ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Н. И. АХИЕЗЕР и И. М. ГЛАЗМАН

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1966

517.2
А 95
УДК 517.5

АННОТАЦИЯ

Книга представляет собой систематическое изложение теории линейных операторов в гильбертовом пространстве. Первое издание вышло в 1950 г.

Настоящее второе издание полностью переработано и дополнено некоторыми новыми исследованиями последних пятнадцати лет, а также отдельными классическими результатами, не вошедшими в первое издание.

Книга предназначена для специалистов-математиков и физиков-теоретиков. Она доступна студентам старших курсов и аспирантам математических и физических специальностей университетов.

$\frac{2-2-3}{69-66}$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава III

ПРОЕКТИРУЮЩИЕ И УНИТАРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Глава IV

НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ И ПРЕДЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Глава V

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Глава VI

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ УНИТАРНЫХ И САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

Глава VII

СПЕКТР И ВОЗМУЩЕНИЯ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

Глава VIII

ТЕОРИЯ РАСШИРЕНИЯ СИММЕТРИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

Глава IX

ОБОБЩЕННЫЕ РАСШИРЕНИЯ И ОБОБЩЕННЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ СИММЕТРИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

Добавление I

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Добавление II

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

В этой книге, как и в первом ее издании, вышедшем пятнадцать лет назад, авторы ставили перед собой задачу систематически и доступно изложить основные понятия и факты теории линейных операторов в гильбертовом пространстве. При подготовке настоящего издания улучшен первоначальный текст и добавлен ряд разделов, посвященных как новым, так и классическим теориям. Наиболее существенно расширено изложение теории вполне непрерывных операторов, спектрального анализа и теории колец самосопряженных операторов, а также теории полуограниченных операторов. Добавлена глава о возмущениях и волновых операторах, а также глава об интегральных операторах.

Ф. С. Рофе-Бекетов оказал авторам большую помощь при подготовке рукописи, внес значительное улучшение в некоторые доказательства и благодаря ему удалось устранить ряд ошибок. За все это и за весьма тщательное редактирование книги авторы приносят ему глубокую благодарность.

Авторы очень признательны также всем коллегам и ученикам, указавшим после выхода в свет первого издания на различные содержащиеся в нем погрешности.

Наконец, авторы искренне благодарны А. З. Рывкину за внимательное отношение к рукописи в течение всего времени ее прохождения в редакции.

Харьков,
декабрь 1965 г.

ПРОСТРАНСТВО ГИЛЬБЕРТА

1. Линейные системы. Множество R элементов f, g, h, ... (называемых также точками или векторами) образует *линейную систему*, если

а) в R определена операция, называемая сложением и обозначаемая знаком $+$, причем

$$f+g=g+f,$$
$$(f+g)+h=f+(g+h),$$

и существует единственный элемент 0 (нулевой элемент) такой, что

$$f+0=f;$$

b) определено умножение элементов множества R на комплексные числа α, β, ..., причем

$$\alpha(f+g)=\alpha f+\alpha g,$$
$$(\alpha+\beta)f=\alpha f+\beta f,$$
$$\alpha(\beta f)=(\alpha\beta)f,$$
$$1\cdot f=f.$$

Будем говорить, что элементы $f_1, f_2, \ldots, f_n \in$ R *линейно независимы*, если соотношение

$$\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2+\ldots+\alpha_n f_n=0 \tag{1}$$

возможно только в тривиальном случае $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=0$; в противном случае элементы $f_1, f_2, \ldots, f_n$ назовем *линейно зависимыми*.

Левую часть соотношения (1) называют *линейной комбинацией* элементов $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Таким образом, линейная независимость элементов $f_1, f_2, \ldots, f_n$ означает, что любая нетривиальная линейная комбинация этих элементов отлична от нуля.

Если среди элементов $f_1, f_2, \ldots, f_n$ есть равный нулю, то эти элементы, очевидно, линейно зависимы. Действительно, если, например, $f_1=0$, то мы получим нетривиальное соотношение (1), беря $\alpha_1=1$, $\alpha_2=\alpha_3=\ldots=\alpha_n=0$.

Линейную систему R называют *конечномерной* и притом n-мерной, если R содержит n линейно независимых элементов и если всякие $n+1$ элементов из R линейно зависимы. Конечномерные линейные системы изучаются в линейной алгебре. Если линейная система имеет сколь угодно много линейно независимых элементов, то ее называют *бесконечномерной*.

2. Линейные многообразия. Часто приходится рассматривать некоторые совокупности элементов из R. Всякую такую совокупность L мы называем *линейным многообразием*, если из соотношений $f \in L$, $g \in L$ следует, что $\alpha f + \beta g \in L$, каковы бы ни были числа α, β. Одним из наиболее распространенных приемов для получения линейных многообразий является построение *линейной оболочки*. Исходным здесь является некоторое конечное или бесконечное множество M элементов из R. Затем составляются всевозможные линейные комбинации

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_n f_n$$

элементов $f_1, f_2, \ldots, f_n$ из M. Совокупность L этих линейных комбинаций, очевидно, представляет некоторое линейное многообразие в R, содержащее M. Это есть наименьшее линейное многообразие, содержащее M, и оно носит название линейной оболочки множества M.

Некоторое множество $M \subset R$ называют *прямой суммой* конечного числа линейных многообразий $M_k \subset R$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ и пишут

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_n,$$

если каждый элемент $g \in M$ однозначно представим в виде суммы

$$g = g_1 + g_2 + \ldots + g_n,$$

где $g_k \in M_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Очевидно, что M есть также линейное многообразие.

Условимся называть линейные многообразия $M_1, M_2, \ldots, M_n$ $(n < \infty)$ линейно независимыми, если равенство

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_n = 0 \qquad (f_k \in M_k;\ k = 1, 2, \ldots, n)$$

возможно лишь при

$$f_1 = f_2 = \ldots = f_n = 0.$$

Линейная независимость линейных многообразий $M_1, M_2, \ldots, M_n$, очевидно, необходима и достаточна, чтобы можно было образовать их прямую сумму

$$M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_n.$$

Пусть, далее, M и $\widetilde{M}$ — два линейных многообразия и $M \subset \widetilde{M}$. Векторы $f_1, f_2, \ldots, f_k$ из $\widetilde{M}$ называются *линейно независимыми по модулю* M, если из

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_k f_k \in M$$

следует

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0.$$

Очевидно, векторы из $\widetilde{M}$, линейно независимые по модулю M, будут и подавно линейно независимыми в обычном смысле.

Размерностью $\widetilde{M}$ *по модулю* M будем называть максимальное число m векторов из $\widetilde{M}$, линейно независимых по модулю M, и будем писать

$$\dim \widetilde{M} = m \,(\mathrm{mod}\, M);$$

если в $\widetilde{M}$ существует сколь угодно много линейно независимых по модулю M векторов, то будем считать

$$\dim \widetilde{M} = \infty \,(\mathrm{mod}\, M).$$

Очевидно, что размерность по модулю не превосходит обычной размерности.

Вместо $f \in M$ можно писать

$$f \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, M),$$

и тогда равенство

$$f \equiv g \,(\mathrm{mod}\, M) \tag{1}$$

будет означать, что $f - g \in M$.

Многообразие $\widetilde{M}$ можно разбить на подмножества элементов, относя элементы f и g к одному подмножеству, если они удовлетворяют условию (1), и к различным подмножествам в противном случае. Эти подмножества называются *классами* многообразия $\widetilde{M}$ по модулю M.

Совокупность классов, рассматриваемых каждый в качестве отдельного элемента, сама образует некоторое линейное многообразие, называемое *фактор-многообразием* многообразия $\widetilde{M}$ по многообразию M и обозначаемое

$$\widetilde{M}/M.$$

При этом линейные операции в $\widetilde{M}/M$ определены следующим образом. Если $\mathbf{f} \in \widetilde{M}/M$, $\mathbf{g} \in \widetilde{M}/M$ — некоторые классы по модулю M, а f, g — некоторые элементы из $\widetilde{M}$, принадлежащие соответственно классам $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{g}$, то

$$\alpha\mathfrak{f} \text{ и } \mathfrak{f}+\mathfrak{g}$$

определяются, как классы, которым принадлежат αf, соответственно $f+g$.

Легко видеть, что это определение не зависит от выбора конкретных представителей f из $\mathfrak{f}$ и g из $\mathfrak{g}$, а определенная выше размерность $\widetilde{M}$ по модулю M является обычной размерностью фактор-многообразия $\widetilde{M}/M$.

3. Скалярное произведение. Линейную систему R называют *метризованной*, если каждой паре элементов $f, g \in R$ сопоставляется определенное комплексное число (f, g), которое удовлетворяет следующим требованиям *):

a) $\qquad (g, f) = \overline{(f, g)},$

b) $\qquad (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2,\ g) = \alpha_1 (f_1,\ g) + \alpha_2 (f_2,\ g),$

c) $(f, f) \geqslant 0$, причем знак равенства имеет место только при $f = 0$.

Число (f, g) называется *скалярным произведением* элементов f и g.

Свойство b) скалярного произведения выражает его линейность по первому аргументу. Что касается второго аргумента, то аналогичное свойство имеет вид

$\bar{\text{b}}$) $\qquad (f,\ \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2) = \bar{\beta}_1 (f,\ g_1) + \bar{\beta}_2 (f,\ g_2).$

Действительно,

$$(f,\ \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2) = \overline{(\beta_1 g_1 + \beta_2 g_2,\ f)} = \overline{\beta_1 (g_1, f) + \beta_2 (g_2, f)} = \\ = \bar{\beta}_1 (f,\ g_1) + \bar{\beta}_2 (f,\ g_2).$$

Арифметический корень $\sqrt{(f, f)}$ называют *нормой* элемента (вектора) f и обозначают символом $\| f \|$. Эта величина аналогична длине отрезка. Так, например, подобно длине отрезка норма вектора равна нулю только в том случае, когда равняется нулю вектор. Кроме того,

1°. $\quad \|\alpha f\| = |\alpha| \cdot \| f \|.$

Действительно, в силу свойств b) и $\bar{\text{b}}$) скалярного произведения

$$(\alpha f,\ \alpha f) = \alpha (f,\ \alpha f) = \alpha\bar{\alpha} (f,\ f) = |\alpha|^2 (f,\ f),$$

откуда и вытекает 1°.

*) Черта над величиной означает переход к комплексно сопряженной величине.

Докажем, что для любых двух векторов f, g

2°. $|(f, g)| \leqslant \|f\| \cdot \|g\|$,

причем знак равенства имеет место в том и только в том случае, когда векторы f, g линейно зависимы. Это неравенство называют *неравенством Коши — Буняковского* или *неравенством Шварца*.

При доказательстве неравенства 2° можно принять, что $(f, g) \neq 0$. Полагая

$$\vartheta = \frac{(f, g)}{|(f, g)|},$$

найдем, что при любом вещественном λ

$$0 \leqslant (\bar{\vartheta} f + \lambda g, \ \bar{\vartheta} f + \lambda g) = \lambda^2 (g, g) + 2\lambda |(f, g)| + (f, f).$$

Справа мы имеем трехчлен относительно λ, и этот трехчлен при всех вещественных λ больше или равен нулю. Поэтому должно иметь место неравенство

$$|(f, g)|^2 \leqslant (f, f)(g, g),$$

что и доказывает соотношение 2°. Знак равенства будет лишь в том случае, когда рассматриваемый трехчлен имеет двойной корень, иначе говоря, только в том случае, когда при некотором вещественном λ

$$\bar{\vartheta} f + \lambda g = 0,$$

а это равенство выражает, что векторы f, g линейно зависимы.

Благодаря неравенству 2° скалярное произведение позволяет определить угол между двумя векторами. Однако это для дальнейшего не нужно. Мы ограничимся лишь понятием об *ортогональности*: два вектора f, g называются ортогональными, если

$$(f, g) = 0.$$

Докажем еще одно свойство нормы, а именно, неравенство

3°. $\|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$,

верное для любых векторов f, g и переходящее в равенство лишь при $f = 0$ или $g = \lambda f$, где $\lambda \geqslant 0$. Неравенство 3° называют *неравенством треугольника*, так как оно аналогично неравенству для сторон треугольника, известному из элементарной геометрии.

Чтобы доказать неравенство треугольника, возьмем соотношение

$$\|f + g\|^2 = (f + g, f + g) = (f, f) + (f, g) + (g, f) + (g, g).$$

Отсюда, в силу неравенства Коши — Буняковского,

$$\|f+g\|^2 \leqslant \|f\|^2 + 2\|f\|\cdot\|g\| + \|g\|^2 = \{\|f\| + \|g\|\}^2$$

и, значит,

$$\|f+g\| \leqslant \|f\| + \|g\|.$$

Чтобы имел место знак $=$, необходимо выполнение условия

$$(g, f) = \|f\|\cdot\|g\|.$$

Это условие тривиальным образом выполняется при $f = 0$. Если же $f \neq 0$, то, по доказанному выше, должно иметь место равенство

$$g = \lambda f$$

и, следовательно,

$$\lambda(f, f) = \|f\|\cdot\|\lambda f\|,$$

а потому $\lambda \geqslant 0$.

Иногда приходится рассматривать линейные системы, в которых каждой паре элементов f, g относится число $\langle f, g\rangle$, удовлетворяющее требованиям a), b) и вместо c) требованию

c′) $$\langle f, f\rangle \geqslant 0$$

без оговорки, что знак $=$ невозможен при $f \neq 0$. Такие линейные системы мы назовем *квазиметризованными*, а величину $\langle f, g\rangle$ назовем *квазискалярным произведением*.

Нетрудно видеть, что квазискалярное произведение удовлетворяет условию $\bar{\mathrm{b}}$). Для него справедливо также неравенство 2° Коши—Буняковского, однако без оговорки относительно случаев, когда в этом неравенстве имеет место знак $=$.

В силу неравенства Коши—Буняковского множество $\mathfrak{N}$ всех элементов f, для которых $\langle f, f\rangle = 0$, является линейным многообразием. Действительно, если

$$\langle f, f\rangle = 0,$$

то в силу неравенства Коши—Буняковского при любом h

$$\langle f, h\rangle = 0.$$

Поэтому из

$$\langle f, f\rangle = 0, \qquad \langle g, g\rangle = 0,$$

следует, что

$$\langle \alpha f + \beta g, \alpha f + \beta g\rangle =$$
$$= |\alpha|^2 \langle f, f\rangle + |\beta|^2 \langle g, g\rangle + \alpha\bar{\beta}\langle f, g\rangle + \beta\bar{\alpha}\langle g, f\rangle = 0.$$

Отметим, что, имея квазиметризованную систему R', можно построить фактор-многообразие $\mathrm{R} = \mathrm{R}'/\mathfrak{N}$, которое оказывается уже метризованной, а не квазиметризованной системой, если определить в $\mathrm{R}'/\mathfrak{N}$ скалярное произведение $(\mathfrak{f}, \mathfrak{g})$ формулой

$$(\mathfrak{f}, \mathfrak{g}) = \langle f, g \rangle,$$

где $\mathfrak{f} \in \mathrm{R}'/\mathfrak{N}$, $\mathfrak{g} \in \mathrm{R}'/\mathfrak{N}$, $f \in \mathfrak{f}$, $g \in \mathfrak{g}$.

Это определение не зависит от выбора тех или иных $f \in \mathfrak{f}$, $g \in \mathfrak{g}$.

4. Некоторые топологические понятия. В настоящем пункте мы остановимся на некоторых общих понятиях, которые вводятся при изучении точечных множеств в любом метрическом пространстве. Напомним, что *метрическим пространством* называется множество, для каждых двух элементов f, g которого определено *расстояние* $D[f, g]$, удовлетворяющее следующим требованиям:

a) $D[f, g] = D[g, f] > 0$ (при $f \neq g$),

b) $D[f, f] = 0$,

c) $D[f, g] \leqslant D[f, h] + D[h, g]$ (неравенство треугольника).

Линейная метризованная система R становится метрическим пространством, если положить

$$D[f, g] = \| f - g \|.$$

То, что так определенное расстояние удовлетворяет всем указанным выше требованиям, есть следствие приведенных выше свойств нормы. Мы будем обозначать метрическое пространство через E и будем говорить о расстоянии $D[f, g]$, но будем помнить, что в дальнейшем нам придется иметь дело лишь со случаем, когда $\mathrm{E} = \mathrm{R}$ и $D[f, g] = \| f - g \|$, т. е. со случаем, когда метрика порождается скалярным произведением.

Если f_0 — некоторая фиксированная точка E, а ϱ — некоторое положительное число, то совокупность всех точек f, для которых

$$D[f, f_0] < \varrho,$$

называют *сферой* в E, причем ϱ — ее *радиус*, а f_0 — *центр*. Такая сфера представляет *окрестность*, точнее, ϱ-окрестность точки f_0.

Мы говорим, что последовательность точек $f_n \in \mathrm{E}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ имеет *пределом* точку $f \in \mathrm{E}$ и пишем

$$f_n \to f \quad \text{или} \quad \lim_{n \to \infty} f_n = f, \tag{1}$$

если

$$\lim_{n \to \infty} D[f_n, f] = 0. \tag{2}$$

Нетрудно видеть, что из (1), т. е. из (2), следует, что

$$\lim_{m, n \to \infty} D[f_m, f_n] = 0, \tag{3}$$

где m, n независимы друг от друга.

Действительно, по неравенству треугольника

$$D[f_m, f_n] \leqslant D[f_m, f] + D[f, f_n].$$

Однако обратное верно не всегда, т. е. если для последовательности $f_n \in \mathrm{E}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ соотношение (3) имеет место, то существование такого элемента $f \in \mathrm{E}$, к которому последовательность сходится, не обязательно. Будем называть последовательность $f_n \in \mathrm{E}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *фундаментальной*, если для нее выполняется соотношение (3).

Если для всякой фундаментальной последовательности найдется элемент, к которому эта последовательность сходится, то метрическое пространство называют *полным*.

Если метрическое пространство не полно, то его можно сделать полным путем введения некоторых новых элементов с помощью фундаментальных последовательностей. Эта операция аналогична введению иррациональных чисел по Кантору.

Предельной точкой некоторого множества M из E называют всякую точку $f \in \mathrm{E}$, в любой окрестности которой находится бесчисленное множество точек из M.

Если множество содержит все свои предельные точки, то оно называется *замкнутым*. Присоединение к множеству M его предельных точек называется *замыканием*. Так же называют получаемое при этом и обозначаемое символом $\overline{M}$ множество.

Если линейная система является полным метрическим пространством, то наряду с линейной оболочкой некоторого множества можно рассматривать ее замыкание, которое называют *замкнутой линейной оболочкой*.

Если в метрическом пространстве имеется счетное множество, замыкание которого содержит все пространство, то пространство называется *сепарабельным*.

Иначе говоря, в сепарабельном пространстве существует такое счетное точечное множество N, что для любой точки $f \in \mathrm{E}$ и любого $\varepsilon > 0$ можно найти $g \in \mathrm{N}$ так, что

$$D[f, g] < \varepsilon.$$

Это обстоятельство выражают еще следующим образом: пространство называется сепарабельным, если оно содержит счетное *всюду плотное множество*.

5. Пространство Гильберта. Среди метрических пространств наиболее замечательны те, которые являются линейными системами и в которых расстояние между двумя элементами по определению равно норме разности этих элементов, т. е. расстоянию этой разности от нулевого элемента. Полные метрические пространства этого рода называются *пространствами Банаха*.

Пространство Гильберта, которому посвящена настоящая книга, является важным частным случаем пространства Банаха, так как в нем, кроме расстояния между двумя элементами, имеется также скалярное произведение.

Определение. Бесконечномерную линейную метризованную систему H, которая в порождаемой скалярным произведением метрике является полным метрическим пространством, называют *пространством Гильберта*.

Каждое замкнутое линейное многообразие G в H является линейной системой, метризованной при помощи того же скалярного произведения, что и H.

Кроме того, G обладает полнотой. Действительно, всякая фундаментальная последовательность элементов из G имеет предел в H, так как H полно, и этот предел должен принадлежать G, так как G замкнуто.

Из сказанного следует, что G само является пространством Гильберта, если оно содержит бесконечное число линейно независимых элементов, и пространством Евклида в противном случае. Поэтому G называют *подпространством* пространства H.

Данное нами определение пространства Гильберта носит аксиоматический характер. Требованиям, которые оно содержит, удовлетворяют различные конкретные линейные системы. Поэтому часто H называют *абстрактным* пространством Гильберта, а упомянутые конкретные системы называют *реализациями* этого абстрактного пространства.

Одной из важнейших реализаций пространства H является пространство l^2. Именно на этом, впервые введенном Гильбертом в его теории линейных интегральных уравнений, конкретном пространстве началось построение общей теории, которой посвящена настоящая книга.

Элементами пространства l^2 являются числовые комплексные последовательности

$$f=\{x_n\}_1^\infty, \qquad g=\{y_n\}_1^\infty, \ \ldots,$$

для которых

$$\sum_1^\infty |x_n|^2<\infty, \qquad \sum_1^\infty |y_n|^2<\infty, \ \ldots$$

Числа $x_1, x_2, \ldots$ можно рассматривать как *компоненты* вектора f или *координаты* точки f. Нулевым вектором является тот, все компоненты которого равны нулю. Сложение векторов определяется формулой

$$f+g=\{x_n+y_n\}_1^\infty.$$

Неравенство

$$\sum_1^\infty |x_n + y_n|^2 < \infty$$

следует из соотношения

$$|x+y|^2 \leqslant 2|x|^2 + 2|y|^2.$$

Умножение вектора f на число λ определяется формулой

$$\lambda f = \{\lambda x_n\}_1^\infty.$$

Скалярное произведение в пространстве l^2 имеет вид

$$(f, g) = \sum_1^\infty x_n \overline{y}_n.$$

Ряд в правой части сходится абсолютно, так как

$$|xy| \leqslant \frac{1}{2}|x|^2 + \frac{1}{2}|y|^2.$$

Неравенство

$$|(f, g)| \leqslant \|f\| \cdot \|g\|$$

в рассматриваемом случае имеет вид

$$\left|\sum_1^\infty x_n \overline{y}_n\right| \leqslant \sqrt{\sum_1^\infty |x_n|^2} \sqrt{\sum_1^\infty |y_n|^2}$$

и принадлежит Коши.

Пространство l^2 сепарабельно. В качестве плотного в l^2 счетного множества можно взять совокупность всех векторов с конечным (своим для каждого вектора) числом отличных от нуля компонент при условии, что этими отличными от нуля компонентами являются числа вида $\xi + i\eta$, где ξ и η — рациональные числа.

Кроме того, пространство l^2 полно. Действительно, если последовательность векторов

$$f^{(k)} = \{x_n^{(k)}\}_{n=1}^\infty \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

фундаментальна, то для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\mathcal{N}$, чтобы при $r > \mathcal{N}$, $s > \mathcal{N}$

$$\sqrt{\sum_{n=1}^\infty |x_n^{(r)} - x_n^{(s)}|^2} < \varepsilon.$$

Следовательно, при любом m и подавно

$$\sqrt{\sum_{n=1}^m |x_n^{(r)} - x_n^{(s)}|^2} < \varepsilon. \qquad (1)$$

Поэтому каждая из числовых последовательностей

$$\{x_n^{(k)}\}_{k=1}^{\infty} \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots)$$

сходится к некоторому пределу x_n $(n=1,\ 2,\ \ldots)$. Увеличивая в (1) s до ∞, получим

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{m} |x_n^{(r)} - x_n|^2} \leqslant \varepsilon.$$

А так как это верно при любом m, то

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n^{(r)} - x_n|^2} \leqslant \varepsilon.$$

Отсюда следует, что

$$f = \{x_n\}_1^{\infty} \in l^2,$$

а в силу произвольности $\varepsilon > 0$ также, что

$$f^{(k)} \to f.$$

Таким образом, полнота пространства l^2 доказана.

Как мы показали, пространство l^2 сепарабельно. Первоначально и в определение абстрактного пространства Гильберта включалось требование сепарабельности. Однако в дальнейшем оказалось, что это требование не является необходимым для построения теории, поэтому в данное нами определение пространства H оно не включено.

Что же касается требования полноты, то оно является существенным почти для всех последующих рассмотрений. Поэтому его включают в определение H, делая соответствующую оговорку в тех случаях, когда это требование является излишним.

Пространство l^2 бесконечномерно, так как все *орты*

$$e_1 = \{1,\ 0,\ 0,\ \ldots\},$$
$$e_2 = \{0,\ 1,\ 0,\ \ldots\},$$
$$e_3 = \{0,\ 0,\ 1,\ \ldots\},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

как легко видеть, линейно независимы.

Пространство l^2 есть бесконечномерный аналог пространства E_m, элементами которого являются конечные последовательности

$$f = \{x_n\}_1^m.$$

E_m есть m-мерное комплексное пространство Евклида.

Значительная часть теории, которую мы изложим, есть перенесение на H хорошо известных фактов относительно E_m.

6. Расстояние точки от выпуклого множества. Множество K точек линейной системы R называется *выпуклым*, если вместе с любыми точками f и g этого множества ему принадлежит весь *отрезок* $\lambda f+(1-\lambda)g$, где $0\leqslant\lambda\leqslant 1$. Любое линейное многообразие в R является выпуклым множеством. Замыкание $\overline{K}$ выпуклого множества K в полном метрическом пространстве E также является выпуклым. Примером замкнутого выпуклого множества в E является, в частности, множество элементов f, удовлетворяющих неравенству $D[f, f_0]\leqslant\varrho$.

Пусть в гильбертовом пространстве H дано некоторое выпуклое множество K, не совпадающее с H. Пусть в H взята какая-нибудь точка $h\,\overline{\in}\,K$, и пусть

$$\delta=\inf_{f\in K}\|h-f\|.$$

Возникает вопрос, существует ли в K точка g, для которой

$$\|h-g\|=\delta,$$

иначе говоря, точка, *наименее удаленная* от точки h.

Докажем прежде всего, что интересующих нас точек g не может быть более одной, какова бы ни была точка h. С этой целью допустим, что в K существуют две точки g', g'', расстояние которых от точки h равно δ. Так как $\frac{1}{2}(g'+g'')\in K$, то

$$\left\|h-\frac{g'+g''}{2}\right\|\geqslant\delta.$$

С другой стороны,

$$\left\|h-\frac{g'+g''}{2}\right\|\leqslant\frac{1}{2}\|h-g'\|+\frac{1}{2}\|h-g''\|=\delta.$$

Следовательно,

$$\left\|h-\frac{g'+g''}{2}\right\|=\delta,$$

и поэтому

$$\left\|h-\frac{g'+g''}{2}\right\|=\frac{1}{2}\|h-g'\|+\frac{1}{2}\|h-g''\|.$$

Мы имеем здесь случай знака = в неравенстве треугольника. Так как

$$h-g'\neq 0,$$

то

$$h-g''=\alpha(h-g'), \tag{1}$$

где $\alpha \geqslant 0$, и, следовательно,

$$\delta = \left\| h - \frac{g' + g''}{2} \right\| = \frac{1+\alpha}{2} \| h - g' \| = \frac{1+\alpha}{2} \delta,$$

откуда $\alpha = 1$.

Теперь из (1) следует

$$g' = g'',$$

что и требовалось доказать.

Но существует ли вообще точка $g \in K$, наименее удаленная от точки h? Ответ на этот вопрос дает следующая

Теорема. *Если* K — *замкнутое выпуклое множество в пространстве* H, *и если*

$$\delta = \inf_{f \in K} \|h - f\|,$$

то в K *существует вектор* g (единственность его выше была доказана), *для которого*

$$\| h - g \| = \delta.$$

Доказательство. По определению нижней грани, в K существует бесконечная последовательность векторов $\{g_n\}_1^\infty$, для которой

$$\lim_{n \to \infty} \| h - g_n \| = \delta.$$

Но

$$\left\| h - \frac{g_m + g_n}{2} \right\| \leqslant \frac{1}{2} \| h - g_m \| + \frac{1}{2} \| h - g_n \|.$$

Поэтому

$$\overline{\lim_{m,n \to \infty}} \left\| h - \frac{g_m + g_n}{2} \right\| \leqslant \delta,$$

и поскольку

$$\left\| h - \frac{g_m + g_n}{2} \right\| \geqslant \delta,$$

то

$$\lim_{m,n \to \infty} \left\| h - \frac{g_m + g_n}{2} \right\| = \delta.$$

С другой стороны, из легко проверяемого соотношения

$$2 \| f' \|^2 + 2 \| f'' \|^2 = \| f' + f'' \|^2 + \| f' - f'' \|^2,$$

полагая

$$f' = h - g_m, \qquad f'' = h - g_n,$$

находим

$$\| g_n - g_m \|^2 = 2 \| h - g_m \|^2 + 2 \| h - g_n \|^2 - 4 \left\| h - \frac{g_m + g_n}{2} \right\|^2.$$

Таким образом, мы видим, что

$$\lim_{m,n\to\infty} \| g_n - g_m \| = 0.$$

Поэтому последовательность векторов $\{g_n\}_1^\infty$ сходится к некоторому вектору $g \in \mathrm{G}$. Остается доказать, что

$$\| h - g \| = \delta.$$

Но

$$\lim_{n\to\infty} \| g - g_n \| = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \| h - g_n \| = \delta$$

и

$$\| h - g \| \leqslant \| h - g_n \| + \| g - g_n \|.$$

Следовательно,

$$\| h - g \| \leqslant \delta,$$

а знак $<$, очевидно, должен быть отброшен. Таким образом, теорема доказана.

7. Проекция вектора на подпространство. Пусть G — некоторое подпространство пространства H. В силу n° 6 каждому элементу $h \in \mathrm{H}$ отвечает вполне определенный элемент $g \in \mathrm{G}$, для которого

$$\| h - g \| = \inf_{g' \in \mathrm{G}} \| h - g' \|. \tag{1}$$

Рассматривая h и g как точки, мы говорим, что g есть точка подпространства G, которая наименее удалена от точки h. Если же элементы h и g рассматриваются как векторы, то говорят, что g есть тот из векторов подпространства G, который *наименее уклоняется* от вектора h. Теперь покажем, что в силу (1) вектор $h - g$ ортогонален подпространству G, т. е. ортогонален каждому вектору $g' \in \mathrm{G}$.

Для доказательства допустим, что вектор $h - g$ ортогонален не каждому вектору из G. Пусть

$$(h - g, g_0) = \sigma \neq 0 \qquad (g_0 \in \mathrm{G}).$$

Возьмем вектор

$$g^* = g + \frac{\sigma}{(g_0, g_0)} g_0 \in \mathrm{G}.$$

Тогда

$$\| h - g^* \|^2 = \left(h - g - \frac{\sigma}{(g_0, g_0)} g_0, \ h - g - \frac{\sigma}{(g_0, g_0)} g_0 \right) =$$

$$= \| h - g \|^2 - \frac{\bar{\sigma}}{(g_0, g_0)} (h - g, g_0) - \frac{\sigma}{(g_0, g_0)} (g_0, h - g) + \frac{|\sigma|^2}{(g_0, g_0)} =$$

$$= \| h - g \|^2 - \frac{|\sigma|^2}{(g_0, g_0)}$$

и, значит,

$$\| h-g^* \| < \| h-g \|,$$

что противоречит (1).

Из доказанного следует, что вектор h представим в виде

$$h = g + f,$$

где $g \in \mathrm{G}$, а f ортогонален G (что иногда будем писать в виде $f \perp \mathrm{G}$); при этом, как легко видеть,

$$\| h \|^2 = \| g \|^2 + \| f \|^2.$$

Вектор g естественно назвать *составляющей* вектора h по подпространству G или *проекцией* вектора h на подпространство G.

Обозначим через F совокупность всех векторов f, ортогональных подпространству G. Легко видеть, что F есть линейное многообразие. Покажем, что F замкнуто и, следовательно, является подпространством. Действительно, пусть $f_n \in \mathrm{F}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, иначе говоря $(f_n, g) = 0$ при любом $g \in \mathrm{G}$, и пусть $f_n \to f$. В таком случае имеет место равенство

$$(f, g) = (f - f_n, g),$$

правая часть которого по модулю не превосходит

$$\| f - f_n \| \cdot \| g \|$$

и поэтому стремится к нулю при $n \to \infty$. Значит, $(f, g) = 0$, откуда и вытекает, что $f \in \mathrm{F}$ и, следовательно, многообразие F замкнуто.

Мы получили представление пространства H в виде прямой суммы

$$\mathrm{H} = \mathrm{G} \oplus \mathrm{F}.$$

В данном случае слагаемые G и F ортогональны и их прямая сумма является *ортогональной суммой*; для подпространства F (или G) принято название *ортогонального дополнения* по отношению к подпространству G (соответственно, F) в H со следующим обозначением:

$$\mathrm{F} = \mathrm{H} \ominus \mathrm{G} \qquad (\text{соответственно } \mathrm{G} = \mathrm{H} \ominus \mathrm{F}).$$

По индукции определяется ортогональная сумма любого конечного числа попарно ортогональных подпространств.

Далее, ортогональной суммой бесконечного (счетного или несчетного) множества $\{\mathrm{G}_\alpha\}$ попарно ортогональных подпространств пространства H называется замыкание многообразия всех конечных сумм вида

$$g_{\alpha'} + g_{\alpha''} + \ldots,$$

где $g_{\alpha'} \in \mathrm{G}_{\alpha'}$, $g_{\alpha''} \in \mathrm{G}_{\alpha''}$ и т. д.

Очевидно, ортогональная сумма конечного числа слагаемых является частным случаем прямой суммы.

Можно рассматривать также ортогональные суммы произвольных гильбертовых пространств, не являющихся подпространствами некоторого заранее заданного гильбертова пространства. Например, ортогональная сумма пространств H_1 и H_2 есть гильбертово пространство $H = H_1 \oplus H_2$, элементами которого являются всевозможные пары $\{f, g\}$, где $f \in H_1$, $g \in H_2$, причем

$$\alpha\{f, g\} = \{\alpha f, \alpha g\},\ \{f_1, g_1\} + \{f_2, g_2\} = \{f_1 + f_2, g_1 + g_2\}$$

(так что нулевым элементом является $\{0, 0\}$), а скалярное произведение определено равенством

$$(\{f_1, g_1\}, \{f_2, g_2\}) = (f_1, f_2) + (g_1, g_2).$$

Из приведенных выше рассмотрений вытекает простое доказательство следующего предложения: *любое подпространство* G *сепарабельного пространства Гильберта* H *сепарабельно* *).

