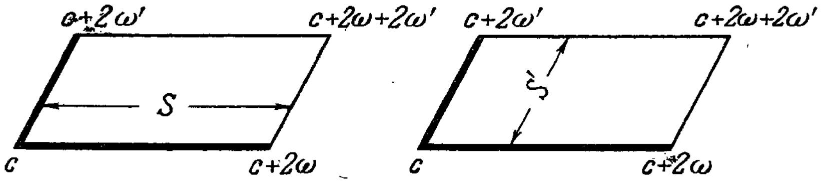


Рис. 3.

Каждая из основных подстановок S, S' связывает пару противоположных сторон параллелограмма периодов (рис. 3). Применяя к этому параллелограмму все подстановки группы, мы получим бесчисленное множество конгруэнтных параллелограммов, которые один раз покроют всю плоскость.

Для каждой точки плоскости u в параллелограмме периодов найдется одна и только одна точка u', сравнимая с u по модулю периодов, иначе говоря, *эквивалентная и относительно группы*. Поэтому параллелограмм периодов является *фундаментальной областью* рассматриваемой группы.

Обратимся теперь к модулярной функции $J(\tau)$. Группу модулярных подстановок (относительно нее $J(\tau)$ инвариантна) мы обозначим через Σ. Покажем, что Σ порождается двумя основными подстановками

$$\left.\begin{aligned} S &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \tilde{\tau} &= \tau + 1, \\ T &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \tilde{\tau} &= -\frac{1}{\tau}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Пусть

$$V = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

есть произвольная подстановка группы Σ.

Пользуясь правилом перемножения подстановок, получаем

$$VT = \begin{pmatrix} \beta & -\alpha \\ \delta & -\gamma \end{pmatrix},$$

а также

$$VS = \begin{pmatrix} \alpha & \beta + \alpha \\ \gamma & \delta + \gamma \end{pmatrix}, \qquad VS^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta - \alpha \\ \gamma & \delta - \gamma \end{pmatrix}$$

и вообще при любом целом n

$$VS^{-n} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta - n\alpha \\ \gamma & \delta - n\gamma \end{pmatrix}.$$

Мы будем последовательно применять две операции, а именно: умножение подстановки (справа) на некоторую степень подстановки S и умножение на подстановку T, и покажем, что, отправляясь от (произвольной) подстановки V, можно таким образом прийти к подстановке

$$VS^{-n}TS^{-m}T \ldots TS^{-k} = \begin{pmatrix} \alpha^* & 0 \\ \gamma^* & \delta^* \end{pmatrix},$$

для которой $\beta^* = 0$.

Если $\beta = 0$, то исходная подстановка уже обладает требуемым свойством. Допуская, что $\beta \neq 0$, определим целое число n таким образом, чтобы

$$|\beta - n\alpha| < |\alpha|.$$

После того как n найдено, рассмотрим подстановку

$$V_1 = VS^{-n} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta - n\alpha \\ \gamma & \delta - n\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix};$$

здесь $|\beta_1| < |\alpha_1|$. Если $\beta_1 = 0$, это есть искомая подстановка. Если же $\beta_1 \neq 0$, умножим подстановку V_1 на TS^{-m}, где m — целое число, в результате чего получим подстановку

$$V_2 = V_1 T S^{-m} = \begin{pmatrix} \beta_1 & -\alpha_1 - m\beta_1 \\ \delta_1 & -\gamma_1 - m\delta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix},$$

причем m подберем так, чтобы $|\alpha_1 + m\beta_1| < |\beta_1|$. Таким образом, для подстановки V_2 будет

$$|\beta_2| < |\alpha_2|.$$

А так как $|\alpha_2| = |\beta_1|$, то

$$|\beta_2| < |\beta_1|.$$

Продолжая описанные операции, получим подстановки

$$V_3 = \begin{pmatrix} \alpha_3 & \beta_3 \\ \gamma_3 & \delta_3 \end{pmatrix}, \qquad V_4 = \begin{pmatrix} \alpha_4 & \beta_4 \\ \gamma_4 & \delta_4 \end{pmatrix}, \ \ldots,$$

где $|\beta_3| > |\beta_4| > \ldots$ Поскольку $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ — числа целые, то после конечного числа операций мы и придем к подстановке нужного нам вида

$$V S^{-n} T S^{-m} \ldots T S^{-k} = \begin{pmatrix} \alpha^* & 0 \\ \gamma^* & \delta^* \end{pmatrix}.$$

Так как эта подстановка модулярная, то $\alpha^* = \delta^* = 1$. Следовательно,

$$V S^{-n} T S^{-m} \ldots T S^{-k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -i & 1 \end{pmatrix},$$

где i — какое-то целое число. Но

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -i & 1 \end{pmatrix} = T S^i T,$$

поэтому

$$V S^{-n} T S^{-m} T \ldots T S^{-k} = T S^i T,$$

откуда, умножая справа на $S^k T \ \ldots \ T S^m T S^n$, и получим

$$V = T S^i T S^k T \ldots S^m T S^n.$$

Таким образом, доказано, что Σ порождается подстановками (2).

Чтобы получить фундаментальную область группы Σ, построим в верхней полуплоскости треугольник

со сторонами

$$\Re\tau = -1/2, \qquad \Re\tau = 1/2, \qquad |\tau| = 1.$$

Определим область D как совокупность всех точек, лежащих внутри указанного треугольника, а также точек, лежащих на левой стороне $\Re\tau = -1/2$, и тех точек, лежащих на окружности $|\tau| = 1$, для которых $-1/2 \leqslant \Re\tau \leqslant 0$. Таким образом, область D можно рассматривать как четырехугольник (рис. 4), к которому из четырех сторон отнесены только две (жирные линии на рисунке).

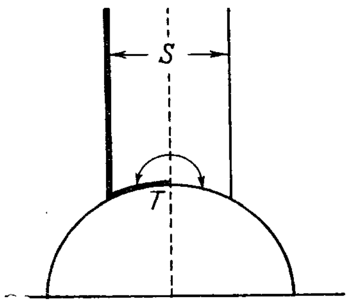


Рис. 4.

Основные подстановки (2) связывают пары сторон четырехугольника; а именно, S связывает вертикальные стороны, а T переводит левую дугу окружности в правую, как это изображено на рис. 4.

Докажем, что D есть фундаментальная область группы Σ.

По определению это значит, что для всякой точки τ верхней полуплоскости имеется одна и только одна эквивалентная точка τ' в области D, причем две точки τ, τ' называются *эквивалентными*, если в Σ содержится такая подстановка V, что $\tau' = V\tau$.

Пусть дана точка τ ($\Im\tau > 0$). Возьмем пару чисел $(1, \tau)$ и рассмотрим правильную систему точек на плоскости, порождаемую этой парой. Перенумеруем все точки $m\tau + n$ этой правильной системы в порядке неубывания модулей $|m\tau + n|$. Мы получим некоторую последовательность

$$0, \ w_1, \ w_2, \ w_3, \ \ldots \qquad (w_2 = -w_1)\ ^{1)}. \tag{1}$$

Возьмем в этой последовательности первую по порядку точку, которая не лежит на прямой, соединяющей начало координат 0 с точкой w_1. Пусть это будет точка w_k, так что

$$|w_k| \geqslant |w_1|. \tag{2}$$

Обе точки $w_k \pm w_1$, входящие в последовательность (1), имеют в ней номера, бо́льшие числа k, так как эти точки не лежат

[1]) Можно вообще принять, что $w_{2k} = -w_{2k-1}$.

на указанной прямой. Поэтому справедливы неравенства

$$|w_k+w_1|\geqslant|w_k|,\qquad |w_k-w_1|\geqslant|w_k|. \tag{3}$$

Мы можем принять, что

$$\mathfrak{J}\left(\frac{w_k}{w_1}\right)>0,$$

так как $\mathfrak{J}(w_k/w_1)\neq 0$, и если бы было $\mathfrak{J}(w_k/w_1)<0$, то мы могли бы заменить w_1 на $-w_1$ (иначе говоря, поменять местами элементы w_1, w_2). Замкнутый параллелограмм с вершинами 0, w_1, w_k+w_1, w_k, как следует из его построения, не содержит точек правильной системы, отличных от его вершин. Поэтому всякая точка правильной системы может быть представлена в виде $mw_1+m'w_k$ с целыми m, m'. Значит, пара (w_1, w_k) эквивалентна паре $(1, \tau)$.

Пусть

$$w_k=\alpha\tau+\beta,\qquad w_1=\gamma\tau+\delta,$$

где α, β, γ, δ — целые числа. Здесь

$$\alpha\delta-\beta\gamma=+1,$$

так как $\mathfrak{J}\tau>0$ и $\mathfrak{J}(w_k/w_1)>0$. Теперь положим $w_k/w_1=\tilde{\tau}$, так что

$$\tilde{\tau}=\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}=V\tau,$$

где $V\in\Sigma$.

На основании неравенств (2), (3):

$$|\tilde{\tau}|\geqslant 1,\quad |\tilde{\tau}+1|\geqslant|\tilde{\tau}|,\quad |\tilde{\tau}-1|\geqslant|\tilde{\tau}|.$$

Следовательно, точка $\tilde{\tau}$ лежит в замкнутом «треугольнике» со сторонами

$$\mathfrak{R}\tau=-1/2,\qquad |\tau|=1,\qquad \mathfrak{R}\tau=1/2\qquad (\mathfrak{J}\tau>0).$$

Если окажется, что

$$\mathfrak{R}\tilde{\tau}\neq 1/2,\quad |\tilde{\tau}|>1$$

или

$$-1/2\leqslant\mathfrak{R}\tilde{\tau}\leqslant 0,\qquad |\tilde{\tau}|=1,$$

то найденная точка $\tilde{\tau}$ лежит в D и поэтому является искомой: $\tau'=\tilde{\tau}$. Если

$$\mathfrak{R}\tilde{\tau}=1/2,\qquad |\tilde{\tau}|>1,$$

искомой точкой будет $\tau'=\tilde{\tau}-1$. Наконец, если

$$0<\mathfrak{R}\tilde{\tau}\leqslant 1/2,\qquad |\tilde{\tau}|=1,$$

искомой точкой будет $\tau'=-1/\tilde{\tau}$.

Таким образом, доказано, что для всякой точки τ верхней полуплоскости имеется эквивалентная точка $\tau'\in D$.

Теперь докажем, что в области D нет эквивалентных точек. Допустим противное и примем, что две точки τ, τ' области D эквивалентны. Они не могут быть связаны ни преобразованием S^k,

ни преобразованием T. Значит,

$$\tau'=\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\ \left(\neq-\frac{1}{\tau}\right)$$

и $\gamma>0$.

Так как

$$\tau'-\frac{\alpha}{\gamma}=-\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\gamma(\gamma\tau+\delta)},$$

то

$$\tau'-\frac{\alpha}{\gamma}=-\frac{1}{\gamma(\gamma\tau+\delta)},$$

откуда

$$\left|\tau'-\frac{\alpha}{\gamma}\right|\cdot\left|\tau+\frac{\delta}{\gamma}\right|=\frac{1}{\gamma^2}. \tag{4}$$

Обе точки, τ и τ', по предположению, лежат в области D, а числа $|\tau'-\alpha/\gamma|$, $|\tau+\delta/\gamma|$ представляют расстояния этих точек до некоторых точек вещественной оси. Следовательно, каждое из этих чисел $\geqslant\sqrt{3}/2$. Отсюда заключаем, что $\gamma=1$, и соотношение (4) принимает вид

$$|\tau'-\alpha|\cdot|\tau+\delta|=1. \tag{5}$$

Расстояние точки области D от целочисленной точки вещественной оси $\geqslant 1$. Поэтому из (5) следует, что

$$|\tau'-\alpha|=1,\qquad |\tau+\delta|=1.$$

Отсюда $\alpha=0$ или -1, а $\delta=0$ или 1. При $\alpha=-1$

$$\tau'=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

а при $\delta=1$

$$\tau=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{6}$$

Следовательно, возможность $\alpha=-1$, $\delta=1$ исключена. Если же $\alpha=0$, то $\delta\neq 0$, так как $|\alpha|+|\delta|\neq 0$. Поэтому при $\alpha=0$ должно быть $\delta=1$ и $\beta=-1$ (поскольку $\gamma=1$), т. е.

$$\tau'=-\frac{1}{\tau+1},$$

откуда в силу (6)

$$\tau'=-\frac{1}{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\tau.$$

Значит, эта возможность также исключена и аналогично устанавливается, что и равенства $\alpha=-1$, $\delta=0$ исключаются.

Итак, наше утверждение доказано.

Если мы подвергнем область D всем подстановкам группы Σ, то получим бесчисленное множество областей, эквивалентных области D. Они покроют всю верхнюю полуплоскость, так как для любой точки верхней полуплоскости, по доказанному, имеется в D эквивалентная точка. Кроме того, эти области не будут перекрываться, так как в противном случае в верхней полуплоскости существовали бы по крайней мере две точки τ_1, τ_2, каждая из которых двумя различными подстановками V', V'' группы Σ переносилась бы в область D. А так как оба равенства $V'\tau_1 = V''\tau_1$, $V'\tau_2 = V''\tau_2$ невозможны, поскольку корни квадратного уравнения $V'\tau = V''\tau$ сопряжены, то мы получили бы в D две эквивалентные различные точки ($V'\tau_1$, $V''\tau_1$ или $V'\tau_2$, $V''\tau_2$), что невозможно.

Из доказанного вытекает, что каждая область, в которую D преобразуется функцией из Σ, также является фундаментальной областью группы Σ. Заметим, что часто фундаментальную область группы Σ называют также фундаментальной областью функции $J(\tau)$.

10. Модулярная функция $J(\tau)$. Покажем, что $J(\tau)$ регулярна в каждой точке верхней полуплоскости. Так как

$$J(\tau)=\frac{g_2^3}{g_2^3-27g_3^2},$$

где мы можем в силу однородности принять, что $2\omega = 1$, $2\omega' = \tau$, а значит,

$$g_2=60\sum_{m,m'}{}'\frac{1}{(m+m'\tau)^4}\equiv g_2(\tau),$$

$$g_3=140\sum_{m,m'}{}'\frac{1}{(m+m'\tau)^6}\equiv g_3(\tau),$$

и так как в верхней полуплоскости

$$g_2^3-27g_3^2\neq 0,$$

то достаточно проверить регулярность в верхней полуплоскости функций $g_2(\tau)$, $g_3(\tau)$. С этой целью убедимся

в том, что ряд

$$\sum_{m,m'}{}'\frac{1}{|m+m'\tau|^p}, \tag{1}$$

где $p>2$, сходится равномерно во всякой полуплоскости

$$\Im\tau\geqslant\delta>0. \tag{2}$$

Но это вытекает из рассмотрений начала § 5, в силу которых сумма S_n членов ряда (1), отвечающих n-му «окаймлению» точки $m = 0$, $m' = 0$, удовлетворяет неравенству

$$S_n\leqslant\frac{8}{n^{p-1}}\frac{1}{d^p},$$

где $d = \min(1, \delta)$.

Заметим, что в теории чисел оказываются полезными функции

$$S_{2l}(\tau)=\sum_{m,m'}{}'\frac{1}{(m+m'\tau)^{2l}}\qquad(\Im\tau>0) \tag{3}$$

при любом целом $l\geqslant 2$. Их называют *рядами Эйзенштейна.*

Рассмотрим теперь $J(\tau)$ как функцию от $h^2 = e^{2\pi i\tau}$. Так как $J(\tau+1) = J(\tau)$, то $J(\tau)$ — однозначная функция от h^2 ($|h|<1$).

Докажем, что при $|h|<1$ имеет место разложение

$$J(\tau)=\frac{1}{h^2}(c_0+c_1h^2+c_2h^4+\ldots),$$

где $c_0\neq 0$ [1]).

С этой целью возьмем известное разложение (см. таблицу I)

$$\pi\operatorname{ctg}\pi u=\frac{1}{u}+\sum_m{}'\left\{\frac{1}{u+m}-\frac{1}{m}\right\}.$$

Положим $w=e^{2\pi iu}$. Тогда при $|w|<1$

$$\operatorname{ctg}\pi u=i\frac{w+1}{w-1}=-i(1+2w+2w^2+\ldots)$$

[1]) Мы получим попутно, что $c_0=1:1728=1:12^3$.

и, значит,

$$\frac{1}{u}+\sum_{m}{}' \left\{\frac{1}{u+m}-\frac{1}{m}\right\}=-\pi i-2\pi i\sum_{k=1}^{\infty} w^k.$$

Отсюда, дифференцируя $q \geqslant 2$ раз по u, получим соотношение

$$(-1)^q q! \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(u+m)^{q+1}}=-(2\pi i)^{q+1} \sum_{k=1}^{\infty} k^q w^k$$

и положим в нем $u=n\tau$ $(n>0)$. Это дает

$$(-1)^q q! \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m+n\tau)^{q+1}}=-(2\pi i)^{q+1} \sum_{k=1}^{\infty} k^q e^{2kn\pi i\tau}.$$

Суммируя по n от 1 до ∞, придем к равенству

$$(-1)^q q! \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m+n\tau)^{q+1}}=-(2\pi i)^{q+1} \sum_{k=1}^{\infty} k^q \frac{e^{2k\pi i\tau}}{1-e^{2k\pi i\tau}}.$$

Теперь примем, что число q нечетное: $q=2l-1$. В таком случае мы сможем переписать полученное равенство в виде [1])

$$\frac{1}{2}\sum_{m,\,n}{}' \frac{1}{(m+n\tau)^{2l}}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{2l}}=\frac{(2\pi i)^{2l}}{(2l-1)!}\sum_{k=1}^{\infty} k^{2l-1}\frac{e^{2k\pi i\tau}}{1-e^{2k\pi i\tau}}. \tag{4}$$

[1]) Заметим, что из формул (3), (4) следует равенство

$$\frac{(2l-1)!}{(2\pi i)^{2l}}\left\{\frac{1}{2}S_{2l}(\tau)-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{2l}}\right\}=\sum_{n=1}^{\infty} n^{2l-1}\frac{x^n}{1-x^n} \tag{4'}$$

$$(x=e^{2\pi i\tau},\ |x|<1).$$

Вместе с тем при любом целом $q \geqslant 0$ и $|x|<1$ можно написать разложение

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^q \frac{x^n}{1-x^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_q(n)\, x^n.$$

Оказывается, что коэффициент $\sigma_q(n)$ этого ряда равен сумме q-х степеней положительных делителей натурального числа n. Таким образом, правая часть формулы (4′) представляет так называемую образующую функцию для $\sigma_q(n)$ при $q = 2l - 1$. Благодаря соотношению (4′) некоторые факты теории модулярных функций находят применение при исследовании теоретико-числовой функции $\sigma_q(n)$.

Нам формула (4) нужна лишь при $l=2$ и $l=3$. Беря эти значения l, найдем

$$\left.\begin{aligned} g_2(\tau)&=120\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^4}+\frac{(2\pi)^4}{3!}\sum_{k=1}^{\infty}k^3\frac{e^{2k\pi i\tau}}{1-e^{2k\pi i\tau}}\right\},\\ g_3(\tau)&=280\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^6}-\frac{(2\pi)^6}{5!}\sum_{k=1}^{\infty}k^5\frac{e^{2k\pi i\tau}}{1-e^{2k\pi i\tau}}\right\}.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Суммы

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{2l}}$$

выражаются через так называемые числа Бернулли. Нам достаточно знать, что

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^4}=\frac{(2\pi)^4}{60\cdot 4!},\qquad \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^6}=\frac{(2\pi)^6}{84\cdot 6!}.$$

Разлагая правые части формул (5) в ряды по степеням h^2, получим

$$g_2=\frac{(2\pi)^4}{2\cdot 3!}\{1+240h^2+\ldots\},\qquad g_3=\frac{(2\pi)^6}{9\cdot 4!}\{1-504h^2+\ldots\}.$$

Отсюда находим

$$g_2^3-27g_3^2=\frac{(2\pi)^{12}}{8\cdot(3!)^3}\{(1+240h^2+\ldots)^3-(1-504h^2-\ldots)^2\}=$$

$$=\frac{(2\pi)^{12}}{8\cdot(3!)^3}\{1728h^2+\ldots\}$$

и, значит,

$$J(\tau)=\frac{g_2^3}{g_2^3-27g_3^2}=\frac{1+240h^2+\ldots}{1728h^2+\ldots}=$$

$$=\frac{1}{1728}\frac{1}{h^2}+c_1+c_2h^2+\ldots$$

Наше утверждение доказано.

Теорема. *Каково бы ни было конечное c, уравнение*

$$J(\tau)-c=0 \tag{6}$$

имеет в области D один и только один корень.

Доказательство основано на том, что число корней уравнения

$$f(z)-c=0$$

в области G, ограниченной контуром L, равно

$$N=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f'(z)}{f(z)-c}\,dz,$$

если $f(z)$ в области G регулярна, вплоть до границы L непрерывна и на L не принимает значения c.

Пусть $\tau=\xi+i\eta$. Так как, по доказанному выше,

$$J(\tau)=\frac{1}{1728}e^{-2\pi i\tau}+c_1+c_2e^{2\pi i\tau}+\ldots,$$

то при $\eta\to\infty$ функция $J(\tau)$ стремится к бесконечности равномерно относительно ξ. Следовательно, при любом конечном c можно указать такое H, что $|J(\tau)|>|c|$ при $\eta\geqslant H$, и значит, уравнение (6) не имеет корней при $\eta\geqslant H$. Таким образом, достаточно рассмотреть урезанную область D_H (ограниченную линией $MABA'M'$ (рис. 5)).

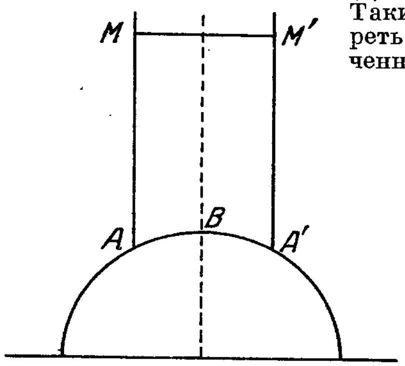


Рис. 5.

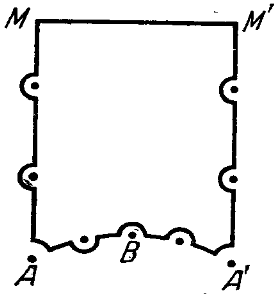


Рис. 6.

Если уравнение (6) не имеет корней на линии $MABA'M'$, то доказательство теоремы очень просто. Действительно,

$$N=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{J'(\tau)}{J(\tau)-c}\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{MA}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{AB}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{BA'}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{A'M'}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{M'M}d\ln\{J(\tau)-c\}=$$

$$=J_1+J_2+J_3+J_4+J_5.$$

Функция

$$\varphi(\tau)=J(\tau)-c$$

удовлетворяет соотношениям

$$\varphi(-1/\tau)=\varphi(\tau),\qquad \varphi(\tau+1)=\varphi(\tau). \tag{α}$$

Полагая в интеграле J_2

$$\tau=-1/t,$$

получим

$$J_2=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{AB}d\ln\varphi(\tau)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{A'B}d\ln\varphi(t)=-J_3.$$

Таким образом,

$$J_2+J_3=0.$$

Аналогично и, пожалуй, еще проще доказывается, что

$$J_1+J_4=0.$$

Следовательно,

$$N=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{M'M}d\ln\varphi(\tau).$$

$J(\tau)$ можно рассматривать как функцию от $z=h^2=e^{2\pi i\tau}$. Отрезку $M'M$ плоскости τ отвечает в плоскости z окружность

$$|z|=e^{-2\pi H}. \tag{7}$$

На этой окружности и внутри ее (т. е. при $\eta\geqslant H$) функция $\varphi(\tau)$ от нуля отлична и, кроме того, регулярна, если исключить полюс первого порядка в точке $z=0$. Так как интегрирование по $M'M$ в плоскости τ сводится к интегрированию по окружности (7) в отрицательном направлении, то

$$N=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_K d\ln\varphi(\tau),$$

где K — пробегаемая в положительном направлении окружность (7) и, значит, N равняется числу полюсов функции $\varphi(\tau)=J(\tau)-c=\psi(z)$ в круге $|z|<e^{-2\pi H}$, т. е. $N=1$.

Теперь займемся случаем, когда уравнение (6) имеет корни на линии $MABA'M'$. Этих корней во всяком случае конечное число, и вместе с каждым из них будет эквивалентный, а именно симметричный относительно мнимой оси. Вокруг каждого из указанных корней, а также вокруг каждой из точек A, B, A' опишем по окружности одного и того же радиуса ε, столь малого, чтобы эти окружности не пересекались. С помощью построенных окружностей изменим границу области D_H, как это указано на рис. 6, после чего из каждой пары эквивалентных корней внутри контура будет лежать один, расположенный слева от мнимой оси, а точки A, B, A' окажутся вне контура.

Разбивая интеграл N по полученному контуру на части и используя соотношения (α), без труда докажем, что

$$N=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{M'M}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\lambda_A}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\lambda_B}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\lambda_{A'}}d\ln\{J(\tau)-c\}.$$

Здесь λ_A, λ_B, $\lambda_{A'}$ представляют дуги с центрами в вершинах A, B, A'. Если в этих точках уравнение (6) не имеет корней, то дуги λ_A, λ_B, $\lambda_{A'}$ можно стянуть в точки, что дает

$$N = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{M'M} d\ln\{J(\tau)-c\}.$$

Этот интеграл, как показано выше, равен 1. Отсюда вытекает, что в рассматриваемом случае теорема верна.

Остается исследовать случай, когда уравнение (6) имеет корни в вершинах. Для этого выясним, какие значения функция $J(\tau)$ принимает в вершинах.

В точке A

$$\tau = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \equiv \rho,$$

а так как $\rho^3 = 1$, то

$$\frac{g_2(\rho)}{60} = \sum{}' \frac{1}{(m+m'\rho)^4} = \frac{1}{\rho}\sum{}' \frac{1}{(m\rho^2+m')^4}.$$

С другой стороны, в силу соотношения $\rho^2+\rho+1=0$ имеет место равенство

$$\sum{}' \frac{1}{(m\rho^2+m')^4} = \sum{}' \frac{1}{(m'-m-m\rho)^4} = \sum{}' \frac{1}{(n+n'\rho)^4}.$$

Поэтому

$$\frac{g_2(\rho)}{60} = \frac{1}{\rho}\sum{}' \frac{1}{(n+n'\rho)^4} = \frac{1}{\rho}\,\frac{g_2(\rho)}{60},$$

откуда следует, что $g_2(\rho)=0$. Таким образом,

$$J(\rho)=0,$$

и, значит, $J(\tau)=0$ в точке A' $(\tau=\rho+1=-1/\rho)$. Аналогично доказывается, что $g_3(i)=0$, а значит, $J(\tau)=1$ в точке B.

Мы должны, следовательно, рассмотреть два уравнения:

$$J(\tau)-1=0, \qquad \text{(a)}$$
$$J(\tau)=0. \qquad \text{(b)}$$

В случае первого уравнения мы можем стянуть в точки дуги λ_A, $\lambda_{A'}$ и, значит,

$$N = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{M'M} d\ln\{J(\tau)-1\} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\lambda_B} d\ln\{J(\tau)-1\}.$$

Если $\bar\lambda_B$ дополняет λ_B до полной окружности, то

$$-\oint d\ln\{J(\tau)-1\} = \int\limits_{\lambda_B} + \int\limits_{\bar\lambda_B},$$

где интеграл слева берется в положительном направлении. Делая в интеграле $\int\limits_{\bar\lambda_B}$ замену $\tau=-1/t$, найдем $\int\limits_{\bar\lambda_B} = \int\limits_{\lambda_B}$. Значит,

$$N = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{M'M} d\ln\{J(\tau)-1\} - \frac{1}{4\pi i}\oint d\ln\{J(\tau)-1\}.$$

Первый член правой части равен 1. Пусть

$$\frac{1}{2\pi i}\oint d\ln\{J(\tau)-1\} = n,$$

так что $N = 1 - n/2$. Число n есть кратность корня $\tau = i$ уравнения (a), а так как $n/2$ — целое положительное число, то $n \geqslant 2$. С другой стороны, $N \geqslant 0$, откуда $n \leqslant 2$. Следовательно, $n = 2$, $N = 0$.

Мы видим, что уравнение (a) имеет всего один корень: $\tau = i$. Этот корень двукратный, но области D принадлежит только половина окрестности точки i, и значит, можно считать, что области D принадлежит лишь один простой корень $\tau = i$, а другой корень уравнения (a), находящийся в точке $\tau = i$, относится к области D', имеющей с D общую дугу ABA'.

Аналогично трактуется уравнение (b). Здесь корнями являются точки $\tau = \rho$, $-\rho^2$, и каждая есть тройной корень. Однако области D принадлежит только первая из этих точек, т. е. A. В этой точке сходятся шесть областей: D и пять областей, ей эквивалентных [1]. Каждой из этих шести областей принадлежит одна шестая часть полной окрестности точки A. При этом в силу определения фундаментальной области точка A принадлежит только трем из областей: области D и еще двум областям. Остальным трем областям точка A не принадлежит, подобно тому как точка A' не принадлежит области D. Следовательно, трехкратный корень в точке A принадлежит на равных правах трем областям, а потому нужно считать, что уравнение (b) в области D имеет один простой корень.

11. Обращение эллиптических интегралов первого рода.

В §§ 5 и 6, отправляясь от примитивных периодов

$$2\omega,\ 2\omega' \qquad (\Im(\omega'/\omega)>0), \qquad (1)$$

мы построили функцию Вейерштрасса $\wp(u)$ и показали, что она удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3.$$

Из этого уравнения вытекает, что

$$u = \pm\int\limits_{\wp}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{4t^3-g_2t-g_3}}. \qquad (2)$$

[1]) См. рис. 7 на стр. 86.

Из курса интегрального исчисления читатель знает, что интегралы вида

$$\int R(t,\ w)\,dt,$$

где R — рациональная функция своих аргументов, а w^2 есть многочлен третьей или четвертой степени от t без кратных корней, носят название *эллиптических интегралов*. Написанный нами интеграл (2) называют *эллиптическим интегралом первого рода*. Ниже мы будем подробно говорить об эллиптических интегралах. Здесь же для нас важно лишь то, что функция Вейерштрасса $\wp(u)$, построенная для данных периодов (1), является одним из пределов некоторого эллиптического интеграла первого рода, рассматриваемым как функция от значения этого интеграла. При этом числа g_2, g_3, входящие в подрадикальное выражение, не задавались произвольно, а определялись через периоды (1), и мы видели, что

$$g_2^3-27g_3^2\neq 0.$$

Естественно возникает следующий вопрос: если даны числа a_2, a_3, причем $a_2^3-27a_3^2\neq 0$, и рассматривается интеграл

$$u=\pm\int\limits_x^{\infty}\frac{dt}{\sqrt{4t^3-a_2t-a_3}},\tag{3}$$

то является ли его нижний предел x эллиптической функцией от значения интеграла?

Этот вопрос решается положительно и притом следующим образом.

В первую очередь устанавливается существование таких чисел 2ω, $2\omega'$, для которых $\Im(\omega'/\omega)>0$ и

$$g_2(\omega,\ \omega')=a_2,\qquad g_3(\omega,\ \omega')=a_3.\tag{4}$$

Затем строится функция $\wp(v)$ с периодами 2ω, $2\omega'$. Наконец, в интеграле (3) делается замена переменной

$$t=\wp(v).$$

В силу уравнения

$$[\wp'(v)]^2=4[\wp(v)]^3-a_2\wp(v)-a_3,$$

получим

$$u=\pm\int\limits_0^w dv,\tag{5}$$

где $x=\wp(w)$. Из (5) следует, что $w=\pm u$. Значит,

$$x=\wp(u),$$

что и утверждалось.

Мы видим, что все упирается в решение следующего вопроса: даны числа a_2, a_3, причем $a_2^3-27a_3^2\neq 0$; требуется найти такие 2ω, $2\omega'$, для которых выполнено (4). Решение этого вопроса немедленно получается на основании § 10. Берем уравнение

$$J(\tau)=\frac{a_2^3}{a_2^3-27a_3^2}.$$

Оно имеет решение τ в фундаментальной области, значит, в верхней полуплоскости. Найдя это решение, определим ω из уравнения

$$\frac{1}{(2\omega)^4}g_2(\tau)=a_2,$$

если $a_2\neq 0$, и из уравнения

$$\frac{1}{(2\omega)^6}g_3(\tau)=a_3,$$

если $a_2=0$. Когда ω найдено, ω' определяется из уравнения

$$\frac{\omega'}{\omega}=\tau.$$

ГЛАВА III

ФУНКЦИИ ВЕЙЕРШТРАССА

12. Функция Вейерштрасса $\zeta(u)$. Эта функция определяется следующей формулой:

$$\zeta(u) = \frac{1}{u} - \int_0^u \left\{ \wp(u) - \frac{1}{u^2} \right\} du, \tag{1}$$

так что

$$\zeta'(u) = -\wp(u). \tag{2}$$

При этом путь интегрирования в (1) не должен проходить ни через одну вершину сетки периодов, отличную от точки $u = 0$.

Заменяя в (1) $\wp(u)$ разложением этой функции на простейшие дроби, получим для $\zeta(u)$ представление

$$\zeta(u) = \frac{1}{u} + \sum_{m, m'}{}' \left\{ \frac{1}{u - 2m\omega - 2m'\omega'} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2m\omega + 2m'\omega'} + \frac{u}{(2m\omega + 2m'\omega')^2} \right\}, \tag{3}$$

которое показывает, что единственными особенностями функции $\zeta(u)$ являются простые полюсы в точках $2m\omega + 2m'\omega'$. Из (1) следует, что $\zeta(u)$ — нечетная

функция. Действительно,

$$\zeta(-u) = -\frac{1}{u} - \int_0^{-u} \left\{ \wp(v) - \frac{1}{v^2} \right\} dv =$$

$$= -\frac{1}{u} + \int_0^{u} \left\{ \wp(v) - \frac{1}{v^2} \right\} dv = -\zeta(u).$$

С другой стороны, в силу (2):

$$\left. \begin{aligned} \zeta(u + 2\omega) &= \zeta(u) + 2\eta, \\ \zeta(u + 2\omega') &= \zeta(u) + 2\eta', \end{aligned} \right\} \tag{4}$$

где η и η' — некоторые константы. Полагая в этих равенствах соответственно $u = -\omega$, $u = -\omega'$ и используя нечетность функции $\zeta(u)$, получаем

$$\eta = \zeta(\omega), \quad \eta' = \zeta(\omega').$$

Часто применяют обозначения $\eta = \eta_1$, $\eta' = \eta_3$, так что (см. стр. 25):

$$\eta_1 = \zeta(\omega_1), \quad \eta_3 = \zeta(\omega_3)$$

и вводят еще константу

$$\eta_2 = \zeta(\omega_2) = -\zeta(\omega + \omega').$$

Нетрудно видеть, что

$$\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 0.$$

Действительно, в силу (4)

$$\zeta(u + 2\omega + 2\omega') = \zeta(u + 2\omega') + 2\eta = \zeta(u) + 2\eta + 2\eta .$$

Отсюда, полагая $u = -\omega - \omega'$, находим

$$\eta + \eta' = \zeta(\omega + \omega'), \quad \text{т. е.} \quad \eta_1 + \eta_3 = -\eta_2.$$

Докажем теперь весьма важное соотношение

$$\eta\omega' - \eta'\omega = \frac{\pi i}{2}, \tag{5}$$

справедливое при выполнении условия $\mathfrak{J}(\omega'/\omega) > 0$. Чтобы получить соотношение (5), возьмем какой-нибудь параллелограмм периодов, для которого точка $u=0$ является внутренней точкой. Пусть вершинами параллелограмма являются точки c, $c+2\omega$, $c+2\omega+2\omega'$, $c+2\omega'$. Интегрируя по контуру этого параллелограмма функцию $\zeta(u)$, получим

$$2\pi i = \int\limits_{c}^{c+2\omega} + \int\limits_{c+2\omega}^{c+2\omega+2\omega'} + \int\limits_{c+2\omega+2\omega'}^{c+2\omega'} + \int\limits_{c+2\omega'}^{c} \zeta(u)\,du.$$

Делая во втором интеграле подстановку $u = 2\omega + v$, а в третьем интеграле подстановку $u = 2\omega' + v$, будем иметь

$$2\pi i = \int\limits_{c}^{c+2\omega} \{\zeta(u) - \zeta(u+2\omega')\}\,du + \int\limits_{c}^{c+2\omega'} \{\zeta(u+2\omega) - \zeta(u)\}\,du = \int\limits_{c}^{c+2\omega'} 2\eta\,du - \int\limits_{c}^{c+2\omega} 2\eta'\,du = 4(\eta\omega' - \eta'\omega).$$

Таким образом, соотношение (5) доказано. Ниже мы еще будем иметь повод к нему вернуться. Его можно переписать в виде

$$\eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1 = \frac{\pi i}{2}.$$

Из этого соотношения круговой подстановкой можно получить еще два соотношения:

$$\eta_2\omega_1 - \eta_1\omega_2 = \frac{\pi i}{2}, \qquad \eta_3\omega_2 - \eta_2\omega_3 = \frac{\pi i}{2}.$$

13. Функция Вейерштрасса $\sigma(u)$. Определим функцию $\sigma(u)$ с помощью равенства

$$\ln\frac{\sigma(u)}{u} = \int\limits_{0}^{u} \left\{\zeta(u) - \frac{1}{u}\right\} du, \tag{1}$$

где путь интегрирования не проходит ни через одну вершину сетки периодов, отличную от точки $u=0$. Из (1) следует, что

$$\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} = \zeta(u). \tag{2}$$

Заменяя в (1) функцию $\zeta(u)$ ее разложением на простейшие дроби и почленно интегрируя, получаем

$$\ln\frac{\sigma(u)}{u} = \sum_{m,\,m'}{}' \left\{\ln\left(1 - \frac{u}{2m\omega + 2m'\omega'}\right) + \frac{u}{2m\omega + 2m'\omega'} + \frac{u^2}{2(2m\omega + 2m'\omega')^2}\right\}.$$

Отсюда вытекает следующее разложение функции $\sigma(u)$ в бесконечное произведение:

$$\sigma(u) = u \prod{}' \left(1 - \frac{u}{s}\right) e^{\frac{u}{s} + \frac{u^2}{2s^2}} \qquad (s = 2m\omega + 2m'\omega'). \tag{3}$$

Мы видим, что $\sigma(u)$ есть целая трансцендентная функция, имеющая лишь простые нули, лежащие в вершинах сетки периодов.

Из (1) или (3) немедленно вытекает, что $\sigma(u)$ — нечетная функция.

Заменим в (2) u на $u + 2\omega$. На основании формул (4) § 12 получим

$$\frac{\sigma'(u+2\omega)}{\sigma(u+2\omega)} = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} + 2\eta.$$

Отсюда

$$\ln\sigma(u+2\omega) = \ln\sigma(u) + 2\eta u + C$$

и, значит,

$$\sigma(u+2\omega) = C'e^{2\eta u}\sigma(u).$$

Полагая здесь $u = -\omega$, будем иметь

$$\sigma(\omega) = -\sigma(\omega)\,C'e^{-2\eta\omega}.$$

А так как $\sigma(\omega) \neq 0$, то $C' = -e^{2\eta\omega}$. Значит,

$$\sigma(u+2\omega) = -e^{2\eta(u+\omega)}\sigma(u).$$

Легко видеть, что вообще

$$\sigma(u+2\omega_\alpha) = -e^{2\eta_\alpha(u+\omega_\alpha)}\sigma(u) \qquad (\alpha = 1,\ 2,\ 3). \qquad (4)$$

14. Выражение произвольной эллиптической функции посредством функции $\sigma(u)$ и посредством функции $\zeta(u)$. Всякая рациональная функция $R(z)$ допускает следующие два представления:

$$R(z) = C\,\frac{(z-b_1)(z-b_2)\ldots(z-b_n)}{(z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_m)}, \qquad (\alpha)$$

$$R(z) = E(z) + \sum_{i,k}\frac{A_k^{(i)}}{(z-a_k)^i}, \qquad (\beta)$$

где C, b_i, a_k, $A_k^{(i)}$ — константы, а $E(z)$ — многочлен, так называемая целая часть функции $R(z)$. Каждое из этих представлений дает определенную информацию относительно функции $R(z)$: из первого представления видно, каковы нули и каковы полюсы функции $R(z)$, а второе представление, которым всегда пользуются в интегральном исчислении, дает главную часть функции $R(z)$ для каждого ее полюса.

Теперь мы покажем, что аналогичные представления допускает любая эллиптическая функция.

Пусть дана эллиптическая функция $f(u)$ с периодами 2ω, $2\omega'$. Возьмем какой-нибудь параллелограмм периодов, и пусть в этом параллелограмме $f(u)$ имеет полюсы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и нули $b_1, b_2, \ldots, b_n$. При этом каждый нуль и каждый полюс мы пишем столько раз, какова его кратность. Как мы знаем (см. § 4),

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \equiv b_1 + b_2 + \ldots + b_n \ (\mathrm{mod}\,(2\omega,\ 2\omega')).$$

Положим

$$b_1 = b_1^* + 2m\omega + 2m'\omega',$$

где целые числа m, m' выбраны так, что

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = b_1^* + b_2 + \ldots + b_n. \qquad (1)$$

b_1^* не лежит уже, вообще говоря, в рассматриваемом параллелограмме периодов. Однако ничто не мешает нам вместо системы нулей $b_1, b_2, \ldots, b_n$ взять эквивалентную ей систему $b_1^*, b_2, \ldots, b_n$. Теперь построим функцию

$$g(u) = \frac{\sigma(u-b_1^*)\,\sigma(u-b_2)\ldots\sigma(u-b_n)}{\sigma(u-a_1)\,\sigma(u-a_2)\ldots\sigma(u-a_n)}.$$

Эта функция имеет те же нули и те же полюсы (и притом той же кратности), что и функция $f(u)$. С другой стороны, в силу свойств функции $\sigma(u)$ и соотношения (1)

$$g(u+2\omega_\alpha) = e^{2\eta_\alpha(a_1+a_2+\ldots+a_n-b_1^*-b_2-\ldots-b_n)}g(u) = g(u),$$

так что $g(u)$ есть эллиптическая функция с теми же периодами, что и $f(u)$. Отношение

$$\frac{f(u)}{g(u)} \qquad (2)$$

не имеет полюсов, так как каждый полюс числителя является полюсом той же кратности знаменателя, а каждый нуль знаменателя является нулем той же кратности числителя. Но отношение (2) есть функция эллиптическая. Следовательно, это отношение есть константа, и мы получаем первое представление функции $f(u)$:

$$f(u) = C\,\frac{\sigma(u-b_1^*)\,\sigma(u-b_2)\ldots\sigma(u-b_n)}{\sigma(u-a_1)\,\sigma(u-a_2)\ldots\sigma(u-a_n)},$$

где

$$b_1^* + b_2 + \ldots + b_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Это представление является аналогом (α).

Переходим ко второму представлению эллиптической функции. Пусть известны полюсы[1] $a_1, a_2, \ldots, a_n$ функции $f(u)$, лежащие в каком-нибудь фундаментальном параллелограмме, и соответствующие главные части функции $f(u)$. Пусть главная часть, соответствующая

[1] Здесь каждый полюс пишется один раз, а не столько раз, какова его кратность.

полюсу a_k, имеет вид

$$\frac{A_k}{u-a_k}+\sum_{r=2}^{m_k}(-1)^r\frac{(r-1)!\,A_k^{(r-1)}}{(u-a_k)^r}.$$

Эту же главную часть, как легко видеть, имеет функция

$$A_k\zeta(u-a_k)+\sum_{r=2}^{m_k}A_k^{(r-1)}\wp^{(r-2)}(u-a_k).$$

Составляя сумму этих выражений, распространенную на все полюсы, получим функцию

$$\sum_{k=1}^{n}A_k\;\zeta(u-a_k)+\sum_{\substack{k,\,r\\(r\geqslant 2)}}A_k^{(r-1)}\wp^{(r-2)}(u-a_k).$$

Второе слагаемое этой суммы есть эллиптическая функция. Покажем, что то же справедливо и относительно первого слагаемого. В самом деле, пусть

$$\varphi(u)=\sum_{k=1}^{n}A_k\;\zeta(u-a_k).$$

Тогда

$$\varphi(u+2\omega_\alpha)=\sum_{k=1}^{n}A_k2\eta_\alpha+\varphi(u)=2\eta_\alpha\sum_{k=1}^{n}A_k+\varphi(u).$$

Но A_k есть вычет нашей эллиптической функции относительно полюса a_k. А так как сумма вычетов относительно всех полюсов, лежащих в параллелограмме периодов, есть нуль, то

$$\varphi(u+2\omega_\alpha)=\varphi(u)$$

и, следовательно, $\varphi(u)$ — функция эллиптическая.

Разность

$$f(u)-\sum_{k=1}^{n}A_k\;\zeta(u-a_k)-\sum_{\substack{k,\,r\\(r\geqslant 2)}}A_k^{(r-1)}\wp^{(r-2)}(u-a_k)$$

не имеет особенных точек в рассматриваемом параллелограмме периодов и, являясь функцией эллиптической, есть поэтому константа. Итак, для $f(u)$ получено второе

представление:

$$f(u)=C+\sum_{k=1}^{n}A_k\;\zeta(u-a_k)+\sum_{k,\,r}A_k^{(r-1)}\wp^{(r-2)}(u-a_k);$$

оно аналогично (β) и может быть названо разложением $f(u)$ на «простейшие дроби».

15. Теоремы сложения функций Вейерштрасса. Рассмотрим функцию

$$\wp(u)-\wp(v),$$

где v — постоянная величина (конечно, не сравнимая с нулем по модулю периодов 2ω, $2\omega'$). Эта функция имеет полюс второго порядка в точке $u=0$ и простые нули в точках $u=v$, $u=-v$. Применяя теорему § 14, мы можем, как легко видеть, положить

$$a_1=a_2=0,\quad b_1^*=v,\quad b_2=-v.$$

Таким образом, мы получаем представление

$$\wp(u)-\wp(v)=C\frac{\sigma(u-v)\,\sigma(u+v)}{[\sigma(u)]^2},$$

где C — константа. Для определения этой константы умножим обе части написанного соотношения на u^2 и положим $u=0$. Это дает $1=-C\,[\sigma(v)]^2$. Следовательно,

$$C=-\frac{1}{[\sigma(v)]^2},$$

и значит,

$$\wp(u)-\wp(v)=-\frac{\sigma(u-v)\,\sigma(u+v)}{[\sigma(u)]^2\,[\sigma(v)]^2}. \tag{1}$$

Заменим в этом равенстве v на ω_α ($\alpha=1,2,3$) и припомним (см. § 6), что $\wp(\omega_\alpha)=e_\alpha$. Так как

$$\sigma(u+\omega_\alpha)=\sigma(u-\omega_\alpha+2\omega_\alpha)=-e^{2\eta_\alpha u}\sigma(u-\omega_\alpha),$$

то мы получим следующее равенство:

$$\wp(u) - e_\alpha = e^{2\eta_\alpha u}\left[\frac{\sigma(u-\omega_\alpha)}{\sigma(\omega_\alpha)\,\sigma(u)}\right]^2 \qquad (\alpha = 1,\ 2,\ 3).$$

Введем, кроме $\sigma(u)$, еще три сигма-функции:

$$\sigma_\alpha(u) = -\frac{e^{\eta_\alpha u}\sigma(u-\omega_\alpha)}{\sigma(\omega_\alpha)} \qquad (\alpha = 1,\ 2,\ 3). \tag{2}$$

Знак минус взят для того, чтобы имело место равенство

$$\sigma_\alpha(0) = 1.$$

Таким образом,

$$\wp(u) - e_\alpha = \left[\frac{\sigma_\alpha(u)}{\sigma(u)}\right]^2 \qquad (\alpha = 1,\ 2,\ 3).$$

Мы видим, что корень квадратный из $\wp(u) - e_\alpha$ есть однозначная функция. Примем раз навсегда то определение этого корня, которое в окрестности точки $u = 0$ ведет себя как $+1/u$. Тогда

$$\sqrt{\wp(u) - e_\alpha} = \frac{\sigma_\alpha(u)}{\sigma(u)} \qquad (\alpha = 1,\ 2,\ 3). \tag{3}$$

Через сигма-функции просто выражается также $\wp'(u)$. Чтобы получить это выражение, возьмем соотношение

$$\wp'^2 = 4(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3).$$

В силу этого соотношения

$$[\wp'(u)]^2 = 4\frac{[\sigma_1(u)\,\sigma_2(u)\,\sigma_3(u)]^2}{[\sigma(u)]^6}.$$

Извлекая корень квадратный и замечая, что

$$\lim_{u\to 0} u^3\,\wp'(u) = -2,$$

найдем

$$\wp'(u) = -2\frac{\sigma_1(u)\,\sigma_2(u)\,\sigma_3(u)}{[\sigma(u)]^3}. \tag{4}$$

Обратимся снова к соотношению (1). Беря от обеих частей логарифмическую производную, получаем следующее равенство:

$$\frac{\wp'(u)}{\wp(u) - \wp(v)} = \zeta(u-v) + \zeta(u+v) - 2\,\zeta(u). \tag{5_1}$$

Это — разложение левой части на простейшие дроби. Его можно было бы получить и непосредственно, опираясь на общую теорему § 14.

Поменяем в (5_1) u и v местами:

$$-\frac{\wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)} = -\zeta(u-v) + \zeta(u+v) - 2\,\zeta(v). \tag{5_2}$$

Сложим теперь равенства (5_1) и (5_2) почленно. Это даст

$$\frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)} = 2\,\zeta(u+v) - 2\,\zeta(u) - 2\,\zeta(v).$$

Отсюда

$$\zeta(u+v) = \zeta(u) + \zeta(v) + \frac{1}{2}\,\frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)}. \tag{6}$$

Полученное равенство представляет дзета-функцию от суммы двух аргументов через некоторые функции от каждого аргумента в отдельности. Говорят, что (6) выражает теорему сложения дзета-функции.

Чтобы получить теорему сложения функции $\wp$, продифференцируем равенство (6) по u, а также по v. Будем иметь:

$$-\wp(u+v) = -\wp(u) + \\ +\frac{1}{2}\,\frac{\wp''(u)[\wp(u) - \wp(v)] - \wp'(u)[\wp'(u) - \wp'(v)]}{[\wp(u) - \wp(v)]^2},$$

$$-\wp(u+v) = -\wp(v) - \\ -\frac{1}{2}\,\frac{\wp''(v)[\wp(u) - \wp(v)] - \wp'(v)[\wp'(u) - \wp'(v)]}{[\wp(u) - \wp(v)]^2}.$$

Сложим эти равенства почленно:

$$-2\wp(u+v) = -\wp(u) - \wp(v) + \\ + \frac{1}{2}\frac{[\wp''(u)-\wp''(v)][\wp(u)-\wp(v)] - [\wp'(u)-\wp'(v)]^2}{[\wp(u)-\wp(v)]^2}. \quad (7)$$

Так как в силу дифференциального уравнения функции $\wp$

$$2\wp'' = 12\wp^2 - g_2,$$

то

$$\wp''(u) - \wp''(v) = 6[\wp^2(u) - \wp^2(v)]$$

и, пользуясь этим тождеством, нетрудно привести (7) к виду

$$\wp(u+v) + \wp(u) + \wp(v) = \frac{1}{4}\left[\frac{\wp'(u)-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}\right]^2, \quad (8)$$

что и выражает теорему сложения функции $\wp$.

Упражнение 1. Используя теорему сложения и дифференциальное уравнение функции $\wp$, доказать следующее тождество:

$$[\wp(u-v/2) - \wp(u+v/2)]^2 = \\ = \left\{\frac{1}{4}\left[\frac{\wp'(u-v/2)-\wp'(v)}{\wp(u-v/2)-\wp(v)}\right]^2 - 3\wp(v)\right\}^2 + \\ + 2\wp'(v)\frac{\wp'(u-v/2)-\wp'(v)}{\wp(u-v/2)-\wp(v)} + g_2 - 12[\wp(v)]^2. \quad (9)$$

Упражнение 2. Доказать тождество

$$\frac{\sigma_1(u)+\sigma_2(u)+\sigma_3(u)}{\sigma(u)} = -\frac{1}{2}\frac{\wp''(u/2)}{\wp'(u/2)} \quad (10)$$

(принадлежащее С. В. Ковалевской).

Достаточно проверить, что обе части (10) являются нечетными эллиптическими функциями с периодами 4ω, $4\omega'$, которые в параллелограмме периодов имеют простые полюсы 0, 2ω, $2\omega'$, $2\omega+2\omega'$ с одинаковыми соответствующими вычетами $(3, -1, -1, -1)$.

16. Представление всякой эллиптической функции через функции $\wp(u)$ и $\wp'(u)$. В § 14 было показано, что всякая эллиптическая функция $f(u)$ допускает разложение на простейшие дроби:

$$f(u) = C + \sum_{k=1}^{n} A_k\,\zeta(u-a_k) + \sum_{\substack{k,r\\(r\geqslant 2)}} A_k^{(r-1)}\wp^{(r-2)}(u-a_k);$$

при этом

$$\sum_{k=1}^{n} A_k = 0. \quad (1)$$

Используем теперь теоремы сложения для функций ζ и $\wp$; кроме того, примем во внимание, что любая производная от $\wp$ выражается рационально через $\wp$ и $\wp'$.

Прежде всего, в силу теоремы сложения для функции ζ:

$$\sum_{k=1}^{n} A_k\,\zeta(u-a_k) = \sum_{k=1}^{n} A_k\,\zeta(u) + R_1(\wp, \wp') = R_1(\wp, \wp'), \quad (2)$$

где R_1, подобно далее встречающимся $R_2, R_3, \ldots$, означает рациональную функцию от своих аргументов. При установлении (2) использовано (1).

На основании теоремы сложения функции $\wp$ получим

$$\sum_{k=1}^{n} A_k^{(1)}\wp(u-a_k) = R_2(\wp, \wp').$$

Затем

$$\sum_{k=1}^{n} A_k^{(2)}\wp'(u-a_k) = R_3(\wp, \wp')$$

и т. д.

В силу всех этих равенств

$$f(u) = R(\wp, \wp')$$

Таким образом, всякая эллиптическая функция выражается рационально через функции $\wp$ и $\wp'$.

Этому представлению можно придать вид

$$f(u) = R_1(\wp) + R_2(\wp)\,\wp', \quad (3)$$

куда входят уже рациональные функции от одного лишь $\wp$. В самом деле, в силу дифференциального уравнения функции $\wp$ всякая натуральная степень производной $\wp'$ выражается в виде $A + B\wp'$, где A и B — многочлены от $\wp$. Поэтому рациональная функция от $\wp$ и $\wp'$ может быть представлена в виде

$$R(\wp, \wp') = \frac{M_1 + N_1\wp'}{M + N\wp'},$$

где M_1, N_1, M, N — многочлены от $\wp$. Умножая знаменатель и числитель на $M - N\wp'$, получим

$$R(\wp, \wp') = \frac{M_2 + N_2\wp'}{M^2 - N^2\wp'^2}.$$

Теперь знаменатель есть многочлен от одного лишь $\wp$. Значит, $R(\wp, \wp') = R_1(\wp) + R_2(\wp)\wp'$, что и требовалось доказать.

Заметим еще, что четная эллиптическая функция может быть представлена в виде

$$f(u) = R(\wp),$$

а нечетная — в виде

$$f(u) = R(\wp)\wp'.$$

Для доказательства возьмем представление

$$f(u) = R_1(\wp) + R_2(\wp)\wp'(u)$$

и заменим u на $-u$. Это даст

$$f(-u) = R_1(\wp) - R_2(\wp)\wp'(u),$$

так как $\wp(u)$ — четная функция, а $\wp'(u)$ — нечетная. Теперь остается вторую формулу сложить с первой, если $f(u) = f(-u)$, и вычесть, если $f(u) = -f(-u)$.

Многие общие свойства эллиптических функций вытекают из представления (3).

Одно из важнейших свойств гласит: *всякие две эллиптические функции с одними и теми же периодами связаны между собой алгебраическим соотношением.*

Пусть $f(u)$ и $g(u)$ — две такие функции. Тогда

$$f(u) = R_1(\wp) + R_2(\wp)\wp', \qquad (4_1)$$

$$g(u) = R_3(\wp) + R_4(\wp)\wp'. \qquad (4_2)$$

С другой стороны,

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3. \qquad (5)$$

Из (4_1), (4_2) и (5) можно исключить $\wp$ и $\wp'$. Это и приведет к соотношению вида $F(f, g) = 0$, где F — многочлен от своих двух аргументов.

Отметим два частных случая этого общего предложения.

Для первого возьмем $g = f'$. Мы получим тогда следующий факт: *всякая эллиптическая функция удовлетворяет дифференциальному уравнению первого порядка вида*

$$F(f, f') = 0,$$

где F означает многочлен от своих аргументов.

Для второго частного случая положим

$$g(u) = f(u + v).$$

Мы получим тогда соотношение

$$\sum_{k=0}^{N} P_k[f(u)][f(u+v)]^k = 0,$$

где $P_k(z)$ — многочлены от z с коэффициентами, зависящими от v. Меняя местами u, v, а затем сравнивая полученное выражение с исходным, найдем, что $P_k[f(u)]$ есть симметричный многочлен от $f(u)$, $f(v)$ с постоянными коэффициентами.

Таким образом, *всякая эллиптическая функция $f(u$ удовлетворяет уравнению*

$$g(f(u), f(v), f(u+v)) = 0,$$

где g — многочлен с постоянными коэффициентами. Наличие такого соотношения выражает, что *функция f обладает алгебраической теоремой сложения.*

Пример такой алгебраической теоремы сложения дает формула (8) § 15, так как входящие в правую часть производные $\wp'(u)$, $\wp'(v)$ являются алгебраическими функциями от $\wp(u)$, соответственно $\wp(v)$. Наоборот, формула (6) § 15 не представляет алгебраической теоремы сложения, так как функция $\wp$ и ее производная через функцию ζ алгебраически не выражаются.

17. Эллиптические интегралы. Выше, в § 11, мы уже упомянули об эллиптических интегралах общего вида:

$$\int R(z, w)\,dz. \qquad (1)$$

Здесь

$$w^2 = a_0z^4 + 4a_1z^3 + 6a_2z^2 + 4a_3z + a_4 \equiv f(z)$$

— многочлен четвертой или третьей степени без кратных корней, а $R(z, w)$ — рациональная функция своих аргументов.

К интегралам вида (1) приводят различные задачи геометрии, анализа и механики. Одной из первых задач этого рода была задача об отыскании длины дуги эллипса. Именно эта задача привела к терминам — эллиптический интеграл, эллиптическая функция.

Возьмем эллипс

$$x = a\sin t, \qquad y = b\cos t$$

и пусть

$$c^2 = a^2 - b^2, \quad c/a = k.$$

Для дифференциала дуги будем иметь

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = (a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t)\,dt^2 =$$
$$= (a^2 - c^2\sin^2 t)\,dt^2 = a^2(1 - k^2\sin^2 t)\,dt^2.$$

Поэтому

$$s = a\int\sqrt{1 - k^2\sin^2 t}\,dt.$$

Если вместо t ввести ξ по формуле

$$\xi = \sin t,$$

то для дуги получится выражение

$$s = a\int\sqrt{\frac{1-k^2\xi^2}{1-\xi^2}}\,d\xi \quad \text{или} \quad s = a\int\frac{1-k^2\xi^2}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}}\,d\xi,$$

что действительно является частным случаем (1).

В § 7 показано, что с помощью надлежащего дробно-линейного преобразования можно привести входящий в интеграл (1) радикал к виду $\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}$. Пусть это дробно-линейное преобразование имеет вид

$$z = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \qquad \left(\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix} = 1\right).$$

Тогда

$$\sqrt{a_0z^4 + 4a_1z^3 + 6a_2z^2 + 4a_3z + a_4} = \frac{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}}{(\gamma x + \delta)^2}$$

и, следовательно,

$$\int R\left(z, \sqrt{a_0z^4 + 4a_1z^3 + 6a_2z^2 + 4a_3z + a_4}\right)dz =$$
$$= \int R\left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \frac{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}}{(\gamma x + \delta)^2}\right)\frac{dx}{(\gamma x + \delta)^2}.$$

В частности,

$$\int\frac{dz}{\sqrt{a_0z^4 + 4a_1z^3 + 6a_2z^2 + 4a_3z + a_4}} = \int\frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}}.$$

Таким образом, вместо (1) можно рассматривать интеграл

$$\int R\left(z, \sqrt{4z^3 - g_2z - g_3}\right)dz, \tag{2}$$

где R снова означает рациональную функцию от своих двух аргументов.

Если мы введем функцию $\wp(u)$, отвечающую инвариантам g_2, g_3, и положим $z = \wp(u)$, то интеграл (2) примет вид

$$\int R(\wp, -\wp')\,\wp'\,du = \int R_1(\wp, \wp')\,du, \tag{3}$$

т. е. мы приходим к интегралу от эллиптической функции. Подстановка $z = \wp(u)$ означает, что

$$u = \int_z^\infty \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - g_2x - g_3}}, \tag{4}$$

а переход от (2) к (3) можно толковать как намерение рассматривать общий эллиптический интеграл (2) как функцию от соответствующего эллиптического интеграла первого рода (4).

Для отыскания интеграла (3) удобнее всего разложить эллиптическую функцию $R_1(\wp, \wp')$ на простейшие дроби:

$$R_1(\wp, \wp') = C + \sum_{k=1}^{n} A_k\,\zeta(u - a_k) + \sum_{\substack{k,\,r\\(r\geqslant 2)}} A_k^{(r-1)}\,\wp^{(r-2)}(u - a_k).$$

Интегрирование дает

$$\int R_1(\wp,\ \wp')\,du = C_1 + Cu + \sum_{k=1}^{n} A_k \ln\sigma(u-a_k) -$$

$$-\sum_{k=1}^{n} A_k^{(1)}\zeta(u-a_k) + \sum_{\substack{k,\ r\\(r\geqslant 3)}} A_k^{(r-1)}\wp^{(r-3)}(u-a_k).$$

Примем теперь во внимание теоремы сложения для функций ζ и $\wp$. В силу этих теорем

$$\sum_{k=1}^{n} A_k^{(1)}\zeta(u-a_k) = -A\,\zeta(u) + R_2(\wp,\ \wp'),$$

$$\sum_{\substack{k,\ r\\(r\geqslant 3)}} A_k^{(r-1)}\wp^{(r-3)}(u-a_k) = R_3(\wp,\ \wp'),$$

где A — константа.

На основании написанных формул

$$\int R_1(\wp,\ \wp')\,du =$$

$$= Cu + \sum_{k=1}^{n} A_k \ln\sigma(u-a_k) + A\,\zeta(u) + R^*(\wp,\ \wp').$$

Так как

$$\sum_{k=1}^{n} A_k = 0,$$

то эту формулу можно переписать в виде

$$\int R_1(\wp,\ \wp')\,du =$$

$$= Cu + A\,\zeta(u) + \sum_{k=1}^{n} A_k \ln\frac{\sigma(u-a_k)}{\sigma(u)} + R^*(\wp,\ \wp'). \qquad (5)$$

Последний член правой части есть эллиптическая функция. Первые три члена эллиптическими функциями не являются.

Перейдем от переменной u к первоначальной переменной $z = \wp(u)$. Тогда последний член правой части формулы (5) запишется в виде $R^*(z,\ w)$, где $w^2 = 4z^3 - g_2 z - g_3$. Это есть алгебраическая часть интеграла (2).

Что касается трансцендентной части, то ее можно построить с помощью следующих элементов:

$$u, \quad \zeta(u), \quad \ln\frac{\sigma(u-a)}{\sigma(u)} + u\,\zeta(a).$$

Первая из этих функций есть

$$u = \int \frac{dz}{w},$$

вторая равна

$$\zeta(u) = -\int \wp(u)\,du = -\int \frac{z\,dz}{w},$$

а третья функция есть

$$\ln\frac{\sigma(u-a)}{\sigma(u)} + u\,\zeta(a) = \int\left\{\frac{\sigma'(u-a)}{\sigma(u-a)} - \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} + \zeta(a)\right\}du =$$

$$= \int\{\zeta(u-a) - \zeta(u) + \zeta(a)\}\,du = \frac{1}{2}\int \frac{\wp'(u) + \wp'(a)}{\wp(u) - \wp(a)}\,du.$$

Вводя $z = \wp(u)$, $w = \wp'(u)$, положим $\wp(a) = z_0$, $\wp'(a) = w_0$. Тогда третья функция примет вид

$$\frac{1}{2}\int \frac{w + w_0}{z - z_0}\,\frac{dz}{w}.$$

Интеграл

$$u = \int \frac{dz}{w}$$

ранее был назван эллиптическим интегралом первого рода, теперь назовем интеграл

$$\int \frac{z\,dz}{w}$$

нормальным интегралом второго рода, а интеграл

$$\frac{1}{2}\int \frac{w+w_0}{z-z_0}\frac{dz}{w}$$

— *нормальным интегралом третьего рода.*

Таким образом, *всякий эллиптический интеграл складывается из эллиптических интегралов трех родов и некоторой рациональной функции от z и w.*

Этот результат, к которому мы пришли при помощи построенной выше теории эллиптических функций, может быть получен независимо от этой теории и является частным случаем общих теорем относительно приведения эллиптических и гиперэллиптических интегралов, т. е. интегралов вида

$$\int R(z,\ Z)\,dz,$$

где Z^2 есть многочлен степени $n \geqslant 3$, а R означает рациональную функцию.

ГЛАВА IV

ТЭТА-ФУНКЦИИ

18. Представление тэта-функций бесконечными произведениями. В § 3 тэта-функции были определены как бесконечные ряды. Теперь мы займемся разложением тэта-функций в бесконечные произведения.