Действительно, пусть счетное множество векторов $\{h_k\}_1^\infty$ всюду плотно в H, а $\{g_k\}_1^\infty$ есть последовательность проекций этих векторов на подпространство G. Имеем

$$g - h_k = (g - g_k) + (g_k - h_k),$$

но $g_k - h_k \perp G$, так что $(g_k - h_k, g - g_k) = 0$ при любом $g \in G$ и, следовательно,

$$\| g - h_k \|^2 = \| g - g_k \|^2 + \| g_k - h_k \|^2,$$

откуда

$$\| g - g_k \| \leqslant \| g - h_k \|.$$

Из этого неравенства следует, что последовательность $\{g_k\}_1^\infty$ образует счетное множество, всюду плотное в подпространстве G.

Часто приходится находить проекцию вектора на конечномерное подпространство. Остановимся на этом вопросе подробнее.

Пусть G есть n-мерное подпространство и пусть

$$g_1, g_2, \ldots, g_n \tag{2}$$

какие-нибудь n линейно независимых элементов из G. Так как между любыми $n+1$ элементами подпространства G имеется линейная зависимость, то всякий вектор $g \in G$ представим в виде

$$g = \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \ldots + \lambda_n g_n;$$

иначе говоря, G является линейной оболочкой совокупности векторов (2).

*) Это предложение справедливо для любого подпространства сепарабельного метрического пространства E.

Возьмем произвольный вектор $h \in \mathrm{H}$ и обозначим через g его проекцию на G. Вектор g имеет вид

$$g = \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \ldots + \lambda_n g_n.$$

По свойству проекции разность $h - g = f$ должна быть ортогональна подпространству G, т. е. каждому из векторов $g_1, g_2, \ldots, g_n$:

$$(f, g_k) \equiv (h, g_k) - \lambda_1 (g_1, g_k) - \lambda_2 (g_2, g_k) - \ldots - \lambda_n (g_n, g_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{3}$$

Мы имеем здесь систему n линейных уравнений относительно $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Матрица $(\alpha_{jk})_{j,k=1}^{n}$ этой системы, $\alpha_{jk} = (g_k, g_j)$, называется *матрицей Грама*, а ее определитель

$$\Gamma(g_1, g_2, \ldots, g_n) = \begin{vmatrix} (g_1, g_1) & (g_2, g_1) & \ldots & (g_n, g_1) \\ (g_1, g_2) & (g_2, g_2) & \ldots & (g_n, g_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (g_1, g_n) & (g_2, g_n) & \ldots & (g_n, g_n) \end{vmatrix}$$

— *определителем Грама* векторов $g_1, g_2, \ldots, g_n$. На основании ранее доказанных фактов система уравнений (3) имеет единственное решение, каков бы ни был вектор h. Поэтому определитель Грама векторов $g_1, g_2, \ldots, g_n$ отличен от нуля.

Легко видеть, что если векторы $g_1, g_2, \ldots, g_n$ линейно зависимы, то их определитель Грама равен нулю. Поэтому *для линейной независимости векторов необходимо и достаточно, чтобы их определитель Грама был отличен от нуля.*

Займемся теперь отысканием величины

$$\delta = \min_{g' \in G} \| h - g' \|.$$

Мы увидим, что эта величина просто выражается через определители Грама.

Величина δ равна $\| f \| = \| h - g \|$ при условии, что входящие в g коэффициенты λ_i определяются уравнениями (3).

Следовательно,

$$\delta^2 = (f, f) = (f, h),$$

откуда

$$\delta^2 = (h, h) - \lambda_1 (g_1, h) - \lambda_2 (g_2, h) - \ldots - \lambda_n (g_n, h). \tag{4}$$

Мы видим, что отыскание δ^2 сводится к исключению величин λ_i из уравнений (3), (4).

Это исключение дает

$$\begin{vmatrix} (h, h)-\delta^2 & (g_1, h) & (g_2, h) & \dots & (g_n, h) \\ (h, g_1) & (g_1, g_1) & (g_2, g_1) & \dots & (g_n, g_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (h, g_n) & (g_1, g_n) & (g_2, g_n) & \dots & (g_n, g_n) \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда

$$\delta^2 = \frac{\Gamma(h, g_1, g_2, \dots, g_n)}{\Gamma(g_1, g_2, \dots, g_n)}. \tag{5}$$

Это и есть формула, которую мы хотели получить.

Так как $\Gamma(g_1) = (g_1, g_1) > 0$ (при $g_1 \neq 0$), то из формулы (5) по индукции следует, что определитель Грама линейно независимых векторов всегда положителен. Этот факт можно рассматривать как обобщение неравенства Коши — Буняковского, которое утверждает, что для линейно независимых векторов g_1, g_2 имеет место неравенство $\Gamma(g_1, g_2) > 0$.

8. Ортогонализация последовательности векторов. Два множества M и N векторов из R называют *эквивалентными*, если совпадают их линейные оболочки. Поэтому эквивалентность множеств M и N имеет место в том и только в том случае, когда каждый элемент одного из этих множеств является линейной комбинацией конечного числа векторов, принадлежащих другому множеству.

Последовательность векторов

$$e_1, e_2, e_3, \dots \tag{1}$$

пространства H называется *ортогональной*, если любые два вектора этой последовательности с различными номерами ортогональны; если, кроме того, норма каждого элемента последовательности (1) равна единице, то последовательность называется *ортонормированной*.

Всякую последовательность векторов

$$g_1, g_2, g_3, \dots, \tag{2}$$

между которыми нет линейных зависимостей, можно с помощью известного из линейной алгебры процесса Шмидта — Сонина *ортогонализовать*, т. е. построить ортонормированную последовательность (1) так, чтобы при каждом натуральном n подпоследовательности $\{g_k\}_1^n$ и $\{e_k\}_1^n$ были эквивалентны.

Для построения последовательности (1) примем в качестве e_1 вектор

$$e_1 = \frac{g_1}{\|g_1\|},$$

норма которого, очевидно, равна единице. Векторы e_1 и g_1 порождают одно и то же подпространство E_1 одного измерения. Вектор e_2 мы построим в два приема. Сначала из вектора g_2 вычтем его проекцию на E_1; получим вектор

$$h_2 = g_2 - (g_2, e_1)\, e_1,$$

который ортогонален подпространству E_1, т. е. вектору e_1, и который не равен нулю, так как в противном случае вектор g_2 принадлежал бы E_1, что противоречит линейной независимости векторов g_1, g_2. Отыскав h_2, положим

$$e_2 = \frac{h_2}{\| h_2 \|}.$$

Векторы e_1, e_2 порождают то же подпространство двух измерений E_2, что и векторы g_1, g_2.

Переходим к построению вектора e_3. Сначала из вектора g_3 вычитаем его проекцию на E_2; получаем вектор

$$h_3 = g_3 - (g_3, e_1)\, e_1 - (g_3, e_2)\, e_2,$$

отличный от нуля и ортогональный подпространству E_2, т. е. ортогональный векторам e_1, e_2. Затем полагаем

$$e_3 = \frac{h_3}{\| h_3 \|}.$$

Подобным образом поступаем и далее. Если уже построены векторы

$$e_1, e_2, \ldots, e_n,$$

то полагаем

$$h_{n+1} = g_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} (g_{n+1}, e_k)\, e_k$$

и затем

$$e_{n+1} = \frac{h_{n+1}}{\| h_{n+1} \|}.$$

В конкретных случаях часто не стремятся к тому, чтобы попарно ортогональные элементы последовательности (1), каждая часть которой $\{e_k\}_1^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ эквивалентна соответствующей части $\{g_k\}_1^n$ последовательности (2), были нормированы. Переход к такой последовательности (1) также называют ортогонализацией (см. ниже n° 12).

Из рассмотрений n°7 следует, что матрица Грама $(\alpha_{jk})_{j,k=1}^{n}$ системы линейно независимых векторов $g_1, g_2, \ldots, g_n$ обладает следующими свойствами:

1°. Она эрмитова, т. е. $\alpha_{jk} = \overline{\alpha}_{kj}$.

2°. Ее главные угловые миноры положительны.

Покажем, что *любая матрица* $(\alpha_{jk})_{j,k=1}^{n}$, *обладающая этими свойствами, является матрицей Грама некоторой системы векторов* $g_1, g_2, \ldots, g_n$.

Для доказательства воспользуемся следующей известной теоремой линейной алгебры: если все главные угловые миноры эрмитовой матрицы $(\alpha_{jk})_{j,k=1}^{n}$ положительны, то с помощью неособенного преобразования

$$\eta_s = \sum_{r=1}^{n} \tau_{rs}\xi_r \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{3}$$

эрмитову форму

$$\sum_{j,k=1}^{n} \alpha_{jk}\overline{\xi}_j\xi_k$$

можно привести к виду

$$\sum_{j,k=1}^{n} \alpha_{jk}\overline{\xi}_j\xi_k = |\eta_1|^2 + |\eta_2|^2 + \ldots + |\eta_n|^2. \tag{4}$$

Возьмем теперь произвольную ортонормированную систему векторов $\{e_s\}_1^n$ и покажем, что матрица Грама системы векторов

$$g_r = \sum_{s=1}^{n} \tau_{rs}e_s \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

совпадает с данной матрицей $(\alpha_{jk})_{j,k=1}^{n}$.

Действительно,

$$(g_k, g_j) = \left(\sum_{r=1}^{n} \tau_{kr}e_r, \sum_{s=1}^{n} \tau_{js}e_s\right) = \sum_{s=1}^{n} \tau_{ks}\overline{\tau}_{js}.$$

С другой стороны, из (3) и (4) следует

$$\sum_{j,k=1}^{n} \alpha_{jk}\overline{\xi}_j\xi_k = \sum_{s=1}^{n} \left|\sum_{r=1}^{n} \tau_{rs}\xi_r\right|^2 = \sum_{j,k=1}^{n} \overline{\xi}_j\xi_k \sum_{s=1}^{n} \tau_{ks}\overline{\tau}_{js},$$

откуда

$$\alpha_{jk} = \sum_{s=1}^{n} \tau_{ks}\overline{\tau}_{js} = (g_k, g_j) \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, n),$$

что и требовалось доказать.

9. Неравенство Бесселя и уравнение замкнутости. Пусть в H дана ортонормированная последовательность векторов

$$e_1,\ e_2,\ e_3,\ \ldots,\ e_n,\ \ldots \tag{1}$$

Всякий вектор $h \in$ H можно при любом натуральном n представить в виде

$$h = \sum_{k=1}^{n} (h,\ e_k)\, e_k + f_n,$$

где вектор f_n ортогонален векторам $e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n$. При этом вектор

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (h,\ e_k)\, e_k \tag{2}$$

среди всех векторов вида

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n \tag{3}$$

наименее уклоняется от вектора h, и величина наименьшего уклонения равна

$$\delta_n = \min_{\lambda_k} \|h - \lambda_1 e_1 - \lambda_2 e_2 - \ldots - \lambda_n e_n\| =$$

$$= \|f_n\| = \sqrt{\|h\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |(h,\ e_k)|^2}; \tag{4}$$

δ_n есть расстояние точки h от линейной оболочки G_n первых n векторов последовательности (1).

Если бы вместо линейной комбинации n-го порядка (2) мы пожелали найти наименее уклоняющуюся от h линейную комбинацию $(n+1)$-го порядка

$$\mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \ldots + \mu_n e_n + \mu_{n+1} e_{n+1}, \tag{3'}$$

то мы должны были бы взять вектор

$$s_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} (h,\ e_k)\, e_k,$$

т. е., не меняя коэффициентов линейной комбинации (2), прибавить еще один член

$$(h,\ e_{n+1})\, e_{n+1}.$$

Эти рассмотрения показывают, что, имея в H бесконечную ортонормированную последовательность (1), целесообразно относить каждому вектору $h \in$ H бесконечный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (h,\ e_k)\, e_k, \tag{5}$$

коэффициенты которого (h, e_k) можно назвать *коэффициентами Фурье* вектора h относительно ортонормированной последовательности (1). При этом из (4) следует неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(h, e_k)|^2 \leqslant \|h\|^2. \tag{6}$$

Это неравенство назовем *неравенством Бесселя*, так как оно аналогично известному под этим именем неравенству из теории тригонометрических рядов Фурье.

Если мы обозначим через G подпространство, определяемое векторами (1), т. е. замкнутую линейную оболочку этих векторов, то величина

$$\sqrt{\|h\|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} |(h, e_k)|^2}$$

представит расстояние точки h от G и для принадлежности вектора h многообразию G необходимо и достаточно, чтобы в формуле (6) имел место знак равенства.

Условимся называть систему векторов *замкнутой* в H, если ее линейная оболочка плотна в H.

Из наших рассмотрений вытекает следующий результат: *для замкнутости в* H *ортонормированной системы* (1) *необходимо и достаточно, чтобы для любого вектора* $h \in$ H *имело место равенство*

$$\|h\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(h, e_k)|^2. \tag{7}$$

Это равенство часто называют *равенством Парсеваля*, так как под этим именем известно аналогичное равенство в теории тригонометрических рядов Фурье. Мы будем называть равенство (7) *уравнением замкнутости*, следуя здесь В. А. Стеклову, который пользовался этим термином для конкретных систем.

Докажем, что если уравнение замкнутости имеет место для любого вектора $h \in$ H, то для любой пары векторов $g, h \in$ H имеет место обобщенное уравнение замкнутости

$$(g, h) = \sum_{k=1}^{\infty} (g, e_k)(e_k, h). \tag{8}$$

Действительно, мы имеем уравнение замкнутости для вектора $g + \lambda h$ при любом λ:

$$\|g + \lambda h\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(g + \lambda h, e_k)|^2.$$

Отсюда

$$(g, g)+\lambda(h, g)+\bar{\lambda}(g, h)+|\lambda|^2(h, h)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\{|(g, e_k)|^2+\lambda(h, e_k)(e_k, g)+\bar{\lambda}(g, e_k)(e_k, h)+|\lambda|^2|(h, e_k)|^2\}$$

и, следовательно,

$$\lambda(h, g)+\bar{\lambda}(g, h)=\lambda\sum_{k=1}^{\infty}(h, e_k)(e_k, g)+\bar{\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}(g, e_k)(e_k, h).$$

В силу произвольности λ отсюда получается равенство (8).

Обобщим теперь, следуя С. С. Левину *), неравенство Бесселя, а также уравнение замкнутости на тот случай, когда вместо ортонормированной последовательности (1), в H взята произвольная последовательность векторов

$$g_1, g_2, g_3, \ldots, g_n, \ldots, \tag{9}$$

между которыми нет линейных зависимостей. С этой целью введем при $n=1, 2, 3, \ldots$ матрицы Грама

$$\gamma_n=(\alpha_{jk})_{j, k=1}^{n}, \qquad \alpha_{jk}=(g_k, g_j),$$

а также обратные матрицы

$$\gamma_n^{-1}=(\beta_{jk}^{(n)})_{j, k=1}^{n},$$

существование которых следует из того, что все определители Грама $\Gamma(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ не равны нулю (см. n° 7). Из определения чисел $\beta_{jk}^{(n)}$ вытекает, что

$$\sum_{k=1}^{n}\beta_{qk}^{(n)}(g_p, g_k)=\delta_{qp} \qquad (p, q=1, 2, \ldots, n). \tag{10}$$

При принятых обозначениях обобщение неравенства Бесселя гласит: *для любого вектора* $h \in$ H *и любого натурального* n

$$(0\leqslant)\sum_{j, k=1}^{n}\beta_{jk}^{(n)}(g_j, h)(h, g_k)\leqslant\|h\|^2. \tag{11}$$

Доказательство. Обозначим через g проекцию вектора h на линейную оболочку векторов $g_1, g_2, \ldots, g_n$ и пусть

$$g=\lambda_1 g_1+\lambda_2 g_2+\ldots+\lambda_n g_n.$$

Из уравнений (3) n° 7 и соотношений (10) следует, что

$$\lambda_j=\sum_{k=1}^{n}\beta_{jk}^{(n)}(h, g_k) \qquad (j=1, 2, \ldots, n).$$

*) S. Lewin. Über einige mit der Konvergenz im Mittel verbundenen Eigenschaften von Funktionenfolgen, Math. Z. 32, 4, 1930.

Поэтому

$$0 \leqslant \| h - g \|^2 = (h - g, h) = \| h \|^2 - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (g_j, h) =$$

$$= \| h \|^2 - \sum_{j,k=1}^{n} \beta_{jk}^{(n)} (g_j, h)(h, g_k) \qquad (12)$$

и утверждение доказано.

Величина

$$\sqrt{\| h \|^2 - \sum_{j,k=1}^{n} \beta_{jk}^{(n)} (g_j, h)(h, g_k)}$$

представляет расстояние точки h от линейной оболочки векторов $g_1, g_2, \ldots, g_n$. Поэтому эта величина не возрастает при возрастании n и, значит, левая часть (11) при возрастании n не убывает. А так как левая часть (11) ограничена, то она имеет предел. Следовательно, *для любого вектора h существует*

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{j,k=1}^{n} \beta_{jk}^{(n)} (g_j, h)(h, g_k).$$

Из неравенства (12) мы заключаем также, что *для замкнутости в* H *последовательности векторов* (9) *необходимо и достаточно, чтобы для любого вектора $h \in$ H имело место равенство*

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{j,k=1}^{n} \beta_{jk}^{(n)} (g_j, h)(h, g_k) = \| h \|^2.$$

Это равенство является обобщением уравнения замкнутости (7) и переходит в него, если последовательность (9) ортонормирована.

В связи с неравенством Бесселя (6) возникает следующий вопрос: пусть в H даны ортонормированная последовательность векторов (1) и последовательность чисел $\{\xi_k\}_1^\infty$, причем

$$\sum_{k=1}^{\infty} | \xi_k |^2 < \infty; \qquad (13)$$

существует ли такой вектор $h \in$ H, что

$$(h, e_p) = \xi_p \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots)?$$

Ответ на этот вопрос положителен. Действительно, рассмотрим последовательность векторов

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Так как при $n > m$

$$\| s_n - s_m \|^2 = \| \sum_{k=m+1}^{n} \xi_k e_k \|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} |\xi_k|^2,$$

то в силу (13) последовательность $\{s_n\}_1^\infty$ фундаментальна. На основании полноты пространства H она имеет предел *) $h \in$ H. Но в таком случае при любых натуральных p и $q > p$

$$(h, e_p) = (h - s_q, e_p) + (s_q, e_p) = (h - s_q, e_p) + \xi_p.$$

А так как

$$|(h - s_q, e_p)| \leqslant \| h - s_q \|,$$

то

$$\lim_{q\to\infty} (h - s_q, e_p) = 0$$

и, следовательно,

$$(h, e_p) = \xi_p \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots).$$

Рассмотрим тот же вопрос, но применительно к обобщенному неравенству Бесселя (11), связанному с последовательностью векторов (9).

Пусть дана последовательность чисел $\{\xi_k\}_1^\infty$, для которой

$$\sum_{j,k=1}^{n} \beta_{jk}^{(n)} \bar{\xi}_j \xi_k \leqslant \mathscr{M} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{14}$$

где $\mathscr{M} < \infty$ от n не зависит. Докажем, что в таком случае существует вектор $h \in$ H такой, что

$$(h, g_p) = \xi_p \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots). \tag{15}$$

Если бы требовалось удовлетворить только конечному числу q равенств (15):

$$(h, g_p) = \xi_p \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots, q),$$

---

*) Сходимость в H последовательности $\{s_n\}_1^\infty$ позволяет говорить о сходимости в H ряда

$$\sum_1^\infty \xi_k e_k.$$

Не мешает заметить, что сходимость в H любого ряда

$$f_1 + f_2 + f_3 + \cdots,$$

где

$$(f_i, f_k) = 0 \qquad (i \neq k),$$

эквивалентна сходимости числового ряда

$$\| f_1 \|^2 + \| f_2 \|^2 + \| f_3 \|^2 + \ldots$$

то искомый вектор можно было бы построить непосредственно, а именно, по формуле

$$f_q = \sum_{j=1}^{q} \left(\sum_{k=1}^{q} \beta_{jk}^{(q)} \xi_k \right) g_j.$$

Действительно, при $p \leqslant q$ мы имели бы с учетом (10):

$$(f_q, g_p) = \sum_{j=1}^{q} \left(\sum_{k=1}^{q} \beta_{jk}^{(q)} \xi_k \right) (g_j, g_p) = \sum_{j=1}^{q} \sum_{k=1}^{q} \alpha_{pj} \beta_{jk}^{(q)} \xi_k = \xi_p.$$

Заметим также, что при $p \leqslant q$

$$(f_p, f_q) = \left(\sum_{j,k=1}^{p} \beta_{jk}^{(p)} \xi_k g_j, f_q \right) = \sum_{j,k=1}^{p} \beta_{jk}^{(p)} \bar{\xi}_j \xi_k = (f_p, f_p).$$

Поэтому

$$\| f_q - f_p \|^2 = (f_q, f_q) - (f_q, f_p) - (f_p, f_q) + (f_p, f_p) =$$
$$= \sum_{j,k=1}^{q} \beta_{jk}^{(q)} \bar{\xi}_j \xi_k - \sum_{j,k=1}^{p} \beta_{jk}^{(p)} \bar{\xi}_j \xi_k. \qquad (16)$$

Отсюда мы видим, что левая часть неравенства (14) при возрастании n не убывает, а потому стремится к пределу. Но в таком случае из (16) следует, что последовательность $\{f_n\}_1^\infty$ фундаментальна и, значит, имеет предел $h \in \mathrm{H}$. Для этого предела, как и выше, найдем, что

$$(h, g_p) = \lim_{n \to \infty} (f_n, g_p) = \xi_p \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots).$$

10. Полные ортогональные системы векторов в H. Между векторами ортонормированной системы не может быть линейных зависимостей. Поэтому в евклидовом пространстве n измерений всякая ортонормированная система векторов содержит не более n векторов.

Будем называть ортонормированную систему M *полной* в H, если система M не является истинной частью некоторой ортонормированной системы в H. Вообще систему векторов N (не обязательно ортонормированную) назовем полной, если в H нет отличного от нуля вектора, ортогонального каждому вектору системы N.

В евклидовом пространстве n измерений любая ортонормированная система из n векторов является полной.

В гильбертовом же пространстве полные ортонормированные системы содержат бесконечное число элементов и возникает вопрос о мощности этих систем.

Этот вопрос решается просто для сепарабельных пространств. С них мы и начнем.

Т е о р е м а 1. *Если пространство* H *сепарабельно, то всякая ортонормированная система векторов в нем является конечным или счетным множеством.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$f_1, \quad f_2, \quad f_3, \ \ldots \tag{1}$$

— счетное множество векторов, плотное в H, и пусть M — заданное множество попарно ортогональных и нормированных векторов. Докажем, что M можно перенумеровать. Пусть $e \in M$. Найдем в (1) какой-нибудь вектор f_k, для которого

$$\| e - f_k \| < \frac{1}{2}\sqrt{2}. \tag{2}$$

Пусть аналогичным вектором для $e' \in M$ будет $f_{k'}$. Докажем, что $k \neq k'$, если $e \neq e'$. Действительно,

$$\| e - e' \|^2 = \| e \|^2 + \| e' \|^2 = 2$$

и, значит,

$$\sqrt{2} = \| e - e' \| \leqslant \| e - f_k \| + \| e' - f_k \| < \frac{1}{2}\sqrt{2} + \| e' - f_k \|,$$

так что

$$\| e' - f_k \| > \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

и, следовательно, $f_{k'} \neq f_k$, т. е. $k' \neq k$.

Таким образом, с помощью соотношения (2) мы можем каждому вектору из M отнести натуральное число, и различным векторам из M относятся различные натуральные числа. Тем самым счетность множества доказана.

Наличие в некотором пространстве Гильберта несчетного множества векторов, попарно ортогональных и нормированных, является признаком того, что пространство не сепарабельно. Один важный пример этого рода ниже будет нами рассмотрен (см. п° 15).

Т е о р е м а 2. *Полнота в* H *бесконечной последовательности векторов имеет место в том и только в том случае, когда эта последовательность векторов замкнута в* H.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Не будет нарушением общности, если мы примем, что данная последовательность векторов ортонормирована. Обозначим ее

$$e_1, \quad e_2, \quad e_3, \ \ldots \tag{3}$$

А. Пусть система (3) замкнута в H. Это значит, что для всякого вектора из H имеет место уравнение замкнутости. Допуская, что система (3) не полна, обозначим через h какой-нибудь отличный от нуля вектор, ортогональный всем векторам (3). Таким образом, $(h, e_k) = 0$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, и уравнение замкнутости для h

приводит к противоречию

$$0 \neq \| h \|^2 = 0.$$

B. Предположим теперь, что система (3) полна. Возьмем произвольный вектор $h \in H$ и рассмотрим последовательность векторов

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (h, e_k) e_k \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Она (см. n° 9) фундаментальна, а значит, сходится к некоторому вектору. Пусть g — ее предел. Тогда

$$(g, e_k) = \lim_{n \to \infty} (s_n, e_k) = (h, e_k) \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{4}$$

Кроме того, g принадлежит замыканию линейной оболочки последовательности (3) и, следовательно, для g имеет место уравнение замкнутости

$$\| g \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(g, e_k)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(h, e_k)|^2. \tag{5}$$

Вектор $g - h$ на основании (4) ортогонален всем векторам последовательности (3). В силу предположенной полноты этой последовательности вектор $g - h$ поэтому равен нулю, т. е. $g = h$ и (5) принимает вид

$$\| h \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(h, e_k)|^2.$$

Мы доказали, что для произвольного вектора $h \in H$ имеет место уравнение замкнутости. Тем самым доказано, что (3) есть замкнутая в H последовательность.

Теорема 3. *Пространство* H *имеет полную ортонормированную последовательность в том и только том случае, когда оно сепарабельно.*

Доказательство. А. Пусть пространство H сепарабельно. Обозначим через N счетное множество векторов, плотное в H. Выбрасывая из последовательности N каждый вектор, который является линейной комбинацией предыдущих, и подвергая полученную последовательность ортогонализации, мы получим ортонормированную последовательность M. Эта последовательность полна. В самом деле, пусть вектор $h \in H$ ортогонален каждому элементу последовательности M. Тогда h ортогонален каждому вектору из N. При любом $\varepsilon > 0$ можно найти вектор $f \in N$, для которого

$$\| h - f \| < \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\|h\|^2=(h, h)=(h-f, h)\leqslant\|h-f\|\cdot\|h\|<\varepsilon\|h\|$$

и, значит,

$$\|h\|<\varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon>0$ это означает, что $h=0$, чем и доказана полнота в H ортонормированной последовательности M.

C. Допустим теперь, что в H есть полная ортонормированная последовательность (3). Обозначим через N совокупность всех линейных комбинаций

$$\gamma_1^{(n)}e_1+\gamma_2^{(n)}e_2+\ldots+\gamma_n^{(n)}e_n \qquad (n=1, 2, 3, \ldots),$$

где каждый коэффициент $\gamma_k^{(n)}$ имеет вид $\gamma_k^{(n)}=\alpha_k^{(n)}+i\beta_k^{(n)}$, причем $\alpha_k^{(n)}$, $\beta_k^{(n)}$ — рациональные числа. Множество N счетно. Вместе с тем для любого $h\in$ H и любого $\varepsilon>0$ можно сначала найти такое n, чтобы

$$\left\|h-\sum_{k=1}^{n}(h, e_k)e_k\right\|<\frac{\varepsilon}{2},$$

а затем можно числа (h, e_k) $(k=1, 2, \ldots, n)$ заменить столь близкими к ним числами $\gamma_k^{(n)}$, чтобы

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}\{(h, e_k)-\gamma_k^{(n)}\}e_k\right\|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом, в N будет найден вектор

$$f=\sum_{k=1}^{n}\gamma_k^{(n)}e_k,$$

для которого

$$\|h-f\|<\varepsilon,$$

чем и доказана сепарабельность пространства H.

Вопрос о мощности полных ортонормированных систем в сепарабельном пространстве нами решен полностью: всякая полная ортонормированная система в сепарабельном пространстве есть обязательно бесконечная последовательность.

Теперь переходим к произвольным гильбертовым пространствам.

Прежде всего заметим, что, *какова бы ни была мощность ортонормированной системы* M, *всякий вектор* f *имеет не более счетного множества отличных от нуля проекций на элементы системы* M.

Действительно, это следует из того, что для любого набора e', e'', e''', . . . элементов из M имеет место неравенство

$$|(f, e')|^2+|(f, e'')|^2+|(f, e''')|^2+\ldots\leqslant\|f\|^2,$$

которое показывает, что множество всех отличных от нуля чисел (f, e), $e \in$ M, можно перенумеровать.

Далее имеет место

Теорема 4. *Всякие две полные ортонормированные системы в пространстве Гильберта имеют одну и ту же мощность.*

Доказательство нужно провести только для того случая, когда пространство H несепарабельно.

Пусть две ортонормированные системы M и N соответственно мощности $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{n}$ полны в H.

Для каждого элемента $f \in$ N найдется элемент $e \in$ M такой, что $(e, f) \neq 0$, так как в противном случае систему M можно было бы пополнить элементом f. Найдя для элемента f указанный элемент e, отберем из N все элементы, не ортогональные e. Их будет не более счетного множества. Обозначим их

$$\text{(S)} \qquad f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_n \qquad (1\leqslant n\leqslant\infty).$$

Так как множество N несчетно, то в нем найдется элемент f', отличный от элементов совокупности S и, следовательно, ортогональный e. Возьмем в M элемент e', для которого $(e', f')\neq 0$, и затем отберем из N все элементы, не ортогональные e' и не входящие в S. Перенумеруем их

$$\text{(S}'\text{)} \qquad f_1',\ f_2',\ \ldots,\ f_{n'}' \qquad (1\leqslant n'\leqslant\infty).$$

Неограниченное (трансфинитное) продолжение этого процесса приведет нас к множеству совокупностей $S_\alpha \subset$ N, обладающих следующими свойствами:

1) каждый элемент из N входит в одну и только одну из совокупностей S_α;

2) каждой совокупности S_α отвечает некоторый элемент $e_\alpha \in$ M, причем различным совокупностям S_α, S_β отвечают различные элементы e_α, e_β;

3) каждая совокупность S_α содержит не менее одного элемента и не более счетного множества элементов.

Пусть $\mathfrak{p}$ — мощность множества совокупностей S_α. Если каждая совокупность S_α бесконечна, то по известной теореме теории множеств

$$\mathfrak{n}=\aleph_0\mathfrak{p}=\mathfrak{p}.$$

Так как равенство

$$\mathfrak{n}=\mathfrak{p}$$

выполнено очевидным образом и в другом крайнем случае, когда каждая совокупность S_α содержит всего один элемент, то и в общем случае

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{p}.$$

С другой стороны, ясно, что

$$\mathfrak{p} \leqslant \mathfrak{m}.$$

Поэтому

$$\mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{m}.$$

Меняя ролями системы M и N, получим, что

$$\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}.$$

Следовательно,

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{n},$$

и теорема доказана.

Опираясь на эту теорему, примем следующее

Определение. *Размерностью пространства Гильберта* называют мощность полной ортонормированной системы в нем.

Размерность подпространства $G \subset H$ можно уже не определять. Что же касается произвольного линейного многообразия $L \subset H$, то под его размерностью понимают размерность подпространства $\overline{L}$.

Если два пространства Гильберта, H и H′, имеют одну и ту же размерность, то они *изоморфны* в том смысле, что между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие, удовлетворяющее следующему условию: если элементам $f, g \in H$ соответствуют элементы $f', g' \in H'$, то 1) элементу $\alpha f + \beta g$ соответствует элемент $\alpha f' + \beta g'$ и 2) скалярные произведения $(f, g)_H$ и $(f', g')_{H'}$ равны между собой.

Действительно, поскольку пространства H и H′ имеют одну и ту же размерность, то они обладают полными ортонормированными системами одинаковой мощности. Установим как-нибудь взаимно однозначное соответствие между элементами этих двух ортонормированных систем и распространим это соответствие на линейные оболочки рассматриваемых ортогональных систем так, чтобы выполнялось условие 1). При этом условие 2) выполнится автоматически, что позволит путем предельного перехода получить требуемое соответствие для всех элементов пространств H, H′.

Из доказанного, в частности, следует, что всякое сепарабельное пространство изоморфно пространству l^2.

То, что два гильбертовых пространства неодинаковой размерности не изоморфны, очевидно.

Поэтому два абстрактных гильбертовых пространства (подобно двум абстрактным евклидовым пространствам) отличаются друг от друга только своей размерностью.

11. Пространство L^2. Мы получим весьма важную реализацию сепарабельного пространства Гильберта, рассматривая функции, областью определения которых является любое измеримое множество положительной меры (конечной или бесконечной) на числовой оси, плоскости или в евклидовом пространстве любого числа измерений. Так как все дальнейшие рассмотрения не зависят от того, какая из перечисленных областей определения функций положена в основу, то примем, что этой областью является конечный или бесконечный интервал (a, b) числовой оси. Обозначим через $L^2(a, b)$ (или просто через L^2) совокупность всех измеримых в (a, b) функций, квадрат модуля которых интегрируем в смысле Лебега; при этом мы не считаем различными функции, которые отличаются лишь на множестве меры нуль.

Так как

$$|\alpha+\beta|^2 \leqslant 2|\alpha|^2+2|\beta|^2,$$

то из $f(t), g(t) \in L^2$ вытекает, что $f(t)+g(t) \in L^2$. Далее, каково бы ни было число λ, из $f(t) \in L^2$ вытекает, что $\lambda f(t) \in L^2$. Таким образом, L^2 есть линейная система, нулевым элементом которой является функция, равная нулю почти всюду в (a, b). Эта линейная система становится метризованной, если скалярное произведение определить формулой

$$(f, g)=\int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt.$$

Существование интеграла, стоящего в правой части, является следствием неравенства

$$|\alpha\beta| \leqslant \frac{1}{2}|\alpha|^2+\frac{1}{2}|\beta|^2.$$

Неравенство

$$|(f, g)| \leqslant \|f\|\cdot\|g\|$$

в настоящем случае имеет вид

$$\left|\int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2\,dt}\sqrt{\int_a^b |g(t)|^2\,dt};$$

это неравенство было получено Буняковским (для интегралов в смысле Римана).

Теперь мы докажем полноту L^2, откуда будет вытекать, что L^2 является пространством Гильберта.

Пусть последовательность функций $f_n(t) \in L^2$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) фундаментальна, т. е. пусть

$$\lim_{m,n\to\infty} \int_a^b |f_n(t) - f_m(t)|^2 \, dt = 0.$$

В силу этого условия существует бесконечная последовательность натуральных чисел

$$k_1 < k_2 < \ldots < k_r < \ldots,$$

для которых

$$\int_a^b |f_{k_{r+1}}(t) - f_{k_r}(t)|^2 \, dt < \frac{1}{8^r} \qquad (r = 1, 2, 3, \ldots).$$

Из этого неравенства следует, что множество тех точек интервала (a, b), в которых

$$|f_{k_{r+1}}(t) - f_{k_r}(t)| \geqslant \frac{1}{2^r},$$

имеет меру, меньшую, чем $\frac{1}{2^r}$. Значит, неравенства

$$|f_{k_{s+1}}(t) - f_{k_s}(t)| < \frac{1}{2^s},$$

$$|f_{k_{s+2}}(t) - f_{k_{s+1}}(t)| < \frac{1}{2^{s+1}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

выполняются одновременно на точечном множестве I_s, дополнение которого до интервала $I = (a, b)$ имеет меру

$$\text{més}\,(I \setminus I_s) < \sum_{n=s}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{s-1}}.$$

Так как $I_n \subset I_{n+1} \subset \ldots$, то существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = I^*$ и $\text{més}\,(I \setminus I^*) = 0$. Последовательность $\{f_{k_r}(t)\}_{r=1}^{\infty}$ сходится равномерно в I_s при любом s. Действительно, в I_s

$$|f_{k_n}(t) - f_{k_m}(t)| \leqslant \sum_{r=m}^{n-1} |f_{k_{r+1}}(t) - f_{k_r}(t)| < \sum_{r=m}^{n-1} \frac{1}{2^r} < \frac{1}{2^{m-1}}$$

$$(n > m > s).$$

Следовательно, $\{f_{k_r}(t)\}_{r=1}^{\infty}$ сходится в I* (т. е. почти всюду в I). Положим

$$f(t)=\begin{cases}\lim\limits_{r\to\infty} f_{k_r}(t) & (t\in \mathrm{I}^*),\\ 0 & (t\in \mathrm{I}-\mathrm{I}^*).\end{cases}$$

Теперь примем во внимание неравенства

$$\int\limits_{\mathrm{I}_s(\alpha)} |f_m(t)-f_{k_r}(t)|^2\,dt \leqslant \|f_m-f_{k_r}\|^2<\varepsilon,$$

где $m, k_r>\mathcal{N}(\varepsilon)$, а $\mathrm{I}_s(\alpha)$ есть I_s, если интервал (a, b) конечен, и есть пересечение $\mathrm{I}_s \cap (-\alpha, \alpha)$ в противном случае. В $\mathrm{I}_s(\alpha)$ сходимость последовательности $\{f_{k_r}(t)\}_{r=1}^{\infty}$ равномерна. Поэтому в написанном интеграле законен предельный переход, и мы получаем:

$$\int\limits_{\mathrm{I}_s(\alpha)} |f_m(t)-f(t)|^2\,dt \leqslant \varepsilon \qquad [m>\mathcal{N}(\varepsilon)].$$

Увеличивая α, получим

$$\int\limits_{\mathrm{I}_s} |f_m(t)-f(t)|^2\,dt \leqslant \varepsilon,$$

где s — произвольно. Отсюда

$$\int\limits_a^b |f_m(t)-f(t)|^2\,dt \leqslant \varepsilon.$$

Это значит, что $f_m-f \in \mathrm{L}^2$, откуда следует, что $f\in \mathrm{L}^2$, и, в силу произвольности $\varepsilon>0$, доказано также, что

$$\lim_{m\to\infty}\int\limits_a^b |f_m(t)-f(t)|^2\,dt=0.$$

Подчеркнем, что в процессе доказательства нами получен следующий факт: *если последовательность* $f_n(t)\in \mathrm{L}^2$ $(n=1,2,3,\ldots)$ *сходится к* $f(t)$ *в метрике* L^2, *т. е.* $\|f_n-f\|\to 0$ $(n\to\infty)$, *то эта последовательность содержит подпоследовательность* $\{f_{k_r}(t)\}_{r=1}^{\infty}$, *которая сходится к* $f(t)$ *почти всюду, и если из интервала* (a, b) *удалить надлежащее множество сколь угодно малой положительной меры, то в оставшемся множестве подпоследовательность* $\{f_{k_r}(t)\}_{r=1}^{\infty}$ *сходится к* $f(t)$ *равномерно.*

Заканчивая настоящий пункт, заметим, что пространство $\mathrm{L}^2(a, b)$ можно рассматривать как подпространство по отношению к $L^2(a_1, b_1)$, если $a_1 \leqslant a < b \leqslant b_1$, и, в частности, как подпространство по отношению к $L^2(-\infty, \infty)$. Для этого нужно каждую функцию из $L^2(a, b)$ продолжить за пределы интервала (a, b), полагая ее равной нулю вне (a, b).

Отметим также, что сходимость в метрике пространства L^2 называют *сходимостью в среднем* и пишут

$$f(t) = \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}\, f_n(t),$$

если

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f(t) - f_n(t)|^2\, dt = 0$$

(l. i. m. означает limes in medio, т. е. *предел в среднем*).

12. Полные ортонормированные системы в L^2. В настоящем пункте мы покажем, что в пространстве L^2 относительно конечного или бесконечного интервала имеются полные ортонормированные последовательности. Отсюда в силу теоремы 3 n° 10 будет вытекать, что пространство L^2 сепарабельно. Это последнее обстоятельство можно было бы доказать и непосредственно. Действительно, опираясь на определение интеграла Лебега, нетрудно доказать, что линейная оболочка функций, равных нулю вне конечного интервала (своего для каждой функции) и равных единице в этом интервале, плотна в L^2. Отсюда сепарабельность L^2 получается немедленно.

А. Начнем с пространства $L^2(0, 2\pi)$. В этом пространстве функции

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{ikt} \qquad (\pm k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

образуют ортонормированную систему. Это — *тригонометрическая система*. Желая доказать ее полноту, допустим, что существует функция $f(t) \in L^2(0, 2\pi)$, для которой

$$\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-ikt}\, dt = 0 \qquad (\pm k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{1}$$

Из соотношений (1) при помощи интегрирования по частям следует, что функция

$$F(t) = \int_0^t f(t)\, dt$$

удовлетворяет равенствам

$$\int_0^{2\pi} \{F(t)-C\} e^{-ikt}\,dt = 0 \qquad (\pm k = 1, 2, 3, \ldots), \tag{2}$$

какова бы ни была константа C. Эту константу подберем так, чтобы равенство (2) имело место и при $k=0$. Мы получили непрерывную функцию

$$\Phi(t) = F(t) - C$$

и, следовательно, по известной теореме Вейерштрасса, при любом $\varepsilon > 0$ можно найти такую тригонометрическую сумму

$$\sigma(t) = \sum_{k=-n}^{n} A_k e^{ikt},$$

что

$$|\Phi(t) - \sigma(t)| < \varepsilon.$$

Поэтому, используя соотношения (2), будем иметь:

$$\int_0^{2\pi} |\Phi(t)|^2\,dt = \int_0^{2\pi} \overline{\Phi(t)}\{\Phi(t) - \sigma(t)\}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \int_0^{2\pi} |\Phi(t)|\,dt \leqslant \varepsilon\sqrt{2\pi}\sqrt{\int_0^{2\pi} |\Phi(t)|^2\,dt},$$

откуда

$$\int_0^{2\pi} |\Phi(t)|^2\,dt \leqslant 2\pi\varepsilon^2.$$

В силу произвольности числа $\varepsilon > 0$ это значит, что $\Phi(t) = 0$, т. е. $F(t) = C$, и, следовательно $f(t) = 0$ почти всюду. Таким образом, полнота тригонометрической системы доказана.

В. Возьмем пространство $L^2(a, b)$, где (a, b) — произвольный конечный интервал. Последовательность функций

$$1, \quad t, \quad t^2, \ \ldots \tag{3}$$

образует полную систему в этом пространстве.

Действительно, пусть функция $f(t) \in L^2(a, b)$ удовлетворяет соотношениям

$$\int_a^b f(t)\,t^k\,dt = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Из этих соотношений интегрированием по частям получаются равенства

$$\int_a^b F(t)\, t^k\, dt = 0 \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

где

$$F(t) = \int_a^t f(t)\, dt.$$

Применяя к непрерывной функции $F(t)$ теорему Вейерштрасса, мы, как и выше, найдем, что $F(t) = 0$, а значит, и $f(t) = 0$.

Из доказанной полноты последовательности функций (3) следует полнота в $L^2(a, b)$ любой последовательности $\{P_k(t)\}_0^\infty$, где $P_k(t)$ — многочлен точно k-й степени. В частности, будет полной последовательность многочленов, которые получаются из (3) с помощью ортогонализации. Эти ортогональные многочлены носят название *многочленов Лежандра* и могут быть представлены в виде

$$C_k \frac{d^k\{(t-a)(t-b)\}^k}{dt^k} \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

где C_k — некоторые положительные постоянные. Обычно эти многочлены рассматривают при $a = -1,\ b = 1$.

С. Рассмотрим пространство $L^2(-\infty, \infty)$. Путем ортогонализации системы

$$e^{-\frac{t^2}{2}},\ te^{-\frac{t^2}{2}},\ t^2e^{-\frac{t^2}{2}},\ \ldots$$

мы получим последовательность *функций Чебышева — Эрмита*

$$\varphi_k(t) = (-1)^k e^{\frac{t^2}{2}} \frac{d^k e^{-t^2}}{dt^k} = H_k(t)\, e^{-\frac{t^2}{2}} \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

где $H_k(t)$ — многочлен степени k, так называемый *многочлен Чебышева — Эрмита*. Функции Чебышева — Эрмита удовлетворяют соотношениям

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(t)\, \varphi_m(t)\, dt = \begin{cases} 0 & (k \neq m), \\ 2^m m!\, \sqrt{\pi} & (k = m) \end{cases}$$

и, следовательно, ортогональны, но не нормированы.

Докажем, что последовательность функций Чебышева — Эрмита полна.

Пусть для некоторой функции $f(t) \in L^2(-\infty, \infty)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi_k(t)\,dt = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

или, что то же самое,

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^k f(t)\, e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

Введем функцию

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-\frac{t^2}{2}} e^{itz}\,dt,$$

которая, очевидно, имеет смысл при любом конечном комплексном z. Эта функция $F(z)$ всюду в комплексной плоскости имеет конечную производную

$$F'(z) = \int_{-\infty}^{\infty} itf(t)\, e^{-\frac{t^2}{2}} e^{itz}\,dt.$$

Следовательно, $F(z)$ есть функция голоморфная всюду на конечном расстоянии.

А так как в силу (4)

$$F^{(k)}(0) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} (it)^k f(t)\, e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

то $F(z)$ есть тождественный нуль. Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-\frac{t^2}{2}} e^{itx}\,dt = 0 \qquad (-\infty < x < \infty).$$

Умножая это равенство на e^{-ixy}, где y вещественно, и интегрируя по x от $-\omega$ до ω, получим равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{\sin\omega(t-y)}{t-y}\,dt = 0,$$

справедливое для любых вещественных y и ω. Отсюда, как доказывается в курсах анализа, следует, что $f(t) = 0$ почти всюду.

D. В пространстве $L^2(0, \infty)$ мы имеем ортонормированную систему *функций Чебышева — Лагерра*

$$\psi_k(t) = \frac{1}{k!} e^{-\frac{t}{2}} L_k(t) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

где $L_k(t)$ — *многочлен Чебышева — Лагерра*, который определяется формулой

$$L_k(t) = e^t \frac{d^k}{dt^k}(t^k e^{-t}) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Полнота этой системы может быть доказана на основании полноты системы Чебышева — Эрмита. Предоставляем это читателю.

13. Биортогональные системы векторов в H. Пара последовательностей $\{f_k\}_1^\infty$, $\{g_k\}_1^\infty$ из H образует *биортогональную систему*, если

$$(f_j, g_k) = \delta_{jk} \qquad (j, k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Условимся для краткости называть каждую из последовательностей $\{f_k\}_1^\infty$, $\{g_k\}_1^\infty$ *биортогонально сопряженной* с другой из них.

Не следует думать, что для произвольно взятой последовательности векторов, между которыми нет линейных зависимостей, обязательно найдется биортогонально сопряженная последовательность. Например, в пространстве $L^2(0, 1)$ последовательность функций $\{t^k\}_0^\infty$ не имеет биортогонально сопряженной последовательности. В самом деле, если бы такая последовательность $\{g_k(t)\}_0^\infty$ существовала, то мы имели бы равенства

$$\int_0^1 g_m(t)\, t^m\, dt = 1, \tag{1}$$

$$\int_0^1 g_m(t)\, t^k\, dt = 0 \qquad (k \neq m). \tag{2}$$

Но из (2), в частности, следовало бы, что

$$\int_0^1 \{g_m(t)\, t^{m+1}\}\, t^j\, dt = 0 \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots),$$

а эти равенства на основании полноты в $L^2(0, 1)$ последовательности $\{t^j\}_0^\infty$ возможны лишь при

$$g_m(t)\, t^{m+1} = 0,$$

что несовместимо с (1).

Теорема. *Последовательность векторов $\{f_k\}_1^\infty$ имеет биортогонально сопряженную последовательность в том и только том* *случае, когда ни при каком натуральном j вектор f_j не принадлежит замкнутой линейной оболочке остальных векторов*

$$f_1, f_2, \ldots, f_{j-1}, f_{j+1}, \ldots \tag{3}$$

Доказательство. Обозначим замкнутую линейную оболочку векторов (3) через M_j, а замкнутую линейную оболочку всех векторов f_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$) через M.

Если при любом натуральном j

$$M_j \neq M,$$

то, беря из ортогонального дополнения $M \ominus M_j$ вектор g_j, нормированный условием

$$(f_j, g_j) = 1,$$

мы, очевидно, найдем, что

$$(f_j, g_k) = \delta_{jk},$$

и тем самым получим последовательность $\{g_k\}_1^\infty$, биортогонально сопряженную с $\{f_k\}_1^\infty$.

Обратно, если последовательность $\{g_k\}_1^\infty$, биортогонально сопряженная с $\{f_k\}_1^\infty$, существует, то при любом j вектор f_j не может принадлежать замкнутой линейной оболочке M_j векторов (3), так как в этом случае он был бы ортогонален вектору g_j, который ортогонален всем векторам (3).

Теорема доказана.

Не мешает заметить, что *для выполнения* условия доказанной теоремы, а именно *неравенств*

$$M_j \neq M \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots),$$

необходимо и достаточно, чтобы при каждом натуральном j была отлична от нуля величина

$$\delta_j^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma(f_j, f_{j+1}, \ldots, f_n)}{\Gamma(f_{j+1}, f_{j+2}, \ldots, f_n)} . \tag{4}$$

Доказательство. Согласно формуле (5) n° 7 величина

$$\frac{\Gamma(f_j, f_{j+1}, \ldots, f_n)}{\Gamma(f_{j+1}, f_{j+2}, \ldots, f_n)} = \delta_j^2(n)$$

представляет квадрат расстояния точки f_j от линейной оболочки элементов $f_{j+1}, f_{j+2}, \ldots, f_n$. Отсюда следует, что при каждом j величина $\delta_j(n)$ монотонно убывает при возрастании n, а потому предел (4) существует.

Если $f_j \overline{\in} M_j$, то тем более f_j не принадлежит замкнутой линейной оболочке векторов

$$f_{j+1},\ f_{j+2},\ \ldots,$$

и поэтому $\delta_j \neq 0$.

Пусть, обратно, $\delta_j \neq 0$ для любого j. При $j = 1$ это неравенство означает, что $f_1 \overline{\in} M_1$. При $j = 2$ оно означает, что f_2 не принадлежит замкнутой линейной оболочке векторов

$$f_3,\ f_4,\ \ldots,$$

а так как вектор f_2 не связан линейно с вектором f_1, то из $\delta_2 \neq 0$ следует, что $f_2 \overline{\in} M_2$. Продолжая это рассуждение, найдем, что $f_j \overline{\in} M_j$ при любом натуральном j.

Таким образом, утверждение доказано.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий доказанную теорему.

Каким условиям должна удовлетворять бесконечная последовательность натуральных чисел

$$r_1 < r_2 < \ldots < r_n < \ldots,$$

чтобы последовательность функций

$$t^{r_1},\ t^{r_2},\ \ldots,\ t^{r_n},\ \ldots \tag{5}$$

обладала в $L^2(0, 1)$ биортогонально сопряженной последовательностью?

В данном случае вычисление величины $\delta_j^2(n)$ затруднений не представляет и дает *)

$$\delta_j^2(n) = \frac{1}{2r_j + 1} \prod_{k=j+1}^{n} \left(\frac{r_j - r_k}{r_j + r_k + 1} \right)^2.$$

Для выполнения условий

$$\delta_j = \lim_{n \to \infty} \delta_j(n) \neq 0 \qquad (j = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{r_k} < \infty. \tag{6}$$

Так как согласно известной теореме Мюнца **) условие (6) необходимо и достаточно, чтобы последовательность (5) была неполной

*) См., например, Н. И. Ахиезер, Лекции по теории аппроксимации, «Наука», 1965, стр. 28—30.

**) Там же, стр. 53.

в $L^2(0, 1)$, то, таким образом, последовательность (5) имеет биортогонально сопряженную последовательность в $L^2(0, 1)$ в том и только том случае, когда эта последовательность неполна в $L^2(0, 1)$.

14. Пространство L^2_σ. Пусть дана неубывающая функция ограниченного изменения $\sigma(t)$ $(-\infty < t < \infty)$. Примем, что она нормирована при помощи соотношения

$$\sigma(t-0) = \sigma(t).$$

Такие функции $\sigma(t)$ часто называют *функциями распределения*.

С помощью этой функции можно построить меру, аналогичную мере Лебега и отличающуюся от нее тем, что в качестве длины интервала $[a, b]$ $(a \leqslant b)$ *) принимается не число $b-a$, а число $\sigma(b+0)-\sigma(a)$. Таким образом, теперь некоторые точки могут иметь отличную от нуля длину (*точки скачков* $\sigma(t)$) и некоторые интервалы — длину, равную нулю (*интервалы постоянства* $\sigma(t)$). Введенную длину называют *σ-длиной*; с ее помощью строят *σ-меру*, *σ-измеримые функции* и интеграл Лебега — Стилтьеса. После этого определяется линейная система всех σ-измеримых функций $f(t)$, для которых существует интеграл Лебега — Стилтьеса

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, d\sigma(t).$$

В метрике, порождаемой скалярным произведением

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)} \, d\sigma(t),$$

эта линейная система обладает полнотой и, следовательно, является гильбертовым пространством, которое называют L^2_σ. Эта полнота доказывается дословно так же, как и полнота L^2, доказанная в n° 11.

Особое значение имеют *характеристические функции*, т. е. функции, равные единице в некотором интервале конечной и отличной от нуля σ-длины и равные нулю вне такого интервала. При этом несобственные интервалы мы не исключаем. С помощью обычных в теории интеграла Лебега рассмотрений доказывается, что линейная оболочка совокупности всех характеристических функций плотна в L^2_σ. При этом можно ограничиться характеристическими функциями счетной системы интервалов, все левые концы которых, а также правые, образуют плотное множество на числовой

*) При $b = a$ мы получаем *несобственный* интервал — точку.

оси. Опираясь на это, легко доказать сепарабельность пространства L_σ^2.

Другой факт, тесно связанный с рассмотрением характеристических функций, состоит в следующем: если функция $F(t)$ σ-измерима и если при любом x из плотного на всей оси множества

$$\int_0^x F(t)\,d\sigma(t) = 0, \tag{1}$$

то $F(t)$ равняется нулю всюду, кроме, быть может, множества σ-меры нуль.

При $F(t) \in L_\sigma^2$ это утверждение следует из того, что левая часть (1) есть скалярное произведение функции $F(t)$ и характеристической функции интервала $(0, x)$ (или $(x, 0)$, если $x < 0$). Поэтому $F(t)$ ортогональна ко всем характеристическим функциям, линейная оболочка которых плотна в L_σ^2, и следовательно, $F(t)$ должна равняться 0 всюду, кроме, быть может, множества σ-меры 0.

Большой интерес представляет случай, когда функция распределения $\sigma(t)$ такова, что существуют все интегралы

$$s_k = \int_{-\infty}^{\infty} t^k\,d\sigma(t) \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Эти интегралы в силу механических соображений называют *моментами* *) функции распределения $\sigma(t)$. Если $\sigma(t)$ имеет лишь конечное число точек роста, то интегралы Стилтьеса переходят в конечные суммы. Мы предположим, что этот случай, не представляющий для нас интереса, исключен.

Ортогонализуя в L_σ^2 последовательность

$$1,\ t,\ t^2,\ \ldots,$$

получим последовательность многочленов $\{P_k(t)\}_0^\infty$ (где $P_k(t)$ — многочлен точно степени k), которые удовлетворяют соотношениям

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_k(t)\,P_m(t)\,d\sigma(t) = \delta_{km}.$$

Эти многочлены носят название *ортогональных* и *нормированных многочленов* относительно функции распределения $\sigma(t)$. Если функция $\sigma(t)$ абсолютно непрерывна и

$$\sigma'(t) = w(t),$$

*) Отметим, что задача об отыскании функции $\sigma(t)$ по ее моментам s_k $(k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ носит название *степенной проблемы моментов*.

то написанные соотношения принимают вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_k(t) P_m(t) w(t)\, dt = \delta_{km}.$$

В этом случае говорят, что многочлены $P_k(t)$ ортогональны и нормированы относительно *веса* $w(t)$.

Например, многочлены Чебышева — Эрмита ортогональны (но не нормированы) относительно веса e^{-t^2} $(-\infty < t < \infty)$.

Если интервал ортогональности конечен (т. е. $\sigma(t)$ — постоянная при $t < a$ и при $t > b$), то последовательность

$$1,\ t,\ t^2,\ \ldots \tag{2}$$

полна в L^2_σ, а значит, ортогональные многочлены

$$P_0(t),\ P_1(t),\ P_2(t),\ \ldots \tag{3}$$

образуют полную систему. Действительно, пусть существует функция $\varphi(t) \in L^2_\sigma$, для которой

$$\int_a^b \varphi(t)\, t^k\, d\sigma(t) = 0 \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Интегрируя по частям, найдем, что

$$\int_a^b \psi(x)\, x^j\, dx = 0 \qquad (j = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{4}$$

где

$$\psi(x) = \int_a^x \varphi(t)\, d\sigma(t).$$

Здесь $\psi(x)$ есть ограниченная функция, и потому принадлежащая $L^2(a, b)$. На основании полноты в $L^2(a, b)$ последовательности функций (2), из (4) следует, что

$$\psi(x) = 0$$

почти всюду в (a, b). Отсюда и вытекает, что $\varphi(t) = 0$ в метрике L^2_σ.

Если интервал ортогональности бесконечен, то полнота системы многочленов (3) может не иметь места.

Ограничимся рассмотрением одного примера, который принадлежит Гамбургеру *). Возьмем интервал $(0, \infty)$ и докажем, что ортогональные многочлены относительно веса

$$w(t)=e^{-\frac{\pi\sqrt{t}}{\ln^2 t+\pi^2}}$$

представляют неполную систему. С этой целью рассмотрим функцию

$$g(t)=e^{\frac{\ln t}{\ln^2 t+\pi^2}}\sin\frac{\sqrt{t}\ln t+\pi}{\ln^2 t+\pi^2},$$

которая, очевидно, удовлетворяет соотношению

$$\int_0^\infty [g(t)]^2 w(t)\,dt<\infty,$$

и докажем, что

$$\int_0^\infty t^k g(t)\,w(t)\,dt=0 \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Действительно,

$$\int_0^\infty t^k g(t)\,w(t)\,dt=\int_0^\infty t^k e^{\frac{\ln t-\pi\sqrt{t}}{\ln^2 t+\pi^2}}\sin\frac{\sqrt{t}\ln t+\pi}{\ln^2 t+\pi^2}\,dt=$$

$$=\mathfrak{I}\int_0^\infty e^{\frac{1+i\sqrt{t}}{\ln t-\pi i}}\,t^k\,dt=\mathfrak{I}\int_{-\infty}^\infty e^{\frac{1+ie^{x/2}}{x-\pi i}}\,e^{(k+1)x}\,dx=$$

$$=\mathfrak{I}\int_{\pi i-\infty}^{\pi i+\infty} e^{\frac{1+ie^{x/2}}{x-\pi i}}\,e^{(k+1)x}\,dx=\mathfrak{I}\int_{-\infty}^\infty e^{\frac{1-e^{x/2}}{x}}\,e^{(k+1)x}\,(-1)^{k+1}\,dx=0$$

$$(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

15. Пространство почти-периодических функций. Рассмотрим множество всех функций вида $e^{i\lambda t}$ $(-\infty<t<\infty)$, где параметр λ пробегает все вещественные значения. Буквой L обозначим линейную оболочку этого множества, т. е. совокупность всех «полиномов» вида

$$\sum_k A_k e^{i\lambda_k t}.$$

Пополним L пределами всех равномерно сходящихся на оси $-\infty<t<\infty$ последовательностей таких полиномов. Мы получим тогда некоторое множество B непрерывных на всей вещественной

*) См. H. Hamburger, Beiträge zur Konvergenztheorie der Stiltjesschen Kettenbrüche. Math. Z., 4 (1919), 186—222.

оси функций. Как впервые показал Г. Бор, непрерывная на всей оси $-\infty < t < \infty$ функция $f(t)$ принадлежит B в том и только том случае, когда она *почти-периодична*. Это означает, что при любом $\varepsilon > 0$ найдется такое $l = l(\varepsilon)$, что в каждом интервале длины l лежит по крайней мере одно число τ, для которого

$$|f(t+\tau) - f(t)| < \varepsilon \quad (-\infty < t < \infty).$$

Линейную систему L можно метризовать, определяя скалярное произведение двух полиномов

$$f(t) = \sum_{r=1}^{m} A_r e^{i\lambda_r t}, \qquad g(t) = \sum_{s=1}^{n} B_s e^{i\mu_s t}$$

формулой

$$(f, g) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)\overline{g(t)}\, dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \sum_{r,\, s=1}^{m,\, n} A_r \overline{B}_s \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{it(\lambda_r - \mu_s)}\, dt = \sum_{r,\, s=1}^{m,\, n} \delta(\lambda_r, \mu_s) A_r \overline{B}_s,$$

где

$$\delta(\lambda, \mu) = \begin{cases} 0 & (\lambda \neq \mu), \\ 1 & (\lambda = \mu). \end{cases}$$

Пополняя L в метрике, порождаемой этим скалярным произведением, мы придем к некоторому гильбертову пространству B^2, которое, как легко заметить, содержит B в качестве линейного многообразия.

Пространство B^2 не сепарабельно. Это следует из того, что в B^2 имеется континуум попарно ортогональных и нормированных векторов $e^{i\lambda t}$ $(-\infty < \lambda < \infty)$, а в n° 10 было показано, что в сепарабельном пространстве всякая ортонормированная система содержит не более счетного множества векторов.

16. Понятие о базисе пространства. Если в пространстве Банаха E имеется такая последовательность векторов $\{f_k\}_1^\infty$, что любой вектор $f \in E$ однозначно представим в виде *)

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} c_k f_k,$$

то последовательность векторов $\{f_k\}_1^\infty$ называется *базисом* пространства E.

*) Сходимость, конечно, в метрике пространства E.

Из приведенного определения следует, что необходимым условием для существования базиса является сепарабельность пространства E.

Отметим, что если последовательность $\{f_k\}_1^\infty \subset E$ не содержит линейно зависимых элементов и полна в E, то отсюда еще не следует, что эта последовательность является базисом.

Возьмем, например, пространство C непрерывных функций $f(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, с нормой $\|f\| = \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} |f(t)|$. Последовательность степеней $\{t^k\}_0^\infty$ по теореме Вейерштрасса полна в этом пространстве, но базисом она не является, так как из представления

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$$

в метрике C следует аналитичность функции $f(t)$ при $|t| < 1$.

Последовательность $\{t^k\}_0^\infty$ не является базисом также в $L^2(0, 1)$. В самом деле, пусть для функции $f(t) \in L^2(0, 1)$ имеется разложение

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k.$$

Умножим скалярно обе части этого равенства на функцию

$$g(t) = \begin{cases} 1 & (t \leqslant s), \\ 0 & (t > s). \end{cases}$$

Мы получим тогда при каждом s, $0 \leqslant s \leqslant 1$, следующее равенство:

$$\int_0^s f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} s^{k+1},$$

откуда вытекает аналитичность функции

$$F(s) = \int_0^s f(t)\,dt$$

при $|s| < 1$, а значит, и функции $f(t)$ при $|t| < 1$.

Вопрос о существовании базиса в любом сепарабельном пространстве Банаха пока остается открытым *).

В сепарабельном пространстве Гильберта всякая полная ортонормированная последовательность векторов, очевидно, образует

*) Этот вопрос составляет так называемую *проблему базиса*. Понятие базиса введено Ю. Шаудером, указавшим также первый пример базиса в пространстве C. Базис Шаудера в C состоит из кусочно-линейных функций (см. J. Schauder, Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen, Math. Z., 26, 1927).

базис. Это — так называемый *ортонормированный базис*. Справедлива также следующая

Теорема. *Пусть* $\{f_k\}_1^\infty$ — *полная система векторов в гильбертовом пространстве* H *и пусть* $\lambda_{1n}^{(1)}$ *и* $\lambda_{1n}^{(n)}$ — *наименьшее и наибольшее собственные значения матрицы Грама*

$$(\alpha_{jk})_{j,\,k=1}^{n}, \qquad \alpha_{jk}=(f_k,\, f_j). \tag{1}$$

Если

$$\varliminf_{n\to\infty} \lambda_{1n}^{(1)}=\mathscr{L}>0$$

и

$$\varlimsup_{n\to\infty} \lambda_{1n}^{(n)}=\mathscr{M}<\infty,$$

то:

а) *последовательность* $\{f_k\}_1^\infty$ *является базисом в* H

и

b) *существует и также является базисом в* H *последовательность* $\{g_k\}_1^\infty$, *биортогонально сопряженная с последовательностью* $\{f_k\}_1^\infty$.

Доказательство. Заметим прежде всего, что благодаря экстремальным свойствам собственных значений квадратичных форм последовательность $\lambda_{1n}^{(1)}$ $(n=1,\,2,\,3,\,\ldots)$ не возрастает, а последовательность $\lambda_{1n}^{(n)}$ $(n=1,\,2,\,3,\,\ldots)$ не убывает. Поэтому всегда существуют

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_{1n}^{(1)}\geqslant 0 \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty}\lambda_{1n}^{(n)}\leqslant\infty,$$

и значит, в формулировке теоремы вместо нижнего и верхнего пределов можно было взять просто пределы.

Обозначим теперь последовательные собственные значения матрицы

$$(\alpha_{jk})_{j,\,k=r}^{n}$$

через

$$\lambda_{rn}^{(1)}\leqslant\lambda_{rn}^{(2)}\leqslant\ldots\leqslant\lambda_{rn}^{(n-r+1)}.$$

На основании упомянутых выше экстремальных свойств собственных значений

$$\lambda_{1n}^{(1)}\leqslant\lambda_{rn}^{(1)}, \qquad \lambda_{rn}^{(n-r+1)}\leqslant\lambda_{1n}^{(n)} \tag{2}$$

и

$$\lambda_{rn}^{(1)}\leqslant\lambda_{r+1,\,n}^{(1)}\leqslant\lambda_{rn}^{(2)}\leqslant\ldots\leqslant\lambda_{r+1,\,n}^{(n-r)}\leqslant\lambda_{rn}^{(n-r+1)}. \tag{3}$$

Так как

$$\Gamma(f_r,\, f_{r+1},\, \ldots,\, f_n)=\lambda_{rn}^{(1)}\lambda_{rn}^{(2)}\,\ldots\,\lambda_{rn}^{(n-r+1)},$$

то из неравенств (2), (3) при выполнении условий теоремы следует, что

$$\mathscr{L} \leqslant \lambda_{1n}^{(1)} \leqslant \frac{\Gamma(f_r, f_{r+1}, \ldots, f_n)}{\Gamma(f_{r+1}, \ldots, f_n)} \leqslant \lambda_{1n}^{(n)} \leqslant \mathscr{M}.$$

Отсюда, на основании рассмотрений n° 13, заключаем, что последовательность $\{f_k\}_1^\infty$ имеет биортогонально сопряженную последовательность $\{g_k\}_1^\infty$.

Докажем неравенство

$$\frac{1}{\mathscr{M}} \sum_{k=1}^{r} |\xi_k|^2 \leqslant \sum_{j,\,k=1}^{r} (g_k, g_j)\, \bar{\xi}_j \xi_k \leqslant \frac{1}{\mathscr{L}} \sum_{k=1}^{r} |\xi_k|^2 \tag{4}$$

для любого натурального r и любых комплексных ξ_k $(k = 1, 2, \ldots, r)$.