Для получения этих разложений рассмотрим функцию

$$f(s)=\prod_{k=1}^{\infty}(1-h^{2k-1}s)\prod_{k=1}^{\infty}(1-h^{2k-1}s^{-1}), \tag{1}$$

где h — константа, модуль которой меньше единицы, а s — комплексная переменная. Написанные бесконечные произведения сходятся абсолютно при любом $s\neq 0$, и функция $f(s)$, определяемая формулой (1), очевидно, регулярна в каждой конечной точке s, отличной от нуля. Далее, из вида правой части (1) вытекает, что $f(s)$ удовлетворяет следующему функциональному уравнению:

$$f(s)=-hs\,f(h^2s). \tag{2}$$

Функцию $f(s)$ можно разложить в ряд Лорана. Пусть это разложение имеет вид

$$f(s)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_ks^k. \tag{3}$$

Принимая во внимание (2), получим

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_ks^k=-\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_kh^{2k+1}s^{k+1},$$

откуда следует, что

$$a_k=-a_{k-1}h^{2k-1}.$$

нормальным интегралом второго рода, а интеграл

$$\frac{1}{2}\int \frac{w+w_0}{z-z_0}\,\frac{dz}{w}$$

— *нормальным интегралом третьего рода.*

Таким образом, *всякий эллиптический интеграл складывается из эллиптических интегралов трех родов и некоторой рациональной функции от z и w.*

Этот результат, к которому мы пришли при помощи построенной выше теории эллиптических функций, может быть получен независимо от этой теории и является частным случаем общих теорем относительно приведения эллиптических и гиперэллиптических интегралов, т. е. интегралов вида

$$\int R(z,\ Z)\,dz,$$

где Z^2 есть многочлен степени $n \geqslant 3$, а R означает рациональную функцию.

ГЛАВА IV

ТЭТА-ФУНКЦИИ

18. Представление тэта-функций бесконечными произведениями. В § 3 тэта-функции были определены как бесконечные ряды. Теперь мы займемся разложением тэта-функций в бесконечные произведения.

Для получения этих разложений рассмотрим функцию

$$f(s)=\prod_{k=1}^{\infty}(1-h^{2k-1}s)\prod_{k=1}^{\infty}(1-h^{2k-1}s^{-1}), \tag{1}$$

где h — константа, модуль которой меньше единицы, а s — комплексная переменная. Написанные бесконечные произведения сходятся абсолютно при любом $s\neq 0$, и функция $f(s)$, определяемая формулой (1), очевидно, регулярна в каждой конечной точке s, отличной от нуля. Далее, из вида правой части (1) вытекает, что $f(s)$ удовлетворяет следующему функциональному уравнению:

$$f(s)=-hsf(h^2s). \tag{2}$$

Функцию $f(s)$ можно разложить в ряд Лорана. Пусть это разложение имеет вид

$$f(s)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_ks^k. \tag{3}$$

Принимая во внимание (2), получим

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_ks^k=-\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_kh^{2k+1}s^{k+1},$$

откуда следует, что

$$a_k=-a_{k-1}h^{2k-1}.$$

Это соотношение можно переписать в виде

$$(-1)^k a_k h^{-k^2} = (-1)^{k-1} a_{k-1} h^{-(k-1)^2}.$$

Таким образом, величина $(-1)^k a_k h^{-k^2}$ от k не зависит и, значит,

$$(-1)^k a_k h^{-k^2} = a_0.$$

Наше разложение (3) принимает вид

$$f(s) = a_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k h^{k^2} s^k;$$

отсюда

$$f(e^{2\pi i v}) = a_0 \{1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k h^{k^2} \cos 2k\pi v\}.$$

Выражение в фигурных скобках есть не что иное, как $\vartheta_0(v)$, следовательно,

$$\vartheta_0(v) = \frac{1}{a_0} f(e^{2\pi i v}).$$

С другой стороны,

$$f(e^{2\pi i v}) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - h^{2k-1} e^{2\pi i v})(1 - h^{2k-1} e^{-2\pi i v}) = \\ = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - 2h^{2k-1} \cos 2\pi v + h^{4k-2}).$$

Таким образом,

$$\vartheta_0(v) = \frac{1}{a_0} \prod_{k=1}^{\infty} (1 - 2h^{2k-1} \cos 2\pi v + h^{4k-2}).$$

Мы получили разложение функции $\vartheta_0(v)$ в бесконечное произведение, но еще не определен числовой множитель $1/a_0$.

Займемся его отысканием. С этой целью положим

$$f_n(s) = \prod_{k=1}^{n} (1 - h^{2k-1}s)(1 - h^{2k-1}s^{-1}). \tag{4}$$

Выполняя перемножение, получим

$$f_n(s) = a_0^{(n)} + a_1^{(n)} \left(s + \frac{1}{s}\right) + \ldots + a_n^{(n)} \left(s^n + \frac{1}{s^n}\right).$$

При этом

$$a_n^{(n)} = (-1)^n h^{1+3+5+\ldots+(2n-1)} = (-1)^n h^{n^2}. \tag{5}$$

С другой стороны, в силу (4)

$$(sh - h^{2n}) f_n(h^2 s) = -(1 - h^{2n+1}s) f_n(s).$$

Поэтому

$$(sh - h^{2n}) \sum_{k=-n}^{n} a_k^{(n)} h^{2k} s^k = -(1 - h^{2n+1}s) \sum_{k=-n}^{n} a_k^{(n)} s^k$$

или

$$\sum_{k=-n}^{n} a_k^{(n)} (h^{2k+1} - h^{2n+1}) s^{k+1} = \sum_{k=-n}^{n} a_k^{(n)} (h^{2k+2n} - 1) s^k.$$

Сравнение коэффициентов дает

$$a_k^{(n)} (h^{2k+1} - h^{2n+1}) = a_{k+1}^{(n)} (h^{2(k+n+1)} - 1).$$

Полагая здесь последовательно $k=0, 1, \ldots, (n-1)$ и перемножая полученные равенства, будем иметь

$$(-1)^n a_0^{(n)} \prod_{k=1}^{n} (h^{2k-1} - h^{2n+1}) = a_n^{(n)} \prod_{k=1}^{n} (1 - h^{2(n+k)}).$$

Отсюда в силу (5)

$$a_0^{(n)} = \frac{h^{n^2} \prod_{k=1}^{n} (1 - h^{2(n+k)})}{\prod_{k=1}^{n} (h^{2k-1} - h^{2n+1})}$$

или

$$a_0^{(n)} = \frac{\prod_{k=1}^{n} (1 - h^{2(n+k)})}{\prod_{k=1}^{n} (1 - h^{2k})}.$$

Величина a_0, которую мы ищем, равна

$$a_0 = \lim_{n\to\infty} a_0^{(n)}.$$

Действительно, в силу формул, которыми определяются коэффициенты ряда Лорана,

$$a_0 = \frac{1}{2\pi i} \oint f(s) \frac{ds}{s}, \quad a_0^{(n)} = \frac{1}{2\pi i} \oint f_n(s) \frac{ds}{s},$$

где интегралы берутся по единичной окружности, а на ней $f_n(s)$ стремится к $f(s)$ равномерно, когда $n\to\infty$. Из полученного для $a_0^{(n)}$ выражения следует, что

$$a_0=\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1-h^{2k})}.$$

Таким образом, окончательная формула имеет вид

$$\vartheta_0(v)=H_0\prod_{k=1}^{\infty}(1-h^{2k-1}e^{2\pi iv})(1-h^{2k-1}e^{-2\pi iv})=$$

$$=H_0\prod_{k=1}^{\infty}(1-2h^{2k-1}\cos 2\pi v+h^{4k-2}),$$

где

$$H_0=\prod_{k=1}^{\infty}(1-h^{2k}).$$

Отсюда уже нетрудно получить аналогичные разложения остальных тэта-функций. Все они содержатся в таблице IX. Для примера выведем разложение функции $\vartheta_1(v)$. С этой целью воспользуемся равенством

$$\vartheta_1(v)=\frac{1}{i}h^{1/4}e^{\pi iv}\,\vartheta_0\left(v+\frac{\tau}{2}\right).$$

В силу этого равенства

$$\vartheta_1(v)=\frac{1}{i}H_0h^{1/4}e^{\pi iv}\prod_{k=1}^{\infty}(1-h^{2k}e^{2\pi iv})(1-h^{2k-2}e^{-2\pi iv})=$$

$$=\frac{1}{i}H_0h^{1/4}e^{\pi iv}(1-e^{-2\pi iv})\prod_{k=1}^{\infty}(1-h^{2k}e^{2\pi iv})(1-h^{2k}e^{-2\pi iv})=$$

$$=2H_0h^{1/4}\sin\pi v\prod_{k=1}^{\infty}(1-2h^{2k}\cos 2\pi v+h^{4k}).$$

Имея разложения тэта-функций в бесконечные произведения, нетрудно написать совокупность всех нулей этих функций, а также получить значения этих функций в нуле [1]) и, в частности, доказать, что $\vartheta_1'(0)=\pi\vartheta_0(0)\,\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0)$ (все это содержится в таблице IX).

19. Связь между сигма-функциями и тэта-функциями. Сравним функцию $\sigma(u)$ с функцией $\vartheta_1\left(\frac{u}{2\omega}\right)$. Нули каждой из этих функций простые и имеют вид

$$u=2m\omega+2m'\omega'\qquad (m,\ m'=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots).$$

Рассмотрим выражение

$$f(u)=\frac{e^{\alpha u^2}\sigma(u)}{\vartheta_1\left(\frac{u}{2\omega}\right)}.$$

Это — функция, не имеющая ни одной особой точки на конечном расстоянии, так как нули знаменателя являются нулями той же кратности числителя.

Найдем $f(u+2\omega)$ и $f(u+2\omega')$:

$$f(u+2\omega)=e^{\alpha(u+2\omega)^2}\frac{\sigma(u+2\omega)}{\vartheta_1\left(\frac{u}{2\omega}+1\right)}=$$

$$=e^{\alpha u^2}e^{4\omega\alpha(u+\omega)}e^{2\eta(u+\omega)}\frac{\sigma(u)}{\vartheta_1\left(\frac{u}{2\omega}\right)}=$$

$$=e^{2(2\omega\alpha+\eta)(u+\omega)}f(u),$$

$$f(u+2\omega')=e^{\alpha(u+2\omega')^2}\frac{\sigma(u+2\omega')}{\vartheta_1\left(\frac{u}{2\omega}+\tau\right)}=$$

$$=e^{\alpha u^2}e^{4\alpha\omega'(u+\omega')}\frac{e^{2\eta'(u+\omega')}}{h^{-1}e^{-\frac{2\pi iu}{2\omega}}}\frac{\sigma(u)}{\vartheta_1\left(\frac{u}{2\omega}\right)}=$$

$$=e^{\{2(2\omega'\alpha+\eta')+\pi i/\omega\}(u+\omega')}f(u).$$

[1]) Их часто называют *нулевыми значениями*.

Принимая во внимание равенство $\eta\omega' - \eta'\omega = \pi i/2$, получаем

$$2(2\omega'\alpha + \eta') + \frac{\pi i}{\omega} = 2\tau(2\omega\alpha + \eta).$$

Если мы поэтому положим $\alpha = -\eta/(2\omega)$, то написанные равенства примут вид

$$f(u + 2\omega) = f(u), \qquad f(u + 2\omega') = f(u).$$

А так как $f(u)$ есть функция целая, то при указанном выборе α она превращается в константу. Следовательно,

$$\sigma(u) = Ce^{\frac{\eta u^2}{2\omega}}\vartheta_1\left(\frac{u}{2\omega}\right).$$

Для определения константы C продифференцируем написанное равенство и положим $u = 0$. Это дает

$$1 = C\cdot\frac{1}{2\omega}\vartheta_1'(0),$$

откуда

$$C = \frac{2\omega}{\vartheta_1'(0)}$$

и, значит,

$$\sigma(u) = \frac{2\omega e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}}\vartheta_1\left(\frac{u}{2\omega}\right)}{\vartheta_1'(0)}. \qquad (1)$$

Аналогичные соотношения (они приведены в таблице X) имеют место для остальных сигма- и тэта-функций.

Соотношение (1) позволяет использовать тэта-функцию вместо сигма-функции для представления произвольной эллиптической функции по ее нулям и полюсам.

Пусть $f(u)$ — эллиптическая функция и

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$$

ее полюсы, а

$$b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n$$

ее нули, расположенные в фундаментальном параллелограмме. Пусть, далее,

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = b_1^* + b_2 + \ldots + b_n. \qquad (2)$$

Мы видели, что

$$f(u) = C_1\frac{\sigma(u - b_1^*)\,\sigma(u - b_2)\ldots\sigma(u - b_n)}{\sigma(u - a_1)\,\sigma(u - a_2)\ldots\sigma(u - a_n)},$$

где C_1 — константа.

Теперь мы получаем представление

$$f(u) = C_1e^{\frac{\eta}{2\omega}\{(u-b_1^*)^2+\ldots+(u-b_n)^2-(u-a_1)^2-\ldots-(u-a_n)^2\}}\times$$

$$\times\frac{\vartheta_1\left(\frac{u-b_1^*}{2\omega}\right)\ldots\vartheta_1\left(\frac{u-b_n}{2\omega}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u-a_1}{2\omega}\right)\ldots\vartheta_1\left(\frac{u-a_n}{2\omega}\right)}.$$

В выражении

$$(u - b_1^*)^2 + \ldots + (u - b_n)^2 - (u - a_1)^2 - \ldots - (u - a_n)^2$$

члены с u^2 взаимно уничтожаются. Это же в силу (2) происходит с членами, которые содержат u в первой степени. Таким образом,

$$f(u) = C\frac{\vartheta_1\left(\frac{u-b_1^*}{2\omega}\right)\vartheta_1\left(\frac{u-b_2}{2\omega}\right)\ldots\vartheta_1\left(\frac{u-b_n}{2\omega}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u-a_1}{2\omega}\right)\vartheta_1\left(\frac{u-a_2}{2\omega}\right)\ldots\vartheta_1\left(\frac{u-a_n}{2\omega}\right)}.$$

20. Разложение функций $\zeta(u)$ и $\wp(u)$ в простые ряды. Обратимся к формуле

$$\sigma(u) = 2\omega e^{2\eta\omega v^2}\frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_1'(0)},$$

где $v = u/(2\omega)$. Беря от обеих частей логарифмическую производную по u, получим

$$\zeta(u) = \frac{\eta}{\omega}u + \frac{1}{2\omega}\frac{\vartheta_1'(v)}{\vartheta_1(v)}.$$

Заменим теперь функцию $\vartheta_1(v)$ ее разложением в бесконечное произведение. Это дает следующее разложение функции $\zeta(u)$:

$$\zeta(u)=\frac{\eta}{\omega}u+$$

$$+\frac{\pi}{2\omega}\left\{\operatorname{ctg}\pi v+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4h^{2k}\sin 2\pi v}{1-2h^{2k}\cos 2\pi v+h^{4k}}\right\}. \qquad (1)$$

Здесь мы имеем простой бесконечный ряд, в отличие от двойного ряда, входящего в определение функции $\zeta(u)$. Полученный ряд можно представить в следующем, для многих целей более удобном, виде:

$$\zeta(u)=\frac{\eta}{\omega}u+$$

$$+\frac{\pi i}{2\omega}\left\{\frac{z+z^{-1}}{z-z^{-1}}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2h^{2k}z^{-2}}{1-h^{2k}z^{-2}}-\frac{2h^{2k}z^{2}}{1-h^{2}z^{2}}\right)\right\}, \qquad (2)$$

где

$$z=e^{\frac{\pi i u}{2\omega}}.$$

Чтобы получить аналогичное разложение функции $\wp(u)$, продифференцируем (2) по u. Это дает

$$\wp(u)=-\frac{\eta}{\omega}-\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2\left\{\frac{1}{(z-z^{-1})^2}+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{h^{2k}z^{-2}}{(1-h^{2k}z^{-2})^2}+\frac{h^{2k}z^{2}}{(1-h^{2k}z^{2})^2}\right]\right\}. \qquad (3)$$

Используем полученные ряды, чтобы выразить через h величины η, e_1, e_2, e_3. Полагая в (3) $u=\omega$, а значит, $z=i$, будем иметь

$$e_1=-\frac{\eta}{\omega}+\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2\left\{\frac{1}{4}+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h^{2k}}{(1+h^{2k})^2}\right\}.$$

Подобным образом, полагая $u=\omega'$, а значит, $z=h^{1/2}$, получим

$$e_3=-\frac{\eta}{\omega}-2\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h^{2k-1}}{(1-h^{2k-1})^2}.$$

Наконец, полагая $u=-\omega-\omega'$, а значит, $z=-ih^{-1/2}$, будем иметь

$$e_2=-\frac{\eta}{\omega}+2\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h^{2k-1}}{(1+h^{2k-1})^2}.$$

Складывая полученные равенства почленно и учитывая равенство $e_1+e_2+e_3=0$, найдем после простых преобразований

$$\eta\omega=\frac{\pi^2}{12}\left\{1-24\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h^{2k}}{(1-h^{2k})^2}\right\}.$$

21. Выражение величин e_1, e_2, e_3 через нулевые значения тэта-функций. Припомним формулу

$$\sqrt{\wp(u)-e_\alpha}=\frac{\sigma_\alpha(u)}{\sigma(u)} \qquad (\alpha=1,\ 2,\ 3).$$

Полагая здесь $u=\omega_\beta$, получим

$$\sqrt{e_\beta-e_\alpha}=\frac{\sigma_\alpha(\omega_\beta)}{\sigma(\omega_\beta)}.$$

Выразим правую часть через тэта-функции. Взяв, например, $\beta=1$, $\alpha=2$, будем иметь

$$\sqrt{e_1-e_2}=\frac{1}{2\omega}\frac{\vartheta_0(0)\vartheta_1'(0)}{\vartheta_2(0)\vartheta_3(0)}=\frac{1}{2\omega}\frac{\vartheta_0\vartheta_1'}{\vartheta_2\vartheta_3}.$$

Здесь, как и всюду в дальнейшем, ϑ_0, ϑ_2, ϑ_3, ϑ_1' представляют значения в точке $v=0$ функций $\vartheta_0(v)$, $\vartheta_2(v)$, $\vartheta_3(v)$, $\vartheta_1'(v)$. А так как (см. § 18 и таблицу IX)

$$\vartheta_1'=\pi\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3, \qquad (1)$$

то

$$\sqrt{e_1 - e_2} = \frac{\pi}{2\omega}\vartheta_0^2.$$

Аналогично найдем

$$\sqrt{e_2 - e_1} = i\frac{\pi}{2\omega}\vartheta_0^2$$

и

$$\sqrt{e_2 - e_3} = -i\sqrt{e_3 - e_2} = -\frac{\pi}{2\omega}\vartheta_2^2,$$

$$\sqrt{e_3 - e_1} = -i\sqrt{e_1 - e_3} = -i\frac{\pi}{2\omega}\vartheta_3^2.$$

Из написанных формул следует, что

$$\left.\begin{aligned} e_1 - e_2 &= \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\vartheta_0^4,\\ e_2 - e_3 &= \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\vartheta_2^4,\\ e_1 - e_3 &= \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\vartheta_3^4. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Отсюда вытекает соотношение

$$\vartheta_3^4 = \vartheta_0^4 + \vartheta_2^4. \qquad (3)$$

В дальнейшем будет играть важную роль функция

$$\lambda = \lambda(\tau) \equiv \frac{\vartheta_2^4(0\,|\,\tau)}{\vartheta_3^4(0\,|\,\tau)}. \qquad (4)$$

Если воспользоваться формулами (2) и (3) и вспомнить формулу (6) § 6, то мы получим следующее представление через функцию $\lambda(\tau)$ модулярной функции $J(\tau)$:

$$J = \frac{4(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{27\lambda^2(1-\lambda)^2}. \qquad (5)$$

22. Преобразование тэта-функций. До сих пор, рассматривая тэта-функции, мы изучали их зависимость от аргумента v и не обращали внимания на зависимость от параметра τ или от $h = e^{\pi i\tau}$ ($\Im\tau > 0$). В частности, мы исследовали, как меняется тэта-функция, когда к аргументу v прибавляется один из периодов или полупериодов.

Теперь мы займемся изучением зависимости тэта-функций от параметра τ. Здесь вместо группы сдвигов (на периоды или полупериоды) появляется модулярная группа Σ всех подстановок

$$\tau^* = \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta},$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — целые числа, для которых $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Группа Σ, как выше установлено (см. § 9), порождается двумя основными подстановками:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Поэтому достаточно исследовать, как преобразуются тэта-функции, когда τ подвергается этим двум основным преобразованиям.

Переход от τ к $\tau + 1$ отвечает замене h на $-h$ и соответствующие формулы преобразования получаются очень просто на основании разложений тэта-функций в ряды. Эти формулы имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_1(v\,|\,\tau+1) &= i^{1/2}\vartheta_1(v\,|\,\tau),\\ \vartheta_2(v\,|\,\tau+1) &= i^{1/2}\vartheta_2(v\,|\,\tau),\\ \vartheta_3(v\,|\,\tau+1) &= \vartheta_0(v\,|\,\tau),\\ \vartheta_0(v\,|\,\tau+1) &= \vartheta_3(v\,|\,\tau). \end{aligned}\quad \left(i^{1/2} = e^{\frac{\pi}{4}i}\right)\right\} \qquad (1)$$

Исследуем теперь переход от τ к $-1/\tau$ и введем для удобства обозначение $\tau' = -1/\tau$. Возьмем функцию

$$f(v) = e^{\pi i\tau' v^2}\frac{\vartheta_3(\tau' v\,|\,\tau')}{\vartheta_3(v\,|\,\tau)}.$$

Нетрудно проверить, что эта функция не имеет особенностей. Действительно, единственными нулями (и притом простыми) знаменателя являются точки

$$v=(m+1/2)\tau+(n+1/2), \tag{2}$$

где m, n — целые числа. Вместе с тем эти точки являются нулями числителя, так как числитель обращается в нуль при

$$\tau' v=(m'+1/2)\tau'+(n'+1/2),$$

где m', n' — целые числа, т. е. при

$$v=(m'+1/2)-(n'+1/2)\tau.$$

Таким образом, $f(v)$ — целая трансцендентная функция. Но легко проверить, что $f(v)$ имеет периоды 1, τ. Следовательно, $f(v)$ есть константа, т. е.

$$\vartheta_3(\tau' v\mid\tau')=Ae^{-\pi i\tau' v^2}\vartheta_3(v\mid\tau). \tag{3}$$

Заменяя здесь v на $v+1/2$, $v-\tau/2$, $v+(1-\tau)/2$ и используя соотношения § 3, получим следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned}\vartheta_2(\tau' v\mid\tau')&=Ae^{-\pi i\tau' v^2}\vartheta_0(v\mid\tau),\\ \vartheta_0(\tau' v\mid\tau')&=Ae^{-\pi i\tau' v^2}\vartheta_2(v\mid\tau),\\ \vartheta_1(\tau' v\mid\tau')&=iAe^{-\pi i\tau' v^2}\vartheta_1(v\mid\tau)\end{aligned}\right\} \tag{3'}$$

и все сводится к отысканию константы A. С этой целью напишем приведенные формулы для $v=0$, а последнюю формулу предварительно продифференцируем по v. Это дает

$$\vartheta_3(0\mid\tau')=A\vartheta_3(0\mid\tau),$$

$$\vartheta_2(0\mid\tau')=A\vartheta_0(0\mid\tau),$$

$$\vartheta_0(0\mid\tau')=A\vartheta_2(0\mid\tau),$$

$$\tau'\vartheta_1'(0\mid\tau')=iA\vartheta_1'(0\mid\tau).$$

Примем теперь во внимание, что $\vartheta_1'=\pi\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3$. В силу этого соотношения

$$\tau'\pi\vartheta_0(0\mid\tau')\vartheta_2(0\mid\tau')\vartheta_3(0\mid\tau')=iA\pi\vartheta_0(0\mid\tau)\vartheta_2(0\mid\tau)\vartheta_3(0\mid\tau)$$

и, значит, $A^2\tau'=i$, откуда $A^2=-i\tau$, и следовательно,

$$A=\pm\sqrt{-i\tau}, \tag{3''}$$

где под радикалом условимся понимать то его значение, которое имеет положительную вещественную часть.

Теперь остается определить знак в формуле (3''), т. е. в равенстве

$$\vartheta_3(0\mid\tau')=\pm\sqrt{-i\tau}\,\vartheta_3(0\mid\tau). \tag{4}$$

Обе величины

$$\vartheta_3(0\mid\tau'),\qquad \sqrt{-i\tau}\,\vartheta_3(0\mid\tau) \tag{5}$$

являются регулярными функциями от τ в верхней полуплоскости. Если τ имеет чисто мнимое значение, то $h=e^{\pi i\tau}$ и $h'=e^{\pi i\tau'}$ положительны, и величины (5) также положительны, как это вытекает из определения функции $\vartheta_3(v)$ с помощью тригонометрического ряда. Мы видим, что в равенстве (4) должен быть взят знак плюс. Таким образом, формулы (3),(3') принимают вид

$$\left.\begin{aligned}\vartheta_3(\tau' v\mid\tau')&=\sqrt{-i\tau}\,e^{-\pi i\tau' v^2}\vartheta_3(v\mid\tau),\\ \vartheta_2(\tau' v\mid\tau')&=\sqrt{-i\tau}\,e^{-\pi i\tau' v^2}\vartheta_0(v\mid\tau),\\ \vartheta_0(\tau' v\mid\tau')&=\sqrt{-i\tau}\,e^{-\pi i\tau' v^2}\vartheta_2(v\mid\tau),\\ \vartheta_1(\tau' v\mid\tau')&=i\sqrt{-i\tau}\,e^{-\pi i\tau' v^2}\vartheta_1(v\mid\tau).\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

23. Модулярная функция $\lambda(\tau)$. Эта функция была введена в конце § 21. Напомним ее определение:

$$\lambda=\frac{\vartheta_2^4(0\mid\tau)}{\vartheta_3^4(0\mid\tau)}\equiv\lambda(\tau).$$

На основании формул (1) § 22

$$\lambda(\tau+1)=-\frac{\vartheta_2^4(0\mid\tau)}{\vartheta_0^4(0\mid\tau)}.$$

А так как в силу формулы (3) § 21

$$\vartheta_0^4(0\mid\tau)=\vartheta_3^4(0\mid\tau)-\vartheta_2^4(0\mid\tau),$$

то

$$\lambda(\tau+1)=\frac{1}{1-\dfrac{1}{\lambda(\tau)}},$$

или

$$\lambda(\tau+1)=\frac{\lambda(\tau)}{\lambda(\tau)-1}. \tag{1}$$

Подобным образом в силу формул (6) § 22

$$\lambda\left(-\frac{1}{\tau}\right)=\frac{\vartheta_0^4(0\,|\,\tau)}{\vartheta_3^4(0\,|\,\tau)}. \tag{2'}$$

Следовательно,

$$\lambda(-1/\tau)=1-\lambda(\tau). \tag{2}$$

Формулы (1) и (2) показывают, что $\lambda(\tau)$ не инвариантна относительно всех преобразований модулярной группы. Однако можно указать некоторую подгруппу полной модулярной группы Σ (обозначим ее Σ_2), относительно которой функция $\lambda(\tau)$ инвариантна. Поэтому $\lambda(\tau)$ также называют модулярной функцией.

Любая подстановка модулярной группы получается композицией основных подстановок

$$S:\ S\tau=\tau+1$$

и

$$T:\ T\tau=-1/\tau.$$

Это обстоятельство в связи с формулами (1) и (2) позволяет установить, как изменяется $\lambda(\tau)$ при преобразованиях полной модулярной группы Σ.

Действительно, непосредственно в силу (1) и (2)

$$\lambda(I\tau)=\lambda(\tau),\qquad \lambda(S\tau)=\frac{\lambda(\tau)}{\lambda(\tau)-1},\qquad \lambda(T\tau)=1-\lambda(\tau);$$

далее,

$$\lambda(ST\tau)=\frac{\lambda(T\tau)}{\lambda(T\tau)-1}=\frac{\lambda(\tau)-1}{\lambda(\tau)}$$

и, аналогично,

$$\lambda(TS\tau)=\frac{1}{1-\lambda(\tau)},$$

$$\lambda(STS\tau)=\lambda(TST\tau)=\frac{1}{\lambda(\tau)}.$$

Докажем, что этим и исчерпывается совокупность всех значений, которые принимает $\lambda(U\tau)$, когда U пробегает группу Σ. С этой целью заметим в первую очередь, что

$$\lambda(S^2\tau)=\frac{\lambda(S\tau)}{\lambda(S\tau)-1}=\frac{\lambda(\tau)}{[\lambda(\tau)-1]\left[\dfrac{\lambda(\tau)}{\lambda(\tau)-1}-1\right]}=\lambda(\tau).$$

А так как всякая подстановка U группы Σ имеет вид

$$U=TS^iTS^k\ldots TS^mTS^n,$$

то для получения различных значений функции $\lambda(U\tau)$ нужно рассмотреть только такие подстановки U, для которых каждое из чисел $i, k, \ldots, m, n$ есть нуль или единица. Поскольку далее $T^2=I$, то речь может идти лишь о подстановках следующего вида:

$$TSTS\ldots T,\ TSTS\ldots TS,\ STS\ldots T,\ STS\ldots TS. \tag{3}$$

Но нетрудно проверить, что имеют место равенства

$$STSTST=TSTSTS=I.$$

Следовательно, подстановки $STSTST$, $TSTSTS$ оставляют $\lambda(\tau)$ инвариантной. Поэтому остаются только такие подстановки, которые являются произведениями вида (3) самое большее из пяти множителей, т. е. остаются

$$\left.\begin{matrix} S,\ T \\ ST,\ TS \\ STS,\ TST \end{matrix}\right\} \tag{α}$$

$$\left.\begin{matrix} TSTS,\ STST, \\ TSTST,\ STSTS \end{matrix}\right\} \tag{β}$$

Подстановки (α) выше были рассмотрены. Что же касается подстановок (β), то они ничего нового не дают; так, например,

$$\lambda(TSTS\tau)=\lambda(TSTSTSST\tau)=\lambda(ST\tau).$$

Таким образом, утверждение доказано. Заметим, что шестерка чисел

$$\lambda,\quad \frac{1}{\lambda},\quad 1-\lambda,\quad \frac{1}{1-\lambda},\quad \frac{\lambda}{\lambda-1},\quad \frac{\lambda-1}{\lambda}$$

получается из λ с помощью линейных подстановок так называемой *ангармонической группы*.

Легко построить фундаментальную область группы Σ_2. Эта область, назовем ее D_2, будет состоять из шести областей, эквивалентных фундаментальной области D полной модулярной группы Σ. Чтобы построить D_2, возьмем вместо D эквивалентную ей область I (рис. 7), ограниченную прямыми

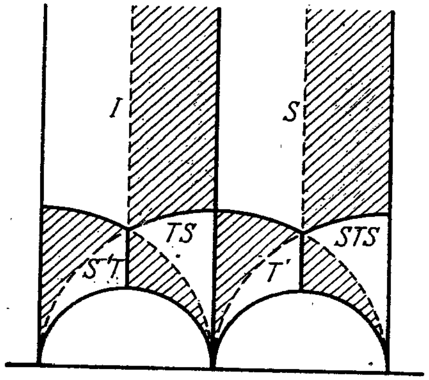


Рис. 7.

$$\Re\tau = -1, \quad \Re\tau = 0$$

и окружностями

$$|\tau+1| = 1, \quad |\tau| = 1.$$

Затем подвергнем каждую точку этой области преобразованию S. Коротко скажем, что преобразованию S подвергнута область I. Полученную область назовем S. Подобным образом построим области T, TS, $S^{-1}T$, STS (см. рис. 7). В результате и получится фундаментальная область D_2 группы Σ_2. Она ограничена прямыми

$$\Re\tau = -1, \quad \Re\tau = 1$$

и окружностями

$$|\tau + 1/2| = 1/2, \quad |\tau - 1/2| = 1/2,$$

причем из каждой пары границ к области D_2 отнесена левая.

Подстановки, связывающие границы области D_2, имеют вид

$$\tau^* = \tau + 2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\tau^* = \frac{\tau}{2\tau+1} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Эти две подстановки и порождают группу Σ_2 подобно тому как подстановки S, T порождают группу Σ.

Отметим, что группа Σ_2 вполне характеризуется следующим свойством своих подстановок

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Во-первых, α, β, γ, δ — целые числа и $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, во-вторых,

$$\alpha \equiv 1 \pmod 2), \qquad \beta \equiv 0 \pmod 2),$$

$$\gamma \equiv 0 \pmod 2), \qquad \delta \equiv 1 \pmod 2);$$

иначе говоря, α и δ — числа нечетные, а β и γ — числа четные.

Доказательство этих фактов предоставляем читателю.

Область D_2 называют также фундаментальной областью функции $\lambda(\tau)$.

Справедлива следующая теорема. *Уравнение*

$$\lambda(\tau) - a = 0 \tag{4}$$

при любом конечном a, отличном от 0 *и* 1, *имеет одно и только одно решение в области D_2.*

Для доказательства воспользуемся формулой (5) § 21:

$$J(\tau) = \frac{4(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{27\lambda^2(1-\lambda)^2}. \tag{5}$$

Полагая в этой формуле $\lambda = a$, получим уравнение

$$J(\tau) = c. \tag{6}$$

Правая часть формулы (5) инвариантна относительно подстановок ангармонической группы. Поэтому то же значение c мы получим для всей шестерки

$$a, \quad \frac{1}{a}, \quad 1-a, \quad \frac{1}{1-a}, \quad \frac{a}{a-1}, \quad \frac{a-1}{a}. \tag{7}$$

Если при заданном a все числа (7) различны, то уравнение (6), по доказанному в § 10, имеет точно шесть простых корней внутри D_2. В этих точках области D_2, эквивалентных относительно полной модулярной группы, функция $\lambda(\tau)$ согласно доказанному в настоящем параграфе принимает шестерку значений (7). В одной из этих точек, следовательно, $\lambda(\tau)$ примет значение a.

Остается рассмотреть, что произойдет, если среди чисел (7) имеются равные. Это будет лишь тогда, когда a имеет одно из следующих значений:

$$a=-1,\quad \frac{1}{2},\quad 2,\quad \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Соответствующими значениями c будут:

$$c=1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0.$$

Вспомним теперь, что в силу рассмотрений § 10 уравнение

$$J(\tau)=1$$

имеет двойной корень в каждой точке τ, эквивалентной точке $\tau=i$ относительно полной модулярной группы. Из всех этих точек области D_2 принадлежат

$$\tau=-1+i,\quad -1/2+i/2,\quad i. \tag{8}$$

Функция $\lambda(\tau)$ принимает в них различные значения. С другой стороны, имеет место тождество

$$\frac{4(\lambda^2-\lambda+1)^3}{27\lambda^2(1-\lambda)^2}=1+\frac{(\lambda+1)^2(2\lambda-1)^2(\lambda-2)^2}{27\lambda^2(1-\lambda)^2}.$$

Отсюда уже легко заметить, что каждое из уравнений

$$\lambda(\tau)=-1,\quad \lambda(\tau)=1/2,\quad \lambda(\tau)=2$$

имеет в области D_2 точно один (простой) корень и эти корни совпадают с числами (8).

Аналогично устанавливается, что уравнения

$$\lambda(\tau)=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \lambda(\tau)=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

имеют в D_2 по одному (простому) корню:

$$\tau=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \tau=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

В заключение остановимся на соответствии границ при отображении, производимом функцией $\lambda=\lambda(\tau)$.

Прежде всего возьмем представление

$$\lambda=1-\prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1-h^{2k-1}}{1+h^{2k-1}}\right)^8,$$

получаемое с помощью формул (2′), (2) и бесконечных произведений для тэта-функций. Здесь $h=e^{\pi i\tau}$. Если поэтому τ пробегает положительную половину CO мнимой оси, то h будет монотонно расти от 0 до 1, а следовательно, λ будет также монотонно расти от 0 до 1 (рис. 8). Возьмем теперь прямую CB; на этой прямой $\tau=1+i\eta$,

где η меняется от ∞ до 0. Следовательно, на CB

$$\lambda=1-\prod_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1+e^{-2\pi\eta(2k-1)}}{1-e^{-2\pi\eta(2k-1)}}\right]^8$$

и поэтому, когда τ пробегает CB, величина λ меняется от 0 до $-\infty$. Такое же изменение испытывает λ, когда τ пробегает прямую CA.

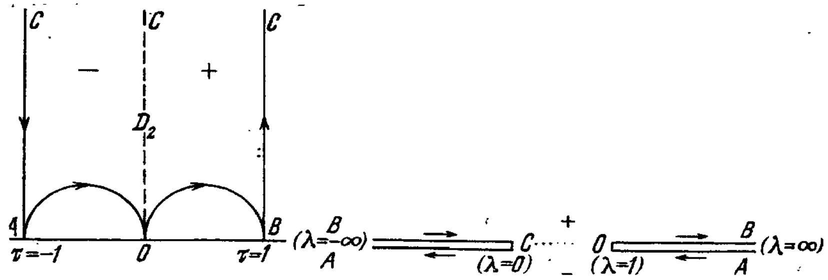


Рис. 8.

Рассмотрим, наконец, полуокружность OA. Если мы положим $\tau=-1/\tau'$, то точка τ опишет дугу OA в положительном направлении, когда точка τ' опишет прямую CB от точки C к точке B. Примем теперь во внимание (см. § 22), что

$$\vartheta_3(0\,|\,\tau)=(-i\tau)^{-1/2}\,\vartheta_3(0\,|\,-1/\tau),$$

$$\vartheta_0(0\,|\,\tau)=(-i\tau)^{-1/2}\,\vartheta_2(0\,|\,-1/\tau).$$

Поэтому

$$\lambda=1-\frac{\vartheta_2^4(0\,|\,\tau')}{\vartheta_3^4(0\,|\,\tau')},$$

откуда

$$\lambda=\frac{\vartheta_0^4(0\,|\,\tau')}{\vartheta_3^4(0\,|\,\tau')}$$

и, значит,

$$\lambda=\prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1-h'^{2k-1}}{1+h'^{2k-1}}\right)^8,$$

где $h' = e^{\pi i \tau'}$. Эта формула показывает, что λ пробегает вещественную полуось от точки $\lambda = 1$ до точки $\lambda = \infty$, когда точка τ пробегает в положительном направлении дугу OA. Ту же полуось получим, когда τ пробегает дугу OB от точки O до точки B.

Из сказанного следует, что функция $\lambda = \lambda(\tau)$ отображает правую половину области D_2 на верхнюю половину плоскости λ, а левую половину области D_2 на нижнюю половину плоскости λ. Вся же область D_2 отображается на плоскость λ, разрезанную вдоль интервалов $(-\infty, 0)$, $(1, \infty)$. Присоединяя к D_2 части границы так, как мы условились выше, мы должны к области в плоскости λ присоединить нижние берега разрезов.

ГЛАВА V

ФУНКЦИИ ЯКОБИ

24. Эллиптический интеграл первого рода в форме Якоби и Римана. Вместо эллиптического интеграла

$$u = \int_y^\infty \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}}, \qquad (1)$$

обращением которого является функция Вейерштрасса $y = \wp(u)$, в теории Якоби выступает интеграл

$$w = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \qquad (2)$$

содержащий лишь один параметр k; этот параметр называют *модулем* рассматриваемого интеграла.

Если мы положим $x^2 = \xi$, $t^2 = z$, то интеграл (2) примет вид

$$w = \int_0^\xi \frac{dz}{2\sqrt{z(1-z)(1-k^2z)}}. \qquad (3)$$

Это — форма Римана.

То обстоятельство, что интеграл в форме Якоби или Римана содержит всего один параметр, а не два, как интеграл Вейерштрасса, представляется весьма удобным при различных вычислениях. Что же касается теоретических рассмотрений, то для них форма Вейерштрасса почти всегда предпочтительнее.

После того как теория Вейерштрасса построена, независимая трактовка интеграла (3) становится излишней, где $h' = e^{\pi i \tau'}$. Эта формула показывает, что λ пробегает вещественную полуось от точки $\lambda = 1$ до точки $\lambda = \infty$, когда точка τ пробегает в положительном направлении дугу OA. Ту же полуось получим, когда τ пробегает дугу OB от точки O до точки B.

Из сказанного следует, что функция $\lambda = \lambda(\tau)$ отображает правую половину области D_2 на верхнюю половину плоскости λ, а левую половину области D_2 на нижнюю половину плоскости λ. Вся же область D_2 отображается на плоскость λ, разрезанную вдоль интервалов $(-\infty, 0)$, $(1, \infty)$. Присоединяя к D_2 части границы так, как мы условились выше, мы должны к области в плоскости λ присоединить нижние берега разрезов.

ГЛАВА V

ФУНКЦИИ ЯКОБИ

24. Эллиптический интеграл первого рода в форме Якоби и Римана. Вместо эллиптического интеграла

$$u = \int_y^\infty \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}}, \tag{1}$$

обращением которого является функция Вейерштрасса $y = \wp(u)$, в теории Якоби выступает интеграл

$$w = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}}, \tag{2}$$

содержащий лишь один параметр k; этот параметр называют *модулем* рассматриваемого интеграла.

Если мы положим $x^2 = \xi$, $t^2 = z$, то интеграл (2) примет вид

$$w = \int_0^\xi \frac{dz}{2\sqrt{z(1 - z)(1 - k^2 z)}}. \tag{3}$$

Это — форма Римана.

То обстоятельство, что интеграл в форме Якоби или Римана содержит всего один параметр, а не два, как интеграл Вейерштрасса, представляется весьма удобным при различных вычислениях. Что же касается теоретических рассмотрений, то для них форма Вейерштрасса почти всегда предпочтительнее.

После того как теория Вейерштрасса построена, независимая трактовка интеграла (3) становится излишней, Проще воспользоваться тем, что должно существовать дробно-линейное преобразование переменной z в переменную s (а значит, переменной ξ в переменную y), после которого интеграл w с точностью до постоянного множителя превратится в интеграл u. Это преобразование должно иметь вид

$$z=\frac{\mu}{s-\lambda},$$

так как z должно равняться нулю при $s=\infty$. Корням $s=e_1$, e_2, e_3 многочлена $4s^3-g_2s-g_3$ должны отвечать значения $z=1$, $1/k^2$, ∞. Поэтому λ должно равняться одному из чисел e_α. Положим $\lambda=e_3$, $\mu=e_1-e_3$. Тогда корень $s=e_1$ перейдет в $z=1$. Итак,

$$z=\frac{e_1-e_3}{s-e_3} \tag{4}$$

и, значит,

$$\xi=\frac{e_1-e_3}{y-e_3}.$$

С помощью (4) находим

$$s-e_3=\frac{e_1-e_3}{z}, \quad s-e_1=\frac{(e_1-e_3)(1-z)}{z},$$

$$s-e_2=\frac{(e_1-e_3)\left(1-\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}z\right)}{z}, \quad ds=-\frac{(e_1-e_3)\,dz}{z^2}.$$

Следовательно,

$$u=\frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}\int_0^{\xi}\frac{dz}{2\sqrt{z(1-z)\left(1-\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}z\right)}}.$$

Чтобы отождествить эту формулу с (3), остается положить

$$k^2=\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3} \tag{5}$$

и

$$w=\sqrt{e_1-e_3}\,u.$$

Наш результат можно сформулировать следующим образом: имея величину k^2 (конечную и отличную как от нуля, так и от единицы), возьмем какие-нибудь e_1, e_2, e_3, сумма которых равна нулю и для которых выполняется (5); затем построим соответствующую функцию $\wp(u)$ и тогда

$$\xi=\frac{e_1-e_3}{\wp\left(\frac{w}{\sqrt{e_1-e_3}}\right)-e_3}.$$

Обращение же интеграла (2) будет иметь вид

$$x=\frac{\sqrt{e_1-e_3}}{\sqrt{\wp\left(\frac{w}{\sqrt{e_1-e_3}}\right)-e_3}}. \tag{6}$$

Выразим эту функцию через тэта-функции. Необходимые для этого формулы содержатся в таблицах VI и X. Наш результат будет иметь вид

$$x=\frac{\pi}{2\omega}\vartheta_3^2\frac{\sigma\left(\frac{w}{\sqrt{e_1-e_3}}\right)}{\sigma_3\left(\frac{w}{\sqrt{e_1-e_3}}\right)}=\frac{\pi\vartheta_0\vartheta_3^2}{\vartheta_1'}\frac{\vartheta_1\left(\frac{w}{2\omega\sqrt{e_1-e_3}}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{w}{2\omega\sqrt{e_1-e_3}}\right)}=$$

$$=\frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_1\left(\frac{w}{2\omega\sqrt{e_1-e_3}}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{w}{2\omega\sqrt{e_1-e_3}}\right)}.$$

Еще Лежандр изучал интеграл (2) как функцию от x и k^2. При этом особое внимание уделялось так называемому нормальному случаю, когда k^2 положительно и меньше единицы, а x лежит в интервале $[0, 1]$. В этом случае естественно положить

$$t=\sin\psi,\quad x=\sin\varphi.$$

Тогда интеграл (2) примет вид

$$w=\int_0^{\varphi}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}. \tag{2^{bis}}$$

Обращая этот интеграл, Якоби назвал φ амплитудой w:

$$\varphi=\operatorname{am} w.$$

Тогда результат обращения интеграла (2) будет

$$x=\sin\varphi=\sin\operatorname{am} w.$$

Эту функцию Якоби назвал синус амплитуды (sinus amplitudinis). Дальнейшей функцией является

$$\sqrt{1-x^2}=\cos\varphi=\cos\operatorname{am} w. \tag{7}$$

Кроме этого, Якоби ввел еще функцию

$$\sqrt{1-k^2x^2}=\Delta\varphi=\Delta\operatorname{am} w, \tag{8}$$

которая называлась дельта амплитуды. Обе функции (7) и (8) обращаются в единицу при $w=0$. В настоящее время обозначения Якоби не приняты. Их заменили обозначения Гудермана

$$x=\operatorname{sn} w,\quad \sqrt{1-x^2}=\operatorname{cn} w,\quad \sqrt{1-k^2x^2}=\operatorname{dn} w.$$

25. Функции Якоби. В § 24 мы ввели функцию

$$\operatorname{sn} w=\frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_1\left(\dfrac{w}{2\omega\sqrt{e_1-e_3}}\right)}{\vartheta_0\left(\dfrac{w}{2\omega\sqrt{e_1-e_3}}\right)}.$$

Это — мероморфная функция от w, зависящая еще от одного лишь параметра $h=e^{\pi i\tau}$, так как h — единственная величина, от которой зависит $2\omega\sqrt{e_1-e_3}=\pi\vartheta_3^2$, а также коэффициенты тэта-функций. Однако из рассмотрений § 24 вытекает, что в качестве параметра, от которого зависят функции Якоби, вместо $h=e^{\pi i\tau}$ или τ можно взять модуль k. Действительно, из § 24 следует, что, имея k, можно определить число τ из верхней полуплоскости так, чтобы построенная для этого значения τ, через посредство функции $\wp$ или тэта-функций, функция $x=\operatorname{sn} w$ была обращением интеграла

$$w=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

Таким образом, для функции $\operatorname{sn} w$ более полным обозначением наряду с $\operatorname{sn}(w\mid\tau)$ является $\operatorname{sn}(w;k)$. Аналогичное замечание относится и к функциям $\operatorname{cn} w$, $\operatorname{dn} w$.

Примитивными периодами отношения $\vartheta_1(v)/\vartheta_0(v)$ являются числа 2, τ.

Значит, примитивными периодами функции $\operatorname{sn} w$ будут $4\omega\sqrt{e_1-e_3}$, $2\omega'\sqrt{e_1-e_3}$. Это — некоторые функции от h. Приняты следующие обозначения:

$$\omega\sqrt{e_1-e_3}=K,\qquad \omega'\sqrt{e_1-e_3}=iK'.$$

Таким образом, примитивными периодами функции $\operatorname{sn} w$ являются $4K$, $2iK'$.

Постоянно писать $w/(2K)$ в качестве аргумента тэта-функций неудобно.

Следуя Риману, введем обозначения:

$$\theta_\alpha(w)=\vartheta_\alpha\left(\frac{w}{2K}\right)\qquad(\alpha=0,\ 1,\ 2,\ 3);$$

тогда

$$\operatorname{sn} w=\frac{\theta_3}{\theta_2}\frac{\theta_1(w)}{\theta_0(w)}.$$

Теперь обратимся к функциям $1-x^2$, $1-k^2x^2$. Припоминая формулу (6) § 24, будем иметь

$$1-x^2=1-\frac{e_1-e_3}{\wp\left(\frac{w}{\sqrt{e_1-e_3}}\right)-e_3}=\frac{\wp\left(\frac{w}{\sqrt{e_1-e_3}}\right)-e_1}{\wp\left(\frac{w}{\sqrt{e_1-e_3}}\right)-e_3}=$$

$$=\left\{\frac{\sigma_1\left(\frac{w}{\sqrt{e_1-e_3}}\right)}{\sigma_3\left(\frac{w}{\sqrt{e_1-e_3}}\right)}\right\}^2=\frac{\vartheta_0^2}{\vartheta_2^2}\left\{\frac{\vartheta_2\left(\frac{w}{2\omega\sqrt{e_1-e_3}}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{w}{2\omega\sqrt{e_1-e_3}}\right)}\right\}^2,$$

и, значит,

$$1-x^2=\frac{\theta_0^2}{\theta_2^2}\left\{\frac{\theta_2(w)}{\theta_0(w)}\right\}^2,$$

откуда

$$\sqrt{1-x^2}=\operatorname{cn} w=\frac{\theta_0}{\theta_2}\frac{\theta_2(w)}{\theta_0(w)}.$$

Аналогично найдем

$$\operatorname{dn} w=\frac{\theta_0}{\theta_3}\frac{\theta_3(w)}{\theta_0(w)}.$$

Примитивные периоды этих функций дает таблица

$\operatorname{cn} w$	$4K$	$2K+2iK'$
$\operatorname{dn} w$	$2K$	$4iK'$

На рис. 9 представлены параллелограммы периодов для всех трех функций.

Мы видим, что все параллелограммы различны, но площадь имеют одну и ту же.

Нетрудно указать нули и полюсы функций Якоби, а также их значения в некоторых других точках. Эти сведения содержат таблицы XIII и XV.

Подчеркнем, что полюсы функций Якоби простые. Таким образом, мы имеем здесь функции второго типа по классификации § 4.

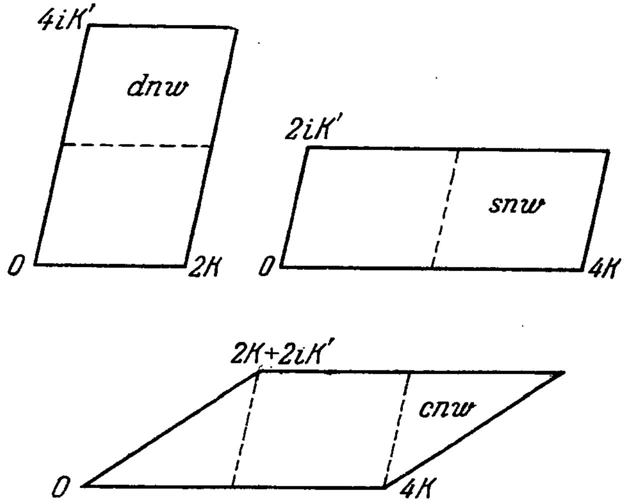


Рис. 9.

В виде упражнения предлагаем доказать тождество[1])

$$\frac{\operatorname{dn}^2(u;\,k)}{\operatorname{cn}^2(u;\,k)}=\operatorname{dn}^2(iu;\,k'), \tag{1}$$

которое нам скоро понадобится.

Для доказательства достаточно проверить, что левая и правая части имеют одинаковые примитивные периоды $2K$, $2iK'$, имеют одни и те же нули и полюсы, и наконец, принимают одно и то же значение в точке $u=0$.

В теории Вейерштрасса можно было задаваться произвольными периодами 2ω, $2\omega'$. Требовалось лишь, чтобы отношение $\tau=\omega'/\omega$ имело отличную от нуля, обычно положительную, мнимую часть.

Теперь дело обстоит иначе. Периоды $2K$, $2iK'$ произвольно выбираться не могут. Лишь отношение $\tau = iK'/K$ или, что то же, величина $h=e^{\pi i\tau}=e^{-\pi K'/K}$

[1]) Это тождество есть частный случай некоторых соотношений, которые ниже будут разобраны с необходимой полнотой и которые содержатся в таблице XIX.

может быть произвольно задана. После этого периоды уже определяются, и для K мы имеем следующую формулу:

$$K=\omega\sqrt{e_1-e_3}=\frac{\pi}{2}\vartheta_3^2=\frac{\pi}{2}(1+2h+2h^4+\ldots)^2.$$

С другой стороны, подобное выражение через h может быть написано и для k^2. Оно имеет вид

$$k^2=\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}=\frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4}=$$
$$=\left\{\frac{2h^{1/4}+2h^{9/4}+\ldots}{1+2h+2h^4+\ldots}\right\}^4 \qquad (h^{1/4}=e^{\pi i\tau/4}).$$

Заканчивая настоящий параграф, приведем еще первоначальные обозначения тэта-функций, принадлежащие Якоби:

$$H(w)=\theta_1(w), \qquad \Theta(w)=\theta_0(w),$$
$$H_1(w)=\theta_2(w), \qquad \Theta_1(w)=\theta_3(w).$$

Эти обозначения употребляются и в настоящее время наряду с приведенными выше.

26. Дифференцирование функций Якоби. Возьмем интеграл

$$w=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \tag{1}$$

обращением которого является функция

$$x=\operatorname{sn}w. \tag{2}$$

Из (1) следует, что

$$\frac{dx}{dw}=\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)},$$

поэтому в силу (2)

$$\frac{d}{dw}\operatorname{sn}w=\operatorname{cn}w\operatorname{dn}w.$$

Для получения производной от $\operatorname{cn}w$, а также от $\operatorname{dn}w$ нужно продифференцировать соотношения

$$\operatorname{sn}^2w+\operatorname{cn}^2w=1, \qquad k^2\operatorname{sn}^2w+\operatorname{dn}^2w=1,$$

что дает

$$\frac{d}{dw}\operatorname{cn}w=-\operatorname{sn}w\operatorname{dn}w,$$

$$\frac{d}{dw}\operatorname{dn}w=-k^2\operatorname{sn}w\operatorname{cn}w.$$

Отметим, что примитивными периодами функции sn^2w являются числа $2K$, $2iK'$. Это вытекает (без какого-либо исследования функции $\operatorname{sn}w$) из формулы (6) § 24, которая может быть записана в виде

$$\operatorname{sn}^2w=\frac{e_1-e_3}{\wp\left(\frac{w}{\sqrt{e_1-e_3}}\right)-e_3}. \tag{3}$$

Всякая эллиптическая функция с периодами $2K$, $2iK'$, как это следует из доказанных выше общих теорем, допускает представление

$$R_1(\wp)+R_2(\wp)\wp',$$

где

$$\wp=\wp\left(\frac{w}{\sqrt{e_1-e_3}}\right).$$

Теперь формула (3) показывает, что всякая эллиптическая функция с периодами $2K$, $2iK'$ допускает представление

$$R_1(\operatorname{sn}^2w)+\operatorname{sn}w\operatorname{cn}w\operatorname{dn}w\,R_2(\operatorname{sn}^2w).$$

Отсюда уже следует, что четная эллиптическая функция с периодами $2K$, $2iK'$ равна $R(\operatorname{sn}^2w)$, а нечетная — равна $\operatorname{sn}w\operatorname{cn}w\operatorname{dn}w\,R(\operatorname{sn}^2w)$.

27. Якобиева функция $Z(w)$. Эта функция аналогична функции Вейерштрасса $\zeta(u)$ и определяется формулой

$$Z(w)=\frac{\theta_0'(w)}{\theta_0(w)}.$$

Это — нечетная функция, которая в параллелограмме периодов имеет один полюс первого порядка: $w=iK'$. Так как

$$\theta_0(w+2K)=\theta_0(w),$$
$$\theta_0(w+2iK')=-h^{-1}e^{-\pi iw/K}\theta_0(w),$$

то

$$Z(w+2K)=Z(w),$$
$$Z(w+2iK')=Z(w)-\pi i/K.$$

Используя разложение функции $\theta_0(w)$ в бесконечное произведение, получим разложение $Z(w)$ в бесконечный ряд. Оно имеет вид

$$Z(w)=\frac{2\pi}{K}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h^{2n-1}\sin\dfrac{\pi w}{K}}{1-2h^{2n-1}\cos\dfrac{\pi w}{K}+h^{4n-2}}.$$

Подобно функции $\zeta(u)$ функция $Z(w)$ может быть использована для представления произвольной эллиптической функции.

В качестве примера возьмем функцию от u

$$-k^2\operatorname{sn}u\operatorname{sn}v\operatorname{sn}(u+v).$$

Ее примитивными периодами являются $2K$, $2iK'$. В параллелограмме периодов она имеет полюсы

$$u=iK',\quad -v+iK',$$

оба простые. При этом вычеты равны соответственно -1, 1. Поэтому

$$-k^2\operatorname{sn}u\operatorname{sn}v\operatorname{sn}(u+v)=Z(u+v)-Z(u)+C.$$

Чтобы определить константу C, положим $u=0$. Это дает

$$Z(v)+C=0.$$

Итак,

$$Z(u+v)-Z(u)-Z(v)=-k^2\operatorname{sn}u\operatorname{sn}v\operatorname{sn}(u+v). \qquad (1)$$

Подобным образом нетрудно получить следующее разложение на «простые дроби»:

$$-\frac{2k^2\operatorname{sn}^2v\operatorname{sn}u\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u}{1-k^2\operatorname{sn}^2u\operatorname{sn}^2v}=$$
$$=Z(u+v)+Z(u-v)-2Z(u). \qquad (2)$$

Впрочем, это разложение можно также получить из выражения функции $1-k^2\operatorname{sn}^2u\operatorname{sn}^2v$ через тэта-функции по нулям и полюсам. Указанное выражение имеет вид

$$1-k^2\operatorname{sn}^2u\operatorname{sn}^2v=\theta_0^2\frac{\theta_0(u+v)\theta_0(u-v)}{\theta_0^2(u)\theta_0^2(v)},$$

а (2) получится отсюда, если от обеих частей взять логарифмическую производную. Поменяем в (2) местами величины u, v. Это даст

$$-\frac{2k^2\operatorname{sn}^2u\operatorname{sn}v\operatorname{cn}v\operatorname{dn}v}{1-k^2\operatorname{sn}^2u\operatorname{sn}^2v}=$$
$$=Z(u+v)-Z(u-v)-2Z(v). \qquad (2^{\text{bis}})$$

Сложим теперь (2), (2^{bis}) и представим результат в виде

$$Z(u+v)-Z(u)-Z(v)=$$
$$=-k^2\operatorname{sn}u\operatorname{sn}v\frac{\operatorname{sn}u\operatorname{cn}v\operatorname{dn}v+\operatorname{sn}v\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u}{1-k^2\operatorname{sn}^2u\operatorname{sn}^2v}. \qquad (3)$$

Сравнивая это с (1), получаем

$$\operatorname{sn}(u+v)=\frac{\operatorname{sn}u\operatorname{cn}v\operatorname{dn}v+\operatorname{sn}v\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u}{1-k^2\operatorname{sn}^2u\operatorname{sn}^2v}. \qquad (4)$$

Это соотношение выражает теорему сложения функции $\operatorname{sn}u$.

Упражнение. Доказать, что

$$\operatorname{sn}^2\frac{K}{2}=\frac{1}{1+\sqrt{1-k^2}}.$$

28. Теорема Эйлера. Из выведенной в § 27 теоремы сложения (4) для функции $\operatorname{sn} u$ можно получить теоремы сложения для других функций. Например, чтобы получить теорему сложения для функции $\operatorname{cn} u$, можно исходить из того, что $\operatorname{cn} u=\sqrt{1-\operatorname{sn}^2 u}$. Не представляющие ни труда, ни интереса выкладки мы приводить не станем, а отошлем читателя к таблице XIV, которая содержит наиболее важные формулы, выражающие теоремы сложения.

Здесь же мы остановимся на другой стороне вопроса. Дело в том, что формула (4) § 27 может быть получена на основании соображений, восходящих к Эйлеру и не имеющих ничего общего с построенной нами теорией.

Эйлер рассмотрел дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}}+\frac{dy}{\sqrt{f(y)}}=0,$$

где $f(z)=a_0z^4+4a_1z^3+6a_2z^2+4a_3z+a_4$, и показал, что это уравнение имеет алгебраический интеграл. Сравнение этого интеграла с трансцендентным интегралом

$$\int\frac{dx}{\sqrt{f(x)}}+\int\frac{dy}{\sqrt{f(y)}}=C$$

и приводит к теореме сложения функций Якоби. В сущности говоря, указанная теорема Эйлера и послужила первым толчком для исследования эллиптических интегралов.

Особенно изящный способ доказательства теоремы Эйлера принадлежит Дарбу.

Следуя Дарбу, рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}+\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}=0. \qquad (1)$$

Оно имеет трансцендентный интеграл

$$\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}+\int_0^y\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}=A, \qquad (2)$$

где A — произвольная постоянная. Если мы положим

$$u=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \qquad (3_1)$$

$$v=\int_0^y\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}, \qquad (3_2)$$

то интеграл (2) представится в виде

$$u+v=A. \qquad (2^{\text{bis}})$$

С другой стороны, уравнение (1) можно заменить системой

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)},\\ \frac{dy}{dt}&=-\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}.\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Возвышая (4) в квадрат, получим

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2&=(1-x^2)(1-k^2x^2),\\ \left(\frac{dy}{dt}\right)^2&=(1-y^2)(1-k^2y^2).\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Продифференцируем теперь эти уравнения:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=x(2k^2x^2-1-k^2),\qquad \frac{d^2y}{dt^2}=y(2k^2y^2-1-k^2).$$

Отсюда

$$y\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2y}{dt^2}=2k^2xy(x^2-y^2)$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(y\frac{dx}{dt}-x\frac{dy}{dt}\right)=2k^2xy\,(x^2-y^2). \qquad (6)$$

С другой стороны, из (5) вытекает, что

$$y^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-x^2\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=(y^2-x^2)\,(1-k^2x^2y^2). \qquad (7)$$

Разделив (6) на (7), получим

$$\frac{\dfrac{d}{dt}\left(y\dfrac{dx}{dt}-x\dfrac{dy}{dt}\right)}{y\dfrac{dx}{dt}-x\dfrac{dy}{dt}}=\frac{2k^2xy\left(y\dfrac{dx}{dt}+x\dfrac{dy}{dt}\right)}{k^2x^2y^2-1}$$

или

$$\frac{d}{dt}\ln\left(y\frac{dx}{dt}-x\frac{dy}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\ln\,(k^2x^2y^2-1),$$

откуда

$$y\frac{dx}{dt}-x\frac{dy}{dt}=C\,(1-k^2x^2y^2).$$

Принимая во внимание (4), получаем

$$\frac{x\sqrt{(1-y^2)\,(1-k^2y^2)}+y\sqrt{(1-x^2)\,(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2}=C. \qquad (8)$$

Это и есть алгебраическая форма интеграла уравнения (1).

Каждое из соотношений (2), (8) должно быть следствием другого. Отсюда и получается теорема сложения функции $\operatorname{sn} w$.

Действительно, из (3_1), (3_2) следует, что

$$x=\operatorname{sn}u, \qquad y=\operatorname{sn}v.$$

Поэтому (8) можно представить в виде

$$\frac{\operatorname{sn}u\operatorname{cn}v\operatorname{dn}v+\operatorname{sn}v\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u}{1-k^2\operatorname{sn}^2u\operatorname{sn}^2v}=C. \qquad (8^{\text{bis}})$$

Так как (8^{bis}) есть следствие (2^{bis}), то C есть функция от A:

$$C=\varphi(A).$$

Иначе говоря,

$$\frac{\operatorname{sn}u\operatorname{cn}v\operatorname{dn}v+\operatorname{sn}v\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u}{1-k^2\operatorname{sn}^2u\operatorname{sn}^2v}=\varphi(u+v).$$

Чтобы определить вид функции φ, положим $v=0$. Это дает

$$\operatorname{sn}u=\varphi(u)$$

и, значит,

$$\frac{\operatorname{sn}u\operatorname{cn}v\operatorname{dn}v+\operatorname{sn}v\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u}{1-k^2\operatorname{sn}^2u\operatorname{sn}^2v}=\operatorname{sn}(u+v).$$

29. Нормальные эллиптические интегралы второго и третьего рода в форме Якоби. Припомним содержание § 17, где было показано, что всякий эллиптический интеграл в форме Вейерштрасса может быть выражен через эллиптическую функцию и следующие три интеграла:

$$u=\int\frac{dz}{w}, \qquad (1)$$

$$\zeta(u)=-\int\frac{z\,dz}{w}, \qquad (2)$$

$$\ln\frac{\sigma(u-u_0)}{\sigma(u)}+u\,\zeta(u_0)=\frac{1}{2}\int\frac{w+w_0}{z-z_0}\frac{dz}{w}, \qquad (3)$$

где $w^2=4z^3-g_2z-g_3$, $z_0=\wp(u_0)$, $w_0=\wp'(u_0)$.

Теперь мы хотим рассмотреть эллиптические интегралы в форме Якоби и Римана. Для преобразования основных интегралов (1), (2), (3) к форме Римана нужно заменить в этих интегралах w^2 на $4z\,(1-z)\,(1-k^2z)$. Делая затем подстановку $z=t^2$, придем к следующим интегралам:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \qquad (1^{\text{bis}})$$

$$\int \frac{t^2\,dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \qquad (2^{\text{bis}})$$

$$\int \frac{t\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}+t_0\sqrt{(1-t_0^2)(1-k^2t_0^2)}}{(t^2-t_0^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}\,dt. \qquad (3^{\text{bis}})$$

Интеграл (1^{bis}), который мы перепишем в виде

$$u=\int\limits_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \qquad (4)$$

есть интеграл первого рода в теории Якоби.

Вместо (2^{bis}) в теории Якоби в качестве нормального интеграла второго рода принят интеграл

$$\int\limits_0^x \frac{(1-k^2t^2)\,dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}. \qquad (5')$$

Это выражение отличается от (2^{bis}) на интеграл первого рода, если не считать еще некоторого постоянного множителя.

Интеграл (5′) можно выразить как функцию от интеграла первого рода (4). Соответствующее обозначение Якоби таково:

$$E(u)=\int\limits_0^x \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\,dt \qquad [x=\operatorname{sn}(u;\ k)] \qquad (5)$$

или

$$E(u)=\int\limits_0^u \operatorname{dn}^2(v;\ k)\,dv.$$

Наконец, вместо (3^{bis}) Якоби принимает в качестве нормального интеграла третьего рода

$$\int\limits_0^x \frac{k^2b\sqrt{(1-b^2)(1-k^2b^2)}}{1-k^2b^2t^2}\,\frac{t^2\,dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \qquad (6')$$

что отличается от (3^{bis}) на элементарную функцию и интеграл первого рода, если не считать еще некоторого постоянного множителя.