Задавшись числами $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$, введем вектор

$$h = \sum_{k=1}^{r} \xi_k g_k$$

и применим к нему обобщенное уравнение замкнутости

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j,\,k=1}^{n} \beta_{jk}^{(n)} (f_j, h)(h, f_k) = \|h\|^2,$$

что возможно, так как последовательность $\{f_k\}_1^\infty$ полна. Здесь $(\beta_{jk}^{(n)})_{j,\,k=1}^{n}$ — матрица, обратная матрице (1). Благодаря нашему выбору вектора h это уравнение принимает вид

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j,\,k=1}^{n} \beta_{jk}^{(n)} \bar{\xi}_j \xi_k = \sum_{j,\,k=1}^{r} (g_k, g_j)\, \bar{\xi}_j \xi_k,$$

где

$$\xi_k = 0 \qquad (k = r+1, r+2, \ldots, n).$$

Так как все собственные значения матрицы (1) лежат в интервале $[\mathscr{L}, \mathscr{M}]$, то все собственные значения обратной матрицы $(\beta_{jk}^{(n)})_{j,\,k=1}^{n}$ лежат в интервале $\left[\frac{1}{\mathscr{M}}, \frac{1}{\mathscr{L}}\right]$ и, следовательно,

$$\frac{1}{\mathscr{M}} \sum_{k=1}^{r} |\xi_k|^2 \leqslant \sum_{j,\,k=1}^{n} \beta_{jk}^{(n)} \bar{\xi}_j \xi_k \leqslant \frac{1}{\mathscr{L}} \sum_{k=1}^{r} |\xi_k|^2.$$

Переходя к пределу по n, мы получим, что

$$\frac{1}{\mathscr{M}} \sum_{k=1}^{r} |\xi_k|^2 \leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{j,\,k=1}^{n} \beta_{jk}^{(n)} \bar{\xi}_j \xi_k \leqslant \frac{1}{\mathscr{L}} \sum_{k=1}^{r} |\xi_k|^2,$$

а это и есть неравенство (4).

Докажем теперь, что последовательность $\{g_k\}_1^\infty$ является базисом пространства H.

Если некоторый элемент $h \in$ H представим в виде

$$h=\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k g_k, \tag{5}$$

то, умножая обе части этого равенства на f_j, получим

$$\xi_j=(h,\ f_j), \tag{5'}$$

откуда следует единственность представления (5). Остается доказать возможность представления любого элемента $h \in$ H в виде (5).

Взяв элемент $h \in$ H, определим числа ξ_j $(j = 1, 2, 3, \ldots$ формулами (5′) и построим ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j g_j. \tag{6}$$

Из неравенства (4) и обобщенного неравенства Бесселя для элемента h следует сходимость числового ряда

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^2,$$

а отсюда и из неравенства

$$\left\|\sum_{k=p}^{p+s} \xi_k g_k\right\|^2=\sum_{j,\ k=p}^{p+s}(g_k,\ g_j)\,\bar{\xi}_j\xi_k \leqslant \frac{1}{\mathscr{L}}\sum_{k=p}^{p+s}|\xi_k|^2$$

вытекает сходимость построенного ряда (6).

Обозначим сумму ряда (6) буквой g. Тогда

$$(g-h,\ f_k)=0 \qquad (k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

откуда в силу замкнутости системы $\{f_k\}_1^\infty$ следует, что $g = h$, и представление (5) доказано.

Таким образом, последовательность $\{g_k\}_1^\infty$ является базисом пространства H. Отсюда, в частности, следует полнота последовательности $\{g_k\}_1^\infty$ в H.

Для завершения доказательства теоремы остается показать, что данная последовательность $\{f_k\}_1^\infty$ также является базисом.

Так как все собственные значения матрицы (1) лежат в интервале $[\mathscr{L},\ \mathscr{M}]$, то при любом натуральном n и любых числах η_k $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ будет

$$\mathscr{L}\sum_{k=1}^{n}|\eta_k|^2 \leqslant \sum_{j,\ k=1}^{n}(f_k,\ f_j)\,\bar{\eta}_j\eta_k \leqslant \mathscr{M}\sum_{k=1}^{n}|\eta_k|^2. \tag{7}$$

Взяв элемент $h \in$ H, определим числа η_k формулами

$$\eta_k=(h,\ g_k)$$

и построим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \eta_k f_k.$$

Пользуясь неравенствами (7), докажем, как и выше, сходимость этого ряда, а пользуясь доказанной полнотой последовательности $\{g_k\}_1^\infty$, установим равенство

$$h=\sum_{k=1}^{\infty} \eta_k f_k.$$

Единственность этого представления очевидна.

Таким образом, данная последовательность $\{f_k\}_1^\infty$ является базисом пространства H, и теорема доказана полностью.

Сделаем еще несколько заключительных замечаний.

Тот факт, что некоторая последовательность $\{f_k\}_1^\infty \subset$ H является базисом в H, приводит к выводу, что каждому вектору $h \in$ H с помощью представления

$$h=\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k \tag{8}$$

можно однозначно отнести некоторую числовую последовательность $\{c_k\}_1^\infty$, т. е. точку некоторого бесконечномерного пространства. Если базис $\{f_k\}_1^\infty$ удовлетворяет условиям нашей теоремы, т. е. при любом n и любых c_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ имеют место неравенства

$$\mathscr{L} \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \leqslant \sum_{j,\,k=1}^{n} (f_k, f_j)\, \bar{c}_j c_k \leqslant \mathscr{M} \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \quad (0<\mathscr{L}, \mathscr{M}<\infty),$$

то необходимым и достаточным условием для сходимости ряда (8) является сходимость числового ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2.$$

Таким образом, в рассматриваемом нами случае каждому элементу $h \in$ H относится точка $\{c_k\}_1^\infty \in l^2$, и обратно. Взаимно однозначное отображение H на l^2, осуществляемое при помощи базиса, будет, вообще говоря, не изометрическим. Последнее имеет место, если базис ортонормированный. Вместо равенства Парсеваля, которое получается в случае изометрического отображения, мы получаем здесь двойное неравенство

$$\mathscr{L} \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leqslant \|h\|^2 \leqslant \mathscr{M} \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \quad (0<\mathscr{L}, \mathscr{M}<\infty).$$

Заметим, что базисы, в которых имеет место это неравенство, называются *базисами Рисса.*

ЛИНЕЙНЫЙ ФУНКЦИОНАЛ И ОГРАНИЧЕННЫЙ ЛИНЕЙНЫЙ ОПЕРАТОР

17. Функции точки. В элементах математики рассматриваются два рода функций точки (трех- или n-мерного пространства): *функции скалярные*, значениями которых являются числа, и *векторфункции*, которые точкам пространства относят снова точки того же или иного пространства.

В настоящей книге мы будем изучать функции точки в пространстве Гильберта. В соответствии с указанным разделением функций элементарного анализа на скалярные функции и векторфункции мы введем в H так называемые *функционалы* и *операторы*. Приведем относящиеся сюда определения.

Пусть в пространстве H дано некоторое точечное множество D.

Всякую функцию Φ, которая каждой точке $f \in D$ относит определенное число $\Phi(t)$, называют *функционалом* в пространстве H с областью определения D.

Всякую функцию T, которая каждому элементу $f \in D$ относит некоторый элемент $Tf = g \in \Delta \subseteq H$, называют *оператором* *) в пространстве H с областью определения D и областью значений Δ, состоящей из всех $g = Tf$, где f пробегает все D.

Область определения функционала Φ и, соответственно, область определения и область значений оператора T обозначают D_Φ и, соответственно, D_T, Δ_T.

Тождественный оператор, т. е. оператор, переводящий каждый вектор в себя, будем обозначать I. Оператор, переводящий каждый вектор в нуль, обозначим 0.

Если оператор T двум различным элементам из D относит различные элементы, то T имеет *обратный оператор*, который элементам из Δ относит элементы из D. Обратный оператор обозначают символом T^{-1}, таким образом,

$$D_{T^{-1}} = \Delta_T, \qquad \Delta_{T^{-1}} = D_T.$$

Два функционала (или оператора) будем считать *равными*, если совпадают их области определения и если на каждом эле-

*) Иногда приходится рассматривать также и такие функции, которые элементам пространства H относят элементы некоторого другого пространства Гильберта. Эти функции также называют *операторами*. У нас они будут встречаться не часто.

менте из их области определения значения этих функционалов (операторов) совпадают.

Если область определения D_T оператора T шире области определения D_S оператора S, т. е. $\mathrm{D}_S \subset \mathrm{D}_T$, и если

$$Tf = Sf$$

для любого элемента $f \in \mathrm{D}_S$, то оператор T называют *расширением* оператора S и пишут

$$S \subset T.$$

Аналогично вводится понятие о расширении функционала.

Отправляясь от элементарного понятия о непрерывности функции, мы приходим к следующему определению непрерывности оператора: оператор T называется *непрерывным* в точке f_0 ($f_0 \in \mathrm{D}_T$), если

$$\lim_{f \to f_0} Tf = Tf_0 \qquad (f \in \mathrm{D}_T);$$

последнее означает, что при любом $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что из

$$\| f - f_0 \| < \delta, \qquad f \in \mathrm{D}_T$$

следует

$$\| Tf - Tf_0 \| < \varepsilon.$$

Аналогично определяется непрерывность функционала.

Если элемент f_0 не принадлежит D_T, но существует $\lim Tf = g_0$ при $f \to f_0$ и $f \in \mathrm{D}_T$, то оператор T можно определить на элементе f_0, полагая $Tf_0 = g_0$. Поступая точно так же со всеми элементами того же типа, что и f_0, мы приходим к так называемому *расширению по непрерывности* оператора T. Это расширение однозначно определяется оператором T.

Аналогично определяется расширение по непрерывности функционала.

Оператор T называется *ограниченным*, если в каждой сфере $\| f \| \leqslant R$ выполнено неравенство

$$\| Tf \| \leqslant C_R < \infty \qquad (f \in \mathrm{D}_T).$$

Аналогично определяется ограниченный функционал.

Дальнейшие понятия, относящиеся к функционалам и операторам, мы будем вводить ниже в связи с так называемыми линейными функционалами и линейными операторами, которые явятся основным предметом нашего изучения.

Здесь же мы остановимся лишь на операторном аналоге функции от функции. Пусть даны два оператора: S и T. Пусть область значений второго оператора имеет общие точки с областью определения первого (т. е. пусть множество $\Delta_T \cap D_S$ непусто). В таком случае можно говорить об операторе ST, который элемент f переводит в элемент

$$STf = S(Tf).$$

Этот оператор ST носит название *произведения операторов* S и T и его областью определения является совокупность всех тех $f \in D_T$, для которых $Tf \in D_S$. Аналогично вводится произведение TS, которое имеет смысл, если непусто множество $\Delta_S \cap D_T$. Разумеется, операторы ST и TS, вообще говоря, различны, так как, вообще говоря, различны их области определения, и если даже существует элемент g, принадлежащий обеим областям определения, то может не иметь места равенство

$$STg = TSg.$$

Дать разумное общее определение перестановочности двух операторов затруднительно, и мы ограничимся здесь тем случаем, когда из двух операторов S, T по крайней мере один (пусть это будет S) определен всюду в H. В этом случае операторы S и T считают *перестановочными*, если

$$ST \subseteq TS,$$

т. е. если из включения $f \in D_T$ следует как включение $Sf \in D_T$, так и равенство

$$STf = TSf.$$

В частности, если оба оператора определены всюду в H, то перестановочность эквивалентна равенству $ST = TS$.

18. Линейный функционал. Функционал Φ называется *однородным* и *аддитивным*, если его область определения D есть линейное многообразие и если

$$\Phi(\alpha f + \beta g) = \alpha\Phi(f) + \beta\Phi(g),$$

каковы бы ни были комплексные числа α, β и элементы $f, g \in D$.

Однородный и аддитивный функционал называется *линейным*, если он ограничен. Легко видеть, что свойство ограниченности для однородного и аддитивного функционала можно выразить неравенством

$$\sup_{f \in D,\ \|f\| \leqslant 1} |\Phi(f)| < \infty.$$

Стоящая в левой части этого неравенства величина носит название *нормы функционала* Φ и обозначается символом $\|\Phi\|_D$, а если $D = H$, то просто $\|\Phi\|$.

Если $f \in \mathrm{D}$, то, по определению нормы функционала,

$$\left|\Phi\left(\frac{f}{\|f\|}\right)\right| \leqslant \|\Phi\|_{\mathrm{D}},$$

откуда

$$|\Phi(f)| \leqslant \|\Phi\|_{\mathrm{D}} \|f\|. \tag{1}$$

Соотношение (1) показывает, что *линейный функционал непрерывен*. Действительно, в силу (1)

$$|\Phi(f)-\Phi(f_0)| = |\Phi(f-f_0)| \leqslant \|\Phi\|_{\mathrm{D}} \|f-f_0\|$$

для любых f, $f_0 \in \mathrm{D}$.

Из (1) следует также, что в соотношении

$$|\Phi(f)| \leqslant \|\Phi\|_{\mathrm{D}},$$

где $f \in \mathrm{D}$ и $\|f\| \leqslant 1$, знак равенства не может иметь места при $\|f\| < 1$. Поэтому норма $\|\Phi\|_{\mathrm{D}}$ может быть определена равенством

$$\sup_{f \in \mathrm{D},\ \|f\|=1} |\Phi(f)| = \|\Phi\|_{\mathrm{D}} \tag{2}$$

или, что то же самое, равенством

$$\sup_{f \in \mathrm{D}} \frac{|\Phi(f)|}{\|f\|} = \|\Phi\|_{\mathrm{D}}. \tag{2'}$$

Если Φ, Ψ — два линейных функционала с областями определения D_Φ, D_Ψ, то $\alpha\Phi + \beta\Psi$, где α, β — константы, является также линейным функционалом, с пересечением $\mathrm{D}_\Phi \cap \mathrm{D}_\Psi$ областей D_Φ, D_Ψ в качестве области определения (конечно, представляет интерес лишь тот случай, когда $\mathrm{D}_\Phi \cap \mathrm{D}_\Psi$ содержит точки, отличные от $f = 0$).

Если функционал Φ однороден и аддитивен, и если он непрерывен хотя бы в одной точке $f_0 \in \mathrm{D}$, то он ограничен, и поэтому является линейным функционалом.

Действительно, в силу непрерывности функционала в точке f_0

$$|\Phi(h)-\Phi(f_0)| \leqslant \delta$$

при $\|h-f_0\| \leqslant \varepsilon$ и $h \in \mathrm{D}$. А так как для произвольного $f \in \mathrm{D}$, $f \neq 0$,

$$\Phi(f) = \frac{\|f\|}{\varepsilon}\Phi\left(\frac{\varepsilon f}{\|f\|}\right) = \frac{\|f\|}{\varepsilon}\left\{\Phi\left(\frac{\varepsilon f}{\|f\|}+f_0\right)-\Phi(f_0)\right\},$$

а вектор $\frac{\varepsilon f}{\|f\|} + f_0 = h$ удовлетворяет соотношению $\|h - f_0\| = \varepsilon$, то

$$|\Phi(f)| \leqslant \frac{\delta}{\varepsilon}\|f\|;$$

иными словами,

$$\frac{|\Phi(f)|}{\|f\|} \leqslant \frac{\delta}{\varepsilon},$$

что и доказывает наше утверждение.

Если линейное многообразие D, на котором задан линейный функционал Φ, не замкнуто, то Φ можно расширить на замыкание многообразия D. Это расширение, как легко видеть, приводит к линейному функционалу с той же нормой, что и у исходного функционала.

Легко привести примеры однородных и аддитивных, но не ограниченных функционалов. В $L^2(-\infty, \infty)$ таким примером может служить функционал

$$\Phi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt, \tag{3}$$

определенный на линейном многообразии D всех тех элементов $f \in L^2(-\infty, \infty)$, для которых правая часть (3) имеет смысл. Родственный пример в абстрактном сепарабельном гильбертовом пространстве H представляет функционал

$$\Phi(f) = \lim_{n\to\infty}(f, e_1 + e_2 + \ldots + e_n),$$

где $\{e_k\}_1^\infty$ — какой-нибудь ортонормированный базис в H.

В обоих примерах область определения функционала плотна в пространстве, но не совпадает со всем пространством. Однако не следует думать, что неограниченность функционала (однородного и аддитивного) не может иметь места, если он определен во всем пространстве.

Доказательство этого утверждения мы проведем с помощью следующей конструкции.

Возьмем единичную сферу *) $S \subset H$ и, пользуясь трансфинитной индукцией, перенумеруем все элементы этой сферы. Затем построим множество $M \subset S$, отнеся к нему первый элемент S, а затем последовательно каждый элемент S, который не является конечной линейной комбинацией предшествующих ему элементов из M. Так как каждому элементу $h \neq 0$ из H отвечает элемент $\frac{1}{\|h\|} h$ сферы S, то каждый элемент $h \neq 0$ однозначно представим в виде конечной линейной комбинации элементов из M. Теперь произвольно выделим из M бесконечную последовательность элементов $\{g_n\}_1^\infty$ и положим $\Phi(g_n) = n$, а на остальных элементах $g \in M$ определим Φ произвольным образом. Кроме того, положим $\Phi(0) = 0$. В силу однозначной представимости любого элемента $h \in H$ в виде

$$h = \sum_{k=1}^{m} c_k f_k \qquad (f_k \in M,\ m < \infty),$$

*) В отличие от принятого в п° 4 определения, здесь под единичной сферой понимается множество элементов f, для которых $\|f\| = 1$.

функционал Φ по формуле

$$\Phi(h)=\sum_{k=1}^{m} c_k\Phi(f_k)$$

продолжается на все пространство. При этом он будет однородным и аддитивным, но не ограниченным.

19. Теорема Ф. Рисса устанавливает общий вид линейного функционала в H и гласит: *всякий линейный функционал в гильбертовом пространстве* H *имеет вид*

$$\Phi(h)=(h, f),$$

где f — *некоторый элемент из* H, *однозначно определяемый функционалом* Φ; *при этом*

$$\|\Phi\|=\|f\|.$$

Доказательство. Обозначим через G множество всех тех элементов $g\in\mathrm{H}$, для которых

$$\Phi(g)=0.$$

В силу линейности функционала Φ это множество есть линейное многообразие. Оно замкнуто и, значит, является подпространством. Действительно, если $g_n\to g$, то в силу непрерывности функционала

$$\Phi(g)=\lim_{n\to\infty}\Phi(g_n);$$

поэтому из $\Phi(g_n)=0$, т. е. из $g_n\in\mathrm{G}$ вытекает, что $\Phi(g)=0$, т. е. $g\in\mathrm{G}$.

Если $\mathrm{G}=\mathrm{H}$, то функционал Φ всюду равняется нулю, и для доказательства теоремы Рисса надлежит принять $f=0$. Предположим поэтому, что $\mathrm{G}\neq\mathrm{H}$. В таком случае существует отличный от нуля элемент $f_0\in\mathrm{H}\ominus\mathrm{G}$. Рассмотрим элементы вида

$$\Phi(h)f_0-\Phi(f_0)h,$$

где h пробегает H. Эти элементы принадлежат G, так как

$$\Phi[\Phi(h)f_0-\Phi(f_0)h]=\Phi(h)\Phi(f_0)-\Phi(f_0)\Phi(h)=0.$$

Следовательно,

$$(\Phi(h)f_0-\Phi(f_0)h,\ f_0)=0,$$

откуда

$$\Phi(h)(f_0, f_0)=(h,\ \overline{\Phi(f_0)}f_0).$$

Если положим

$$f=\frac{\overline{\Phi(f_0)}}{(f_0, f_0)}f_0,$$

то из полученного равенства будет вытекать, что

$$\Phi(h) = (h, f).$$

Это и есть требуемое представление функционала.

Докажем, что оно единственно. Допуская противное, придем к равенству

$$(h, f') = (h, f''),$$

верному для любого $h \in \mathrm{H}$, где f', f'' — два различных вектора. Но это невозможно, так как стоит лишь взять $h = f' - f''$, и мы получим

$$\| f' - f'' \|^2 = 0.$$

Остается доказать, что

$$\| \Phi \| = \| f \|.$$

Так как

$$\Phi(h) = (h, f),$$

то

$$| \Phi(h) | \leqslant \| h \| \cdot \| f \|$$

и, значит,

$$\| \Phi \| \leqslant \| f \|.$$

С другой стороны, беря $h = f$, получим

$$\Phi(f) = \| f \|^2,$$

откуда следует, что

$$\| \Phi \| \geqslant \| f \|.$$

Таким образом, теорема Ф. Рисса доказана.

Положим теперь, что в H задан линейный функционал Ψ с замкнутой областью определения D_Ψ. Так как D_Ψ является подпространством пространства H, то по доказанной теореме Ф. Рисса однозначно определяется такой элемент $g \in \mathrm{D}_\Psi$, что

$$\Psi(h) = (h, g) \qquad (h \in \mathrm{D}_\Psi) \tag{1}$$

и

$$\| \Psi \|_{\mathrm{D}_\Psi} = \| g \|.$$

Равенством (1) линейный функционал Ψ расширяется на все пространство H и притом без увеличения нормы *). Всякое другое расширение линейного функционала Ψ на все пространство H уже

*) Так как всякий линейный функционал может быть расширен на все пространство без увеличения нормы, то обычно, говоря о линейном функционале в H, принимают, что областью определения этого линейного функционала является все пространство.

увеличит норму функционала. Действительно, если Φ есть расширение Ψ на все пространство, то

$$\Phi(h)=(h, f)$$

и

$$\|\Phi\|=\|f\|.$$

При $h \in D_\Psi$ должно иметь место равенство

$$(h, g)=(h, f),$$

откуда видно, что $f-g \perp D_\Psi$. А так как $g \in D_\Psi$, то

$$\|f\|^2=\|g\|^2+\|f-g\|^2$$

и, значит,

$$\|\Phi\| \geqslant \|\Psi\|_{D_\Psi},$$

причем знак равенства не имеет места, если $f \neq g$.

20. Критерий замкнутости в H заданной системы векторов. Систему векторов M из H называют, как было указано в п° 9, замкнутой в H, если любой вектор $h \in H$ можно с любой степенью точности аппроксимировать линейной комбинацией векторов, принадлежащих M.

Теорема. *Для того чтобы система* M *была замкнутой в* H, *необходимо и достаточно, чтобы всякий линейный функционал* Φ *в* H, *обращающийся в нуль на любом векторе* $g \in M$, *равнялся нулю тождественно.*

Доказательство. Первая часть теоремы есть непосредственное следствие непрерывности линейного функционала.

Чтобы доказать вторую часть теоремы, допустим, что система не замкнута, т. е. существует такой вектор $h_0 \in H$, для которого

$$\inf_{n, \alpha_i} \|h_0-\alpha_1 g_1-\alpha_2 g_2-\ldots-\alpha_n g_n\|=\delta>0 \qquad (g_i \in M).$$

Обозначим через G замкнутую линейную оболочку системы M. На основании п° 6 в G существует такой вектор g, что

$$\|h_0-g\|=\delta.$$

Положим

$$f=h_0-g,$$

так что $f \perp G$. Теперь возьмем функционал

$$\Phi(h)=(h, f),$$

норма которого равна $\|f\|=\delta>0$. Этот отличный от нуля функционал обращается в нуль на любом векторе из G и, в частности, на любом векторе из M.

Тем самым вторая часть теоремы также доказана.

21. Одна лемма относительно выпуклых функционалов *).

Определение. Заданный в H вещественный функционал $p(h)$ называется *выпуклым*, если

$$1)\quad p(f+g) \leqslant p(f)+p(g)$$

и

$$2)\quad p(\alpha f)=|\alpha|\,p(f),$$

каковы бы ни были $f, g \in$ H и каково бы ни было комплексное число α.

Из этого определения вытекает, что выпуклый функционал не принимает отрицательных значений. Действительно,

$$0=p(f-f) \leqslant p(f)+p(-f)=2p(f).$$

Простым примером выпуклого функционала является $p(h) = \|h\|$.

Лемма. *Если выпуклый функционал $p(h)$ полунепрерывен снизу, т. е. для любого $h_0 \in$ H и любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что*

$$p(h)-p(h_0) \geqslant -\varepsilon$$

при $\|h-h_0\| \leqslant \delta$, то найдется такая константа $\mathcal{M} < \infty$, что для любого $h \in$ H

$$p(h) \leqslant \mathcal{M}\,\|h\|.$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что если функционал $p(h)$ не ограничен в единичной сфере ($\|h\| < 1$), то он не будет ограничен ни в какой сфере $S(\varrho, g)$ (g — центр, ϱ — радиус). Действительно, допуская, что $p(h) < C$ при $\|h - g\| < \varrho$, найдем, что при $\|h-g\| < \varrho$ имеет место неравенство

$$p(h-g) \leqslant p(h)+p(-g)=p(h)+p(g) < 2C.$$

Следовательно, полагая

$$f=\frac{h-g}{\varrho},$$

найдем, что

$$p(f) < \frac{2C}{\varrho}$$

при $f \in S(1, 0)$, т. е. найдем, что функционал $p(h)$ ограничен в единичной сфере.

В силу свойства 2) нам достаточно доказать, что функционал $p(h)$ ограничен в сфере $S(1, 0)$. Допуская противное, найдем

*) В настоящем пункте мы следуем И. М. Гельфанду. См. его статью «Об одной лемме теории линейных пространств» (сообщ. Харьк. матем. о-ва, сер. 4, т. XIII (1936), стр. 35—40).

точку $f_1 \in S(1, 0)$ так, чтобы $p(f_1) > 1$. На основании полунепрерывности снизу функционала $p(h)$ найдется сфера $S(\varrho_1, f_1) \subset \subset S(1, 0)$ с радиусом $\varrho_1 < \frac{1}{2}$, во всех точках которой выполняется неравенство $p(h) > 1$. В силу неограниченности функционала $p(h)$ в этой сфере существует точка $f_2 \in S(\varrho_1, f_1)$, а затем и целая сфера $S(\varrho_2, f_2) \subset S(\varrho_1, f_1)$ с радиусом $\varrho_2 < \frac{1}{2}\varrho_1$, в которых $p(h) > 2$. Продолжая этот процесс, получим бесконечную последовательность сфер

$$S(1, 0) \supset S(\varrho_1, f_1) \supset S(\varrho_2, f_2) \supset \ldots,$$

для которых $\varrho_n < \frac{1}{2}\varrho_{n-1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots; \varrho_0 = 1)$, причем $p(h) > n$, если $h \in S(\varrho_n, f_n)$. Но последовательность центров $\{f_n\}_1^\infty$ фундаментальна и, значит, сходится к некоторому элементу f. При этом $p(f) > n$, каково бы ни было n, что невозможно.

Таким образом, лемма доказана.

Не мешает заметить, что эта лемма может быть сформулирована еще так: *если выпуклый функционал полунепрерывен снизу, то он просто непрерывен*. Действительно, при $\| h - h_0 \| \leqslant \delta$:

$$p(h_0) - \varepsilon \leqslant p(h) = p(h_0 + [h - h_0]) \leqslant$$
$$\leqslant p(h_0) + p(h - h_0) \leqslant p(h_0) + \mathcal{M} \| h - h_0 \|.$$

С л е д с т в и е. *Пусть* $p_k(h)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ *есть последовательность выпуклых и непрерывных функционалов в* H. *Если эта последовательность ограничена в каждой точке* $h \in$ H, то

$$p(h) = \sup_n p_n(h)$$

есть также выпуклый и непрерывный функционал.

Д о к а з а т е л ь с т в о. То, что $p(h)$ есть выпуклый функционал, очевидно. С другой стороны, при фиксированном $h_0 \in$ H и любом $\varepsilon > 0$ можно найти N так, чтобы

$$p(h_0) - p_N(h_0) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Затем можно найти такое $\delta > 0$, что

$$| p_N(h) - p_N(h_0) | < \frac{\varepsilon}{2}$$

при $\| h - h_0 \| < \delta$. Но в таком случае при $\| h - h_0 \| < \delta$:

$$p(h) - p(h_0) > \sup_n p_n(h) - p_N(h_0) - \frac{\varepsilon}{2} \geqslant p_N(h) - p_N(h_0) - \frac{\varepsilon}{2} > -\varepsilon$$

и, значит, функционал $p(h)$ полунепрерывен снизу. Теперь остается применить лемму.

Дадим два простых применения доказанных предложений.

На основании теоремы Ф. Рисса мы знаем, что всякий линейный функционал в $L^2(a, b)$ имеет вид

$$\Phi(h) = \int_a^b h(t)\varphi(t)\,dt, \tag{1}$$

где $\varphi(t)$ есть функция из $L^2(a, b)$, порождающая функционал $\Phi(h)$.

Теперь мы можем доказать, что *если некоторый функционал* $\Phi(h)$ *определен всюду в* $L^2(a, b)$ *при помощи формулы* (1), *где* $\varphi(t)$ — *какая-то фиксированная функция, о которой известно лишь, что она измерима, то* $\varphi(t) \in L^2(a, b)$ *и, значит* (1) *есть линейный функционал в* $L^2(a, b)$.

Этот факт является частным случаем более общей теоремы Ф. Рисса *).

Для доказательства обозначим через E_n множество точек $t \in [a, b]$, в которых

$$|\varphi(t)| \leqslant n$$

и которые принадлежат интервалу $[-n, n]$, если интервал $[a, b]$ бесконечен. Далее, положим

$$p_n(h) = \int_{E_n} |h(t)\varphi(t)|\,dt.$$

Это есть непрерывный и выпуклый функционал в $L^2(a, b)$. Так как величина

$$p(h) = \sup_n p_n(h) = \lim_{n\to\infty} p_n(h) = \int_a^b |h(t)\varphi(t)|\,dt$$

конечна при любом $h(t) \in L^2(a, b)$, то в силу следствия леммы функционал $p(h)$ непрерывен, т. е. $p(h) \leqslant \mathscr{M}\,\|h\|$. Но $|\Phi(h)| \leqslant \leqslant p(h)$ и поскольку однородность и аддитивность функционала $\Phi(h)$ очевидны, то $\Phi(h)$ есть функционал линейный.

Аналогичное предложение справедливо относительно пространства l^2. Ограничимся его формулировкой.

---

*) Относящийся к пространству L^p при любом $p > 1$ (пространство $L^p(a, b)$ определяется как пространство функций, измеримых в (a, b), для которых существует $\int_a^b |f(x)|^p\,dx$).

Пусть некоторый функционал Φ (f) определен всюду в l^2 и притом с помощью формулы

$$\Phi(f)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \qquad (f=\{x_k\}_1^{\infty}),$$

где $\{a_k\}_1^{\infty}$ есть какая-то фиксированная последовательность. В таком случае

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2<\infty \tag{2}$$

и, значит, Φ (f) есть линейный функционал.

Иначе говоря, если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$$

сходится, какова бы ни была последовательность $\{x_k\}_1^{\infty}$, удовлетворяющая неравенству

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2<\infty,$$

то обязательно имеет место неравенство (2).

Этот факт является частным случаем более общей теоремы Э. Ландау *).

22. Ограниченный линейный оператор. Оператор T называется *линейным*, если его область определения D есть линейное многообразие и

$$T(\alpha f+\beta g)=\alpha Tf+\beta Tg$$

для любых $f, g \in$ D и любых комплексных α, β.

Подчеркнем, что, в отличие от определения линейного функционала, это определение не содержит требования об ограниченности оператора. Это связано с тем, что многие важные операции анализа, например, операция дифференцирования, порождают операторы неограниченные, но однородные и аддитивные, т. е. линейные в смысле данного здесь определения.

---

*) Относящейся к пространству l^p при любом $p>1$ (пространство l^p есть пространство числовых последовательностей $\{x_i\}_1^{\infty}$, для которых сходится ряд $\sum_1^{\infty} |x_i|^p$).

В соответствии с общим определением ограниченности оператора (см. п° 17) линейный оператор T назовем ограниченным, если

$$\sup_{f \in \mathrm{D},\ \|f\| \leqslant 1} \|Tf\| < \infty.$$

Стоящую в левой части этого неравенства величину называют *нормой оператора* T в D и обозначают символом $\|T\|_D$ или $\|T\|$.

Легко видеть, что на ограниченные линейные операторы переносятся положения п° 18, относящиеся к линейным функционалам:

1. Норма ограниченного линейного оператора T может быть определена равенствами

$$\|T\| = \sup_{f \in \mathrm{D},\ \|f\| = 1} \|Tf\| = \sup_{f \in \mathrm{D}} \frac{\|Tf\|}{\|f\|}.$$

2. Ограниченный линейный оператор непрерывен.

3. Если линейный оператор непрерывен в одной точке, то он ограничен.

4. Расширение по непрерывности ограниченного линейного оператора T приводит к линейному оператору с той же нормой, что и у исходного оператора.

5. Если S и T — линейные операторы, то $\alpha S + \beta T$, где α, β — комплексные числа, является линейным оператором с пересечением $\mathrm{D}_S \cap \mathrm{D}_T$ областей D_S, D_T в качестве области определения. Линейным оператором является также каждое из произведений ST, TS (см. п° 17).

Если S, T — ограниченные линейные операторы, определенные всюду в H, то операторы ST, TS также являются ограниченными линейными операторами, определенными всюду в H. При этом

$$\|ST\| \leqslant \|S\| \cdot \|T\|, \quad \|TS\| \leqslant \|T\| \cdot \|S\|.$$

Линейный оператор T в H будем называть *конечномерным*, если он ограничен и его область значений Δ_T есть конечномерное подпространство H.

Конечномерные операторы характеризуются следующим представлением:

$$Tf = \sum_{k=1}^{n} (f, g_k) h_k, \tag{1}$$

где n — размерность Δ_T, $\{h_k\}_1^n$ — какой-нибудь базис в Δ_T, а $\{g_k\}_1^n$ — некоторая конечная система векторов, которые от f не зависят.

Докажем нетривиальную часть этого утверждения, а именно, что всякий конечномерный оператор T допускает представление (1). С этой целью выберем в Δ_T ортонормированный базис

$\{h_k\}_1^n$. При любом $f \in \mathrm{H}$ будем иметь равенство

$$Tf = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k h_k,$$

где α_k — числа, которые, очевидно, можно найти из соотношений

$$\alpha_k = (Tf, h_k).$$

Таким образом, α_k являются линейными функционалами от f и, следовательно, по теореме Ф. Рисса найдутся элементы g_k ($k = 1, 2, \ldots, n$), через которые α_k представимы в виде

$$\alpha_k = (f, g_k).$$

Одномерные операторы, входящие в правую часть (1), записываются также в виде $(\cdot, g_k)\, h_k$, что приводит к следующему виду представления (1):

$$T = \sum_{k=1}^{n} (\cdot, g_k)\, h_k.$$

В заключение настоящего пункта введем понятие ортогональной суммы операторов. Пусть гильбертово пространство H представлено в виде ортогональной суммы своих подпространств:

$$\mathrm{H} = \mathrm{H}_1 \oplus \mathrm{H}_2,$$

и пусть в подпространстве H_1 задан оператор T_1, а в подпространстве H_2 — оператор T_2, так что $\mathrm{D}_{T_k} \subseteq \mathrm{H}_k$ и $\Delta_{T_k} \subseteq \mathrm{H}_k$ ($k = 1, 2$).

Ортогональной суммой операторов T_1 и T_2 называется оператор

$$T = T_1 \oplus T_2,$$

определенный в H на элементах вида $h = f + g$, где $f \in \mathrm{D}_{T_1} \subseteq \mathrm{H}_1$, $g \in \mathrm{D}_{T_2} \subseteq \mathrm{H}_2$, формулой

$$Th = T_1 f + T_2 g.$$

23. Билинейный функционал. Будем говорить, что в H определен *билинейный функционал* Ω, если каждой паре элементов $f, g \in \mathrm{H}$ отвечает определенное (вообще говоря, комплексное) число $\Omega(f, g)$, причем

a) $$\Omega(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g) = \alpha_1 \Omega(f_1, g) + \alpha_2 \Omega(f_2, g),$$

b) $$\Omega(f, \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2) = \overline{\beta}_1 \Omega(f, g_1) + \overline{\beta}_2 \Omega(f, g_2),$$

c) $$\sup_{\|f\| \leqslant 1,\ \|g\| \leqslant 1} |\Omega(f, g)| < \infty.$$

Примером билинейного функционала является скалярное произведение (f, g).

Величина

$$\sup_{\|f\|\leqslant 1,\ \|g\|\leqslant 1} |\Omega(f, g)|$$

носит название *нормы билинейного функционала* и обозначается символом $\|\Omega\|$.

Нетрудно убедиться, что

$$\|\Omega\| = \sup_{\|f\|=\|g\|=1} |\Omega(f, g)| = \sup \frac{|\Omega(f, g)|}{\|f\|\cdot\|g\|}.$$

Поэтому для любых $f, g \in H$

$$|\Omega(f, g)| \leqslant \|\Omega\|\cdot\|f\|\cdot\|g\|.$$

Билинейный функционал есть непрерывная функция от своих аргументов. Действительно,

$$\begin{aligned}|\Omega(f, g) - \Omega(f_0, g_0)| = \\ &= |\Omega(f-f_0, g-g_0) + \Omega(f-f_0, g_0) + \Omega(f_0, g-g_0)| \leqslant \\ &\leqslant \|\Omega\|\{\|f-f_0\|\cdot\|g-g_0\| + \|f-f_0\|\cdot\|g_0\| + \|f_0\|\cdot\|g-g_0\|\}.\end{aligned}$$

Часто бывает полезно следующее простое предложение.

Теорема. *Если комплексная скалярная функция* $\omega(f, g)$ *удовлетворяет условиям*

a) $\omega(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g) = \alpha_1 \omega(f_1, g) + \alpha_2 \omega(f_2, g)$,

b) $\omega(f, \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2) = \bar\beta_1 \omega(f, g_1) + \bar\beta_2 \omega(f, g_2)$,

c) $|\omega(f, f)| \leqslant C\|f\|^2$,

d) $|\omega(f, g)| = |\omega(g, f)|$,

где C — константа, f, f_1, f_2, g, g_1, g_2 — произвольные элементы H, *а $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ — произвольные числа, то ω есть билинейный функционал с нормой $\|\omega\| \leqslant C$.*

Доказательство. Непосредственно проверяется, что в силу a) и b) *)

$$\omega(f, h) + \omega(h, f) = \frac{1}{2}\{\omega(f+h, f+h) - \omega(f-h, f-h)\}.$$

---

*) Из этого равенства и аналогичного равенства

$$\omega(f, h) - \omega(h, f) = \frac{i}{2}\{\omega(f+ih, f+ih) - \omega(f-ih, f-ih)\}$$

в силу *одного* лишь условия c) следует, что ω есть билинейный функционал и притом с нормой $\leqslant 2C$. Благодаря же условию d) устанавливается, что норма ω не превосходит C.

Значит,

$$|\omega(f, h)+\omega(h, f)|\leqslant\frac{1}{2}C\{\|f+h\|^2+\|f-h\|^2\}=C\{\|f\|^2+\|h\|^2\}. \tag{1}$$

Пусть $\|f\|\leqslant 1$, $\|h\|\leqslant 1$ и $h=\lambda g$, где λ — пока неопределенный параметр и $|\lambda|=1$; тогда (1) дает

$$|\bar{\lambda}\omega(f, g)+\lambda\omega(g, f)|\leqslant 2C. \tag{2}$$

Предположим, что $\omega(f, g)\neq 0$, и пусть в согласии с d)

$$\omega(f, g)=|\omega(f, g)|e^{i\alpha},\quad \omega(g, f)=|\omega(f, g)|e^{i\beta}.$$

Тогда в силу (2)

$$|\omega(f, g)|\cdot|\bar{\lambda}e^{i\alpha}+\lambda e^{i\beta}|\leqslant 2C.$$

Полагая

$$\lambda=e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}},$$

найдем, что

$$\bar{\lambda}e^{i\alpha}+\lambda e^{i\beta}=e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}+e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}=2e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}},$$

и, значит,

$$|\omega(f, g)|\leqslant C\qquad(\|f\|\leqslant 1,\ \|g\|\leqslant 1),$$

что и доказывает теорему, так как при $\omega(f, g)=0$ это соотношение тоже верно.

Следствие. *Если билинейный функционал Ω удовлетворяет условию*

$$|\Omega(f, g)|=|\Omega(g, f)|$$

при любых $f, g\in H$, то

$$\|\Omega\|=\sup_{f\in H}\frac{|\Omega(f, f)|}{(f, f)}.$$

Доказательство. В силу только что доказанной теоремы

$$\|\Omega\|\leqslant\sup_{f\in H}\frac{|\Omega(f, f)|}{(f, f)},$$

а, с другой стороны,

$$\sup_{f\in H}\frac{|\Omega(f, f)|}{(f, f)}\leqslant\sup_{f, g\in H}\frac{|\Omega(f, g)|}{\|f\|\cdot\|g\|}=\|\Omega\|.$$

24. Общий вид билинейного функционала.

Теорема. *Всякий билинейный функционал* $\Omega(f, g)$ *в* H *имеет вид*

$$\Omega(f, g) = (Af, g), \tag{1}$$

где A *есть ограниченный линейный оператор в* H, *который однозначно определяется билинейным функционалом и для которого*

$$\|A\| = \|\Omega\|.$$

Доказательство. То, что подлежащее доказательству представление может быть только единственным, доказывается совсем просто. Действительно, если бы для любых $f, g \in$ H

$$\Omega(f, g) = (A'f, g), \qquad \Omega(f, g) = (A''f, g),$$

то при любых $f, g \in$ H мы имели бы соотношение

$$(A'f - A''f, g) = 0,$$

откуда

$$A'f - A''f = 0,$$

т. е. $A' = A''$.

Для доказательства представления (1) зафиксируем f. Тогда величина $\overline{\Omega(f, g)}$ будет линейным функционалом от g, определенным всюду в H. Следовательно, по теореме Ф. Рисса (п° 19) существует элемент h, однозначно определяемый элементом f, для которого

$$\overline{\Omega(f, g)} = (g, h)$$

или

$$\Omega(f, g) = (h, g)$$

при любом $g \in$ H. Каждому $f \in$ H соответствует свой элемент h. Значит, $h = Af$ и

$$\Omega(f, g) = (Af, g).$$

Так как

$$\Omega(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g) = \alpha_1 \Omega(f_1, g) + \alpha_2 \Omega(f_2, g),$$

то при любом $g \in$ H

$$(A\{\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2\} - \alpha_1 A f_1 - \alpha_2 A f_2, g) = 0.$$

Отсюда в силу произвольности элемента $g \in$ H

$$A(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 A f_1 + \alpha_2 A f_2,$$

и линейность оператора A доказана.

Область определения оператора A есть все пространство. Далее, так как

$$|(Af, g)| \leqslant \|Af\| \cdot \|g\|,$$

то

$$\|\Omega\| = \sup \frac{|\Omega(f, g)|}{\|f\| \cdot \|g\|} = \sup \frac{|(Af, g)|}{\|f\| \cdot \|g\|} \leqslant \sup \frac{\|Af\|}{\|f\|},$$

а, с другой стороны,

$$\|\Omega\| = \sup \frac{|(Af, g)|}{\|f\| \cdot \|g\|} \geqslant \sup \frac{|(Af, Af)|}{\|f\| \cdot \|Af\|} = \sup \frac{\|Af\|}{\|f\|}.$$

Эти соотношения показывают, что оператор A ограничен и что

$$\|\Omega\| = \|A\|.$$

25. Сопряженный оператор. Пусть A — ограниченный линейный оператор, определенный всюду в H.

Выражение

$$(f, Ag)$$

есть, очевидно, билинейный функционал от f, g с нормой $\|A\|$. По доказанной в предыдущем пункте теореме однозначно найдется ограниченный линейный оператор A^*, определенный всюду в H, для которого

$$(f, Ag) = (A^*f, g), \tag{1}$$

каковы бы ни были $f, g \in H$ и $\|A^*\| = \|A\|$.

Итак, каждому ограниченному линейному оператору A, определенному всюду в H, отвечает аналогичный оператор A^*, с той же нормой и такой, что для любых $f, g \in H$ имеет место (1). Этот оператор A^* носит название оператора, *сопряженного* с A. Легко видеть, что $(A^*)^* = A^{**}$ есть исходный оператор A.

Если $A^* = A$, то оператор A называется *самосопряженным* оператором и скалярное произведение (Af, f) при любом $f \in H$ вещественно.

Ограниченный линейный оператор A, определенный всюду в H, называется *нормальным*, если он перестановочен со своим сопряженным, т. е. если

$$A^*A = AA^*.$$

Пусть A, B — два ограниченных линейных оператора, определенных всюду в H. В таком случае

$$(ABf, g) = (Bf, A^*g) = (f, B^*A^*g),$$

откуда следует, что

$$(AB)^* = B^*A^*.$$

Поэтому *произведение двух ограниченных самосопряженных операторов есть самосопряженный оператор в том и только том случае, когда эти операторы перестановочны.*

Теорема. *Если A — ограниченный самосопряженный оператор, то*

$$\sup_{\|f\|=\|g\|=1} |(Af, g)| = \sup_{\|f\|=1} |(Af, f)|.$$

Иными словами, для ограниченного самосопряженного оператора A

$$\|A\| = \max\{|\Lambda|, |\lambda|\},$$

где

$$\Lambda = \sup_{\|f\|=1} (Af, f), \quad \lambda = \inf_{\|f\|=1} (Af, f).$$

Доказательство. Билинейный функционал

$$\Omega(f, g) = (Af, g)$$

удовлетворяет соотношению

$$|\Omega(f, g)| = |\Omega(g, f)|.$$

Поэтому применимо следствие п° 23 и теорема доказана.

Если $\lambda \geqslant 0$, т. е. при любом $f \in H$ имеет место неравенство $(Af, f) \geqslant 0$, то ограниченный самосопряженный оператор A называется *положительным*; обычно это записывается в виде неравенства

$$A \geqslant 0.$$

Это понятие позволяет вводить неравенства между ограниченными самосопряженными операторами и, в частности, рассматривать *монотонные последовательности* таких операторов.

Отметим, что *если A — положительный оператор, то для любых $f, g \in H$*

$$|(Af, g)|^2 \leqslant (Af, f)(Ag, g).$$

Действительно, форма (Af, g) порождает в этом случае квазискалярное произведение в H (см. п° 3):

$$\langle f, g\rangle \equiv (Af, g),$$

и написанное неравенство есть просто неравенство Коши — Буняковского.

Следующее простое предложение (лемма 1), основанное на рассмотрениях настоящего пункта, устанавливает общий вид ограниченного линейного оператора, определенного всюду в L^2.

Лемма 1. *Каждому линейному ограниченному оператору T в $L^2(-\infty, \infty)$ отвечает функция $G(s, t)$, принадлежащая для каждого*

$s \in (-\infty, \infty)$ пространству $L^2(-\infty, \infty)$ по переменной t и обладающая следующими свойствами:

1° *для почти всех t*

$$G(0, t) = 0;$$

2° *для любого $s \in (-\infty, \infty)$*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G(s, t)|^2 dt < M^2 |s|,$$

где M — норма оператора T;

3° *для любой функции $f(t) \in L^2$ почти всюду на оси s*

$$(Tf)(s) = \frac{d}{ds} \int_{-\infty}^{\infty} G(s, t) f(t)\, dt.$$

Доказательство. Обозначим через $e_s(t)$ функцию, равную $\operatorname{sign} s$, если t лежит между 0 и s, и равную 0, если t не принадлежит этому интервалу. В таком случае для любой функции $f(t) \in L^2$

$$\int_0^s (Tf)(t)\, dt = (Tf, e_s) = (f, T^* e_s),$$

и поэтому $T^* e_s = \overline{G_s(t)} = \overline{G(s, t)}$, где $G(s, t)$ есть та функция, существование которой утверждается леммой 1.

Функция $G(s, t)$, как это вытекает из формулировки леммы 1, может быть изменена при любом s на множестве меры нуль оси t. Оказывается, что с помощью такого изменения можно получить функцию, измеримую на плоскости. Это утверждение получается как частный случай из следующего предложения.

Лемма 2. *Пусть $G(s, t) = G_s(t)$ как функция от t принадлежит L^2 при любом $s \in (-\infty, \infty)$, и пусть для любой функции $f(t) \in L^2$ интеграл*

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(s, t) f(t)\, dt \tag{2}$$

представляет измеримую функцию от s. В таком случае, изменяя $G(s, t)$ при каждом s на множестве меры нуль оси t, можно получить функцию, измеримую на плоскости s, t.

Полное доказательство этой леммы в настоящей книге не может быть изложено. Мы приведем лишь схему доказательства, отсылая читателя за обоснованием отдельных пунктов доказательства к книге Хилле и Филлипса «Функциональный анализ и полугруппы» (ИЛ, М., 1962). Прежде всего заметим, что $G_s(t)$ является вектор-функцией скалярного аргумента

$s \in (-\infty, \infty)$. Условие об измеримости функции (2), какова бы ни была функция $f(t) \in L^2$, означает так называемую *слабую измеримость* *) вектор-функции $G_s(t)$. Так как область значений вектор-функции содержится в пространстве L^2, а потому сепарабельна, то из слабой измеримости вектор-функции $G_s(t)$ следует ее *сильная измеримость* **). Последнее означает ***), что существует последовательность счетно-значных ****) вектор-функций $\{g_s^{(n)}(t)\}_1^\infty$ и такое множество e меры нуль, что

$$\lim_{n\to\infty} \| G_s - g_s^{(n)} \| = 0 \tag{3}$$

равномерно при $s \in (-\infty, \infty) \setminus e$. Заметим теперь, что каждая из функций $g_s^{(n)}(t) = g^{(n)}(s, t)$ измерима по (s, t), и возьмем произвольное множество $E \subset (-\infty, \infty) \setminus e$, имеющее конечную меру. Тогда из равномерности по s соотношения (3) будет следовать, что

$$\lim_{m,\, n\to\infty} \int_E \int_{-\infty}^{\infty} | g^{(n)}(s, t) - g^{(m)}(s, t) |^2 \, ds \, dt = 0.$$

Поэтому существует такая измеримая по (s, t) функция $g(s, t)$, что при любом множестве E конечной меры

$$\lim_{n\to\infty} \int_E ds \int_{-\infty}^{\infty} | g(s, t) - g^{(n)}(s, t) |^2 \, dt = 0.$$

С другой стороны, из соотношения

$$\int_{-\infty}^{\infty} | G(s, t) - g(s, t) |^2 \, dt \leqslant$$
$$\leqslant 2 \int_{-\infty}^{\infty} | G(s, t) - g^{(n)}(s, t) |^2 \, dt + 2 \int_{-\infty}^{\infty} | g^{(n)}(s, t) - g(s, t) |^2 \, dt,$$

где каждый интеграл представляет измеримую *****) функцию от s, следует, что

$$\int_E ds \int_{-\infty}^{\infty} | G(s, t) - g(s, t) |^2 \, dt \leqslant$$
$$\leqslant 2 \sup_{s \in E} \| G_s - g_s^{(n)} \|^2 \operatorname{m\acute{e}s} E + 2 \int_E ds \int_{-\infty}^{\infty} | g(s, t) - g^{(n)}(s, t) |^2 \, dt.$$

---

*) См. Э. Хилле и Р. Филлипс, определение 3.5.4 (1).

**) Там же, теорема 3.5.3, следствие 2.

***) Там же, теорема 3.5.3, следствие 1.

****) Вектор-функция $g_s(t) \in L_t^2$ называется *счетно-значной*, если она принимает в L_t^2 не более счетного множества (векторных) значений и притом каждое значение—на измеримом множестве оси s. См. цит. книгу, определение 3.5.2 (3).

*****) В силу измеримости нормы измеримой вектор-функции с сепарабельной областью значений. См. цит. книгу, теорема 3.5.2.

Поэтому

$$\int_E ds \int_{-\infty}^{\infty} |G(s, t)-g(s, t)|^2 dt=0.$$

Так как множество E произвольно, то для почти всех s

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G(s, t)-g(s, t)|^2 dt=0,$$

и значит, для почти всех t при каждом из почти всех s функция $G(s, t)$ совпадает с измеримой по (s, t) функцией $g(s, t)$. Отсюда и вытекает утверждение леммы.

26. Слабая сходимость в H. Будем говорить, что последовательность векторов $f_k \in \mathrm{H}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ *слабо сходится* к вектору f и будем писать $f_k \xrightarrow{\text{сл.}} f$, если для любого $h \in \mathrm{H}$

$$\lim_{k\to\infty} (f_k, h) = (f, h).$$

Аналогично вводятся понятия о последовательностях, фундаментальных в смысле слабой сходимости, и о слабой полноте.

Если последовательность $\{f_k\}_1^\infty$ сходится к f в обычном смысле (или, как мы теперь будем говорить, *сходится сильно*), т. е. если

$$\lim_{k\to\infty} \| f_k - f \| = 0$$

(что мы будем по-прежнему записывать в виде $f_k \to f$), то она сходится и слабо к f, но обратного заключения сделать нельзя. В самом деле, пусть $\{e_k\}_1^\infty$ — какая-нибудь бесконечная ортонормированная последовательность векторов из H. Так как для любого $h \in \mathrm{H}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(h, e_k)|^2 \leqslant (h, h)$$

(см. п° 8), то при любом $h \in \mathrm{H}$

$$\lim_{k\to\infty} (e_k, h) = 0.$$

Последовательность $\{e_k\}_1^\infty$, таким образом, сходится слабо к вектору 0, но сильно эта последовательность не сходится, так как

$$\| e_k - e_i \|^2 = 2 \qquad (i \neq k)$$

и, значит, $\| e_k - e_i \|$ не стремится к нулю при $i, k \to \infty$.

Однако справедлива

Теорема 1. *Если последовательность векторов $\{f_k\}_1^\infty$ слабо сходится к вектору f и если*

$$\lim_{k\to\infty}\|f_k\|=\|f\|,$$

то

$$\lim_{k\to\infty}\|f_k-f\|=0,$$

т. е. последовательность $\{f_k\}_1^\infty$ сходится и сильно к вектору f.

Доказательство вытекает из равенства

$$\|f_k-f\|^2=\|f_k\|^2-(f_k,\ f)-(f,\ f_k)+\|f\|^2.$$

Действительно, в силу условия теоремы

$$\lim_{k\to\infty}\{\|f_k\|^2-(f_k,\ f)-(f,\ f_k)+\|f\|^2\}=0.$$

Важным свойством всякой слабо сходящейся последовательности векторов является ее ограниченность. Доказательство этого свойства не представит никакого труда, если предварительно доказать следующее общее предложение.

Теорема 2. *Если линейные функционалы Φ_1, Φ_2, Φ_3, ... в пространстве H таковы, что при любом $h\in\mathrm{H}$ числовая последовательность $\{\Phi_k(h)\}_1^\infty$ ограничена, то и последовательность норм $\{\|\Phi_k\|\}_1^\infty$ рассматриваемых функционалов ограничена.*

Доказательство немедленно вытекает из леммы о выпуклых функционалах (п° 21). Действительно, положим

$$p_n(h)=|\Phi_n(h)|\qquad(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Это — выпуклые и непрерывные функционалы в H. На основании следствия упомянутой леммы выпуклый функционал

$$p(h)=\sup_n p_n(h)$$

также является непрерывным функционалом, т. е.

$$\mathscr{M}=\sup_{\|h\|\leqslant 1}p(h)<\infty.$$

Следовательно,

$$\|\Phi_n\|\leqslant\mathscr{M}\qquad(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

и теорема доказана.

Следствие 1. *Всякая фундаментальная в смысле слабой сходимости последовательность $\{f_k\}_1^\infty$ ограничена.*

Действительно, каждый вектор f_k порождает функционал $\Phi_k(h)=(h,\ f_k)$. Числовая последовательность $\{\Phi_k(h)\}_1^\infty$ при любом $h\in\mathrm{H}$ в силу условия сходится, а потому ограничена. Теперь остается применить теорему 2 и принять во внимание, что $\| \Phi_k \| = \| f_k \|$.

Следствие 2. *Пространство Гильберта обладает слабой полнотой.*

Доказательство. Если последовательность $\{f_k\}_1^\infty$ фундаментальна в смысле слабой сходимости, то в силу следствия 1 найдется такое $\mathscr{M} < \infty$, что

$$\| f_k \| \leqslant \mathscr{M} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Поэтому существующий при любом $h \in \mathrm{H}$

$$\lim_{k \to \infty} (h, f_k)$$

есть линейный функционал $\Phi(h)$ с нормой $\leqslant \mathscr{M}$. По теореме Рисса $\Phi(h) = (h, f)$, где f — некоторый элемент пространства H. Этот элемент и является слабым пределом последовательности $\{f_k\}_1^\infty$.

27. Компактность. Точечное множество называется *компактным*, если из всякой принадлежащей ему последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность. В соответствии с двумя типами сходимости (сильной и слабой) можно говорить о *компактности сильной* (или просто компактности) и о *компактности слабой*.

Весьма важная теорема анализа — теорема Больцано — Вейерштрасса — устанавливает, что в конечномерном пространстве является компактным всякое бесконечное ограниченное множество точек. Эта теорема оказывается несправедливой для пространства Гильберта, если имеется в виду сильная сходимость. Чтобы в этом убедиться, достаточно взять бесконечную ортонормированную последовательность векторов $\{e_k\}_1^\infty$. Это множество ограничено, но никакая его последовательность не является сильно сходящейся.

В связи со сказанным весьма замечательно, что имеет место следующая

Теорема 1. *Всякое ограниченное точечное множество в* H *слабо компактно.*

Доказательство. Выберем какую-нибудь последовательность $\{g_k\}_1^\infty$ точек, принадлежащих заданному ограниченному точечному множеству, так что

$$\| g_k \| \leqslant C < \infty \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Обозначим через L линейную оболочку множества $\{g_k\}_1^\infty$ и положим

$$\mathrm{F} = \mathrm{H} \ominus \overline{\mathrm{L}}.$$

Возьмем числовую последовательность

$$(g_1, g_k) \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{1}$$

Она ограничена, так как

$$|(g_1, g_k)| \leqslant \|g_1\| \cdot \|g_k\| \leqslant C^2 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Поэтому последовательность (1) содержит сходящуюся подпоследовательность, иначе говоря, последовательность $\{g_k\}_1^\infty$ содержит подпоследовательность $\{g_{1k}\}_{k=1}^\infty$, для которой существует

$$\lim_{k\to\infty} (g_1, g_{1k}).$$

Подобным образом, отправляясь от ограниченной числовой последовательности

$$(g_2, g_{1k}), \tag{2}$$

заключаем, что последовательность $\{g_{1k}\}_{k=1}^\infty$ содержит подпоследовательность $\{g_{2k}\}_{k=1}^\infty$, для которой существует

$$\lim_{k\to\infty} (g_2, g_{2k}).$$

Повторяя эти рассуждения, получим бесконечный ряд последовательностей:

$$\begin{array}{l} g_{11}, \ g_{12}, \ g_{13}, \ \ldots, \\ g_{21}, \ g_{22}, \ g_{23}, \ \ldots, \\ g_{31}, \ g_{32}, \ g_{33}, \ \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

каждая из которых является подпоследовательностью для предыдущей. Диагональная последовательность

$$g_{11}, \ g_{22}, \ g_{33}, \ \ldots,$$

очевидно, обладает тем свойством, что при любом r существует

$$\lim_{k\to\infty} (g_r, g_{kk}).$$

Отсюда уже вытекает, что

$$\lim_{k\to\infty} (g, g_{kk})$$

существует сначала при любом g из L, а затем при любом g из $\overline{\mathrm{L}}$. Если $f \in \mathrm{F}$, то

$$(f, g_{kk}) = 0 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

и, следовательно,

$$\lim_{k\to\infty} (f, g_{kk})$$

существует и в том случае, когда $f \in \mathrm{F}$. Поэтому при любом $h \in \mathrm{H}$

$$\lim_{k\to\infty} (h, g_{kk})$$

существует.

Последовательность $\{g_{kk}\}_{k=1}^{\infty}$, таким образом, фундаментальна в смысле слабой сходимости. В силу слабой полноты пространства эта последовательность слабо сходится к некоторому элементу пространства H, что и доказывает нашу теорему.

Теорема 2. *Для слабой сходимости последовательности векторов $\{g_k\}_1^{\infty}$ необходимо и достаточно, чтобы*

1) *числовая последовательность*

$$(g_k, f) \qquad (k=1, 2, 3, \ldots)$$

сходилась при любом f из некоторого плотного в H *множества* M,

2) *последовательность $\{g_k\}_1^{\infty}$ была ограничена, т. е. имело место неравенство*

$$\|g_k\| \leqslant C < \infty \qquad (k=1, 2, 3, \ldots).$$

Доказательство. Необходимость условия 1) очевидна. Необходимость условия 2) указана в следствии 1 теоремы 2, n° 26.

Обратимся к доказательству достаточности приведенных условий. В силу теоремы 1 настоящего пункта из последовательности $\{g_k\}_1^{\infty}$ можно выделить некоторую слабо сходящуюся подпоследовательность $\{g_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$. Пусть g — слабый предел этой подпоследовательности. По определению, при любом $h \in \mathrm{H}$

$$\lim_{i\to\infty} (h, g_{k_i}) = (h, g).$$

С другой стороны, при любом $f \in \mathrm{M}$ существует

$$\lim_{k\to\infty} (f, g_k).$$

Поэтому при любом $f \in \mathrm{M}$

$$\lim_{k\to\infty} (f, g_k) = (f, g)$$

и остается доказать (мы предоставляем это читателю), что написанное равенство имеет место при замене f любым элементом $h \in \mathrm{H}$.

В заключение пункта приведем один простой признак сильной компактности.

Теорема 3. *Пусть* H — *сепарабельное пространство и $\{e_k\}_1^{\infty}$ — некоторый ортонормированный базис в нем. Пусть, далее,* M — *некоторое ограниченное множество элементов f из* H *и пусть, наконец, при любом $\varepsilon > 0$ существует такой номер $n = n(\varepsilon)$, что* для каждого $f \in M$

$$\|f - \sum_{k=1}^{n} (f, e_k) e_k\| \leqslant \varepsilon.$$

В таком случае множество M компактно.

Доказательство. Условившись для краткости обозначать

$$f^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} (f, e_k) e_k,$$

возьмем какую-нибудь бесконечную последовательность элементов $\{f_j\}_1^\infty \subset M$, а также монотонно стремящуюся к нулю последовательность чисел ε_j и последовательность соответствующих номеров $n_j = n(\varepsilon_j)$.

Рассмотрим последовательность элементов

$$f_1^{(n_1)},\ f_2^{(n_1)},\ \ldots,\ f_m^{(n_1)},\ \ldots,$$

являющихся векторами конечномерного, а именно n_1-мерного пространства. Так как эта последовательность представляет ограниченное множество, то по теореме Больцано — Вейерштрасса она содержит сходящуюся бесконечную часть, которую обозначим

$$f_{11}^{(n_1)},\ f_{12}^{(n_1)},\ \ldots,\ f_{1m}^{(n_1)},\ \ldots$$

Соответствующая часть последовательности $\{f_j\}_1^\infty$ есть

$$f_{11},\ f_{12},\ \ldots,\ f_{1m},\ \ldots \tag{3}$$

При этом

$$\|f_{1m} - f_{1m}^{(n_1)}\| \leqslant \varepsilon_1 \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots).$$

Теперь возьмем ε_2 и поступим с последовательностью (3) так, как ранее поступили с последовательностью $\{f_j\}_1^\infty$. Мы получим последовательность

$$f_{21},\ f_{22},\ \ldots,\ f_{2m},\ \ldots,$$

являющуюся частью последовательности (3), и сходящуюся последовательность

$$f_{21}^{(n_2)},\ f_{22}^{(n_2)},\ \ldots,\ f_{2m}^{(n_2)},\ \ldots$$

При этом будут иметь место неравенства

$$\|f_{2m} - f_{2m}^{(n_1)}\| \leqslant \varepsilon_1,\quad \|f_{2m} - f_{2m}^{(n_2)}\| \leqslant \varepsilon_2 \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots).$$

Продолжая этот процесс до бесконечности, получим бесконечный ряд последовательностей

$$\begin{array}{l} f_{11},\ f_{12},\ \ldots,\ f_{1m},\ \ldots, \\ f_{21},\ f_{22},\ \ldots,\ f_{2m},\ \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{k1},\ f_{k2},\ \ldots,\ f_{km},\ \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

каждая из которых есть часть предыдущей. При этом для любых k и $i \leqslant k$, во-первых, сходится последовательность $\{f_{km}^{(n_i)}\}_{m=1}^{\infty}$ и, во-вторых, имеют место неравенства

$$\| f_{km} - f_{km}^{(n_i)} \| \leqslant \varepsilon_i \qquad (m = 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

Теперь докажем, что диагональная последовательность $\{f_{kk}\}_1^{\infty}$ сходится. Отсюда и будет вытекать справедливость теоремы. С этой целью заметим, что при любом i диагональная последовательность $\{f_{kk}^{(n_i)}\}_{k=1}^{\infty}$ является сходящейся, а также, что из неравенств (4) при любом $k \geqslant i$ вытекает неравенство

$$\| f_{kk} - f_{kk}^{(n_i)} \| \leqslant \varepsilon_i.$$

Поэтому при любых $p \geqslant i$, $q \geqslant i$,

$$\| f_{pp} - f_{qq} \| \leqslant \| f_{pp} - f_{pp}^{(n_i)} \| + \| f_{qq} - f_{qq}^{(n_i)} \| + \| f_{pp}^{(n_i)} - f_{qq}^{(n_i)} \| \leqslant$$
$$\leqslant 2\varepsilon_i + \| f_{pp}^{(n_i)} - f_{qq}^{(n_i)} \|.$$

Каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, мы можем сначала выбрать i так, чтобы $2\varepsilon_i \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon$, а затем найти так $\mathcal{N}(\varepsilon) \geqslant i$, чтобы при любых $p \geqslant \mathcal{N}(\varepsilon)$, $q \geqslant \mathcal{N}(\varepsilon)$ имело место неравенство

$$\| f_{pp}^{(n_i)} - f_{qq}^{(n_i)} \| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из получаемой таким путем оценки следует, что последовательность $\{f_{kk}\}_1^{\infty}$ сходится.

28. Один критерий ограниченности оператора.

Теорема. *Пусть линейный оператор A определен во всем пространстве и пусть существует второй линейный оператор (обозначим его A^*), также определенный во всем пространстве, для которого*

$$(Af, g) = (f, A^*g)$$

при любых $f, g \in \mathrm{H}$. В таком случае оператор A ограничен и, следовательно, A^* есть с ним сопряженный оператор.

Доказательство. Допустим противное и предположим, что существует такая последовательность векторов $\{f_k\}_1^\infty$, что

$$\| f_k \| = 1, \quad \| A f_k \| > k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Величины

$$(g, Af_k) = \Phi_k(g) \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

являются линейными функционалами в H. Так как

$$\Phi_k(g) = (A^* g, f_k) \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

то при любом $g \in$ H числовая последовательность $\{\Phi_k(g)\}_1^\infty$ ограничена. На основании теоремы 2 п° 26 последовательность норм $\| \Phi_k \|$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, т. е. последовательность чисел $\| A f_k \|$, также ограничена, что противоречит предположению.

Таким образом, теорема доказана.

29. Линейный оператор в сепарабельном пространстве. В этом пункте мы будем рассматривать линейные операторы в сепарабельном гильбертовом пространстве H и будем предполагать, что областью определения оператора является все пространство. Мы покажем, что ограниченные операторы этого рода допускают *матричное представление*, которое вполне аналогично известному из элементов линейной алгебры матричному представлению операторов в конечномерных пространствах.