Интеграл (6′) можно выразить как функцию от интеграла первого рода (4). Якоби обозначает ее $\Pi(u;\ a)$, если $b=\operatorname{sn}(a;\ k)$. Таким образом,

$$\Pi(u;\ a)=\int\limits_0^x \frac{k^2b\sqrt{(1-b^2)(1-k^2b^2)}}{1-k^2b^2t^2}\,\frac{t^2\,dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}=$$

$$=\int\limits_0^u \frac{k^2\operatorname{sn}a\operatorname{cn}a\operatorname{dn}a\operatorname{sn}^2v}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2v}\,dv. \qquad (6)$$

В § 27 было показано [формула (2^{bis})], что

$$\frac{k^2\operatorname{sn}a\operatorname{cn}a\operatorname{dn}a\operatorname{sn}^2v}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2v}=\frac{1}{2}Z(v-a)-\frac{1}{2}Z(v+a)+Z(a).$$

А так как

$$Z(v)=\frac{\Theta'(v)}{\Theta(v)},$$

то

$$\Pi(u,\ a)=\frac{1}{2}\ln\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)}+uZ(a).$$

Эта функция в теории Якоби заменяет функцию

$$\ln\frac{\sigma(u-a)}{\sigma(u)}+u\,\zeta(a)$$

теории Вейерштрасса.

Нетрудно выразить через ранее введенные функции нормальный интеграл второго рода $E(u)$. С этой целью снова возьмем формулу (2^{bis}) § 27:

$$Z(u+v)-Z(u-v)-2Z(v)=-\frac{2k^2\operatorname{sn}^2u\operatorname{sn}v\operatorname{cn}v\operatorname{dn}v}{1-k^2\operatorname{sn}^2u\operatorname{sn}^2v}.$$

Разделим обе части на $2\operatorname{sn}v$ и будем приближать v к нулю. В пределе получим

$$\frac{d}{du}Z(u)-Z'(0)=-k^2\operatorname{sn}^2u,$$

откуда

$$\operatorname{dn}^2u=1-Z'(0)+\frac{d}{du}Z(u)$$

и, следовательно,

$$E(u)=[1-Z'(0)]u+Z(u).$$

На другом представлении первого члена правой части мы здесь останавливаться не будем (см. таблицу XVI, а также § 31).

30. Полные эллиптические интегралы первого рода. В § 25 мы ввели в рассмотрение величины K, K' как функции от τ или $h=e^{\pi i\tau}$ ($\mathfrak{J}\tau>0$), определяемые следующими формулами:

$$K=\frac{\pi}{2}\vartheta_3^2(0\,|\,\tau)=\frac{\pi}{2}(1+2h+2h^4+\ldots)^2,\qquad \frac{iK'}{K}=\tau. \tag{1}$$

Кроме того, мы имели формулу

$$k^2=\frac{\vartheta_2^4(0\,|\,\tau)}{\vartheta_3^4(0\,|\,\tau)}=\left\{\frac{2h^{1/4}+2h^{9/4}+\ldots}{1+2h+2h^4+\ldots}\right\}^4\quad(h^{1/4}=e^{\pi i\tau/4}), \tag{2}$$

из которой следует, что $k^2=\lambda(\tau)$.

Займемся теперь рассмотрением величины K как функции от $k^2=\lambda$. Припомним конформное отображение области D_2, производимое функцией $\lambda(\tau)$. В двух точках, лежащих в плоскости λ на противоположных берегах разреза BC (от $\lambda=-\infty$ до $\lambda=0$), значения функции K, определяемой формулой (1), одинаковы, так как таким точкам отвечают симметричные относительно мнимой оси точки на прямолинейных границах области D_2,

а в них $h=e^{2\pi i\tau}$ имеет одно и то же значение. Поэтому величина K, определяемая формулой (1), является регулярной функцией от $k^2=\lambda$ в плоскости λ, разрезанной вдоль одного лишь интервала $(1,\infty)$. Докажем, что в так разрезанной плоскости имеет место равенство

$$K=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \tag{3}$$

где при $t=0$ радикал равен 1, что мы все время и будем предполагать.

Так как обе части равенства (3) аналитичны в рассматриваемой области, то достаточно доказать, что равенство (3) верно при $0<k^2<1$.

Для доказательства последнего утверждения заметим, что единственными точками u, в которых

$$\operatorname{sn}u=1, \tag{4}$$

являются

$$u=(4m+1)K+2m'iK',$$

где m, m' — целые числа. Действительно, функция $\operatorname{sn}u$ второго порядка, а корень $u=K$ уравнения (4) двойной, так как при $u=K$ обращается в нуль

$$\frac{d}{du}\operatorname{sn}u=\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u.$$

Таким образом, при каких-то целых m, m'

$$\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}=(4m+1)K+2m'iK'.$$

Пусть $0<k^2<1$. Тогда τ — чисто мнимое и значения K, K' положительны. Поэтому $m'=0$,

$$\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}=(4m+1)K>0$$

и, значит, $m>-1$. Однако m не может быть >0, так как тогда при некотором положительном $x<1$ мы имели бы равенство

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = K,$$

откуда следовало бы, что

$$0 < x = \operatorname{sn} K < 1.$$

Значит, $m = 0$ и наше утверждение доказано, т. е. величина K, определяемая равенством (1), представима в виде (3), если k^2 не принадлежит интервалу $[1, \infty)$.

Делая в (3) замену $t = \sin\psi$, получим

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = K.$$

Лежандр, как мы уже упомянули ранее, рассматривал интеграл

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = F(\varphi,\ k)$$

как функцию от угла φ и модуля k. Угол φ изменялся в интервале $[0,\ \pi/2]$. Величина K получается при $\varphi = \pi/2$:

$$K = F(\pi/2,\ k).$$

Поэтому эту величину Лежандр назвал *полным* эллиптическим интегралом первого рода для модуля k.

Вместе с модулем k часто приходится рассматривать так называемый дополнительный модуль k', который определяется формулой $k^2 + k'^2 = 1$. Докажем, что

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}} = K'. \tag{5}$$

Здесь придется предположить, что k'^2 не лежит на вещественной полуоси от точки $\lambda = 1$ до точки $\lambda = \infty$. Это значит, что k^2 не должно лежать на вещественной полуоси от точки $\lambda = 0$ до точки $\lambda = -\infty$. Таким образом, при одновременном рассмотрении обеих величин K, K' приходится предположить, что плоскость переменной λ разрезана вдоль двух полуосей: от $\lambda = 1$ до $\lambda = \infty$ и от $\lambda = 0$ до $\lambda = -\infty$.

Чтобы доказать (5), примем во внимание соотношение

$$\vartheta_3(0\,|\,\tau) = (-i\tau)^{-1/2}\vartheta_3(0\,|\,-1/\tau),$$

откуда

$$\vartheta_3^2(0\,|\,\tau) = \frac{i}{\tau}\vartheta_3^2(0\,|\,-1/\tau).$$

А так как

$$K' = \frac{1}{i}\tau K = \frac{\tau}{i}\,\frac{\pi}{2}\vartheta_3^2(0\,|\,\tau),$$

то

$$K' = \frac{\pi}{2}\vartheta_3^2(0\,|\,-1/\tau). \tag{1'}$$

С другой стороны,

$$1-k^2 = \frac{\vartheta_0^4(0\,|\,\tau)}{\vartheta_3^4(0\,|\,\tau)} = \frac{\vartheta_2^4(0\,|\,-1/\tau)}{\vartheta_3^4(0\,|\,-1/\tau)},$$

т. е.

$$k'^2 = \frac{\vartheta_2^4(0\,|\,-1/\tau)}{\vartheta_3^4(0\,|\,-1/\tau)}. \tag{2'}$$

Сравнение пары формул (1′) и (2′) с парой формул (1) и (2) показывает, что K' так зависит от k'^2, как K от k^2, чем и доказано наше утверждение.

Заканчивая настоящий параграф, сделаем одно замечание относительно перехода от формы Вейерштрасса к форме Якоби.

Мы видели, что величина k^2 определенным образом выражается через корни e_α многочлена $4x^3 - g_2x - g_3$, а именно

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}.$$

Если мы хотим, чтобы k^2 не принимало значений, лежащих на вещественной полуоси от точки $\lambda = 1$ до точки

$\lambda = \infty$ и от точки $\lambda = 0$ до точки $\lambda = -\infty$, то нумерация корней должна подчиняться следующему условию: если точки e_1, e_2, e_3 лежат на одной прямой, то e_2 должна лежать между e_1 и e_3.

Заметим также, что важнейшим для приложений является тот случай, когда $0 < k^2 < 1$. Мы будем иметь этот случай, если все корни e_α вещественны. В этом случае обычно принимают, что $e_1 > e_2 > e_3$. Иногда этот случай называют *нормальным*.

31. Полные эллиптические интегралы второго рода. Эти интегралы для модуля k и дополнительного модуля k' определяются формулами

$$E = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\,dt, \quad E' = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k'^2t^2}{1-t^2}}\,dt.$$

Легко видеть, что $E = E(K)$, где $E(u)$ означает интеграл второго рода, рассмотренный в § 29. Там же было показано, что

$$E(u) = [1 - Z'(0)]\,u + Z(u).$$

Так как $Z(K) = 0$, то $E = [1 - Z'(0)]\,K$ и, следовательно,

$$E(u) = Z(u) + \frac{E}{K}u. \qquad (1)$$

В § 12 было доказано, что $\eta\omega' - \eta'\omega = \pi i/2$, если $\Im\tau > 0$. Этому соотношению теории Вейерштрасса должно отвечать некоторое соотношение в теории Якоби. В нем должны участвовать величины K, K', E, E' вместо величин ω, ω', η, η'.

Это принадлежащее Лежандру и носящее его имя соотношение имеет вид

$$EK' + E'K - KK' = \pi/2.$$

Чтобы доказать соотношение Лежандра, выведем некоторые формулы преобразования функций $Z(u)$ и $E(u)$, связанные с переходом от τ к $\tau' = -1/\tau$. Поэтому вместо $Z(u)$, $E(u)$ мы будем писать $Z(u;\ k)$, $E(u;\ k)$, помня, что переходу от τ к τ' отвечает переход от k к k'.

В § 22 было доказано, что

$$\vartheta_0(\tau'v \mid \tau') = \sqrt{-i\tau}\,\vartheta_2(v \mid \tau)\,e^{-\pi i\tau' v^2}.$$

Заменяя здесь v на $u/(2K)$, получим

$$\vartheta_0\left(\frac{iu}{2K'}\middle|\,\tau'\right) = \sqrt{-i\tau}\,\vartheta_2\left(\frac{u}{2K}\middle|\,\tau\right)e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}}$$

или

$$\Theta(iu;\ k') = \sqrt{-i\tau}\,H_1(u;\ k)\,e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}}.$$

Величина $H_1(u;\ k)$ равна

$$\sqrt{\frac{k}{k'}}\,\mathrm{cn}\,(u;\ k)\,\Theta(u;\ k).$$

Поэтому

$$\Theta(iu;\ k') = C\,\mathrm{cn}\,(u;\ k)\,\Theta(u;\ k)\,e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}}.$$

Отсюда, беря логарифмическую производную по u, получаем

$$i\,Z(iu;\ k') = -\frac{\mathrm{sn}\,(u;\ k)\,\mathrm{dn}\,(u;\ k)}{\mathrm{cn}\,(u;\ k)} + Z(u;\ k) + \frac{\pi u}{2KK'}. \qquad (2)$$

Заметим теперь, что

$$\frac{d}{du}\frac{\mathrm{sn}\,(u;\ k)\,\mathrm{dn}\,(u;\ k)}{\mathrm{cn}\,(u;\ k)} = -1 + \mathrm{dn}^2(u;\ k) + \frac{\mathrm{dn}^2(u;\ k)}{\mathrm{cn}^2(u;\ k)}.$$

Поэтому из тождества (1) § 25 следует, что

$$\frac{d}{du}\frac{\mathrm{sn}\,(u;\ k)\,\mathrm{dn}\,(u;\ k)}{\mathrm{cn}\,(u;\ k)} = -1 + \mathrm{dn}^2(u;\ k) + \mathrm{dn}^2(iu;\ k').$$

А так как

$$E(u;\ k) = \int_0^u \mathrm{dn}^2(u;\ k)\,du,$$

$$E(iu;\ k') = i\int_0^u \mathrm{dn}^2(iu;\ k')\,du,$$

то

$$\frac{\mathrm{sn}\,(u;\ k)\,\mathrm{dn}\,(u;\ k)}{\mathrm{cn}\,(u;\ k)} = -u + E(u;\ k) - i\,E(iu;\ k'),$$

и, значит, равенство (2) можно представить в виде

$$i\{Z(iu;\ k') - E(iu;\ k')\} = u\left(1 + \frac{\pi}{2KK'}\right) + \{Z(u;\ k) - E(u;\ k)\}. \qquad (3)$$

В силу формулы (1) из соотношения (3) следует

$$-\frac{E'}{K'}u=\frac{E}{K}u-u\left(1+\frac{\pi}{2KK'}\right);$$

отсюда

$$-E'K=EK'-KK'-\pi/2,$$

что и представляет формулу Лежандра, которая, таким образом, доказана [1]).

Заканчивая настоящий параграф, отметим соотношения

$$\left.\begin{aligned}E(u+2K)&=E(u)+2E,\\ E(u+2iK')&=E(u)+2i(K'-E').\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

Здесь $E(u)=E(u;\,k)$. Из этих соотношений следует, что величины E, $i(K'-E')$ играют в теории Якоби ту же роль, что величины η, η' в теории Вейерштрасса. Первое из соотношений (4) следует из (1) в силу того, что

$$Z(u+2K)=Z(u).$$

Чтобы получить второе из соотношений (4), нужно взять равенства

$$Z(u+2iK')=Z(u)+Z(2iK'),\quad Z(2iK')=-\frac{\pi i}{K}.$$

Из этих равенств следует, что

$$E(u+2iK')=E(u)+\frac{2i(EK'-\pi/2)}{K},$$

и остается принять во внимание, что в силу соотношения Лежандра

$$\frac{EK'-\pi/2}{K}=K'-E'.$$

32. Вырождение эллиптических функций. Вырождение в элементарные функции происходит, когда один или оба периода становятся бесконечно большими. В первом случае вырожденными функциями будут тригонометрические функции, а во втором — функции рациональные.

[1]) Другое доказательство приведено в § 44.

Допустим, что ω остается конечным, тогда как ω' стремится к бесконечности. Из бесконечного произведения, которым определяется сигма-функция, легко заметить, что при этом вырождении функция $\sigma(u)$ превращается в

$$\frac{2\omega}{\pi}e^{\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi u}{2\omega}\right)^2}\sin\frac{\pi u}{2\omega}.\qquad(1)$$

Подобным образом из рядов, определяющих $\zeta(u)$, $\wp(u)$, легко заметить, что $\zeta(u)$ вырождается в

$$\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2u+\frac{\pi}{2\omega}\operatorname{ctg}\frac{\pi u}{2\omega},\qquad(2)$$

а $\wp(u)$ — в

$$-\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2+\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\frac{1}{\sin^2\frac{\pi u}{2\omega}}.\qquad(3)$$

Дальнейшие формулы, относящиеся к этому случаю, содержит таблица VII.

Если стремится к бесконечности и второй период, то вместо выражений (1) — (3) мы придем к

$$u,\qquad(1')$$

$$1/u,\qquad(2')$$

$$1/u^2,\qquad(3')$$

что можно получить как из выражений (1) — (3), так и непосредственно из определений функций $\sigma(u)$, $\zeta(u)$, $\wp(u)$ с помощью бесконечного произведения и бесконечных рядов.

Перейдем теперь к величинам h, K, K', E, E' как функциям от k^2 и исследуем, как они себя ведут при $k\to 0$

Из равенства

$$K=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

вытекает, что

$$\lim_{k\to 0} K = \pi/2.$$

Подобным образом,

$$\lim_{k\to 0} E = \pi/2 \quad \text{и} \quad \lim_{k\to 0} E' = 1.$$

Обратимся теперь к формуле

$$k^2 = \left(\frac{2h^{1/4} + 2h^{9/4} + \ldots}{1 + 2h + 2h^4 + \ldots}\right)^4.$$

Из этой формулы следует, что

$$\lim_{k\to 0} \frac{h}{k^2} = \frac{1}{16},$$

а, с другой стороны,

$$K' = \frac{\tau}{i} K = -\frac{K}{\pi} \ln h,$$

поэтому

$$K' - \frac{2K}{\pi} \ln \frac{4}{k} = -\frac{K}{\pi} \ln \frac{16h}{k^2}.$$

При $k \to 0$ правая часть стремится к нулю. Следовательно,

$$\lim_{k\to 0} \left(K' - \frac{2K}{\pi} \ln \frac{4}{k}\right) = 0,$$

откуда уже легко заключить, что

$$\lim_{k\to 0} \left(K' - \ln \frac{4}{k}\right) = 0.$$

Поведение рассматриваемых величин при $k^2 \to 1$ в особом исследовании не нуждается, так как $k^2 \to 1$ при $k' \to 0$.

Вырождение функций $\operatorname{sn}(u;\ k)$, $\operatorname{cn}(u;\ k)$, $\operatorname{dn}(u;\ k)$ при $k \to 0$ и $k^2 \to 1$ проще всего исследуется с помощью

интегрального соотношения

$$u = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

связывающего функцию $x = \operatorname{sn}(u;\ k)$ с ее аргументом u. Отсюда видно, что

$$\lim_{k\to 0} \operatorname{sn}(u;\ k) = \sin u.$$

Далее, если

$$\xi = \lim_{k^2\to 1} \operatorname{sn}(u;\ k),$$

то

$$u = \int_0^{\xi} \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\xi}{1-\xi}.$$

Следовательно,

$$\lim_{k^2\to 1} \operatorname{sn}(u;\ k) = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} = \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} u}.$$

33. Простой маятник. Наиболее тривиальным путем, по которому идут приложения эллиптических функций в механике и технике, является введение этих функций для интегрирования дифференциального уравнения или вычисления интеграла. Следуя общепринятой традиции, мы рассмотрим задачу о колебаниях простого маятника как типичный пример на подобного рода приложения.

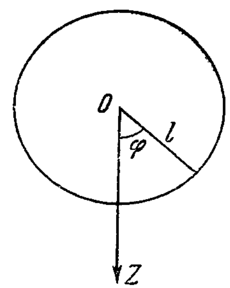


Рис. 10.

Примем за начало координат точку подвеса маятника и направим ось Z вертикально вниз (рис. 10). Пусть длина нити маятника равна l и пусть начальным положением маятника является самое низкое его положение ($z = l$). Скорость маятника назовем v, а в начальный момент v_0 (> 0). Обозначая еще через g ускорение силы тяжести, будем иметь интеграл живых сил

$$\frac{v^2}{2} - gz = -ga. \tag{1}$$

Так как $v = v_0$ при $z = l$, то константа a равна

$$a = l - \frac{v_0^2}{2g}.$$

В качестве неизвестной функции введем вместо z угол φ между осью Z и нитью маятника. Тогда

$$z = l\cos\varphi$$

и

$$v = l\frac{d\varphi}{dt}.$$

Следовательно, уравнение живых сил напишется в виде

$$\frac{l^2}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - gl\cos\varphi = -ga$$

или

$$\frac{l\,d\varphi}{\sqrt{2g(l\cos\varphi - a)}} = dt,$$

откуда

$$t = \frac{l}{\sqrt{2g}}\int_0^\varphi \frac{d\psi}{\sqrt{l\cos\psi - a}}. \tag{2}$$

Будем различать три случая, в зависимости от того, будет ли константа a больше, равна или меньше $-l$.

Первый случай: $a > -l$. Этот случай имеет место, если $v_0 < 2\sqrt{gl}$, т. е. если начальная скорость v_0 не «очень» велика. Введем угол α $(0 < \alpha < \pi)$ с помощью соотношения

$$a = l\cos\alpha.$$

Тогда уравнение (2) примет вид

$$t = \sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^\varphi \frac{d\psi}{\sqrt{\cos\psi - \cos\alpha}}$$

или

$$t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^\varphi \frac{d\psi}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\psi}{2}}}.$$

Полагая

$$k^2 = \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

и

$$\sin\frac{\psi}{2} = x\sin\frac{\alpha}{2}, \quad \sin\frac{\varphi}{2} = u\sin\frac{\alpha}{2},$$

получаем

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^u \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

откуда

$$u = \operatorname{sn}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t;\ k\right).$$

Следовательно,

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{sn}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t;\ \sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

Эта формула выражает закон движения маятника и позволяет легко усмотреть все особенности этого движения.

Во-первых, движение является периодическим и период равен $4\sqrt{l/g}\,K$. Во-вторых, занимая при $t = 0$ самое низкое положение, маятник по прошествии четверти периода будет занимать самое высокое положение ($\varphi = \alpha$). По прошествии еще одной четверти периода он снова будет занимать самое низкое положение. Наконец, по прошествии дальнейшей четверти периода маятник будет занимать самое высокое положение с другой стороны от вертикальной оси ($\varphi = -\alpha$). В-третьих, в самом высоком положении скорость маятника равна нулю.

Второй случай: $a = -l$. Этот случай является предельным для предыдущего и наступает при $v_0 = 2\sqrt{gl}$. Так как теперь $\alpha = \pi$, то мы будем иметь уравнения

$$\sin\frac{\varphi}{2} = u \quad \text{и} \quad t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^u \frac{dx}{1-x^2}.$$

Интегрирование дает

$$t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} \ln\frac{1+u}{1-u},$$

отсюда

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \operatorname{th}\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right).$$

Эта формула показывает, что при увеличении t от 0 до ∞ угол φ будет монотонно увеличиваться от 0 до π, т. е. маятник будет двигаться все время в одном направлении и предельным его положением, которого он никогда не достигнет, будет самое верхнее положение.

Третий случай: $a < -l$. В этом случае, который произойдет при $v_0 > 2\sqrt{gl}$, уравнение (2) перепишем в виде

$$t = \frac{l}{\sqrt{2g}} \int_0^\varphi \frac{d\psi}{\sqrt{l\left(1 - 2\sin^2\frac{\psi}{2}\right) - a}}. \tag{3}$$

Положим

$$k^2 = \frac{2l}{l-a},$$

так что $0 < k^2 < 1$, и

$$\sin\frac{\psi}{2} = x, \quad \sin\frac{\varphi}{2} = u.$$

Тогда (3) примет вид

$$t = \sqrt{\frac{2l}{l-a}}\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^u \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Отсюда

$$u = \operatorname{sn}\left(\sqrt{\frac{l-a}{2l}}\sqrt{\frac{g}{l}}\,t;\ k\right)$$

и, следовательно,

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \operatorname{sn}\left(\sqrt{\frac{l-a}{2l}}\sqrt{\frac{g}{l}}\,t;\ \sqrt{\frac{2l}{l-a}}\right).$$

Эта формула показывает, что маятник достигнет самого высокого положения $z = -l$ при t, равном $\frac{\sqrt{2}\,l}{\sqrt{g(l-a)}}K$.

Однако в этом положении его скорость будет отлична от нуля. Вообще скорость никогда в нуль не обратится, так как это могло бы произойти, как показывает уравнение (1), лишь при $z = a$, но $a < -l$, а z все время лежит в интервале $[-l, l]$. Таким образом, вместо колебательного движения теперь будет происходить движение по окружности все время в одном направлении.

ГЛАВА VI

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

34. Проблема преобразования эллиптических функций. В одном из своих вариантов эта проблема формулируется следующим образом: найти условия, при которых дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}}=\frac{dy}{\sqrt{g(y)}}, \tag{1}$$

где $f(x)$, $g(y)$ — многочлены четвертой или третьей степени, имеет алгебраический интеграл, т. е. интеграл вида

$$F(x,\ y)=0,$$

где F — многочлен от своих аргументов, и найти этот интеграл, если указанные условия выполняются. Иначе говоря, речь идет о преобразовании эллиптического дифференциала

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} \tag{2}$$

в эллиптический дифференциал

$$\frac{dy}{\sqrt{g(y)}} \tag{3}$$

посредством алгебраического соотношения $F(x,\ y)=0$.

С некоторыми частными случаями рассматриваемой общей проблемы мы уже выше имели дело.

Во-первых, в § 17 было показано, что дифференциал (2) можно всегда привести к нормальному виду Вейерштрасса

$$\frac{dy}{\sqrt{4y^3-g_2y-g_3}} \tag{2'}$$

посредством надлежащего линейного преобразования

$$x=\frac{\alpha y+\beta}{\gamma y+\delta}. \tag{4}$$

Таким образом, дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}}=\frac{dy}{\sqrt{4y^3-g_2y-g_3}},$$

являющееся частным случаем уравнения (1), несомненно, допускает линейный интеграл (4), если g_2, g_3 — инварианты многочлена $f(x)$.

Во-вторых, в § 28 была доказана теорема Эйлера, в силу которой уравнение

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}}=\frac{dy}{\sqrt{f(y)}}$$

имеет алгебраический интеграл. Уравнение Эйлера есть тот частный случай уравнения (1), когда $g(y)=f(y)$.

О важности общей проблемы преобразования можно судить уже по этим двум частным случаям, из которых второй выражает одно из основных свойств эллиптических функций — наличие алгебраической теоремы сложения, а первый дает возможность ограничиться исследованием некоторых стандартных форм эллиптических интегралов, что особенно полезно при вычислениях вообще и с помощью таблиц в особенности.

Стремление привести заданный эллиптический дифференциал (2) к простому виду (3), хотя бы с помощью сложной алгебраической зависимости между x и y, возможно, и послужило стимулом для развития общей теории преобразования эллиптических функций, которая была создана главным образом трудами Абеля и Якоби.

Для исследования общей проблемы преобразования полезно вначале эту проблему редуцировать к некоторым более простым проблемам.

Первое упрощение, которое мы вправе сделать, состоит в замене уравнения (1) уравнением

$$\frac{dx}{\sqrt{4x(1-x)(1-k^2x)}}=M\frac{dy}{\sqrt{4y(1-y)(1-\lambda^2y)}}, \tag{5}$$

где M — константа.

Действительно, как было показано в § 24, линейное преобразование

$$y=e_3+\frac{e_1-e_3}{z}$$

переводит дифференциал (2′) в дифференциал

$$-\frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}\frac{dz}{\sqrt{4z(1-z)(1-k^2z)}},$$

где

$$k^2=\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}.$$

Если к подобному виду преобразовать обе части уравнения (1), то и получится уравнение (5).

Второе упрощение состоит в том, что мы ограничимся отысканием того интеграла уравнения (5), который точке $x=0$ относит точку $y=0$, иначе говоря, отысканием алгебраической зависимости между x и y, которая вытекает из соотношения

$$\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{4t(1-t)(1-k^2t)}}=M\int_0^y\frac{dt}{\sqrt{4t(1-t)(1-\lambda^2t)}}. \tag{6}$$

Действительно, общее соотношение между x и y имеет вид

$$\int_a^z\frac{dt}{\sqrt{4t(1-t)(1-k^2t)}}=M\int_0^y\frac{dt}{\sqrt{4t(1-t)(1-\lambda^2t)}},$$

где a — константа. Если мы можем найти алгебраическую зависимость между z и y, которая вытекает из частного

соотношения

$$\int_0^z\frac{dt}{\sqrt{4t(1-t)(1-k^2t)}}=M\int_0^y\frac{dt}{\sqrt{4t(1-t)(1-\lambda^2t)}},$$

то все сведется к отысканию алгебраической зависимости между x и z, которая вытекает из соотношения

$$\int_0^z\frac{dt}{\sqrt{4t(1-t)(1-k^2t)}}=$$

$$=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{4t(1-t)(1-k^2t)}}-\int_0^a\frac{dt}{\sqrt{4t(1-t)(1-k^2t)}}.$$

Этот последний вопрос решается с помощью теоремы Эйлера (теоремы сложения эллиптических функций).

35. Редукция общей проблемы. В соответствии с рассмотрениями § 34 возьмем уравнение

$$\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{4t(1-t)(1-k^2t)}}=M\int_0^y\frac{dt}{\sqrt{4t(1-t)(1-\lambda^2t)}}. \tag{1}$$

Полагая

$$\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{4t(1-t)(1-k^2t)}}=u,$$

заменим уравнение (1) параметрическими уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x&=\operatorname{sn}^2(u;\ k)\equiv\varphi(u),\\ y&=\operatorname{sn}^2\left(\frac{u}{M};\ \lambda\right)\equiv\psi(u).\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Теперь наша задача состоит в отыскании условий, при которых две эллиптические функции $\varphi(u)$, $\psi(u)$ связаны между собой алгебраическим соотношением.

До перехода к параметрическим уравнениям (2) искомыми условиями могли быть некоторые зависимости между параметрами k, λ, M. Теперь можно искать эти условия либо в виде зависимостей между параметрами k, λ, M, либо в виде зависимостей между периодами 2ω, $2\omega'$ функции $\varphi(u)$ и периодами $2\widetilde{\omega}$, $2\widetilde{\omega}'$ функции $\psi(u)$.

Мы увидим, что, в отличие от сложных зависимостей между параметрами k, λ, M, зависимости между периодами имеют простую и легко обозримую форму, благодаря чему и удается сначала расщепить проблему на некоторые частные проблемы, а затем эти частные проблемы решить общими методами теории эллиптических функций.

Итак, пусть между функциями $x=\varphi(u)$, $y=\psi(u)$, имеется алгебраическая зависимость $F(\varphi(u), \psi(u))=0$. Заменяя в этом тождестве u на $u+2m\omega'$, где $m=\pm 1, \pm 2, \ldots$, получим бесчисленное множество тождеств

$$F(\varphi(u),\ \psi(u+2m\omega'))=0.$$

Если $F(x, y)=0$ есть уравнение n-й степени относительно y, то при данном x для y получается не более n различных значений. Следовательно, среди значений функции $\psi(u)$ в точках

$$v,\quad v\pm 2\omega',\quad v\pm 4\omega',\ \ldots \tag{3}$$

различных чисел будет не больше n. Это возможно лишь в случае, когда среди чисел (3) имеются сравнимые по модулю периодов $2\widetilde{\omega}$, $2\widetilde{\omega}'$. Допуская, что

$$v+2b\omega'=v+2a\omega'+2\alpha\widetilde{\omega}'+2\beta\widetilde{\omega},$$

где a, b, α, β — числа целые, получим соотношение

$$r\omega'=\alpha\widetilde{\omega}'+\beta\widetilde{\omega}$$

и аналогично найдем

$$s\omega=\gamma'\widetilde{\omega}'+\delta\widetilde{\omega}.$$

Таким образом, мы пришли к следующему результату: *если между функциями* (2) *существует алгебраическое соотношение, то периоды этих функций связаны соотношениями*

$$r\omega'=\alpha\widetilde{\omega}'+\beta\widetilde{\omega},\qquad s\omega=\gamma\widetilde{\omega}'+\delta\widetilde{\omega}, \tag{4}$$

где r, s, α, β, γ, δ — числа целые.

Справедливо также и обратное предложение: *если между периодами функций* (2) *существуют зависимости* (4) *с целыми коэффициентами, то функции* (2) *связаны между собой алгебраическим соотношением.*

Для доказательства положим

$$\begin{cases}\Omega'=r\omega',\\ \Omega=s\omega,\end{cases}\quad \text{так что}\quad \begin{cases}\Omega'=\alpha\widetilde{\omega}'+\beta\widetilde{\omega},\\ \Omega=\gamma\widetilde{\omega}'+\delta\widetilde{\omega}.\end{cases}$$

Построим функцию $\Phi(u)=\wp(u \mid \Omega, \Omega')$. Так как каждая из функций $\varphi(u)$, $\psi(u)$ четная и имеет периоды 2Ω, $2\Omega'$, то каждая из этих функций выражается рационально через функцию $\Phi(u)$:

$$\varphi(u)=R_1(\Phi(u)),\quad \psi(u)=R_2(\Phi(u)).$$

Исключая из этих соотношений функцию $\Phi(u)$, мы и получим алгебраическую зависимость между функциями $\varphi(u)$, $\psi(u)$. Таким образом, наше утверждение доказано.

Попутно мы доказали важное свойство тех алгебраических уравнений

$$F(x,\ y)=0, \tag{5}$$

к которым приводит уравнение (1), т. е. уравнений теории преобразования эллиптических функций: эти уравнения допускают параметрическое представление

$$x=R_1(z),\quad y=R_2(z), \tag{6}$$

где R_1, R_2 — рациональные функции.

Алгебраические кривые (5), координаты точек которых допускают представление (6), носят название *уникурсальных* кривых. Они обладают многими замечательными свойствами.

Из наших рассмотрений вытекает важное следствие: можно ограничиться изучением одних только рациональных преобразований. Эти последние отвечают таким преобразованиям периодов, которые выражаются формулами

$$\omega'=\alpha\widetilde{\omega}'+\beta\widetilde{\omega},\quad \omega=\gamma\widetilde{\omega}'+\delta\widetilde{\omega},$$

где α, β, γ, δ — целые числа, причем определитель $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = n$ мы всегда будем считать положительным.

Площадь параллелограмма периодов 2ω, $2\omega'$ в n раз больше площади параллелограмма периодов $2\tilde{\omega}$, $2\tilde{\omega}'$. Мы будем рассматриваемое преобразование называть *преобразованием n-й степени.* С преобразованием первой степени ($n = 1$) мы имели дело в §§ 8 и 9 при изучении модулярной группы и модулярной функции, а также в § 22, где изучено преобразование тэта-функций. В § 9, в частности, установлено, что любое преобразование первой степени является результатом последовательного применения двух основных (или главных) преобразований первой степени:

$$\omega' = \tilde{\omega}' + \tilde{\omega}, \quad \omega = \tilde{\omega}; \tag{S}$$

$$\omega' = -\tilde{\omega}, \quad \omega = \tilde{\omega}'. \tag{T}$$

Оказывается, что *любое преобразование n-й степени можно получить путем повторного применения преобразований первой степени и следующих двух преобразований (так называемых главных преобразований m-й степени)*:

$$\left\{\begin{aligned} \omega' &= \tilde{\omega}', \\ \omega &= m\tilde{\omega} \end{aligned}\right. \quad \text{или} \quad \left\{\begin{aligned} \tilde{\omega}' &= \omega', \\ \tilde{\omega} &= \frac{1}{m}\omega \end{aligned}\right. \tag{I}$$

и

$$\left\{\begin{aligned} \omega' &= m\tilde{\omega}', \\ \omega &= \tilde{\omega} \end{aligned}\right. \quad \text{или} \quad \left\{\begin{aligned} \tilde{\omega}' &= \frac{1}{m}\omega', \\ \tilde{\omega} &= \omega, \end{aligned}\right. \tag{II}$$

где m — натуральное число. Первое из этих преобразований состоит в делении на целое число m первого периода (2ω), второе — в делении второго периода ($2\omega'$).

Докажем это утверждение. Имея преобразование

$$\omega' = \alpha\tilde{\omega}' + \beta\tilde{\omega}, \quad \omega = \gamma\tilde{\omega}' + \delta\tilde{\omega},$$

обозначим через r общий наибольший делитель чисел α, β так, что $\alpha = ra$, $\beta = rb$, где a, b — взаимно простые числа. Существуют такие целые числа c, d, что $ad - bc = 1$. Положим

$$\omega_1' = a\tilde{\omega}' + b\tilde{\omega}, \quad \omega_1 = c\tilde{\omega}' + d\tilde{\omega}.$$

Тогда

$$\omega' = r\omega_1', \quad \omega = q\omega_1' + s\omega_1. \tag{7}$$

Переход от пары $(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}')$ к паре (ω_1, ω_1') осуществляется преобразованием первой степени. Поэтому нам надлежит рассмотреть лишь преобразование (7). Принимая для определенности $r > 0$, положим

$$\left\{\begin{aligned} \omega' &= r\omega_3', \\ \omega &= \omega_3, \end{aligned}\right. \quad \left\{\begin{aligned} \omega_2' &= \omega_1', \\ \omega_2 &= s\omega_1. \end{aligned}\right.$$

Мы имеем здесь преобразования деления второго периода пары $(2\omega, 2\omega')$ и первого периода пары $(2\omega_2, 2\omega_2')$. С помощью этих преобразований (7) принимает вид

$$\omega_3' = \omega_2', \quad \omega_3 = q\omega_2' + \omega_3,$$

что является преобразованием первой степени.

Мы видим, что переход от периодов $(2\omega, 2\omega')$ к периодам $(2\tilde{\omega}, 2\tilde{\omega}')$ расщепляется на следующие преобразования: деление второго периода, затем преобразование первой степени, затем деление первого периода и, наконец, снова преобразование первой степени.

Таким образом, наше утверждение доказано.

Нетрудно проследить, что $n = r\cdot s$. Мы видим также, что, рассматривая преобразования (I), (II), можно принять, что m — число простое и, во всяком случае, можно рассмотреть отдельно случай нечетного m и случай $m = 2$.

Строго говоря, рассмотрение обоих преобразований (I) и (II) не является необходимым, так как, например, преобразование (II) сводится к преобразованию (I) и преобразованиям первой степени.

Мы проиллюстрируем это замечание в § 39. Однако выгоднее преобразование (II) рассматривать непосредственно, не сводя его к другим преобразованиям.

36. Первое главное преобразование первой степени. Рассмотрим функции

$$x = \operatorname{sn}^2(u;\ k), \quad y = \operatorname{sn}^2(u/M;\ \lambda).$$

Периодами функции $\mathrm{sn}^2(u;\ k)$ являются $2K$, $2iK'$. Равным образом периоды функции $\mathrm{sn}^2(v;\ \lambda)$ обозначим $2L$, $2iL'$. Таким образом, y имеет периоды $2ML$, $2iML'$. Для первого преобразования первой степени

$$iML' = iK' + K, \quad ML = K.$$

Рассмотрим отношение y/x. Это — четная эллиптическая функция с периодами $2K$, $2iK'$. Следовательно, она выражается рационально через $\mathrm{sn}^2(u;\ k)$. В параллелограмме периодов $2K$, $2iK'$ функция y/x имеет двукратный полюс в точке $u = iML' = iK' + K$, так как в этой точке имеет полюс второго порядка числитель y, а знаменатель отличен от нуля и конечен. Далее, функция y/x имеет нуль второго порядка в точке $u = iK'$, ибо в этой точке числитель конечен и отличен от нуля, а знаменатель имеет полюс второго порядка. На основании сказанного

$$\frac{y}{x} = \frac{C}{\mathrm{sn}^2(u;\ k) - \mathrm{sn}^2(iK' + K;\ k)}$$

или

$$\frac{y}{x} = \frac{A}{1 - k^2 x},$$

где A, как и C, константа. Чтобы определить эту константу, положим $u = K$. Это даст

$$1 = \frac{A}{1 - k^2}.$$

Итак, $A = k'^2$ и, значит,

$$\frac{\mathrm{sn}^2(u/M;\ \lambda)}{\mathrm{sn}^2(u;\ k)} = \frac{k'^2}{1 - k^2\,\mathrm{sn}^2(u;\ k)}, \tag{1}$$

т. е.

$$\mathrm{sn}\left(\frac{u}{M};\ \lambda\right) = \frac{k'\,\mathrm{sn}(u;\ k)}{\mathrm{dn}(u;\ k)}.$$

Остается выразить через k величины M и λ. Разделив написанное равенство на u и приближая u к нулю, получим

$$1/M = k'.$$

Далее, полагая в формуле (1): $u = 2K + iK'$, получим

$$\frac{1}{\lambda^2} = -\frac{k'^2}{k^2}.$$

Следовательно,

$$\lambda = \frac{ik}{k'}.$$

Итак,

$$\mathrm{sn}\left(k'u;\ \frac{ik}{k'}\right) = \frac{k'\,\mathrm{sn}(u;\ k)}{\mathrm{dn}(u;\ k)}.$$

Аналогично (или с помощью (1)) доказывается, что

$$\mathrm{cn}\left(k'u;\ \frac{ik}{k'}\right) = \frac{\mathrm{cn}(u;\ k)}{\mathrm{dn}(u;\ k)},$$

$$\mathrm{dn}\left(k'u;\ \frac{ik}{k'}\right) = \frac{1}{\mathrm{dn}(u;\ k)}.$$

Положим, что k изменяется в интервале от 0 до 1. Это, как мы уже упоминали, есть наиболее важный для приложений случай. Величина

$$\frac{k}{\sqrt{1 - k^2}} = \frac{k}{k'}$$

будет при этом монотонно изменяться от 0 до ∞. Таким образом, полученные нами в настоящем параграфе формулы переводят якобиевы функции с чисто мнимым модулем в якобиевы функции с модулем из интервала [0, 1].

Заметим, что формулы преобразования, найденные нами в настоящем параграфе, можно было бы получить из формул преобразования тэта-функций, выведенных в § 22. Это же замечание относится к формулам, которые получены в следующем параграфе.

37. Второе главное преобразование первой степени. Это преобразование соответствует следующим соотношениям:

$$ML = iK', \quad iML' = -K.$$

При этом, как и выше, $2K$, $2iK'$ — периоды функции

$$x = \operatorname{sn}^2(u;\ k),$$

а $2ML$, $2iML'$ — периоды функции

$$y = \operatorname{sn}^2(u/M;\ \lambda).$$

Снова рассматриваем отношение y/x. Это — рациональная функция от $\operatorname{sn}^2(u;\ k)$, которая в параллелограмме периодов $2K$, $2iK'$ имеет двукратный нуль в точке $u = iK'$ и двукратный полюс в точке $u = K$. Поэтому

$$\frac{y}{x} = \frac{A}{\operatorname{sn}^2(u;\ k) - 1}.$$

Приближая u к нулю, получим

$$1/M^2 = -A.$$

Так как

$$y = \frac{A\operatorname{sn}^2(u;\ k)}{\operatorname{sn}^2(u;\ k) - 1},$$

то, полагая $u = iK'$, находим $1 = A$.

Заменяя еще u на $-K + iK'$, получим

$$\operatorname{sn}^2(L + iL';\ \lambda) = \frac{\operatorname{sn}^2(K + iK';\ k)}{\operatorname{sn}^2(K + iK';\ k) - 1}$$

или

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{1/k^2}{1/k^2 - 1}.$$

Отсюда следует, что $\lambda = k'$, а так как $M = \pm i$, то полученный нами результат гласит:

$$\operatorname{sn}(iu;\ k') = i\,\frac{\operatorname{sn}(u;\ k)}{\operatorname{cn}(u;\ k)}. \qquad (1)$$

Аналогично (или на основании (1)) доказывается, что

$$\operatorname{cn}(iu;\ k') = \frac{1}{\operatorname{cn}(u;\ k)}, \quad \operatorname{dn}(iu;\ k') = \frac{\operatorname{dn}(u;\ k)}{\operatorname{cn}(u;\ k)}.$$

Значение этих формул состоит в том, что они переводят функции Якоби от чисто мнимого аргумента в функции Якоби от вещественного аргумента.

38. Преобразование Ландена. Первое главное преобразование второй степени было открыто еще в 1775 году Ланденом [1]). Этому преобразованию отвечает следующая схема:

$$x = \operatorname{sn}^2(u;\ k); \qquad 2K, \qquad 2iK',$$

$$y = \operatorname{sn}^2(u/M;\ \lambda); \quad 2ML = K, \quad 2iML' = 2iK',$$

из которой видно, что речь идет о делении на два первого периода функции x.

Отношение y/x есть рациональная функция от $\operatorname{sn}^2(u;\ k)$. В параллелограмме периодов $2K$, $2iK'$ эта функция имеет двукратный нуль в точке $u = K$ и двукратный полюс в точке $u = K + iK'$. Поэтому

$$\frac{y}{x} = C\,\frac{\operatorname{sn}^2(K;\ k) - \operatorname{sn}^2(u;\ k)}{\operatorname{sn}^2(K + iK';\ k) - \operatorname{sn}^2(u;\ k)} \quad \text{или} \quad \frac{y}{x} = \frac{A(1 - x)}{1 - k^2x}.$$

Полагая последовательно $u = 0$, iK', $K/2$, получим следующие равенства:

$$\frac{1}{M^2} = A, \quad \frac{k^2M^2}{\lambda^2} = \frac{A}{k^2}, \quad 1 = \frac{A\operatorname{sn}^2(K/2;\ k)\operatorname{cn}^2(K/2;\ k)}{\operatorname{dn}^2(K/2;\ k)} \qquad (1)$$

Последнее из этих равенств можно привести к виду

$$A = (1 + k')^2,$$

если воспользоваться (см. упражнение в конце § 27) формулой

$$\operatorname{sn}\left(\frac{K}{2};\ k\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + k'}}.$$

---

[1]) Ланден, разумеется, занимался не эллиптическими функциями, а эллиптическими интегралами.

Теперь первые два уравнения (1) дают:

$$M=\frac{1}{1+k'}, \quad \lambda=\frac{k^2}{(1+k')^2}=\frac{1-k'}{1+k'}.$$

Полученный нами результат гласит:

$$\operatorname{sn}\left[u(1+k');\ \frac{1-k'}{1+k'}\right]=\frac{(1+k')\operatorname{sn}(u;\ k)\operatorname{cn}(u;\ k)}{\operatorname{dn}(u;\ k)}.$$

Дальнейшие формулы имеют вид

$$\operatorname{cn}\left[u(1+k');\ \frac{1-k'}{1+k'}\right]=\frac{1-(1+k')\operatorname{sn}^2(u;\ k)}{\operatorname{dn}(u;\ k)},$$

$$\operatorname{dn}\left[u(1+k');\ \frac{1-k'}{1+k'}\right]=\frac{1-(1-k')\operatorname{sn}^2(u;\ k)}{\operatorname{dn}(u;\ k)}.$$

Проверку их предоставляем читателю.

39. Преобразование Гаусса. Это преобразование состоит в делении второго периода на два. Поэтому его можно получить, комбинируя с преобразованиями первой степени преобразование Ландена (состоящее в делении первого периода на два).

Исходным модулем является, как и выше, k, а после преобразования мы приходим к модулю λ. Возьмем формулы тех преобразований первой степени, которые меняют местами старые и новые периоды. Они имеют вид

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{sn}(iu;\ k')&=i\frac{\operatorname{sn}(u;\ k)}{\operatorname{cn}(u;\ k)},\\ \operatorname{cn}(iu;\ k')&=\frac{1}{\operatorname{cn}(u;\ k)},\\ \operatorname{dn}(iu;\ k')&=\frac{\operatorname{dn}(u;\ k)}{\operatorname{cn}(u;\ k)};\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

и

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{sn}\left(\frac{iu}{M};\ \lambda'\right)&=i\frac{\operatorname{sn}(u/M;\ \lambda)}{\operatorname{cn}(u/M;\ \lambda)},\\ \operatorname{cn}\left(\frac{iu}{M};\ \lambda'\right)&=\frac{1}{\operatorname{cn}(u/M;\ \lambda)},\\ \operatorname{dn}\left(\frac{iu}{M};\ \lambda'\right)&=\frac{\operatorname{dn}(u/M;\ \lambda)}{\operatorname{cn}(u/M;\ \lambda)}.\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Здесь λ и M пока произвольны. Теперь мы должны потребовать, чтобы левые части (1) и (2) были связаны преобразованием Ландена. Этим определятся λ и M.

Припоминая преобразование Ландена и принимая во внимание, что теперь k' и λ' играют роль прежних k и λ, сразу находим

$$\lambda'=\frac{1-k}{1+k}, \quad M=\frac{1}{1+k}$$

и

$$\lambda=\sqrt{1-\lambda'^2}=\frac{2\sqrt{k}}{1+k}.$$

Таким образом, оба параметра λ, M определены. Формулы преобразования имеют вид

$$\operatorname{sn}\left(\frac{iu}{M};\ \lambda'\right)=\frac{1}{M}\frac{\operatorname{sn}(iu;\ k')\operatorname{cn}(iu;\ k)}{\operatorname{dn}(iu;\ k')},$$

$$\operatorname{cn}\left(\frac{iu}{M};\ \lambda'\right)=\frac{1-(1+k)\operatorname{sn}^2(iu;\ k')}{\operatorname{dn}(iu;\ k)},$$

$$\operatorname{dn}\left(\frac{iu}{M};\ \lambda'\right)=\frac{1-(1-k)\operatorname{sn}^2(iu;\ k')}{\operatorname{dn}(iu;\ k')}$$

Теперь остается использовать соотношения (1) и (2). Это дает:

$$\frac{\operatorname{sn}(u/M;\ \lambda)}{\operatorname{cn}(u/M;\ \lambda)}=\frac{1}{M}\frac{\operatorname{sn}(u;\ k)}{\operatorname{cn}(u;\ k)\operatorname{dn}(u;\ k)},$$

$$\frac{1}{\operatorname{cn}(u/M;\ \lambda)}=\frac{\operatorname{cn}^2(u;\ k)+(1+k)\operatorname{sn}^2(u;\ k)}{\operatorname{cn}(u;\ k)\operatorname{dn}(u;\ k)},$$

$$\frac{\operatorname{dn}(u/M;\ \lambda)}{\operatorname{cn}(u/M;\ \lambda)}=\frac{\operatorname{cn}^2(u;\ k)+(1-k)\operatorname{sn}^2(u;\ k)}{\operatorname{cn}(u;\ k)\operatorname{dn}(u;\ k)}$$

и окончательные формулы имеют вид

$$\operatorname{sn}(u/M;\ \lambda)=\frac{1}{M}\frac{\operatorname{sn}(u;\ k)}{1+k\operatorname{sn}^2(u;\ k)},$$

$$\operatorname{cn}(u/M;\ \lambda)=\frac{\operatorname{cn}(u;\ k)\operatorname{dn}(u;\ k)}{1+k\operatorname{sn}^2(u;\ k)},$$

$$\operatorname{dn}(u/M;\ \lambda)=\frac{1-k\operatorname{sn}^2(u;\ k)}{1+k\operatorname{sn}^2(u;\ k)}.$$

Мы свели преобразование Гаусса к преобразованию Ландена умышленно, чтобы проиллюстрировать замечание, сделанное в конце § 35. Непосредственная трактовка привела бы к окончательным формулам быстрее.

40. Главные преобразования n-й степени. Эти преобразования состоят в делении на число n одного из периодов. Метод для получения отвечающих этому преобразованию формул достаточно разъяснен в предшествующих параграфах. Поэтому мы ограничимся здесь подробным разбором всего лишь одного случая. Полную сводку формул, относящихся к преобразованиям n-й степени, читатель найдет в таблицах XXII и XXIII.

Рассмотрим деление на число n второго периода, причем n может быть как четным, так и нечетным. Мы имеем

следующую схему:

$$L=\frac{K}{M},\qquad L'=\frac{K'}{nM},$$

$$x=\operatorname{sn}(u;\ k),\qquad y=\operatorname{sn}(u/M;\ \lambda).$$

Отношение y/x есть четная функция от u и, как легко видеть, имеет периоды $2K$, $2iK'$, так как

$$\operatorname{sn}(u+2mK+2m'iK';\ k)=(-1)^m\operatorname{sn}(u;\ k),$$

$$\operatorname{sn}\left(\frac{u+2mK+2m'iK'}{M};\ \lambda\right)=(-1)^m\operatorname{sn}\left(\frac{u}{M};\ \lambda\right).$$

Следовательно, y/x есть рациональная функция от $\operatorname{sn}^2(u;\ k)$. В фундаментальном параллелограмме периодов $2K$, $2iK'$ рассматриваемая функция имеет простые нули в точках

$$u=\frac{i\mu K'}{n}\left(\mu=\pm 2,\ \pm 4,\ \ldots,\ \pm 2\left[\frac{n}{2}\right]\right)$$

и простые полюсы в точках

$$u=\frac{i\nu K'}{n}\left\{\nu=\pm 1,\ \pm 3,\ \ldots,\ \pm\left(2\left[\frac{n}{2}\right]-1\right)\right\}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\operatorname{sn}\left(\dfrac{u}{M};\ \lambda\right)}{\operatorname{sn}(u;\ k)}=\frac{1}{M}\prod_{r=1}^{[\frac{n}{2}]}\frac{1-\dfrac{\operatorname{sn}^2(u;\ k)}{\operatorname{sn}^2\left(\dfrac{2ir}{n}K';\ k\right)}}{1-\dfrac{\operatorname{sn}^2(u;\ k)}{\operatorname{sn}^2\left(\dfrac{2r-1}{n}iK';\ k\right)}}.\tag{1}$$

Чтобы определить M, положим $u=K$. Это дает:

$$M=\prod_{r=1}^{[\frac{n}{2}]}\frac{\operatorname{cn}^2\left(\dfrac{2ir}{n}K';\ k\right)\operatorname{sn}^2\left(\dfrac{2r-1}{n}iK';\ k\right)}{\operatorname{sn}^2\left(\dfrac{2ir}{n}K';\ k\right)\operatorname{cn}^2\left(\dfrac{2r-1}{n}iK';\ k\right)}.$$

Замечая, что

$$\frac{\operatorname{sn}(iu;\ k)}{\operatorname{cn}(iu;\ k)} = i \operatorname{sn}(u;\ k'), \tag{2}$$

можем полученное выражение переписать следующим образом:

$$M = \prod_{r=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{\operatorname{sn}^2\left(\frac{2r-1}{n} K';\ k'\right)}{\operatorname{sn}^2\left(\frac{2r}{n} K';\ k'\right)}. \tag{3}$$

Для определения λ положим в формуле (1)

$$u = K + iK'/n.$$

Так как

$$\operatorname{sn}\left(K + \frac{iK'}{n};\ k\right) = \frac{1}{\operatorname{dn}(K'/n;\ k')},$$

$$\operatorname{sn}(L + iL';\ \lambda) = \frac{1}{\lambda},$$

то, снова используя (2), получим

$$\frac{\operatorname{dn}\left(\frac{K'}{n};\ k'\right)}{\lambda} = \frac{1}{M} \prod_{r=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{1 + \dfrac{\operatorname{cn}^2\left(\frac{2r}{n} K';\ k'\right)}{\operatorname{dn}^2\left(\frac{K'}{n};\ k'\right) \operatorname{sn}^2\left(\frac{2r}{n} K';\ k'\right)}}{1 + \dfrac{\operatorname{cn}^2\left(\frac{2r-1}{n} K';\ k'\right)}{\operatorname{dn}^2\left(\frac{K'}{n};\ k'\right) \operatorname{sn}^2\left(\frac{2r-1}{n} K';\ k'\right)}}.$$

Заметим теперь, что

$$\operatorname{cn}^2\alpha + \operatorname{dn}^2\beta \operatorname{sn}^2\alpha = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2\alpha \operatorname{sn}^2\beta = \frac{\Theta^2(0)\,\Theta(\alpha+\beta)\,\Theta(\alpha-\beta)}{\Theta^2(\alpha)\,\Theta^2(\beta)}.$$

В силу этого соотношения, а также формулы (3)

$$\lambda = \operatorname{dn}\left(\frac{K'}{n};\ k'\right) \prod_{r=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{\Theta^3\left(\frac{2r}{n} K' \mid \tau'\right) \Theta\left(\frac{2r-2}{n} K' \mid \tau'\right)}{\Theta^3\left(\frac{2r-1}{n} K' \mid \tau'\right) \Theta\left(\frac{2r+1}{n} K' \mid \tau'\right)}.$$

Примем теперь во внимание, что

$$\operatorname{dn}\left(\frac{K'}{n};\ k'\right) = \frac{\Theta\left(\frac{n \pm 1}{n} K' \mid \tau'\right) \Theta(0 \mid \tau')}{\Theta\left(\frac{K'}{n} \mid \tau'\right) \Theta(K' \mid \tau')}.$$

Это позволяет придать модулю λ следующий вид:

$$\lambda = \left\{ \prod_{r=1}^{n} \frac{\Theta\left(\frac{2r}{n} K' \mid \tau'\right)}{\Theta\left(\frac{2r-1}{n} K' \mid \tau'\right)} \right\}^2$$

как при четном, так и при нечетном n.

ГЛАВА VII

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ОБ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛАХ

41. Эллиптические кривые общего вида. Рассмотрим уравнение

$$w^2 = f(z), \tag{1}$$

где $f(z) = a_0 z^4 + 4a_1 z^3 + 6a_2 z^2 + 4a_3 z + a_4$ есть произвольный многочлен четвертой степени без кратных корней. Множество всех пар (z, w), удовлетворяющих уравнению (1), называют *эллиптической кривой*, а каждую пару (z, w) — точкой этой кривой [1]).

С эллиптической кривой связаны эллиптические интегралы и в первую очередь интеграл первого рода

$$u = \int_c^z \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}, \tag{2}$$

вместо которого мы можем рассматривать дифференциальное уравнение

$$\frac{dz}{du} = \sqrt{f(z)}. \tag{3}$$

В частном случае, когда (1) имеет канонический вид Вейерштрасса, т. е.

$$f(z) = 4z^3 - g_2 z - g_3,$$

нами были получены выше следующие результаты:

a) кривая (1) допускает так называемую униформизацию с помощью эллиптических функций, а именно, если

[1]) Эллиптическая кривая является частным случаем общей алгебраической кривой (см. § 54).

положить

$$z = \wp(u), \quad w = \wp'(u),$$

то пара (z, w) пробегает всю кривую, когда параметр u пробегает параллелограмм периодов;

b) в частности, корни уравнения $f(z) = 0$ могут быть представлены с помощью эллиптических функций, а именно,

$$e_k = \wp(\omega_k) \qquad (k = 1,\ 2,\ 3);$$

c) задача обращения интеграла (2) решается в эллиптических функциях; точнее говоря, верхний предел z в формуле (2) равен $\wp(u)$, если $c = \infty$, и равен $\wp(u + \omega_k)$, если $c = e_k$ $(k = 1,\ 2,\ 3)$, или, иначе: функции $z = \wp(u)$, $z = \wp(u + \omega_k)$ $(k = 1,\ 2,\ 3)$ представляют решения уравнения (3) при начальном условии, соответственно, $z(0) = \infty$, $z(0) = e_k$ $(k = 1,\ 2,\ 3)$.

Так как с помощью надлежащего преобразования

$$z = \frac{\alpha z_1 + \beta}{\gamma z_1 + \delta}, \qquad w = (\gamma z_1 + \delta)^2 w_1 \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

кривую (1) можно преобразовать в каноническую кривую

$$w_1^2 = 4z_1^3 - g_2 z_1 - g_3,$$

то все три перечисленных факта в некоторой модифицированной формулировке имеют место для произвольной эллиптической кривой (1).

Однако нужное преобразование требует знания какого-нибудь из корней многочлена $f(z)$, и следовательно, не может привести к полезным для исследования формулам, если коэффициенты многочлена $f(z)$ не имеют определенных числовых значений, а являются параметрами.

В настоящем параграфе мы покажем, что эти трудности можно обойти.

Так как случай, когда $a_0 = 0$, не представляет интереса, то примем, очевидно, не нарушая общности, что $a_0 = 1$. Далее, мы можем принять, что $a_1 = 0$, так как это достигается с помощью преобразования $z = z_1 - a_1$, которое приведет к замене старых коэффициентов некоторыми целыми рациональными функциями от них.

Итак, примем, что заданное уравнение имеет вид

$$w^2 = z^4 - 6Az^2 + 4Bz + C, \tag{I}$$

где A, B, C будем считать произвольными коэффициентами.

Напишем инварианты:

$$g_2 = C + 3A^2, \quad g_3 = -AC + A^3 - B^2.$$

Из этих формул следует, что

$$B^2 = 4A^3 - g_2A - g_3, \tag{4}$$

$$C = g_2 - 3A^2. \tag{5}$$

Соотношение (4) показывает, что (A, B) является точкой эллиптической кривой в канонической форме Вейерштрасса. Следовательно, найдется такое v, что

$$A = \wp(v), \quad B = \wp'(v). \tag{II}$$

Поэтому из (5) следует, что

$$C = g_2 - 3[\wp(v)]^2. \tag{III}$$

Мы примем в качестве параметров величины g_2, g_3, v вместо первоначальных величин A, B, C. Уравнение (I) при этом можно переписать в виде

$$w^2 = [z^2 - 3\wp(v)]^2 + 4\wp'(v)z + g_2 - 12[\wp(v)]^2. \tag{I$'$}$$

Теперь вспомним тождество (9) § 15:

$$\left[\wp\left(u - \frac{v}{2}\right) - \wp\left(u + \frac{v}{2}\right)\right]^2 =$$

$$= \left\{\frac{1}{4}\left[\frac{\wp'(u - v/2) - \wp'(v)}{\wp(u - v/2) - \wp(v)}\right]^2 - 3\wp(v)\right\}^2 +$$

$$+ 2\wp'(v)\frac{\wp'(u - v/2) - \wp'(v)}{\wp(u - v/2) - \wp(v)} + g_2 - 12[\wp(v)]^2.$$

Сравнение с уравнением (I′) показывает, что это уравнение будет удовлетворено тождественно, если положить

$$z = \frac{1}{2}\frac{\wp'(u - v/2) - \wp'(v)}{\wp(u - v/2) - \wp(v)}, \tag{IV}$$

$$w = \wp(u - v/2) - \wp(u + v/2). \tag{V}$$

Нетрудно видеть, что требуемое построение уже закончено.

Сформулируем результат.

Имея эллиптическую кривую (I) с инвариантами g_2, g_3, представим ее коэффициенты по формулам (II), (III).

В таком случае униформизация кривой (I) дается формулами (IV), (V); это к пункту a).

Чтобы получить корни многочлена в правой части (I), следует положить $w = 0$ в (V) и найти значения u. Подставляя их в (IV), получим следующие выражения для корней:

$$\left.\begin{aligned} z_0 &= -\frac{1}{2}\frac{\wp'(v/2) + \wp'(v)}{\wp(v/2) - \wp(v)} = \varphi(v), \\ z_k &= \varphi(v + 2\omega_k) \qquad (k = 1,\ 2,\ 3); \end{aligned}\right\} \tag{VI}$$

Это к пункту b).

Наконец, задача обращения решается каждой из формул

$$\left.\begin{aligned} z &= \frac{1}{2}\frac{\wp'(u - v/2) - \wp'(v)}{\wp(u - v/2) - \wp(v)} = \varphi(u,\ v), \\ z &= \varphi(u,\ v + 2\omega_k) \qquad (k = 1,\ 2,\ 3). \end{aligned}\right\} \tag{VII}$$

Действительно, докажем, что $z = \varphi(u, v)$ как функция от u (обращающаяся в z_0 при $u = 0$) удовлетворяет уравнению (3). Но это следует из теоремы сложения для функции $\wp$ (см. таблицу VI):

$$\frac{d}{du}\varphi(u,\ v) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\frac{\wp'(u - v/2) - \wp'(v)}{\wp(u - v/2) - \wp(v)} =$$

$$= \wp(u - v/2) - \wp(u + v/2) = w.$$

Подобным образом $z = \varphi(u, v + 2\omega_k)$ есть решение уравнения (3), обращающееся в z_k при $u = 0$.

Упражнение. Доказать, что формулу (IV) можно заменить на

$$z = \frac{1}{2}\frac{\wp'(u - v/2) + \wp'(u + v/2)}{\wp(u - v/2) - \wp(u + v/2)}, \tag{IV$'$}$$

а формулы (VI) на

$$z_0 = -\frac{1}{2}\frac{\wp''(v/2)}{\wp'(v/2)} = \psi(v),$$

$$z_k = \psi(v + 2\omega_k) \qquad (k = 1,\ 2,\ 3) \tag{VI'}$$

42. Функция $\wp(u)$ с вещественными инвариантами. Если инварианты g_2, g_3 вещественны, то либо все три корня e_1, e_2, e_3 многочлена $4z^3 - g_2 z - g_3$ вещественны, либо один корень вещественный (за него примем e_2), а остальные два — комплексные сопряженные.

В первом случае, который имеет место, если дискриминант положителен, $g_2^3 - 27g_3^2 > 0$, мы перенумеруем корни так, чтобы $e_1 > e_2 > e_3$. Следует иметь в виду, что все корни предполагаются различными; между прочим, это исключает обращение дискриминанта в нуль.

Второй случай будет иметь место, если дискриминант отрицателен.

Эти факты являются непосредственным следствием формулы

$$g_2^3 - 27g_3^2 = 16(e_1 - e_2)^2(e_2 - e_3)^2(e_3 - e_1)^2.$$

Функция $\wp(u)$ с вещественными инвариантами (при любом знаке дискриминанта) имеет на вещественной оси только вещественные значения. Действительно, в случае вещественных инвариантов все коэффициенты разложения

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{20}u^2 + \frac{g_3}{28}u^4 + \ldots$$

вещественны.

Равным образом вещественны значения, принимаемые функцией $\wp(u)$ на мнимой оси, при этом для вычисления полезно соотношение

$$\wp(iu;\ g_2,\ g_3) = -\wp(u;\ g_2,\ -g_3). \tag{1}$$

Займемся теперь выводом выражений для периодов $2\omega_1$, $2\omega_3$ функции $\wp(u)$ через инварианты.

1°. Начнем со случая, когда дискриминант положителен. Из формулы

$$u = \int_{\wp}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}},$$

где под корнем при $x > e_1$ подразумевается его арифметическое значение, вытекает, что при уменьшении $\wp$ от ∞ до e_1 величина u растет монотонно от 0 до ω_1. Следовательно,

$$\omega_1 = \int_{e_1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}. \tag{2}$$

Теперь возьмем функцию $\wp(u;\ g_2,\ -g_3)$ и обозначим ее периоды через $2\tilde{\omega}_1$, $2\tilde{\omega}_3$. Корнями многочлена

$$4x^3 - g_2 x + g_3,$$

расположенными в порядке убывания, будут

$$\tilde{e}_1 = -e_3, \quad \tilde{e}_2 = -e_2, \quad \tilde{e}_3 = -e_1.$$

При этом соотношение (1) показывает, что

$$\tilde{\omega}_1 = \frac{\omega_3}{i}, \quad \tilde{\omega}_3 = -\frac{\omega_1}{i}. \tag{3}$$

По аналогии с формулой (2) можем написать

$$\tilde{\omega}_1 = \int_{\tilde{e}_1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x + g_3}}.$$

Следовательно,

$$\omega_3 = i\int_{-e_3}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x + g_3}}. \tag{4}$$

Таким образом, периоды $2\omega_1$, $2\omega_3$ выражены через инварианты g_2, g_3 в виде интегралов. Мы видим, что $2\omega_1$ — число вещественное, а $2\omega_3$ — число чисто мнимое. Это значит, что в рассмотренном случае положительного дискриминанта параллелограммом периодов является прямоугольник.

Используя связь между функциями Вейерштрасса и функциями Якоби, можем написать

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}}K, \qquad \omega' = \frac{i}{\sqrt{e_1 - e_3}}K',$$

где

$$\sqrt{e_1 - e_3} > 0, \qquad k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}.$$

2°. Перейдем теперь к случаю отрицательного дискриминанта.

Здесь с помощью аналогичных соображений мы получим формулу

$$\omega_2 = \int\limits_{e_2}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}. \tag{5}$$

Снова возьмем функцию $\wp(u;\ g_2,\ -g_3)$. Сохраняя прежние обозначения, получим аналогичную формулу

$$\widetilde{\omega}_2 = \int\limits_{-e_2}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x + g_3}}. \tag{6}$$

Примем теперь во внимание равенства (3), а также, что

$$\omega_2 = -\omega_1 - \omega_3, \quad \widetilde{\omega}_2 = -\widetilde{\omega}_1 - \widetilde{\omega}_3.$$

Мы найдем

$$\omega_1 + \omega_3 = -\omega_2, \quad \omega_1 - \omega_3 = i\widetilde{\omega}_2.$$

Таким образом, складывая и вычитая величины (5), (6), получим периоды $2\omega_1$, $2\omega_3$. Мы видим, что в случае отрицательного дискриминанта периоды $2\omega_1$, $2\omega_3$ — числа сопряженные, откуда следует, что фундаментальным параллелограммом является ромб.

Можно и в случае отрицательного дискриминанта выразить периоды через нормальные эллиптические интегралы в лежандровой форме. С этой целью надлежит положить

$$e_2 - e_3 = \rho(\cos\psi + i\sin\psi),$$

где $\rho > 0$, $0 < \psi < \pi$. Можно показать[1]), что в этих обозначениях

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{\rho}} K, \quad \widetilde{\omega}_2 = \frac{1}{\sqrt{\rho}} K',$$

где $\sqrt{\rho} > 0$, $k^2 = \sin^2(\psi/2)$.

43. Приведение эллиптических интегралов к нормальному виду Якоби в вещественном случае. Будем рассматривать интеграл

$$\int R(z,\ w)\,dz, \tag{1}$$

где R означает рациональную функцию своих аргументов и

$$w^2 = a_0 z^4 + 4a_1 z^3 + 6a_2 z^2 + 4a_3 z + a_4 \equiv f(z).$$

Примем здесь, что коэффициенты a_i — вещественные числа, $a_0 \neq 0$, а также, что многочлен $f(z)$ (не имеющий кратных корней) в некоторых интервалах числовой оси положителен, и будем предполагать, что z изменяется в этих интервалах. Таким образом, w будет иметь только вещественные значения. Если поэтому коэффициенты функции $R(z,\ w)$ вещественны, то и интеграл (1) будет вещественным. В этом случае (который мы называем вещественным

---

[1]) Для этого сделаем в (5) замену переменной

$$x - e_2 = \rho t^2.$$

Мы получим

$$\sqrt{\rho}\,\omega_2 = \int\limits_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+1)^2 - 4k^2t^2}} = \int\limits_0^1 + \int\limits_1^{\infty}.$$

Заменим во втором интеграле правой части t на $1/t$. Это даст

$$\sqrt{\rho}\,\omega_2 = 2\int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(t^2+1)^2 - 4k^2t^2}}.$$

Делая здесь замену переменной $t = \operatorname{tg}(\varphi/2)$, мы и получим

$$\sqrt{\rho}\,\omega_2 = \int\limits_0^1 \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} = K.$$

случаем) желательно привести интеграл к нормальному виду с помощью вещественного преобразования. Подобное преобразование возможно и составляет предмет настоящего параграфа.

Прежде всего заметим, что разложением на линейные множители с последующей их группировкой можно привести многочлен $f(z)$ к виду

$$f(z)=a_0(z^2+2\lambda z+\mu)(z^2+2\rho z+\sigma),$$

где все коэффициенты a_0, λ, μ, ρ, σ снова вещественны. Если не все четыре корня многочлена $f(z)$ вещественны, то это разложение единственно, так как по крайней мере один из квадратных трехчленов должен иметь сопряженные корни. Если же все корни вещественны, то требуемое разложение не единственно. Мы выберем тогда то, для которого корни первого трехчлена больше корней второго.

Теперь могут представиться два случая в зависимости от того, будет ли $\lambda=\rho$ или $\lambda\neq\rho$.

Если $\lambda=\rho$, то мы положим

$$z+\lambda=t$$

и $f(z)$ примет вид

$$f(z)=a_0(t^2+\alpha)(t^2+\beta),$$

где α и β — вещественные числа.

Если же $\lambda\neq\rho$, введем вместо z переменную t по формуле

$$z=\frac{pt+q}{t+1},$$

где p и q — пока неопределенные числа. Многочлен $f(z)$ примет вид

$$f(z)=\frac{a_0}{(t+1)^4}\{(pt+q)^2+2\lambda(pt+q)(t+1)+\mu(t+1)^2\}\times$$
$$\times\{(pt+q)^2+2\rho(pt+q)(t+1)+\sigma(t+1)^2\}.$$

Потребуем, чтобы квадратные трехчлены в фигурных скобках не содержали переменной t в первой степени. Это приводит к следующим двум уравнениям для определения

p и q:

$$\left.\begin{aligned}pq+\lambda(p+q)+\mu=0,\\ pq+\rho(p+q)+\sigma=0.\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

Докажем, что решая эти уравнения, мы получим для p и q вещественные значения. Из уравнений (2) следует, что

$$p+q=-\frac{\mu-\sigma}{\lambda-\rho},\qquad pq=-\frac{\lambda\sigma-\mu\rho}{\lambda-\rho}.$$

Поэтому p и q являются корнями квадратного уравнения

$$X^2+\frac{\mu-\sigma}{\lambda-\rho}X-\frac{\lambda\sigma-\mu\rho}{\lambda-\rho}=0.$$

Дискриминант этого уравнения равен

$$D=\left(\frac{\mu-\sigma}{\lambda-\rho}\right)^2+4\frac{\lambda\sigma-\mu\rho}{\lambda-\rho}=$$
$$=\frac{(\mu-\sigma)^2+4(\lambda-\rho)(\lambda\sigma-\mu\rho)}{(\lambda-\rho)^2}.$$

Обозначим корни многочлена $z^2+2\lambda z+\mu$ через a, b, а корни многочлена $z^2+2\rho z+\sigma$ через c, ∂. Тогда

$$\mu=ab,\qquad 2\lambda=-a-b,$$
$$\sigma=c\partial,\qquad 2\rho=-c-\partial,$$

и следовательно,

$$D=\frac{(ab-c\partial)^2+(c+\partial-a-b)\{(c+\partial)ab-(a+b)c\partial\}}{(\lambda-\rho)^2}=$$
$$=\frac{(a-c)(a-\partial)(b-c)(b-\partial)}{(\lambda-\rho)^2}.$$

Если все корни многочлена $f(z)$ вещественны, то полученное выражение положительно, так как числа a, b, по условию, больше, чем числа c, ∂. Величина D положительна также и в том случае, когда не все корни многочлена $f(z)$ вещественны. Так, если c, ∂ вещественны, а a, b

не вещественны, то

$$(a-c)(b-c)=|a-c|^2,$$
$$(a-\partial)(b-\partial)=|a-\partial|^2.$$

Если же все корни не вещественны, то

$$(a-c)(b-\partial)=|a-c|^2,$$
$$(a-\partial)(b-c)=|a-\partial|^2.$$

Таким образом, D всегда положительно. Значит, p, q вещественны, и мы доказали, что с помощью вещественного дробно-линейного преобразования наш интеграл (1) можно привести к виду

$$\int R\left(t, \sqrt{\pm(t^2+\alpha)(t^2+\beta)}\right)dt,$$

где R означает какую-то новую рациональную функцию. Мы сделали предположение, что функция $f(z)$ на некоторых интервалах числовой оси положительна. Этим свойством будет, следовательно, обладать и выражение $\pm(t^2+\alpha)(t^2+\beta)$. Поэтому для радикала

$$y=\sqrt{\pm(t^2+\alpha)(t^2+\beta)}$$

возможны только следующие типы:

$$y=\sqrt{(a^2-t^2)(b^2-t^2)}, \tag{I}$$
$$y=\sqrt{(a^2-t^2)(t^2-b^2)}, \tag{II}$$
$$y=\sqrt{(a^2-t^2)(b^2+t^2)}, \tag{III}$$
$$y=\sqrt{(t^2-a^2)(b^2+t^2)}, \tag{IV}$$
$$y=\sqrt{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}. \tag{V}$$

Здесь a и b означают положительные числа. Приведение к нормальному виду в каждом из этих случаев никакого труда не представляет. Соответствующие формулы содержатся в таблице XXV.

Здесь же мы для примера рассмотрим тип I. Итак, пусть

$$y=\sqrt{(a^2-t^2)(b^2-t^2)},$$

причем $a^2>b^2$. Могут представиться два случая, в зависимости от того, будет ли $t^2<b^2$ или $t^2>a^2$. Неравенство $b^2<t^2<a^2$ исключается, так как ему отвечают невещественные значения y.

Если $t^2<b^2$, то положим

$$t=bx, \qquad k^2=\frac{b^2}{a^2}.$$

Это дает

$$y=ab\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}.$$

Если $t^2>a^2$, положим

$$t=\frac{a}{x}, \qquad k^2=\frac{b^2}{a^2}.$$

Это дает

$$y=\frac{a^2}{x^2}\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}.$$

В обоих случаях x меняется в интервале $[-1, 1]$ и удобно положить

$$x=\operatorname{sn}(u;\ k).$$

Тогда для u будем иметь интервал $[-K, K]$.

44. Полные эллиптические интегралы как гипергеометрические функции. Возьмем полные эллиптические интегралы в тригонометрической форме

$$K=\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \tag{1}$$

$$E=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi, \tag{2}$$

и примем, что $|k^2|<1$. В этом предположении мы можем подынтегральные функции разложить в ряды по возрастающим степеням переменной k^2:

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(2r)!}{2^{2r}(r!)^2}k^{2r}\sin^{2r}\varphi,$$

$$\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}=1-\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(2r-2)!}{2^{2r-1}(r-1)!\,r!}k^{2r}\sin^{2r}\varphi.$$

Интегрируя эти выражения и принимая во внимание, что

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2r}\varphi\,d\varphi=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(r+1/2)\,\Gamma(1/2)}{\Gamma(r+1)}=\frac{\pi}{2^{2r+1}}\frac{(2r)!}{(r!)^2},$$

получим следующие разложения:

$$K=\frac{\pi}{2}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(2r)!\,(2r)!}{2^{4r}(r!)^4}k^{2r},$$

$$E=\frac{\pi}{2}\left\{1-\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(2r-2)!\,(2r)!}{2^{4r-1}(r-1)!\,(r!)^3}k^{2r}\right\}.$$

Припомним теперь гипергеометрический ряд

$$F(a,\ b,\ c;\ x)=1+\frac{a\cdot b}{c\cdot 1}x+\frac{a(a+1)\,b(b+1)}{c(c+1)\cdot 1\cdot 2}x^2+\ldots$$

Нетрудно проверить, что этот ряд превращается в $(2/\pi)\,K$, если

$$a=b=1/2,\quad c=1,\quad x=k^2$$

и превращается в $(2/\pi)\,E$, если

$$a=-1/2,\quad b=1/2,\quad c=1,\quad x=k^2.$$

Таким образом,

$$K=\frac{\pi}{2}F\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1;\ k^2\right), \qquad (1^{\text{bis}})$$

$$E=\frac{\pi}{2}F\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1,\ k^2\right). \qquad (2^{\text{bis}})$$

Эти выражения пригодны при $|k^2|<1$. Известные преобразования гипергеометрического ряда дадут выражения эллиптических интегралов K, E для других частей плоскости переменной k^2. Не останавливаясь на этих преобразованиях, мы обратимся к другой стороне вопроса, а именно, на связи с конформными отображениями.

Пусть в плоскости комплексной переменной w дана конечная область, граница которой образована дугами окружностей. Обозначим через $c_1, c_2, \ldots, c_n$ вершины области (кругового многоугольника) и через $\pi\delta_1, \pi\delta_2, \ldots, \pi\delta_n$ соответствующие внутренние углы. Пусть требуется этот многоугольник отобразить конформно на верхнюю половину плоскости комплексного переменного z. Положим, кроме того, что образом вершины c_n должна быть бесконечно удаленная точка, и назовем те точки вещественной оси, в которые отобразятся остальные вершины многоугольника, соответственно $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$.

В таком случае, как это доказывается в курсах геометрической теории функций комплексного переменного [1]), функция $w=w(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\{w,\ z\}=2I(z),$$

где

$$2I(z)=\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n-1}\frac{1-\delta_r^2}{(z-a_r)^2}+\sum_{r=1}^{n-1}\frac{A_r}{z-a_r}, \qquad (3)$$

причем $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ — некоторые константы, связанные соотношениями

$$\sum_{r=1}^{n-1}A_r=0, \qquad (4)$$

$$\sum_{r=1}^{n-1}A_ra_r+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n-1}(1-\delta_r^2)=\frac{1}{2}(1-\delta_n^2), \qquad (5)$$

а $\{w,\ z\}$ есть так называемая производная Шварца (или шварциан) от w по z:

$$\{w,\ z\}=\frac{w'''}{w'}-\frac{3}{2}\left(\frac{w''}{w'}\right)^2.$$

Таким образом, для отыскания w мы имеем дифференциальное уравнение третьего порядка. Однако решение вопроса можно свести к интегрированию некоторого дифференциального уравнения второго порядка. Действительно, справедливо следующее предложение: *всякое решение уравнения*

$$\{w,\ z\}=2I(z) \qquad (6)$$

[1]) См., например, А. Гурвиц, Р. Курант. Теория функций, «Наука», 1968, стр. 483.

является отношением двух линейно независимых частных интегралов дифференциального уравнения

$$\frac{d^2\Omega}{dz^2}+I\Omega=0. \tag{7}$$

Для доказательства введем в уравнение (6) вместо w новую неизвестную v, полагая

$$\frac{w''}{w'}=-\frac{2v'}{v}. \tag{8}$$

Новое уравнение будет

$$v''+Iv=0,$$

т. е. v есть одно из решений уравнения (7), скажем, $v=\Omega_1$. С другой стороны, из (8) следует, что

$$w'=\frac{C^*}{v^2}, \tag{8bis}$$

где C^* — некоторая отличная от 0 константа. Возьмем второе решение уравнения (7), назовем его Ω_2, так, чтобы

$$\Omega_1\Omega_2'-\Omega_2\Omega_1'=C^*.$$

Тогда в силу (8^{bis})

$$w'=\frac{C^*}{\Omega_1^2}=\frac{d}{dz}\frac{\Omega_2}{\Omega_1}$$

и, значит,

$$w=\frac{\Omega_2}{\Omega_1}+C=\frac{\Omega_2+C\Omega_1}{\Omega_1},$$

где C — некоторая новая постоянная.

Таким образом наше утверждение доказано.

Нетрудно видеть, что справедливо и обратное предложение.

Случай двуугольника является тривиальным. Действительно, в этом случае из двух вершин только одна изображается точкой, лежащей на конечном расстоянии, и за нее можно принять точку $z=0$. Таким образом,

$$2I(z)=\frac{1}{2}\frac{1-\delta^2}{z^2}+\frac{A}{z}.$$

Условие (4) приводится к равенству $A=0$, а условие (5), как легко видеть, выполняется автоматически. Наше уравнение (6) будет иметь вид

$$\{w, z\}=\frac{1}{2}\frac{1-\delta^2}{z^2},$$

а уравнение (7) запишется в виде

$$\frac{d^2\Omega}{dz^2}+\frac{1}{4}\frac{1-\delta^2}{z^2}\Omega=0.$$

Общий интеграл этого уравнения есть

$$\Omega=C_1z^{(1+\delta)/2}+C_2z^{(1-\delta)/2}.$$

Таким образом, функцией, реализующей искомое конформное отображение, будет

$$w=\frac{A_1z^{(1+\delta)/2}+A_2z^{(1-\delta)/2}}{B_1z^{(1+\delta)/2}+B_2z^{(1-\delta)/2}} \quad \text{или} \quad w=\frac{A_1z^{\delta}+A_2}{B_1z^{\delta}+B_2}.$$

Следующим и для нас наиболее интересным случаем будет тот, когда многоугольник имеет три вершины. Образом одной из них является бесконечно удаленная точка. Принимая в качестве образов двух других вершин точки $z=0$, $z=1$, будем иметь

$$2I(z)=\frac{A}{z}+\frac{B}{z-1}+\frac{1}{2}\frac{1-\delta_1^2}{z^2}+\frac{1}{2}\frac{1-\delta_2^2}{(z-1)^2}.$$

При этом условия (4) и (5) принимают вид

$$A+B=0,$$

$$A\cdot 0+B\cdot 1=\frac{1}{2}(1-\delta_3^2)-\frac{1}{2}(1-\delta_1^2)-\frac{1}{2}(1-\delta_2^2).$$

Таким образом,

$$-A=B=\frac{1}{2}(\delta_1^2+\delta_2^2-\delta_3^2-1),$$

и мы получаем уравнение

$$\frac{d^2\Omega}{dz^2}+ \\ +\Omega\left\{\frac{1-\delta_1^2}{4z^2}+\frac{1-\delta_2^2}{4(z-1)^2}-\frac{\delta_1^2+\delta_2^2-\delta_3^2-1}{4z}+\frac{\delta_1^2+\delta_2^2-\delta_3^2-1}{4(z-1)}\right\}=0.$$

Положим теперь

$$\left.\begin{aligned}\delta_1^2&=(1-c)^2,\\ \delta_2^2&=(c-a-b)^2,\\ \delta_3^2&=(a-b)^2.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Кроме того, введем вместо Ω функцию y по формуле

$$\Omega=z^{\frac{c}{2}}(z-1)^{\frac{a+b-c+1}{2}}y.$$

Тогда для y получится уравнение

$$z(1-z)y''+[c-(a+b+1)z]y'-aby=0.$$

Это — дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет гипергеометрическая функция с параметрами a, b, c.

Мы видели выше, что

$$K=\frac{\pi}{2}F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \lambda\right),$$

где $\lambda = k^2$. Подобным образом,

$$K' = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; 1-\lambda\right).$$

Поэтому K является частным интегралом уравнения

$$\lambda(1-\lambda) y'' - (2\lambda - 1) y' - \frac{1}{4} y = 0 \qquad (10)$$

и другим частным интегралом является K'. Значит, функция

$$w \equiv \frac{\alpha i K' + \beta K}{\gamma i K' + \delta K} = \varphi(\lambda) \qquad (11)$$

отображает верхнюю половину λ-плоскости на некоторый треугольник w-плоскости. Все углы этого треугольника равны нулю, что легко усмотреть на основании (9). Формулу (11) можно представить в виде

$$\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta} = \varphi(\lambda)$$

и беря $\alpha = 1$, $\delta = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, мы без труда найдем, что треугольник плоскости τ имеет свои вершины в точках $\tau = 0$, $\tau = 1$, $\tau = \infty$. Мы приходим к правой половине области D_2, рассмотренной в § 23.

Заканчивая настоящий параграф, заметим, что дифференциальное уравнение, эквивалентное (10), было найдено еще Лежандром, а именно, Лежандр показал, что K, K' удовлетворяют уравнению

$$\frac{d}{dk}\left(kk'^2 \frac{dy}{dk}\right) = ky,$$

а это уравнение эквивалентно (10).

Чтобы получить дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют полные эллиптические интегралы, предварительное разложение этих интегралов в степенные ряды вовсе не обязательно. Проще воспользоваться дифференцированием по параметру.

Действительно, из формулы (2) следует

$$\frac{dE}{dk} = -\int_0^{\pi/2} \frac{k \sin^2 t}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}\, dt = \frac{E - K}{k}.$$

Далее имеем:

$$\frac{dK}{dk} = \int_0^{\pi/2} \frac{k \sin^2 t}{(1 - k^2 \sin^2 t)^{3/2}}\, dt.$$

Положим здесь

$$\frac{k'^2}{1 - k^2 \sin^2 t} = 1 - k^2 \sin^2 \varphi.$$

Отсюда

$$\sin t = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \qquad \cos t = \frac{k' \sin\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

и после простых подсчетов получим

$$k\frac{dK}{dk} = \int_0^{\pi/2} \frac{k^2 \cos^2 \varphi \, d\varphi}{k'^2 \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{E}{k'^2} - K.$$

Из соотношений

$$\frac{dE}{dk} = \frac{E - K}{k}, \qquad k\frac{dK}{dk} = \frac{E}{k'^2} - K$$

исключим E. Это и даст равенство

$$\frac{d}{dk}\left(kk'^2 \frac{dK}{dk}\right) = kK.$$

В виде упражнения предлагаем аналогичным методом проверить, что E и $E' - K'$ представляют решения уравнения

$$k'^2 \frac{d}{dk}\left(k \frac{dy}{dk}\right) + ky = 0.$$

Найденные выражения для производных от полных интегралов по модулю позволяют доказать соотношение Лежандра

$$EK' + E'K - KK' = \pi/2.$$

Действительно, с помощью дифференцирования мы убеждаемся в том, что левая часть есть константа. Для определения этой константы достаточно найти предел левой части при $k \to 0$.

45. Вычисление h по заданному модулю k. Если величина $h = e^{\pi i \tau}$ известна, то могут быть построены тэта-ряды, которые быстро сходятся и потому очень удобны для вычислений. На практике, однако, часто бывает задана не величина h, а модуль k, и тогда при вычислениях прежде всего возникает вопрос об отыскании величины h. Мы видели в § 44, что полные эллиптические интегралы первого рода относительно модуля k и дополнительного модуля k' выражаются в виде гипергеометрических рядов. Принципиально этими рядами можно пользоваться для отыскания K, K', а значит, и $\tau = iK'/K$ и h. Однако ряды эти для вычислений мало пригодны. Вейерштрасс указал весьма удобный путь для вычислений в предположении, что

$$\left|\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}\right| < 1. \tag{1}$$

Под $\sqrt{k'}$, от которого зависит величина

$$l = \frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}, \tag{2}$$

мы будем всегда понимать то его значение, вещественная часть которого положительна. На практике важнейшим случаем является тот, когда $0 < k < 1$. В этом случае будет также $0 < k' < 1$, и условие (1) наверно будет выполнено. За исходный пункт примем формулу

$$k' = \frac{\vartheta_0^2(0\,|\,\tau)}{\vartheta_3^2(0\,|\,\tau)},$$

которая у нас встречалась неоднократно. На основании этой формулы

$$\sqrt{k'} = \frac{\vartheta_0(0\,|\,\tau)}{\vartheta_3(0\,|\,\tau)}$$

и, значит,

$$l = \frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}} = \frac{\vartheta_3(0\,|\,\tau) - \vartheta_0(0\,|\,\tau)}{\vartheta_3(0\,|\,\tau) + \vartheta_0(0\,|\,\tau)}.$$

Вспоминая, что

$$\vartheta_3(0\,|\,\tau) = 1 + 2h + 2h^4 + 2h^9 + \ldots,$$

$$\vartheta_0(0\,|\,\tau) = 1 - 2h + 2h^4 - 2h^9 + \ldots,$$

получаем соотношение

$$l = \frac{2h + 2h^9 + 2h^{25} + \ldots}{1 + 2h^4 + 2h^{16} + \ldots}.$$

Его можно переписать в виде

$$l^4 = \frac{\vartheta_2^4(0\,|\,4\tau)}{\vartheta_3^4(0\,|\,4\tau)}. \tag{3}$$

Это уравнение лишь обозначениями отличается от уравнения

$$k^2 = \frac{\vartheta_2^4(0\,|\,\tau)}{\vartheta_3^4(0\,|\,\tau)}.$$

А в § 30 мы видели, что в силу последнего уравнения величина $h = e^{\pi i \tau}$ есть регулярная аналитическая функция от k^2 в плоскости комплексного переменного $\lambda = k^2$, разрезанной от точки $\lambda = 1$ до точки $\lambda = \infty$ вдоль вещественной оси.

Применяя этот результат к нашему уравнению (3), мы приходим к выводу, что величина $h^4 = e^{4\pi i \tau}$ есть регулярная аналитическая функция от l^4 в круге $|\,l\,| < 1$. Поэтому имеет место разложение $h^4 = A_1 l^4 + A_2 l^8 + A_3 l^{12} + \ldots$ или

$$h = C_1 l + C_2 l^5 + C_3 l^9 + \ldots$$

Нетрудно вычислить первые коэффициенты этого ряда. Результат имеет вид

$$h = \frac{1}{2}l + 2\left(\frac{1}{2}l\right)^5 + 15\left(\frac{1}{2}l\right)^9 + 150\left(\frac{1}{2}l\right)^{13} + \ldots$$

Этим рядом очень удобно пользоваться на практике, так как обычно достаточно первых двух членов.

46. Арифметико-геометрическое среднее. Пусть даны два положительных числа a и b и пусть $a > b$. С помощью этих чисел построим две последовательности

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots;\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots,$$

полагая

$$a_1 = \frac{a+b}{2}, \qquad b_1 = \sqrt{ab},$$

$$a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}, \qquad b_2 = \sqrt{a_1 b_1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

где корень имеет всегда арифметическое значение. Легко доказать, что величины a_n, b_n при $n \to \infty$ стремятся к общему пределу. Этот предел называют *арифметико-геометрическим средним* чисел a, b и обозначают символом $\mu(a, b)$. Впервые его рассмотрел Гаусс.

Для доказательства заметим, что имеют место следующие неравенства:

$$a_n > b_n, \tag{1}$$

$$a_{n+1} < a_n, \qquad b_{n+1} > b_n. \tag{2}$$

Из (2) и (1) следует, что a_n и b_n имеют пределы:

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n, \qquad \beta = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Из существования же пределов α, β вытекает, что

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n+b_n}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2}$$

или $\alpha = \beta$.

Теперь займемся отысканием величины $\mu(a, b)$. С этой целью возьмем основное соотношение, выражающее преобразование Гаусса:

$$\operatorname{sn}\left(u;\ \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right) = \frac{(1+k)\operatorname{sn}\left(\dfrac{u}{1+k};\ k\right)}{1+k\operatorname{sn}^2\left(\dfrac{u}{1+k};\ k\right)}.$$

Полагая

$$\operatorname{sn}\left(u;\ \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right) = \sin\varphi, \qquad \operatorname{sn}\left(\frac{u}{1+k};\ k\right) = \sin\psi,$$

так что

$$u = \int_0^{\varphi} \frac{dt}{\sqrt{1-\dfrac{4k}{(1+k)^2}\sin^2 t}}, \qquad \frac{u}{1+k} = \int_0^{\psi} \frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}},$$

можем написать

$$\frac{1}{1+k}\int_0^{\varphi} \frac{dt}{\sqrt{1-\dfrac{4k}{(1+k)^2}\sin^2 t}} = \int_0^{\psi} \frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}, \tag{4}$$

где φ и ψ связаны следующим вытекающим из (3) соотношением:

$$\sin\varphi = \frac{(1+k)\sin\psi}{1+k\sin^2\psi}.$$

Рассмотрим частный случай, когда $\psi = \pi/2$ и, следовательно, $\varphi = \pi/2$. Равенство (4) принимает вид

$$\frac{1}{1+k}\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1-\dfrac{4k}{(1+k)^2}\sin^2 t}} = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}. \tag{5}$$

Положим

$$k = \frac{a_n - b_n}{a_n + b_n},$$

так что

$$1+k = \frac{a_n}{a_{n+1}}, \quad k^2 = 1 - \frac{b_{n+1}^2}{a_{n+1}^2}, \quad \frac{4k}{(1+k)^2} = 1 - \frac{b_n^2}{a_n^2}$$

и (5) перепишется следующим образом:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{a_n^2 \cos^2 t + b_n^2 \sin^2 t}} = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{a_{n+1}^2 \cos^2 t + b_{n+1}^2 \sin^2 t}}.$$

Мы видим, что величина

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{a_n^2 \cos^2 t + b_n^2 \sin^2 t}}$$

от n не зависит и, значит, равна своему пределу при $n \to \infty$. Следовательно,

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}} = \frac{1}{\mu(a,\ b)} \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}},$$

т. е.

$$\mu(a,\ b) = \frac{\pi}{2\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}}}.$$

ГЛАВА VIII

НЕКОТОРЫЕ КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

47. Конформное отображение прямоугольника на полуплоскость. Пусть в плоскости u дан прямоугольник с вершинами в точках

$$u = a, \quad a + bi, \quad -a + bi, \quad -a,$$

где a, b — какие-то положительные числа. Требуется конформно отобразить этот прямоугольник на верхнюю половину плоскости z. Как известно из теории функций комплексного переменного, искомая отображающая функция, пока речь идет о конечных точках, непрерывна вплоть до границы.

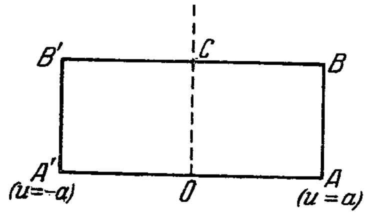


Рис. 11.

Если мы обозначим через c_i ($i = 1, 2, 3, 4$) точки вещественной оси, являющиеся образами вершин прямоугольника, то по известной формуле Шварца — Кристоффеля

$$C'u + C'' = \int_0^z \frac{dx}{\sqrt{(x - c_1)(x - c_2)(x - c_3)(x - c_4)}}.$$

На основании общих теорем отображающая функция вполне определится, если задать образы трех граничных точек прямоугольника. Мы потребуем, чтобы точкам $u = -a,\ 0,\ a$ (рис. 11) отвечали точки $z = -1,\ 0,\ 1$. Этими требованиями определяются три из констант, и (5) перепишется следующим образом:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{a_n^2 \cos^2 t + b_n^2 \sin^2 t}} = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{a_{n+1}^2 \cos^2 t + b_{n+1}^2 \sin^2 t}}.$$

Мы видим, что величина

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{a_n^2 \cos^2 t + b_n^2 \sin^2 t}}$$

от n не зависит и, значит, равна своему пределу при $n \to \infty$. Следовательно,

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}} = \frac{1}{\mu(a, b)} \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}},$$

т. е.

$$\mu(a, b) = \frac{\pi}{2 \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}}}.$$

ГЛАВА VIII

НЕКОТОРЫЕ КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

47. Конформное отображение прямоугольника на полуплоскость. Пусть в плоскости u дан прямоугольник с вершинами в точках

$$u = a, \quad a + bi, \quad -a + bi, \quad -a,$$

где a, b — какие-то положительные числа. Требуется конформно отобразить этот прямоугольник на верхнюю половину плоскости z. Как известно из теории функций комплексного переменного, искомая отображающая функция, пока речь идет о конечных точках, непрерывна вплоть до границы.

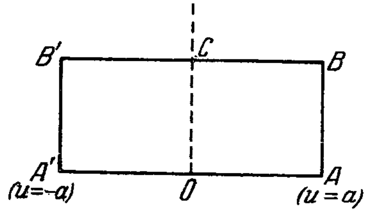


Рис. 11.

Если мы обозначим через c_i ($i = 1, 2, 3, 4$) точки вещественной оси, являющиеся образами вершин прямоугольника, то по известной формуле Шварца — Кристоффеля

$$C'u + C'' = \int_0^z \frac{dx}{\sqrt{(x - c_1)(x - c_2)(x - c_3)(x - c_4)}}.$$

На основании общих теорем отображающая функция вполне определится, если задать образы трех граничных точек прямоугольника. Мы потребуем, чтобы точкам $u = -a$, 0, a (рис. 11) отвечали точки $z = -1$, 0, 1. Этими требованиями определяются три из констант, а именно, мы получаем

$$C''=0, \quad c_3=-1, \quad c_4=1.$$

Таким образом,

$$C'u=\int_0^z \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(x-c_1)(x-c_2)}}. \tag{1}$$

По принципу симметрии Римана — Шварца функцию u можно аналитически продолжить через отрезок $[-1, 1]$ вещественной оси плоскости z. Мы получим прямоугольник, симметричный данному относительно вещественной оси (нижний прямоугольник), и формула (1) дает отображение на этот прямоугольник нижней полуплоскости. Это же отображение мы получим, если в (1) заменим u на $-u$, а z на $-z$. Но если

$$-C'u=\int_0^{-z} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(x-c_1)(x-c_2)}},$$

то

$$C'u=\int_0^z \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(x+c_1)(x+c_2)}}. \tag{2}$$

В силу единственности отображающей функции при принятом соответствии трех граничных точек функция (1) должна быть тождественна с (2), откуда вытекает, что

$$(x-c_1)(x-c_2)=(x+c_1)(x+c_2)$$

и, значит, $c_2=-c_1$. Таким образом,

$$(x-c_1)(x-c_2)=x^2-c_1^2,$$

и заменяя c_1 на $1/k$, где k можно считать положительным и меньшим единицы, представим отображающую функцию в виде

$$u=\frac{1}{C}\int_0^z \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}. \tag{3}$$

У нас теперь всего два параметра: C, k. Для их определения мы имеем следующие уравнения:

$$a=\frac{1}{C}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \tag{4'}$$

$$bi=\frac{i}{C}\int_1^{1/k} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}}. \tag{4''}$$

Разделив второе на первое, приходим к такому уравнению для отыскания k:

$$\frac{b}{a}=\frac{\displaystyle\int_1^{1/k} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}}}{\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}}. \tag{4}$$

Если k определено, то C найдется из уравнения (4′) [или (4″)].

Займемся исследованием уравнения (4). С этой целью преобразуем интеграл

$$\int_1^{1/k} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}},$$

полагая

$$k^2x^2+k'^2y^2=1 \tag{5}$$

и принимая, что $0 \leqslant y \leqslant 1$ при $1/k \geqslant x \geqslant 1$.

В силу (5)

$$\frac{k'\,dy}{\sqrt{1-k'^2y^2}}=-\frac{k\,dx}{\sqrt{1-k^2x^2}}.$$

А так как, кроме того, $k\sqrt{x^2-1}=k'\sqrt{1-y^2}$, то

$$\int_1^{1/k} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}}=\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k'^2y^2)}}.$$

Таким образом, уравнение (4) принимает вид

$$\frac{b}{a}=\frac{\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}}}{\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}}. \qquad (4^{\text{bis}})$$

Справа мы имеем отношение полных эллиптических интегралов первого рода K', K для модулей k', k. Когда k растет от 0 до 1, правая часть, как легко видеть, изменяется монотонно от ∞ до 0. Отсюда видно, что для любого значения отношения b/a существует такое k из интервала (0, 1), которое удовлетворяет уравнению (4). Отображающая функция есть

$$u=\frac{a}{K}\int\limits_0^z \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}. \qquad (3^{\text{bis}})$$

Этот же результат можно было бы получить, отправляясь от функции

$$z=\operatorname{sn}(Ku/a;\ k)$$

и изучая ее вещественные значения. Покажем это.

Пусть точка u движется в положительном направлении по границе нашего прямоугольника, отправляясь от положения $u=0$. Этому положению отвечает $z=0$. Когда u растет от значения 0 до значения a, величина z будет расти от $z=0$ до $z=1$. Переходим к стороне AB нашего прямоугольника. На этой стороне $u=a+iv$, где v меняется от 0 до b. А так как

$$\operatorname{sn}(K+iw;\ k)=\frac{\operatorname{cn}(iw;\ k)}{\operatorname{dn}(iw;\ k)}=\frac{1}{\operatorname{dn}(w;\ k')},$$

то на стороне AB

$$z=\frac{1}{\operatorname{dn}(Kv/a;\ k')},$$

где v изменяется от 0 до b и, значит, z растет от 1 до $\frac{1}{\operatorname{dn}(K';\ k')}=\frac{1}{k}$. Переходим к участку BC, на котором $u=ib+v$ и v меняется от a до 0. Так как

$$z=\operatorname{sn}\left(iK'+\frac{Kv}{a};\ k\right)=\frac{1}{k\operatorname{sn}(Kv/a;\ k)},$$

то z будет изменяться от $1/k$ до ∞.

Мы видим, что правой половине $OABC$ границы прямоугольника отвечает правая половина вещественной оси плоскости z. То, что левой половине границы прямоугольника будет отвечать левая половина вещественной оси, уже не нуждается в особом доказательстве.

Поскольку функция $z=\operatorname{sn}(Ku/a;\ k)$ регулярна внутри прямоугольника и поскольку границу этого прямоугольника она отображает взаимно однозначно на вещественную ось, то рассматриваемая функция отображает прямоугольник на полуплоскость.

Тот не зависящий от теории эллиптических функций путь, которым мы пришли к отображающей функции (3^{bis}), представляет интерес потому, что он позволяет для нормального случая ($0<k<1$) ввести основную эллиптическую функцию Якоби и обнаружить ее главнейшие свойства.

Примем для простоты, что $a=K$ и, следовательно, $b=K'$. Мы имеем функцию

$$u=f(z)\equiv\int\limits_0^z \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \qquad (6)$$

которая конформно отображает верхнюю половину плоскости z на прямоугольник R плоскости u (рис. 12 и 13). Будем теперь аналитически продолжать функцию u по принципу симметрии Римана — Шварца. Прежде всего мы можем продолжить нашу функцию через отрезок $[-1,\ 1]$ на нижнюю половину плоскости z. В плоскости u мы получим прямоугольник R^{-1}. Дальнейшее продолжение произведем через отрезок $[-1/k,\ -1]$, которому отвечает сторона IV прямоугольника R^{-1}. Мы получим снова верхнюю половину плоскости z, а в плоскости u получим прямоугольник R_{-1}^{-1}. Затем продолжаем снова через отрезок $[-1, 1]$, что приведет нас к прямоугольнику R_{-1}, являющемуся отображением нижней полуплоскости. Продолжая этот процесс, мы будем получать все новые и новые

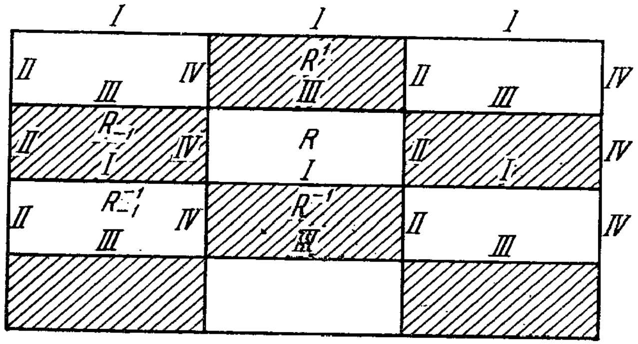


Рис. 12.

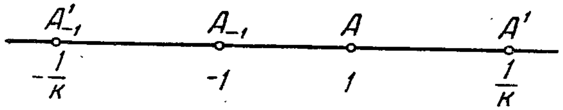


Рис. 13.

прямоугольники, которые в пределе покроют всю плоскость u. Каждый незаштрихованный прямоугольник является отображением верхней половины, а каждый заштрихованный прямоугольник есть отображение нижней половины плоскости z.

Так как прямоугольники в плоскости u не перекрываются, то каждому значению u отвечает вполне определенное значение z, т. е. z есть однозначная функция от u. Аналитичность этой функции нам известна заранее. Единственными полюсами функции $z = g(u)$ являются точки $iK' + 2mK + 2inK'$, где m, n — целые числа.

Что эти точки — простые полюсы, также легко усматривается на основании свойств отображающей функции. Действительно, возьмем прямоугольник, составленный из R и R^1. Он отображается на всю плоскость z, разре-

занную вдоль отрезка $[-1/k, 1/k]$. Бесконечно далекая точка есть внутренняя точка этой области z-плоскости. Ей отвечает точка $u = iK'$, лежащая на отрезке III. Если бы в этой точке функция $z = g(u)$ имела полюс более высокого порядка, то простому обходу вокруг точки $u = iK'$ отвечал бы в плоскости z кратный обход вокруг точки $z = \infty$, что невозможно в силу одно-однозначности конформного отображения.

Итак, наше утверждение доказано.

Периодичность функции $z = g(u)$ доказывается очень просто. Действительно, взяв в прямоугольнике R (рис. 14)

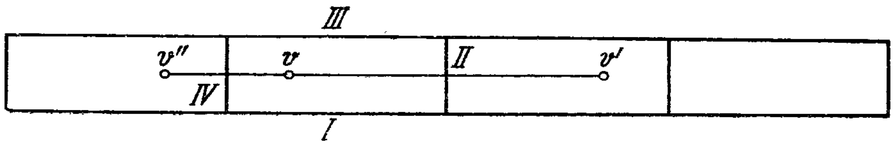


Рис. 14.

произвольную точку v, найдем точку v', симметричную v относительно стороны II, а затем точку v'', симметричную v относительно стороны IV. В точках v', v'' функция $g(u)$ имеет одинаковые значения: $g(v'') = g(v')$. Вместе с тем легко видеть, что $v' - v''$ равняется удвоенной длине отрезка I, т. е. равняется $4K$. Аналогично доказывается, что вторым периодом является $2iK'$.

Таким образом, основные свойства функции

$$z = \operatorname{sn}(u;\ k),$$

т. е. верхнего предела, как функции от значения интеграла, проверены.

Рассмотрим еще ту область, на которую функция

$$z = \operatorname{sn}(u;\ k)$$

отображает не один прямоугольник, например R, и не пару смежных прямоугольников, а всю плоскость комплексного переменного u.

Каждому прямоугольнику нашего семейства отвечает полуплоскость: незаштрихованному — верхняя, а заштрихованному — нижняя (рис. 15). Так как прямоугольников бесчисленное множество, то заготовим бесчисленное множество полуплоскостей (заштрихованных и незаштрихованных) и расположим их так, чтобы незаштрихованные и заштрихованные примыкали друг к другу вдоль вещественной оси и чтобы точки всех плоскостей, имеющие одинаковые координаты, лежали одна под другой.

Желая получить полную u-плоскость, мы должны произвести сшивание прямоугольников вдоль определенных сторон. Отрезки границ полуплоскостей, соответствующих сшиваемым прямоугольникам, при этом также придется сшить. В результате мы получим над плоскостью z бесконечнолистную риманову поверхность, которая и является образом нашей плоскости u, полученным при помощи функции

$$z = \operatorname{sn}(u;\ k).$$

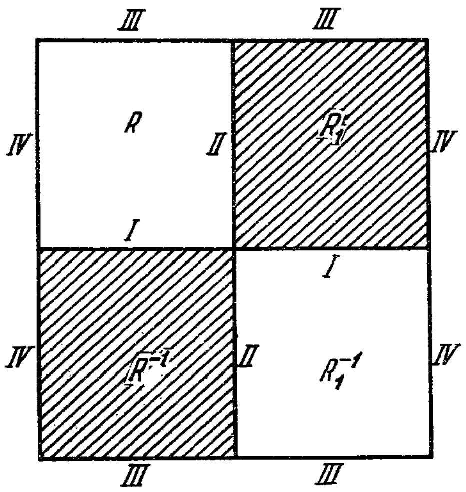


Рис. 15.

Для изучения эллиптических функций с периодами $4K$, $2iK'$ достаточно оперировать с четырьмя прямоугольниками рассмотренного семейства: R, R^{-1}, R_1^{-1}, R_1 (рис. 15 и 16). Паре прямоугольников R, R^{-1} отвечает пара обозначенных теми же буквами полуплоскостей. Сшивая прямоугольники R, R^{-1} вдоль I, мы должны сшить указанные полуплоскости вдоль отрезка $[-1,\ 1]$. Получим плоскость с разрезами вдоль полуосей $(-\infty,\ -1)$, $(1,\ \infty)$. Сшивая R_1 и R_1^{-1} вдоль I, получим вторую плоскость с разрезами вдоль тех же полуосей $(-\infty,\ -1)$, $(1,\ \infty)$.

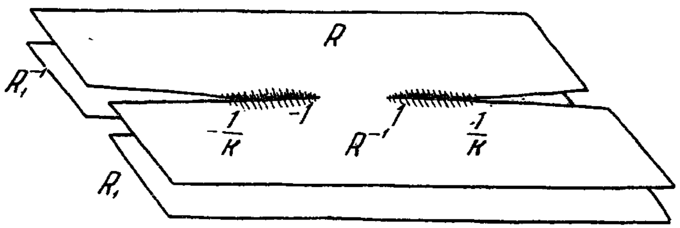


Рис. 16.

Сошьем теперь двойные прямоугольники вдоль II, а также вдоль IV. Аналогичному сшиванию мы подвергнем плоскости. При этом для получения непрерывности соответствия верхний берег разреза $(1,\ 1/k)$ верхнего листа подлежит сшиванию с нижним берегом соответствующего разреза нижнего листа.

То же будем иметь и для разреза $(-1/k,\ -1)$. В результате получим двухлистную поверхность Римана с линиями перехода вдоль отрезков $(-1/k,\ -1)$ и $(1,\ 1/k)$ и с разрезами вдоль $(-\infty,\ -1/k)$ и $(1/k,\ \infty)$.

После сшивания прямоугольников получается кусок цилиндрической поверхности (рис. 17). В противоположных точках сторон III двойных прямоугольников z-плоскости функция $z = g(u)$

Рис. 17.

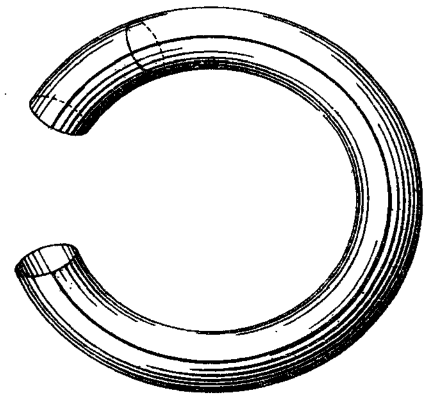


Рис. 18.

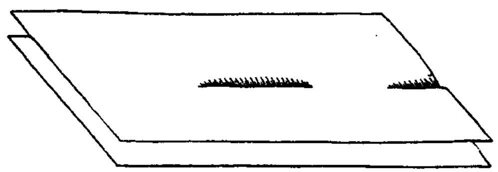


Рис. 19.

принимает одинаковые значения. Эти стороны поэтому надлежит сшить. Переходя к цилиндру, мы должны его деформировать и сшить его границы. Мы получим тор (рис. 18).

Соответствующему сшиванию мы должны подвергнуть листы римановой поверхности. Здесь придется сшивать полулисты одной и той же плоскости.

В результате мы получим двухлистную риманову поверхность, изображенную на рис. 19. Эта поверхность уже не имеет разрезов. У нее четыре точки разветвления и две линии перехода.

Итак, мы имеем три образа: только что построенную двухлистную риманову поверхность, прямоугольник, состоящий из четырех прямоугольников R, R_1, R^{-1}, R_1^{-1}, причем соответственные точки противоположных сторон этого прямоугольника отождествляются, и, наконец, тор.

Прямоугольник отображен на риманову поверхность конформно, а тор топологически эквивалентен прямоугольнику. Следовательно, все три образа топологически эквивалентны [1]).

Не мешает, однако, показать, что тор можно отобразить на прямоугольник не только взаимно однозначно и непрерывно, как мы сделали выше с помощью изгибания и сшивания противоположных сторон, но также и конформно.

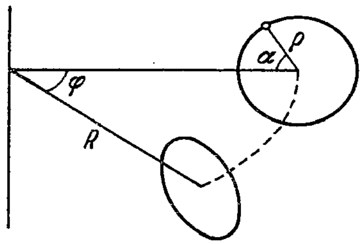


Рис. 20.

Положим, что тор получился вращением вокруг оси Z круга, лежащего в плоскости OXZ и имеющего уравнение

$$(X-R)^2+Z^2=\rho^2.$$

Для определения положения точки на торе можно воспользоваться двумя углами:

$$\alpha,\ \varphi\ (0\leqslant\alpha<2\pi,\ 0\leqslant\varphi<2\pi),$$

смысл которых легко усмотреть из рис. 20, а также из приводимых нами выражений для декартовых координат точки на торе через эти углы:

$$X=(R-\rho\cos\alpha)\cos\varphi,$$
$$Y=(R-\rho\cos\alpha)\sin\varphi,$$
$$Z=\rho\sin\alpha.$$

Для элемента дуги мы получаем

$$ds=\sqrt{dX^2+dY^2+dZ^2}=\sqrt{(R-\rho\cos\alpha)^2\,d\varphi^2+\rho^2\,d\alpha^2}.$$

Это выражение можно привести к виду

$$ds=(R-\rho\cos\alpha)\sqrt{d\xi^2+d\eta^2},$$

полагая

$$\xi=\varphi,\qquad \eta=\int_0^\alpha\frac{\rho\,d\alpha}{R-\rho\cos\alpha}. \tag{7}$$

Когда φ и α меняются от 0 до 2π, областью изменения точки (ξ,η) в плоскости переменных ξ, η будет прямоугольник, двумя сторонами которого являются: отрезок $[0, 2\pi]$ оси ξ и отрезок

[1]) Риманову поверхность можно считать построенной с помощью сфер Неймана вместо плоских листов.

$[0, l]$ оси η, где

$$l=\int_0^{2\pi}\frac{\rho\,d\alpha}{R-\rho\cos\alpha}.$$

Будем придерживаться указанного выше соглашения относительно отождествления противоположных сторон прямоугольника.

С помощью формул (7) этот прямоугольник отображается на тор не только взаимно однозначно и непрерывно, но и конформно, так как в выражении дифференциала дуги коэффициенты при $d\xi^2$, $d\eta^2$ одинаковы, а коэффициент при $d\xi\,d\eta$ равен нулю.

Прямоугольник, у которого каждые две противоположные стороны отождествляются, есть не что иное, как прямоугольник периодов. Ему принадлежит класс эллиптических функций. Каждая функция этого класса может рассматриваться как однозначная аналитическая функция на торе (с всего лишь конечным числом полюсов в качестве единственных особых точек). Этому классу функций (в прямоугольнике и на торе) отвечает класс однозначных аналитических функций на двухлистной римановой поверхности, а именно, все рациональные функции от z и $\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$.

Все эти факты важны не только при рассмотрении эллиптических функций и эллиптических интегралов, а также и при рассмотрении алгебраической функции $w(z)$, определяемой уравнением

$$w^2=f(z), \tag{8}$$

где $f(z)$ — многочлен четвертой степени без кратных корней.

Если вместо (8) взять уравнение с многочленом $f(z)$ более высокой степени (но без кратных корней), то также можно ввести двухлистную риманову поверхность, на которой всякая рациональная функция $R(z, w)$ будет однозначной. Можно также изучать на этой поверхности интегралы

$$\int R(z, w)\,dz,$$

являющиеся обобщением эллиптических интегралов. Однако дальнейшие построения оказываются, вообще говоря, не такими простыми, как в рассмотренном нами «эллиптическом» случае. Тем не менее униформизация удается, но с помощью функций не эллиптических, а автоморфных. Этих вопросов, а также аналогичных вопросов, возникающих при замене уравнения (8) общим алгебраическим уравнением $F(z, w)=0$, мы в этой книге касаться не можем [1]).

48. Конформное отображение на круговое кольцо двусвязной многоугольной области. Хорошо известно, что любые односвязные области (границы которых имеют по крайней мере по две точки) могут быть конформно

[1]) За исключением относящейся сюда теоремы Абеля, которой посвящен ниже § 54.

отображены одна на другую. Иначе обстоит дело с областями двусвязными. Возьмем, например, два круговых кольца

$$g:\quad r_1 \leqslant |z| \leqslant r_2 \qquad (r_2 > r_1 > 0),$$

$$G:\quad R_1 \leqslant |Z| \leqslant R_2 \qquad (R_2 > R_1 > 0).$$

Конформное отображение одного из этих колец на другое можно получить, полагая

$$Z = Az \quad \text{или} \quad Z = B/z,$$

где A и B — константы. В первом случае мы будем иметь

$$R_2 = |A|\, r_2, \qquad R_1 = |A|\, r_1,$$

откуда

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Во втором случае

$$R_2 = \frac{|B|}{r_1}, \qquad R_1 = \frac{|B|}{r_2}$$

и, значит, снова

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Нетрудно убедиться в том, что других отображений, взаимно однозначных и конформных, кольца g на кольцо G нет. В самом деле, функция $Z = Z(z)$, дающая требуемое отображение, с помощью последовательного применения принципа симметрии Римана — Шварца может быть продолжена на всю плоскость z, из которой удалены точки $z = 0$ и $z = \infty$, и это продолжение функции $Z(z)$ отображает дважды проколотую плоскость z на такую же область в плоскости Z. Одна из точек $z = 0$, $z = \infty$ будет устранимой особенностью и, следовательно, корнем для функции $Z(z)$, а другая — для функции $1/Z(z)$. Так как простому обходу вокруг каждой из точек $z = 0$, ∞ в силу взаимной однозначности отображения отвечает простой обход в плоскости Z вокруг образов этих точек, то точки $z = 0$, ∞ являются: одна простым и единственным корнем, а другая — простым и единственным полюсом функции $Z(z)$. Отсюда и вытекает наше утверждение об отсутствии отображений, отличных от рассмотренных.

Мы видим, что одно круговое кольцо отображается взаимно однозначно и конформно на другое в том и только том случае, когда для обоих колец одинаково отношение радиусов окружностей, это кольцо ограничивающих.

Произвольная двусвязная область и подавно не может быть требуемым способом отображена на произвольное круговое кольцо. Однако доказано, что для каждой двусвязной области существует круговое кольцо, на которое ее можно взаимно однозначно и конформно отобразить. Отношение радиусов окружностей, ограничивающих это кольцо, является параметром, в том смысле характеризующим рассматриваемую двусвязную область, что лишь те двусвязные области отображаются конформно друг на друга, для которых этот параметр имеет одно и то же значение.

Мы будем рассматривать двусвязные области, границами которых являются многоугольники, и найдем вид функций, взаимно однозначно и конформно отображающих круговые кольца на такие области. Формулы, которые мы выведем [1]), являются своеобразным обобщением формул Шварца — Кристоффеля, с помощью которых осуществляется конформное отображение круга на односвязную многоугольную область. С практической точки зрения большим недостатком формул Шварца — Кристоффеля является трудность определения входящих в эти формулы констант. Этим недостатком страдают, конечно, и наши обобщения формул Шварца — Кристоффеля, причем здесь к числу неизвестных констант прибавляется еще параметр области, т. е. отношение радиусов окружностей, ограничивающих кольцо.

Рассмотрим подробно тот случай, когда бесконечно далекая точка является внутренней точкой нашей многоугольной области S (в плоскости комплексного переменного z). Иначе говоря, S есть область вне двух непересекающихся многоугольников, которые мы обозначим A_0 и A_1.

Внутренние углы области при вершинах многоугольников A_0 и A_1 обозначим через $\pi\alpha_1, \pi\alpha_2, \ldots, \pi\alpha_n$.

[1]) Они были получены автором в 1928 году (см. Труды Физико-математического отделения Академии наук УССР, том VII, вып. 2, стр. 223—231).

За радиусы окружностей C_0 и C_1, ограничивающих кольцо G (в плоскости w), примем числа 1 и h, где положительный и меньший единицы параметр h наперед не известен и подлежит отысканию.

Наконец, обозначим через $a_1, a_2, \ldots, a_n$ точки окружностей C_0 и C_1, являющиеся прообразами вершин области.

Примем далее, что прообразом бесконечно далекой точки области S является точка $w = c$, лежащая на положительной половине вещественной оси, так что $h < c < 1$. Легко видеть, что такое предположение допустимо и несущественно. Искомая функция $z = z(w)$ имеет в точке $w = c$ полюс первого порядка, а в остальных точках области G она регулярна и вплоть до границ непрерывна. Поэтому можно применить принцип симметрии Римана — Шварца и продолжить функцию $z(w)$ за пределы кольца G. В первую очередь мы можем сделать зеркальное отображение в плоскости z относительно какой-нибудь стороны многоугольника A_0 и зеркальное отображение в плоскости w относительно окружности C_0. Таким образом, функция $z(w)$ будет продолжена на кольцо G_{-1}, ограниченное окружностью C_0 и окружностью C_{-1}:

$$|w| = 1/h.$$

В кольце G_{-1} функция $z = z(w)$ имеет простой полюс $w = 1/c$. При дальнейших зеркальных отображениях мы получим кольца $G_1, G_{-2}, G_2, \ldots$ Четное число последовательных зеркальных отображений в плоскости z равносильно, как легко видеть, некоторой трансляции и некоторому повороту z-плоскости. Соответствующее преобразование в плоскости w дается формулой

$$w_1 = h^{2k} w.$$

Так как трансляция и поворот плоскости z выражаются формулой $z_1 = az + b$, где a и b — константы, то искомая функция $z = z(w)$ должна удовлетворять следующему соотношению:

$$z(h^{2k} w) = a\,z(w) + b.$$

Отсюда вытекает, что

$$\frac{d}{dw} z(h^{2k} w) = a \frac{d}{dw} z(w),$$

и, далее,

$$\frac{\dfrac{d^2}{dw^2} z(h^{2k} w)}{\dfrac{d}{dw} z(h^{2k} w)} = \frac{\dfrac{d^2}{dw^2} z(w)}{\dfrac{d}{dw} z(w)}.$$

Это равенство можно переписать в виде

$$h^{2k} \frac{z''(h^{2k} w)}{z'(h^{2k} w)} = \frac{z''(w)}{z'(w)},$$

и мы видим, что функция

$$\Phi(w) = w \frac{z''(w)}{z'(w)}$$

удовлетворяет соотношению

$$\Phi(h^{2k} w) = \Phi(w) \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Впрочем, достаточно записать его для $k = 1$:

$$\Phi(h^2 w) = \Phi(w). \tag{1}$$

Возьмем произвольное положительное число ω и, определив чисто мнимое число ω' так, чтобы

$$h = e^{\pi i \omega'/\omega},$$

положим

$$\Phi(w) = \varphi\left(\frac{\omega}{\pi i} \ln w\right).$$

Мы найдем тогда в силу (1) что функция $\varphi(u)$ удовлетворяет соотношению $\varphi(u + 2\omega') = \varphi(u)$.

Учтем теперь, что $\Phi(w)$ не меняется, когда точка w совершает обход по замкнутому контуру, лежащему в одном из колец G_k ($G_0 = G$) и охватывающему точку $w = 0$. Так как при этом обходе аргумент w увеличивается на 2π и, значит, величина $u = \dfrac{\omega}{\pi i} \ln w$ изменяется на 2ω, то должно иметь место равенство

$$\varphi(u + 2\omega) = \varphi(u). \tag{2}$$

Мы видим, что $\varphi(u)$ есть двоякопериодическая функция с периодами 2ω, $2\omega'$. Чтобы ее построить, необходимо исследовать особые точки этой функции в каком-нибудь прямоугольнике периодов. Это сводится к рассмотрению особых точек функции $\Phi(w)$ в некотором круговом кольце. В качестве такого кольца можно было бы взять то, границами которого являются окружности C_{-1}, C. Однако лучше взять кольцо Q, ограниченное окружностями $|w| = \varepsilon h^{-1}$, $|w| = \varepsilon h$, где ε меньше 1, но мало от нее отличается. На границах этого кольца функция $\Phi(w)$ регулярна, внутри же кольца единственными ее особыми точками являются

$$w = a_k,\ c,\ 1/c \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n);$$

и, как легко видеть, для этих точек имеют место разложения

$$z = L'' + L'(w - a_k)^{\alpha_k} + (w - a_k)^{\alpha_k + 1}\mathfrak{P}(w - a_k),$$

$$z = \frac{L'}{w - c} + \mathfrak{P}(w - c),$$

$$z = \frac{L'}{cw - 1} + \mathfrak{P}\left(w - \frac{1}{c}\right),$$

где $\mathfrak{P}$ — обычное обозначение степенного ряда, L'', L' — какие-то константы, в каждой формуле свои, $L' \neq 0$. Соответствующие разложения функции $\Phi(w)$ имеют вид

$$\Phi(w) = \frac{a_k(\alpha_k - 1)}{w - a_k} + \ldots,$$

$$\Phi(w) = -\frac{2c}{w - c} + \ldots,$$

$$\Phi(w) = -\frac{2}{cw - 1} + \ldots$$

С помощью этих формул мы находим, что для рассматриваемых точек

$$\varphi(u) = \frac{\omega}{\pi i}\,\frac{\alpha_k - 1}{u - \dfrac{\omega}{\pi i}\ln a_k} + \ldots,$$

$$\varphi(u) = -\frac{\omega}{\pi i}\,\frac{2}{u - \dfrac{\omega}{\pi i}\ln c} + \ldots,$$

$$\varphi(u) = -\frac{\omega}{\pi i}\,\frac{2}{u + \dfrac{\omega}{\pi i}\ln c} + \ldots$$

Таким образом, $\varphi(u)$ имеет только полюсы и притом простые. Сумма вычетов равна нулю, так как в силу теоремы о сумме внешних углов многоугольника

$$\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k - 1) = 4.$$

Как видим, $\varphi(u)$ есть функция эллиптическая, и на основании общей теоремы § 14

$$\varphi(u) = \frac{\omega}{\pi i}\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k - 1)\,\zeta\left(u - \frac{\omega}{\pi i}\ln a_k\right) - \\ - \frac{2\omega}{\pi i}\,\zeta\left(u - \frac{\omega}{\pi i}\ln c\right) - \frac{2\omega}{\pi i}\,\zeta\left(u + \frac{\omega}{\pi i}\ln c\right) + L,$$

где L — некоторая константа. Интегрируя и переходя от логарифмов к числам, получим

$$z'(w) = \mu w^{\lambda}\,\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\left[\vartheta_1\left(\dfrac{\ln w - \ln a_k}{2\pi i}\right)\right]^{\alpha_k - 1}}{\vartheta_1^2\left(\dfrac{\ln w - \ln c}{2\pi i}\right)\vartheta_1^2\left(\dfrac{\ln w + \ln c}{2\pi i}\right)} \tag{3}$$

где μ и λ — снова некоторые константы.

Заставим теперь точку w совершить обход по замкнутому контуру, охватывающему точку $w=0$ и лежащему в одном из колец G_k. Левая часть останется без изменения, а справа появится множитель

$$e^{2\pi i\lambda} e^{\pi i\left[\sum\limits_{k=1}^{n}(\alpha_k-1)-4\right]}=e^{2\pi i\lambda}.$$

Отсюда видно, что λ должно быть целым числом.

Если мы подвергнем область S непрерывной деформации, то будет изменяться непрерывным образом как величина h, так и функция $z(w)$. Поэтому λ также будет изменяться непрерывным образом. Являясь числом целым, λ должно оставаться неизменным. Чтобы найти λ, рассмотрим такую деформацию области S, при которой многоугольник A_1 без изменения углов стягивается в точку, так что в пределе мы получим отображение на круг области вне многоугольника A_0; параметр h в пределе, как легко видеть, будет равен нулю. Для функции, отображающей предельную область

$$z_0'(w)=\mu_0\prod_{k=1}^{m}(w-\widetilde{a}_k)^{\alpha_k-1}\frac{1}{(w-c)^2(w-1/c)^2}, \qquad (3')$$

если принять, что вершинами многоугольника A_0 являются первые m вершин области S. Вместе с тем функция (3) при этом предельном переходе превращается в

$$\mu w^{\lambda}\prod_{k=1}^{m}(w-a_k)^{\alpha_k-1}w^{\sum\limits_{j=m+1}^{n}(\alpha_j-1)}\frac{1}{(w-c)^2(w-1/c)^2}, \qquad (3'')$$

где параметры μ, a_k, c могут иметь другие значения, чем в (3). Однако можно принять, что параметр c в (3′) и (3″) одинаков. Так как

$$\sum_{j=m+1}^{n}(\alpha_j-1)=2,$$

то из сравнения (3′) и (3″) заключаем, что $\lambda+2=0$, и значит, формула (3) должна иметь вид

$$z'(w)=\frac{\mu}{w^2}\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\left[\vartheta_1\left(\frac{\ln w-\ln a_k}{2\pi i}\right)\right]^{\alpha_k-1}}{\vartheta_1^2\left(\frac{\ln w-\ln c}{2\pi i}\right)\vartheta_1^2\left(\frac{\ln w+\ln c}{2\pi i}\right)}.$$

Отсюда

$$c_1z+c_2=\int\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\left[\vartheta_1\left(\frac{\ln w-\ln a_k}{2\pi i}\right)\right]^{\alpha_k-1}}{\vartheta_1^2\left(\frac{\ln w-\ln c}{2\pi i}\right)\vartheta_1^2\left(\frac{\ln w+\ln c}{2\pi i}\right)}\frac{dw}{w^2}.$$

Отметим еще, что между подлежащими определению параметрами существует одно соотношение. Чтобы его получить, запишем, что z не меняется, когда точка w совершает обход вокруг точки $w=c$. Находя вычет подынтегральной функции относительно точки $w=c$ и приравнивая его нулю, мы и получим искомое соотношение

$$\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k-1)\frac{\vartheta_1'\left(\frac{\ln c-\ln a_k}{2\pi i}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\ln c-\ln a_k}{2\pi i}\right)}-2\frac{\vartheta_1'\left(\frac{\ln c}{\pi i}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\ln c}{\pi i}\right)}=2\pi i.$$

Совершенно аналогично трактуется случай, когда область конечна. В этом случае, обозначая по-прежнему внутренние углы области через $\pi\alpha_k$, мы найдем для отображающей функции следующую формулу:

$$c_1z+c_2=\int\prod_{k=1}^{n}\left[\vartheta_1\left(\frac{\ln w-\ln a_k}{2\pi i}\right)\right]^{\alpha_k-1}\frac{dw}{w^2}.$$

49. Примеры конформных отображений. В настоящем параграфе мы рассмотрим примеры конформных отображений многоугольных двусвязных областей. В первых двух примерах мы воспользуемся выведенными в § 48 формулами, хотя во втором примере отображающую функцию можно получить и не прибегая к общей теории.

П р и м е р 1. Отобразить на круговое кольцо область, ограниченную двумя заданными концентрическими правильными n-угольниками, соответственные вершины которых расположены на одном и том же луче, проведенном из центра.

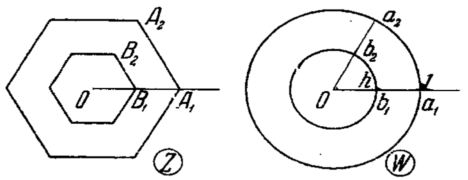


Рис. 21.