Выберем в H какой-нибудь ортонормированный базис $\{e_k\}_1^\infty$ и положим

$$Ae_k = g_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

и

$$(Ae_k, e_j) = a_{jk} \quad (j, k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{1}$$

Таким образом,

$$g_k = \sum_{j=1}^{\infty} a_{jk} e_j \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

и

$$\sum_{j=1}^{\infty} | a_{jk} |^2 < \infty \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Заметим, что если оператор A определен не всюду в H, а на плотном в H множестве D, то и тогда существует в H ортонормированный базис $\{e_k\}_1^\infty$, элементы которого принадлежат D.

Введем бесконечную матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = (a_{jk})_{j,k=1}^{\infty} = (a_{jk}),$$

элементами k-го столбца которой являются компоненты вектора, в который оператор A переводит k-й координатный вектор.

Если оператор A ограничен, то написанная бесконечная матрица (a_{jk}) вполне его определяет. Для доказательства нужно показать, как по матрице (a_{jk}) и ортонормированному базису $\{e_k\}_1^{\infty}$ восстановить оператор. Прежде всего мы должны положить

$$Ae_k = \sum_{j=1}^{\infty} a_{jk} e_j \qquad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Так как оператор A линеен, то по значениям на элементах базиса мы можем его восстановить на линейной оболочке базиса, т. е. на всех векторах, которые в рассматриваемом базисе имеют лишь конечное число (свое для каждого вектора) отличных от нуля компонент. Значение оператора A на произвольном векторе $f \in \mathrm{H}$ найдется в силу непрерывности оператора путем предельного перехода.

Нетрудно написать окончательные формулы для компонент вектора Af через компоненты вектора f; а именно, если

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k, \tag{2}$$

то

$$Af = \sum_{k=1}^{\infty} y_k e_k, \tag{3}$$

где

$$y_k = \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} x_j. \tag{4}$$

Действительно, пусть

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k;$$

тогда

$$Af_n = \sum_{k=1}^{\infty} y_k^{(n)} e_k,$$

где

$$y_k^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j,$$

и в силу ограниченности оператора

$$y_k = (Af, e_k) = \lim_{n\to\infty} (Af_n, e_k) = \lim_{n\to\infty} y_k^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j = \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} x_j.$$

Определение. Если оператор A определен всюду в H и если его значение на любом векторе (2) дается формулами (3) и (4), то говорят, что оператор A допускает *матричное представление в ортонормированном базисе* $\{e_k\}_1^\infty$.

Таким образом, мы установили, что *всякий ограниченный линейный оператор, определенный во всем пространстве, допускает матричное представление в любом ортонормированном базисе*, и в этом состоит упомянутая в самом начале настоящего пункта аналогия сепарабельного пространства Гильберта с конечномерным пространством по отношению к ограниченным линейным операторам.

Теорема 1. *Если определенный всюду в сепарабельном пространстве* H *оператор A допускает матричное представление в каком-нибудь ортонормированном базисе, то он ограничен.*

Доказательство. Ряды

$$(Af, e_k) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} x_j \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

сходятся, по условию, для любого вектора

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j,$$

если $\{e_j\}_1^\infty$ есть упомянутый в теореме ортонормированный базис, в котором оператор A допускает матричное представление. Поэтому в силу теоремы Ландау (см. п° 21) имеют место соотношения

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_{kj}|^2 < \infty \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{5}$$

В силу этих неравенств выражения

$$\Phi_k(f) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} x_j \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

являются линейными функционалами от

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j.$$

Поэтому

$$p_n(f)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|\Phi_k(f)|^2} \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

есть выпуклый и непрерывный функционал от f. А так как

$$\sum_{k=1}^{n}|\Phi_k(f)|^2=\sum_{k=1}^{n}|(Af, e_k)|^2\leqslant\|Af\|^2,$$

то при любом $f\in H$ последовательность $\{p_n(f)\}_1^\infty$ ограничена. На основании следствия леммы о выпуклых функционалах функционал

$$p(f)=\sup_n p_n(f)=\lim_{n\to\infty}p_n(f)=\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}|\Phi_k(f)|^2}=\|Af\|$$

непрерывен, т. е. существует такая константа $\mathcal{M}<\infty$, что

$$p(f)\leqslant\mathcal{M}\|f\|.$$

Но это и означает, что оператор A ограничен.

Доказанная теорема может быть сформулирована также следующим образом: *если для любых x_k ($k=1, 2, 3, \ldots$), удовлетворяющих неравенству*

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2<\infty,$$

имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big|\sum_{j=1}^{\infty}a_{kj}x_j\Big|^2<\infty,$$

то существует такая константа $\mathcal{M}$, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big|\sum_{j=1}^{\infty}a_{kj}x_j\Big|^2\leqslant\mathcal{M}^2\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2.$$

Это — обобщение на матричный случай теоремы Ландау для $p=2$ (см. п° 21); последняя получается, если $a_{kj}=0$ при $k>1$.

Условимся писать

$$A\sim(a_{jk}),$$

если ограниченному линейному оператору A, определенному всюду в H, отвечает согласно (1) матрица (a_{jk}). При этом ортонормированный базис $\{e_k\}_1^\infty$ считается неизменным.

Если

$$A\sim(a_{jk})\qquad B\sim(b_{jk}),$$

то, как легко проверить,

$$AB \sim (c_{jk}),$$

где

$$c_{jk} = \sum_{r=1}^{\infty} a_{jr} b_{rk} \qquad (j,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

и, определяя при помощи этого равенства умножение матриц, можем написать, что

$$AB \sim (a_{jr})(b_{rk}).$$

Далее, если

$$A \sim (a_{jk})$$

и

$$A^* \sim (a^*_{jk}),$$

то

$$a^*_{jk} = \bar{a}_{kj} \qquad (j,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Поэтому условие самосопряженности ограниченного оператора имеет вид

$$a_{jk} = \bar{a}_{kj}. \tag{6}$$

Матрицы, для которых имеет место (6), называют *эрмитовыми*.

Билинейный функционал, порождаемый оператором A, имеет вид

$$(Af,\ g) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} x_j \Big) \bar{y}_k,$$

где

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k, \qquad g = \sum_{k=1}^{\infty} y_k e_k.$$

В написанной двойной сумме можно изменить порядок суммирования, ибо равенство

$$(Af,\ g) = (f,\ A^* g)$$

означает, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} x_j \Big) \bar{y}_k = \sum_{j=1}^{\infty} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_{kj} \bar{y}_k \Big) x_j.$$

Из неравенства

$$|(Af,\ g)| \leqslant \mathscr{M} \, \|f\| \cdot \|g\| \tag{7}$$

следует

$$\Big| \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{kj} x_j \bar{y}_k \Big| \leqslant \mathscr{M} \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2}.$$

Если векторы f и g имеют лишь конечное число отличных от нуля компонент, то последнее неравенство обращается в

$$\left|\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} a_{kj}x_j\bar{y}_k\right| \leqslant \mathcal{M}\sqrt{\sum_{j=1}^{p}|x_j|^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{q}|y_k|^2}. \tag{8}$$

Т е о р е м а 2. *Для того чтобы матрица* (a_{jk}) *представляла ограниченный линейный оператор, определенный всюду в* H, *необходимо и достаточно выполнение при любых конечных* p, q *и любых* $x_1, x_2, \ldots, x_p$; $y_1, y_2, \ldots, y_q$ *неравенства* (8), *где* $\mathcal{M}$ — *фиксированное число.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если оператор A ограничен и

$$a_{jk} = (Ae_k, e_j) \qquad (j, k = 1, 2, 3, \ldots),$$

то из (7) следует (8).

Пусть теперь дана матрица (a_{jk}), удовлетворяющая условию (8). Покажем, что матрица (a_{jk}) определяет ограниченный оператор A.

Прежде всего, из (8) при

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_{p-1} = 0, \qquad x_p \neq 0,$$
$$y_1 = y_2 = \ldots = y_{n-1} = 0$$

получаем

$$\left|\sum_{j=n}^{q} a_{jp}\bar{y}_j\right| \leqslant \mathcal{M}\sqrt{\sum_{j=n}^{q}|y_j|^2},$$

откуда следует сходимость ряда

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{jk}\bar{y}_j$$

при любой последовательности $\{y_j\}_1^\infty$ из l^2. Заключая отсюда по теореме Ландау (см. п° 21) о сходимости рядов

$$\sum_{j=1}^{\infty}|a_{jk}|^2 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

определим оператор A_0 на элементах базиса формулами

$$A_0e_k = \sum_{j=1}^{\infty} a_{jk}e_j \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

а затем по линейности — на всех векторах с конечным числом компонент, отличных от нуля.

Докажем, что оператор A_0 ограничен.

Имеем в силу (8) при любых f, g с конечным числом компонент, отличных от нуля,

$$|(A_0f, g)| \leqslant \mathscr{M} \|f\| \cdot \|g\|. \tag{9}$$

Из последнего неравенства следует ограниченность A_0.

Действительно, в силу непрерывности скалярного произведения, неравенство (9) выполняется для всех $g \in$ H. Полагая в (9)

$$g = A_0 f,$$

получим

$$\|A_0 f\|^2 \leqslant \mathscr{M} \|f\| \cdot \|A_0 f\|,$$

и значит,

$$\|A_0 f\| \leqslant \mathscr{M} \|f\|.$$

Расширяя A_0 по непрерывности на все пространство H, мы получаем ограниченный оператор A и

$$A \sim (a_{jk}).$$

Теорема доказана.

Заметим, что если матрица (a_{jk}) эрмитова, т. е.

$$a_{jk} = \overline{a}_{kj},$$

то условие (8) можно заменить (см. n° 25) на

$$\left| \sum_{j,\, k=1}^{p} a_{jk} x_k \overline{x}_j \right| \leqslant \mathscr{M} \sum_{j=1}^{p} |x_j|^2.$$

30. Понятие о вполне непрерывном операторе. Гильберт первый обратил внимание на один важный класс операторов, а именно, на операторы вполне непрерывные. Определенный всюду в H линейный оператор A называется *вполне непрерывным*, если он переводит всякое ограниченное множество точек во множество компактное в смысле сильной сходимости.

Вполне непрерывный оператор ограничен. Действительно, в противном случае существовала бы последовательность точек f_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, для которой

$$\|f_k\| = 1, \ \|Af_k\| > k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

но множество точек $\{Af_k\}_1^\infty$ должно быть компактным, что явно невозможно.

Вполне непрерывные операторы допускают другое определение: заданный всюду в H линейный оператор A называется вполне непрерывным, если он переводит всякую слабо сходящуюся последовательность в последовательность сильно сходящуюся.

Доказательство эквивалентности этих определений предоставляем читателю.

Равным образом предоставляем читателю доказательство следующих простых фактов:

1. Если оператор A вполне непрерывен, а оператор B определен всюду в H и ограничен, то операторы AB и BA вполне непрерывны.

2. Если A_1, A_2 — вполне непрерывные операторы, то $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2$ также вполне непрерывный оператор.

Теорема 1. *Если A есть ограниченный линейный оператор, определенный всюду в* H, *и если оператор A^*A вполне непрерывен, то и оператор A вполне непрерывен.*

Доказательство. Пусть M — какое-нибудь бесконечное ограниченное ($\|f\| < C$) множество точек f. Пусть $\{f_k\}_1^\infty$ — некоторая последовательность элементов этого множества, которая оператором A^*A переводится в сходящуюся (сильно) последовательность.

Поскольку

$$\|Af_n - Af_m\|^2 = (A(f_n - f_m),\ A(f_n - f_m)) =$$
$$= (A^*A(f_n - f_m),\ f_n - f_m) \leqslant \|A^*Af_n - A^*Af_m\| \cdot \|f_n - f_m\|,$$

и

$$\lim_{m,\ n \to \infty} \|A^*Af_n - A^*Af_m\| = 0,$$
$$\|f_n - f_m\| \leqslant 2C,$$

то

$$\lim_{m,\ n \to \infty} \|Af_n - Af_m\| = 0,$$

т.е. последовательность $\{Af_n\}_1^\infty$ сходится, чем теорема и доказана.

Следствие. *Если оператор A вполне непрерывен, то тем же свойством обладает и оператор A^*.*

Действительно, если оператор A вполне непрерывен, то вполне непрерывен и оператор $AA^* = (A^*)^*A^*$; остается применить только что доказанную теорему.

Для установления вполне непрерывности оператора часто оказывается полезной следующая

Теорема 2. *Если для любого $\varepsilon > 0$ существует вполне непрерывный оператор A_ε, который удовлетворяет неравенству*

$$\|A - A_\varepsilon\| \leqslant \varepsilon,$$

то и оператор A вполне непрерывен.

Доказательство. Возьмем последовательность положительных чисел $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots$ ($\lim\limits_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$) и рассмотрим отвечающую ей в силу условия теоремы последовательность вполне непрерывных операторов A_{ε_1}, A_{ε_2}, ... Пусть M — произвольное ограниченное множество точек f ($\|f\| \leqslant C$) нашего пространства H. Возьмем произвольную бесконечную последовательность $\{f_k\}_1^\infty$ точек, принадлежащих M. По условию, из этой последовательности можно выделить подпоследовательность

$$f_{11},\ f_{12},\ f_{13},\ \ldots, \tag{1}$$

которая оператором A_{ε_1} переводится в сходящуюся последовательность. Из последовательности (1) выделим подпоследовательность

$$f_{21},\ f_{22},\ f_{23},\ \ldots, \tag{2}$$

которая переводится в сходящуюся последовательность оператором A_{ε_2}. Продолжая этот процесс, получим бесконечный ряд последовательностей

$$\begin{array}{l} f_{11},\ f_{12},\ f_{13},\ \ldots, \\ f_{21},\ f_{22},\ f_{23},\ \ldots, \\ f_{31},\ f_{32},\ f_{33},\ \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

из которых каждая следующая является частью предыдущей. Диагональная последовательность $\{f_{kk}\}_1^\infty$ переводится в сходящуюся каждым из операторов A_{ε_i}. Докажем, что диагональная последовательность $\{f_{kk}\}_1^\infty$ переводится в сходящуюся также и оператором A. Для этого достаточно доказать, что

$$\lim_{m,\ n \to \infty} \|Af_{nn} - Af_{mm}\| = 0. \tag{3}$$

Мы имеем неравенство

$$\|Af_{nn} - Af_{mm}\| \leqslant \|(A - A_{\varepsilon_k}) f_{nn}\| + \|(A - A_{\varepsilon_k}) f_{mm}\| + \\ + \|A_{\varepsilon_k} f_{nn} - A_{\varepsilon_k} f_{mm}\| \leqslant 2C\varepsilon_k + \|A_{\varepsilon_k} f_{nn} - A_{\varepsilon_k} f_{mm}\|.$$

Беря достаточно большое k, мы можем сделать сколь угодно малым первый член правой части. После этого мы можем взять столь большое $\mathcal{N}$, чтобы второй член правой части сделался сколь угодно малым при $m > \mathcal{N}$, $n > \mathcal{N}$, и соотношение (3) доказано.

31. Абсолютная норма. Снова предположим, что пространство H сепарабельно, и возьмем ограниченный линейный оператор A, определенный всюду в этом пространстве. Пусть $\{f_k\}_1^\infty$ и $\{e_i\}_1^\infty$ — два произвольных ортонормированных базиса в H. Нас будет интересовать тот случай, когда

$$\sum_{i,\ k=1}^{\infty} |(Af_k,\ e_i)|^2 < \infty.$$

Так как (Af_k, e_i) $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ представляют коэффициенты Фурье вектора Af_k в базисе $\{e_i\}_1^\infty$, то

$$\sum_{i,\,k=1}^{\infty} |(Af_k, e_i)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|Af_k\|^2. \tag{1}$$

С другой стороны, рассматривая скалярные произведения $(A^*e_i, f_k) = (e_i, Af_k)$ как коэффициенты Фурье вектора A^*e_i в базисе $\{f_k\}_1^\infty$, заключаем, что

$$\sum_{i,\,k=1}^{\infty} |(Af_k, e_i)|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|A^*e_i\|^2. \tag{1'}$$

Из сравнения формул (1) и (1') находим, что величина (конечная или бесконечная)

$$\sqrt{\sum_{i,\,k=1}^{\infty} |(Af_k, e_i)|^2} = N(A) \tag{2}$$

не зависит от выбора базисов $\{f_k\}_1^\infty$ и $\{e_i\}_1^\infty$, а зависит лишь от оператора A. Эту величину называют *абсолютной нормой* оператора A. Из наших рассмотрений следует, что

$$N(A^*) = N(A). \tag{3}$$

Так как в качестве f_1 можно взять произвольный единичный вектор, а в силу (1)

$$\|Af_1\| \leqslant N(A),$$

то

$$\|A\| \leqslant N(A),$$

т. е. *обычная норма оператора не превосходит его абсолютной нормы.*

Легко видеть также, что если C — произвольный ограниченный оператор, то

$$N(CA) \leqslant \|C\| \cdot N(A),$$

а потому в силу (3) и

$$N(AC) \leqslant \|C\| \cdot N(A).$$

Абсолютная норма обладает основными свойствами нормы и, в частности, для нее выполняется неравенство треугольника

$$N(A+B) \leqslant N(A) + N(B).$$

Действительно,

$$N(A+B)=\sqrt{\sum_{j=1}^{\infty}\|Af_j+Bf_j\|^2}\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{\sum_{j=1}^{\infty}\{\|Af_j\|+\|Bf_j\|\}^2}\leqslant\sqrt{\sum_{j=1}^{\infty}\|Af_j\|^2}+\sqrt{\sum_{j=1}^{\infty}\|Bf_j\|^2}=$$

$$=N(A)+N(B).$$

Если $\{A_k\}_1^\infty$ есть бесконечная последовательность операторов, имеющих конечную абсолютную норму, и если

$$\sum_1^\infty N(A_k)<\infty,$$

то сходится операторный ряд

$$A=\sum_1^\infty A_k$$

и

$$N(A)\leqslant\sum_1^\infty N(A_k).$$

Доказательство этого факта предоставляем читателю.

Так как $N(A)$ не зависит от выбора ортонормированных базисов $\{f_k\}_1^\infty$ и $\{e_j\}_1^\infty$, то мы могли бы их взять одинаковыми и тогда в определении абсолютной нормы фигурировали бы числа

$$(Ae_k,\ e_j)=a_{jk}\qquad (j,\ k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

которые являются элементами матрицы, представляющей оператор A (см. n° 29) в базисе $\{e_i\}_1^\infty$.

Мы видим, таким образом, что операторы с конечной абсолютной нормой образуют довольно узкий класс — это операторы, допускающие матричное представление, для которого

$$\sum_{j,\,k=1}^{\infty}|a_{jk}|^2<\infty.$$

Теорема. *Если $N(A)<\infty$, то оператор A вполне непрерывен.*

Доказательство. Пусть $\{g_k\}_1^\infty$ — какой-нибудь ортонормированный базис в H. Так как

$$N(A)=\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\|A^*g_k\|^2},$$

то при любом $\varepsilon > 0$ можно найти n_ε, для которого

$$\sum_{k=n_\varepsilon+1}^{\infty} \| A^* g_k \|^2 < \varepsilon^2.$$

Теперь введем оператор A_ε с помощью формулы

$$A_\varepsilon f = \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} (Af,\ g_k)\, g_k.$$

Этот оператор определен всюду в H. Он переводит любое ограниченное множество векторов $f \in$ H в ограниченное множество векторов конечномерного пространства (размерности n_ε). Это последнее множество компактно в силу классической теоремы Больцано — Вейерштрасса. Поэтому оператор A_ε вполне непрерывен. А так как при любом $f \in$ H

$$\| Af - A_\varepsilon f \|^2 = \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{\infty} |(Af,\ g_k)|^2 = \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{\infty} |(f,\ A^* g_k)|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \| f \|^2 \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{\infty} \| A^* g_k \|^2 \leqslant \varepsilon^2 \| f \|^2,$$

то применима теорема 2 п° 30. Следовательно, оператор A вполне непрерывен.

Подчеркнем, что конечность абсолютной нормы или, что то же самое, сходимость ряда

$$\sum_{j,\ k=1}^{\infty} | a_{jk} |^2,$$

является только достаточным, но не необходимым условием для вполне непрерывности матричного оператора. В частном случае, когда числа a_{jk} удовлетворяют соотношениям

$$a_{jk} = 0 \quad \text{при} \quad | j - k | > r \qquad (j,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

где r фиксировано, можно указать необходимое и достаточное условие вполне непрерывности. Оно состоит в том, что

$$\lim_{j,\ k \to \infty} a_{jk} = 0.$$

Для простоты проведем доказательство в предположении, что $r = 1$. В этом случае определяющая оператор матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \gamma_1 & \alpha_2 & \beta_2 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & \gamma_2 & \alpha_3 & \beta_3 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \gamma_3 & \alpha_4 & \beta_4 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} \qquad (4)$$

и носит название *матрицы Якоби* или *якобиевой матрицы*. При $r>1$ матрицу называют *обобщенной якобиевой матрицей*.

Пусть оператор A, порождаемый матрицей (4), вполне непрерывен. Последовательность векторов

$$Ae_j=\beta_{j-1}e_{j-1}+\alpha_j e_j+\gamma_j e_{j+1}$$
$$(\beta_0=0,\ j=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

должна, таким образом, сильно сходиться. Допуская, что подлежащее доказательству утверждение неверно, выделим последовательность $j_1,\ j_2,\ j_3,\ \ldots$ так, чтобы

$$j_k\geqslant j_{k-1}+3$$

и

$$|\beta_{j_k-1}|^2+|\alpha_{j_k}|^2+|\gamma_{j_k}|^2\geqslant\varepsilon>0.$$

Простое вычисление показывает, что

$$\|Ae_{j_n}-Ae_{j_m}\|^2=|\beta_{j_n-1}|^2+|\alpha_{j_n}|^2+|\gamma_{j_n}|^2+$$
$$+|\beta_{j_m-1}|^2+|\alpha_{j_m}|^2+|\gamma_{j_m}|^2\geqslant 2\varepsilon,$$

что противоречит сильной сходимости последовательности $\{Ae_k\}_1^\infty$.

Докажем вторую часть утверждения (достаточность). Пусть

$$\alpha_k\to 0,\quad \beta_k\to 0,\quad \gamma_k\to 0\qquad (k\to\infty),$$

и пусть последовательность $\{f^{(k)}\}_1^\infty$ слабо сходится к f. Так как

$$Af^{(n)}=\sum_{k=1}^\infty x_k^{(n)}Ae_k=\sum_{k=1}^\infty x_k^{(n)}(\beta_{k-1}e_{k-1}+\alpha_k e_k+\gamma_k e_{k+1})=$$
$$=\sum_{k=1}^\infty(\beta_k x_{k+1}^{(n)}+\alpha_k x_k^{(n)}+\gamma_{k-1}x_{k-1}^{(n)})\,e_k\qquad(\gamma_0=0),$$

то

$$\|Af^{(n)}-Af^{(m)}\|^2=$$
$$=\sum_{k=1}^q|\beta_k\{x_{k+1}^{(n)}-x_{k+1}^{(m)}\}+\alpha_k\{x_k^{(n)}-x_k^{(m)}\}+\gamma_{k-1}\{x_{k-1}^{(n)}-x_{k-1}^{(m)}\}|^2+$$
$$+\sum_{k=q+1}^\infty|\beta_k\{x_{k+1}^{(n)}-x_{k+1}^{(m)}\}+\alpha_k\{x_k^{(n)}-x_k^{(m)}\}+\gamma_{k-1}\{x_{k-1}^{(n)}-x_{k-1}^{(m)}\}|^2.$$

Первый член правой части стремится к нулю при фиксированном q, если $m,\ n\to\infty$. Поэтому достаточно показать, что второй член правой части можно сделать сколь угодно малым при всех $m,\ n$, беря достаточно большое q. Но если q достаточно велико и $k>q$, то

$$|\beta_k|<\varepsilon,\quad |\alpha_k|<\varepsilon,\quad |\gamma_{k-1}|<\varepsilon,$$

и поэтому

$$\sum_{k=q+1}^{\infty} |\beta_k \{x_{k+1}^{(n)} - x_{k+1}^{(m)}\} + \alpha_k \{x_k^{(n)} - x_k^{(m)}\} + \gamma_{k-1} \{x_{k-1}^{(n)} - x_{k-1}^{(m)}\}|^2 \leqslant \leqslant 9\varepsilon^2 \|f^{(n)} - f^{(m)}\|^2.$$

Таким образом, наше утверждение доказано.

32. Операторы Гильберта — Шмидта. Возьмем интегральный оператор в $L^2(-\infty, \infty)$, который определяется формулой

$$g = Kf = \int_{-\infty}^{\infty} K(s, t) f(t)\, dt.$$

Если

$$\int\int_{-\infty}^{\infty} |K(s, t)|^2 \, ds\, dt < \infty, \tag{1}$$

то ядро $K(s, t)$ называют *ядром Гильберта — Шмидта*, а порождаемый им оператор K — *интегральным оператором Гильберта — Шмидта*.

Примем, что условие (1) выполнено и покажем, прежде всего, что оператор K является в этом случае определенным всюду в $L^2(-\infty, \infty)$ ограниченным оператором. Действительно, в силу теоремы Фубини и неравенства Коши — Буняковского, для почти всех s:

$$|g(s)|^2 \leqslant \|f\|^2 \int_{-\infty}^{\infty} |K(s, t)|^2 \, dt.$$

Отсюда находим с помощью интегрирования, что

$$\|g\|^2 \leqslant \|f\|^2 \int\int_{-\infty}^{\infty} |K(s, t)|^2 \, ds\, dt$$

и, значит,

$$\|K\| \leqslant \sqrt{\int\int_{-\infty}^{\infty} |K(s, t)|^2 \, ds\, dt}. \tag{2}$$

Покажем теперь, что оператор K имеет конечную абсолютную норму, которая при этом совпадает с правой частью неравенства (2).

Для этого возьмем в $L^2(-\infty, \infty)$ какую-нибудь полную ортонормированную систему $\{\varphi_k(t)\}_1^{\infty}$ в качестве базиса и вычислим элементы a_{jk} матрицы оператора K. Они равны

$$a_{jk}=(K\varphi_k,\ \varphi_j)=\iint\limits_{-\infty}^{\infty} K(s,\ t)\overline{\Phi_{jk}(s,\ t)}\,ds\,dt, \tag{3}$$

где

$$\Phi_{jk}(s,\ t)=\varphi_j(s)\overline{\varphi_k(t)}. \tag{4}$$

Функции $\Phi_{jk}(s,\ t)$ образуют полную ортонормированную систему в гильбертовом пространстве $L^2 \times L^2$ функций двух переменных с суммируемым квадратом модуля в плоскости $s,\ t$. Поэтому в силу уравнения замкнутости

$$N^2(K)\equiv \sum_{j,\ k=1}^{\infty} |a_{jk}|^2=\iint\limits_{-\infty}^{\infty} |K(s,\ t)|^2\,ds\,dt,$$

что и требовалось доказать.

Оказывается, что *интегральными операторами Гильберта — Шмидта исчерпывается весь класс операторов в* $L^2(-\infty,\ \infty)$, *имеющих конечную абсолютную норму.*

Действительно, пусть A — произвольный линейный оператор с конечной абсолютной нормой в пространстве $L^2(-\infty,\ \infty)$. Возьмем ортонормированный базис (4) в $L^2 \times L^2$ и положим

$$K(s,\ t)\sim \sum_{j,\ k=1}^{\infty}(A\varphi_k,\ \varphi_j)\,\Phi_{jk}(s,\ t).$$

Ряд справа сходится в пространстве $L^2 \times L^2$ и

$$\sum_{j,\ k=1}^{\infty}|(A\varphi_k,\ \varphi_j)|^2=N^2(A)<\infty.$$

Таким образом,

$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty}|K(s,\ t)|^2\,ds\,dt<\infty,$$

так что $K(s,\ t)$ является ядром Гильберта — Шмидта. Остается показать, что Af совпадает при любом $f\in L^2(-\infty,\ \infty)$ с

$$Kf=\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(s,\ t)\,f(t)\,dt.$$

Но это следует из того, что при любых $k,\ j\ (=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$

$$(K\varphi_k,\ \varphi_j)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\overline{\varphi_j(s)}\,ds\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(s,\ t)\,\varphi_k(t)\,dt=(A\varphi_k,\ \varphi_j).$$

Рассмотрения настоящего пункта дают основание называть *оператором Гильберта — Шмидта* всякий линейный оператор в сепарабельном пространстве, имеющий конечную абсолютную норму.

33. Сходящиеся последовательности ограниченных линейных операторов. Различают три вида сходимости последовательности $\{A_n\}_1^\infty$ ограниченных линейных операторов, определенных всюду в H: сходимость *слабую*, сходимость *сильную* (или просто сходимость) и сходимость *равномерную*.

Последовательность $\{A_n\}_1^\infty$ называется

слабо сходящейся к оператору A $\left(A_n \xrightarrow{\text{сл.}} A\right)$	если для любого $f \in \mathrm{H}$ $A_n f \xrightarrow{\text{сл.}} Af$
сильно сходящейся к оператору A $(A_n \to A)$	если для любого $f \in \mathrm{H}$ $A_n f \to Af$
равномерно сходящейся к оператору A $(A_n \Rightarrow A)$	если $\| A_n - A \| \to 0.$

Если последовательность операторов сходится равномерно, то она и тем более сходится сильно; если она сходится сильно, то и подавно сходится слабо.

Из слабой сходимости A_n к A и B_n к B следует слабая сходимость $A_n \pm B_n$ к $A \pm B$, но не следует слабая сходимость произведения $A_n B_n$.

Теорема 1. *Если последовательность $\{A_n\}_1^\infty$ ограниченных линейных операторов, определенных всюду в* H, *слабо сходится, то последовательность $\{\| A_n \|\}_1^\infty$ норм этих операторов ограничена.*

Действительно, $p_n(h) = \| A_n h \|$ есть выпуклый непрерывный функционал. В каждой точке $h \in \mathrm{H}$ последовательность $\{p_n(h)\}_1^\infty$ ограничена на основании следствия 1 n° 26, так как последовательность элементов $\{A_n h\}_1^\infty$ слабо сходится. Поэтому в силу следствия леммы n° 21

$$\sup_{n\to\infty} \| A_n h \| = p(h)$$

есть выпуклый непрерывный функционал, откуда вытекает, что

$$p(h) \leqslant \mathcal{M} \| h \|,$$

а значит, при любом n

$$\| A_n h \| \leqslant \mathcal{M} \| h \|,$$

и поэтому

$$\|A_n\| \leqslant \mathcal{M}.$$

Теорема 2. *Если последовательность билинейных функционалов $\{\Omega_n(f, g)\}_1^\infty$ такова, что при любых f, g существует конечный предел*

$$\lim_{n\to\infty} \Omega_n(f, g) = \omega(f, g),$$

то этот предел есть билинейный функционал.

Как легко видеть, достаточно доказать, что при любых $f, g \in H$

$$\frac{|\omega(f, g)|}{\|f\|\cdot\|g\|} \leqslant C < \infty.$$

Каждый билинейный функционал $\Omega_n(f, g)$ порождается некоторым ограниченным линейным оператором:

$$\Omega_n(f, g) = (A_n f, g).$$

Последовательность операторов $\{A_n\}_1^\infty$, таким образом, слабо сходится. Следовательно,

$$|(A_n f, g)| \leqslant C\|f\|\cdot\|g\|,$$

т. е.

$$|\Omega_n(f, g)| \leqslant C\|f\|\cdot\|g\|$$

для всех $f, g \in H$. Отсюда и вытекает, что

$$|\omega(f, g)| \leqslant C\|f\|\cdot\|g\|.$$

В заключение докажем еще одно простое предложение, которое в дальнейшем найдет важное применение.

Теорема 3. *Всякая монотонно убывающая последовательность ограниченных положительных операторов сильно сходится.*

Доказательство. Пусть даны ограниченные самосопряженные операторы A_k $(k = 1, 2, \ldots)$, удовлетворяющие соотношениям

$$A_k \geqslant 0, \qquad A_{k+1} \leqslant A_k.$$

Так как

$$A_m - A_n \geqslant 0 \qquad (n \geqslant m),$$

то при любых f, g:

$$|((A_m - A_n) f, g)| \leqslant \sqrt{((A_m - A_n) f, f)}\sqrt{((A_m - A_n) g, g)} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\|A_1\|}\cdot\|g\|\cdot\sqrt{((A_m - A_n) f, f)}\,.$$

Беря

$$g = (A_m - A_n) f,$$

получим отсюда, что

$$\| (A_n - A_m) f \| \leqslant \sqrt{\| A_1 \|} \sqrt{(A_m f, f) - (A_n f, f)}.$$

Так как числовая последовательность

$$(A_n f, f) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

монотонно убывает и ограничена снизу (числом 0), то

$$\lim_{\substack{n>m, \\ m\to\infty}} \sqrt{(A_m f, f) - (A_n f, f)} = 0,$$

откуда следует, что при любом $f \in \mathrm{H}$

$$\lim_{\substack{n>m, \\ m\to\infty}} \| (A_n - A_m) f \| = 0.$$

Это равенство показывает, что при любом $f \in \mathrm{H}$ существует в сильном смысле

$$\lim_{n\to\infty} A_n f \equiv Af.$$

Легко видеть, что предельный оператор A линеен и ограничен.

Теорема доказана.

Замечание. Вместо положительности операторов достаточно потребовать равномерную ограниченность их снизу. Теорема очевидным образом формулируется для монотонно возрастающих последовательностей.

34. Множества ограниченных линейных операторов в сепарабельном пространстве Гильберта.

Теорема 1. *Любое множество линейных операторов в сепарабельном пространстве* H, *нормы которых не превосходят фиксированного числа, слабо компактно* (т. е. содержит слабо сходящуюся последовательность).