Пусть радиусы окружностей, ограничивающих кольцо, равняются 1 и h $(0<h<1)$, и пусть образом вершины A_1 внешнего многоугольника является точка 1 (рис. 21).

Тогда из соображений симметрии следует, что вершинам A_r и B_r соответствуют в плоскости кольца точки $a_r = e^{2(r-1)\pi i/n}$, $b_r = ha_r$ $(r = 1, 2, \ldots, n)$.

Введем теперь чисто мнимое τ $(\tau/i > 0)$ так, чтобы $h = e^{\pi i\tau}$.

Так как внутренние углы многоугольной области равны соответственно

$$\pi\alpha_r = (1 - 2/n)\,\pi \quad \text{при вершине } A_r,$$

и

$$\pi\beta_r = (1 + 2/n)\,\pi \quad \text{при вершине } B_r,$$

то, применяя общую формулу, получим для отображающей функции выражение

$$z - 1 = C' \int_1^w \prod_{r=1}^{n} \left[\frac{\vartheta_1\left(\dfrac{\ln u - \ln ha_r}{2\pi i}\right)}{\vartheta_1\left(\dfrac{\ln u - \ln a_r}{2\pi i}\right)}\right]^{\frac{2}{n}} \frac{du}{u^2}, \tag{1}$$

где $\vartheta_1(v) = \vartheta_1(v \mid \tau)$. Но

$$\vartheta_1\left(\frac{\ln u - \ln ha_r}{2\pi i}\right) = \vartheta_1\left(\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{u}{a_r} - \frac{\tau}{2}\right) = \\ = \mathrm{const}\, u^{1/2}\,\vartheta_0\left(\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{u}{a_r}\right),$$

поэтому

$$\frac{\vartheta_1\left(\dfrac{\ln u - \ln ha_r}{2\pi i}\right)}{\vartheta_1\left(\dfrac{\ln u - \ln a_r}{2\pi i}\right)} = \mathrm{const}\, u^{1/2}\,\frac{\vartheta_0\left(\dfrac{1}{2\pi i}\ln\dfrac{u}{a_r}\right)}{\vartheta_1\left(\dfrac{1}{2\pi i}\ln\dfrac{u}{a_r}\right)} = \\ = \mathrm{const}\,\frac{u^{1/2}}{\mathrm{sn}\left(\dfrac{K}{\pi i}\ln\dfrac{u}{a_r};\ k\right)}.$$

Пользуясь последним равенством, мы можем придать отображающей функции (1) вид [1]

$$z - 1 = C' \int_1^w \frac{du}{u\sqrt[n]{\prod\limits_{r=1}^{n} \mathrm{sn}^2\left(\dfrac{K}{\pi i}\ln\dfrac{u}{a_r};\ k\right)}}$$

или

$$z - 1 = C' \int_1^w \frac{du}{u\sqrt[n]{\prod\limits_{r=-n}^{n-1} \mathrm{sn}\left(\dfrac{K}{\pi i}\ln u - \dfrac{2rK}{n};\ k\right)}}.$$

Учитывая, что

$$\mathrm{sn}(v + \alpha)\,\mathrm{sn}(v - \alpha) = \frac{\mathrm{sn}^2 v - \mathrm{sn}^2 \alpha}{1 - k^2\,\mathrm{sn}^2\alpha\,\mathrm{sn}^2 v},$$

можем написать

$$\prod_{r=-n}^{n-1} \mathrm{sn}\left(v - \frac{2rK}{n}\right) = -\,\mathrm{sn}^2 v \prod_{r=1}^{n-1} \frac{\mathrm{sn}^2 v - \mathrm{sn}^2\dfrac{2rK}{n}}{1 - k^2\,\mathrm{sn}^2\dfrac{2rK}{n}\,\mathrm{sn}^2 v}.$$

[1]) Константа C' в каждой формуле имеет свое значение.

А так как

$$\operatorname{sn}^2 \frac{2\alpha K}{n} = \operatorname{sn}^2 \frac{2(n-\alpha) K}{n},$$

то величина

$$\prod_{r=-n}^{n-1} \operatorname{sn}\left(v - \frac{2rK}{n}\right) = \Omega$$

равна

$$-\operatorname{sn}^2 v \prod_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \left\{ \frac{\operatorname{sn}^2 v - \operatorname{sn}^2 \dfrac{2rK}{n}}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \dfrac{2rK}{n} \operatorname{sn}^2 v} \right\}^2$$

при нечетном n и равна

$$\frac{\operatorname{sn}^2 v \operatorname{cn}^2 v}{\operatorname{dn}^2 v} \prod_{r=1}^{\frac{n}{2}-1} \left\{ \frac{\operatorname{sn}^2 v - \operatorname{sn}^2 \dfrac{2rK}{n}}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \dfrac{2rK}{n} \operatorname{sn}^2 v} \right\}^2$$

при четном n.

На основании таблицы XXII мы заключаем, что в обоих случаях

$$\Omega = N \operatorname{sn}^2\left(\frac{v}{M};\ \lambda\right), \qquad L = \frac{K}{nM}, \qquad L' = \frac{K'}{M},$$

где N — константа, а λ и M определяются с помощью указанных в таблице XXII формул.

Итак, отображающей функции можно придать вид

$$z - 1 = C \int_1^w \frac{du}{u \sqrt[n]{\operatorname{sn}^2\left(\dfrac{K \ln u}{M\pi i};\ \lambda\right)}},$$

где

$$\lambda = k^n \prod_{r=1}^{[n/2]} \operatorname{sn}^4\left(\frac{2r-1}{n} K;\ k\right),$$

$$M = \prod_{r=1}^{[n/2]} \frac{\operatorname{sn}^2\left(\dfrac{2r-1}{n} K;\ k\right)}{\operatorname{sn}^2\left(\dfrac{2r}{n} K;\ k\right)},$$

а C — некоторая постоянная.

Полезно сравнить полученный нами результат с функцией, которая отображает единичный круг плоскости w на правильный n-угольник, вписанный в единичный круг плоскости z. Если принять, что точки $w = 0$, $w = 1$ переходят соответственно в точки $z = 0$, $z = 1$, то для отображающей функции мы будем иметь

$$z - 1 = C \int_1^w \frac{du}{\sqrt[n]{(u^n - 1)^2}}. \tag{2}$$

Замечая, что

$$u^{n/2} - u^{-n/2} = 2i \sin \frac{n \ln u}{2i},$$

можем формулу (2) переписать в виде

$$z - 1 = C \int_1^w \frac{du}{u \sqrt[n]{\sin^2 \dfrac{n \ln u}{2i}}}.$$

Мы видим, что в нашем случае функция sn находится на том месте, где в этой формуле обыкновенный синус.

П р и м е р 2. Отобразить на круговое кольцо плоскость, разрезанную вдоль двух заданных параллельных отрезков, симметричных относительно вещественной оси (рис. 22).

Пусть заданные отрезки A_1A_2, B_1B_2 имеют длину 2β и находятся на расстоянии α от оси OX; будем строить функцию, отображающую кольцо

$$h^{1/2} \leqslant |u| \leqslant h^{-1/2} \qquad (0 < h < 1)$$

на плоскость, разрезанную вдоль A_1A_2 и B_1B_2. В силу

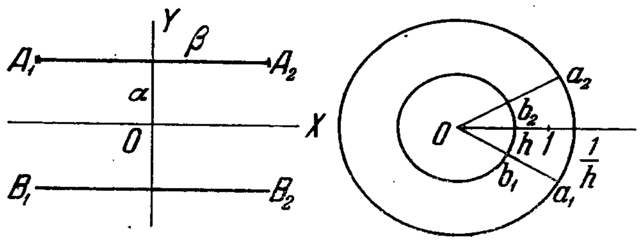


Рис. 22.

симметрии, можно принять, что прообразами концов A_1, A_2, B_1, B_2 отрезков являются точки

$$a_1 = h^{-1/2}e^{-i\mu}, \quad a_2 = \frac{1}{ha_1},$$

$$b_1 = ha_1, \qquad b_2 = \frac{1}{a_1}.$$

При этом прообразом бесконечно далекой точки плоскости z будет точка $u = 1$.

Принимая эти данные и полагая в общей формуле § 48 $w = h^{1/2}u$, будем иметь [1])

$$A'z + B' = \\ = \int \frac{\vartheta_1\left(\frac{\ln u - \ln a_1}{2\pi i}\right) \vartheta_1\left(\frac{\ln u + \ln a_1}{2\pi i}\right) \vartheta_1\left(\frac{\ln u - \ln ha_1}{2\pi i}\right) \vartheta_1\left(\frac{\ln u + \ln ha_1}{2\pi i}\right)}{\vartheta_1^2\left(\frac{\ln u}{2\pi i}\right) \vartheta_1^2\left(\frac{\ln u + \ln h}{2\pi i}\right)} \frac{du}{u^2},$$

---

[1]) Константы A', B' в различных формулах имеют различные значения.

где

$$\vartheta_1(v) = \vartheta_1(v \mid \tau), \qquad h = e^{\pi i \tau},$$

или, в силу формул приведения тэта-функций,

$$A'z + B' = \\ = \int \frac{\vartheta_1\left(\frac{\ln u - \ln a_1}{2\pi i}\right) \vartheta_0\left(\frac{\ln u - \ln a_1}{2\pi i}\right) \vartheta_1\left(\frac{\ln u + \ln a_1}{2\pi i}\right) \vartheta_0\left(\frac{\ln u + \ln a_1}{2\pi i}\right)}{\vartheta_1^2\left(\frac{\ln u}{2\pi i}\right) \vartheta_0^2\left(\frac{\ln u}{2\pi i}\right)} \frac{du}{u}.$$

Если еще воспользоваться тождеством

$$\vartheta_1(v \mid \tau)\,\vartheta_0(v \mid \tau) = \frac{1}{2}\vartheta_2\left(0 \,\middle|\, \frac{\tau}{2}\right)\vartheta_1\left(v \,\middle|\, \frac{\tau}{2}\right)$$

(см. таблицу XXI), то получим

$$A'z + B' = \\ = \int \frac{\vartheta_1\left(\frac{\ln u + \ln a_1}{2\pi i} \,\middle|\, \frac{\tau}{2}\right)\vartheta_1\left(\frac{\ln u - \ln a_1}{2\pi i} \,\middle|\, \frac{\tau}{2}\right)}{\vartheta_1^2\left(\frac{\ln u}{2\pi i} \,\middle|\, \frac{\tau}{2}\right)} \frac{du}{u}. \qquad (3)$$

Рассмотрим выражение

$$\frac{\vartheta_1(v + c \mid \tau/2)\,\vartheta_1(v - c \mid \tau/2)}{\vartheta_1^2(v \mid \tau/2)}.$$

Это — эллиптическая функция с периодами 1, $\tau/2$. Легко видеть, что ее разложение на простейшие дроби можно записать в виде

$$\frac{\vartheta_1(v + c)\vartheta_1(v - c)}{\vartheta_1^2(v)} = L\left[\frac{\vartheta_1'(v)}{\vartheta_1(v)}\right]' + M\frac{\vartheta_1'(v)}{\vartheta_1(v)} + N,$$

где L, M, N — некоторые константы. Так как второй член правой части есть нечетная функция от v, а все остальные члены равенства — четные, то $M = 0$. Разлагая обе части равенства по степеням v^2, получим

$$-\frac{\vartheta_1^2(c)}{\vartheta_1'^2(0)}\frac{1}{v^2}+\frac{\vartheta_1^2(c)\vartheta_1'''(0)}{3\vartheta_1'^3(0)}+\frac{\vartheta_1'^2(c)-\vartheta_1(c)\vartheta_1''(c)}{\vartheta_1'^2(0)}+\ldots=$$
$$=L\left\{-\frac{1}{v^2}+\frac{\vartheta_1'''(0)}{3\vartheta_1'(0)}+\ldots\right\}+N.$$

Отсюда

$$L=\frac{\vartheta_1^2(c)}{\vartheta_1'^2(0)},\qquad N=\frac{\vartheta_1'^2(c)-\vartheta_1(c)\vartheta_1''(c)}{\vartheta_1'^2(0)}.$$

Применяя рассмотренное разложение на простейшие дроби к интегралу (3), получим следующее представление отображающей функции:

$$A'z+B'=2\pi i\,\frac{\vartheta_1^2\left(\frac{\ln a_1}{2\pi i}\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)\vartheta_1'\left(\frac{\ln u}{2\pi i}\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)}{\vartheta_1'^2\left(0\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)\vartheta_1\left(\frac{\ln u}{2\pi i}\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)}+$$
$$+\frac{\vartheta_1'^2\left(\frac{\ln a_1}{2\pi i}\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)-\vartheta_1\left(\frac{\ln a_1}{2\pi i}\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)\vartheta_1''\left(\frac{\ln a_1}{2\pi i}\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)}{\vartheta_1'^2\left(0\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)}\ln u.$$

Так как отображающая функция внутри кольца однозначна, то второй член правой части должен равняться нулю. Это дает

$$Az+B=\frac{\vartheta_1'\left(\frac{\ln u}{2\pi i}\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\ln u}{2\pi i}\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)},$$

причем

$$\vartheta_1'^2\left(\frac{\ln a_1}{2\pi i}\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)-\vartheta_1\left(\frac{\ln a_1}{2\pi i}\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)\vartheta_1''\left(\frac{\ln a_1}{2\pi i}\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)=0. \quad (4)$$

Из соображений симметрии ясно, что точка $z=0$ переходит в точку $u=-1$. Поэтому

$$B=\frac{\vartheta_1'\left(\frac{1}{2}\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{1}{2}\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)}=0.$$

С другой стороны, точке $z=\beta+i\alpha$ должна отвечать точка $u=a_2=h^{-1/2}e^{i\mu}$. Следовательно,

$$A(\beta+i\alpha)=-\frac{\vartheta_1'\left(\frac{\tau}{4}-\frac{\mu}{2\pi}\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\tau}{4}-\frac{\mu}{2\pi}\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)}=\pi i+\frac{\vartheta_0'\left(\frac{\mu}{2\pi}\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{\mu}{2\pi}\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)}$$

и аналогично найдем

$$A(-\beta+i\alpha)=\pi i-\frac{\vartheta_0'\left(\frac{\mu}{2\pi}\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{\mu}{2\pi}\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)}.$$

Отсюда

$$A=\pi/\alpha$$

и

$$\pi\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\vartheta_0'\left(\frac{\mu}{2\pi}\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{\mu}{2\pi}\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)}. \quad (5)$$

Таким образом, отображающая функция имеет вид

$$z=\frac{\alpha}{\pi}\,\frac{\vartheta_1'\left(\frac{\ln u}{2\pi i}\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\ln u}{2\pi i}\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)},$$

и остается еще написать два уравнения, которые служат для отыскания μ и τ. Одним уравнением является (5). Второе уравнение получается из (4) и может быть записано в виде

$$\pi\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\vartheta_0''\left(\frac{\mu}{2\pi}\middle|\frac{\tau}{2}\right)}{\vartheta_0'\left(\frac{\mu}{2\pi}\middle|\frac{\tau}{2}\right)}. \tag{6}$$

Уравнения (5), (6) можно представить в другой форме, которая удобнее для вычислений. Приведем результат без доказательства. Он состоит в следующем: пусть

$$q=e^{\frac{\pi i\tau}{2}},\qquad \sqrt{k}=\frac{2(q^{1/4}+q^{9/4}+\ldots)}{1+2q+\ldots},\qquad \lambda=\frac{1}{k}\sqrt{\frac{K-E}{K}},$$

тогда

$$\mu=\frac{\pi}{K}\int_0^\lambda\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

и

$$\beta=\frac{2\alpha}{\pi}\left\{K\int_0^\lambda\sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\,dt-E\int_0^\lambda\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}\right\}.$$

Таким образом, можно задаваться величиной q, т. е. радиусами границ кольца. По выбранному q мы найдем с помощью таблиц как величину μ, так и отношение β к α. Это позволит построить (например, графически) зависимость между q и β/α. Имея же эту зависимость, можно в качестве исходного параметра брать отношение β/α.

Пример 3. Отобразить на круговое кольцо плоскости w плоскость z, разрезанную вдоль двух заданных отрезков вещественной оси.

Пусть отрезками вещественной оси плоскости z являются

$$[-1,\ \alpha],\quad [\beta,\ 1]\qquad (-1<\alpha<\beta<1).$$

Положим

$$k^2=\frac{2(\beta-\alpha)}{(1-\alpha)(1+\beta)} \tag{7}$$

и примем число k $(0<k<1)$ за модуль эллиптических функций.

Далее определим число ρ из уравнения

$$1-2\,\mathrm{sn}^2\rho=\alpha \tag{8}$$

при дополнительном условии $0<\rho<K$.

Из (7) и (8) следует, что

$$2\frac{\mathrm{cn}^2\rho}{\mathrm{dn}^2\rho}-1=\beta.$$

Теперь положим

$$z=\frac{\mathrm{sn}^2u\,\mathrm{cn}^2\rho+\mathrm{cn}^2u\,\mathrm{sn}^2\rho}{\mathrm{sn}^2u-\mathrm{sn}^2\rho},$$

что можно переписать также в виде

$$z-\alpha=\frac{1-\alpha^2}{2\,\mathrm{sn}^2u+\alpha-1}. \tag{9}$$

Возьмем теперь в плоскости u прямоугольник Δ, определяемый неравенствами

$$-K\leqslant\Re u\leqslant 0,\qquad -K'\leqslant\Im u\leqslant K'.$$

Вещественная ось разбивает этот прямоугольник на два прямоугольника: верхний и нижний. Обойдем в положительном направлении границу верхнего прямоугольника, начиная с точки $u=-\rho$. Легко видеть, что при таком обходе точка z опишет вещественную ось от точки $-\infty$ до точки ∞. С помощью формулы (9) упомянутый верхний прямоугольник отображается поэтому на верхнюю половину плоскости z. При этом нижнему основанию прямоугольника отвечает та часть вещественной оси плоскости z, которая получается удалением отрезка $[-1,\ 1]$. Далее, той же формулой (9) нижний прямоугольник отображается на нижнюю половину плоскости z.

Поэтому наша формула (9) отображает весь прямоугольник Δ на всю плоскость z, разрезанную вдоль отрезка $[-1,\ 1]$. Теперь положим

$$u=\frac{K'}{\pi}\ln w$$

при дополнительном условии, что $u = 0$ для $w = 1$. С помощью этой формулы прямоугольник Δ отображается на кольцо плоскости w, ограниченное окружностями

$$|w| = 1, \qquad |w| = e^{-\pi K/K'}$$

и разрезанное вдоль отрезка отрицательной половины вещественной оси. Устранение этого разреза равносильно

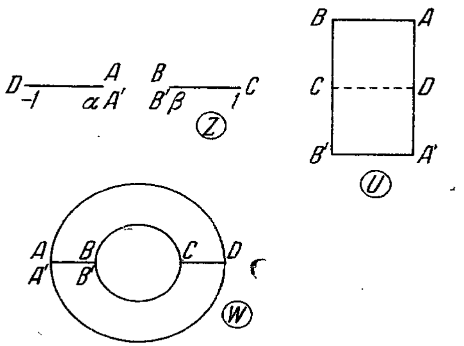


Рис. 23.

в плоскости u отождествлению верхней стороны прямоугольника Δ с нижней, а в плоскости z — сшиванию верхней полуплоскости с нижней вдоль отрезка $[\alpha, \beta]$ вещественной оси (рис. 23).

Отсюда следует, что формула

$$z = \alpha + \frac{1-\alpha^2}{2\operatorname{sn}^2 \dfrac{K' \ln w}{\pi} + \alpha - 1}$$

дает искомое отображение.

ГЛАВА IX

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ДРОБЕЙ, К КОТОРЫМ ПРИВОДИТ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

50. Постановка задач. В 1877 году в Записках Российской Академии наук появилась большая статья Е. И. Золотарева, озаглавленная «Приложение эллиптических функций к вопросам о функциях, наименее и наиболее отклоняющихся от нуля».

В начале своей статьи Золотарев пишет:

«Несмотря на уже имеющиеся, в высшей степени замечательные, приложения эллиптических функций к теории чисел, геометрии и механике, я полагаю, что со стороны приложений теория эллиптических функций оставляет желать еще многого.

Поэтому я счел не лишним рассмотреть некоторые вопросы о наименьших величинах, которые решаются при помощи основных формул теории эллиптических функций. Эти вопросы принадлежат к тому классу вопросов о наименьших величинах, приемы для решения которых были даны в первый раз П. Л. Чебышевым».

Золотарев ставит и решает четыре задачи. В первых двух задачах речь идет о полиномах, а в третьей и четвертой задачах о рациональных дробях. Две последние задачи, особенно интересные в математическом отношении, имеют также большое значение для некоторых современных электротехнических расчетов [1]). К этим

[1]) Мы имеем в виду работы В. Кауэра по теории и расчету электрических фильтров. См. W. Cauer, Theorie der linearen Wechselstromschaltungen, изд. 2, Berlin, Akademie-Verlag, 1954. См. также В. А. Тафт, Основы методики расчета линейных электрических цепей по заданным их частотным характеристикам, Изд-во АН СССР, 1954.

при дополнительном условии, что $u = 0$ для $w = 1$. С помощью этой формулы прямоугольник Δ отображается на кольцо плоскости w, ограниченное окружностями

$$|w| = 1, \qquad |w| = e^{-\pi K/K'}$$

и разрезанное вдоль отрезка отрицательной половины вещественной оси. Устранение этого разреза равносильно

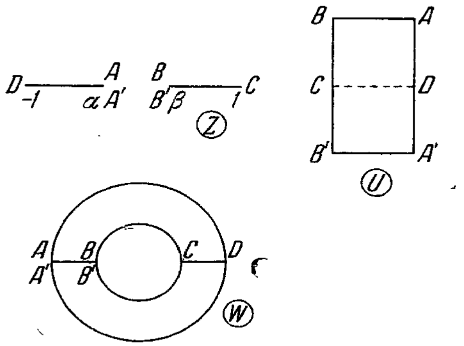


Рис. 23.

в плоскости u отождествлению верхней стороны прямоугольника Δ с нижней, а в плоскости z — сшиванию верхней полуплоскости с нижней вдоль отрезка $[\alpha, \beta]$ вещественной оси (рис. 23).

Отсюда следует, что формула

$$z = \alpha + \frac{1-\alpha^2}{2\,\mathrm{sn}^2 \dfrac{K' \ln w}{\pi} + \alpha - 1}$$

дает искомое отображение.

ГЛАВА IX

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ДРОБЕЙ, К КОТОРЫМ ПРИВОДИТ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

50. Постановка задач. В 1877 году в Записках Российской Академии наук появилась большая статья Е. И. Золотарева, озаглавленная «Приложение эллиптических функций к вопросам о функциях, наименее и наиболее отклоняющихся от нуля».

В начале своей статьи Золотарев пишет:

«Несмотря на уже имеющиеся, в высшей степени замечательные, приложения эллиптических функций к теории чисел, геометрии и механике, я полагаю, что со стороны приложений теория эллиптических функций оставляет желать еще многого.

Поэтому я счел не лишним рассмотреть некоторые вопросы о наименьших величинах, которые решаются при помощи основных формул теории эллиптических функций. Эти вопросы принадлежат к тому классу вопросов о наименьших величинах, приемы для решения которых были даны в первый раз П. Л. Чебышевым».

Золотарев ставит и решает четыре задачи. В первых двух задачах речь идет о полиномах, а в третьей и четвертой задачах о рациональных дробях. Две последние задачи, особенно интересные в математическом отношении, имеют также большое значение для некоторых современных электротехнических расчетов [1]). К этим

[1]) Мы имеем в виду работы В. Кауэра по теории и расчету электрических фильтров. См. W. Cauer, Theorie der linearen Wechselstromschaltungen, изд. 2, Berlin, Akademie-Verlag, 1954. См. также В. А. Тафт, Основы методики расчета линейных электрических цепей по заданным их частотным характеристикам, Изд-во АН СССР, 1954.

задачам примыкает ряд других задач и, в частности, одна задача Чебышева, которую он решил через двенадцать лет после Золотарева.

В настоящем параграфе мы приведем формулировки задач, а также установим связи между ними [1]). Решению мы посвятим следующий параграф.

Условимся называть уклонением непрерывной функции $g(x)$ от непрерывной функции $f(x)$ на конечном или бесконечном замкнутом точечном множестве $\mathscr{E}$ числовой оси величину

$$\sup_{\mathscr{E}} |f(x) - g(x)|.$$

Для наших целей удобно рассматривать как один (несобственный) интервал совокупность двух интервалов $[-\infty, \alpha]$, $[\beta, \infty]$, где $\alpha < \beta$. Мы условимся такой интервал обозначать $[\beta, \alpha]$. Таким образом, $[a, b]$ есть обычный интервал, если $a < b$, и несобственный интервал, если $a > b$.

Пусть на вещественной оси даны два замкнутых интервала I_1, I_2, не имеющие общих точек. Один из этих интервалов может содержать бесконечно далекую точку внутри или на границе.

З а д а ч а A^*. Среди всех вещественных функций $\varphi(x)/\psi(x)$, где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — многочлены степени n, найти ту, которая на точечном множестве, состоящем из интервалов I_1, I_2, наименее уклоняется от функции

$$h(x) = \begin{cases} -1 & (x \in I_1), \\ 1 & (x \in I_2). \end{cases}$$

З а д а ч а B^*. Дан замкнутый конечный или бесконечный интервал E числовой оси, не содержащий точки нуль. Рассматривается совокупность всех рациональных дробей степени n, которые в интервале I_2 принимают значения из интервала E. Среди этих дробей требуется найти ту, которая наименее уклоняется от нуля в интервале I_1.

З а д а ч а A^* в существенном совпадает с четвертой задачей Золотарева, а задачей B^*— с третьей.

[1]) Я использую здесь свою статью «Об одной задаче Е. И. Золотарева» (Изв. Акад. наук СССР, 1929), а также две заметки в Сообщениях Харьковского математического общества за 1933 и 1935 гг.

З а д а ч а C^*. Среди всех вещественных функций $\Phi(x)/\Psi(x)$, где $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ — многочлены степени r, найти ту, для которой логарифм отношения

$$\sqrt{x} : \frac{\Phi(x)}{\Psi(x)}$$

наименее уклоняется от нуля в заданном интервале $[1, 1/k^2]$, где $0 < k < 1$.

Это — задача Чебышева.

В задачах A^* и B^* задаются произвольные интервалы. Однако, подвергая x дробно-линейному преобразованию, мы можем вместо этих интервалов ввести какие-нибудь вполне определенные интервалы.

Поэтому вместо задачи A^* можно взять следующую.

З а д а ч а A. Среди всех вещественных функций

$$y = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — многочлены степени n, найти ту, которая на точечном множестве, составленном из двух интервалов:

$$[-1/k, -1], \ [1, 1/k] \qquad (0 < k < 1), \tag{1}$$

наименее уклоняется от функции

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} -1 & (x < 0) \\ 1 & (x > 0). \end{cases}$$

В задаче B^* дается некоторое неравенство, которому должна удовлетворять функция в интервале I_2. Подвергая дробно-линейному преобразованию также и функцию, можем задачу B^* свести к следующей.

З а д а ч а B. Среди всех вещественных рациональных дробей n-й степени

$$z = \frac{f(t)}{g(t)},$$

которые в интервале $[1/\varkappa, -1/\varkappa]$ $(0 < \varkappa < 1)$ удовлетворяют неравенству $|z| \geqslant 1$, найти ту, которая в интервале $[-1, 1]$ наименее уклоняется от нуля.

Покажем, что одна из задач A, B может быть сведена к другой.

Пусть несократимая дробь

$$z = \frac{f_0(t)}{g_0(t)}$$

есть решение задачи B. Легко видеть, что многочлен $f_0(t)$ будет точно степени n. Действительно, если бы степень $f_0(t)$ была ниже n, то функция

$$\tilde{z} = \frac{\varkappa t f_0(t)}{g_0(t)}$$

также была бы рациональной дробью степени n и в интервале $[1/\varkappa, -1/\varkappa]$ мы также имели бы неравенство $|\tilde{z}| \geqslant 1$. Вместе с тем в интервале $[-1, 1]$

$$\max|\tilde{z}| \leqslant \varkappa \max|z| < \max|z|$$

и, значит, z не могла бы быть решением задачи B.

Легко также видеть, что

$$\min_{[1/\varkappa, -1/\varkappa]} |z| = 1.$$

Пусть

$$\max_{[-1, 1]} |z| = m.$$

Число m наверно меньше 1, как показывает функция $z = \varkappa t$, удовлетворяющая условиям задачи B. Положим

$$y = \frac{1-m}{1+m} \frac{z - \sqrt{m}}{z + \sqrt{m}},$$

$$x = \frac{1+\sqrt{\varkappa}}{1-\sqrt{\varkappa}} \frac{t\sqrt{\varkappa} - 1}{t\sqrt{\varkappa} + 1},$$

$$k = \left(\frac{1-\sqrt{\varkappa}}{1+\sqrt{\varkappa}}\right)^2.$$

Если $-1 \leqslant t \leqslant 1$, то $-1/k \leqslant x \leqslant -1$; подобным образом, если $|t| \geqslant 1/\varkappa$, то $1 \leqslant x \leqslant 1/k$. Таким образом, на оси x

мы имеем два интервала:

$$[-1/k, -1], \quad [1, 1/k]. \tag{1}$$

В первом интервале по условию $\max|z| = m$. А так как

$$y + 1 = \frac{2(z + m\sqrt{m})}{(1+m)(z+\sqrt{m})},$$

то в первом интервале

$$\max|y+1| = \frac{2\sqrt{m}}{1+m}.$$

Во втором интервале, как мы знаем, $\min|z| = 1$. Поэтому во втором интервале

$$\max|y-1| = \frac{2\sqrt{m}}{1+m}.$$

Мы видим, что уклонение функции y от функции $\operatorname{sign} x$ в интервалах (1) равно

$$\mu = \frac{2\sqrt{m}}{1+m};$$

μ есть монотонно возрастающая функция от m в интервале $(0, 1)$.

Отсюда мы и усматриваем, что $y = y(x)$ есть решение задачи A. Таким образом, имея решение задачи B, легко получить решение задачи A. Но и наоборот, если известно решение $y = y(x)$ задачи A, то легко найти решение $z = z(t)$ задачи B.

Из сделанного выше заключения о том, что степень многочлена $f_0(t)$ в точности равна n, следует, что если несократимая дробь $y = \varphi(x)/\psi(x)$ есть решение задачи A, то из функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$ по крайней мере одна будет точно степени n.

Пусть несократимая дробь

$$y = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

является решением задачи A. Обозначим через

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_q \tag{2}$$

последовательные точки, принадлежащие интервалам (1), в которых разность $y - \operatorname{sign} x$ принимает с чередующимися знаками свое максимальное численное значение в этих интервалах μ:

$$\mu = \max |y - \operatorname{sign} x|$$

(это число μ, очевидно, меньше 1).

Докажем, что число q не может быть меньше, чем $2n+2$.

Пусть в ряду (2) x_p есть последняя точка интервала $[-1/k, -1]$, а x_{p+1} — первая точка интервала $[1, 1/k]$. В таком случае величины $y(x_p) + 1$, $y(x_{p+1}) - 1$ имеют противоположные знаки.

С помощью точек

$$\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_{p-1}$$

разобьем интервал $[-1/k, -1]$ и с помощью точек

$$\xi_{p+1} < \xi_{p+2} < \ldots < \xi_{q-1}$$

разобьем интервал $[1, 1/k]$ на подынтервалы, в которых последовательно имеет место одно из неравенств

$$-\mu \leqslant y - \operatorname{sign} x < \mu - \alpha,$$

$$-\mu + \alpha < y - \operatorname{sign} x \leqslant \mu,$$

где α — какое-то положительное число. Затем построим функцию

$$\Omega(x) = (x - \xi_1)(x - \xi_2)\ldots(x - \xi_{p-1})\, x \times \\ \times (x - \xi_{p+1})(x - \xi_{p+2})\ldots(x - \xi_{q-1}),$$

степень которой $q - 1 \leqslant 2n$, если, вопреки тому, что надлежит доказать, $q < 2n+2$.

Так как $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ взаимно просты и по крайней мере одна из этих функций точно степени n, то можно найти такие многочлены $\varphi_1(x)$ и $\psi_1(x)$ степени не выше n-й, что

$$\Omega(x) = \varphi_1(x)\psi(x) - \varphi(x)\psi_1(x).$$

Введем теперь функцию

$$\tilde{y} = \frac{\varphi(x) - \theta\varphi_1(x)}{\psi(x) - \theta\psi_1(x)},$$

где θ — вещественный параметр, и рассмотрим выражение

$$\tilde{y} - \operatorname{sign} x = \frac{\varphi(x) - \theta\varphi_1(x)}{\psi(x) - \theta\psi_1(x)} - \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} + \{y - \operatorname{sign} x\} =$$

$$= \{y - \operatorname{sign} x\} - \frac{\theta\,\Omega(x)}{\psi(x)[\psi(x) - \theta\psi_1(x)]}.$$

По условию задачи функция $\psi(x)$ в интервалах (1) в нуль не обращается. Поэтому при достаточно малом $|\theta|$

$$\psi(x)[\psi(x) - \theta\psi_1(x)] > \sqrt{|\theta|}.$$

В силу характера функции $\Omega(x)$ можно так распорядиться знаком достаточно малой по модулю величины θ, чтобы в интервалах (1) имело место неравенство

$$|\tilde{y} - \operatorname{sign} x| < \mu,$$

что и доказывает наше утверждение.

Остановимся теперь на некоторых следствиях.

a) Если $R(x) = \varphi(x)/\psi(x)$ есть решение задачи A, то уравнение

$$\{R(x) - \operatorname{sign} x\}^2 = \mu^2 \tag{3}$$

имеет простые корни $-1/k$, -1, 1, $1/k$; все же корни этого уравнения, лежащие внутри интервалов (1) (полное число этих корней есть $2n-2$), являются двойными.

b) Если $R(x) = \varphi(x)/\psi(x)$ — решение задачи A, то в интервале $(-1, 1)$ может иметь корни только одно из уравнений

$$\varphi(x) = 0, \qquad \psi(x) = 0.$$

В самом деле, в противном случае функция $|R(x)|$ принимала бы в интервале $(-1, 1)$ значения $1-\mu$, $1+\mu$, и тогда число корней уравнения (3) в интервалах (1) было бы меньше, чем $2n+2$.

Отметим, что вместе с $\varphi(x)/\psi(x)$ решением задачи A будет $(1-\mu^2)\,\psi(x)/\varphi(x)$.

Отсюда в силу b) следует, что мы можем ограничиться отысканием тех решений, которые в интервале $(-1, 1)$ не обращаются в бесконечность.

Такое конечное решение единственно. Действительно, пусть имеются два решения:

$$\frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}, \qquad \frac{\varphi_2(x)}{\psi_2(x)}, \tag{4}$$

и пусть $x_1 < x_2 < \ldots < x_{2n+2}$ — «точки уклонения» для первого решения. Возьмем разность

$$\Delta(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)} - \frac{\varphi_2(x)}{\psi_2(x)} =$$

$$= \left\{\frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)} - \operatorname{sign} x\right\} - \left\{\frac{\varphi_2(x)}{\psi_2(x)} - \operatorname{sign} x\right\} = \Delta_1(x) - \Delta_2(x).$$

Пусть

$$\Delta_1(x_1) = \varepsilon\mu, \quad \Delta_1(x_2) = -\varepsilon\mu, \quad \Delta_1(x_3) = \varepsilon\mu, \ \ldots,$$

где $\varepsilon = \pm 1$. С другой стороны,

$$|\Delta_2(x_k)| \leqslant \mu \qquad (k = 1, 2, \ldots, 2n+2).$$

Поэтому величина $\Delta(x_k)$ либо равна нулю, либо имеет тот же знак, что и $\Delta_1(x_k)$. На основании этого легко заметить, что $\Delta(x)$ имеет в интервале $[-1/k, 1/k]$ по крайней мере $2n+1$ корней. А так как

$$\Delta(x) = \frac{\varphi_1(x)\,\psi_2(x) - \varphi_2(x)\,\psi_1(x)}{\psi_1(x)\,\psi_2(x)},$$

где числитель $\varphi_1(x)\,\psi_2(x) - \varphi_2(x)\,\psi_1(x)$ есть многочлен степени $2n$, то выражение $\Delta(x)$ тождественно равняется нулю, т. е. решения (4) не различны.

Теперь легко видеть, что решением задачи A может быть только нечетная функция. Действительно, пусть

$$R(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \tag{5}$$

— решение задачи A, остающееся конечным в интервале $(-1, 1)$. Но тогда функция

$$-R(-x) = -\frac{\varphi(-x)}{\psi(-x)} \tag{6}$$

также является подобным решением. Следовательно, функции (5) и (6) тождественны.

Установленные факты позволяют без труда показать эквивалентность задач A и C^*.

С этой целью заметим следующее: если

$$\max |\ln Y| = \ln H,$$

то

$$\max \left| 1 - \frac{2H}{H^2+1} Y \right| = \frac{H^2-1}{H^2+1}$$

и если

$$\max |1 - y| = G < 1,$$

то

$$\max \left| \ln \frac{y}{\sqrt{1-G^2}} \right| = \frac{1}{2} \ln \frac{1+G}{1-G}.$$

Поэтому задаче C^* эквивалентна

Задача C. Среди всех вещественных функций

$$Y = \sqrt{x}\,\frac{\Psi(x)}{\Phi(x)},$$

где $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ — многочлены степени r, найти ту, которая в интервале $[1, 1/k^2]$ наименее уклоняется от единицы.

Положим теперь $x = X^2$. Тогда вместо интервала $[1, 1/k^2]$ можно будет взять два интервала: $[-1/k, -1]$, $[1, 1/k]$. Наша функция превратится в

$$Y = \frac{X\,\Psi(X^2)}{\Phi(X^2)},$$

а величина

$$\max_{[1,\, 1/k^2]} \left| 1 - \frac{\sqrt{x}\,\Psi(x)}{\Phi(x)} \right|,$$

очевидно, равна

$$\max_{[-1/k,\,-1],\,[1,\,1/k]} \left| \operatorname{sign} X - \frac{X\Psi(X^2)}{\Phi(X^2)} \right|.$$

Мы пришли к задаче A при условии, что $n = 2r$ или $n = 2r + 1$.

Обратный переход (от задачи A к задаче C) еще проще.

На основании рассмотрений настоящего параграфа все сводится к решению задачи C.

51. Решение задачи C. Решение задачи C может быть получено с помощью одной общей теоремы Чебышева, которая состоит в следующем.

Пусть дан конечный замкнутый интервал $[a, b]$ и в нем две непрерывные функции $f(x)$ и $s(x)$, из которых вторая не обращается в нуль. Рассматриваются выражения вида

$$W(x) = s(x)\frac{q_0x^n + q_1x^{n-1} + \ldots + q_n}{p_0x^m + p_1x^{m-1} + \ldots + p_m},$$

где m и n заданы. Среди этих функций $W(x)$ существует наименее уклоняющаяся в $[a, b]$ от функции $f(x)$, и она единственна, если не считать различными две дроби, которые после сокращения совпадают.

Если эта функция имеет вид

$$P(x) = s(x)\frac{B(x)}{A(x)} = s(x)\frac{b_0x^{n-\nu} + b_1x^{n-\nu-1} + \ldots + b_{n-\nu}}{a_0x^{m-\mu} + a_1x^{m-\mu-1} + \ldots + a_{m-\mu}},$$

где $0 \leqslant \mu \leqslant m$, $0 \leqslant \nu \leqslant n$, $a_0 \neq 0$ и дробь $B(x)/A(x)$ несократима, то число последовательных точек интервала $[a, b]$, в которых разность $f(x) - P(x)$ с чередованием знаков принимает свое максимальное в $[a, b]$ численное значение, не менее, чем $m + n - d + 2$, где $d = \min\{\mu, \nu\}$. Это свойство вполне характеризует экстремальную функцию $P(x)$.

Для дальнейшего существенна лишь та часть теоремы, которая утверждает, что при выполнении указанного характерного условия функция $P(x)$ наименее уклоняется от $f(x)$. Это можно легко доказать тем же методом, каким в § 50 было доказано для частного случая задачи A, что она имеет не более одного решения.

Существование решения мы можем не доказывать, так как для случая, который нас будет интересовать, мы это решение фактически построим [1]).

В задаче C интервалом $[a, b]$ является $[1, 1/k^2]$, причем $f(x) = 1$, $s(x) = \sqrt{x}$, $m = n = r$. Приведем решение задачи в параметрической форме. Оно дается формулами

$$x = \operatorname{sn}^2(u;\ k), \qquad Y = \frac{2\lambda}{1+\lambda}\operatorname{sn}\left(\frac{u}{M};\ \lambda\right),$$

где

$$L = \frac{K}{M}, \qquad L' = \frac{K'}{(2r+1)M}.$$

Таким образом, Y есть та функция от x, которую мы получаем делением на $2r + 1$ второго периода.

Приступая к доказательству, прежде всего обратимся к таблице XXIII, в силу которой

$$Y = \frac{2\lambda}{1+\lambda}\frac{\operatorname{sn}(u;\ k)}{M}\prod_{\alpha=1}^{r}\frac{1 + \dfrac{\operatorname{sn}^2(u;\ k)}{c_{2\alpha}}}{1 + \dfrac{\operatorname{sn}^2(u;\ k)}{c_{2\alpha-1}}},$$

где $c_\alpha = \dfrac{\operatorname{sn}^2\left(\dfrac{\alpha}{2r+1}K';\ k'\right)}{\operatorname{cn}^2\left(\dfrac{\alpha}{2r+1}K';\ k'\right)}$. Поэтому

$$Y = \frac{2\lambda}{1+\lambda}\frac{\sqrt{x}}{M}\prod_{\alpha=1}^{r}\frac{1 + \dfrac{x}{c_{2\alpha}}}{1 + \dfrac{x}{c_{2\alpha-1}}},$$

откуда следует, что Y имеет требуемый вид.

Теперь надлежит рассмотреть разность $1 - Y$, когда x пробегает интервал $[1, 1/k^2]$.

[1]) Подробности относительно приведенной теоремы читатель найдет в книге Н. И. А х и е з е р, Лекции по теории аппроксимации, изд. 2-е, «Наука», Москва, 1965.

Положим $u = K + iv$; тогда

$$x = \operatorname{sn}^2(u;\ k) = \frac{\operatorname{cn}^2(iv;\ k)}{\operatorname{dn}^2(iv;\ k)} = \frac{1}{\operatorname{dn}^2(v;\ k')}.$$

Мы заставим v увеличиваться от 0 до K'. Тогда $\operatorname{dn}^2(v;\ k')$ будет убывать от 1 до $1 - k'^2 = k^2$, а значит, x будет возрастать от 1 до $1/k^2$. Это и есть интервал, в котором изменяется x.

Возьмем разность $\Delta(x) = 1 - Y$. Она равна

$$\Delta(x) = 1 - \frac{2\lambda}{1+\lambda} \operatorname{sn}\left(\frac{K+iv}{M};\ \lambda\right) =$$

$$= 1 - \frac{2\lambda}{1+\lambda} \frac{1}{\operatorname{dn}(v/M;\ \lambda')} = 1 - \frac{2\lambda}{1+\lambda} \frac{1}{\operatorname{dn}(w;\ \lambda')}.$$

Пусть v растет от 0 до K'. Это значит, что w растет от 0 до $(2r+1)L'$. Функция $\operatorname{dn}(w;\ \lambda')$ будет постоянно заключена между 1 и $\sqrt{1-\lambda'^2} = \lambda$. При этом в точках $w = 0$, L', $2L'$, ..., $2rL'$, $(2r+1)L'$ она будет иметь значения 1, λ, 1, ..., 1, λ. Соответствующие значения $\Delta(x)$ равны

$$\frac{1-\lambda}{1+\lambda},\ -\frac{1-\lambda}{1+\lambda},\ \ldots,\ -\frac{1-\lambda}{1+\lambda}.$$

Таким образом, разность $1 - Y$ принимает свое максимальное численное значение $\frac{1-\lambda}{1+\lambda}$ в $2r+2$ последовательных точках

$$x_0 = 1,\quad x_1 = \frac{1}{\operatorname{dn}^2\left(\frac{K'}{2r+1};\ k'\right)},\quad x_2 = \frac{1}{\operatorname{dn}^2\left(\frac{2K'}{2r+1};\ k'\right)},\ \ldots$$

интервала $[1,\ 1/k^2]$.

Доказательство закончено.

Отправляясь от полученного решения задачи C и пользуясь надлежащими дробно-линейными преобразованиями, можно получить решения ряда других задач.

Мы ограничимся здесь сводкой некоторых результатов.

Пусть рассматриваются вещественные рациональные функции $R_{i,j}(x)$, числитель которых степени i, а знаменатель — степени j. Среди всех этих функций требуется найти ту, для которой величина $s(x)R_{i,j}(x)$ наименее уклоняется от 1 в интервале $[a,\ b]$. Речь идет, таким образом, о такой аппроксимации функции $1/s(x)$ посредством функции $R_{i,j}(x)$, при которой максимум в интервале $[a,\ b]$ относительной погрешности имеет минимальное значение.

При этом данные задачи содержатся в таблице 1.

Таблица 1

№	$s(x)$	a	b	i	j
1	$\sqrt{1-k^2x}$	0	1	m	m
2	$\sqrt{1-k^2x}$	0	1	$m-1$	m
3	$\sqrt{\frac{x}{x-1}}$	$\frac{1}{k^2}$	∞	m	m
4	$\sqrt{x(x-1)}$	$\frac{1}{k^2}$	∞	$m-1$	m
5	$\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$	$\frac{1}{k}$	$-\frac{1}{k}$	m	m
6	$\sqrt{\frac{1+kx}{1-kx}}$	-1	1	m	m
7	$\sqrt{x}$	1	$\frac{1}{k^2}$	m	m
8	$\sqrt{x}$	1	$\frac{1}{k^2}$	$m-1$	m

Искомое решение обозначим через y, кроме того, положим

$$G = \max_{[a,\ b]} |1 - s(x)\,y|.$$

Решения рассматриваемых задач содержатся в таблице 2. При этом через λ (соответственно λ_1) мы обозначаем модуль эллиптических функций, к которым мы приходим при делении на n первого (соответственно второго) периода.

Таблица 2

№	y	n	G
1	$\frac{2}{1+\lambda'}\prod_{\alpha=1}^{m}\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\left(\frac{2\alpha-1}{n}K;\ k\right)x}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\left(\frac{2\alpha}{n}K;\ k\right)x}$	$2m+1$	$\frac{1-\lambda'}{1+\lambda'}$
2	$\frac{2\lambda'}{1+\lambda'}\frac{\prod_{\alpha=1}^{m-1}1-k^2\,\mathrm{sn}^2\left(\frac{2\alpha}{n}K;\ k\right)x}{\prod_{\alpha=1}^{m}1-k^2\,\mathrm{sn}^2\left(\frac{2\alpha-1}{n}K;\ k\right)x}$	$2m$	$\frac{1-\lambda'}{1+\lambda'}$
3	$\frac{2\lambda'}{1+\lambda'}\prod_{\alpha=1}^{m}\frac{\mathrm{sn}^2\left(\frac{2\alpha}{n}K;\ k\right)-x}{\mathrm{sn}^2\left(\frac{2\alpha-1}{n}K;\ k\right)-x}$	$2m+1$	$\frac{1-\lambda'}{1+\lambda'}$
4	$-\frac{2\lambda'}{1+\lambda'}\frac{\prod_{\alpha=1}^{m-1}\mathrm{sn}^2\left(\frac{2\alpha}{n}K;\ k\right)-x}{\prod_{\alpha=1}^{m}\mathrm{sn}^2\left(\frac{2\alpha-1}{n}K;\ k\right)-x}$	$2m$	$\frac{1-\lambda'}{1+\lambda'}$

Продолжение табл. 2

№	y	n	G
5	$\lambda'\prod_{\alpha=1}^{m}\frac{x+\mathrm{sn}\left(K-\frac{4\alpha}{n}K;\ k\right)}{x-\mathrm{sn}\left(K-\frac{4\alpha}{n}K;\ k\right)}$	$2m+1$	λ
6	$\lambda'\prod_{\alpha=1}^{m}\frac{1+kx\,\mathrm{sn}\left(K-\frac{4\alpha}{n}K;\ k\right)}{1-kx\,\mathrm{sn}\left(K-\frac{4\alpha}{n}K;\ k\right)}$	$2m+1$	λ
7 [1]	$\frac{2\lambda_1}{1+\lambda_1}\frac{1}{M_1}\prod_{\alpha=1}^{m}\frac{1+\frac{x}{c_{2\alpha}}}{1+\frac{x}{c_{2\alpha-1}}}$	$2m+1$	$\frac{1-\lambda_1'}{1+\lambda_1'}$
8 [1]	$\frac{2\lambda_1}{1+\lambda_1}\frac{1}{M_1}\frac{\prod_{\alpha=1}^{m-1}1+\frac{x}{c_{2\alpha}}}{\prod_{\alpha=1}^{m}1+\frac{x}{c_{2\alpha-1}}}$	$2m$	$\frac{1-\lambda_1'}{1+\lambda_1'}$

[1] Здесь $c_\alpha=\frac{\mathrm{sn}^2\left(\frac{\alpha K'}{n};\ k'\right)}{\mathrm{cn}^2\left(\frac{\alpha K'}{n};\ k'\right)}$, $M_1=\prod_{\alpha=1}^{m}\frac{\mathrm{sn}^2\left(\frac{2\alpha-1}{n}K';\ k'\right)}{\mathrm{sn}^2\left(\frac{2\alpha}{n}K';\ k'\right)}$.

ГЛАВА X

ОБОБЩЕНИЕ ЧЕБЫШЕВСКИХ ПОЛИНОМОВ

52. Многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля. Чебышевские полиномы $T_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ определяются следующими формулами:

$$T_n(x) = \cos n\varphi, \quad x = \cos\varphi \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Таким образом,

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \qquad T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2x\,T_n(x)$$
$$(n = 1, 2, 3, \ldots),$$

откуда видно, что

$$T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \ldots \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Положим

$$L_n = \begin{cases} 1 & (n = 0), \\ 2^{1-n} & (n = 1, 2, 3, \ldots). \end{cases}$$

Экстремальное свойство, вполне характеризующее чебышевские полиномы, гласит: $L_n T_n(x)$ *наименее уклоняется от нуля в интервале* $[-1, 1]$ *среди всех многочленов степени* n *с равным* 1 *старшим коэффициентом* (наименьшее уклонение, следовательно, равно L_n).

Этот факт, вытекающий из общей теоремы Чебышева (см. § 51), легко доказывается непосредственно. Действительно, пусть многочлен $P_n(x) = x^n + \ldots$ имеет в интервале $[-1, 1]$ уклонение от нуля $\leqslant L_n$. Тогда разность $L_n T_n(x) - P_n(x) = Q(x)$, представляющая многочлен степени $\leqslant n - 1$, будет в точках

$$x_k = \cos\frac{(n-k)\pi}{n} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

принимать значения

$$Q(x_k) = (-1)^{n-k}L_n - P_n(x_k) = (-1)^{n-k}[L_n \pm |P_n(x_k)|],$$

где выражение в квадратных скобках $\geqslant 0$. Отсюда легко заметить, что $Q(x)$ обращается в нуль по крайней мере n раз в интервале $[-1, 1]$, и значит, $Q(x) \equiv 0$.

Полиномы $T_n(x)$ находят разнообразные применения в технических расчетах [1]).

В сравнительно недавних радиотехнических исследованиях получили применение многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля на точечном множестве, образованном двумя равными интервалами числовой оси. В некоторых американских работах эти многочлены обозначены [2]) A_n. Точное определение их таково:

Полином $A_n(x; \alpha) = x^n + \ldots$ среди всех многочленов со старшим членом x^n наименее уклоняется от нуля на интервалах

$$[-1, -\alpha], \quad [\alpha, 1], \tag{1}$$

где α $(0 < \alpha < 1)$ — заданное число; уклонение от нуля полинома $A_n(x; \alpha)$ обозначим $L_n(\alpha)$.

Из простых соображений, подобных тем, которыми мы уже пользовались в § 51, вытекает единственность полинома $A_n(x; \alpha)$. Поэтому он будет четным при четном n и нечетным при n нечетном.

Отсюда легко получить, что полином $A_{2m}(x; \alpha)$ просто выражается через полином Чебышева $T_m(t)$. Действительно, если положим $x^2 = y$, то $A_{2m}(x; \alpha) = y^m + \ldots = P_m(y)$ будет наименее уклоняться от нуля в интервале $[\alpha^2, 1]$ среди всех многочленов от y со старшим членом y^m. Сделаем замену

$$y = \frac{1-\alpha^2}{2}t + \frac{1+\alpha^2}{2}, \qquad P_m(y) = \frac{(1-\alpha^2)^m}{2^m}Q_m(t),$$

---

[1]) Американское Национальное Бюро стандартов выпустило в 1952 году специальные таблицы полиномов Чебышева. Эти таблицы перепечатаны с переводом текста на русский язык в серии «Библиотека математических таблиц» (Вычисл. центр АН СССР, Москва, 1963).

[2]) Они были впервые построены автором в 1928 году. См. книгу, цитированную на стр. 203.

так что $Q_m(t) = t^m + \ldots$ Когда y пробегает интервал $[\alpha^2, 1]$, новая переменная t пробегает интервал $[-1, 1]$.

Следовательно, $Q_m(t)$ наименее уклоняется от нуля в интервале $[-1, 1]$ среди всех многочленов со старшим членом t^m, и значит, $Q_m(t) = 2^{1-m}T_m(t)$.

На основании всего сказанного

$$A_{2m}(x;\ \alpha) = \frac{(1-\alpha^2)^m}{2^{2m-1}} T_m\left(\frac{2x^2-1-\alpha^2}{1-\alpha^2}\right),$$

$$L_{2m}(\alpha) = \frac{(1-\alpha^2)^m}{2^{2m-1}}.$$

Если n — нечетное, то дело обстоит сложнее, за исключением, разумеется, случая $n = 1$, когда полином тривиален:

$$A_1(x;\ \alpha) = x, \qquad L_1(\alpha) = 1.$$

При каждом $n = 2m - 1 > 1$ для всех достаточно малых α полином $A_{2m-1}(x;\ \alpha)$ просто равен $2^{2m-2}T_{2m-1}(x)$. Действительно, точки уклонения полинома $T_{2m-1}(x)$ даются формулой

$$x_k = -\cos\frac{k\pi}{2m-1} \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 2m-1).$$

Число их равно $2m$: точки $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}$ принадлежат интервалу $[-1, 0)$, а точки $x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{2m-1}$ — интервалу $(0, 1]$. Если $\alpha \leqslant x_m$, то $x_{m-1} \leqslant -\alpha$, и все точки x_k $(k = 0, 1, \ldots, 2m-1)$ принадлежат интервалам (1). Поэтому полином $2^{2m-2}T_{2m-1}(x)$ при $\alpha \leqslant x_m$ является экстремальным на системе интервалов (1), т. е. совпадает с $A_{2m-1}(x;\ \alpha)$.

Если же

$$\alpha > x_m = -\cos\frac{m\pi}{2m-1} = \sin\frac{\pi}{2(2m-1)}, \tag{2}$$

то экстремальный многочлен будет иной. Действительно, число точек уклонения на множестве (1) должно равняться $2m$ (в силу общей теоремы Чебышева), т. е. должно остаться прежним, но на интервале $[-\alpha, \alpha]$ уклонение уже будет бóльшим, чем на интервалах (1).

Поэтому полином будет иметь максимум в некоторой точке [1]) γ интервала $(-\alpha, \alpha)$, и значит, минимум в точке $-\gamma$. Следовательно, в интервале $(-\alpha, \alpha)$ полином $A_{2m-1}(x;\ \alpha)$ примет значение $L_{2m-1}(\alpha)$ в некоторой точке β и значение $-L_{2m-1}(\alpha)$ в точке $-\beta$. Если мы введем точки уклонения, лежащие в интервале [2]) $[\alpha, 1]$:

$$\eta_0 = \alpha < \eta_1 < \eta_2 < \ldots < \eta_{m-1} = 1,$$

и для простоты будем писать $A(x)$ вместо $A_{2m-1}(x;\ \alpha)$ и L вместо $L_{2m-1}(\alpha)$, то без труда придем к соотношениям

$$[A(x)]^2 - L^2 = (x^2-\beta^2)(x^2-\alpha^2)(x^2-1)(x^2-\eta_1^2)^2 \ldots (x^2-\eta_{m-1}^2)^2,$$
$$A'(x) = (2m-1)(x^2-\gamma^2)(x^2-\eta_1^2) \ldots (x^2-\eta_{m-1}^2).$$

Из них вытекает, что

$$\frac{A'(x)}{\sqrt{L^2-[A(x)]^2}} = \frac{(2m-1)(x^2-\gamma^2)}{\sqrt{(x^2-\alpha^2)(x^2-\beta^2)(1-x^2)}}.$$

Отсюда

$$\arcsin\frac{A(x)}{L} = (2m-1)\int_0^x \frac{(x^2-\gamma^2)\,dx}{\sqrt{(x^2-\alpha^2)(x^2-\beta^2)(1-x^2)}}. \tag{3}$$

Делая подстановку $x^2 = t$, мы получим справа эллиптический интеграл. В формулу (3) входят параметры β, γ, L. Мы можем рассчитывать определить их из условия, что $A_{2m-1}(x;\ \alpha)$ — многочлен со старшим членом x^{2m-1}. При этом мы ожидаем, что после введения эллиптических функций из формулы (3) получится параметрическое представление искомых полиномов.

Все это действительно верно. Однако к окончательному результату можно прийти и без длинных вычислений, если воспользоваться некоторыми соображениями геометрической теории функций.

Впрочем, мы и на этом не остановимся, а сформулируем и затем докажем готовый результат.

Этот результат гласит: *пусть* $n = 2m - 1$ $(m > 1)$, $\alpha > \sin\dfrac{\pi}{2n}$; *определим* k $(0 < k < 1)$ *из уравнения*

$$\operatorname{sn}\left(\frac{K}{n};\ k\right) = \alpha \tag{4}$$

---

[1]) Эта точка единственна, так как иначе полное число точек уклонения в открытом интервале $(\alpha, 1)$ было бы не больше, чем $m-3$, а значит, полное число точек уклонения на множестве (1) было бы не больше, чем $2(m-3)+4 = 2m-2$.

[2]) Теперь α обязательно будет точкой уклонения.

и положим

$$x = \frac{\alpha \operatorname{cn} u}{\sqrt{\alpha^2 - \operatorname{sn}^2 u}}, \tag{5}$$

где радикал выбран так, что $x = 1$ при $u = 0$; в таком случае

$$A_n(x; \alpha) = \frac{1}{2} L_n(\alpha) \left\{ \left[\frac{H(c+u)}{H(c-u)} \right]^{n/2} + \left[\frac{H(c-u)}{H(c+u)} \right]^{n/2} \right\}, \tag{6}$$

где $c = K/n$, и

$$L_n(\alpha) = \frac{1}{2^{n-1}} \left[\frac{\Theta(0)\,\Theta_1(0)}{\Theta(c)\,\Theta_1(c)} \right]^n. \tag{7}$$

Таким образом, формулы (5), (6) дают параметрическое представление полинома, а формула (7) — величину уклонения.

Прежде всего нужно показать, что уравнение (4) при фиксированном $n > 1$ однозначно разрешимо относительно k для любого α из интервала $\left(\sin \frac{\pi}{2n}, 1\right)$.

С этой целью перепишем уравнение (4) в виде

$$\frac{1}{n} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^\alpha \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

Отсюда, дифференцируя по k, получим

$$\frac{1}{n} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \frac{kt^2}{1-k^2t^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(1-\alpha^2)(1-k^2\alpha^2)}} \frac{d\alpha}{dk} + \int_0^\alpha \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \frac{kt^2}{1-k^2t^2}$$

или, в силу уравнения (4),

$$k \frac{d\alpha}{dk} = \frac{1}{n} \operatorname{cn} \frac{K}{n} \operatorname{dn} \frac{K}{n} \int_0^K \frac{du}{\operatorname{dn}^2 u} - \operatorname{cn} \frac{K}{n} \operatorname{dn} \frac{K}{n} \int^{K/n} \frac{dv}{\operatorname{dn}^2 v},$$

а значит,

$$k \frac{d\alpha}{dk} = \frac{1}{n} \operatorname{cn} \frac{K}{n} \operatorname{dn} \frac{K}{n} \int_0^K \left[\frac{1}{\operatorname{dn}^2 u} - \frac{1}{\operatorname{dn}^2 \frac{u}{n}} \right] du.$$

Так как $n > 1$, $0 < k < 1$, то правая часть > 0. Поэтому с увеличением k от 0 до 1 переменная α монотонно растет: от $\alpha = \sin \frac{\pi}{2n}$ до $\alpha = 1$. Следовательно, при любом α из интервала $\left(\sin \frac{\pi}{2n}, 1\right)$ уравнение (4) однозначно разрешимо относительно k.

Переходя к доказательству представления (6), (7), введем функцию

$$\varphi(u) = \frac{\sqrt{\operatorname{sn}^2 c - \operatorname{sn}^2 u}}{\operatorname{cn} u} \left\{ \left[\frac{H(c+u)}{H(c-u)} \right]^{n/2} + \left[\frac{H(c-u)}{H(c+u)} \right]^{n/2} \right\},$$

которую можно привести к виду

$$\varphi(u) = B \frac{[H(c+u)]^{2m-1} + [H(c-u)]^{2m-1}}{H_1(u)\,[H(c-u)\,H(c+u)]^{m-1}}, \tag{8}$$

где B — константа.

Из (8) видно непосредственно, что $\varphi(-u) = \varphi(u)$, а с помощью формул приведения тэта-функций легко показать, что

$$\varphi(u + 2K) = \varphi(u + 2iK') = \varphi(u).$$

Таким образом, $\varphi(u)$ есть четная мероморфная функция от u с периодами $2K$, $2iK'$. Поэтому $\varphi(u)$ — рациональная функция от $\operatorname{sn}^2 u$, а значит,— рациональная функция от

$$x^2 = \frac{\alpha^2(1 - \operatorname{sn}^2 u)}{\alpha^2 - \operatorname{sn}^2 u}.$$

В параллелограмме периодов

$$-K < \Re u \leqslant K, \qquad 0 \leqslant \Im u < 2K'$$

$H_1(u)$ обращается в нуль лишь при $u = K$. Однако в этой точке обращается в нуль также числитель правой части (8). Поэтому единственными особыми точками функции

$\varphi(u)$ являются полюсы $u = \pm c$, каждый из них — кратности $m-1$. Так как x^2 также имеет полюс, и притом простой, в точках $u = \pm c$, то $\varphi(u)$ — многочлен от x^2, и притом степени $m-1$. Значит, правая часть формулы (6) есть нечетный многочлен степени $2m-1$ от x.

Не представляющая труда проверка, которую мы вправе опустить, показывает, что при выборе коэффициента $L_n(\alpha)$ согласно (7) старшим членом правой части (6) будет x^{2m-1}.

Заметим теперь, что с помощью формулы (5) отрезок мнимой оси u-плоскости от точки iK' до точки 0 переходит в интервал $[\alpha^2, 1]$ вещественной оси плоскости x. Поэтому при $\alpha \leqslant x \leqslant 1$

$$\left|\frac{H(c+u)}{H(c-u)}\right| = 1,$$

и значит,

$$|A_n(x;\ \alpha)| \leqslant L_n(\alpha).$$

В тех точках интервала $\alpha \leqslant x \leqslant 1$, где

$$\frac{n}{2}\arg\frac{H(c+u)}{H(c-u)} = r\pi$$

и r — число целое, будет иметь место равенство

$$A_n(x;\ \alpha) = \pm L_n(\alpha).$$

Нам остается проследить за изменением величины

$$\arg\frac{H(c+u)}{H(c-u)}, \tag{9}$$

когда u пробегает отрезок мнимой оси от точки $u=0$ до точки $u = iK'$. Мы примем, что величина (9) равна нулю при $u = 0$. В силу формул приведения тэта-функций

$$\frac{H(c+iK')}{H(c-iK')} = \frac{H\left(\dfrac{K}{n}+iK'\right)}{H\left(\dfrac{K}{n}-iK'\right)} = -e^{-\frac{\pi i}{n}}.$$

Поэтому величина (9) в точке $u = iK'$ будет численно $\geqslant \pi(1-1/n) = 2(m-1)\pi/n$. Следовательно, многочлен (6) принимает в интервале $[\alpha, 1]$ свой максимум с чередующимися знаками не менее [1]) m раз, а потому и является экстремальным многочленом.

Наше утверждение, таким образом, доказано.

53. Ортогональные многочлены на двух интервалах. Полиномы Чебышева образуют ортогональную систему на интервале $[-1, 1]$ относительно веса $\dfrac{1}{\pi}(1-t^2)^{-1/2}$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} T_m(t)\,T_n(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 0$$

$$(m \neq n;\ m,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

что непосредственно вытекает из определения полиномов Чебышева, данного в § 52. Часто вместо полиномов $T_n(x)$ рассматривают полиномы

$$\hat{T}_n(x) = \begin{cases} T_n(x) & (n=0), \\ \sqrt{2}\,T_n(x) & (n \geqslant 1), \end{cases}$$

которые не только ортогональны, но и нормированы:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\hat{T}_m(t)\,\hat{T}_n(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \delta_{mn}.$$

В этом параграфе мы займемся построением ортогональных многочленов для случая, когда областью ортогональности является пара конечных интервалов, а вес представляет некоторое обобщение чебышевского веса.

Предварительно докажем одно вспомогательное предложение. Пусть весом является произвольная интегрируемая функция $p(t) \geqslant 0$ в конечном интервале $[a, b]$. Обозначим ортогональные полиномы $P_n(x)$ $(n \geqslant 0)$, так

[1]) Многочлен (6) более m точек уклонения в интервале $[\alpha, 1]$ иметь не может. Поэтому $2(m-1)\pi/n$ есть точное значение величины (9) в точке $u = iK'$.

что $P_n(x)$ есть многочлен точно степени n, который при $n > 0$ удовлетворяет равенствам

$$\int_a^b P_n(x)\,x^k p(x)\,dx = 0 \qquad (k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1), \tag{1}$$

определяющим его с точностью до постоянного множителя.

Введем при каждом $n \geqslant 1$ многочлен $Q_n(x)$ степени $n-1$ по формуле

$$Q_n(x) = \int_a^b \frac{P_n(x) - P_n(t)}{x-t}\,p(t)\,dt; \tag{2}$$

$Q_n(x)$ называют *полиномом второго рода.*

Например, чебышевские полиномы второго рода имеют вид

$$U_n(x) = \frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi} = \frac{1}{n}\,T'_n(x) \qquad (x = \cos\varphi).$$

Введем еще функцию

$$w(x) = \int_a^b \frac{p(t)}{x-t}\,dt, \tag{3}$$

аналитическую вне интервала $[a, b]$ вещественной оси комплексной x-плоскости. В силу определений (2), (3)

$$Q_n(x) = P_n(x)\,w(x) - \int_a^b \frac{P_n(t)}{x-t}\,p(t)\,dt.$$

Отсюда находим, что при $|x| \to \infty$

$$P_n(x)\,w(x) - Q_n(x) = O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right). \tag{4}$$

Действительно, благодаря равенствам (1),

$$\int_a^b P_n(t)\,\frac{x^n - t^n}{x-t}\,p(t)\,dt = 0$$

и поэтому

$$\int_a^b \frac{P_n(t)}{x-t}\,p(t)\,dt = \frac{1}{x^n}\int_a^b \frac{t^n P_n(t)}{x-t}\,p(t)\,dt.$$

Покажем теперь, что соотношение (4) между $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ является *характеристическим* для ортогонального полинома и соответствующего полинома второго рода. И в этом состоит упомянутое нами выше вспомогательное предложение. Итак, пусть многочлен n-й степени $P_n(x)$, многочлен $(n-1)$-й степени $Q_n(x)$ и функция $w(x)$, определяемая равенством (3), удовлетворяют соотношению (4). Из этого соотношения следует, что

$$\left[\int_a^b \frac{P_n(x) - P_n(t)}{x-t}\,p(t)\,dt - Q_n(x)\right] + \int_a^b \frac{P_n(t)}{x-t}\,p(t)\,dt = \\ = O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right).$$

Так как выражение в квадратных скобках — многочлен (степени $\leqslant n-1$), а остальные члены равенства стремятся к нулю при $|x| \to \infty$, то выражение в квадратных скобках есть тождественный нуль, а значит, $Q_n(x)$ и $P_n(x)$ связаны соотношением (2) и, сверх того,

$$\int_a^b \frac{P_n(t)}{x-t}\,p(t)\,dt = O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right),$$

откуда следует, что

$$\int_a^b P_n(t)\,\frac{t^n}{x-t}\,p(t)\,dt + \int_a^b P_n(t)\,\frac{x^n - t^n}{x-t}\,p(t)\,dt = O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Второе слагаемое левой части — многочлен степени $\leqslant n-1$, а остальные члены равенства стремятся к нулю при $|x| \to \infty$. Поэтому второе слагаемое левой части — тождественный нуль, иначе говоря,

$$\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k-1} \int_a^b P_n(t)\, t^k p(t)\, dt = 0,$$

но это означает, что выполнены соотношения (1), и наше предложение доказано, т. е. *если многочлены $P_n(x)$, $Q_n(x)$ удовлетворяют соотношению (4), а $w(x)$ определяется формулой (3), то $P_n(x)$ есть ортогональный многочлен относительно веса $p(x)$, а $Q_n(x)$ — соответствующий многочлен второго рода.*

Переходя к нашему конкретному случаю, примем, что двумя заданными конечными интервалами числовой оси являются $[-1, \alpha]$, $[\beta, 1]$ $(-1 < \alpha < \beta < 1)$. Точечное множество в комплексной x-плоскости, образованное этими интервалами, обозначим $\mathscr{E}$. В качестве веса возьмем функцию

$$p(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\sqrt{\dfrac{t-\alpha}{(1-t^2)(t-\beta)}} \geqslant 0 & (t \in \mathscr{E}), \\ 0 & (\alpha < t < \beta) \end{cases}$$

(в предельном случае $\alpha = \beta$ она переходит в чебышевский вес). Теперь функция $w(x)$ будет аналитической в плоскости x, разрезанной вдоль $\mathscr{E}$, а не только вне интервала $[-1, 1]$ вещественной оси.

Заметим, что в x-плоскости, разрезанной вдоль $\mathscr{E}$,

$$\int_{-1}^{1} \frac{p(t)}{x-t}\, dt \equiv \frac{1}{\pi} \int_{\mathscr{E}} \sqrt{\frac{t-\alpha}{(1-t^2)(t-\beta)}}\, \frac{dt}{x-t} =$$

$$= \sqrt{\frac{x-\alpha}{(x^2-1)(x-\beta)}}, \tag{5}$$

если радикал в правой части положителен в какой-нибудь выбранной вещественной точке $x > 1$, а затем продолжен по непрерывности [1]). Таким образом,

$$w(x) = \sqrt{\frac{x-\alpha}{(x^2-1)(x-\beta)}}.$$

Соотношение (4) в рассматриваемом случае принимает вид

$$P_n(x)\sqrt{\frac{x-\alpha}{(x^2-1)(x-\beta)}} - Q_n(x) = O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right), \tag{6}$$

а так как при принятом соглашении относительно радикала

$$P_n(x)\sqrt{\frac{x-\alpha}{(x^2-1)(x-\beta)}} + Q_n(x) = O(x^{n-1}),$$

то

$$\frac{x-\alpha}{(x^2-1)(x-\beta)} P_n^2(x) - Q_n^2(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

или

$$(x-\alpha) P_n^2(x) + (1+x)(x-\beta)(1-x) Q_n^2(x) = O(x).$$

Здесь левая часть есть многочлен, следовательно, правая часть равна $Ax + B$, где A, B — какие-то постоянные (зависящие, разумеется, от n). Поэтому мы пришли к соотношению

$$P_n^2(x) + \frac{(1+x)(x-\beta)(1-x)}{x-\alpha} Q_n^2(x) = \frac{Ax+B}{x-\alpha}.$$

---

[1]) Для доказательства равенства (5) нужно к функции

$$\sqrt{\frac{x-\alpha}{(x^2-1)(x-\beta)}}$$

применить интегральную формулу Коши, беря трехсвязную область, ограниченную окружностью бесконечного радиуса и двумя овальными кривыми, охватывающими отрезки $[-1, \alpha]$, $[\beta, 1]$, а затем овалы стянуть в указанные отрезки.

Из (5), между прочим, следует, что

$$\frac{1}{\pi}\int_{\mathscr{E}} \sqrt{\frac{t-\alpha}{(1-t^2)(t-\beta)}}\, dt = 1.$$

Оно является неопределенным уравнением, решая которое в многочленах, мы должны получить ортогональные полиномы $P_n(x)$ и полиномы второго рода $Q_n(x)$. Мы покажем, как это сделать с помощью эллиптических функций. С этой целью прежде всего построим двухлистную риманову поверхность $\mathfrak{F}$ с точками ветвления -1, α, β, 1 и линиями перехода $[-1, \alpha]$, $[\beta, 1]$. Функция $w(x)$ однозначна на этой поверхности $\mathfrak{F}$. На верхнем листе $(\mathfrak{F}^+)$ она совпадает с ранее определенной функцией в разрезанной плоскости. На нижнем листе $(\mathfrak{F}^-)$ она (в соответствующих точках) отличается лишь знаком. Введем теперь на $\mathfrak{F}$ функцию

$$\mathcal{E}(x) = P_n(x) - \frac{1}{w(x)} Q_n(x) =$$

$$= \frac{Ax + B}{(x-\alpha)\left\{P_n(x) + \frac{1}{w(x)} Q_n(x)\right\}}. \tag{7}$$

В силу (6) функция $\mathcal{E}(x)$ имеет *корень кратности n в бесконечно далекой точке листа $\mathfrak{F}^+$ и поэтому* (в силу второго представления) *полюс кратности n в бесконечно далекой точке листа $\mathfrak{F}^-$*; кроме того, функция $\mathcal{E}(x)$ имеет *простой полюс в точке $x = \alpha$*, что видно из ее первого представления, и *еще один простой корень* в некоторой пока неизвестной нам точке. (Это видно из второго представления.)

В § 49 (пример 3) рассмотрено конформное отображение прямоугольника u-плоскости на плоскость, разрезанную вдоль $\mathcal{E}$ (теперь этой плоскостью будет лист $\mathfrak{F}^-$).

Указанный прямоугольник Δ^- задается неравенствами

$$-K \leqslant \Re u \leqslant 0, \quad -K' \leqslant \Im u \leqslant K',$$

причем модуль k $(0 < k < 1)$ равен

$$k = \sqrt{\frac{2(\beta-\alpha)}{(1-\alpha)(1+\beta)}}, \tag{8}$$

а отображение дается формулой

$$x = \frac{\operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn}^2 \rho + \operatorname{cn}^2 u \operatorname{sn}^2 \rho}{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 \rho}, \tag{9}$$

где параметр ρ $(0 < \rho < K)$ определяется иэ уравнения

$$1 - 2\operatorname{sn}^2 \rho = \alpha. \tag{10}$$

Таким образом, $u = -\rho$ есть образ бесконечно далекой точки листа $\mathfrak{F}^-$. Те же формулы отображают симметричный относительно мнимой оси прямоугольник Δ^+ на лист $\mathfrak{F}^+$. Следовательно, образом бесконечно далекой точки листа $\mathfrak{F}^+$ будет $u = \rho$.

Вся риманова поверхность $\mathfrak{F}$ отображается на прямоугольник

$$-K \leqslant \Re u \leqslant K, \quad -K' \leqslant \Im u \leqslant K',$$

противоположные стороны которого должны быть отождествлены.

Из (8) — (10) нетрудно вывести следующие формулы:

$$x - \alpha = \frac{1-\alpha^2}{2(\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 \rho)},$$

$$w(x) = \sqrt{\frac{(x^2-1)(x-\beta)}{x-\alpha}} = \frac{2\operatorname{sn}\rho\operatorname{cn}\rho}{\operatorname{dn}\rho} \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 \rho}.$$

Мы видим, что $w(x)$, как и следовало ожидать, является функцией с периодами $2K$, $2iK'$, а также, что переходу от точки одного листа поверхности $\mathfrak{F}$ в соответствующую точку другого листа отвечает изменение знака u.

$\mathcal{E}(x)$ является эллиптической функцией с периодами $2K$, $2iK'$. Из выделенных курсивом свойств ее на поверхности $\mathfrak{F}$ следует, что $\mathcal{E}(x)$ в прямоугольнике периодов имеет: n-кратный корень в точке $u = \rho$, n-кратный полюс в точке $u = -\rho$, простой полюс в точке $u = iK'$ (так как при $u = iK'$ обращается в нуль $x - \alpha$) и еще один простой корень в некоторой точке u_0. Так как по теореме Лиувилля

$$-n\rho + iK' \equiv n\rho + u_0 \,[\operatorname{mod}(2K,\ 2iK')],$$

то

$$\mathscr{E}(x) = C\left[\frac{H(u-\rho)}{H(u+\rho)}\right]^n \frac{H(u+2n\rho-iK')}{H(u-iK')}$$

или, с другой константой C,

$$\mathscr{E}(x) = C\left[\frac{H(u-\rho)}{H(u+\rho)}\right]^n \frac{\Theta(u+2n\rho)}{\Theta(u)}.$$

Учитывая определение (7) функции $\mathscr{E}(x)$, находим

$$P_n(x) + \frac{1}{w(x)} Q_n(x) = C\left[\frac{H(u+\rho)}{H(u-\rho)}\right]^n \frac{\Theta(u-2n\rho)}{\Theta(u)}.$$

Поэтому

$$P_n(x) = \frac{C_n}{2}\left\{\left[\frac{H(u-\rho)}{H(u+\rho)}\right]^n \frac{\Theta(u+2n\rho)}{\Theta(u)} + \right.$$
$$\left. + \left[\frac{H(u+\rho)}{H(u-\rho)}\right]^n \frac{\Theta(u-2n\rho)}{\Theta(u)}\right\}.$$

Эта формула вместе с (9), (8), (10) дает параметрическое представление ортогональных полиномов на паре интервалов при рассмотренном весе [1]). Условие нормировки приводит к значению

$$C_n = \frac{\sqrt{2}\,\Theta(\rho)}{\sqrt{\Theta((2n-1)\rho)\,\Theta((2n+1)\rho)}}.$$

[1]) По поводу построений настоящего параграфа см. две статьи автора в сообщениях Харьковского математического общества за 1934 и 1938 гг. Обобщение на случай n интервалов см. в статьях: Н. И. Ахиезер, Об ортогональных многочленах на нескольких интервалах (ДАН СССР **134**, № 1, 1960); Н. И. Ахиезер и Ю. Я. Томчук, К теории ортогональных многочленов на нескольких интервалах (ДАН СССР 138, № 4, 1961); Ю. Я. Томчук, Ортогональные многочлены на системе интервалов числовой оси (Записки Харьковского математического общества, т. XXIX, 1963).

ГЛАВА XI

РАЗЛИЧНЫЕ ДОПОЛНЕНИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ

54. Теорема Абеля. Пусть дано неприводимое алгебраическое уравнение, т. е. уравнение вида

$$F(z, w) = 0, \tag{1}$$

где $F(z, w)$ — многочлен от z и w, не представимый в виде произведения двух аналогичных многочленов, каждый из которых отличен от константы. Множество всех пар (z, w), удовлетворяющих уравнению (1), называют *алгебраической кривой*, а каждую пару (z, w) — *точкой* этой кривой. Алгебраическая функция $w = w(z)$, определяемая уравнением (1), неоднозначна, за исключением случая, когда уравнение (1) линейно относительно w. Однако w можно сделать однозначной функцией точки, если вместо комплексной плоскости взять некоторую многолистную поверхность — риманову поверхность, принадлежащую уравнению (1). Одновременно с w на этой поверхности будут однозначны все рациональные функции $R(z, w)$ от z и w.

Если мы не прибегаем к упомянутой римановой поверхности, а остаемся в комплексной плоскости, то для изучения функции $w(z)$, а также функций $R(z, w)$, в плоскости z делают определенные разрезы и рассматривают каждую ветвь функции $w(z)$ или функции $R(z, w)$ в отдельности.

Особенно просто картина выглядит в том случае, когда уравнение (1) имеет вид

$$w^2 = A(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_{2p+2}) \tag{2}$$

или

$$w^2 = A(z-\alpha_1)(z-\alpha_2, \ldots (z-\alpha_{2p+2}), \qquad (2^{\text{bis}})$$

где все α_i (критические точки) различны между собой. Если $p=1$, мы получаем эллиптическую кривую [1]), при $p>1$ — гиперэллиптическую.

Здесь риманова поверхность состоит из двух листов. Точками разветвления являются точки α_i, к которым в случае (2^{bis}) присоединяется еще точка $z=\infty$. Линии перехода могут быть выбраны по-разному, они не должны лишь пересекаться. Например, в случае уравнения (2) можно в качестве линий перехода принять дуги $\alpha_{2k-1}\alpha_{2k}$ ($k=1, 2, \ldots, p+1$). Плоскость с разрезами вдоль этих дуг может быть использована, если мы изучаем в отдельности каждую из двух ветвей функции w.

В случае, когда функция w определяется уравнением (1) общего вида, ее конечные критические точки являются корнями уравнения [2])

$$D(z)=0,$$

которое получается исключением w из уравнения (1) и уравнения

$$\frac{\partial F(z, w)}{\partial w}=0.$$

Интегралы вида

$$\int R(z, w)\,dz, \tag{3}$$

если в основу положено уравнение (2) или (2^{bis}) при $p=1$, как мы знаем, называются эллиптическими интегралами. При $p>1$ они носят название *гиперэллиптических* интегралов.

Эллиптические и гиперэллиптические интегралы, а также элементарные интегралы

$$\int R\left(z, \sqrt{az^2+bz+c}\right)dz,$$

являются частными случаями абелевых интегралов, под которыми вообще понимаются интегралы вида (3), где w и z связаны неприводимым алгебраическим уравнением (1).

---

[1]) Она уже была определена и рассмотрена в § 41.

[2]) Многочлен $D(z)$ есть дискриминант уравнения (1).

Значение абелева интеграла, взятого вдоль некоторой линии, зависит не только от начала и конца, но и от соединяющего их пути интегрирования. Если верхний предел интеграла сделать переменным, то, следовательно, интеграл будет многозначной функцией от верхнего предела.

Например, мы видели, что различные значения интеграла

$$\int \frac{dz}{\sqrt{4z^3-g_2z-g_3}}$$

имеют вид $\pm u+2m\omega+2m'\omega'$, где u — одно из этих значений, m, m' — произвольные целые числа, а ω, ω' — полупериоды.

Абелевы интегралы (3), принадлежащие общему уравнению (1), разбивают на три группы. Это разбиение аналогично тому, которое было выше проделано с эллиптическими интегралами.

В основе классификации абелевых интегралов лежит следующий принцип: интеграл называют интегралом первого рода, если он всюду конечен, элементарный интеграл второго рода обращается в бесконечность в одной точке, причем особенность имеет алгебраическую, наконец, элементарный интеграл третьего рода обращается в бесконечность логарифмически в двух точках.

Припоминая §§ 17, 29, читатель легко проверит, что эллиптические интегралы различных родов действительно характеризуются только что указанными свойствами.

Мы не можем здесь касаться различных вопросов обширной теории абелевых интегралов. Однако есть одна теорема, весьма важная по приложениям и вместе с тем достаточно простая в своем классическом варианте, которая должна быть изложена даже в элементарном курсе эллиптических функций. Мы имеем в виду теорему Абеля.

Переходя к этой теореме, возьмем неприводимое уравнение (1), определяющее алгебраическую функцию $w(z)$. Пусть, кроме того, дано второе алгебраическое уравнение вида (1), левая часть которого рационально зависит от некоторого числа параметров $a_1, a_2, \ldots, a_\mu$. Чтобы избежать дополнительных чисто алгебраических рассмотрений, ограничимся случаем, когда это второе уравнение имеет вид

$$w = g(z,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_\mu), \tag{4}$$

где правая часть есть рациональная функция от своих аргументов.

Исключая w из уравнений (1) и (4), получим уравнение

$$\varphi(z) = 0, \tag{5}$$

где левая часть есть многочлен, коэффициенты которого рационально зависят от параметров a_i.

Если оставить в стороне значения параметров a_i, связанные некоторыми алгебраическими соотношениями, то уравнение (5) будет иметь лишь простые корни. Обозначим их $z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_N$. С помощью уравнения (4) найдем соответствующие значения w: $w_1,\ w_2,\ \ldots,\ w_N$. Затем образуем все пары $(z_i,\ w_i)$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N)$; тем самым мы нашли все точки пересечения алгебраических кривых (1) и (4).

Заметим, что какова бы ни была рациональная функция своих аргументов $S(z,\ w)$, зависящая еще рационально от параметров a_i, сумма

$$S(z_1,\ w_1) + S(z_2,\ w_2) + \ldots + S(z_N,\ w_N)$$

в силу известной теоремы высшей алгебры является рациональной функцией от параметров a_i.

Теперь возьмем какую-нибудь точку $(z_0,\ w_0)$ алгебраической кривой (1) и рассмотрим абелев интеграл

$$\int\limits_{(z_0,\ w_0)}^{(z_k,\ w_k)} R(z,\ w)\,dz, \tag{6}$$

взятый в плоскости z от точки z_0 до точки z_k по какому-нибудь пути, который непрерывно переводит w из начального значения w_0 в конечное значение w_k. Сумму всех интегралов (6) обозначим V:

$$V = \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{(z_0,\ w_0)}^{(z_k,\ w_k)} R(z,\ w)\,dz.$$

Эта сумма, очевидно, зависит от значений параметров a_i. Если их изменять непрерывным образом и, сверх того, так, чтобы изменяющиеся при этом точки $z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_N$

не проходили ни через критические точки функции w, ни через точки, где $R(z,\ w)$ обращается в бесконечность, то величина V также будет изменяться непрерывным образом.

Теорема Абеля утверждает, что *величина V равна рациональной функции от параметров $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_\mu$, сложенной с суммой логарифмов подобных функций, умноженных на постоянные числа.*

Для доказательства этой теоремы заставим параметры $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_\mu$ изменяться и найдем дифференциал функции V. Он равен

$$dV = \sum_{k=1}^{N} R(z_k,\ w_k)\left(\frac{\partial z_k}{\partial a_1}da_1 + \frac{\partial z_k}{\partial a_2}da_2 + \ldots + \frac{\partial z_k}{\partial a_\mu}da_\mu\right).$$

С другой стороны, дифференцируя по a_λ тождество $\varphi(z_k) = 0$, получаем

$$\frac{\partial\varphi(z_k)}{\partial z_k}\frac{\partial z_k}{\partial a_\lambda} + \frac{\partial\varphi(z_k)}{\partial a_\lambda} = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial z_k}{\partial a_\lambda} = -\frac{\dfrac{\partial\varphi(z_k)}{\partial a_\lambda}}{\dfrac{\partial\varphi(z_k)}{\partial z_k}} = \rho_\lambda(z_k),$$

где $\rho_\lambda(z_k)$ есть рациональная функция от z_k и параметров $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_\mu$.

Теперь мы можем представить dV в виде

$$dV = \sum_{\lambda=1}^{\mu} da_\lambda \left\{\sum_{k=1}^{N} R(z_k,\ w_k)\,\rho_\lambda(z_k)\right\}.$$

Величина

$$\sum_{k=1}^{N} R(z_k,\ w_k)\,\rho_\lambda(z_k)$$

есть симметрическая рациональная функция от пар $(z_k,\ w_k)$, коэффициенты которой являются рациональными функциями от параметров $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_\mu$. Следовательно, эта величина есть рациональная функция от параметров $a_1, a_2, \ldots, a_\mu$:

$$\sum_{k=1}^{N} R(z_k, w_k)\, \rho_\lambda(z_k) = R_\lambda(a_1, a_2, \ldots, a_\mu).$$

Чтобы получить V, нужно проинтегрировать полный дифференциал

$$\sum_{\lambda=1}^{\mu} R_\lambda(a_1, a_2, \ldots, a_\mu)\, da_\lambda.$$

Это интегрирование приведет к рациональной функции от параметров, сложенной с логарифмами таких функций, умноженными на некоторые константы. Таким образом, теорема Абеля доказана.

В особо интересном и важном случае, когда (6) *есть интеграл первого рода, рационально-логарифмическая функция от параметров a_i должна обратиться в константу и, следовательно, величина V равна постоянной.*

Действительно, в противном случае можно было бы указать значения параметров a_i, при которых величина V обратилась бы в бесконечность, что невозможно, так как интегралы первого рода всегда конечны.

Теоремой Абеля и этим замечанием можно воспользоваться для получения теоремы сложения функции $\wp$.

Здесь роль (1) играет уравнение

$$w^2 = 4z^3 - g_2 z - g_3.$$

В качестве (4) возьмем уравнение

$$w = a_1 z - a_2. \tag{4'}$$

Наконец, пусть интегралом является $\int \frac{dz}{w}$. Уравнение (5) примет вид

$$\varphi(z) \equiv 4z^3 - g_2 z - g_3 - (a_1 z + a_2)^2 = 0. \tag{5'}$$

Пусть z_1, z_2, z_3 — корни этого уравнения, которые мы предположим простыми, а w_1, w_2, w_3 — соответствующие значения w. В таком случае, в силу теоремы Абеля

и сделанного замечания

$$\int_{\infty}^{(z_1, w_1)} \frac{dz}{w} + \int_{\infty}^{(z_2, w_2)} \frac{dz}{w} + \int_{\infty}^{(z_3, w_3)} \frac{dz}{w} = C = \text{const}.$$

Если мы прямую (4′) удалим на бесконечность, то в каждом из интегралов левой части верхний предел обратится в ∞. Это значит, что все три интеграла превратятся в интегралы по замкнутым контурам, т. е. каждый из них будет равен некоторому периоду. Поэтому

$$C = 2m\omega + 2m'\omega'.$$

Итак,

$$\int_{\infty}^{(z_1, w_1)} \frac{dz}{w} + \int_{\infty}^{(z_2, w_2)} \frac{dz}{w} + \int_{\infty}^{(z_3, w_3)} \frac{dz}{w} = 2m\omega + 2m'\omega'.$$

Пусть [1])

$$z_1 = \wp(u_1), \quad z_2 = \wp(u_2), \quad z_3 = \wp(u_3),$$
$$w_1 = \wp'(u_1), \quad w_2 = \wp'(u_2), \quad w_3 = \wp'(u_3).$$

Тогда наш результат можно сформулировать следующим образом: если

$$u_1 + u_2 + u_3 \equiv 0 \pmod{2\omega, 2\omega'}, \tag{7}$$

то существуют такие a_1, a_2, что

$$\wp'(u_1) = a_1 \wp(u_1) + a_2,$$
$$\wp'(u_2) = a_1 \wp(u_2) + a_2,$$
$$\wp'(u_3) = a_1 \wp(u_3) + a_2,$$

иначе говоря, из (7) следует, что

$$\begin{vmatrix} 1 & \wp(u_1) & \wp'(u_1) \\ 1 & \wp(u_2) & \wp'(u_2) \\ 1 & \wp(u_3) & \wp'(u_3) \end{vmatrix} = 0.$$

Это есть одна из форм теоремы сложения функции $\wp$.

---

[1]) Предполагается, что ни одно из u_k не сравнимо с нулем по модулю периодов.

Можно показать, что и другие теоремы сложения (например, теорема сложения функции ζ) включаются в теорему Абеля как частные случаи.

Конечно, особое значение эта теорема приобретает при переходе к более сложным абелевым интегралам и в первую очередь к гиперэллиптическим интегралам.

Ограничимся здесь одним результатом, получаемым с помощью теоремы Абеля.

Пусть рассматривается гиперэллиптическая кривая. Всякая рациональная функция на ней, очевидно, имеет вид

$$G(z, w)=\frac{A(z)\,w+B(z)}{C(z)\,w+D(z)},$$

где A, B, C, D — многочлены. Чтобы получить точки гиперэллиптической кривой, в которых функция $G(z, w)$ принимает некоторое значение a, нужно к уравнению (2) присоединить уравнение

$$G(z, w)=a. \tag{8}$$

Но это последнее уравнение можно переписать в виде [1]

$$w=g(z, a), \tag{4''}$$

где правая часть есть рациональная функция от z и a.

Возьмем два значения параметра a: a' и a''. Пусть

$$P'_k=(z'_k, w'_k) \qquad (k=1, 2, \ldots, N)$$

— точки пересечения кривых (2) и (4″) при $a=a'$ и, подобным образом,

$$P''_k=(z''_k, w''_k) \qquad (k=1, 2, \ldots, N)$$

— точки пересечения кривых (2) и (4″) при $a=a''$.

[1] Мы предполагаем здесь, что

$$\begin{vmatrix} A(z) & B(z) \\ C(z) & D(z) \end{vmatrix} \not\equiv 0.$$

На случае, когда это условие не выполнено, мы останавливаться не будем.

Возьмем какой-нибудь интеграл 1-го рода

$$\int\limits_{(z_0, w_0)}^{(z, w)} R(z, w)\,dz=\Phi(P),$$

где $P=(z, w)$, и рассмотрим суммы

$$V'=\sum_{k=1}^{N}\Phi(P'_k), \qquad V''=\sum_{k=1}^{N}\Phi(P''_k).$$

Каждая из этих сумм равна некоторой константе. Поэтому

$$\sum_{k=1}^{N}\{\Phi(P'_k)-\Phi(P''_k)\}=C.$$

Чтобы вычислить эту константу C, будем в интегралах

$$\Phi(P'_k)=\int\limits_{(z_0, w_0)}^{(z'_k, w'_k)} R(z, w)\,dz \qquad (k=1, 2, \ldots, N)$$

изменять верхние пределы с помощью непрерывного изменения параметра a от значения a' до значения a''. В результате этой процедуры каждая разность $\Phi(P'_k)-\Phi(P''_k)$ превратится в некоторый интеграл по замкнутому контуру

$$\oint\limits_{\Gamma_k} R(z, w)\,dz=\oint\limits_{\Gamma_k} d\Phi.$$

Поэтому

$$C=\oint\limits_{\sum\limits_{1}^{N}\Gamma_k} d\Phi=\oint\limits_{\Gamma} d\Phi$$

есть также интеграл от $d\Phi$ по некоторому «кратному» замкнутому контуру, и этот контур от выбора интеграла первого рода Φ не зависит, а величина $\oint\limits_{\Gamma} d\Phi$ представляет некоторый *период* Φ.

Наш результат можно сформулировать следующим образом [1]: *пусть G — рациональная функция на гиперэллиптической кривой и пусть Φ — произвольный интеграл первого рода; в таком случае сравнимы по модулю*

[1] Результат верен для любых алгебраических кривых, а не только гиперэллиптических.

периодов интеграла Φ сумма значений Φ в точках кривой, где $G = a'$, с суммой значений Φ в точках, где $G = a''$.

Легко видеть, что этот результат является обобщением одной из теорем Лиувилля об эллиптических функциях, доказанных в § 4.

55. Функция Грина для кругового кольца. Пусть в плоскости комплексного переменного w дано круговое кольцо G, ограниченное окружностями

$$|w| = 1, \quad |w| = h,$$

где заданное положительное число h меньше 1, и пусть внутри кольца G дана некоторая точка c, которую, не нарушая общности, можно считать лежащей на положительной половине вещественной оси, так что $h < c < 1$.

Поставим задачу найти аналитическую функцию $f(w)$, удовлетворяющую следующим условиям:

a) $f(w)$ регулярна внутри и на границах области G,
b) $|f(w)|$ есть функция однозначная внутри G,
c) $|f(w)|$ на границах кольца G равняется 1,
d) $f(w)$ имеет простой нуль в точке $w = c$, а в других точках области G в нуль не обращается.

Легко видеть, что

$$\Re \ln f(w) = \ln |f(w)|$$

есть не что иное, как функция Грина для кольцевой области G. Поэтому существование функции $f(w)$ не подлежит сомнению. Мало того, функция $f(w)$ определяется однозначно, если не считать произвольного постоянного множителя, по модулю равного единице.

Функцию $f(w)$ иногда называют комплексной функцией Грина для рассматриваемого кольца.

Положим

$$w_0 = 1/\bar{w}, \quad w_1 = h^2/\bar{w}.$$

Точка w_0 есть зеркальное отображение точки w относительно внешней границы кольца G, а точка w_1 — относительно внутренней.

Так как на каждой из границ кольца G функция $f(w)$ по модулю равна 1, то ее значения в точках w_0, w_1 связаны

со значением в точке w соотношениями

$$f(w)\overline{f(w_0)} = 1, \qquad f(w)\overline{f(w_1)} = 1. \tag{1}$$

Этими соотношениями функция $f(w)$ аналитически продолжается за пределы кольца G в два кольца, примыкающих к G, затем в два дальнейших кольца и так далее, а в пределе на всю w-плоскость, проколотую в точках $w = 0$ и $w = \infty$.

Так как $f(w)$ имеет простой нуль в точке c кольца G, то в силу соотношений (1) $f(w)$ имеет простые полюсы

$$w = 1/c, \qquad w = h^2/c.$$

Следовательно, снова в силу формул (1) $f(w)$ имеет простые нули

$$w = c/h^2, \qquad w = h^2 c.$$

Эти соображения показывают, что $f(w)$ имеет простые нули

$$w = h^{2k} c \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

и простые полюсы

$$w = h^{2k}/c \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

а также, что других нулей и полюсов $f(w)$ не имеет.

На основании сказанного естественно ввести в рассмотрение функцию

$$F(w) = \frac{\left(1 - \frac{w}{c}\right) \prod\limits_{k=1}^{\infty} \left(1 - h^{2k}\frac{w}{c}\right)\left(1 - h^{2k}\frac{c}{w}\right)}{(1 - cw) \prod\limits_{k=1}^{\infty} (1 - h^{2k} cw)\left(1 - h^{2k}\frac{1}{cw}\right)},$$

которая имеет те же нули и те же полюсы, что и $f(w)$. Заменяя w на w_0 и на w_1, получим

$$\overline{F(w_0)} = \frac{1}{c^2}\frac{1}{F(w)}, \qquad \overline{F(w_1)} = \frac{1}{F(w)}. \tag{2}$$

Поэтому функция $F(w)$ соотношению (1) не удовлетворяет, а значит, и не удовлетворяет требованию с).

Покажем, однако, что можно так определить вещественные константы λ, μ, чтобы функция

$$\mu w^{\lambda} F(w) = F_1(w)$$

удовлетворила также и требованию с). Действительно, записывая условия (1) для функции $F_1(w)$, получим

$$\mu w^{\lambda} F(w)\,\overline{\mu w_0^{\lambda}}\,\overline{F(w_0)} = 1,$$

$$\mu w^{\lambda} F(w)\,\overline{\mu w_1^{\lambda}}\,\overline{F(w_1)} = 1.$$

На основании (2) эти равенства принимают вид

$$\mu^2 = c^2, \qquad \mu^2 h^{2\lambda} = 1,$$

откуда

$$\mu = \pm c, \qquad \lambda = -\frac{\ln c}{\ln h}.$$

Поэтому функция

$$\pm c w^{-\frac{\ln c}{\ln h}} F(w)$$

удовлетворяет всем требованиям задачи. Нетрудно выразить ее через тэта-функции. Необходимые для этого данные содержит таблица IX.

Окончательное выражение для $f(w)$ имеет вид

$$f(w) = \pm\, w^{-\frac{\ln c}{\ln h}} \frac{\vartheta_1\left(\dfrac{\ln w - \ln c}{2\pi i}\,\middle|\,\tau\right)}{\vartheta_1\left(\dfrac{\ln w + \ln c}{2\pi i}\,\middle|\,\tau\right)}, \qquad (3)$$

где $\tau = \dfrac{1}{\pi i}\ln h$. После того как решение получено, можно вместо множителя ± 1 ввести $e^{i\delta}$, где δ — произвольное вещественное число.

Иногда полезно другое выражение функции $f(w)$, а именно то, которое получается при переходе от τ к $-1/\tau$.

На основании формул таблицы XVII без труда найдем

$$f(w) = \pm \frac{\vartheta_1\left(\dfrac{\ln w - \ln c}{2\pi i\tau}\,\middle|\,-\dfrac{1}{\tau}\right)}{\vartheta_1\left(\dfrac{\ln w + \ln c}{2\pi i\tau}\,\middle|\,-\dfrac{1}{\tau}\right)}. \qquad (4)$$

56. Проблема Дирихле для кругового кольца. Пусть в плоскости комплексного переменного w дано круговое кольцо G, ограниченное окружностями

$$|w| = 1, \qquad |w| = h,$$

где заданное положительное число h меньше 1. Требуется найти регулярную и однозначную внутри области G функцию $F(w)$, если известны значения ее вещественной части на границах кольца.

Для случая круга аналогичная задача решается формулой Шварца

$$F(w) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1 + we^{-is}}{1 - we^{-is}}\Phi(s)\,ds + iC. \qquad (1)$$

Здесь предполагается, что радиус круга равен 1, а положение точки на окружности определяется аргументом s этой точки, так что $\Phi(s)$ представляет значение вещественной части искомой функции в точке e^{is}. Что касается C, то это — произвольная вещественная константа.

Формула Шварца выводится и исследуется [1]) в курсах теории аналитических функций при достаточно общих предположениях относительно функции $\Phi(s)$.

---

[1]) Исходным пунктом этого исследования является формула Пуассона

$$U(r, s_0) \equiv \Re F(re^{is_0}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(s - s_0) + r^2}\Phi(s)\,ds, \quad (1^{\text{bis}}),$$

вытекающая из формулы Шварца (1). Так как

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(s - s_0) + r^2}\,ds = 1 \qquad (0 \leqslant r < 1),$$

Нашей задачей является переход от круга к кольцу и построение формулы, аналогичной формуле (1).

Обозначим через $\Phi(s)$ и $\varphi(s)$ значения вещественной части искомой функции $F(w)$ в точках с аргументом s на внешней, соответственно внутренней, границе кольца G. Нам нет надобности делать очень общие предположения относительно функций $\Phi(s)$, $\varphi(s)$, так как основной нашей целью является выяснение того, как скажется на формуле переход от односвязной области к двусвязной. Достаточно предположить, что функции $\Phi(s)$ и $\varphi(s)$ кусочно-непрерывны.

Величина

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(re^{is})\,ds = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{F(w)}{w}\,dw,$$

где интеграл справа берется по окружности радиуса r ($h<r<1$) с центром в точке $w=0$, очевидно, не зависит от r. Тем же свойством обладает и вещественная часть написанного интеграла. Отсюда, приближая вначале r

---

то

$$U(r, s_0)-\Phi(s_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(s-s_0)+r^2}\,[\Phi(s)-\Phi(s_0)]\,ds=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}\,[\Phi(s_0+t)-\Phi(s_0)]\,dt+\frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}=$$

$$=I_1+I_2.$$

Если абсолютно интегрируемая функция $\Phi(s)$ непрерывна в точке s_0, то отсюда легко вывести, что

$$\lim_{r\to 1} U(r, s_0)=\Phi(s_0).$$

Действительно, с одной стороны величина I_1 будет по модулю $<\varepsilon$ для всех r $(0\leqslant r<1)$, если δ достаточно мало́ (в силу непрерывности $\Phi(s)$), а с другой стороны, при фиксированном $\delta>0$ величина I_2 будет стремиться к 0 при $r\to 1$ (в силу абсолютной интегрируемости $\Phi(s)$).

к 1, а затем к h, и замечая, что в интеграле

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Re\, F(re^{is})\,ds$$

можно сделать требуемые предельные переходы, получим

$$\int_0^{2\pi}\Phi(s)\,ds=\int_0^{2\pi}\varphi(s)\,ds. \qquad (2)$$

Это условие, таким образом, необходимо для разрешимости поставленной нами проблемы, и мы должны предположить, что оно выполняется.

Допустим, что искомая функция $F(w)$ существует. В таком случае она может быть разложена в ряд Лорана:

$$F(w)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k w^k \qquad (h<|w|<1). \qquad (3)$$

Коэффициенты этого ряда определяются формулами

$$a_k=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{F(w)}{w^{k+1}}\,dw \qquad (\pm k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

где интеграл можно взять по окружности $w=re^{is}$ ($h<r<1$). Поэтому

$$a_k r^k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(re^{is})\,e^{-iks}\,ds \qquad (\pm k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Отсюда следует, что

$$\bar a_{-k}r^{-k}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{F(re^{is})}\,e^{-iks}\,ds.$$

Складывая, находим

$$a_k r^k+\bar a_{-k}r^{-k}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}e^{-iks}\Re\, F(re^{is})\,ds.$$

В этом равенстве можно сделать предельный переход при $r \to 1$ и $r \to h$. Мы получим следующие формулы:

$$a_k + \bar{a}_{-k} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(s) e^{-iks} ds,$$

$$a_k h^k + \bar{a}_{-k} h^{-k} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(s) e^{-iks} ds.$$

Отсюда получаются коэффициенты a_k, каждый в виде суммы двух интегралов. Теперь остается подставить их в правую часть формулы (3) и выполнить суммирование. В результатете получается следующая формула, принадлежащая Вилля:

$$F(w) = \frac{i\omega}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \Phi(s) \zeta\left(\frac{\omega}{\pi i} \ln w - \frac{\omega}{\pi} s\right) ds -$$

$$- \frac{i\omega}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \varphi(s) \left[\zeta\left(\frac{\omega}{\pi i} \ln w - \frac{\omega}{\pi} s - \omega'\right) + \eta'\right] ds + iC, \quad (4)$$

где C — произвольная вещественная константа, ω — произвольное положительное число, а чисто мнимое число ω' находится с помощью равенства

$$e^{\pi i\,\omega'/\omega} = h$$

и, наконец [1]), $\zeta(u) = \zeta(u \mid \omega, \omega')$.

Докажем теперь, что определяемая формулой (4) функция $F(w)$ удовлетворяет всем требованиям задачи. От этого доказательства мы не были бы избавлены и в том случае, если бы мы выполнили упомянутое только что суммирование и тем самым дали вывод формулы (4), так как весь этот вывод был основан на предположении, что

[1]) Заметим также (см. таблицу V), что

$$\zeta\left(\frac{\omega}{\pi i} \ln w - \frac{\omega}{\pi} s - \omega'\right) + \eta' = \zeta_3\left(\frac{\omega}{\pi i} \ln w - \frac{\omega}{\pi} s\right).$$

решение существует. Именно поэтому мы сочли возможным упомянутый вывод опустить.

Регулярность внутри кольца G функции $F(w)$, определяемой формулой (4), вытекает из того, что внутри этого кольца регулярны обе функции

$$\zeta\left(\frac{\omega}{\pi i} \ln w - \frac{\omega}{\pi} s\right), \quad \zeta\left(\frac{\omega}{\pi i} \ln w - \frac{\omega}{\pi} s - \omega'\right).$$

Однозначность есть следствие соотношения (2). Действительно, чтобы убедиться в однозначности функции (4), нужно показать, что эта функция не меняется, когда точка w описывает окружность: $|w| = r$ $(h < r < 1)$. После такого обхода правая часть (4) примет вид

$$\frac{i\omega}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \Phi(s) \zeta\left(\frac{\omega}{\pi i} \ln w - \frac{\omega}{\pi} s + 2\omega\right) ds -$$

$$- \frac{i\omega}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \varphi(s) \left[\zeta\left(\frac{\omega}{\pi i} \ln w - \frac{\omega}{\pi} s - \omega' + 2\omega\right) + \eta'\right] ds + iC.$$

Но в силу соотношения $\zeta(u + 2\omega) = \zeta(u) + 2\eta$ эта величина равна

$$F(w) + \frac{2i\omega}{\pi^2} \eta \left\{\int_0^{2\pi} \Phi(s)\, ds - \int_0^{2\pi} \varphi(s)\, ds\right\}.$$

На основании (2) интегралы взаимно уничтожаются, так что полученное выражение есть $F(w)$, и однозначность доказана.

Остается проверить, что вещественная часть функции (4) на границах кольца G обращается в заданные функции.

Возьмем точку $w_0 = e^{is_0}$ на внешней границе кольца G и точку $w = re^{is_0}$ $(h < r < 1)$ с тем же аргументом внутри кольца. Мы должны доказать, что

$$\lim_{r \to 1} \Re F(re^{is_0}) = \Phi(s_0),$$

если только в точке s_0 функция $\Phi(s)$ непрерывна. С этой целью перепишем (4) в виде

$$F(re^{is_0}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(s)\frac{e^{is}+re^{is_0}}{e^{is}-re^{is_0}}\,ds + iC +$$

$$+\frac{i\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\Phi(s)\left\{\zeta\left(\frac{\omega}{\pi i}\ln r - \frac{\omega}{\pi}s + \frac{\omega}{\pi}s_0\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\pi i}{2\omega}\frac{re^{is_0}+e^{is}}{re^{is_0}-e^{is}}\right\}ds -$$

$$-\frac{i\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\varphi(s)\left\{\zeta\left(\frac{\omega}{\pi i}\ln r - \frac{\omega}{\pi}s + \frac{\omega}{\pi}s_0 - \omega'\right) + \eta'\right\}ds =$$

$$= J_1 + iC + J_2 + J_3.$$

Выражение в фигурных скобках в интеграле J_2 и дзета-функция в интеграле J_3 — равномерно непрерывные функции от r ($h^{1/2} \leqslant r \leqslant 1$) при $0 \leqslant s \leqslant 2\pi$. Поэтому к этим двум интегралам применима элементарная теорема о предельном переходе (при $r \to 1$):

$$\lim_{r\to 1} J_2 = \frac{i\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\Phi(s)\left\{\zeta\left(\frac{\omega}{\pi}s_0 - \frac{\omega}{\pi}s\right) - \frac{\pi}{2\omega}\operatorname{ctg}\frac{s_0-s}{2}\right\}ds,$$

$$\lim_{r\to 1} J_3 = \frac{i\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\varphi(s)\,\zeta_3\left(\frac{\omega}{\pi}s - \frac{\omega}{\pi}s_0\right)ds.$$

Так как ω и ω'/i вещественны, то подынтегральные выражения в обоих интегралах вещественны, а потому $\lim\limits_{r\to 1} J_2$ и $\lim\limits_{r\to 1} J_3$ имеют чисто мнимые значения. Следовательно, остается рассмотреть поведение при $r \to 1$ вещественной части суммы $J_1 + iC$, но эта сумма совпадает с правой частью формулы Шварца (1).

Аналогично доказывается, что $\Re F(w)$ стремится к $\varphi(s_0)$, если точка $w = re^{is_0}$ приближается к he^{is_0}, а s_0 — точка непрерывности функции $\varphi(s)$.

Таким образом, формула Вилля (4) полностью проверена.

57. Эллиптические координаты. Пусть даны положительные числа a, b, c, удовлетворяющие неравенству $a > b > c$. Обозначим через X, Y, Z текущие координаты точки, а через s — вещественный параметр. Тогда

$$\frac{X^2}{a^2-s} + \frac{Y^2}{b^2-s} + \frac{Z^2}{c^2-s} = 1$$

является уравнением семейства поверхностей второго порядка, софокусных с эллипсоидом

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1. \tag{1}$$

При этом, конечно, предполагается, что параметр s отличен от b^2, c^2 и удовлетворяет неравенству $s < a^2$.

Положим теперь, что в пространстве взята некоторая точка (x, y, z). Можно ли провести через нее поверхность нашего семейства? Этот вопрос сводится к вопросу о существовании вещественных корней у следующего уравнения:

$$f(s) \equiv 1 - \frac{x^2}{a^2-s} - \frac{y^2}{b^2-s} - \frac{z^2}{c^2-s} = 0. \tag{2}$$

Рассмотрим интервалы

$$(-\infty,\ c^2-\varepsilon), \quad (c^2+\varepsilon,\ b^2-\varepsilon), \quad (b^2+\varepsilon,\ a^2-\varepsilon).$$

При достаточно малом положительном ε функция $f(s)$ в этих интервалах непрерывна, а на концах каждого из них имеет противоположные знаки. Следовательно, уравнение (2) обладает корнем в каждом из рассматриваемых интервалов, т. е. все три его корня вещественны. Назовем их λ, μ, ν и пусть $\lambda < \mu < \nu$.

Мы видим, что через каждую точку (x, y, z) проходят (рис. 24) три поверхности нашего семейства: корню λ

отвечает эллипсоид, корню μ — однополостный гиперболоид и, наконец, корню ν — двухполостный гиперболоид.

Величины λ, μ, ν можно рассматривать как координаты точки. Эти координаты называют *эллиптическими координатами* относительно эллипсоида (1). Следует иметь в виду, что соответствие между декартовыми координатами

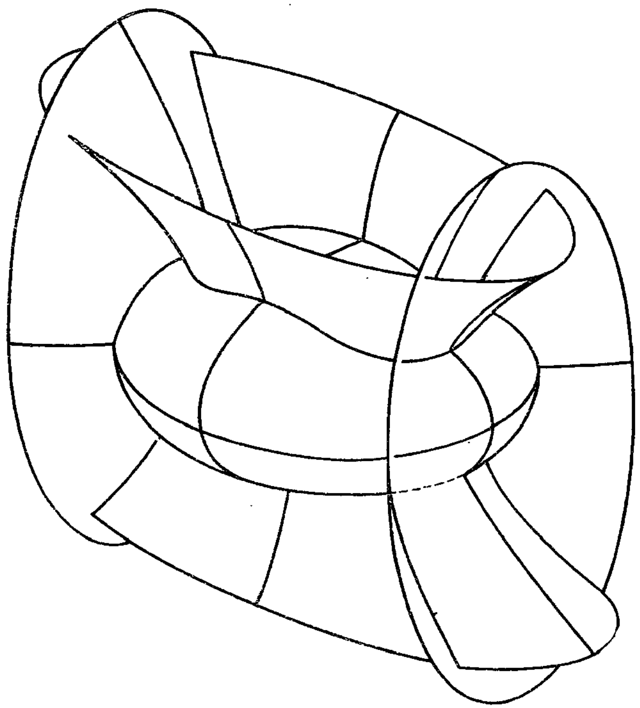


Рис. 24.

x, y, z и эллиптическими λ, μ, ν не является взаимно однозначным. Действительно, величины λ, μ, ν являются функциями не от x, y, z, а от x^2, y^2, z^2 и, следовательно, те же эллиптические координаты λ, μ, ν, что и точка (x, y, z), имеют точки $(\pm x, \pm y, \pm z)$. Однако если мы рассматриваем не все пространство, а лишь один октант, то в нем эллиптические координаты вполне определяют точку.

На рис. 24 представлены координатные поверхности, проходящие через данную точку.

Теперь мы займемся выводом различных соотношений и формул, которые полезны при применении эллиптических координат.

В силу определения величин λ, μ, ν

$$1-\frac{x^2}{a^2-s}-\frac{y^2}{b^2-s}-\frac{z^2}{c^2-s}= -\frac{(s-\lambda)(s-\mu)(s-\nu)}{(a^2-s)(b^2-s)(c^2-s)}.$$

Отсюда, умножая обе части на a^2-s и полагая $s=a^2$, будем иметь

$$x^2=\frac{(a^2-\lambda)(a^2-\mu)(a^2-\nu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}. \qquad (3_1)$$

Аналогично получаются формулы

$$\left.\begin{aligned} y^2&=\frac{(b^2-\lambda)(b^2-\mu)(b^2-\nu)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)},\\ z^2&=\frac{(c^2-\lambda)(c^2-\mu)(c^2-\nu)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}.\end{aligned}\right\} \qquad (3_2)$$

Пусть (x, y, z) — некоторая точка пространства и пусть $\mathscr{L}$, $\mathscr{M}$, $\mathscr{N}$ — координатные поверхности, проходящие через нее. Направляющие косинусы нормалей к этим поверхностям в рассматриваемой точке пропорциональны следующим величинам:

$$\mathscr{L}:\quad \frac{x}{a^2-\lambda},\quad \frac{y}{b^2-\lambda},\quad \frac{z}{c^2-\lambda},$$

$$\mathscr{M}:\quad \frac{x}{a^2-\mu},\quad \frac{y}{b^2-\mu},\quad \frac{z}{c^2-\mu},$$

$$\mathscr{N}:\quad \frac{x}{a^2-\nu},\quad \frac{y}{b^2-\nu},\quad \frac{z}{c^2-\nu}.$$

Заметим теперь, что

$$\frac{x^2}{(a^2-\lambda)(a^2-\mu)}+\frac{y^2}{(b^2-\lambda)(b^2-\mu)}+\frac{z^2}{(c^2-\lambda)(c^2-\mu)}=$$
$$=\frac{1}{\lambda-\mu}\left\{\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}+\frac{z^2}{c^2-\lambda}-\right.$$
$$\left.-\frac{x^2}{a^2-\mu}-\frac{y^2}{b^2-\mu}-\frac{z^2}{c^2-\mu}\right\}=0.$$

Следовательно, поверхности $\mathscr{L}$, $\mathscr{M}$, $\mathscr{N}$ попарно ортогональны.

Таким образом, эллиптические координаты представляют пример ортогональных криволинейных координат в пространстве.

Найдем выражение дифференциала дуги в эллиптических координатах. Логарифмируя выражения (3_1), (3_2) и беря дифференциалы, получим

$$\left.\begin{aligned}2\frac{dx}{x}&=\frac{d\lambda}{\lambda-a^2}+\frac{d\mu}{\mu-a^2}+\frac{d\nu}{\nu-a^2},\\ 2\frac{dy}{y}&=\frac{d\lambda}{\lambda-b^2}+\frac{d\mu}{\mu-b^2}+\frac{d\nu}{\nu-b^2},\\ 2\frac{dz}{z}&=\frac{d\lambda}{\lambda-c^2}+\frac{d\mu}{\mu-c^2}+\frac{d\nu}{\nu-c^2}.\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

Эти формулы позволяют выразить

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$$

через дифференциалы эллиптических координат. Окончательная формула будет иметь вид

$$ds^2=L^2\,d\lambda^2+M^2\,d\mu^2+N^2\,d\nu^2,$$

так как члены с произведениями различных дифференциалов исчезнут в силу ортогональности координатных поверхностей.

Что касается коэффициентов L, M, N, то их отыскание труда не представляет. Например, для L^2 с помощью (4) мы получим, следующее выражение:

$$4L^2=\frac{x^2}{(a^2-\lambda)^2}+\frac{y^2}{(b^2-\lambda)^2}+\frac{z^2}{(c^2-\lambda)^2}.$$

Отсюда в силу (3_1), (3_2) получим

$$4L^2=\frac{(a^2-\mu)(a^2-\nu)}{(a^2-\lambda)(a^2-b^2)(a^2-c^2)}+$$
$$+\frac{(b^2-\mu)(b^2-\nu)}{(b^2-\lambda)(b^2-c^2)(b^2-a^2)}+\frac{(c^2-\mu)(c^2-\nu)}{(c^2-\lambda)(c^2-a^2)(c^2-b^2)},$$

а это после упрощений принимает вид

$$4L^2=\frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)(c^2-\lambda)}.\tag{5_1}$$

Аналогично найдем

$$\left.\begin{aligned}4M^2&=\frac{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}{(a^2-\mu)(b^2-\mu)(c^2-\mu)},\\ 4N^2&=\frac{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}{(a^2-\nu)(b^2-\nu)(c^2-\nu)}.\end{aligned}\right\}\tag{5_2}$$

Можно устранить неоднозначность соответствия между эллиптическими и декартовыми координатами. С этой целью выразим координаты λ, μ, ν через эллиптические функции.

Положим

$$-s=\wp(U)+A\tag{6}$$

и определим инварианты g_2, g_3 функции $\wp$ из условия, чтобы

$$4(a^2-s)(b^2-s)(c^2-s)=4\wp^3(U)-g_2\wp(U)-g_3.\tag{7}$$

Заменяя в (6) s на a^2, b^2, c^2 и соответственным образом $\wp(U)$ на e_3, e_2, e_1, получим

$$-a^2=e_3+A,$$
$$-b^2=e_2+A,$$
$$-c^2=e_1+A,$$

откуда
$$A = -\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2).$$
Следовательно,
$$e_3 = \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2) - a^2 = \frac{b^2+c^2-2a^2}{3},$$
$$e_2 = \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2) - b^2 = \frac{c^2+a^2-2b^2}{3},$$
$$e_1 = \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2) - c^2 = \frac{a^2+b^2-2c^2}{3}.$$
Мы имеем здесь вещественный случай, так как величины e_1, e_2, e_3 вещественны. Поэтому ω — число положительное, а ω' — чисто мнимое. Введем вместо эллиптических координат λ, μ, ν параметры u, v, w, заменяя в (6) s на λ, μ, ν, а U соответственно на u, v, w. Будем иметь
$$\lambda = \frac{a^2+b^2+c^2}{3} - \wp(u),$$
$$\mu = \frac{a^2+b^2+c^2}{3} - \wp(v),$$
$$\nu = \frac{a^2+b^2+c^2}{3} - \wp(w).$$
Теперь подставим эти выражения в формулы (3_1), (3_2) для x^2, y^2, z^2. Это дает
$$x^2 = \frac{[\wp(u)-e_3][\wp(v)-e_3][\wp(w)-e_3]}{(e_2-e_3)(e_1-e_3)},$$
$$y^2 = \frac{[\wp(u)-e_2][\wp(v)-e_2][\wp(w)-e_2]}{(e_1-e_2)(e_3-e_2)},$$
$$z^2 = \frac{[\wp(u)-e_1][\wp(v)-e_1][\wp(w)-e_1]}{(e_2-e_1)(e_3-e_1)}.$$
Как мы знаем (см. § 15), правые части являются квадратами некоторых мероморфных функций.

Поэтому, извлекая квадратные корни, мы получим x, y, z как некоторые однозначные функции от параметров

u, v, w. Беря при извлечении корня всюду знак $+$, приходим к следующим формулам:
$$x = e^{-\eta_3\omega_3}\sigma^2(\omega_3)\frac{\sigma_3(u)\,\sigma_3(v)\,\sigma_3(w)}{\sigma(u)\,\sigma(v)\,\sigma(w)},$$
$$y = e^{-\eta_2\omega_2}\sigma^2(\omega_2)\frac{\sigma_2(u)\,\sigma_2(v)\,\sigma_2(w)}{\sigma(u)\,\sigma(v)\,\sigma(w)},$$
$$z = e^{-\eta_1\omega_1}\sigma^2(\omega_1)\frac{\sigma_1(u)\,\sigma_1(v)\,\sigma_1(w)}{\sigma(u)\,\sigma(v)\,\sigma(w)}.$$
Заменим в этих формулах u на $u+2\omega_1$, не меняя величин v, w. Так как
$$\frac{\sigma_3(u+2\omega_1)}{\sigma(u+2\omega_1)} = -\frac{\sigma_3(u)}{\sigma(u)},$$
$$\frac{\sigma_2(u+2\omega_1)}{\sigma(u+2\omega_1)} = -\frac{\sigma_2(u)}{\sigma(u)},$$
$$\frac{\sigma_1(u+2\omega_1)}{\sigma(u+2\omega_1)} = +\frac{\sigma_1(u)}{\sigma(u)},$$
то при указанной замене z не меняется, а x, y меняют лишь знак. При прибавке других периодов к параметру u величины x, y, z подвергаются аналогичным изменениям, как это показывает таблица

u	$u+2\omega_1$	$u+2\omega_2$	$u+2\omega_3$
x	$-x$	$-x$	x
y	$-y$	y	$-y$
z	z	$-z$	$-z$

С другой стороны, при изменении знака перед u меняют свой знак все три координаты x, y, z.

Таким образом, взятое представление декартовых координат через параметры u, v, w пригодно при любых комбинациях знаков этих декартовых координат.

58. Уравнение Лапласа в эллиптических координатах. Если в уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0$$

вместо декартовых координат x, y, z ввести какие-либо ортогональные криволинейные координаты λ, μ, ν, то преобразованное уравнение будет иметь вид

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{MN}{L}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\right)+\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{NL}{M}\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right)+\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{LM}{N}\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)=0,$$

где L, M, N — функции, входящие в выражение дифференциала дуги в этих координатах:

$$ds^2=L^2\,d\lambda^2+M^2\,d\mu^2+N^2\,d\nu^2.$$

Этот принадлежащий еще Лямэ (1834) факт обычно доказывается в курсах векторного анализа, и мы можем считать его известным.

Примем за λ, μ, ν эллиптические координаты и воспользуемся найденными в § 55 выражениями для L, M, N. Мы получим тогда следующее уравнение:

$$(\mu-\nu)R(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}\left\{R(\lambda)\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\right\}+(\nu-\lambda)R(\mu)\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{R(\mu)\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right\}+(\lambda-\mu)R(\nu)\frac{\partial}{\partial\nu}\left\{R(\nu)\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right\}=0,$$

где

$$R(\rho)=\sqrt{(a^2-\rho)(b^2-\rho)(c^2-\rho)}.$$

Введем теперь вместо координат λ, μ, ν величины u, v, w. Формулы перехода приведены в § 57. В силу этих формул наше уравнение перейдет в

$$\{\wp(v)-\wp(w)\}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}+\{\wp(w)-\wp(u)\}\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}+\{\wp(u)-\wp(v)\}\frac{\partial^2\varphi}{\partial w^2}=0. \qquad (1)$$

Будем искать частное решение этого уравнения в виде

$$\varphi=U(u)\,V(v)\,W(w). \qquad (2)$$

Подставляя это выражение в (1), получим

$$U''VW\{\wp(v)-\wp(w)\}+V''WU\{\wp(w)-\wp(u)\}+W''UV\{\wp(u)-\wp(v)\}=0,$$

откуда

$$\frac{U''}{U}=\frac{V''}{V}\,\frac{\wp(w)-\wp(u)}{\wp(w)-\wp(v)}+\frac{W''}{W}\,\frac{\wp(u)-\wp(v)}{\wp(w)-\wp(v)}. \qquad (3')$$

Правая часть есть целая линейная функция от $\wp(u)$. Следовательно, должно иметь место равенство

$$\frac{U''}{U}=A+B\wp(u), \qquad (3'')$$

где A и B — константы. Кроме того, сравнение правых частей равенств (3′), (3″) дает

$$A=\frac{V''}{V}\,\frac{\wp(w)}{\wp(w)-\wp(v)}-\frac{W''}{W}\,\frac{\wp(v)}{\wp(w)-\wp(v)},$$

$$B=\frac{W''}{W}\,\frac{1}{\wp(w)-\wp(v)}-\frac{V''}{V}\,\frac{1}{\wp(w)-\wp(v)}.$$

Умножая второе из этих уравнений на $\wp(v)$ и складывая с первым, получим

$$A+B\wp(v)=\frac{V''}{V}$$

и аналогично найдем

$$A+B\wp(w)=\frac{W''}{W}.$$

Мы пришли, таким образом, к следующему результату: функция (2) будет частным интегралом уравнения (1), если функции U, V, W удовлетворяют уравнению

$$\frac{d^2y}{dx^2}=[A+B\wp(x)]\,y \qquad (4)$$

соответственно при $x=u$, v, w, причем A, B — какие-то константы.

Полученное нами уравнение было впервые изучено Лямэ. Он показал, что при $B = n(n+1)$, где n — целое положительное число, и надлежащим образом подобранных A написанное уравнение интегрируется в эллиптических функциях. Для каждого натурального n он нашел частное решение уравнения Лапласа и с помощью этих частных решений образовал общее решение.

Дальнейшие исследования уравнения (4) принадлежат Эрмиту. Некоторые результаты Эрмита будут приведены в § 59.

59. Уравнение Лямэ. Уравнение это есть частный случай однородного линейного дифференциального уравнения, коэффициентами которого являются эллиптические функции с одними и теми же периодами. Относительно таких уравнений имеется одна общая теорема, принадлежащая Пикару. Эта теорема утверждает, что *если общий интеграл такого уравнения есть функция мероморфная, то это уравнение интегрируется при помощи двоякопериодических функций второго рода с теми же периодами.* При этом, следуя Эрмиту, функцию (мероморфную) $f(u)$ называют двоякопериодической функцией второго рода с периодами 2ω, $2\omega'$, если

$$f(u+2\omega) = \mu f(u), \quad f(u+2\omega') = \mu' f(u),$$

где μ, μ' — константы (так называемые множители нашей функции).

Так как нас интересует уравнение Лямэ, то докажем теорему Пикара для случая уравнения второго порядка. Читатель легко усмотрит, как перенести доказательство на общий случай.

Итак, пусть дано уравнение

$$y'' + f(x)\,y' + g(x)\,y = 0, \tag{1}$$

где $f(x)$, $g(x)$ — эллиптические функции с периодами 2ω, $2\omega'$. Пусть общий интеграл этого уравнения есть мероморфная функция от x.

Возьмем какой-нибудь частный интеграл

$$y = \varphi(x).$$

Функции $\varphi(x+2\omega)$, $\varphi(x+4\omega)$ будут также частными интегралами нашего уравнения. А так как линейно независимых частных интегралов уравнение имеет всего два, то

$$\varphi(x+4\omega) = \alpha\,\varphi(x) + \beta\,\varphi(x+2\omega), \tag{2}$$

где α, β — некоторые (определенные) константы.

Рассмотрим теперь функцию

$$\psi(x) = \lambda_1\,\varphi(x) + \lambda_2\,\varphi(x+2\omega),$$

которая является частным интегралом уравнения (1) при любых постоянных λ_1, λ_2. В силу (2)

$$\begin{aligned}\psi(x+2\omega) &= \lambda_1\,\varphi(x+2\omega) + \lambda_2[\alpha\,\varphi(x) + \beta\,\varphi(x+2\omega)] = \\ &= \alpha\lambda_2\,\varphi(x) + (\lambda_1 + \beta\lambda_2)\,\varphi(x+2\omega).\end{aligned}$$

Потребуем, чтобы $\psi(x+2\omega) = \mu\,\psi(x)$, где μ — константа. Это требование приводит к следующим соотношениям:

$$\left.\begin{aligned}\alpha\lambda_2 &= \mu\lambda_1, \\ \beta\lambda_2 + \lambda_1 &= \mu\lambda_2.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Отсюда получается уравнение для определения μ:

$$\mu^2 - \mu\beta - \alpha = 0.$$

Когда μ найдено, система (3) позволит найти отношение λ_1/λ_2:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \mu - \beta.$$

Итак, найден частный интеграл $\psi(x)$, для которого

$$\psi(x+2\omega) = \mu\,\psi(x). \tag{4}$$

Отправляясь от этого частного интеграла и поступая с ним так же, как раньше с $\varphi(x)$, но беря $2\omega'$ вместо 2ω, найдем такую комбинацию:

$$F(x) = \lambda_1'\,\psi(x) + \lambda_2'\,\psi(x+2\omega'),$$

для которой $F(x+2\omega') = \mu'\,F(x)$, где μ' снова некоторая константа. Так как в силу (4)

$$F(x+2\omega) = \mu\,F(x),$$

то $F(x)$ — двоякопериодическая функция второго рода. Но это есть частный интеграл нашего уравнения.

Понизим с помощью этого интеграла порядок уравнения. Для этого положим

$$y = F(x)\int z\,dx.$$

Наше уравнение превратится в

$$F(x)\,z' + 2\,F'(x)\,z + f(x)\,F(x)\,z = 0$$

или

$$z' + \left[2\,\frac{F'(x)}{F(x)} + f(x)\right] z = 0.$$

Коэффициентами этого уравнения являются эллиптические функции с прежними периодами.

Если бы мы рассматривали уравнение порядка n, а не второго порядка, мы пришли бы к уравнению порядка $n-1$ и должны были бы для него повторить те рассуждения, которые были применены к исходному уравнению. Мы получили бы, что новое уравнение имеет по крайней мере один частный интеграл, являющийся двоякопериодической функцией второго рода.

В настоящем же случае z находится непосредственно:

$$z = \frac{1}{[F(x)]^2} e^{-\int f(x)\,dx},$$

и легко видеть, что это есть двоякопериодическая функция второго рода.

Таким образом, для рассматриваемого частного случая теорема Пикара доказана.

Теперь обратимся к уравнению Лямэ

$$\frac{d^2y}{du^2} = [n(n+1)\wp(u) + l]\,y. \tag{5}$$

Предположим, что n — натуральное число, а на константу l мы никаких ограничений накладывать не будем.

Общий интеграл этого уравнения есть мероморфная функция.

Для доказательства заметим, что особыми точками этого интеграла на конечном расстоянии могут быть лишь полюсы функции $\wp(u)$.