Пусть $\{A_n\}_1^\infty$ — последовательность операторов с нормами $\| A_n \| < C$, а $\{f_i\}_1^\infty$ — последовательность элементов, плотная в пространстве H. Пользуясь теоремой 1 n° 27, выберем из последовательности $\{A_n\}_1^\infty$ часть $\{A_{1k}\}_{k=1}^\infty$, слабо сходящуюся на элементе *) f_1, затем из нее часть $\{A_{2k}\}_{k=1}^\infty$, слабо сходящуюся на элементе f_2, и т. д. Далее построим диагональную последовательность $\{A_{kk}\}_1^\infty$ и докажем, что эта последовательность слабо сходится

*) Это значит, что слабо сходится последовательность векторов $\{A_{1k} f_1\}_{k=1}^\infty$.

на любом элементе H. С этой целью для произвольно взятого элемента f и произвольно выбранного числа $\varepsilon > 0$ возьмем такое N, чтобы

$$\|f - f_N\| < \varepsilon.$$

Тогда при любом $g \in H$

$$(A_{nn}f - A_{mm}f,\ g) = (A_{nn}f_N - A_{mm}f_N,\ g) + \delta,$$

где

$$|\delta| = |(A_{nn}(f - f_N),\ g) + (A_{mm}(f_N - f),\ g)| \leqslant 2C\varepsilon \|g\|.$$

С другой стороны,

$$(A_{nn}f_N - A_{mm}f_N,\ g)$$

стремится к нулю при $n \to \infty$, $m \to \infty$. Отсюда, благодаря слабой полноте пространства H, вытекает, что последовательность

$$\{A_{nn}f\}_1^\infty$$

слабо сходится к некоторому элементу h. Полагая $h = Af$, получаем требуемое соотношение:

$$A_{nn}f \xrightarrow{\text{сл}} Af.$$

Так как при любом n

$$|(A_{nn}f,\ g)| \leqslant C\|f\|\cdot\|g\|,$$

то

$$|(Af,\ g)| \leqslant C\|f\|\cdot\|g\|,$$

откуда следует, что

$$\|A\| \leqslant C.$$

Теорема доказана.

Прежде чем идти дальше, обозначим через $\{e_p\}_1^\infty$ полную ортонормированную систему векторов в H. Каждый ограниченный оператор A, заданный всюду в H, вполне определяется матрицей $(a_{pq})_{p,q=1}^\infty$, где $a_{pq} = (Ae_q,\ e_p)$. Будем обозначать буквой R всякий такой оператор, для которого $r_{pq} = (Re_q,\ e_p)$ есть комплексное число с рациональными компонентами и притом равное нулю, когда по крайней мере один из индексов p, q превосходит некоторое число, свое для каждого оператора. Множество всех таких операторов счетно. Перенумеруем их как-нибудь: R_1, R_2, R_3, ..., и положим

$$(R_k e_q,\ e_p) = r_{pq}^{(k)}.$$

Лемма. *Каков бы ни был ограниченный линейный оператор A, определенный во всем пространстве, найдется подпоследовательность $\{R_{j_k}\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что*

$$\lim_{k\to\infty} \| R_{j_k}e_m - Ae_m \| = \lim_{k\to\infty} \| R_{j_k}^* e_m - A^*e_m \| = 0$$

$$(m = 1, 2, 3, \ldots).$$

Доказательство. Выберем j_k так, чтобы

$$| r_{pq}^{(j_k)} - a_{pq} | < \frac{1}{k} \qquad (p, q = 1, 2, 3, \ldots, k)$$

и

$$r_{pq}^{(j_k)} = 0 \quad \text{при} \quad \max\{p, q\} > k.$$

Тогда

$$\| R_{j_k}e_m - Ae_m \|^2 = \| \sum_{n=1}^{k} r_{mn}^{(j_k)} e_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}e_n \|^2 =$$

$$= \sum_{n=1}^{k} |r_{mn}^{(j_k)} - a_{mn}|^2 + \sum_{n=k+1}^{\infty} | a_{mn} |^2 < \frac{1}{k} + \sum_{n=k+1}^{\infty} | a_{mn} |^2, \tag{1}$$

если $m \leqslant k$. Так как ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} | a_{mn} |^2$$

сходится при любом m, то правая часть (1) стремится к нулю при $k \to \infty$. Следовательно,

$$\lim_{k\to\infty} \| R_{j_k}e_m - Ae_m \| = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots),$$

и аналогично доказывается второе утверждение леммы.

Теорема 2. *Каждое бесконечное множество $\mathfrak{M}$ определенных всюду в H ограниченных операторов содержит последовательность $\{A_k\}_1^{\infty}$, плотную в $\mathfrak{M}$ в том смысле, что для любого оператора $A \in \mathfrak{M}$, если он сам не принадлежит $\{A_k\}_1^{\infty}$, существует подпоследовательность $\{A_{k_q}\}_{q=1}^{\infty}$, удовлетворяющая при любом $f \in \mathrm{H}$ соотношениям*

$$\lim_{q\to\infty} \| A_{k_q}f - Af \| = \lim_{q\to\infty} \| A_{k_q}^* f - A^*f \| = 0.$$

Доказательство. Множество $\mathfrak{M}$ можно представить в виде суммы множеств $\mathfrak{M}_n$ таких, что норма каждого из операторов, принадлежащих $\mathfrak{M}_n$, не превосходит числа n. Так как теорему достаточно доказать для каждого $\mathfrak{M}_n$, то мы можем принять, что исходное множество $\mathfrak{M}$ есть некоторое $\mathfrak{M}_n$, т. е., что при некотором фиксированном $\mathscr{C}$ неравенство $\| A \| \leqslant \mathscr{C}$ выполнено для любого $A \in \mathfrak{M}$.

Возьмем теперь произвольную пару натуральных чисел p, q и исследуем, существуют ли в $\mathfrak{M}$ операторы B, для которых

$$\| R_p g - Bg \| \leqslant \frac{1}{q}, \quad \| R_p^* g - B^* g \| \leqslant \frac{1}{q} \qquad (g = e_1, e_2, \ldots, e_q).$$

Если требуемые операторы B существуют, выберем один из них и обозначим его $B_{p,q}$, а пару p, q в этом случае назовем допустимой. Из леммы вытекает, что при любом q найдется бесчисленное множество значений p, при которых пара p, q допустима. Поэтому множество операторов $B_{p,q}$ не пусто. Это множество, очевидно, счетное. Покажем, что его можно принять в качестве последовательности $\{A_k\}_1^\infty$.

С этой целью возьмем какой-нибудь оператор $A \in \mathfrak{M}$, $A \overline{\in} \{A_k\}_1^\infty$. На основании леммы существует такая последовательность $\{R_{n_q}\}_{q=1}^\infty$, что

$$\| R_{n_q} g - Ag \| \leqslant \frac{1}{q}, \quad \| R_{n_q}^* g - A^* g \| \leqslant \frac{1}{q}$$

$$(g = e_1, e_2, \ldots, e_q).$$

Поэтому при любом q пара n_q, q является допустимой, а значит, существует оператор $B_{n_q, q} = A_{k_q}$, для которого

$$\| R_{n_q} g - A_{k_q} g \| \leqslant \frac{1}{q}, \qquad \| R_{n_q}^* g - A_{k_q}^* g \| \leqslant \frac{1}{q}$$

$$(g = e_1, e_2, \ldots, e_q).$$

Следовательно, при $q = 1, 2, \ldots$

$$\| Ag - A_{k_q} g \| \leqslant \frac{2}{q}, \qquad \| A^* g - A_{k_q}^* g \| \leqslant \frac{2}{q}$$

$$(g = e_1, e_2, \ldots, e_q).$$

Возьмем теперь произвольный элемент из H:

$$f = \sum_{n=1}^\infty \xi_n e_n.$$

При любом $\varepsilon > 0$ найдем такое $\mathcal{N}$, что

$$f = \sum_{n=1}^{\mathcal{N}} \xi_n e_n + f', \quad \| f' \| < \varepsilon.$$

Так как нормы рассматриваемых операторов $\leqslant \mathcal{C}$, то при $q > \mathcal{N}$

$$\| Af - A_{k_q} f \| < \frac{2}{q} \sum_{n=1}^{\mathcal{N}} |\xi_n| + 2\mathcal{C}\varepsilon \leqslant \frac{2\sqrt{\mathcal{N}}}{q} \| f \| + 2\mathcal{C}\varepsilon,$$

и аналогично,

$$\| A^* f - A^*_{k_q} f \| < \frac{2\sqrt{\mathcal{N}}}{q} \| f \| + 2\mathcal{C}\varepsilon.$$

Для завершения доказательства остается сначала взять достаточно малое ε, а затем достаточно большое q.

ПРОЕКТИРУЮЩИЕ И УНИТАРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

35. Определение проектирующего оператора. Пусть G есть некоторое подпространство пространства H и пусть

$$F = H \ominus G,$$

так что

$$H = G \oplus F.$$

Это означает, что каждый вектор $h \in H$ однозначно представим в виде

$$h = g + f,$$

где $g \in G$ и $f \in F$. В n° 7 вектор g был назван проекцией вектора h на G. Определенный во всем пространстве H оператор, который каждому вектору $h \in H$ относит его проекцию на подпространство G, называют *проектирующим оператором, оператором проектирования* (на G) или *проектором* *) и обозначают символом P или P_G, так что

$$g = Ph = P_G h.$$

Проектирующий оператор, очевидно, линеен. Кроме того, он ограничен и его норма равна единице. Действительно, так как

$$\|h\|^2 = \|g\|^2 + \|f\|^2,$$

то

$$\|g\| \leqslant \|h\|, \tag{1}$$

т. е.

$$\|P\| \leqslant 1.$$

Но если $h \in G$, то $g = h$, так что в (1) знак равенства достигается, и поэтому

$$\|P\| = 1.$$

*) В дальнейшем мы введем также «косое» проектирование, и тогда для оператора, который здесь назван проектором, мы будем иногда, во избежание недоразумений, применять название *ортопроектор*.

36. Свойства проектирующих операторов. Из определения проектирующего оператора легко заключить, что

1) $$P^2 = P,$$

2) $$P^* = P.$$

Действительно, при любом $h \in \mathrm{H}$ вектор $g = Ph$ уже принадлежит G и поэтому $Pg = g$, т. е. $P^2h = Ph$; но это и означает, что $P^2 = P$. Чтобы доказать, что P есть оператор самосопряженный, возьмем два произвольных вектора $h_1, h_2 \in \mathrm{H}$. Пусть

$$h_1 = g_1 + f_1, \qquad h_2 = g_2 + f_2.$$

В таком случае

$$(g_1, h_2) = (g_1, g_2) = (h_1, g_2),$$

т. е.

$$(Ph_1, h_2) = (h_1, Ph_2)$$

для любых $h_1, h_2 \in \mathrm{H}$. Но это и означает, что $P^* = P$.

Из доказанных свойств вытекает, что проектирующий оператор P положителен, т. е. (см. n° 25)

$$(Ph, h) \geqslant 0.$$

Действительно,

$$(Ph, h) = (P^2h, h) = (Ph, P^*h) = (Ph, Ph) \geqslant 0.$$

Теперь мы докажем, что свойства 1), 2) характерны для проектирующего оператора.

Т е о р е м а. *Если P есть определенный всюду в H оператор, для которого при любых $h_1, h_2 \in \mathrm{H}$*

1) $$(P^2h_1, h_2) = (Ph_1, h_2),$$

2) $$(Ph_1, h_2) = (h_1, Ph_2),$$

то существует подпространство $\mathrm{G} \subseteq \mathrm{H}$, оператором проектирования на которое является P.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оператор P ограничен. Это вытекает из теоремы n° 28, так как

$$(Ph_1, h_2) = (h_1, Ph_2),$$

но проще всего убедиться в этом следующим образом:

$$\| Ph \|^2 = (Ph, Ph) = (P^2h, h) = (Ph, h),$$

поэтому

$$\| Ph \|^2 \leqslant \| Ph \| \cdot \| h \|,$$

и, следовательно,

$$\|Ph\| \leqslant \|h\|,$$

т. е. оператор P ограничен и его норма не больше 1.

Обозначим через G множество всех векторов $g \in$ H, для которых

$$Pg = g.$$

Ясно, что G есть линейное многообразие. Докажем, что G замкнуто, т. е. является подпространством. Пусть $g_n \in$ G ($n = 1, 2, 3, \ldots$) и пусть $g_n \to g$. В таком случае

$$g_n = Pg_n$$

и, значит,

$$Pg - g_n = Pg - Pg_n = P(g - g_n),$$

откуда

$$\|Pg - g_n\| \leqslant \|g - g_n\|.$$

Полагая здесь $n \to \infty$, будем иметь

$$\|Pg - g\| \leqslant 0,$$

т. е.

$$Pg = g,$$

и значит, $g \in$ G, чем и доказано, что G замкнуто.

Обозначим через P_{G} оператор проектирования на G. Мы должны доказать, что $P_{\mathrm{G}} = P$. При любом $h \in$ H вектор $Ph = g$ принадлежит G, так как $P(Ph) = Ph$. Подпространству G принадлежит также $P_{\mathrm{G}}h$. Поэтому нам достаточно доказать, что

$$(Ph - P_{\mathrm{G}}h, g') = 0$$

или

$$(Ph, g') = (P_{\mathrm{G}}h, g')$$

при любом $g' \in$ G. Но это следует из того, что

$$(Ph, g') = (h, Pg') = (h, g'),$$
$$(P_{\mathrm{G}}h, g') = (h, P_{\mathrm{G}}g') = (h, g').$$

Заканчивая настоящий пункт, заметим, что если P есть проектирующий оператор и G — подпространство, на которое он проектирует, то $I - P$, где I — тождественный оператор, есть также проектирующий оператор, причем $I - P$ проектирует на H $\ominus$ G.

37. Действия над проектирующими операторами. В настоящем пункте мы докажем несколько простых предложений относительно умножения, сложения и вычитания проектирующих операторов.

Теорема 1. *Произведение двух проектирующих операторов P_{G_1}, P_{G_2} является проектирующим оператором в том и только том случае, когда они перестановочны:*

$$P_{G_1}P_{G_2}=P_{G_2}P_{G_1},$$

и если это условие выполнено, то

$$P_{G_1}P_{G_2}=P_G,$$

где $G = G_1 \cap G_2$ *).

Доказательство. Если произведение $P_{G_1}P_{G_2}$ есть проектирующий оператор, то

$$P_{G_1}P_{G_2}=(P_{G_1}P_{G_2})^*=P_{G_2}^*P_{G_1}^*=P_{G_2}P_{G_1}.$$

Вектор

$$g=P_{G_1}P_{G_2}h=P_{G_2}P_{G_1}h$$

в силу первого представления принадлежит G_1, а в силу второго — он принадлежит G_2, т. е. он принадлежит пересечению $G_1 \cap G_2$ этих пространств, откуда следует, что $P_{G_1}P_{G_2} \subseteq P_{G_1 \cap G_2}$. Так как обратное включение очевидно, то в одну сторону теорема доказана.

Допустим теперь, что

$$P_{G_1}P_{G_2}=P_{G_2}P_{G_1}=P.$$

Отсюда следует, что

$$P^2=(P_{G_1}P_{G_2})^2=P_{G_1}P_{G_2}P_{G_1}P_{G_2}=P_{G_1}P_{G_1}P_{G_2}P_{G_2}=P_{G_1}P_{G_2}=P$$

и

$$P^*=(P_{G_1}P_{G_2})^*=P_{G_2}^*P_{G_1}^*=P_{G_2}P_{G_1}=P_{G_1}P_{G_2}=P.$$

Эти равенства показывают, что $P_{G_1}P_{G_2}$ удовлетворяет условиям теоремы n° 36 и поэтому является проектирующим оператором.

Следствие. *Два подпространства G_1, G_2 ортогональны в том и только том случае, когда*

$$P_{G_1}P_{G_2}=0.$$

Теорема 2. *Сумма проектирующих операторов*

$$P_{G_1}+P_{G_2}+\ldots+P_{G_n}=Q \qquad (n<\infty)$$

есть проектирующий оператор в том и только том случае, когда

$$P_{G_j}P_{G_k}=0 \qquad (j\neq k),$$

*) Геометрический смысл перестановочности операторов P_{G_1} и P_{G_2} состоит в том, что подпространства $G_1 \ominus (G_1 \cap G_2)$ и $G_2 \ominus (G_1 \cap G_2)$ ортогональны.

т. е. тогда и только тогда, когда подпространства G_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *попарно ортогональны, и в этом случае*

$$Q = P_G,$$

где

$$G = G_1 \oplus G_2 \oplus \ldots \oplus G_n.$$

Доказательство. Если подпространства G_j попарно ортогональны, то $Q^2 = Q$, и значит, достаточность условия очевидна. Последняя часть утверждения теоремы также очевидна.

Поэтому докажем необходимость условия. Пусть Q есть проектирующий оператор. Значит,

$$\|f\|^2 \geqslant (Qf, f) = \sum_{j=1}^{n} (P_{G_j}f, f) \geqslant (P_{G_j}f, f) + (P_{G_k}f, f),$$

каковы бы ни были два различных индекса j, k. Из полученного неравенства вытекает, что

$$\|P_{G_j}f\|^2 + \|P_{G_k}f\|^2 \leqslant \|f\|^2.$$

Положим здесь

$$f = P_{G_k}h.$$

Это дает

$$\|P_{G_j}P_{G_k}h\|^2 + \|P_{G_k}h\|^2 \leqslant \|P_{G_k}h\|^2,$$

и, значит,

$$\|P_{G_j}P_{G_k}h\| = 0$$

при любом $h \in H$, что и доказывает равенство

$$P_{G_j}P_{G_k} = 0,$$

т. е. ортогональность подпространств G_j, G_k.

Теорема 3. *Разность двух проектирующих операторов*

$$P_{G_1} - P_{G_2} \tag{1}$$

есть проектирующий оператор тогда и только тогда, когда $G_2 \subseteq G_1$, *и в этом случае* $P_{G_1} - P_{G_2}$ *есть оператор проектирования на* $G_1 \ominus G_2$.

Доказательство. Пусть

$$P_{G_1} - P_{G_2} = P_G$$

есть проектирующий оператор. Тогда сумма

$$P_G + P_{G_2} = P_{G_1}$$

также является проектирующим оператором и, значит, по теореме 2

$$G \perp G_2 \quad \text{и} \quad G \oplus G_2 = G_1,$$

откуда следует, что

$$\mathrm{G}_2 \subseteq \mathrm{G}_1 \quad \text{и} \quad \mathrm{G} = \mathrm{G}_1 \ominus \mathrm{G}_2.$$

Обратно, пусть

$$\mathrm{G}_2 \subseteq \mathrm{G}_1 \quad \text{и} \quad \mathrm{G} \equiv \mathrm{G}_1 \ominus \mathrm{G}_2.$$

Тогда

$$\mathrm{G} \perp \mathrm{G}_2 \quad \text{и} \quad \mathrm{G}_1 = \mathrm{G} \oplus \mathrm{G}_2,$$

а потому

$$P_{\mathrm{G}_1} = P_{\mathrm{G}} + P_{\mathrm{G}_2},$$

т. е.

$$P_{\mathrm{G}_1} - P_{\mathrm{G}_2} = P_{\mathrm{G}}.$$

Теорема доказана.

Замечание. *Соотношение* $\mathrm{G}_2 \subseteq \mathrm{G}_1$ *эквивалентно неравенству*

$$\| P_{\mathrm{G}_2} f \| \leqslant \| P_{\mathrm{G}_1} f \| \tag{2}$$

(*для любого* $f \in \mathrm{H}$), а также неравенству

$$P_{\mathrm{G}_2} \leqslant P_{\mathrm{G}_1}. \tag{3}$$

Прежде всего, эквивалентность неравенств (2) и (3) между собой следует из их одновременной эквивалентности неравенству

$$(P_{\mathrm{G}_2} f, f) \leqslant (P_{\mathrm{G}_1} f, f).$$

Пусть теперь $\mathrm{G}_2 \subseteq \mathrm{G}_1$. Отсюда вытекает, что

$$P_{\mathrm{G}_2} = P_{\mathrm{G}_2} P_{\mathrm{G}_1}.$$

Поэтому при любом $f \in \mathrm{H}$

$$\| P_{\mathrm{G}_2} f \| = \| P_{\mathrm{G}_2} (P_{\mathrm{G}_1} f) \| \leqslant \| P_{\mathrm{G}_1} f \|,$$

следовательно, неравенство (2) доказано.

Обратно, пусть дано, что неравенство (2) имеет место для любого $f \in \mathrm{H}$. Значит, если $P_{\mathrm{G}_1} f = 0$, то и $P_{\mathrm{G}_2} f = 0$; другими словами, если

$$\mathrm{F}_1 = \mathrm{H} \ominus \mathrm{G}_1 \quad \text{и} \quad \mathrm{F}_2 = \mathrm{H} \ominus \mathrm{G}_2,$$

то из включения $f \in \mathrm{F}_1$ следует включение $f \in \mathrm{F}_2$. Но это означает, что $\mathrm{F}_1 \subseteq \mathrm{F}_2$, а потому

$$\mathrm{G}_2 = \mathrm{H} \ominus \mathrm{F}_2 \subseteq \mathrm{H} \ominus \mathrm{F}_1 = \mathrm{G}_1,$$

что и требовалось доказать.

38. Последовательности проектирующих операторов.

Теорема 1. *Если* $\{P_k\}_1^\infty$ — *бесконечная монотонная последовательность проектирующих операторов, то* P_k *при* $k \to \infty$ *сильно сходится к некоторому проектирующему оператору* P.

Доказательство. Пусть, например, последовательность $\{P_k\}_1^\infty$ — неубывающая: $P_k \leqslant P_{k+1}$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$). Так как она ограничена, ибо $P_k \leqslant I$ при любом k, то по теореме 3 n° 33 и по замечанию к этой теореме существует в смысле сильной сходимости *)

$$\lim_{k\to\infty} P_k = P.$$

С другой стороны, при любом k и любых $f, g \in$ H

$$(P_kf, P_kg) = (P_kf, g) = (f, P_kg).$$

Поэтому в пределе

$$(Pf, Pg) = (Pf, g) = (f, Pg).$$

Значит,

$$P = P^* = P^2,$$

чем и доказано, что P есть проектирующий оператор.

Следующая теорема относится к последовательностям проекторов без предположения об их монотонности.

Теорема 2. *Если последовательность проектирующих операторов $\{P_k\}_1^\infty$ слабо сходится к некоторому проектирующему оператору P, то она сходится к нему и сильно.*

Доказательство. По условию, при любом $h \in$ H

$$(P_kh, h) \to (Ph, h).$$

Значит,

$$\| P_kh \| \to \| Ph \|.$$

А так как при этом последовательность $\{P_kh\}_1^\infty$ слабо сходится к Ph, то в силу теоремы 1 n° 26 она сходится и сильно, что и требовалось доказать.

39. Раствор двух линейных многообразий **).

Определение. *Раствором* двух линейных многообразий в H называется норма разности операторов, проектирующих H на замыкания этих линейных многообразий.

Раствор линейных многообразий M_1, M_2 обозначают символом $\theta(M_1, M_2)$. Поэтому

$$\theta(M_1, M_2) = \| P_1 - P_2 \| = \| P_2 - P_1 \|,$$

*) В этом можно также убедиться, не прибегая к упомянутым предложениям n° 33, с помощью соотношения

$$\| P_nf - P_mf \|^2 = ([P_n - P_m] f, f) = \| P_nf \|^2 - \| P_mf \|^2,$$

которое следует из того, что при $m < n$ разность $P_n - P_m$ является проектирующим оператором.

**) B. Sz.-Nagy (Comment. Math. Helv. 19, 1947, стр. 347—366). М. Г. Крейн и М. А. Красносельский (УМН, т. III, вып. 3 (1947), стр. 60—107).

где P_1, P_2 — операторы проектирования на замкнутые многообразия (подпространства) $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$ соответственно.

Из данного определения раствора вытекает, что

$$\theta(M_1, M_2) = \theta(\overline{M}_1, \overline{M}_2) = \theta(H \ominus \overline{M}_1, H \ominus \overline{M}_2).$$

Возьмем тождество

$$P_2 - P_1 = P_2(I - P_1) - (I - P_2)P_1.$$

В применении к элементу $h \in H$ оно дает

$$(P_2 - P_1)h = P_2(I - P_1)h - (I - P_2)P_1h,$$

откуда в силу ортогональности векторов $P_2(I - P_1)h$, $(I - P_2)P_1h$ следует, что

$$\|(P_2 - P_1)h\|^2 = \|P_2(I - P_1)h\|^2 + \|(I - P_2)P_1h\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \|(I - P_1)h\|^2 + \|P_1h\|^2 = \|h\|^2. \quad (1)$$

Это неравенство показывает, что раствор двух линейных многообразий не превосходит 1:

$$\theta(M_1, M_2) \leqslant 1.$$

Мало того, мы видим, что раствор обязательно равняется 1, если одно из многообразий содержит отличный от нуля вектор, ортогональный к другому многообразию. Это замечание позволяет установить следующий критерий равенства размерностей двух многообразий.

Теорема. *Если раствор линейных многообразий* M_1, M_2 *меньше* 1, *то размерности этих линейных многообразий одинаковы*:

$$\dim M_1 = \dim M_2,$$

Доказательство. Достаточно доказать, что из неравенства

$$\dim M_2 > \dim M_1$$

вытекает существование в многообразии $\overline{M}_2$ отличного от нуля вектора, ортогонального к многообразию $\overline{M}_1$. С этой целью спроектируем $\overline{M}_1$ на $\overline{M}_2$. Мы получим подпространство

$$G = P_2\overline{M}_1,$$

размерность которого, очевидно не превосходит размерности подпространства $\overline{M}_1$ и, следовательно, меньше, чем размерность подпространства $\overline{M}_2$. Поэтому в $\overline{M}_2 \ominus G$ существуют отличные от нуля векторы, т. е. в $\overline{M}_2$ найдется вектор, отличный от нулевого и ортогональный к G. Этот вектор будет ортогонален всему подпространству $\overline{M}_1$, так как подпространство $\overline{M}_1 \ominus G$ ортогонально $\overline{M}_2$.

Раствор двух линейных многообразий допускает второе определение:

$$\theta(M_1, M_2)=\max\{\sup_{f\in\overline{M}_2,\ \|f\|=1}\|(I-P_1)f\|,\ \sup_{g\in\overline{M}_1,\ \|g\|=1}\|(I-P_2)g\|\}. \quad (2)$$

Величина

$$\|(I-P_1)f\|=D[f, \overline{M}_1]$$

представляет расстояние точки f от многообразия $\overline{M}_1$. Поэтому формула (2) может быть переписана в виде *)

$$\theta(M_1, M_2)=\max\{\sup_{f\in\overline{M}_2,\ \|f\|=1} D[f, \overline{M}_1],\ \sup_{g\in\overline{M}_1,\ \|g\|=1} D[g, \overline{M}_2]\}.$$

Займемся доказательством формулы (2). Согласно первоначальному определению раствора и формуле (1)

$$\theta(M_1, M_2)=\sup_{h\in H}\frac{\|(P_2-P_1)h\|}{\|h\|}=\sup_{h\in H}\frac{\sqrt{\|P_2(I-P_1)h\|^2+\|(I-P_2)P_1h\|^2}}{\|h\|}. \quad (3)$$

Заставим вектор h пробегать не все пространство H, а лишь подпространство $\overline{M}_1$. Тогда стоящая в правой части верхняя грань либо не изменится, либо станет меньше, т. е.

$$\theta(M_1, M_2)\geqslant\sup_{h\in\overline{M}_1}\frac{\sqrt{\|P_2(I-P_1)h\|^2+\|(I-P_2)P_1h\|^2}}{\|h\|}=\sup_{h\in\overline{M}_1}\frac{\|(I-P_2)h\|}{\|h\|}=\varrho_2.$$

Точно так же доказывается, что

$$\theta(M_1, M_2)\geqslant\sup_{h\in\overline{M}_2}\frac{\|(I-P_1)h\|}{\|h\|}=\varrho_1.$$

Таким образом, уже доказано, что

$$\theta(M_1, M_2)\geqslant\max\{\varrho_1, \varrho_2\},$$

и остается доказать, что

$$\theta(M_1, M_2)\leqslant\max\{\varrho_1, \varrho_2\}.$$

С этой целью заметим, что по определению величины ϱ_2

$$\|(I-P_2)P_1h\|^2\leqslant\varrho_2^2\|P_1h\|^2, \quad (4)$$

*) Значение этой формулы состоит в том, что она позволяет определить раствор двух линейных многообразий не только в пространстве Гильберта, но и в любом пространстве Банаха. По этому поводу см. М. Г. Крейн, М. А. Красносельский, Д. П. Мильман, О дефектных числах линейных операторов в банаховом пространстве и о некоторых геометрических вопросах, Сб. трудов Ин-та математики АН УССР, № 11 (1948).

с другой стороны,

$$\|P_2(I-P_1)h\|^2=(P_2\{I-P_1\}h,\ P_2\{I-P_1\}h)=$$
$$=(P_2\{I-P_1\}h,\ \{I-P_1\}h)=(\{I-P_1\}P_2\{I-P_1\}h,\ \{I-P_1\}h)\leqslant$$
$$\leqslant\|(I-P_1)P_2(I-P_1)h\|\cdot\|(I-P_1)h\|$$

и, следовательно, по определению величины ϱ_1,

$$\|P_2(I-P_1)h\|^2\leqslant\varrho_1\|P_2(I-P_1)h\|\cdot\|(I-P_1)h\|,$$

т. е.

$$\|P_2(I-P_1)h\|\leqslant\varrho_1\|(I-P_1)h\|. \tag{5}$$

Сравнение (4) и (5) показывает, что

$$\|(I-P_2)P_1h\|^2+\|P_2(I-P_1)h\|^2\leqslant\varrho_2^2\|P_1h\|^2+\varrho_1^2\|(I-P_1)h\|^2\leqslant$$
$$\leqslant\max\{\varrho_1^2,\ \varrho_2^2\}[\,\|P_1h\|^2+\|(I-P_1)h\|^2\,]=\|h\|^2\max\{\varrho_1^2,\ \varrho_2^2\}$$

и формула (3) дает

$$\theta(M_1,\ M_2)\leqslant\max\{\varrho_1,\ \varrho_2\}.$$

40. Унитарный оператор. В трехмерном евклидовом пространстве простейшей после проектирования операцией является вращение пространства — операция, которая не изменяет длин векторов и углов между ними. Мы рассмотрим аналогичную операцию в пространстве Гильберта.

Определение. Оператор U, заданный во всем пространстве ($D_U=H$) и отображающий его на все пространство ($\Delta_U=H$), называется *унитарным*, если для любых $f,\ g\in H$ имеет место равенство

$$(Uf,\ Ug)=(f,\ g). \tag{1}$$

Заметим, что в данное определение не входит требование линейности оператора.

Докажем прежде всего, что унитарный оператор имеет обратный оператор, который также унитарен. Так как для существования оператора, обратного оператору T, необходимо и достаточно, чтобы из $Tf=Tg$ следовало $f=g$ (см. n° 17), то предположим, что $Uf=Ug$; тогда

$$0=(Uf-Ug,\ Uf-Ug)=(Uf,\ Uf)-(Uf,\ Ug)-(Ug,\ Uf)+(Ug,\ Ug)=$$
$$=(f,\ f)-(f,\ g)-(g,\ f)+(g,\ g)=(f-g,\ f-g),$$

т. е. $f=g$.

Таким образом, обратный оператор U^{-1} существует. Так как $D_{U^{-1}}=\Delta_U$, $\Delta_{U^{-1}}=D_U$, то оператор U^{-1} подобно U определен во всем пространстве и отображает его на все пространство. Если положить

$$Uf = f', \quad Ug = g',$$

то равенство (1) можно переписать в виде

$$(f', g') = (U^{-1}f', U^{-1}g'),$$

и доказательство унитарности оператора U^{-1} закончено, так как f', g' могут быть любыми элементами пространства H.

Из доказанного следует, что при любых $f, g \in \mathrm{H}$

$$(Uf, g) = (f, U^{-1}g). \tag{2}$$

Действительно, пусть $U^{-1}g = g'$, так что $g = Ug'$. В таком случае

$$(Uf, Ug') = (f, g'),$$

что тождественно с (2).

Покажем теперь, что унитарный оператор обязательно линеен. Действительно, пусть

$$f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2.$$

В таком случае на основании (2) получаем:

$$(Uf, g) = (f, U^{-1}g) = \alpha_1 (f_1, U^{-1}g) + \alpha_2 (f_2, U^{-1}g) =$$
$$= \alpha_1 (Uf_1, g) + \alpha_2 (Uf_2, g) = (\alpha_1 Uf_1 + \alpha_2 Uf_2, g).$$

В силу произвольности g это значит, что

$$Uf = \alpha_1 Uf_1 + \alpha_2 Uf_2.$$

Итак, унитарный оператор есть оператор линейный. Равенство (2) выражает, что для унитарного оператора сопряженный оператор совпадает с обратным:

$$U^* = U^{-1},$$

т. е.

$$U^*U = UU^* = I.$$

Часто полезно следующее простое предложение: *если оператор T линеен, удовлетворяет условию*

$$(Tf, Tf) = (f, f) \tag{3}$$

и $\mathrm{D}_T = \Delta_T = \mathrm{H}$, *то оператор T унитарен.*

Доказательство. В силу условия (3)

$$(T\{f + \alpha g\}, T\{f + \alpha g\}) = (f + \alpha g, f + \alpha g).$$

Отсюда, на основании линейности оператора,

$$(Tf, Tf) + \alpha (Tg, Tf) + \bar{\alpha} (Tf, Tg) + |\alpha|^2 (Tg, Tg) =$$
$$= (f, f) + \alpha (g, f) + \bar{\alpha} (f, g) + |\alpha|^2 (g, g).$$

Поэтому, снова в силу (3),

$$\alpha (Tg, Tf) + \bar{\alpha} (Tf, Tg) = \alpha (g, f) + \bar{\alpha} (f, g).$$

А так как α произвольно, то

$$(Tf, Tg) = (f, g),$$

и унитарность оператора T доказана.

41. Изометрический оператор. Пусть даны два гильбертовых пространства: H_1 и H_2. Условимся отмечать скалярное произведение в первом пространстве индексом 1, а во втором пространстве индексом 2.