Возьмем, например, полюс $u=0$ и будем искать, следуя общим приемам теории дифференциальных уравнений, частные интегралы нашего уравнения в виде рядов, расположенных по степеням u. Мы построим ряды, формально удовлетворяющие нашему уравнению. Эти ряды будут содержать лишь целые степени u и притом лишь конечное число членов с отрицательными степенями.

Так как сходимость этих рядов в некоторой окрестности точки $u=0$ (за возможным исключением самой точки $u=0$) может быть доказана, то точка $u=0$ будет либо регулярной точкой, либо полюсом для интеграла. Применяя то же рассуждение и к другим полюсам функции $\wp(u)$, мы докажем мероморфность общего интеграла нашего уравнения.

Итак, займемся отысканием рядов, формально удовлетворяющих уравнению Лямэ.

Для удобства положим

$$n(n+1)\wp(u) + l = \frac{n(n+1)}{u^2} + \sum_{r=1}^{\infty} A_{2r} u^{2r-2}$$

и пусть

$$y = u^{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} C_k u^k \qquad (C_0 \neq 0).$$

Подставляя эти ряды в уравнение, получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k (k+\alpha)(k+\alpha-1)\, u^{k+\alpha-2} =$$

$$= \left[n(n+1) + \sum_{r=1}^{\infty} A_{2r} u^{2r}\right] \sum_{k=0}^{\infty} C_k u^{k+\alpha-2}.$$

Сравнение коэффициентов дает

$$\begin{aligned}
C_0\ \omega(\alpha) &= 0,\\
C_1\ \omega(\alpha+1) &= 0,\\
C_2\ \omega(\alpha+2) + C_0 A_2 &= 0,\\
C_3\ \omega(\alpha+3) + C_1 A_2 &= 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
C_{2m}\ \omega(\alpha+2m) + C_{2m-2}A_2 + C_{2m-4}A_4 + \ldots + C_0 A_{2m} &= 0,\\
C_{2m-1}\ \omega(\alpha+2m-1) + C_{2m-3}A_2 + C_{2m-5}A_4 + \ldots + C_1 A_{2m-2} &= 0,
\end{aligned}$$

где $\omega(x) = x(x-1) - n(n+1)$. Так как $C_0 \neq 0$, то α должно быть корнем $\omega(x)$, откуда либо $\alpha = n+1$, либо $\alpha = -n$.

При каждом из этих предположений мы можем принять

$$C_1 = C_3 = C_5 = \ldots = 0.$$

Для определения же коэффициентов C_{2k} мы будем иметь уравнение

$$C_{2m}\ \omega(\alpha+2m) + C_{2m-2}A_2 + \ldots + C_0 A_{2m} = 0,$$

которое позволяет найти все C_{2k}, если $\omega(\alpha+2k)$ никогда не обращается в нуль. Но уравнение $\omega(x) = 0$ имеет, как мы указали, корни $x = n+1$, $x = -n$, разность которых — число нечетное. А так как $\omega(\alpha) = 0$, то $\omega(\alpha+2k)$ при любом натуральном k будет отлично от нуля. Мы видим, что ряды содержат лишь целые степени переменной, и число членов с отрицательными степенями конечно. Тем самым утверждение можно считать доказанным.

Применим теорему Пикара.

Пусть $\varphi(u)$ есть частный интеграл уравнения (5), являющийся двоякопериодической функцией второго рода с множителями μ, μ'. Введем функцию

$$\varphi(u)\, e^{-\lambda u} \frac{\sigma(u)}{\sigma(u-a)} = \psi(u),$$

где λ и a — неопределенные константы. Прибавляя к u периоды 2ω, $2\omega'$, получим

$$\psi(u+2\omega) = \mu\, \varphi(u)\, e^{-\lambda(u+2\omega)} e^{2\eta a} \frac{\sigma(u)}{\sigma(u-a)} = \mu e^{2\eta a} e^{-2\lambda\omega}\, \psi(u)$$

и

$$\psi(u+2\omega') = \mu' e^{2\eta' a} e^{-2\lambda\omega'} \psi(u).$$

Определим теперь a и λ так, чтобы $\psi(u)$ имела периоды 2ω, $2\omega'$. Для этого нужно, чтобы

$$e^{-2(a\eta-\lambda\omega)} = \mu, \qquad e^{-2(a\eta'-\lambda\omega')} = \mu'$$

или

$$\omega\lambda - \eta a = \frac{1}{2}\ln\mu, \qquad \omega'\lambda - \eta' a = \frac{1}{2}\ln\mu'.$$

Определитель этой системы $\eta'\omega - \eta\omega'$ отличен от нуля. Значит, требуемые величины a и λ существуют.

Поскольку $\psi(u)$ — эллиптическая функция, то ее можно выразить через сигма-функцию по полюсам и нулям.

Мы примем, что функция $\varphi(u)$ имела n-кратный полюс в точке $u = 0$. Поэтому $\psi(u)$ имеет в этой точке полюс порядка $n-1$. Кроме того, $\psi(u)$ имеет простой полюс в точке $u = a$. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — полная система нулей функции $\varphi(u)$, причем

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a;$$

тогда

$$\psi(u) = C\frac{\sigma(u-a_1)\sigma(u-a_2)\ldots\sigma(u-a_n)}{\sigma(u-a)[\sigma(u)]^{n-1}}.$$

Следовательно,

$$\varphi(u) = Ce^{\lambda u}\frac{\sigma(u-a_1)\sigma(u-a_2)\ldots\sigma(u-a_n)}{[\sigma(u)]^n}.$$

Полученная формула содержит константы $\lambda, a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_n$, которые должны быть определены так, чтобы рассматриваемая функция удовлетворяла уравнению (5).

Это определение констант особенно просто при $n = 1$. Остановимся на этом случае подробнее.

Уравнение Лямэ будет

$$y'' = [2\wp(u) + l]\,y. \tag{6}$$

Здесь частный интеграл имеет вид

$$y_1 = e^{-\lambda u}\frac{\sigma(u+a)}{\sigma(u)}.$$

Желая подставить эту функцию в уравнение Лямэ (6), найдем логарифмическую производную от y_1:

$$\frac{y_1'}{y_1} = -\lambda + \zeta(u+a) - \zeta(u);$$

далее находим

$$\frac{y_1''}{y_1} = \wp(u) - \wp(u+a) + [-\lambda + \zeta(u+a) - \zeta(u)]^2.$$

Из (6) следует, что должно иметь место тождество

$$2\wp(u) + l = \wp(u) - \wp(u+a) + [-\lambda + \zeta(u+a) - \zeta(u)]^2.$$

Его можно представить в виде

$$\wp(u) + \wp(u+a) + l = [-\lambda + \zeta(u+a) - \zeta(u)]^2$$

или

$$l - \wp(a) + \frac{1}{4}\left[\frac{\wp'(u) - \wp'(a)}{\wp(u) - \wp(a)}\right]^2 = \left[\zeta(a) - \lambda + \frac{1}{2}\frac{\wp'(u) - \wp'(a)}{\wp(u) - \wp(a)}\right]^2$$

Это тождество будет иметь место тогда и только тогда, если $\wp(a) = l$, $\zeta(a) = \lambda$. Таким образом, при $n = 1$ уравнение Лямэ имеет частный интеграл

$$y_1 = e^{-u\,\zeta(a)}\frac{\sigma(u+a)}{\sigma(u)} \qquad (\wp(a) = l).$$

Заменяя a на $-a$, найдем другой частный интеграл:

$$y_2 = e^{u\,\zeta(a)}\frac{\sigma(u-a)}{\sigma(u)}.$$

Они будут линейно независимы, если a не есть полупериод, т. е. если $l \neq e_k$ $(k = 1, 2, 3)$.

60. Теоремы Пикара о мероморфных функциях. В 1879 году Э. Пикар доказал две теоремы, которые оказали существенное влияние на дальнейшее развитие теории функций комплексного переменного.

Первая теорема Пикара гласит:

Если функция $f(z)$, мероморфная в открытой плоскости, выпускает (т. е. *не принимает*) *более двух значений, то она константа.*

Заметим, что примеры мероморфных функций, выпускающих два значения, строятся очень легко с помощью функции e^z, выпускающей значения 0 и ∞ Так, функция

$$\frac{a-be^z}{1-e^z} \qquad (a \neq b)$$

не принимает обоих значений a, b.

Приведем доказательство теоремы Пикара, принадлежащее ее автору.

Пусть мероморфная функция $f(z)$ выпускает три значения a, b, c (из них одно может быть бесконечным). В таком случае

$$g(z)=\frac{c-b}{c-a}\cdot\frac{f(z)-a}{f(z)-b}$$

выпускает значения 0, 1, ∞ и поэтому является целой функцией, выпускающей значения 0, 1.

Вспомним модулярную функцию $\lambda=\lambda(\tau)$, рассмотренную в § 23. Эта функция отображает область D_2 (см. рис. 8) на плоскость, разрезанную вдоль полуосей $(1, \infty)$, $(-\infty, 0)$.

Обратная функция $\tau=\tau(\lambda)$, рассматриваемая в неразрезанной λ-плоскости, бесконечнозначна, причем ее единственными критическими точками являются $\lambda=0, 1, \infty$. При обходе каждой из этих точек величина τ подвергается некоторому преобразованию группы Σ_2.

Рассмотрим теперь

$$\tau[g(z)]=G(z), \tag{1}$$

как функцию от z. Пусть точка z описывает непрерывную кривую, отправляясь от начального положения z_0. Если мы выберем в точке z_0 одно из возможных значений функции $G(z)$, а далее будем ее определять с соблюдением непрерывности, то мы получим прежде всего функцию, аналитическую в окрестности точки z_0. Этот процесс продолжения можно осуществить вдоль любого пути из точки z_0 в любую точку z_1, так как функция $g(z)$ нигде не примет ни одного из критических значений 0, 1, ∞ и, следовательно, во всех точках кривой, которую при этом опишет точка $\lambda=g(z)$, функция $\tau(\lambda)$ будет аналитической. Так как вся плоскость есть односвязная область, то в силу теоремы монодромии функция $G(z)$ однозначна и, следовательно, сама является целой функцией [1]).

[1]) Нетрудно непосредственно доказать однозначность $G(z)$. Действительно, если бы на двух различных путях из z_0 в z_1 мы получили различные значения для $G(z_1)$, так что при перемещении z по образованному этими путями замкнутому контуру $G(z)$ не вернулись бы к исходному значению, то это означало бы, что точка $\lambda=g(z)$ описала в своей плоскости замкнутый контур, внутри которого находится по крайней мере одна из двух критических точек $\lambda=0$, $\lambda=1$. Однако в этом случае путь из z_0 в z_1 можно было бы так деформировать (здесь использована односвязность плоскости), чтобы он прошел хотя бы через одну из этих критических точек, но это исключено в силу того, что $g(z)$ не принимает значений 0 и 1.

Так как $\Im\tau>0$, то функция (1) всюду в плоскости z удовлетворяет неравенству $\Im G(z)>0$. Поэтому функция

$$e^{iG(z)} \tag{2}$$

удовлетворяет во всей плоскости переменного z неравенству $|e^{iG(z)}|<1$.

По теореме Лиувилля функция (2) должна быть константой, следовательно, является константой функция $g(z)$, а значит, и исходная функция $f(z)$.

Вторая теорема, получившая в дальнейшем название большой теоремы Пикара, формулируется следующим образом:

Если z_0 — существенная особая точка однозначной функции $f(z)$, изолированная от других существенных особых точек этой функции, то в любой окрестности точки z_0 функция $f(z)$ выпускает самое большее два значения.

Данное Пикаром доказательство второй теоремы технически сложнее, но в идейном отношении аналогично доказательству первой теоремы, и мы можем его не излагать.

Читателю, возможно, бросилось в глаза несоответствие между элементарностью формулировки теоремы Пикара и ее доказательством, использующим весьма специальную функцию. Это обстоятельство, конечно, было сразу замечено и явилось стимулом для развития новых методов.

Первое «элементарное» доказательство теоремы Пикара было дано Борелем в 1896 году.

В настоящее время круг вопросов, связанных с теоремами Пикара, представляет одну из самых интересных и красивых частей теории функций, богатую глубокими результатами и замечательными общими методами.

Следует заметить, что в некоторых предложениях, относящихся к рассматриваемому кругу идей, устанавливается наличие тех или иных оценок. При этом оказывается, что для получения точных оценок введение модулярной функции неизбежно. В ближайшем параграфе мы приведем одну из замечательнейших теорем этого рода.

61. Теорема Ландау. Эта теорема формулируется следующим образом: *если степенной ряд*

$$f(z)=a_0+a_nz^n+a_{n+1}z^{n+1}+\ldots \qquad (a_n\neq 0,\ n\geqslant 1)$$

в круге радиуса R с центром в точке $z = 0$ сходится и не принимает значений 0, 1, то радиус этого круга R не превосходит некоторой величины, зависящей лишь от a_0, a_n, n:

$$R \leqslant \varphi(a_0, a_n, n).$$

Как видим, в рассматриваемой теореме устанавливается некоторая оценка, даваемая функцией $\varphi(a_0, a_n, n)$. В процессе доказательства теоремы Ландау мы найдем точное выражение этой функции [1]).

Связь теоремы Ландау с теоремой Пикара, рассмотренной в § 60, очевидна.

Действительно, если не принимающая значений 0, 1 целая функция $g(z)$ отлична от константы, то в ряду коэффициентов $a_0, a_1, \ldots$, начиная со второго, найдется первый отличный от нуля, скажем, a_n. По теореме Ландау можно указать круг конечного радиуса, на окружности которого $g(z)$ имеет по крайней мере одну особую точку, что противоречит условию.

Таким образом, теорема Пикара есть следствие теоремы Ландау.

Переходим к доказательству теоремы Ландау. Возьмем функцию [2])

$$\Omega(z) = \frac{\tau[f(z)] - \tau(a_0)}{\tau[f(z)] - \overline{\tau(a_0)}}.$$

Здесь $\tau(a_0)$ есть одно из возможных значений функции $\tau[f(z)]$ в точке $z = 0$. Значения $\tau[f(z)]$ в других точках круга $|z| < R$ выбраны так, чтобы соблюдалась непрерывность. $\Omega(z)$ есть регулярная функция в области $|z| < R$, что доказывается так же, как и соответствующее положение в теореме Пикара. Далее, как легко видеть, $|\Omega(z)| < 1$ при $|z| < R$ и $\Omega(0) = 0$. Так как

$$f(z) = a_0 + a_n z^n + \ldots,$$

то для $\Omega(z)$ получается разложение

$$\Omega(z) = \frac{\tau'(a_0)}{2i\,\Im\,\tau(a_0)} a_n z^n + \ldots$$

---

[1]) Ландау доказал свою теорему в 1904 году. Излагаемое нами доказательство, приводящее к точному выражению для функции $\varphi(a_0, a_n, n)$, принадлежит Каратеодори (1905 год).

[2]) Функция $\tau(\lambda)$ введена нами в § 60.

В силу неравенств Коши

$$\left|\frac{\tau'(a_0)}{2\,\Im\,\tau(a_0)} a_n\right| \leqslant \frac{1}{R^n}$$

и, значит,

$$R \leqslant \sqrt[n]{\frac{2\,\Im\,\tau(a_0)}{|a_n|\cdot|\tau'(a_0)|}};$$

остается доказать, что полученная нами оценка точная, т. е. что

$$\varphi(a_0, a_n, n) = \sqrt[n]{\frac{2\,\Im\,\tau(a_0)}{|a_n|\cdot|\tau'(a_0)|}}.$$

Если мы хотим, чтобы для некоторой функции $f(z)$ имело место равенство

$$R = \sqrt[n]{\frac{2\,\Im\,\tau(a_0)}{|a_n|\cdot|\tau'(a_0)|}},$$

то необходимо, чтобы для соответствующей функции

$$\Omega(z) = A_n z^n + \ldots,$$

удовлетворяющей неравенству

$$|\Omega(z)| < 1 \qquad (|z| < R),$$

имело место равенство

$$|A_n| = \frac{1}{R^n}.$$

Но это значит, что модуль регулярной в круге функции

$$\frac{\Omega(z)}{z^n} \tag{α}$$

должен достигнуть своего максимума в точке $z = 0$. Следовательно, рассматриваемое отношение (α) должно быть константой:

$$\Omega(z) = \frac{\varepsilon z^n}{R^n} \qquad (|\varepsilon| = 1).$$

Из равенства

$$\frac{\varepsilon z^n}{R^n} = \frac{\tau[f(z)] - \tau(a_0)}{\tau[f(z)] - \overline{\tau(a_0)}}$$

найдем сначала

$$\tau[f(z)] = \frac{\tau(a_0) R^n - \overline{\tau(a_0)}\,\varepsilon z^n}{R^n - \varepsilon z^n},$$

а затем и

$$f(z) = \lambda\left(\frac{\tau(a_0) R^n - \overline{\tau(a_0)}\,\varepsilon z^n}{R^n - \varepsilon z^n}\right).$$

Возможность равенства

$$R = \sqrt[n]{\frac{2\,\Im\,\tau(a_0)}{|a_n|\cdot|\tau'(a_0)|}},$$

таким образом доказана, т. е. оценка точна.

62. О мероморфных функциях, обладающих алгебраической теоремой сложения. Мероморфная функция $\varphi(z)$ обладает алгебраической теоремой сложения, если имеет место тождество

$$F(\varphi(z_1+z_2),\quad \varphi(z_1),\quad \varphi(z_2)) = 0, \tag{1}$$

где F — целая рациональная функция своих аргументов.

Выше мы видели, что алгебраической теоремой сложения обладает всякая эллиптическая функция. Алгебраическую теорему сложения имеют также (что без труда проверяется непосредственно) вырождения эллиптических функций, каковыми являются рациональные функции от z и рациональные функции от $e^{\pi i z/\omega}$.

Вейерштрасс доказал, что других функций, имеющих алгебраическую теорему сложения, не существует.

Мы приведем доказательство этой теоремы Вейерштрасса, принадлежащее Осгуду.

Итак, пусть мероморфная функция $\varphi(z)$ обладает алгебраической теоремой сложения (1), где многочлен F имеет степень m относительно первого аргумента. Пусть, кроме того, дано, что $\varphi(z)$ не является функцией рациональной и, значит, $z=\infty$ есть ее существенная особая точка.

Возьмем какое-нибудь число C, отличное от тех значений, которые $\varphi(z)$ в окрестности точки $z=\infty$ выпускает. В таком случае (здесь используется большая теорема Пикара) можно указать $m+1$ различных точек a_k так, чтобы

$$\varphi(a_k) = C \quad (k = 0, 1, \ldots, m).$$

Затем выберем регулярную точку ζ функции $\varphi(z)$, вместе с которой точки

$$a_k + \zeta \quad (k = 0, 1, \ldots, m)$$

также регулярны для $\varphi(z)$.

Очевидно, это же будет иметь место для всех z, достаточно близких к ζ. Беря в качестве z какое-либо из указанных значений, рассмотрим уравнение

$$F(x,\ \varphi(z),\ C) = 0. \tag{2}$$

Это уравнение имеет $m+1$ корней $x = \varphi(z+a_k)$. В силу нашего условия все эти корни не могут быть различными. Значит, при каждом z из некоторой окрестности точки ζ имеет место равенство

$$\varphi(z+a_r) = \varphi(z+a_s).$$

Пара $(a_r,\ a_s)$ может меняться при переходе от одного значения z к другому. Но так как этих значений z бесконечное множество, а пар $(a_r,\ a_s)$ конечное число, то по крайней мере для одной пары $(a_\rho,\ a_\sigma)$ равенство

$$\varphi(z+a_\rho) = \varphi(z+a_\sigma) \tag{3}$$

будет выполнено для бесчисленного множества точек z, а эти точки z имеют предельную точку ζ, в которой $\varphi(z)$ регулярна. Отсюда в силу теоремы единственности аналитических функций следует, что равенство (3) является тождеством. Но это означает, что $\varphi(z)$ имеет период $a_\sigma - a_\rho$.

Таким образом, периодичность функции $\varphi(z)$ доказана. Если $\varphi(z)$ — двоякопериодична, то утверждение теоремы доказано. Поэтому остается рассмотреть второй возможный случай, когда $\varphi(z)$ однопериодична. Принимая для простоты, что ее примитивным периодом является 2π, мы должны доказать, что в этом случае $\varphi(z)$ есть рациональная функция от $w=e^{iz}$. Отображение $w=e^{iz}$ переводит полосу

$$0 < \Re z < 2\pi$$

в w-плоскость, разрезанную вдоль полуоси $(0,\ \infty)$, и нетрудно видеть, что $\varphi(z) = \psi(w)$ мероморфна в w-плоскости, проколотой в точках $w=0,\ \infty$. Если допустить, что хотя бы одна из этих точек является для $\psi(w)$ существенной особенностью, то к $\psi(w)$ снова можно будет применить теорему Пикара и указать, как и выше, $m+1$ *различных* точек b_k, в которых $\psi(w)=C$. Прообразы этих точек лежат в полосе

$$0 \leqslant \Re z < 2\pi.$$

Поэтому приведенное выше рассмотрение уравнения (2) покажет, что $\varphi(z)$ имеет период, вещественная часть которого $<2\pi$, что невозможно.

Тем самым теорема Вейерштрасса полностью доказана.

63. О рядах Фурье аналитических функций. В настоящем параграфе мы будем рассматривать функции с периодом 2π, аналитические на вещественной оси.

Каждой такой функции $f(z)$ принадлежит некоторая полоса регулярности, т. е. наибольшая полоса, ограниченная двумя прямыми:

$$y=-\alpha, \quad y=\beta \qquad (\alpha>0,\ \beta>0),$$

внутри которой функция регулярна. На каждой из этих прямых рассматриваемая функция $f(z)$ имеет по крайней мере одну особую точку.

Теорема 1. *Пусть $f(z)$ — аналитическая функция с периодом 2π, регулярная в замкнутой полосе*

$$-a\leqslant y\leqslant b \qquad (a>0,\ b>0).$$

Пусть, далее,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

— ряд Фурье функции $f(x)$.

В таком случае имеют место неравенства

$$\left.\begin{aligned}|c_{-k}|&\leqslant Me^{-kb},\\ |c_k|&\leqslant Me^{-ka}\end{aligned}\right\} \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{1}$$

где M — некоторая константа (от k не зависит).

Доказательство. Рассмотрим прямоугольник с вершинами $(0, 0)$, $(2\pi, 0)$, $(2\pi, b)$, $(0, b)$. Внутри и на границе этого прямоугольника функция $f(z)\,e^{ikz}$ регулярна. Поэтому, применяя к этой функции теорему Коши, получим равенство

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,e^{ikx}\,dx+i\int_0^b f(2\pi+iy)\,e^{-ky}\,dy+$$
$$+\int_{2\pi}^0 f(x+ib)\,e^{ikx-kb}\,dx+i\int_b^0 f(iy)\,e^{-ky}\,dy=0.$$

В силу периодичности функции $f(z)$ второй и четвертый интегралы взаимно уничтожаются. Поэтому

$$2\pi c_{-k}=\int_0^{2\pi} f(x)\,e^{ikx}\,dx=e^{-kb}\int_0^{2\pi} f(x+ib)\,e^{ikx}\,dx.$$

Отсюда и получаются неравенства

$$|c_{-k}|\leqslant Me^{-kb} \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

где M — максимум модуля функции $f(z)$ в рассматриваемой полосе.

Доказательство неравенств для c_k аналогично.

Теорема 2. *Если имеют место неравенства*

$$\left.\begin{aligned}|c_{-k}|&\leqslant Me^{-kb},\\ |c_k|&\leqslant Me^{-ka}\end{aligned}\right\} \qquad (a>0,\ b>0),$$

то ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikz}$$

сходится равномерно и абсолютно в любой полосе, лежащей целиком внутри полосы

$$-a<y<b, \tag{2}$$

и представляет регулярную аналитическую функцию с периодом 2π внутри полосы (2).

Доказательство этой теоремы настолько просто, что мы можем его опустить.

Следствие. *Величины α, β, определяющие полосу регулярности функции $f(z)$, равны*

$$\alpha=\varliminf_{k\to\infty}\ln\frac{1}{\sqrt[k]{|c_k|}}, \tag{3_1}$$

$$\beta=\varliminf_{k\to\infty}\ln\frac{1}{\sqrt[k]{|c_{-k}|}}. \tag{3_2}$$

Доказательство. Пусть числа α, β определяются формулами (3_1), (3_2). В таком случае при любом $\varepsilon>0$ для всех достаточно больших k имеют место неравенства

$$|c_{-k}| < e^{-k(\beta-\varepsilon)}, \quad |c_k| < e^{-k(\alpha-\varepsilon)}.$$

Отсюда на основании теоремы 2 вытекает, что $f(z)$ регулярна в полосе $-(\alpha-\varepsilon) < y < \beta-\varepsilon$, а так как ε — число произвольное, то $f(z)$ регулярна в полосе $-\alpha < y < \beta$.

Остается показать, что это есть наибольшая полоса, где $f(z)$ регулярна. Допуская противное, мы получили бы в силу теоремы 1, что в неравенствах

$$|c_{-k}| \leqslant Me^{-kb} \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

можно взять $b > \beta$ или в неравенствах

$$|c_k| \leqslant Me^{-ka} \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

можно взять $a > \alpha$.

В первом случае

$$\varliminf_{k\to\infty} \ln \frac{1}{\sqrt[k]{|c_{-k}|}} > \beta,$$

а во втором

$$\varliminf_{k\to\infty} \ln \frac{1}{\sqrt[k]{|c_k|}} > \alpha.$$

Но то и другое противоречит условию.

Заметим теперь, что если $f(z)$ — функция целая, то оба параметра α, β бесконечно велики, и неравенства (1) имеют место при любых $a > 0$, $b > 0$. Однако нужно помнить, что M есть функция от a, b, которая неограниченно растет при $a \to \infty$, $b \to \infty$, если, конечно, $f(z)$ не является константой.

Прекрасный пример целых функций с вещественным периодом (такой период можно всегда свести к 2π) представляют тэта-функции, которые мы ввели в самом начале книги (§ 3).

Теперь мы рассмотрим некоторые мероморфные функции с вещественным периодом.

Возьмем функцию

$$\operatorname{sn}\frac{2Kv}{\pi} = \operatorname{sn}\left(\frac{2Kv}{\pi};\ k\right),$$

где K — полный эллиптический интеграл первого рода для модуля k. Эта функция имеет периоды 2π, $\pi i K'/K$ и допускает разложение

$$\operatorname{sn}\frac{2Kv}{\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nv.$$

Заменяя v на $\pi - v$, получим

$$\operatorname{sn}\frac{2Kv}{\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} c_n \sin nv,$$

следовательно, $c_{2n} = 0$ $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$ и

$$\operatorname{sn}\frac{2Kv}{\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n-1} \sin(2n-1)v.$$

Для определения коэффициентов Фурье c_{2n-1} имеем формулу

$$c_{2n-1} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sn}\frac{2Kv}{\pi}\sin(2n-1)v\,dv =$$

$$= \frac{2}{\pi i}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sn}\frac{2Kv}{\pi}e^{(2n-1)iv}\,dv.$$

Возьмем прямоугольник с вершинами в точках

$$-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}+\frac{\pi i K'}{K},\ -\frac{\pi}{2}+\frac{\pi i K'}{K}.$$

Интегрируя функцию

$$\operatorname{sn}\frac{2Kv}{\pi}e^{(2n-1)iv} \tag{4}$$

по границе этого прямоугольника и учитывая, что функция (4) имеет период π, в силу чего интегралы по боковым сторонам уничтожаются, находим

$$\frac{2}{\pi i}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sn}\frac{2Kv}{\pi}\, e^{(2n-1)iv}\,dv +$$

$$+\frac{2}{\pi i}\int_{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi i K'}{K}}^{-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi i K'}{K}} \operatorname{sn}\frac{2Kv}{\pi}\, e^{(2n-1)iv}\,dv =$$

$$=4\operatorname*{Rés}_{v=\frac{\pi i K'}{2K}}\left\{\operatorname{sn}\frac{2Kv}{\pi}\, e^{(2n-1)iv}\right\}$$

или

$$c_{2n-1}(1-h^{2n-1})=\frac{2\pi}{kK}h^{n-1/2} \qquad (h=e^{-\pi K'/K}),$$

так как

$$\operatorname*{Rés}_{v=\frac{\pi i K'}{K}}\left\{\operatorname{sn}\frac{2Kv}{\pi}\, e^{(2n-1)iv}\right\}=\frac{\pi}{2kK}e^{-\frac{(2n-1)\pi K'}{2K}}.$$

Таким образом,

$$c_{2n-1}=\frac{2\pi}{kK}\,\frac{h^{n-1/2}}{1-h^{2n-1}}.$$

Наше разложение имеет, следовательно, вид

$$\operatorname{sn}\frac{2Kv}{\pi}=\frac{2\pi}{kK}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h^{n-1/2}}{1-h^{2n-1}}\sin(2n-1)\,v.$$

Полосой сходимости здесь является

$$|\Im v|<\Im\frac{\pi i K'}{2K}.$$

В той же полосе справедливы разложения

$$\operatorname{cn}\frac{2Kv}{\pi}=\frac{2\pi}{kK}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h^{n-1/2}\cos(2n-1)\,v}{1+h^{2n-1}},$$

$$\operatorname{dn}\frac{2Kv}{\pi}=\frac{\pi}{2K}+\frac{2\pi}{K}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h^{n}\cos 2nv}{1+h^{2n}}.$$

Все три функции имеют полюсы на границах этой полосы.

ТАБЛИЦЫ ВАЖНЕЙШИХ ФОРМУЛ

I. Основные тригонометрические функции

$$\sin u = u \prod{}' \left(1 - \frac{u}{m\pi}\right) e^{\frac{u}{m\pi}}$$

$$\operatorname{ctg} u = \frac{1}{u} + \sum{}' \left(\frac{1}{u - m\pi} + \frac{1}{m\pi}\right) = \frac{d}{du} \ln \sin u$$

$$\frac{1}{\sin^2 u} = \frac{1}{u^2} + \sum{}' \frac{1}{(u - m\pi)^2} = -\frac{d}{du} \operatorname{ctg} u$$

II. Функции Вейерштрасса

$$\sigma(u) = u \prod{}' \left(1 - \frac{u}{s}\right) e^{\frac{u}{s} + \frac{u^2}{2s^2}}$$

$$\zeta(u) = \frac{1}{u} + \sum{}' \left(\frac{1}{u - s} + \frac{1}{s} + \frac{u}{s^2}\right) = \frac{d}{du} \ln \sigma(u)$$

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum{}' \left\{\frac{1}{(u-s)^2} - \frac{1}{s^2}\right\} = -\zeta'(u)$$

$$g_2 = 60 \sum{}' \frac{1}{s^4}; \quad g_3 = 140 \sum{}' \frac{1}{s^6}$$

$$(s = 2m\omega + 2m'\omega')$$

$$\sigma(-u) = -\sigma(u); \quad \zeta(-u) = -\zeta(u); \quad \wp(-u) = \wp(u)$$

$$\sigma(u) = u - \frac{g_2 u^5}{2^4 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{g_3 u^7}{2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} - \cdots$$

$$\zeta(u) = \frac{1}{u} - \frac{g_2 u^3}{2^2 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{g_3 u^5}{2^2 \cdot 5 \cdot 7} - \cdots$$

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2 u^2}{2^2 \cdot 5} + \frac{g_3 u^4}{2^2 \cdot 7} + \cdots$$

III. Соотношения однородности

$$\sigma(u) = \sigma(u \mid \omega, \omega') = \sigma(u; g_2, g_3)$$

$$\zeta(u) = \zeta(u \mid \omega, \omega') = \zeta(u; g_2, g_3)$$

$$\wp(u) = \wp(u \mid \omega, \omega') = \wp(u; g_2, g_3)$$

$$g_2 = g_2(\omega, \omega'); \quad g_3 = g_3(\omega, \omega')$$

$$\sigma(\lambda u \mid \lambda\omega, \lambda\omega') = \lambda\sigma(u \mid \omega, \omega')$$

$$\zeta(\lambda u \mid \lambda\omega, \lambda\omega') = \frac{1}{\lambda} \zeta(u \mid \omega, \omega')$$

$$\wp(\lambda u \mid \lambda\omega, \lambda\omega') = \frac{1}{\lambda^2} \wp(u \mid \omega, \omega')$$

$$g_2(\lambda\omega, \lambda\omega') = \frac{1}{\lambda^4} g_2(\omega, \omega')$$

$$g_3(\lambda\omega, \lambda\omega') = \frac{1}{\lambda^6} g_3(\omega, \omega')$$

IV. Дифференциальное уравнение функции $\wp$

$$\wp'^2(u) = 4\wp^3(u) - g_2\wp(u) - g_3 =$$
$$= 4\{\wp(u) - e_1\}\{\wp(u) - e_2\}\{\wp(u) - e_3\}$$

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0$$

$$e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1 = -\frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) = -\frac{1}{4} g_2$$

$$e_1e_2e_3 = \frac{1}{4} g_3$$

$$G = \frac{1}{16}(g_2^3 - 27g_3^2) = (e_1 - e_2)^2 (e_2 - e_3)^2 (e_3 - e_1)^2$$

$$\omega_1 = \omega, \quad \omega_2 = -\omega - \omega', \quad \omega_3 = \omega'$$

$$e_\alpha = \wp(\omega_\alpha) \quad (\alpha = 1, 2, 3)$$

V. Прибавление периодов

$$\wp(u+2\omega)=\wp(u+2\omega')=\wp(u)$$

$$\zeta(u+2\omega)=\zeta(u)+2\eta \qquad \eta=\zeta(\omega)=\eta_1$$
$$\zeta(u+2\omega')=\zeta(u)+2\eta' \qquad \eta'=\zeta(\omega')=\eta_3$$

$$\eta\omega'-\eta'\omega=\begin{cases}\dfrac{\pi i}{2} & \left(\Im\,\dfrac{\omega'}{\omega}>0\right)\\ -\dfrac{\pi i}{2} & \left(\Im\,\dfrac{\omega'}{\omega}<0\right)\end{cases}$$

$$\eta_2=-\eta-\eta'$$

$$\sigma(u+2\omega_\alpha)=-e^{2\eta_\alpha(u+\omega_\alpha)}\sigma(u) \qquad (\alpha=1,\ 2,\ 3)$$

$$\sigma_\alpha(u)=-e^{\eta_\alpha u}\frac{\sigma(u-\omega_\alpha)}{\sigma(\omega_\alpha)} \qquad (\alpha=1,\ 2,\ 3)$$
$$\sigma_\alpha(u+2\omega_\alpha)=-e^{2\eta_\alpha(u+\omega_\alpha)}\sigma_\alpha(u) \qquad (\alpha=1,\ 2,\ 3)$$
$$\sigma_\alpha(u+2\omega_\beta)=e^{2\eta_\beta(u+\omega_\beta)}\sigma_\alpha(u) \qquad (\beta\neq\alpha;\ \alpha,\ \beta=1,\ 2,\ 3)$$

$$\zeta_\alpha(u)=\frac{d}{du}\ln\sigma_\alpha(u) \qquad (\alpha=1,\ 2,\ 3)$$
$$\zeta_\alpha(u)=\zeta(u+\omega_\alpha)-\eta_\alpha \qquad (\sigma=1,\ 2,\ 3)$$

VI. Теоремы сложения функций Вейерштрасса

$$\wp(u)-\wp(v)=-\frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{\sigma^2(u)\,\sigma^2(v)}$$

$$\zeta(u+v)=\zeta(u)+\zeta(v)+\frac{1}{2}\,\frac{\wp'(u)-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}$$

$$\wp(u+v)=\wp(u)-\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{\wp'(u)-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}\right\}$$
$$\wp(u+v)+\wp(u)+\wp(v)=\frac{1}{4}\left\{\frac{\wp'(u)-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}\right\}^2$$
$$\wp(u+v)-\wp(u-v)=-\frac{\wp'(u)\,\wp'(v)}{[\wp(u)-\wp(v)]^2}$$
$$\begin{vmatrix}1 & \wp(u) & \wp'(u)\\ 1 & \wp(v) & \wp'(v)\\ 1 & \wp(w) & \wp'(w)\end{vmatrix}=0 \qquad (u+v+w=0)$$

$$\wp(u+\omega_\alpha)-e_\alpha=\frac{(e_\alpha-e_\beta)(e_\alpha-e_\gamma)}{\wp(u)-e_\alpha} \qquad (\alpha,\ \beta,\ \gamma=1,\ 2,\ 3)$$
$$\sqrt{\wp(u)-e_\alpha}=\frac{\sigma_\alpha(u)}{\sigma(u)} \qquad (\alpha=1,\ 2,\ 3)$$

$$\wp'(u)=-2\,\frac{\sigma_1(u)\,\sigma_2(u)\,\sigma_3(u)}{[\sigma(u)]^3}$$

VII. Вырождение функций Вейерштрасса

$\omega' = \infty$, ω конечно

$$\sigma(u) = \frac{2\omega}{\pi} e^{\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi u}{2\omega}\right)^2} \sin\frac{\pi u}{2\omega}$$

$$\zeta(u) = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 u + \frac{\pi}{2\omega}\operatorname{ctg}\frac{\pi u}{2\omega}$$

$$\wp(u) = -\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 \frac{1}{\sin^2\frac{\pi u}{2\omega}}$$

$$g_2^3 - 27g_3^2 = 0$$

$$e_1 = \frac{3g_3}{g_2}, \quad e_2 = e_3 = -\frac{3g_3}{2g_2}$$

$$\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 = \frac{9g_3}{2g_2}, \quad 2\eta\omega = \frac{\pi^2}{6}$$

$\omega = \infty$, $\omega' = \infty$

$$\sigma(u) = u$$

$$\zeta(u) = \frac{1}{u}$$

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2}$$

$$g_2 = g_3 = 0$$

$$e_1 = e_2 = e_3 = 0$$

VIII. Тэта-функции. Формулы приведения

$$h = e^{\pi i\tau}, \quad h^{\frac{1}{4}} = e^{\frac{\pi i\tau}{4}}, \quad \Im\tau > 0, \quad z = e^{\pi i v}$$

$$\vartheta_1(v) = 2h^{\frac{1}{4}}\sin\pi v - 2h^{\frac{9}{4}}\sin 3\pi v + 2h^{\frac{25}{4}}\sin 5\pi v - \ldots$$

$$\vartheta_2(v) = 2h^{\frac{1}{4}}\cos\pi v + 2h^{\frac{9}{4}}\cos 3\pi v + 2h^{\frac{25}{4}}\cos 5\pi v + \ldots$$

$$\vartheta_3(v) = 1 + 2h\cos 2\pi v + 2h^4\cos 4\pi v + 2h^9\cos 6\pi v + \ldots$$

$$\vartheta_0(v) = 1 - 2h\cos 2\pi v + 2h^4\cos 4\pi v - 2h^9\cos 6\pi v + \ldots$$

$\vartheta_1(v \pm 1) = -\vartheta_1(v)$	$\vartheta_1\left(v \pm \frac{1}{2}\right) = \pm\vartheta_2(v)$
$\vartheta_2(v \pm 1) = -\vartheta_2(v)$	$\vartheta_2\left(v \pm \frac{1}{2}\right) = \mp\vartheta_1(v)$
$\vartheta_3(v \pm 1) = \vartheta_3(v)$	$\vartheta_3\left(v \pm \frac{1}{2}\right) = \vartheta_0(v)$
$\vartheta_0(v \pm 1) = \vartheta_0(v)$	$\vartheta_0\left(v \pm \frac{1}{2}\right) = \vartheta_3(v)$

$\vartheta_1(v \pm \tau) = -h^{-1}z^{\mp 2}\vartheta_1(v)$	$\vartheta_1\left(v \pm \frac{\tau}{2}\right) = \pm ih^{-\frac{1}{4}}z^{\mp 1}\vartheta_0(v)$
$\vartheta_2(v \pm \tau) = h^{-1}z^{\mp 2}\vartheta_2(v)$	$\vartheta_2\left(v \pm \frac{\tau}{2}\right) = h^{-\frac{1}{4}}z^{\mp 1}\vartheta_3(v)$
$\vartheta_3(v \pm \tau) = h^{-1}z^{\mp 2}\vartheta_3(v)$	$\vartheta_3\left(v \pm \frac{\tau}{2}\right) = h^{-\frac{1}{4}}z^{\mp 1}\vartheta_2(v)$
$\vartheta_0(v \pm \tau) = -h^{-1}z^{\mp 2}\vartheta_0(v)$	$\vartheta_0\left(v \pm \frac{\tau}{2}\right) = \pm ih^{-\frac{1}{4}}z^{\mp 1}\vartheta_1(v)$

Все тэта-функции удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial v^2} = 4\pi i\,\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau} \qquad \{\vartheta = \vartheta(v \mid \tau)\}$$

IX. Разложение тэта-функций в бесконечные произведения

$$h = e^{\pi i\tau}, \quad h^{\frac{1}{4}} = e^{\frac{1}{4}\pi i\tau}, \quad \Im\tau > 0$$

$H_0 = \prod_{k=1}^{\infty}(1-h^{2k})$	$H_1 = \prod_{k=1}^{\infty}(1+h^{2k})$
$H_2 = \prod_{k=1}^{\infty}(1+h^{2k-1})$	$H_3 = \prod_{k=1}^{\infty}(1-h^{2k-1})$

$$H_1H_2H_3 = 1$$

$$\vartheta_1(v) = 2H_0h^{\frac{1}{4}}\sin\pi v\prod_{k=1}^{\infty}(1-2h^{2k}\cos 2\pi v + h^{4k})$$

$$\vartheta_2(v) = 2H_0h^{\frac{1}{4}}\cos\pi v\prod_{k=1}^{\infty}(1+2h^{2k}\cos 2\pi v + h^{4k})$$

$$\vartheta_3(v) = H_0\prod_{k=1}^{\infty}(1+2h^{2k-1}\cos 2\pi v + h^{4k-2})$$

$$\vartheta_0(v) = H_0\prod_{k=1}^{\infty}(1-2h^{2k-1}\cos 2\pi v + h^{4k-2})$$

Нули тэта-функций

$\vartheta_1(v)$	$\vartheta_2(v)$	$\vartheta_3(v)$	$\vartheta_0(v)$
$m+n\tau$	$m-\frac{1}{2}+n\tau$	$m-\frac{1}{2}+\left(n-\frac{1}{2}\right)\tau$	$m+\left(n-\frac{1}{2}\right)\tau$

$(m, \; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

Нулевые значения тэта-функций

$\vartheta_1' = \vartheta_1'(0) = 2\pi h^{\frac{1}{4}}H_0^3$ $\vartheta_3 = \vartheta_3(0) = H_0H_2^2$	$\vartheta_2 = \vartheta_2(0) = 2h^{\frac{1}{4}}H_0H_1^2$ $\vartheta_0 = \vartheta_0(0) = H_0H_3^2$
$\vartheta_1' = \pi\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_0$	$\vartheta_3^4 = \vartheta_0^4 + \vartheta_2^4$

X. Различные разложения в простые ряды

$\frac{\omega'}{\omega} = \tau$	$\Im\tau > 0$	$h = e^{\pi i\tau}$	$v = \frac{u}{2\omega}$	$e^{\pi i v} = z$

$\sigma(u) = 2\omega e^{2\eta\omega v^2}\frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_1'}$	$\sigma_1(u) = e^{2\eta\omega v^2}\frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_2}$
$\sigma_2(u) = e^{2\eta\omega v^2}\frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_3}$	$\sigma_3(u) = e^{2\eta\omega v^2}\frac{\vartheta_0(v)}{\vartheta_0}$

$$\zeta(u) = \frac{\eta}{\omega}u + \frac{\pi i}{2\omega}\left\{\frac{z+z^{-1}}{z-z^{-1}} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2h^{2k}z^{-2}}{1-h^{2k}z^{-2}} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2h^{2k}z^{2}}{1-h^{2k}z^{2}}\right\}$$

$$\wp(u) = -\frac{\eta}{\omega} - \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2\left\{\frac{1}{(z-z^{-1})^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{h^{2k}z^{-2}}{(1-h^{2k}z^{-2})^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{h^{2k}z^{2}}{(1-h^{2k}z^{2})^2}\right\}$$

$$2\eta\omega = -\frac{1}{6}\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} = \frac{\pi^2}{6}\,\frac{1-3^3h^{1\times 2}+5^3h^{2\times 3}-\ldots}{1-3h^{1\times 2}+5h^{2\times 3}-\ldots} =$$
$$= \frac{\pi^2}{6}\left\{1-24\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h^{2k}}{(1-h^{2k})^2}\right\}$$

$$e_1 = -\frac{\eta}{\omega} + \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2\left\{\frac{1}{4} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h^{2k}}{(1+h^{2k})^2}\right\}$$

$$e_2 = -\frac{\eta}{\omega} + 2\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h^{2k-1}}{(1+h^{2k-1})^2}$$

$$e_3 = -\frac{\eta}{\omega} - 2\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h^{2k-1}}{(1-h^{2k-1})^2}$$

$$\sqrt{e_2-e_1} = i\sqrt{e_1-e_2} = i\frac{\pi}{2\omega}\vartheta_0^2$$

$$\sqrt{e_3-e_2} = i\sqrt{e_2-e_3} = -i\frac{\pi}{2\omega}\vartheta_2^2$$

$$\sqrt{e_1-e_3} = i\sqrt{e_3-e_1} = \frac{\pi}{2\omega}\vartheta_3^2$$

XI. Другие обозначения тэта-функций

$h = e^{\pi i \tau}$	$\Im \tau > 0$

$$K = \frac{\pi}{2}\{1 + 2h + 2h^4 + \dots\}^2 = \frac{\pi}{2}\vartheta_3^2 = \frac{\pi}{2}\vartheta_3^2(0 \mid \tau)$$

$$iK' = \tau K$$

$\lambda = e^{-\frac{\pi i}{4K}(2u + iK')}$	$\mu = e^{-\frac{\pi i}{K}(u + iK')}$

$$\theta_\alpha(w) = \vartheta_\alpha\left(\frac{w}{2K}\right) \quad (\alpha = 0,\ 1,\ 2,\ 3).$$

$H(w) = \theta_1(w)$ $H_1(w) = \theta_2(w)$	$\Theta(w) = \theta_0(w)$ $\Theta_1(w) = \theta_3(w)$

Нули

$H(w)$	$H_1(w)$	$\Theta(w)$	$\Theta_1(w)$
$2mK + 2niK'$	$(2m+1)K + 2niK'$	$2mK + (2n+1)iK'$	$(2m+1)K + (2n+1)iK'$

$$(m,\ n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \dots)$$

$H(u+K) = H_1(u)$ $\Theta(u+K) = \Theta_1(u)$ $H_1(u+K) = -H(u)$ $\Theta_1(u+K) = \Theta(u)$	$H(u+iK') = i\lambda\,\Theta(u)$ $\Theta(u+iK') = i\lambda\,H(u)$ $H_1(u+iK') = \lambda\,\Theta_1(u)$ $\Theta_1(u+iK') = \lambda\,H_1(u)$
$H(u+K+iK') = \lambda\,\Theta_1(u)$ $\Theta(u+K+iK') = \lambda\,H_1(u)$ $H_1(u+K+iK') = -i\lambda\,\Theta(u)$ $\Theta_1(u+K+iK') = i\lambda\,H(u)$	$H(u+2iK') = -\mu\,H(u)$ $\Theta(u+2iK') = -\mu\,\Theta(u)$ $H_1(u+2iK') = \mu\,H_1(u)$ $\Theta_1(u+2iK') = \mu\,\Theta_1(u)$

XII. Функции Якоби

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1 + 2h + 2h^4 + 2h^9 + \dots$$

$$\sqrt{k} = \frac{H_1(0)}{\Theta_1(0)} = \frac{2h^{\frac{1}{4}} + 2h^{\frac{9}{4}} + \dots}{1 + 2h + 2h^4 + \dots} \qquad \left(h^{\frac{1}{4}} = e^{\frac{\pi i \tau}{4}}\right)$$

$$\sqrt{k'} = \frac{\Theta(0)}{\Theta_1(0)} = \frac{1 - 2h + 2h^4 - \dots}{1 + 2h + 2h^4 + \dots}$$

$$\operatorname{sn}(u;\ k) = \frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{H(u)}{\Theta(u)}$$

$$\operatorname{cn}(u;\ k) = \sqrt{\frac{k'}{k}}\,\frac{H_1(u)}{\Theta(u)}$$

$$\operatorname{dn}(u;\ k) = \sqrt{k'}\,\frac{\Theta_1(u)}{\Theta(u)}$$

$\operatorname{sn}(u+2K) = -\operatorname{sn} u$ $\operatorname{cn}(u+2K) = -\operatorname{cn} u$ $\operatorname{dn}(u+2K) = \operatorname{dn} u$	$\operatorname{sn}(u+2iK') = \operatorname{sn} u$ $\operatorname{cn}(u+2iK') = -\operatorname{cn} u$ $\operatorname{dn}(u+2iK') = -\operatorname{dn} u$

Периоды

$\operatorname{sn} u$	$\operatorname{cn} u$	$\operatorname{dn} u$
$4K,\ 2iK'$	$4K,\ 2K + 2iK'$	$2K,\ 4iK'$

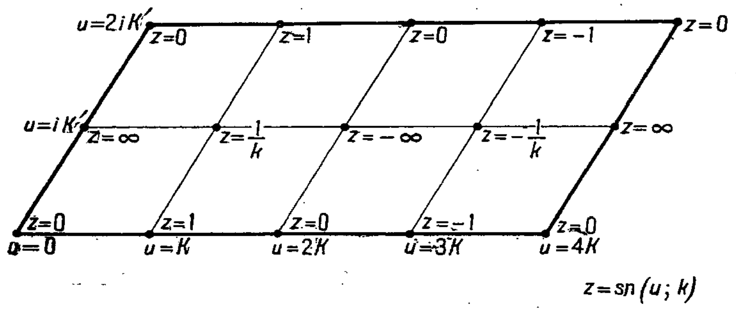
$\operatorname{sn}(u+K) = \dfrac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}$ $\operatorname{cn}(u+K) = -k'\,\dfrac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}$ $\operatorname{dn}(u+K) = \dfrac{k'}{\operatorname{dn} u}$	$\operatorname{sn}(u+iK') = \dfrac{1}{k \operatorname{sn} u}$ $\operatorname{cn}(u+iK') = -i\,\dfrac{\operatorname{dn} u}{k \operatorname{sn} u}$ $\operatorname{dn}(u+iK') = -i\,\dfrac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}$

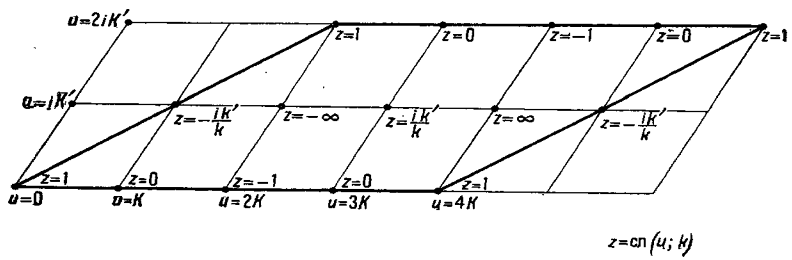
$$\operatorname{sn}(u+K+iK') = \frac{1}{k}\,\frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u}$$

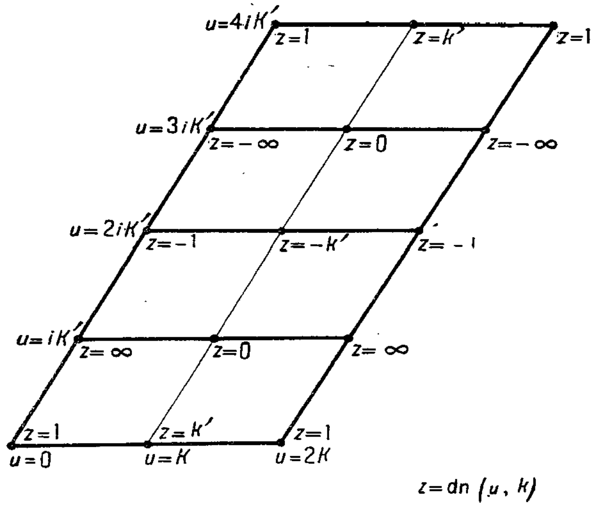
$$\operatorname{cn}(u+K+iK') = -\frac{ik'}{k \operatorname{cn} u}$$

$$\operatorname{dn}(u+K+iK') = ik'\,\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}$$

XIII. Некоторые значения функций Якоби







XIV. Дифференцирование функций Якоби. Теоремы сложения

$$z=\operatorname{sn} u \qquad z'^2=(1-z^2)(1-k^2z^2)$$

$$z=\operatorname{cn} u \qquad z'^2=(1-z^2)(1-k^2+k^2z^2)$$

$$z=\operatorname{dn} u \qquad z'^2=(1-z^2)(z^2-1+k^2)$$

$$\frac{d}{du}\operatorname{sn} u=\operatorname{cn} u\ \operatorname{dn} u$$

$$\frac{d}{du}\operatorname{cn} u=-\operatorname{sn} u\ \operatorname{dn} u$$

$$\frac{d}{du}\operatorname{dn} u=-k^2\operatorname{sn} u\ \operatorname{cn} u$$

$$\operatorname{sn}(u+v)=\frac{\operatorname{sn} u\ \operatorname{cn} v\ \operatorname{dn} v+\operatorname{sn} v\ \operatorname{cn} u\ \operatorname{dn} u}{1-k^2\operatorname{sn}^2 u\ \operatorname{sn}^2 v}$$

$$\operatorname{cn}(u+v)=\frac{\operatorname{cn} u\ \operatorname{cn} v-\operatorname{sn} u\ \operatorname{dn} u\ \operatorname{sn} v\ \operatorname{dn} v}{1-k^2\operatorname{sn}^2 u\ \operatorname{sn}^2 v}$$

$$\operatorname{dn}(u+v)=\frac{\operatorname{dn} u\ \operatorname{dn} v-k^2\operatorname{sn} u\ \operatorname{cn} u\ \operatorname{sn} v\ \operatorname{cn} v}{1-k^2\operatorname{sn}^2 u\ \operatorname{sn}^2 v}$$

$$\operatorname{sn}(u+v)\operatorname{sn}(u-v)=\frac{\operatorname{sn}^2 u-\operatorname{sn}^2 v}{1-k^2\operatorname{sn}^2 u\ \operatorname{sn}^2 v}$$

$$\operatorname{cn}(u+v)\operatorname{cn}(u-v)=\frac{\operatorname{cn}^2 v-\operatorname{dn}^2 v\ \operatorname{sn}^2 u}{1-k^2\operatorname{sn}^2 u\ \operatorname{sn}^2 v}$$

$$\operatorname{dn}(u+v)\operatorname{dn}(u-v)=\frac{\operatorname{dn}^2 v-k^2\operatorname{cn}^2 v\ \operatorname{sn}^2 u}{1-k^2\operatorname{sn}^2 u\ \operatorname{sn}^2 v}$$

XV. Некоторые значения функций Якоби (продолжение)

$\operatorname{sn}\frac{K}{2}=\frac{1}{\sqrt{1+k'}}$ $\operatorname{cn}\frac{K}{2}=\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{1+k'}}$ $\operatorname{dn}\frac{K}{2}=\sqrt{k'}$
$\operatorname{sn}\frac{iK'}{2}=\frac{i}{\sqrt{k}}$ $\operatorname{cn}\frac{iK'}{2}=\frac{\sqrt{1+k}}{\sqrt{k}}$ $\operatorname{dn}\frac{iK'}{2}=\sqrt{1+k}$
$\operatorname{sn}\frac{K+iK'}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{k}}(\sqrt{1+k}+i\sqrt{1-k})$ $\operatorname{cn}\frac{K+iK'}{2}=\frac{\sqrt{k'}(1-i)}{\sqrt{2}\sqrt{k}}$ $\operatorname{dn}\frac{K+iK'}{2}=\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{2}}(\sqrt{1+k'}-i\sqrt{1-k'})$
В нормальном случае ($0<k<1$) все корни арифметические

XVI. Эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода

Если точки e_1, e_2, e_3 лежат на одной прямой, то e_2 означает среднюю из этих точек	
$k^2=\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}$	$k'^2=\frac{e_1-e_2}{e_1-e_3}$
$K=\int\limits_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$	$K'=\int\limits_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}}$
$E=\int\limits_0^1\sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\,dt$	$E'=\int\limits_0^1\sqrt{\frac{1-k'^2t^2}{1-t^2}}\,dt$
Интеграл берется по прямолинейному пути с положительным обходом по малой полуокружности точки $t=1/\lvert k\rvert$, если $1<k^2<\infty$ (соответственно точки $t=1/\lvert k'\rvert$, если $1<k'^2<\infty$). В нормальном случае ($0<k<1$) все интегралы положительны.	
$\eta_1=\sqrt{e_1-e_3}\left\{E-\frac{e_1}{e_1-e_3}K\right\}$	$\eta_3=-i\sqrt{e_1-e_3}\left\{E'+\frac{e_3}{e_1-e_3}K'\right\}$
$EK'+E'K-KK'=\frac{1}{2}\pi$	
$\omega_1=\frac{K}{\sqrt{e_1-e_3}}$	$\omega_3=\frac{iK'}{\sqrt{e_1-e_3}}$
$\frac{\sigma(u)}{\sigma_3(u)}=\frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}\operatorname{sn}(\sqrt{e_1-e_3}\,u;\ k)$ $\frac{\sigma_1(u)}{\sigma_3(u)}=\operatorname{cn}(\sqrt{e_1-e_3}\,u;\ k)\quad \frac{\sigma_2(u)}{\sigma_3(u)}=\operatorname{dn}(\sqrt{e_1-e_3}\,u;\ k)$	
$E(u)=\int\limits_0^u\operatorname{dn}^2 v\,dv$	$Z(u)=E(u)-\frac{E}{K}u=\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}$
$\int\frac{du}{\operatorname{sn}^2 u}=uZ'(0)-\frac{H'(u)}{H(u)}\quad \int\frac{du}{\operatorname{cn}^2 u}=\frac{u}{k'^2}Z'(K)-\frac{1}{k'^2}\frac{H_1'(u)}{H_1(u)}$ $\int\frac{du}{\operatorname{dn}^2 u}=\frac{u}{k'^2}\frac{E}{K}+\frac{1}{k'^2}\frac{\Theta_1'(u)}{\Theta_1(u)}$	

XVII. Преобразование тэта-функций (первой степени)

$$h=e^{\pi i\tau},\quad \Im\tau>0,\quad \tau'=-\frac{1}{\tau},\quad \Re\sqrt{-i\tau'}>0,\quad i^{-\frac{1}{2}}=e^{-\frac{\pi i}{4}}$$

$$\vartheta_1(v\,|\,\tau)=i^{-\frac{1}{2}}\vartheta_1(v\,|\,\tau+1)$$
$$\vartheta_2(v\,|\,\tau)=i^{-\frac{1}{2}}\vartheta_2(v\,|\,\tau+1)$$
$$\vartheta_3(v\,|\,\tau)=\vartheta_0(v\,|\,\tau+1)$$
$$\vartheta_0(v\,|\,\tau)=\vartheta_3(v\,|\,\tau+1)$$

$$\vartheta_1(v\,|\,\tau)=-i\sqrt{-i\tau'}\,e^{\tau'\pi i v^2}\vartheta_1(\tau' v\,|\,\tau')$$
$$\vartheta_2(v\,|\,\tau)=\sqrt{-i\tau'}\,e^{\tau'\pi i v^2}\vartheta_0(\tau' v\,|\,\tau')$$
$$\vartheta_3(v\,|\,\tau)=\sqrt{-i\tau'}\,e^{\tau'\pi i v^2}\vartheta_3(\tau' v\,|\,\tau')$$
$$\vartheta_0(v\,|\,\tau)=\sqrt{-i\tau'}\,e^{\tau'\pi i v^2}\vartheta_2(\tau' v\,|\,\tau')$$

XVIII. Первое главное преобразование первой степени

$$\lambda=\frac{ik}{k'}\qquad M=\frac{1}{k'}$$
$$L=\frac{K}{M}\qquad iL'=\frac{iK'+K}{M}$$
$$\operatorname{sn}\left(\frac{u}{M};\lambda\right)=\frac{1}{M}\,\frac{\operatorname{sn}(u;k)}{\operatorname{dn}(u;k)}$$
$$\operatorname{cn}\left(\frac{u}{M};\lambda\right)=\frac{\operatorname{cn}(u;k)}{\operatorname{dn}(u;k)}$$
$$\operatorname{dn}\left(\frac{u}{M};\lambda\right)=\frac{1}{\operatorname{dn}(u;k)}$$

XIX. Второе главное преобразование первой степени

$$\lambda=k'\qquad M=\frac{1}{i}$$
$$L=\frac{iK'}{M}\qquad iL'=-\frac{K}{M}$$
$$\operatorname{sn}\left(\frac{u}{M};\lambda\right)=\frac{1}{M}\,\frac{\operatorname{sn}(u;k)}{\operatorname{cn}(u;k)}$$
$$\operatorname{cn}\left(\frac{u}{M};\lambda\right)=\frac{1}{\operatorname{cn}(u;k)}$$
$$\operatorname{dn}\left(\frac{u}{M};\lambda\right)=\frac{\operatorname{dn}(u;k)}{\operatorname{cn}(u;k)}$$

XX. Преобразование Ландена

$$\lambda=\frac{1-k'}{1+k'}\qquad M=\frac{1}{1+k'}$$
$$L=\frac{K}{2M}\qquad L'=\frac{K'}{M}$$
$$\operatorname{sn}\left(\frac{u}{M};\lambda\right)=\frac{1}{M}\,\frac{\operatorname{sn}(u;k)\operatorname{cn}(u;k)}{\operatorname{dn}(u;k)}$$
$$\operatorname{cn}\left(\frac{u}{M};\lambda\right)=\frac{1-(1+k')\operatorname{sn}^2(u;k)}{\operatorname{dn}(u;k)}$$
$$\operatorname{dn}\left(\frac{u}{M};\lambda\right)=\frac{1-(1-k')\operatorname{sn}^2(u;k)}{\operatorname{dn}(u;k)}$$

XXI. Преобразование Гаусса

$$\lambda=\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\qquad M=\frac{1}{1+k}$$
$$L=\frac{K}{M}\qquad L'=\frac{K'}{2M}$$
$$\operatorname{sn}\left(\frac{u}{M};\lambda\right)=\frac{1}{M}\,\frac{\operatorname{sn}(u;k)}{1+k\operatorname{sn}^2(u;k)}$$
$$\operatorname{cn}\left(\frac{u}{M};\lambda\right)=\frac{\operatorname{cn}(u;k)\operatorname{dn}(u;k)}{1+k\operatorname{sn}^2(u;k)}$$
$$\operatorname{dn}\left(\frac{u}{M};\lambda\right)=\frac{1-k\operatorname{sn}^2(u;k)}{1+k\operatorname{sn}^2(u;k)}$$

$$\vartheta_1\left(v\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)=\frac{2\vartheta_1(v\,|\,\tau)\,\vartheta_0(v\,|\,\tau)}{\vartheta_2\left(0\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)}$$
$$\vartheta_2\left(v\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)=\frac{2\vartheta_2(v\,|\,\tau)\,\vartheta_3(v\,|\,\tau)}{\vartheta_2\left(0\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)}$$
$$\vartheta_3\left(v\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)=\frac{\vartheta_0^2(v\,|\,\tau)-\vartheta_1^2(v\,|\,\tau)}{\vartheta_0\left(0\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)}$$
$$\vartheta_0\left(v\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)=\frac{\vartheta_0^2(v\,|\,\tau)+\vartheta_1^2(v\,|\,\tau)}{\vartheta_3\left(0\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)}$$

XXII. Первое главное преобразование n-й степени

$$L=\frac{K}{nM}\,,\quad L'=\frac{K'}{M}$$

$$c_r=\mathrm{sn}^2\left(\frac{rK}{n};\ k\right)$$

$$\lambda=k^n\prod_{r=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}c_{2r-1}^2\qquad M=\prod_{r=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{c_{2r-1}}{c_{2r}}$$

A. n — нечетное число

$$\mathrm{sn}\left(\frac{u}{M};\ \lambda\right)=\frac{1}{M}\,\mathrm{sn}\,(u;\ k)\prod_{r=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{1-\dfrac{\mathrm{sn}^2(u;\ k)}{c_{2r}}}{1-k^2c_{2r}\,\mathrm{sn}^2(u;\ k)}$$

$$\mathrm{cn}\left(\frac{u}{M};\ \lambda\right)=\mathrm{cn}\,(u;\ k)\prod_{r=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{1-\dfrac{\mathrm{sn}^2(u;\ k)}{c_{2r-1}}}{1-k^2c_{2r}\,\mathrm{sn}^2(u;\ k)}$$

$$\mathrm{dn}\left(\frac{u}{M};\ \lambda\right)=\mathrm{dn}\,(u;\ k)\prod_{r=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{1-k^2c_{2r-1}\,\mathrm{sn}^2(u;\ k)}{1-k^2c_{2r}\,\mathrm{sn}^2(u;\ k)}$$

B. n — четное число

$$\mathrm{sn}\left(\frac{u}{M}+L;\ \lambda\right)=\prod_{r=1}^{\frac{n}{2}}\frac{1-\dfrac{\mathrm{sn}^2(u;\ k)}{c_{2r-1}}}{1-k^2c_{2r-1}\,\mathrm{sn}^2(u;\ k)}$$

$$\mathrm{cn}\left(\frac{u}{M}+L;\ \lambda\right)=-\frac{\lambda'}{M}\,\frac{\mathrm{sn}\,(u;\ k)}{\mathrm{cn}\,(u;\ k)}\prod_{r=1}^{\frac{n}{2}}\frac{1-\dfrac{\mathrm{sn}^2(u;\ k)}{c_{2r}}}{1-k^2c_{2r-1}\,\mathrm{sn}^2(u;\ k)}$$

$$\mathrm{dn}\left(\frac{u}{M}+L;\ \lambda\right)=\frac{\lambda'}{\mathrm{dn}\,(u;\ k)}\prod_{r=1}^{\frac{n}{2}}\frac{1-k^2c_{2r}\,\mathrm{sn}^2(u;\ k)}{1-k^2c_{2r-1}\,\mathrm{sn}^2(u;\ k)}$$

XXIII. Второе главное преобразование n-й степени

$$L=\frac{K}{M}\,,\quad L'=\frac{K'}{nM}$$

$$\lambda=\prod_{r=1}^{n}\frac{\Theta^2\left(\dfrac{2r}{n}K';\ k'\right)}{\Theta^2\left(\dfrac{2r-1}{n}K';\ k'\right)}\qquad M=\prod_{r=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{\mathrm{sn}^2\left(\dfrac{2r-1}{n}K',\ k'\right)}{\mathrm{sn}^2\left(\dfrac{2r}{n}K';\ k'\right)}$$

$$c_r=\frac{\mathrm{sn}^2\left(\dfrac{rK'}{n};\ k'\right)}{\mathrm{cn}^2\left(\dfrac{rK'}{n};\ k'\right)}\qquad \delta_r=\mathrm{dn}^2\left(\frac{rK'}{n};\ k'\right)$$

$$\mathrm{sn}\left(\frac{u}{M};\ \lambda\right)=\frac{1}{M}\,\mathrm{sn}\,(u;\ k)\prod_{r=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{1+\dfrac{\mathrm{sn}^2(u;\ k)}{c_{2r}}}{1+\dfrac{\mathrm{sn}^2(u;\ k)}{c_{2r-1}}}$$

A. n — нечетное число

$$\mathrm{cn}\left(\frac{u}{M};\ \lambda\right)=\mathrm{cn}\,(u;\ k)\prod_{r=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{1-\delta_{2r}\,\mathrm{sn}^2(u;\ k)}{1+\dfrac{\mathrm{sn}^2(u;\ k)}{c_{2r-1}}}$$

$$\mathrm{dn}\left(\frac{u}{M};\ \lambda\right)=\mathrm{dn}\,(u;\ k)\prod_{r=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{1-\delta_{2r-1}\,\mathrm{sn}^2(u;\ k)}{1+\dfrac{\mathrm{sn}^2(u;\ k)}{c_{2r-1}}}$$

B. n — четное число

$$\mathrm{cn}\left(\frac{u}{M};\ \lambda\right)=\mathrm{cn}\,(u;\ k)\,\mathrm{dn}\,(u;\ k)\,\frac{\prod\limits_{r=1}^{\frac{n}{2}-1}\left(1-\delta_{2r}\,\mathrm{sn}^2(u;\ k)\right)}{\prod\limits_{r=1}^{\frac{n}{2}}\left(1+\dfrac{\mathrm{sn}^2(u;\ k)}{c_{2r-1}}\right)}$$

$$\mathrm{dn}\left(\frac{u}{M};\ \lambda\right)=\prod_{r=1}^{\frac{n}{2}}\frac{1-\delta_{2r-1}\,\mathrm{sn}^2(u;\ k)}{1+\dfrac{\mathrm{sn}^2(u;\ k)}{c_{2r-1}}}$$

XXIV. Некоторые интегралы

$$\int \operatorname{sn} u\, du = -\frac{1}{k}\ln(\operatorname{dn} u + k \operatorname{cn} u)$$
$$\int \operatorname{cn} u\, du = \frac{i}{k}\ln(\operatorname{dn} u - ik \operatorname{sn} u)$$
$$\int \operatorname{dn} u\, du = i\ln(\operatorname{cn} u - i \operatorname{sn} u)$$

$$\int \frac{du}{\operatorname{sn} u} = \ln\frac{\operatorname{dn} u - \operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}$$
$$\int \frac{du}{\operatorname{cn} u} = \frac{1}{k'}\ln\frac{\operatorname{dn} u + k' \operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}$$
$$\int \frac{du}{\operatorname{dn} u} = \frac{1}{ik'}\ln\frac{\operatorname{cn} u + ik' \operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}$$

$$\int \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}\, du = \frac{1}{k'}\ln\frac{\operatorname{dn} u + k'}{\operatorname{cn} u}$$
$$\int \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}\, du = -\frac{1}{k}\ln\frac{1 - k\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}$$
$$\int \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u}\, du = \ln\frac{1 - \operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}$$
$$\int \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}\, du = \frac{i}{kk'}\ln\frac{ik' - k\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}$$
$$\int \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}\, du = \ln\frac{1 - \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u}$$
$$\int \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u}\, du = \ln\frac{1 + \operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}$$

$$\int \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn}^2 u}\, du = \frac{1}{k'^2}\,\frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u}$$
$$\int \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn}^2 u}\, du = -\frac{1}{k'^2}\,\frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}$$
$$\int \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn}^2 u}\, du = -\frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u}$$
$$\int \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn}^2 u}\, du = \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}$$
$$\int \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn}^2 u}\, du = -\frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}$$
$$\int \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn}^2 u}\, du = \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}$$

XXV. Вычисление эллиптических интегралов в вещественном случае

	$\int R(x, y)\, dx$
I	$y = \sqrt{(a^2 - x^2)(b^2 - x^2)}$ $\quad a^2 > b^2$ $k^2 = \dfrac{b^2}{a^2} \qquad x = \begin{cases} b \operatorname{sn} u & (x^2 < b^2) \\ \dfrac{a}{\operatorname{sn} u} & (x^2 > a^2) \end{cases}$
II	$y = \sqrt{(a^2 - x^2)(x^2 - b^2)}$ $\quad a^2 > b^2 \quad b^2 < x^2 < a^2$ $k^2 = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2} \qquad x = a \operatorname{dn} u$
III	$y = \sqrt{(a^2 - x^2)(b^2 + x^2)}$ $\quad x^2 < a^2$ $k^2 = \dfrac{a^2}{a^2 + b^2} \qquad x = a \operatorname{cn} u$
IV	$y = \sqrt{(x^2 - a^2)(b^2 + x^2)}$ $\quad x^2 > a^2$ $k^2 = \dfrac{b^2}{a^2 + b^2} \qquad x = \dfrac{a}{\operatorname{cn} u}$
V	$y = \sqrt{(a^2 + x^2)(b^2 + x^2)}$ $\quad a^2 > b^2$ $k^2 = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2} \qquad x = a\dfrac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}$

ТАБЛИЦЫ ЗНАЧЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ

I. Полные эллиптические интегралы

$$K=\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},\quad E=\int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\,dt$$

α°	$k^2=\sin^2\alpha$	K	E	α°	$k^2=\sin^2\alpha$	K	E
0	0,00000	1,57080	1,57080	28	0,22040	1,67006	1,48029
1	0,00030	1,57092	1,57068	29	0,23504	1,67773	1,47397
2	0,00122	1,57127	1,57032	30	0,25000	1,68575	1,46746
3	0,00274	1,57187	1,56972	31	0,26526	1,69411	1,46077
4	0,00487	1,57271	1,56888	32	0,28081	1,70284	1,45391
5	0,00760	1,57379	1,56781	33	0,29663	1,71192	1,44687
6	0,01093	1,57511	1,56650	34	0,31270	1,72139	1,43966
7	0,01485	1,57668	1,56495	35	0,32899	1,73125	1,43229
8	0,01937	1,57849	1,56316	36	0,34549	1,74150	1,42476
9	0,02447	1,58054	1,56114	37	0,36218	1,75217	1,41707
10	0,03015	1,58284	1,55889	38	0,37904	1,76326	1,40924
11	0,03641	1,58539	1,55640	39	0,39604	1,77479	1,40126
12	0,04323	1,58820	1,55368	40	0,41318	1,78677	1,39314
13	0,05060	1,59125	1,55073	41	0,43041	1,79922	1,38489
14	0,05853	1,59457	1,54755	42	0,44774	1,81216	1,37650
15	0,06699	1,59814	1,54415	43	0,46512	1,82560	1,36800
16	0,07598	1,60198	1,54052	44	0,48255	1,83957	1,35938
17	0,08548	1,60608	1,53667	45	0,50000	1,85407	1,35064
18	0,09549	1,61045	1,53260	46	0,51745	1,86915	1,34181
19	0,10599	1,61510	1,52831	47	0,53488	1,88481	1,33287
20	0,11698	1,62003	1,52380	48	0,55226	1,90108	1,32384
21	0,12843	1,62523	1,51908	49	0,56959	1,91800	1,31473
22	0,14033	1,63073	1,51415	50	0,58682	1,93558	1,30554
23	0,15267	1,63652	1,50901	51	0,60396	1,95386	1,29628
24	0,16543	1,64260	1,50366	52	0,62096	1,97288	1,28695
25	0,17861	1,64900	1,49811	53	0,63782	1,99267	1,27757
26	0,19217	1,65570	1,49237	54	0,65451	2,01327	1,26815
27	0,20611	1,66272	1,48643	55	0,67101	2,03472	1,25868

Продолжение

α°	$k^2=\sin^2\alpha$	K	E	α°	$k^2=\sin^2\alpha$	K	E
56	0,68730	2,05706	1,24918	82,4	0,98251	3,41994	1,02558
57	0,70337	2,08036	1,23966	82,6	0,98341	3,44601	1,02447
58	0,71919	2,10466	1,23013	82,8	0,98429	3,47282	1,02338
59	0,73474	2,13002	1,22059	83,0	0,98515	3,50042	1,02231
60	0,75000	2,15652	1,21106	83,2	0,98598	3,52884	1,02126
61	0,76496	2,18421	1,20154	83,4	0,98680	3,55814	1,02023
62	0,77960	2,21319	1,19205	83,6	0,98757	3,58837	1,01921
63	0,79389	2,24355	1,18259	83,8	0,98834	3,61959	1,01821
64	0,80783	2,27538	1,17318	84,0	0,98907	3,65186	1,01724
65	0,82139	2,30879	1,16383	84,2	0,98979	3,68525	1,01628
66	0,83457	2,34390	1,15455	84,4	0,99048	3,71984	1,01534
67	0,84733	2,38087	1,14535	84,6	0,99114	3,75572	1,01443
68	0,85967	2,41984	1,13624	84,8	0,99178	3,79298	1,01354
69	0,87157	2,46100	1,12725	85,0	0,99240	3,83174	1,01266
70,0	0,88302	2,50455	1,11838	85,2	0,99300	3,87211	1,01181
70,5	0,88857	2,52729	1,11399	85,4	0,99357	3,91423	1,01099
71,0	0,89401	2,55073	1,10964	85,6	0,99411	3,95827	1,01018
71,5	0,89932	2,57490	1,10533	85,8	0,99464	4,00437	1,00940
72,0	0,90451	2,59982	1,10106	86,0	0,99513	4,05276	1,00865
72,5	0,90958	2,62555	1,09683	86,2	0,99561	4,10366	1,00792
73,0	0,91452	2,65214	1,09265	86,4	0,99606	4,15736	1,00721
73,5	0,91934	2,67962	1,08851	86,6	0,99648	4,21416	1,00653
74,0	0,92402	2,70807	1,08443	86,8	0,99688	4,27444	1,00588
74,5	0,92858	2,73752	1,08039	87,0	0,99726	4,33865	1,00526
75,0	0,93301	2,76806	1,07641	87,2	0,99761	4,40733	1,00466
75,5	0,93731	2,79975	1,07248	87,4	0,99794	4,48115	1,00410
76,0	0,94147	2,83267	1,06861	87,6	0,99825	4,56090	1,00356
76,5	0,94550	2,86691	1,06480	87,8	0,99854	4,64765	1,00306
77,0	0,94940	2,90256	1,06106	88,0	0,99878	4,74272	1,00258
77,5	0,95315	2,93974	1,05738	88,2	0,99901	4,84785	1,00215
78,0	0,95677	2,97857	1,05378	88,4	0,99922	4,96542	1,00174
78,5	0,96025	3,01918	1,05024	88,6	0,99940	5,09876	1,00137
79,0	0,96359	3,06173	1,04679	88,8	0,99956	5,25274	1,00104
79,5	0,96679	3,10640	1,04341	89,0	0,99970	5,43491	1,00075
80,0	0,96985	3,15339	1,04011	89,1	0,99975	5,54020	1,00062
80,2	0,97103	3,17288	1,03882	89,2	0,99981	5,65792	1,00050
80,4	0,97219	3,19280	1,03754	89,3	0,99985	5,79140	1,00039
80,6	0,97332	3,21317	1,03628	89,4	0,99989	5,94550	1,00030
80,8	0,97444	3,23400	1,03503	89,5	0,99992	6,12778	1,00021
81,0	0,97553	3,25530	1,03379	89,6	0,99995	6,35088	1,00014
81,2	0,97660	3,27711	1,03257	89,7	0,99997	6,63854	1,00008
81,4	0,97764	3,29945	1,03136	89,8	0,99999	7,04398	1,00004
81,6	0,97866	3,32234	1,03017	89,9	1,00000	7,73711	1,00001
81,8	0,97966	3,34580	1,02900	90,0	1,00000	∞	1,00000
82,0	0,98063	3,36987	1,02784				
82,2	0,98158	3,39457	1,02670				

k^2	K	K'	K'/K	K/K'	$\ln h$	$\ln h'$	k'^2
0,00	1,57080	∞	∞	0,00000	—∞	0,00000	1,00
0,01	1,57475	3,69564	2,34682	0,42611	0,79806-4	0,41863-1	0,99
0,02	1,57874	3,35414	2,12457	0,47068	0,10129-3	0,35781-1	0,98
0,03	1,58278	3,15587	1,99388	0,50153	0,27960-3	0,31572-1	0,97
0,04	1,58687	3,01611	1,90067	0,52613	0,40677-3	0,28216-1	0,96
0,05	1,59100	2,90834	1,82799	0,54705	0,50393-3	0,25362-1	0,95
0,06	1,59519	2,82075	1,76828	0,56552	0,58738-3	0,22842-1	0,94
0,07	1,59942	2,74707	1,71754	0,58223	0,65663-3	0,20562-1	0,93
0,08	1,60371	2,68355	1,67334	0,59761	0,71693-3	0,18464-1	0,92
0,09	1,60805	2,62777	1,63414	0,61194	0,77042-3	0,16508-1	0,91
0,10	1,61244	2,57809	1,59887	0,62544	0,81853-3	0,14666-1	0,90
0,11	1,61689	2,53333	1,56680	0,63825	0,86230-3	0,12919-1	0,89
0,12	1,62139	2,49264	1,53734	0,65047	0,90249-3	0,11251-1	0,88
0,13	1,62595	2,45534	1,51009	0,66221	0,93967-3	0,09649-1	0,87
0,14	1,63058	2,42093	1,48471	0,67353	0,97430-3	0,08105-1	0,86
0,15	1,63526	2,38902	1,46094	0,68449	0,00672-2	0,06610-1	0,85
0,16	1,64000	2,35926	1,43858	0,69513	0,03724-2	0,05158-1	0,84
0,17	1,64481	2,33141	1,41744	0,70550	0,06608-2	0,03743-1	0,83
0,18	1,64968	2,30523	1,39738	0,71562	0,09344-2	0,02362-1	0,82
0,19	1,65462	2,28055	1,37829	0,72553	0,11949-2	0,01010-1	0,81
0,20	1,65962	2,25721	1,36007	0,73526	0,14435-2	0,99683-2	0,80
0,21	1,66470	2,23507	1,34262	0,74481	0,16816-2	0,98380-2	0,79
0,22	1,66985	2,21402	1,32588	0,75422	0,19099-2	0,97097-2	0,78
0,23	1,67507	2,19397	1,30978	0,76349	0,21297-2	0,95831-2	0,77
0,24	1,68037	2,17483	1,29425	0,77265	0,23415-2	0,94582-2	0,76
0,25	1,68575	2,15652	1,27926	0,78171	0,25461-2	0,93347-2	0,75
0,26	1,69121	2,13897	1,26476	0,79066	0,27439-2	0,92124-2	0,74
0,27	1,69675	2,12213	1,25070	0,79955	0,29356-2	0,90911-2	0,73
0,28	1,70237	2,10595	1,23707	0,80836	0,31218-2	0,89709-2	0,72
0,29	1,70809	2,09037	1,22381	0,81712	0,33026-2	0,88514-2	0,71
0,30	1,71389	2,07536	1,21091	0,82583	0,34787-2	0,87326-2	0,70
0,31	1,71978	2,06088	1,19834	0,83449	0,36502-2	0,86144-2	0,69
0,32	1,72577	2,04689	1,18607	0,84312	0,38175-2	0,84967-2	0,68
0,33	1,73186	2,03336	1,17409	0,85172	0,39810-2	0,83793-2	0,67
0,34	1,73805	2,02028	1,16238	0,86030	0,41408-2	0,82622-2	0,66
0,35	1,74435	2,00760	1,15091	0,86887	0,42972-2	0,81453-2	0,65
0,36	1,75075	1,99530	1,13986	0,87744	0,44504-2	0,80284-2	0,64
0,37	1,75727	1,98337	1,12867	0,88600	0,46007-2	0,79116-2	0,63
0,38	1,76390	1,97178	1,11786	0,89457	0,47482-2	0,77947-2	0,62
0,39	1,77065	1,96052	1,10723	0,90315	0,48932-2	0,76776-2	0,61
0,40	1,77752	1,94957	1,09679	0,91175	0,50356-2	0,75603-2	0,60
0,41	1,78452	1,93891	1,08652	0,92037	0,51758-2	0,74426-2	0,59
0,42	1,79165	1,92853	1,07640	0,92903	0,53139-2	0,73246-2	0,58
0,43	1,79892	1,91841	1,06642	0,93771	0,54500-2	0,72061-2	0,57
0,44	1,80633	1,90855	1,05659	0,94644	0,55841-2	0,70870-2	0,56
0,45	1,81388	1,89892	1,04688	0,95522	0,57166-2	0,69673-2	0,55
0,46	1,82159	1,88953	1,03730	0,96404	0,58474-2	0,68468-2	0,54
0,47	1,82946	1,88036	1,02782	0,97293	0,59766-2	0,67256-2	0,53
0,48	1,83749	1,87140	1,01845	0,98188	0,61045-2	0,66035-2	0,52
0,49	1,84569	1,86264	1,00918	0,99090	0,62310-2	0,64804-2	0,51
0,50	1,85407	1,85407	1,00000	1,00000	0,63562-2	0,63562-2	0,50
k'^2	K'	K	K/K'	K'/K	$\ln h'$	$\ln h$	k^2

Малые значения модуля

k^2	K	K'	K'/K	K/K'	k'^2
0,000001	1,57080	8,29405	5,28016	0,18939	0,999999
0,000002	1,57080	7,94748	5,05952	0,19765	0,999998
0,000003	1,57080	7,74475	4,93046	0,20282	0,999997
0,000004	1,57080	7,60091	4,83888	0,20666	0,999996
0,000005	1,57080	7,48934	4,76786	0,20974	0,999995
0,000006	1,57080	7,39818	4,70982	0,21232	0,999994
0,000007	1,57080	7,32111	4,66075	0,21456	0,999993
0,000008	1,57080	7,25434	4,61825	0,21653	0,999992
0,000009	1,57080	7,19545	4,58076	0,21830	0,999991
0,000010	1,57080	7,14277	4,54722	0,21991	0,999990
0,000100	1,57083	5,99159	3,81427	0,26217	0,999900
0,000200	1,57087	5,64512	3,59362	0,27827	0,999800
0,000300	1,57091	5,44249	3,46454	0,28864	0,999700
0,000400	1,57095	5,29875	3,37295	0,29648	0,999600
0,000500	1,57099	5,18727	3,30191	0,30286	0,999500
0,000600	1,57103	5,09620	3,24385	0,30828	0,999400
0,000700	1,57107	5,01921	3,19477	0,31301	0,999300
0,000800	1,57111	4,95253	3,15225	0,31723	0,999200
0,000900	1,57115	4,89373	3,11474	0,32105	0,999100
0,001000	1,57119	4,84113	3,08119	0,32455	0,999000
0,001100	1,57123	4,79356	3,05084	0,32778	0,998900
0,001200	1,57127	4,75014	3,02312	0,33078	0,998800
0,001300	1,57131	4,71020	2,99763	0,33360	0,998700
0,001400	1,57135	4,67322	2,97402	0,33624	0,998600
0,001500	1,57139	4,63880	2,95205	0,33875	0,998500
0,001600	1,57142	4,60661	2,93149	0,34112	0,998400
0,001700	1,57146	4,57638	2,91217	0,34339	0,998300
0,001800	1,57150	4,54788	2,89396	0,34555	0,998200
0,001900	1,57154	4,52092	2,87674	0,34762	0,998100
0,002000	1,57158	4,49535	2,86040	0,34960	0,998000
0,002100	1,57162	4,47103	2,84485	0,35151	0,997900
0,002200	1,57166	4,44784	2,83002	0,35335	0,997800
0,002300	1,57171	4,42569	2,81586	0,35513	0,997700
0,002400	1,57174	4,40448	2,80231	0,35685	0,997600
0,002500	1,57178	4,38414	2,78929	0,35851	0,997500
0,002600	1,57182	4,36461	2,77679	0,36013	0,997400
0,002700	1,57186	4,34581	2,76476	0,36170	0,997300
0,002800	1,57190	4,32769	2,75317	0,36322	0,997200
0,002900	1,57194	4,31022	2,74198	0,36470	0,997100
0,003000	1,57198	4,29334	2,73117	0,36614	0,997000
k'^2	K'	K	K/K'	K'/K	k^2

II. Эллиптический интеграл первого рода

$$F(\varphi,\ k)=\int_0^{\varphi}\frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}},\quad k=\sin\alpha$$

φ°	α = 5°	α = 10°	α = 15°	α = 20°	α = 25°	α = 30°
1	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745
2	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491
3	0,05236	0,05236	0,05236	0,05236	0,05236	0,05237
4	0,06981	0,06981	0,06982	0,06982	0,06982	0,06983
5	0,08727	0,08727	0,08728	0,08728	0,08729	0,08729
6	0,1047	0,1047	0,1047	0,1047	0,1048	0,1048
7	0,1222	0,1222	0,1222	0,1222	0,1222	0,1223
8	0,1396	0,1396	0,1397	0,1397	0,1397	0,1397
9	0,1571	0,1571	0,1571	0,1572	0,1572	0,1572
10	0,1745	0,1746	0,1746	0,1746	0,1747	0,1748
11	0,1920	0,1920	0,1921	0,1921	0,1922	0,1923
12	0,2095	0,2095	0,2095	0,2096	0,2097	0,2098
13	0,2269	0,2270	0,2270	0,2271	0,2272	0,2274
14	0,2444	0,2444	0,2445	0,2446	0,2448	0,2450
15	0,2618	0,2619	0,2620	0,2622	0,2623	0,2625
16	0,2793	0,2794	0,2795	0,2797	0,2799	0,2802
17	0,2967	0,2968	0,2970	0,2972	0,2975	0,2978
18	0,3142	0,3143	0,3145	0,3148	0,3151	0,3154
19	0,3317	0,3318	0,3320	0,3323	0,3327	0,3331
20	0,3491	0,3493	0,3495	0,3499	0,3503	0,3508
21	0,3666	0,3668	0,3671	0,3675	0,3680	0,3686
22	0,3840	0,3843	0,3846	0,3851	0,3856	0,3863
23	0,4015	0,4017	0,4021	0,4027	0,4033	0,4041
24	0,4190	0,4192	0,4197	0,4203	0,4210	0,4219
25	0,4364	0,4367	0,4372	0,4379	0,4388	0,4397
26	0,4539	0,4542	0,4548	0,4556	0,4565	0,4576
27	0,4714	0,4717	0,4724	0,4732	0,4743	0,4755
28	0,4888	0,4893	0,4899	0,4909	0,4921	0,4935
29	0,5063	0,5068	0,5075	0,5086	0,5099	0,5114
30	0,5238	0,5243	0,5251	0,5263	0,5277	0,5294
31	0,5412	0,5418	0,5427	0,5440	0,5456	0,5475
32	0,5587	0,5593	0,5604	0,5618	0,5635	0,5656
33	0,5762	0,5769	0,5780	0,5795	0,5814	0,5837
34	0,5937	0,5944	0,5956	0,5973	0,5994	0,6018
35	0,6111	0,6119	0,6133	0,6151	0,6173	0,6200
36	0,6286	0,6295	0,6309	0,6329	0,6355	0,6383
37	0,6461	0,6470	0,6486	0,6507	0,6534	0,6566
38	0,6636	0,6646	0,6662	0,6685	0,6714	0,6749
39	0,6810	0,6821	0,6839	0,6864	0,6895	0,6932
40	0,6985	0,6997	0,7016	0,7043	0,7077	0,7117
41	0,7160	0,7173	0,7193	0,7222	0,7258	0,7301
42	0,7335	0,7348	0,7370	0,7401	0,7440	0,7486
43	0,7510	0,7524	0,7548	0,7581	0,7622	0,7671
44	0,7685	0,7700	0,7725	0,7760	0,7804	0,7857
45	0,7859	0,7876	0,7903	0,7940	0,7987	0,8044

$F(\varphi,\ k),\ k=\sin\alpha$

φ°	α = 5°	α = 10°	α = 15°	α = 20°	α = 25°	α = 30°
46	0,8034	0,8052	0,8080	0,8120	0,8170	0,8231
47	0,8209	0,8228	0,8258	0,8300	0,8354	0,8418
48	0,8384	0,8404	0,8436	0,8480	0,8537	0,8606
49	0,8559	0,8580	0,8614	0,8661	0,8721	0,8794
50	0,8734	0,8756	0,8792	0,8842	0,8905	0,8983
51	0,8909	0,8932	0,8970	0,9023	0,9090	0,9172
52	0,9084	0,9108	0,9148	0,9204	0,9275	0,9361
53	0,9259	0,9284	0,9326	0,9385	0,9460	0,9551
54	0,9434	0,9460	0,9505	0,9567	0,9646	0,9742
55	0,9609	0,9637	0,9683	0,9748	0,9832	0,9933
56	0,9784	0,9813	0,9862	0,9930	1,0018	1,0125
57	0,9959	0,9989	1,0041	1,0112	1,0204	1,0317
58	1,0134	1,0166	1,0219	1,0295	1,0391	1,0509
59	1,0309	1,0342	1,0398	1,0477	1,0578	1,0702
60	1,0484	1,0519	1,0577	1,0660	1,0766	1,0896
61	1,0659	1,0695	1,0757	1,0843	1,0953	1,1089
62	1,0834	1,0872	1,0936	1,1026	1,1141	1,1284
63	1,1009	1,1049	1,1115	1,1209	1,1330	1,1478
64	1,1184	1,1225	1,1295	1,1392	1,1518	1,1674
65	1,1359	1,1402	1,1474	1,1576	1,1707	1,1869
66	1,1534	1,1579	1,1654	1,1759	1,1896	1,2065
67	1,1709	1,1756	1,1833	1,1943	1,2085	1,2262
68	1,1884	1,1932	1,2013	1,2127	1,2275	1,2458
69	1,2059	1,2109	1,2193	1,2311	1,2465	1,2656
70	1,2235	1,2286	1,2373	1,2495	1,2655	1,2853
71	1,2410	1,2463	1,2553	1,2680	1,2845	1,3051
72	1,2585	1,2640	1,2733	1,2864	1,3036	1,3249
73	1,2760	1,2817	1,2913	1,3049	1,3226	1,3448
74	1,2935	1,2994	1,3093	1,3234	1,3417	1,3647
75	1,3110	1,3171	1,3273	1,3418	1,3608	1,3846
76	1,3285	1,3348	1,3454	1,3603	1,3800	1,4045
77	1,3461	1,3525	1,3634	1,3788	1,3991	1,4245
78	1,3636	1,3702	1,3814	1,3974	1,4183	1,4445
79	1,3811	1,3879	1,3995	1,4159	1,4374	1,4645
80	1,3986	1,4057	1,4175	1,4344	1,4566	1,4846
81	1,4161	1,4234	1,4356	1,4530	1,4758	1,5046
82	1,4336	1,4411	1,4536	1,4715	1,4950	1,5247
83	1,4512	1,4588	1,4717	1,4901	1,5143	1,5448
84	1,4687	1,4765	1,4897	1,5086	1,5335	1,5649
85	1,4862	1,4942	1,5078	1,5272	1,5527	1,5850
86	1,5037	1,5120	1,5259	1,5457	1,5720	1,6052
87	1,5212	1,5297	1,5439	1,5643	1,5912	1,6253
88	1,5388	1,5474	1,5620	1,5829	1,6105	1,6455
89	1,5563	1,5651	1,5801	1,6015	1,6297	1,6656
90	1,5738	1,5828	1,5981	1,6200	1,6490	1,6858

$F(\varphi,\ k),\ k=\sin\alpha$

φ°	α = 35°	α = 40°	α = 45°	α = 50°	α = 55°	α = 60°
1	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745
2	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491
3	0,05237	0,05237	0,05237	0,05237	0,05238	0,05238
4	0,06983	0,06984	0,06984	0,06985	0,06985	0,06986
5	0,08730	0,08731	0,08732	0,08733	0,08734	0,08735
6	0,1048	0,1048	0,1048	0,1048	0,1049	0,1049
7	0,1223	0,1223	0,1223	0,1224	0,1224	0,1224
8	0,1398	0,1398	0,1399	0,1399	0,1399	0,1400
9	0,1573	0,1574	0,1574	0,1575	0,1575	0,1576
10	0,1748	0,1749	0,1750	0,1751	0,1751	0,1752
11	0,1924	0,1925	0,1926	0,1927	0,1928	0,1929
12	0,2099	0,2101	0,2102	0,2103	0,2105	0,2106
13	0,2275	0,2277	0,2279	0,2280	0,2282	0,2284
14	0,2451	0,2454	0,2456	0,2458	0,2460	0,2462
15	0,2628	0,2630	0,2633	0,2636	0,2638	0,2641
16	0,2804	0,2808	0,2811	0,2814	0,2817	0,2820
17	0,2981	0,2985	0,2989	0,2993	0,2997	0,3000
18	0,3159	0,3163	0,3168	0,3172	0,3177	0,3181
19	0,3336	0,3341	0,3347	0,3352	0,3357	0,3362
20	0,3514	0,3520	0,3526	0,3533	0,3539	0,3545
21	0,3692	0,3699	0,3706	0,3714	0,3721	0,3728
22	0,3871	0,3879	0,3887	0,3896	0,3904	0,3912
23	0,4049	0,4059	0,4068	0,4078	0,4088	0,4097
24	0,4229	0,4239	0,4250	0,4261	0,4272	0,4283
25	0,4408	0,4420	0,4433	0,4446	0,4458	0,4470
26	0,4589	0,4602	0,4616	0,4630	0,4645	0,4658
27	0,4769	0,4784	0,4800	0,4816	0,4832	0,4847
28	0,4950	0,4967	0,4985	0,5003	0,5021	0,5038
29	0,5132	0,5150	0,5170	0,5190	0,5210	0,5229
30	0,5313	0,5334	0,5356	0,5379	0,5401	0,5422
31	0,5496	0,5519	0,5543	0,5568	0,5593	0,5617
32	0,5679	0,5704	0,5731	0,5759	0,5786	0,5812
33	0,5862	0,5890	0,5920	0,5950	0,5980	0,6010
34	0,6046	0,6077	0,6109	0,6143	0,6176	0,6208
35	0,6231	0,6264	0,6300	0,6336	0,6373	0,6409
36	0,6416	0,6452	0,6491	0,6531	0,6572	0,6610
37	0,6602	0,6641	0,6684	0,6727	0,6771	0,6814
38	0,6788	0,6831	0,6877	0,6925	0,6973	0,7020
39	0,6975	0,7021	0,7071	0,7123	0,7176	0,7227
40	0,7162	0,7213	0,7267	0,7323	0,7380	0,7436
41	0,7350	0,7405	0,7463	0,7524	0,7586	0,7647
42	0,7539	0,7598	0,7661	0,7727	0,7794	0,7860
43	0,7728	0,7791	0,7859	0,7931	0,8004	0,8075
44	0,7918	0,7986	0,8059	0,8136	0,8215	0,8293
45	0,8109	0,8182	0,8260	0,8343	0,8428	0,8512

$F(\varphi,\ k),\ k=\sin\alpha$

φ°	α = 35°	α = 40°	α = 45°	α = 50°	α = 55°	α = 60°
46	0,8300	0,8378	0,8462	0,8552	0,8643	0,8734
47	0,8492	0,8575	0,8666	0,8761	0,8860	0,8959
48	0,8685	0,8773	0,8870	0,8973	0,9079	0,9185
49	0,8878	0,8973	0,9076	0,9186	0,9300	0,9415
50	0,9072	0,9173	0,9283	0,9401	0,9523	0,9647
51	0,9267	0,9374	0,9491	0,9617	0,9748	0,9881
52	0,9462	0,9576	0,9701	0,9835	0,9976	1,0119
53	0,9658	0,9778	0,9912	1,0055	1,0206	1,0359
54	0,9855	0,9982	1,0124	1,0277	1,0437	1,0602
55	1,0052	1,0187	1,0337	1,0500	1,0672	1,0848
56	1,0250	1,0393	1,0552	1,0725	1,0908	1,1097
57	1,0449	1,0600	1,0768	1,0952	1,1147	1,1349
58	1,0648	1,0807	1,0985	1,1180	1,1389	1,1605
59	1,0848	1,1016	1,1204	1,1411	1,1633	1,1864
60	1,1049	1,1226	1,1424	1,1643	1,1879	1,2126
61	1,1250	1,1436	1,1646	1,1877	1,2128	1,2392
62	1,1453	1,1648	1,1869	1,2113	1,2379	1,2661
63	1,1655	1,1860	1,2093	1,2351	1,2633	1,2933
64	1,1859	1,2074	1,2318	1,2591	1,2890	1,3209
65	1,2063	1,2288	1,2545	1,2833	1,3149	1,3489
66	1,2267	1,2503	1,2773	1,3076	1,3411	1,3773
67	1,2472	1,2719	1,3002	1,3321	1,3675	1,4060
68	1,2678	1,2936	1,3233	1,3568	1,3942	1,4351
69	1,2885	1,3154	1,3464	1,3817	1,4212	1,4646
70	1,3092	1,3372	1,3697	1,4068	1,4484	1,4944
71	1,3299	1,3592	1,3931	1,4320	1,4759	1,5246
72	1,3507	1,3812	1,4167	1,4574	1,5036	1,5552
73	1,3716	1,4033	1,4403	1,4830	1,5316	1,5862
74	1,3924	1,4254	1,4640	1,5087	1,5597	1,6175
75	1,4134	1,4477	1,4879	1,5346	1,5882	1,6492
76	1,4344	1,4700	1,5118	1,5606	1,6168	1,6812
77	1,4554	1,4923	1,5359	1,5867	1,6457	1,7136
78	1,4765	1,5147	1,5600	1,6130	1,6748	1,7463
79	1,4976	1,5372	1,5842	1,6394	1,7040	1,7792
80	1,5187	1,5597	1,6085	1,6660	1,7335	1,8125
81	1,5399	1,5823	1,6328	1,6926	1,7631	1,8461
82	1,5611	1,6049	1,6573	1,7194	1,7929	1,8799
83	1,5823	1,6276	1,6817	1,7462	1,8228	1,9140
84	1,6035	1,6502	1,7063	1,7731	1,8528	1,9482
85	1,6248	1,6730	1,7308	1,8001	1,8830	1,9826
86	1,6461	1,6957	1,7554	1,8271	1,9132	2,0172
87	1,6673	1,7184	1,7801	1,8542	1,9435	2,0519
88	1,6886	1,7412	1,8047	1,8813	1,9739	2,0867
89	1,7099	1,7640	1,8294	1,9084	2,0043	2,1216
90	1,7313	1,7868	1,8541	1,9356	2,0347	2,1565

$F(\varphi, k),\ k=\sin\alpha$

$\varphi°$	$\alpha=65°$	$\alpha=70°$	$\alpha=75°$	$\alpha=80°$	$\alpha=85°$	$\alpha=90°$
1	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745
2	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491
3	0,05238	0,05238	0,05238	0,05238	0,05238	0,05238
4	0,06986	0,06986	0,06987	0,06987	0,06987	0,06987
5	0,08736	0,08736	0,08737	0,08737	0,08738	0,08738
6	0,1049	0,1049	0,1049	0,1049	0,1049	0,1049
7	0,1224	0,1224	0,1225	0,1225	0,1225	0,1225
8	0,1400	0,1400	0,1401	0,1401	0,1401	0,1401
9	0,1576	0,1577	0,1577	0,1577	0,1577	0,1577
10	0,1753	0,1753	0,1754	0,1754	0,1754	0,1754
11	0,1930	0,1930	0,1931	0,1931	0,1932	0,1932
12	0,2107	0,2108	0,2109	0,2109	0,2110	0,2110
13	0,2285	0,2286	0,2287	0,2288	0,2289	0,2289
14	0,2464	0,2465	0,2466	0,2467	0,2468	0,2468
15	0,2643	0,2645	0,2646	0,2648	0,2648	0,2648
16	0,2823	0,2825	0,2827	0,2828	0,2829	0,2830
17	0,3003	0,3006	0,3009	0,3010	0,3011	0,3012
18	0,3185	0,3188	0,3191	0,3193	0,3194	0,3195
19	0,3367	0,3371	0,3374	0,3377	0,3378	0,3379
20	0,3550	0,3555	0,3559	0,3562	0,3563	0,3564
21	0,3734	0,3740	0,3744	0,3747	0,3749	0,3750
22	0,3919	0,3926	0,3931	0,3935	0,3937	0,3938
23	0,4105	0,4113	0,4119	0,4123	0,4126	0,4127
24	0,4293	0,4301	0,4308	0,4313	0,4316	0,4317
25	0,4481	0,4490	0,4498	0,4504	0,4508	0,4509
26	0,4670	0,4681	0,4690	0,4697	0,4701	0,4702
27	0,4861	0,4874	0,4884	0,4891	0,4896	0,4897
28	0,5053	0,5067	0,5079	0,5087	0,5092	0,5094
29	0,5247	0,5262	0,5275	0,5285	0,5291	0,5293
30	0,5442	0,5459	0,5474	0,5484	0,5491	0,5493
31	0,5639	0,5658	0,5674	0,5686	0,5693	0,5696
32	0,5837	0,5858	0,5876	0,5889	0,5898	0,5900
33	0,6037	0,6060	0,6080	0,6095	0,6104	0,6107
34	0,6238	0,6265	0,6287	0,6303	0,6313	0,6317
35	0,6442	0,6471	0,6495	0,6513	0,6525	0,6528
36	0,6647	0,6679	0,6706	0,6726	0,6739	0,6743
37	0,6854	0,6890	0,6919	0,6941	0,6955	0,6960
38	0,7063	0,7102	0,7135	0,7159	0,7175	0,7180
39	0,7275	0,7318	0,7353	0,7380	0,7397	0,7403
40	0,7488	0,7535	0,7575	0,7604	0,7623	0,7629
41	0,7704	0,7756	0,7799	0,7831	0,7852	0,7859
42	0,7922	0,7979	0,8026	0,8062	0,8084	0,8092
43	0,8143	0,8205	0,8256	0,8295	0,8320	0,8328
44	0,8367	0,8433	0,8490	0,8533	0,8560	0,8569
45	0,8593	0,8665	0,8727	0,8774	0,8804	0,8814

$F(\varphi, k),\ k=\sin\alpha$

$\varphi°$	$\alpha=65°$	$\alpha=70°$	$\alpha=75°$	$\alpha=80°$	$\alpha=85°$	$\alpha=90°$
46	0,8821	0,8901	0,8968	0,9019	0,9052	0,9063
47	0,9053	0,9139	0,9212	0,9269	0,9304	0,9316
48	0,9288	0,9381	0,9461	0,9523	0,9561	0,9575
49	0,9525	0,9627	0,9714	0,9781	0,9824	0,9838
50	0,9766	0,9876	0,9971	1,0044	1,0091	1,0107
51	1,0010	1,0130	1,0233	1,0313	1,0364	1,0381
52	1,0258	1,0387	1,0500	1,0587	1,0643	1,0662
53	1,0509	1,0649	1,0771	1,0867	1,0927	1,0948
54	1,0764	1,0916	1,1048	1,1152	1,1219	1,1242
55	1,1022	1,1187	1,1331	1,1444	1,1517	1,1542
56	1,1285	1,1462	1,1619	1,1743	1,1823	1,1851
57	1,1551	1,1743	1,1914	1,2049	1,2136	1,2167
58	1,1822	1,2030	1,2215	1,2362	1,2458	1,2492
59	1,2097	1,2321	1,2522	1,2684	1,2789	1,2826
60	1,2376	1,2619	1,2837	1,3014	1,3129	1,3170
61	1,2660	1,2922	1,3159	1,3352	1,3480	1,3524
62	1,2949	1,3231	1,3490	1,3701	1,3841	1,3890
63	1,3243	1,3547	1,3828	1,4059	1,4214	1,4268
64	1,3541	1,3870	1,4175	1,4429	1,4599	1,4659
65	1,3844	1,4199	1,4532	1,4810	1,4998	1,5065
66	1,4153	1,4536	1,4898	1,5203	1,5411	1,5485
67	1,4467	1,4880	1,5274	1,5610	1,5840	1,5923
68	1,4786	1,5232	1,5661	1,6030	1,6287	1,6379
69	1,5111	1,5591	1,6059	1,6466	1,6752	1,6856
70	1,5441	1,5959	1,6468	1,6918	1,7237	1,7354
71	1,5777	1,6335	1,6891	1,7388	1,7745	1,7877
72	1,6118	1,6720	1,7326	1,7876	1,8277	1,8427
73	1,6465	1,7113	1,7774	1,8384	1,8837	1,9008
74	1,6818	1,7516	1,8237	1,8915	1,9427	1,9623
75	1,7176	1,7927	1,8715	1,9468	2,0050	2,0276
76	1,7540	1,8347	1,9207	2,0047	2,0711	2,0973
77	1,7909	1,8777	1,9716	2,0653	2,1414	2,1721
78	1,8284	1,9215	2,0240	2,1288	2,2164	2,2528
79	1,8664	1,9663	2,0781	2,1954	2,2969	2,3404
80	1,9048	2,0119	2,1339	2,2653	2,3837	2,4362
81	1,9438	2,0584	2,1913	2,3387	2,4775	2,5421
82	1,9831	2,1057	2,2504	2,4157	2,5795	2,6603
83	2,0229	2,1537	2,3110	2,4965	2,6911	2,7942
84	2,0630	2,2024	2,3731	2,5811	2,8136	2,9487
85	2,1035	2,2518	2,4366	2,6694	2,9487	3,1313
86	2,1442	2,3017	2,5013	2,7612	3,0978	3,3547
87	2,1852	2,3520	2,5670	2,8561	3,2620	3,6425
88	2,2263	2,4027	2,6336	2,9537	3,4412	4,0481
89	2,2675	2,4535	2,7007	3,0530	3,6328	4,7413
90	2,3088	2,5046	2,7681	3,1534	3,8317	∞

III. Эллиптический интеграл второго рода

$$E(\varphi,\ k)=\int\limits_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,dt,\quad k=\sin\alpha$$

φ°	α = 5°	α = 10°	α = 15°	α = 20°	α = 25°	α = 30°
1	0,0175	0,0175	0,0175	0,0175	0,0175	0,0175
2	0,0349	0,0349	0,0349	0,0349	0,0349	0,0349
3	0,0524	0,0524	0,0524	0,0524	0,0524	0,0524
4	0,0698	0,0698	0,0698	0,0698	0,0698	0,0698
5	0,0873	0,0873	0,0873	0,0873	0,0873	0,0872
6	0,1047	0,1047	0,1047	0,1047	0,1047	0,1047
7	0,1222	0,1222	0,1222	0,1221	0,1221	0,1221
8	0,1396	0,1396	0,1396	0,1396	0,1396	0,1395
9	0,1571	0,1571	0,1570	0,1570	0,1570	0,1569
10	0,1745	0,1745	0,1745	0,1744	0,1744	0,1743
11	0,1920	0,1920	0,1919	0,1919	0,1918	0,1917
12	0,2094	0,2094	0,2093	0,2093	0,2092	0,2091
13	0,2269	0,2268	0,2268	0,2267	0,2266	0,2264
14	0,2443	0,2443	0,2442	0,2441	0,2439	0,2437
15	0,2618	0,2617	0,2616	0,2615	0,2613	0,2611
16	0,2792	0,2791	0,2790	0,2788	0,2786	0,2784
17	0,2967	0,2966	0,2964	0,2962	0,2959	0,2956
18	0,3141	0,3140	0,3138	0,3136	0,3133	0,3129
19	0,3316	0,3314	0,3312	0,3309	0,3305	0,3301
20	0,3490	0,3489	0,3486	0,3483	0,3478	0,3473
21	0,3665	0,3663	0,3660	0,3656	0,3651	0,3645
22	0,3839	0,3837	0,3834	0,3829	0,3823	0,3817
23	0,4014	0,4011	0,4007	0,4002	0,3996	0,3988
24	0,4188	0,4185	0,4181	0,4175	0,4168	0,4159
25	0,4362	0,4359	0,4354	0,4348	0,4339	0,4330
26	0,4537	0,4533	0,4528	0,4520	0,4511	0,4500
27	0,4711	0,4707	0,4701	0,4693	0,4682	0,4670
28	0,4886	0,4881	0,4875	0,4865	0,4854	0,4840
29	0,5060	0,5055	0,5048	0,5037	0,5025	0,5010
30	0,5234	0,5229	0,5221	0,5209	0,5195	0,5179
31	0,5409	0,5403	0,5394	0,5381	0,5366	0,5348
32	0,5583	0,5577	0,5567	0,5553	0,5536	0,5516
33	0,5757	0,5751	0,5740	0,5726	0,5706	0,5684
34	0,5932	0,5924	0,5912	0,5896	0,5876	0,5852
35	0,6106	0,6098	0,6085	0,6067	0,6045	0,6019
36	0,6280	0,6272	0,6258	0,6238	0,6214	0,6186
37	0,6455	0,6445	0,6430	0,6409	0,6383	0,6353
38	0,6629	0,6619	0,6602	0,6580	0,6552	0,6519
39	0,6803	0,6792	0,6775	0,6750	0,6720	0,6685
40	0,6977	0,6966	0,6947	0,6921	0,6888	0,6851
41	0,7152	0,7139	0,7119	0,7091	0,7056	0,7016
42	0,7326	0,7313	0,7291	0,7261	0,7224	0,7180
43	0,7500	0,7486	0,7463	0,7431	0,7391	0,7345
44	0,7674	0,7659	0,7634	0,7600	0,7558	0,7509
45	0,7849	0,7832	0,7806	0,7770	0,7725	0,7672

$E(\varphi,\ k),\ k=\sin\alpha$

φ°	α = 5°	α = 10°	α = 15°	α = 20°	α = 25°	α = 30°
46	0,8023	0,8006	0,7978	0,7939	0,7891	0,7835
47	0,8197	0,8179	0,8149	0,8108	0,8057	0,7998
48	0,8371	0,8352	0,8320	0,8277	0,8223	0,8160
49	0,8545	0,8525	0,8491	0,8446	0,8389	0,8322
50	0,8719	0,8698	0,8663	0,8614	0,8554	0,8483
51	0,8894	0,8871	0,8834	0,8783	0,8719	0,8644
52	0,9068	0,9044	0,9005	0,8951	0,8884	0,8805
53	0,9242	0,9217	0,9175	0,9119	0,9048	0,8965
54	0,9416	0,9390	0,9346	0,9287	0,9212	0,9125
55	0,9590	0,9562	0,9517	0,9454	0,9376	0,9284
56	0,9764	0,9735	0,9687	0,9622	0,9540	0,9443
57	0,9938	0,9908	0,9858	0,9789	0,9703	0,9602
58	1,0112	1,0080	1,0028	0,9956	0,9866	0,9760
59	1,0286	1,0253	1,0198	1,0123	1,0029	0,9918
60	1,0460	1,0426	1,0368	1,0290	1,0192	1,0076
61	1,0634	1,0598	1,0538	1,0456	1,0354	1,0233
62	1,0808	1,0771	1,0708	1,0623	1,0516	1,0390
63	1,0982	1,0943	1,0878	1,0789	1,0678	1,0546
64	1,1156	1,1115	1,1048	1,0955	1,0839	1,0702
65	1,1330	1,1288	1,1218	1,1121	1,1001	1,0858
66	1,1504	1,1460	1,1387	1,1287	1,1162	1,1013
67	1,1678	1,1632	1,1557	1,1453	1,1323	1,1168
68	1,1852	1,1805	1,1726	1,1619	1,1483	1,1323
69	1,2026	1,1977	1,1896	1,1784	1,1644	1,1478
70	1,2200	1,2149	1,2065	1,1949	1,1804	1,1632
71	1,2374	1,2321	1,2234	1,2115	1,1964	1,1786
72	1,2548	1,2494	1,2403	1,2280	1,2124	1,1939
73	1,2722	1,2666	1,2573	1,2445	1,2284	1,2093
74	1,2896	1,2838	1,2742	1,2609	1,2443	1,2246
75	1,3070	1,3010	1,2911	1,2774	1,2603	1,2399
76	1,3244	1,3182	1,3080	1,2939	1,2762	1,2552
77	1,3418	1,3354	1,3249	1,3104	1,2921	1,2704
78	1,3592	1,3526	1,3417	1,3268	1,3080	1,2857
79	1,3765	1,3698	1,3586	1,3433	1,3239	1,3009
80	1,3939	1,3870	1,3755	1,3597	1,3398	1,3161
81	1,4113	1,4042	1,3924	1,3761	1,3556	1,3312
82	1,4287	1,4214	1,4093	1,3925	1,3715	1,3464
83	1,4461	1,4386	1,4261	1,4090	1,3873	1,3616
84	1,4635	1,4558	1,4430	1,4254	1,4032	1,3767
85	1,4809	1,4729	1,4599	1,4418	1,4190	1,3919
86	1,4983	1,4901	1,4767	1,4582	1,4348	1,4070
87	1,5157	1,5073	1,4936	1,4746	1,4507	1,4221
88	1,5330	1,5245	1,5104	1,4910	1,4665	1,4372
89	1,5504	1,5417	1,5273	1,5074	1,4823	1,4524
90	1,5678	1,5589	1,5442	1,5238	1,4981	1,4675

$E(\varphi,\ k),\ k = \sin\alpha$

φ°	α = 35°	α = 40°	α = 45°	α = 50°	α = 55°	α = 60°
1	0,0175	0,0175	0,0175	0,0175	0,0175	0,0175
2	0,0349	0,0349	0,0349	0,0349	0,0349	0,0349
3	0,0524	0,0524	0,0524	0,0524	0,0523	0,0523
4	0,0698	0,0698	0,0698	0,0698	0,0698	0,0698
5	0,0872	0,0872	0,0872	0,0872	0,0872	0,0872
6	0,1047	0,1046	0,1046	0,1046	0,1046	0,1046
7	0,1221	0,1221	0,1220	0,1220	0,1220	0,1220
8	0,1395	0,1394	0,1394	0,1394	0,1393	0,1393
9	0,1569	0,1568	0,1568	0,1567	0,1567	0,1566
10	0,1743	0,1742	0,1741	0,1740	0,1739	0,1739
11	0,1916	0,1915	0,1914	0,1913	0,1912	0,1911
12	0,2089	0,2088	0,2087	0,2086	0,2084	0,2083
13	0,2263	0,2261	0,2259	0,2258	0,2256	0,2254
14	0,2436	0,2434	0,2431	0,2429	0,2427	0,2425
15	0,2608	0,2606	0,2603	0,2601	0,2598	0,2596
16	0,2781	0,2778	0,2775	0,2771	0,2768	0,2766
17	0,2953	0,2949	0,2946	0,2942	0,2938	0,2935
18	0,3125	0,3121	0,3116	0,3112	0,3107	0,3103
19	0,3297	0,3291	0,3286	0,3281	0,3276	0,3271
20	0,3468	0,3462	0,3456	0,3450	0,3444	0,3438
21	0,3639	0,3632	0,3625	0,3618	0,3611	0,3604
22	0,3809	0,3802	0,3793	0,3785	0,3777	0,3770
23	0,3980	0,3971	0,3961	0,3952	0,3943	0,3935
24	0,4150	0,4139	0,4129	0,4118	0,4108	0,4098
25	0,4319	0,4308	0,4296	0,4284	0,4272	0,4261
26	0,4488	0,4475	0,4462	0,4449	0,4436	0,4423
27	0,4657	0,4643	0,4628	0,4613	0,4598	0,4584
28	0,4825	0,4809	0,4793	0,4776	0,4760	0,4744
29	0,4993	0,4975	0,4957	0,4938	0,4920	0,4903
30	0,5161	0,5141	0,5121	0,5100	0,5080	0,5061
31	0,5328	0,5306	0,5283	0,5261	0,5239	0,5218
32	0,5494	0,5470	0,5446	0,5421	0,5396	0,5373
33	0,5660	0,5634	0,5607	0,5580	0,5553	0,5528
34	0,5826	0,5797	0,5768	0,5738	0,5709	0,5681
35	0,5991	0,5960	0,5928	0,5895	0,5863	0,5833
36	0,6155	0,6122	0,6087	0,6052	0,6017	0,5984
37	0,6319	0,6283	0,6245	0,6207	0,6169	0,6134
38	0,6483	0,6444	0,6403	0,6361	0,6321	0,6282
39	0,6646	0,6604	0,6559	0,6515	0,6471	0,6429
40	0,6808	0,6763	0,6715	0,6667	0,6620	0,6575
41	0,6970	0,6921	0,6870	0,6819	0,6768	0,6719
42	0,7132	0,7079	0,7025	0,6969	0,6914	0,6862
43	0,7293	0,7237	0,7178	0,7118	0,7059	0,7003
44	0,7453	0,7393	0,7330	0,7267	0,7204	0,7144
45	0,7613	0,7549	0,7482	0,7414	0,7347	0,7282

$E(\varphi,\ k),\ k = \sin\alpha$

φ°	α = 35°	α = 40°	α = 45°	α = 50°	α = 55°	α = 60°
46	0,7772	0,7704	0,7633	0,7560	0,7488	0,7420
47	0,7931	0,7858	0,7782	0,7705	0,7629	0,7555
48	0,8089	0,8012	0,7931	0,7849	0,7768	0,7690
49	0,8247	0,8165	0,8079	0,7992	0,7905	0,7823
50	0,8404	0,8317	0,8227	0,8134	0,8042	0,7954
51	0,8560	0,8469	0,8373	0,8275	0,8177	0,8064
52	0,8716	0,8620	0,8518	0,8414	0,8311	0,8212
53	0,8872	0,8770	0,8663	0,8553	0,8444	0,8339
54	0,9026	0,8919	0,8806	0,8690	0,8575	0,8464
55	0,9181	0,9068	0,8949	0,8827	0,8705	0,8588
56	0,9335	0,9216	0,9091	0,8962	0,8834	0,8710
57	0,9488	0,9363	0,9232	0,9097	0,8961	0,8831
58	0,9641	0,9510	0,9372	0,9230	0,9088	0,8950
59	0,9793	0,9656	0,9511	0,9362	0,9213	0,9068
60	0,9945	0,9801	0,9650	0,9493	0,9336	0,9184
61	1,0096	0,9946	0,9787	0,9623	0,9459	0,9299
62	1,0247	1,0090	0,9924	0,9752	0,9580	0,9412
63	1,0397	1,0233	1,0060	0,9880	0,9700	0,9524
64	1,0547	1,0376	1,0195	1,0007	0,9818	0,9634
65	1,0696	1,0518	1,0329	1,0133	0,9936	0,9743
66	1,0845	1,0660	1,0463	1,0259	1,0052	0,9850
67	1,0993	1,0801	1,0596	1,0383	1,0167	0,9956
68	1,1141	1,0941	1,0728	1,0506	1,0282	1,0061
69	1,1289	1,1081	1,0859	1,0628	1,0395	1,0164
70	1,1436	1,1221	1,0990	1,0750	1,0506	1,0266
71	1,1583	1,1359	1,1120	1,0871	1,0617	1,0367
72	1,1729	1,1498	1,1250	1,0991	1,0727	1,0467
73	1,1875	1,1636	1,1379	1,1110	1,0836	1,0565
74	1,2021	1,1773	1,1507	1,1228	1,0944	1,0662
75	1,2167	1,1910	1,1635	1,1346	1,1051	1,0759
76	1,2312	1,2047	1,1762	1,1463	1,1158	1,0854
77	1,2457	1,2183	1,1889	1,1580	1,1263	1,0948
78	1,2601	1,2319	1,2015	1,1695	1,1368	1,1041
79	1,2746	1,2454	1,2141	1,1811	1,1472	1,1133
80	1,2890	1,2590	1,2266	1,1926	1,1576	1,1225
81	1,3034	1,2725	1,2391	1,2040	1,1678	1,1316
82	1,3177	1,2859	1,2516	1,2154	1,1781	1,1406
83	1,3321	1,2994	1,2640	1,2267	1,1883	1,1495
84	1,3464	1,3128	1,2765	1,2381	1,1984	1,1584
85	1,3608	1,3262	1,2889	1,2493	1,2085	1,1673
86	1,3751	1,3396	1,3012	1,2606	1,2186	1,1761
67	1,3894	1,3530	1,3136	1,2719	1,2286	1,1848
88	1,4037	1,3664	1,3260	1,2831	1,2387	1,1936
89	1,4180	1,3798	1,3383	1,2943	1,2487	1,2023
90	1,4323	1,3931	1,3506	1,3055	1,2587	1,2111

$E(\varphi,\ k),\ k=\sin\alpha$

$\varphi°$	$\alpha=65°$	$\alpha=70°$	$\alpha=75°$	$\alpha=80°$	$\alpha=85°$	$\alpha=90°$
1	0,0175	0,0175	0,0175	0,0175	0,0175	0,0175
2	0,0349	0,0349	0,0349	0,0349	0,0349	0,0349
3	0,0523	0,0523	0,0523	0,0523	0,0523	0,0523
4	0,0698	0,0698	0,0698	0,0698	0,0698	0,0698
5	0,0872	0,0872	0,0872	0,0872	0,0872	0,0872
6	0,1046	0,1046	0,1045	0,1045	0,1045	0,1045
7	0,1219	0,1219	0,1219	0,1219	0,1219	0,1219
8	0,1393	0,1392	0,1392	0,1392	0,1392	0,1392
9	0,1566	0,1565	0,1565	0,1565	0,1564	0,1564
10	0,1738	0,1738	0,1737	0,1737	0,1737	0,1737
11	0,1910	0,1910	0,1909	0,1908	0,1908	0,1908
12	0,2082	0,2081	0,2080	0,2080	0,2079	0,2079
13	0,2253	0,2252	0,2251	0,2250	0,2250	0,2250
14	0,2424	0,2422	0,2421	0,2420	0,2419	0,2419
15	0,2594	0,2592	0,2590	0,2589	0,2588	0,2588
16	0,2763	0,2761	0,2759	0,2758	0,2757	0,2756
17	0,2932	0,2929	0,2927	0,2925	0,2924	0,2924
18	0,3100	0,3096	0,3094	0,3092	0,3091	0,3090
19	0,3267	0,3263	0,3260	0,3258	0,3256	0,3256
20	0,3433	0,3429	0,3425	0,3422	0,3421	0,3420
21	0,3599	0,3593	0,3589	0,3586	0,3584	0,3584
22	0,3763	0,3757	0,3753	0,3749	0,3747	0,3746
23	0,3927	0,3920	0,3915	0,3911	0,3908	0,3907
24	0,4090	0,4082	0,4076	0,4071	0,4068	0,4067
25	0,4251	0,4243	0,4236	0,4230	0,4227	0,4226
26	0,4412	0,4402	0,4394	0,4389	0,4385	0,4384
27	0,4572	0,4561	0,4552	0,4545	0,4541	0,4540
28	0,4730	0,4718	0,4708	0,4701	0,4696	0,4695
29	0,4888	0,4874	0,4863	0,4855	0,4850	0,4848
30	0,5044	0,5029	0,5017	0,5007	0,5002	0,5000
31	0,5199	0,5182	0,5169	0,5159	0,5153	0,5150
32	0,5352	0,5334	0,5319	0,5308	0,5302	0,5299
33	0,5505	0,5485	0,5468	0,5456	0,5449	0,5446
34	0,5656	0,5634	0,5616	0,5603	0,5595	0,5592
35	0,5806	0,5782	0,5762	0,5748	0,5739	0,5736
36	0,5954	0,5928	0,5907	0,5891	0,5881	0,5878
37	0,6101	0,6073	0,6050	0,6032	0,6022	0,6018
38	0,6247	0,6216	0,6191	0,6172	0,6161	0,6157
39	0,6391	0,6357	0,6330	0,6310	0,6297	0,6293
40	0,6533	0,6497	0,6468	0,6446	0,6432	0,6428
41	0,6675	0,6636	0,6604	0,6580	0,6566	0,6561
42	0,6814	0,6772	0,6738	0,6712	0,6697	0,6691
43	0,6952	0,6907	0,6870	0,6843	0,6826	0,6820
44	0,7088	0,7040	0,7001	0,6971	0,6953	0,6947
45	0,7223	0,7172	0,7129	0,7097	0,7078	0,7071

$E(\varphi,\ k),\ k=\sin\alpha$

$\varphi°$	$\alpha=65°$	$\alpha=70°$	$\alpha=75°$	$\alpha=80°$	$\alpha=85°$	$\alpha=90°$
46	0,7356	0,7301	0,7255	0,7222	0,7201	0,7193
47	0,7488	0,7429	0,7380	0,7344	0,7321	0,7314
48	0,7618	0,7555	0,7503	0,7464	0,7440	0,7431
49	0,7746	0,7679	0,7623	0,7582	0,7556	0,7547
50	0,7872	0,7801	0,7741	0,7697	0,7670	0,7660
51	0,7997	0,7921	0,7858	0,7811	0,7781	0,7772
52	0,8120	0,8039	0,7972	0,7922	0,7891	0,7880
53	0,8242	0,8155	0,8084	0,8031	0,7998	0,7986
54	0,8361	0,8270	0,8194	0,8137	0,8102	0,8090
55	0,8479	0,8382	0,8302	0,8242	0,8204	0,8192
56	0,8595	0,8493	0,8408	0,8344	0,8304	0,8290
57	0,8709	0,8601	0,8511	0,8443	0,8401	0,8387
58	0,8822	0,8707	0,8612	0,8540	0,8496	0,8481
59	0,8933	0,8812	0,8711	0,8635	0,8588	0,8572
60	0,9042	0,8914	0,8808	0,8728	0,8677	0,8660
61	0,9149	0,9015	0,8903	0,8818	0,8764	0,8746
62	0,9254	0,9113	0,8995	0,8905	0,8849	0,8830
63	0,9358	0,9210	0,9085	0,8990	0,8930	0,8910
64	0,9460	0,9304	0,9173	0,9072	0,9009	0,8988
65	0,9561	0,9397	0,9258	0,9152	0,9086	0,9063
66	0,9659	0,9487	0,9341	0,9230	0,9160	0,9136
67	0,9756	0,9576	0,9422	0,9305	0,9231	0,9205
68	0,9852	0,9662	0,9501	0,9377	0,9299	0,9272
69	0,9946	0,9747	0,9578	0,9447	0,9364	0,9336
70	1,0038	0,9830	0,9652	0,9514	0,9427	0,9397
71	1,0129	0,9911	0,9724	0,9579	0,9487	0,9455
72	1,0218	0,9990	0,9794	0,9642	0,9544	0,9511
73	1,0306	1,0067	0,9862	0,9702	0,9599	0,9563
74	1,0392	1,0143	0,9928	0,9759	0,9650	0,9613
75	1,0477	1,0217	0,9992	0,9814	0,9699	0,9659
76	1,0561	1,0290	1,0053	0,9867	0,9745	0,9703
77	1,0643	1,0361	1,0113	0,9917	0,9789	0,9744
78	1,0725	1,0430	1,0171	0,9965	0,9829	0,9782
79	1,0805	1,0498	1,0228	1,0011	0,9867	0,9816
80	1,0884	1,0565	1,0282	1,0054	0,9902	0,9848
81	1,0962	1,0630	1,0335	1,0096	0,9935	0,9877
82	1,1040	1,0695	1,0387	1,0135	0,9965	0,9903
83	1,1116	1,0758	1,0437	1,0173	0,9992	0,9926
84	1,1192	1,0821	1,0486	1,0209	1,0017	0,9945
85	1,1267	1,0883	1,0534	1,0244	1,0039	0,9962
86	1,1342	1,0944	1,0581	1,0277	1,0060	0,9976
87	1,1417	1,1004	1,0628	1,0309	1,0078	0,9986
88	1,1491	1,1064	1,0674	1,0340	1,0095	0,9994
89	1,1565	1,1124	1,0719	1,0371	1,0111	0,9999
90	1,1638	1,1184	1,0764	1,0401	1,0127	1,0000

ЛИТЕРАТУРА

(пособия, справочники, таблицы)

1. Гурвиц А., Курант Р., Теория функций, перевод с нем. М. А. Евграфова, «Наука», 1968.
2. Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, изд. 3, «Наука», 1965.
3. Стоилов С., Теория функций комплексного переменного, перевод с румынского И. Берштейна, два тома, ИЛ, 1962.
4. Волковыский Л. И., Лунц Г. Л., Араманович И. Г., Сборник задач по теории функций комплексного переменного, Физматгиз, 1960.
5. Appell P., Lacour E., Principes de la théorie des fonctions elliptiques et applications, deuxième édition, Paris, 1922.
6. Tannery J. et Molk J., Éléments de la théorie des fonctions elliptiques, т. 1—1893, т. 2—1896, т. 3—1898, т. 4—1902, Paris.
7. Коппенфельс В. и Штальман Ф., Практика конформных отображений, перевод К. М. Фишмана под редакцией Л. И. Волковыского, ИЛ, 1963.
8. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф., Специальные функции (формулы, графики, таблицы), перев. с 6-го нем. издания под редакцией Л. И. Седова, «Наука», 1968.
9. Журавский А. М., Справочник по эллиптическим функциям, Изд. АН СССР, 1941.
10. Milne-Thomson L. M., Die elliptischen Funktionen von Jacobi, Springer Verlag, 1931 (имеется перевод на русский язык, Харьков, 1933).
11. Сегал Б. И. и Семендяев К. А., Пятизначные математические таблицы, изд. 3, Физматгиз, 1962.
12. Беляков В. М., Кравцова Р. И., Раппопорт М. Г., Таблицы эллиптических интегралов, Изд. АН СССР, т. 1 — 1962, т. 2—1963.
13. Ломкаци Ц. Д., Таблицы эллиптических функций Вейерштрасса, «Наука», 1967.
14. Oberhettinger F. und Magnus W., Anwendung der elliptischen Funktionen in Physik und Technik, Springer Verlag, 1949.
15. Седов Л. И., Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, изд. 2, «Наука», 1966.