Определение. Оператор V, заданный на всем пространстве H_1 ($D_V = H_1$) и отображающий его на все пространство H_2 ($\Delta_V = H_2$), называется *изометрическим*, если для любых f, $g \in H_1$

$$(Vf, Vg)_2 = (f, g)_1. \tag{1}$$

В частности, H_1 и H_2 могут быть подпространствами одного пространства H. В этом случае индексы у скалярных произведений излишни. Часто термин *изометрический оператор* применяют именно в этом специальном случае, а в общем случае говорят об *изометрическом отображении*.

Унитарный оператор в H является частным случаем изометрического оператора; мы получим его, если оба пространства, H_1, H_2, совпадают с H.

Многие свойства унитарного оператора переносятся на произвольные изометрические операторы. Некоторые из этих свойств мы приведем, опуская те из доказательств, которые ничем не отличаются от доказательств соответствующих свойств унитарных операторов.

1°. *Изометрический оператор имеет обратный оператор, который также изометричен.*

2°. *Если оператор V линеен и отображает все пространство H_1 на все пространство H_2 и если для любого $f \in H_1$*

$$(Vf, Vf)_2 = (f, f)_1,$$

то V — изометрический оператор.

3°. *Всякий изометрический оператор линеен.*

Действительно, пусть f', $f'' \in H_1$ и $f = \alpha' f' + \alpha'' f''$. В таком случае при любом $g \in H_1$

$$(Vf, Vg)_2 = (f, g)_1 = \alpha' (f', g)_1 + \alpha'' (f'', g)_1 =$$
$$= \alpha' (Vf', Vg)_2 + \alpha'' (Vf'', Vg)_2 = (\alpha' Vf' + \alpha'' Vf'', Vg)_2.$$

А так как $\Delta_V = \mathrm{H}_2$, то из полученного равенства следует, что

$$Vf = \alpha' Vf' + \alpha'' Vf'',$$

т. е. линейность оператора V.

В неявном виде изометрический оператор уже встречался у нас в n° 10, когда мы ввели понятие об изоморфизме двух гильбертовых пространств.

Иногда приходится рассматривать так называемый *частично изометрический* оператор. Так называют линейный оператор U, действующий в гильбертовом пространстве H, который на некотором подпространстве $\mathrm{D}_V \subset \mathrm{H}$ совпадает с изометрическим оператором V, а на ортогональном дополнении $\mathrm{H} \ominus \mathrm{D}_V$ обращается в нуль. Подпространство D_V называется *начальной*, а подпространство $\Delta_U \equiv \Delta_V$ — *конечной* областью частично изометрического оператора U.

Легко проверить, что вместе с U является частично изометрическим также оператор U^*. При этом для U^* начальной областью является Δ_V, а конечной D_V, и осуществляемые операторами U, U^* отображения этих областей взаимно обратны. Это значит, что

$$U^*U = P, \qquad UU^* = Q, \tag{2}$$

где P и Q — операторы проектирования на D_V и Δ_V соответственно. В том частном случае, когда одно из подпространств D_V, Δ_V совпадает с H, частично изометричный оператор U называется *полуунитарным*.

Заканчивая настоящий пункт, введем одно важное понятие, которое будет нами неоднократно использовано в дальнейшем.

Определение. Пусть T_1 и T_2 — линейные операторы, действующие в пространствах H_1 и H_2, так что $\mathrm{D}_{T_1} \subseteq \mathrm{H}_1$, $\Delta_{T_1} \subseteq \mathrm{H}_1$, $\mathrm{D}_{T_2} \subseteq \mathrm{H}_2$, $\Delta_{T_2} \subseteq \mathrm{H}_2$ (в частности, пространства H_1, H_2 могут совпадать).

Операторы T_1 и T_2 называются *унитарно эквивалентными*, если существует изометрический оператор V, отображающий H_1 в H_2 и переводящий D_{T_1} в D_{T_2} таким образом, что если элемент $f \in \mathrm{D}_T$ переводится оператором V в элемент g, то элемент $T_1 f$ переводится оператором V в $T_2 g$, иначе говоря, унитарная эквивалентность означает, что

$$\mathrm{D}_{T_2} = V\mathrm{D}_{T_1}$$

и

$$T_1 = V^{-1} T_2 V.$$

42. Оператор Фурье — Планшереля. Предметом настоящего пункта является доказательство теоремы Планшереля: *какова бы ни была функция* $g(t) \in \mathrm{L}^2(-\infty, \infty)$ *для почти всех* t $(-\infty < t < \infty)$, *существует и также принадлежит* $L^2(-\infty, \infty)$ *функция*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-its}-1}{-is} g(s)\, ds = h(t); \tag{1}$$

определяемый этой формулой оператор $\mathfrak{F}$, *который функцию* $g(t)$ *переводит в* $h(t)$, *унитарен; обратный оператор имеет вид*

$$g(t) = (\mathfrak{F}^{-1}h)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ist}-1}{is} h(s)\, ds.$$

Оператор $\mathfrak{F}$ носит название *оператора Фурье — Планшереля*. Если предположить, что функция $g(t)$ абсолютно интегрируема на всей числовой оси, то формула (1) может быть переписана в виде

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} g(s)\, ds, \tag{2}$$

т. е. в этом случае $h(t)$ является *интегралом Фурье* в элементарном смысле. Абсолютно интегрируемые на всей оси и принадлежащие $L^2(-\infty, \infty)$ функции представляют некоторое плотное в $L^2(-\infty, \infty)$ линейное многообразие L, и значение теоремы Планшереля состоит в том, что с ее помощью расширяется на все пространство $L^2(-\infty, \infty)$ элементарный оператор Фурье, который на L задается формулой (2).

Этот подход к оператору Фурье — Планшереля позволяет дать ему другое определение. Пусть $g(t)$ — произвольная функция из $L^2(-\infty, \infty)$ и пусть

$$g_N(t) = \begin{cases} g(t) & (-N \leqslant t \leqslant N), \\ 0 & (|t| > N). \end{cases}$$

Заметим, что функции, равные нулю вне некоторого конечного интервала, своего для каждой функции, носят название *финитных* функций.

Таким образом, $g_N(t)$ есть финитная функция. Так как она абсолютно интегрируема, то

$$(\mathfrak{F}g_N)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} g_N(s)\, ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} e^{-ist} g(s)\, ds.$$

В силу унитарности, оператор $\mathfrak{F}$ ограничен и поэтому

$$\lim_{N\to\infty} \| \mathfrak{F}g - \mathfrak{F}g_N \| = 0$$

или

$$h(t) = (\mathfrak{F}g)(t) = \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-N}^{N} e^{-ist} g(s)\, ds. \tag{3}$$

Это и есть вытекающее из (1) второе определение оператора Фурье — Планшереля.

Легко видеть, что, в свою очередь, определение (1) вытекает из определения (3). Действительно, при любом элементе $f(t) \in \in L^2(-\infty, \infty)$

$$\lim_{N\to\infty} (\mathfrak{F}g_N, f) = (\mathfrak{F}g, f). \tag{4}$$

Беря

$$f(t) = \begin{cases} 1, \text{ если } t \text{ лежит между } 0 \text{ и } \tau, \\ 0 \text{ в противном случае,} \end{cases}$$

перепишем (4) в виде

$$\lim_{N\to\infty} \int\limits_0^\tau dt \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-N}^{N} e^{-ist} g(s)\, ds = \int\limits_0^\tau (\mathfrak{F}g)(t)\, dt,$$

откуда

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ist}-1}{-is} g(s)\, ds = \int\limits_0^\tau (\mathfrak{F}g)(t)\, dt.$$

Но это соотношение показывает, что почти всюду

$$(\mathfrak{F}g)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dt} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ist}-1}{-is} g(s)\, ds.$$

Имеются различные доказательства теоремы Планшереля, однако существенным элементом большинства из них является доказательство того, что определяемый равенством (2) на множестве $L \subset \subset L^2(-\infty, \infty)$ оператор $\mathfrak{F}_0$ не меняет норм векторов, а также, что он переводит множество L в множество, плотное в $L^2(-\infty, \infty)$. После этого, расширяя оператор $\mathfrak{F}_0$ по непрерывности на все пространство $L^2(-\infty, \infty)$, мы получим оператор $\mathfrak{F}$, определенный формулой (3). Областью определения этого оператора будет все пространство $L^2(-\infty, \infty)$. А так как оператор $\mathfrak{F}$ не меняет норм векторов и его область значений плотна в $L^2(-\infty, \infty)$, то его областью значений, очевидно *), также будет все пространство.

---

*) Действительно, допуская противное, и расширив по непрерывности обратный оператор $\mathfrak{F}^{-1}$ на все пространство $L^2(-\infty, \infty)$, мы получили бы изометрический оператор, принимающий одинаковые значения по крайней мере в двух различных точках, что невозможно.

Для завершения доказательства останется проверить, что обратный оператор $\mathfrak{F}^{-1}$ получается заменой i на $-i$.

Упомянутое доказательство достаточно провести для какого-нибудь множества $L_0 \subset L$, лишь бы оно было плотно в $L^2(-\infty, \infty)$; например, оно проходит, если в качестве L_0 взять совокупность всех кусочно-постоянных финитных функций.

С точки зрения геометрии пространства Гильберта особенно поучительно принять в качестве L_0 плотное в $L^2(-\infty, \infty)$ множество всех функций

$$f(t) = P(t)\, e^{-\frac{t^2}{2}}, \tag{5}$$

где $P(t)$ пробегает совокупность всех многочленов. Всякая функция (5) может быть представлена в виде

$$f(t) = \alpha_0\varphi_0(t) + \alpha_1\varphi_1(t) + \ldots + \alpha_n\varphi_n(t), \tag{6}$$

где $\varphi_k(t)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ — функции Чебышева — Эрмита. В силу ортогональности этих функций (п° 12)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt = \sqrt{\pi} \sum_{k=0}^{n} 2^k k!\, |\alpha_k|^2.$$

Теперь применим к функции $f(t)$ оператор $\mathfrak{F}_0$. С этой целью воспользуемся соотношением (которое будет доказано ниже):

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist}(-1)^k e^{\frac{s^2}{2}} \frac{d^k e^{-s^2}}{ds^k}\, ds = i^k e^{\frac{t^2}{2}} \frac{d^k e^{-t^2}}{dt^k} \tag{7}$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Соотношение (7) показывает, что

$$\mathfrak{F}_0\varphi_k = (-i)^k\varphi_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

На основании этого соотношения

$$h(t) \equiv (\mathfrak{F}_0 f)(t) = \alpha_0\varphi_0(t) + (-i)^1\alpha_1\varphi_1(t) + \ldots + (-i)^n\alpha_n\varphi_n(t) \tag{8}$$

и, значит,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt.$$

Таким образом, оператор $\mathfrak{F}_0$ не меняет нормы элементов множества L_0. Кроме того, из наших рассмотрений явствует, что область значений оператора $\mathfrak{F}_0$ содержит L_0 и, значит, плотна в $L^2(-\infty, \infty)$. Сравнение (6) и (8) показывает также, что для перехода от $\mathfrak{F}_0$ к $\mathfrak{F}_0^{-1}$ надлежит лишь изменить i на $-i$.

Таким образом, все сводится к доказательству тождества (7). Вот это доказательство *):

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist}(-1)^k e^{\frac{s^2}{2}}\frac{d^k e^{-s^2}}{ds^k}\,ds=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2}\frac{d^k}{ds^k}\left(e^{-ist+\frac{s^2}{2}}\right)ds=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{t^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2}\frac{d^k}{ds^k}e^{\frac{(s-it)^2}{2}}\,ds=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{t^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} i^k e^{-s^2}\frac{d^k}{dt^k}e^{\frac{(s-it)^2}{2}}\,ds=$$

$$=\frac{i^k}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{t^2}{2}}\frac{d^k}{dt^k}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}-\frac{t^2}{2}-ist}\,ds=i^k e^{\frac{t^2}{2}}\frac{d^k e^{-t^2}}{dt^k}.$$

В виде упражнения рекомендуем читателю проверить, что в пространстве $L^2(0, \infty)$ унитарен каждый из операторов $\mathfrak{F}_c$, $\mathfrak{F}_s$, определяемых формулами

$$(\mathfrak{F}_c g)(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{d}{dt}\int_0^{\infty}\frac{\sin st}{s}g(s)\,ds=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\operatorname*{l.i.m.}_{N\to\infty}\int_0^N g(s)\cos st\,ds,$$

$$(\mathfrak{F}_s g)(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{d}{dt}\int_0^{\infty}\frac{1-\cos st}{s}g(s)\,ds=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\operatorname*{l.i.m.}_{N\to\infty}\int_0^N g(s)\sin st\,ds.$$

Эти операторы удовлетворяют соотношениям

$$\mathfrak{F}_c^*=\mathfrak{F}_c^{-1}=\mathfrak{F}_c,\qquad \mathfrak{F}_s^*=\mathfrak{F}_s^{-1}=\mathfrak{F}_s$$

и, следовательно, являются также самосопряженными операторами.

---

*) В самом конце доказательства используется равенство

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}}e^{-ist}\,ds=e^{-\frac{t^2}{2}},$$

представляющее частный случай ($k=0$) тождества (7) и известное из элементарного курса анализа или теории функций.

ГЛАВА IV

НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ И ПРЕДЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

43. Понятие о замкнутом операторе. В главе II было дано общее определение линейного оператора, но в последующем изложении мы рассматривали лишь ограниченные, т. е. непрерывные операторы, определенные всюду в H.

В настоящей главе мы приступаем к изучению линейных операторов, не предполагая их непрерывными. Вместо непрерывности во многих случаях оказывается вполне достаточным наличие родственного, но менее ограничительного свойства, так называемой замкнутости.

Определение. Оператор T (не обязательно линейный) называется *замкнутым*, если из одновременного выполнения соотношений

$$f_n \in \mathrm{D}_T, \quad \lim_{n\to\infty} f_n = f, \quad \lim_{n\to\infty} Tf_n = g$$

следует, что

$$f \in \mathrm{D}_T, \quad g = Tf.$$

Таким образом, отличие замкнутости от непрерывности состоит в следующем: если оператор T непрерывен, то из существования $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ ($f_n \in \mathrm{D}_T$) обязательно следует существование $\lim\limits_{n\to\infty} Tf_n$; если же оператор T только замкнут, то из сходимости последовательности

$$f_1, f_2, f_3, \ldots \qquad (f_n \in \mathrm{D}_T) \tag{1}$$

сходимость последовательности

$$Tf_1, Tf_2, Tf_3, \ldots \tag{2}$$

вытекать не обязана, не дозволяется лишь двум последовательностям типа (2) сходиться к различным пределам, если соответствующие последовательности (1) сходятся к одному и тому же пределу.

Это последнее условие не означает еще, что оператор T замкнут, однако оно гарантирует существование *замкнутых расширений* оператора T, если сам оператор T окажется не замкнутым. Среди этих расширений выделяется так называемое *минимальное замкнутое* *расширение*, которое содержится во всяком замкнутом расширении оператора T. Минимальное замкнутое расширение однозначно определяется оператором T; его обозначают $\overline{T}$ и называют *замыканием* T. Чтобы получить $\overline{T}$, достаточно присоединить к D_T все те элементы $f \in \overline{D}_T$, для которых найдется хотя бы одна из последовательностей вида (1), порождающая сходящуюся последовательность (2), и положить

$$\overline{T}f = \lim_{n\to\infty} Tf_n.$$

Нетрудно доказать (мы предоставляем это читателю) справедливость следующего утверждения: если оператор T замкнут, то замкнут оператор $T - \lambda I$, а также обратный оператор T^{-1}, если он существует.

В заключение приведем простой пример оператора в $L^2(0, 1)$, который замыкания не допускает. Этот оператор определен формулой

$$Tf = xf(1)$$

на всех непрерывных в $[0, 1]$ функциях $f(x)$. Таким образом, область D_T плотна в $L^2(0, 1)$. Легко убедиться в том, что оператор T не замкнут и не допускает замыкания. Действительно, можно построить две последовательности непрерывных функций $\{f_n(x)\}_1^\infty$ и $\{h_n(x)\}_1^\infty$, сходящиеся в $L^2(0, 1)$ к общему пределу, одиако таких, что $f_n(1) \to 1$, $h_n(1) \to 0$. Тогда $Tf_n \to x$, $Th_n \to 0$, т. е. пределы последовательностей $\{Tf_n\}_1^\infty$, $\{Th_n\}_1^\infty$ существуют и различны.

44. Общее определение сопряженного оператора. В n° 25, вводя сопряженный оператор для данного ограниченного оператора A, определенного всюду в H, мы исходили из того, что всякому элементу g однозначно относится элемент g^*, для которого при любом f имеет место равенство

$$(Af, g) = (f, g^*).$$

Беря произвольный оператор T, мы снова будем рассматривать скалярное произведение

$$(Tf, g), \tag{1}$$

где f пробегает D_T. Теперь уже нельзя утверждать, что при любом элементе g выражение (1), как функция от пробегающего D_T вектора f, представимо в виде

$$(f, g^*);$$

однако вообще найдутся пары g, g^*, для которых

$$(Tf, g) = (f, g^*) \tag{2}$$

при любом $f \in D_T$. Действительно, это равенство имеет место хотя бы при $g = g^* = 0$.

Наличие пар g, g^*, для которых равенство (2) справедливо при любом $f \in \mathrm{D}_T$, еще не позволяет ввести оператор T^*, сопряженный с T. Необходимо еще, чтобы элемент g^* однозначно определялся элементом g. Это последнее требование будет выполнено в том и только том случае, если D_T плотно в H. Действительно, если D_T не плотно в H и, скажем, элемент h ортогонален к D_T, то наряду с равенством (2) при любом $f \in \mathrm{D}_T$ будет иметь место равенство

$$(Tf, g) = (f, g^* + h).$$

Наоборот, если D_T плотно в H и если при любом $f \in \mathrm{D}_T$

$$(Tf, g) = (f, g_1^*),$$
$$(Tf, g) = (f, g_2^*),$$

то при любом $f \in \mathrm{D}_T$

$$(f, g_1^* - g_2^*) = 0,$$

что невозможно, если $g_1^* \neq g_2^*$.

Таким образом, если D_T плотно в H, то оператор T имеет сопряженный оператор T^*; его областью определения D_{T^*} является совокупность всех тех g, для которых существуют g^*, удовлетворяющие (2) при любом $f \in \mathrm{D}_T$, и

$$T^* g = g^*.$$

Приведем теперь ряд простых предложений относительно сопряженного оператора, доказательство которых непосредственно следует из определения.

1°. Оператор T^* линеен.

2°. Если $S \subset T$, то $S^* \supseteq T^*$.

3°. Оператор T^* замкнут, хотя оператор T может быть незамкнутым.

4°. Если оператор T имеет замыкание $\overline{T}$, то

$$(\overline{T})^* = T^*.$$

5°. Если оператор T^{**} существует, то

$$T \subseteq T^{**}.$$

Последнее предложение показывает, что необходимым условием для существования оператора T^{**} является возможность замкнуть оператор T. Вопрос о том, является ли это условие достаточным для существования T^{**}, мы оставляем открытым до n° 51. Там же будет рассмотрен вопрос о возможности обобщения на случай произвольных операторов равенства $T^{**} = T$, доказанного в n° 25 для ограниченных операторов, определенных всюду в H.

Пусть теперь T — произвольный линейный оператор с плотной в H областью определения D_T, а G — множество всех $g \in \mathrm{D}_T$, для которых $Tg = 0$. Очевидно, множество G линейно (а в случае замкнутости T оно также и замкнуто); его называют *нулевым многообразием* оператора T, а в случае замкнутости — *нулевым подпространством*. Предоставляем читателю доказать следующее простое, но важное предложение.

Теорема 1. *Нулевое многообразие* G^* *оператора* T^*, *сопряженного с* T, *и область значений* Δ_T *оператора* T *ортогональны друг другу. При этом*

$$\mathrm{G}^* = \mathrm{H} \ominus \overline{\Delta}_T$$

(*независимо от того, замкнуто ли* Δ_T *или нет*).

Заканчивая настоящий пункт, докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть линейный оператор* T *имеет обратный оператор* T^{-1} *и пусть* D_T *и* $\mathrm{D}_{T^{-1}}$ *плотны в* H, *так что существуют операторы* T^* *и* $(T^{-1})^*$.

Тогда имеет место равенство

$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*. \tag{3}$$

Доказательство. Примем вначале, что f пробегает D_T, а g пробегает $\mathrm{D}_{(T^{-1})^*}$. В таком случае

$$(f, g) = (T^{-1}Tf, g) = (Tf, (T^{-1})^* g).$$

Но это равенство показывает, что

$$(T^{-1})^* g \in \mathrm{D}_{T^*}$$

и

$$T^* (T^{-1})^* g = g. \tag{4'}$$

С другой стороны, если f пробегает $\mathrm{D}_{T^{-1}}$, а h пробегает D_{T^*}, то

$$(f, h) = (TT^{-1}f, h) = (T^{-1}f, T^*h),$$

откуда следует, что

$$T^*h \in \mathrm{D}_{(T^{-1})^*}$$

и

$$(T^{-1})^* T^*h = h. \tag{4''}$$

Соотношения (4′), (4″) и показывают, что

$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*.$$

45. Собственные векторы, инвариантные подпространства и приводимость линейных операторов. Число λ называют *собственным значением* линейного оператора T, если существует такой вектор $f \neq 0$, что

$$Tf = \lambda f. \tag{1}$$

При этом вектор f называют *собственным вектором* оператора T (точнее, собственным вектором, принадлежащим собственному значению λ).

Если оператор T замкнут, то пополненное нулевым вектором множество всех его собственных векторов, принадлежащих данному собственному значению λ, является подпространством (конечно- или бесконечномерным). Это подпространство называется *собственным подпространством* оператора T, а его размерность — *кратностью собственного значения* λ.

Более общим, чем понятие о собственном подпространстве, является понятие об инвариантном подпространстве.

Подпространство $\mathrm{H}_1 \subseteq \mathrm{H}$ называется *инвариантным подпространством* оператора T, если всякий принадлежащий H_1 элемент из D_T переводится оператором T в элемент, также принадлежащий H_1, т. е. если включение

$$f \in \mathrm{D}_T \cap \mathrm{H}_1$$

влечет включение

$$Tf \in \mathrm{H}_1.$$

Можно сказать, что оператор T *порождает* в инвариантном подпространстве H_1 некоторый оператор T_1, для которого

$$\mathrm{D}_{T_1} = \mathrm{D}_T \cap \mathrm{H}_1, \quad T_1 \subseteq T.$$

Этот оператор T_1 называется *частью оператора* T, лежащей в H_1.

Отметим, что каждое *конечномерное* инвариантное подпространство содержит по крайней мере один собственный вектор, как это известно из линейной алгебры.

Если H_1 есть инвариантное подпространство оператора T, то ортогональное дополнение $\mathrm{H} \ominus \mathrm{H}_1$ может и не быть инвариантным подпространством рассматриваемого оператора. Но допустим, что оба подпространства

$$\mathrm{H}_1, \quad \mathrm{H}_2 = \mathrm{H} \ominus \mathrm{H}_1$$

являются инвариантными подпространствами оператора T, и пусть T_1, T_2 — части оператора T, лежащие соответственно в H_1, H_2. Сводится ли в таком случае изучение оператора T к изучению двух операторов T_1, T_2?

Ответ, очевидно, положителен, если оператор T определен всюду в H.

Действительно, беря любой элемент $h \in \mathrm{H}$, мы можем положить

$$h = h_1 + h_2,$$

где $h_1 \in \mathrm{H}_1$, $h_2 \in \mathrm{H}_2$, после чего получаем

$$Th = T_1 h_1 + T_2 h_2.$$

Если оператор T определен не всюду в H, то заключение остается в силе лишь при дополнительном условии, что проектирование на H_1 не выводит элементов из D_T, т. е. имеет место

Теорема 1. *Если подпространство H_1 и его ортогональное дополнение H_2 являются инвариантными подпространствами оператора T, и если проектирование на H_1 не выводит элементов из D_T, то для любого $f \in \mathrm{D}_T$*

$$Tf = T_1 f_1 + T_2 f_2,$$

где T_1, T_2 — части T, лежащие в H_1, H_2, а f_1 и f_2 — проекции f на H_1 и H_2.

Определение. Если подпространство H_1 удовлетворяет условиям теоремы 1, то говорят, что оно *приводит* оператор T.

Легко видеть, что если подпространство H_1 приводит оператор T, то ортогональное дополнение H_2 также приводит T.

Тривиальными подпространствами, приводящими T, являются нулевое подпространство и само H. Если оператор T не имеет других приводящих подпространств, то его называют *неприводимым.*

Теорема 2. *Пусть P есть оператор проектирования на подпространство G. В таком случае для приводимости оператора T подпространством G необходимо и достаточно, чтобы из $f \in \mathrm{D}_T$ следовало*

$$1)\ Pf \in \mathrm{D}_T \quad \text{и} \quad 2)\ PTf = TPf,$$

иначе говоря, чтобы оператор T был перестановочен с оператором P.

Доказательство. Покажем необходимость условия теоремы. Если подпространство G приводит T, то из $f \in \mathrm{D}_T$ следует, что $Pf \in \mathrm{D}_T$, и, значит, условие 1) доказано. Чтобы доказать условие 2), положим

$$f = g + h,$$

где

$$g = Pf.$$

Так как G приводит T, то

$$Tf = Tg + Th,$$

где $Tg \in \mathrm{G}$, $Th \in \mathrm{H} \ominus \mathrm{G}$. Поэтому

$$PTf = PTg = Tg,$$

т. е.

$$PTf = TPf.$$

Так же просто доказывается и достаточность условия.

Говорят, что проектирующий оператор P *приводит* T, если приводит T подпространство G, на которое P проектирует.

Сведе́ние изучения структуры оператора T к исследованию приводящих его подпространств и лежащих в них частей оператора T основано на следующем предложении.

Теорема 3. *Пусть подпространства* H_k $(k=1, 2, \ldots, n;$ $n \leqslant \infty)$ *попарно ортогональны и*

$$\mathrm{H}=\sum_k \oplus \mathrm{H}_k.$$

Пусть T — линейный оператор, который приводится каждым из подпространств H_k и который мы будем предполагать замкнутым, если $n=\infty$. Пусть, наконец, P_k — оператор проектирования на H_k, а T_k — часть T, лежащая в H_k.

В таком случае для принадлежности элемента f к D_T необходимо и достаточно, чтобы

$$P_k f \in \mathrm{D}_{T_k} \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{n} \| T_k P_k f \|^2 < \infty; \tag{2}$$

при этом

$$Tf=\sum_{k=1}^{n} T_k P_k f. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $f \in \mathrm{D}_T$. Так как H_k приводит T, то $P_k f \in \mathrm{D}_T$ и, значит,

$$P_k f \in \mathrm{D}_T \cap \mathrm{H}_k = \mathrm{D}_{T_k}.$$

Кроме того, $P_k T f = T P_k f$. Поэтому

$$Tf=\sum_{k=1}^{n} P_k T f=\sum_{k=1}^{n} T P_k f=\sum_{k=1}^{n} T_k P_k f.$$

Отсюда в случае $n=\infty$ следует сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \| T_k P_k f \|^2.$$

Примем теперь, что условия (2) выполнены. Если $n<\infty$, то принадлежность f к D_T и равенство (3) следуют из линейности D_T. Если же $n=\infty$, то из линейности D_T следует вначале принадлежность к D_T сумм

$$\sum_{k=1}^{r} P_k f \qquad (r=1, 2, 3, \ldots).$$

Далее, из сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \| T_k P_k f \|^2$$

следует сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k P_k f = \lim_{r \to \infty} T \left(\sum_{k=1} P_k f \right),$$

откуда в силу замкнутости оператора T

$$f \in \mathrm{D}_T \quad \text{и} \quad Tf = \sum_{k=1}^{\infty} T_k P_k f.$$

Замечание. Теорема остается в силе и для того случая, когда пространство H расщеплено на несчетное число подпространств H_α. Это следует из того, что каждый из векторов f, Tf имеет не более счетного множества отличных от нуля проекций на подпространства H_α (см. n° 10).

Заканчивая настоящий пункт, рассмотрим один характерный пример.

Пусть пространство H сепарабельно и $\{e_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ — ортонормированный базис в нем. Рассмотрим линейный оператор U_0, который на ортах задается равенствами

$$U_0 e_k = e_{k+1} \qquad (-\infty < k < \infty),$$

а затем расширяется по непрерывности. U_0 есть унитарный оператор. Замкнутая линейная оболочка G совокупности векторов $\{e_k\}_{k=q}^{\infty}$ при каком-нибудь $q > -\infty$ является инвариантным подпространством оператора U_0, однако G не приводит U_0. Действительно, если P — оператор проектирования на G, то

$$U_0 P e_{q-1} = 0, \qquad P U_0 e_{q-1} = P e_q = e_q,$$

т. е.

$$U_0 P \neq P U_0.$$

Оператор U_0 является примером оператора, не имеющего собственных векторов.

Действительно, предположение

$$U_0 f = \lambda f, \qquad f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e_k \neq 0$$

означает, что

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e_{k+1} = \lambda \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e_k,$$

откуда

$$\alpha_k = \lambda\alpha_{k+1} \qquad (-\infty < k < \infty).$$

Так как

$$(f, f) = (U_0 f, U_0 f) = (\lambda f, \lambda f) = |\lambda|^2 (f, f)$$

и $f \neq 0$, то $|\lambda| = 1$. Поэтому

$$|\alpha_k| = |\alpha_0| \qquad (\pm k = 1, 2, 3, \ldots),$$

что противоречит предположению

$$0 < \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\alpha_k|^2 < \infty.$$

Так как U_0 не имеет собственных векторов, то, очевидно, не существует конечномерных подпространств, приводящих U_0. В дальнейшем (см. n° 54) мы установим существование бесконечномерных подпространств, приводящих U_0.

46. Симметрические операторы. Линейный оператор A называется *симметрическим* *), если

a) область определения D_A плотна в H и

b) для любых двух элементов f, g из D_A имеет место равенство

$$(Af, g) = (f, Ag).$$

Из определения следует, что скалярное произведение (Af, f) при любом $f \in D_A$ вещественно. Может случиться, что при некотором вещественном γ

$$(Af, f) \geqslant \gamma (f, f)$$

для любого $f \in D_A$. В этом случае симметрический оператор A называют *полуограниченным снизу*, а наибольшее из всех значений γ, при которых выполняется это неравенство, называют *нижней гранью* **) оператора A (аналогично определяется оператор, *полуограниченный сверху*, и его *верхняя грань*). Если, в частности,

$$(Af, f) \geqslant 0 \qquad (f \in D_A),$$

то оператор A называют *положительным*.

Если симметрический оператор ограничен, то его расширение по непрерывности определено всюду в H и является, очевидно, ограниченным самосопряженным оператором (см. n° 25).

Если же симметрический оператор не ограничен, то в силу теоремы n° 28 его область определения не может совпадать со всем пространством.

---

*) Наряду с термином *симметрический* применяется термин *эрмитов*.

**) Для ограниченных самосопряженных операторов это понятие было введено в n° 25.

Для удобства при дальнейших ссылках сформулируем этот результат в виде следующего предложения.

Теорема 1. *Если симметрический оператор A определен всюду в* H, *то A есть самосопряженный ограниченный оператор.*

Если A — симметрический оператор, то, очевидно,

$$A^* \supseteq A,$$

а так как сопряженный оператор замкнут, то это соотношение показывает, что симметрический оператор всегда допускает замыкание.

Если B — симметрическое расширение оператора A, то $B \subseteq A^*$, т. е. *всякое симметрическое расширение оператора A содержится в сопряженном операторе A^*.*

Действительно, из $B \supseteq A$ следует, что $B^* \subseteq A^*$, и остается принять во внимание, что $B \subseteq B^*$.

Оператор, совпадающий со своим сопряженным ($A = A^*$), называется *самосопряженным*; он не имеет симметрических расширений.

Симметрический оператор, не имеющий симметрических расширений, но не совпадающий со своим сопряженным ($A \subset A^*$), называется *максимальным* симметрическим оператором.

Теорема 2. *Симметрический оператор A, область значений которого Δ_A совпадает со всем пространством, есть оператор самосопряженный.*

Доказательство. Надлежит проверить, что любой элемент g из D_{A^*} принадлежит D_A. Итак, пусть $g \in \mathrm{D}_{A^*}$ и $A^*g = g^*$. Так как, по условию теоремы, $\Delta_A = \mathrm{H}$, то существует такой элемент $h \in \mathrm{D}_A$, что $Ah = g^*$. Следовательно, при любом $f \in \mathrm{D}_A$,

$$(Af, g) = (f, g^*) = (f, Ah) = (Af, h).$$

А так как $\Delta_A = \mathrm{H}$, то $g = h$, т. е. $g \in \mathrm{D}_A$, и теорема доказана.

Теорема 3. *Если самосопряженный оператор имеет обратный оператор, то этот обратный оператор является оператором самосопряженным* (ограниченным или неограниченным).

Доказательство. Проверим, что область определения обратного оператора или, что то же, область значений оператора A плотна в H. Последнее, действительно, имеет место, так как в противном случае существовал бы вектор $h \neq 0$, ортогональный к Δ_A, а тогда из равенства $(Af, h) = 0$, справедливого для всех $f \in \mathrm{D}_A$, следовало бы, что $h \in \mathrm{D}_A$ и что $Ah = 0$, а это противоречит существованию обратного оператора.

Теперь остается воспользоваться теоремой 2 n° 44.

Теорема 4. *Собственные значения симметрического оператора вещественны.*

Собственные векторы f_1, f_2, принадлежащие двум различным собственным значениям λ_1, λ_2 симметрического оператора, ортогональны.

Действительно, если

$$Af = \lambda f \qquad (f \neq 0),$$

то

$$(Af, f) = \lambda (f, f),$$

и так как для симметрического оператора (Af, f) вещественно, а $(f, f) > 0$, то число λ вещественно.

Итак, первое утверждение доказано.

Для доказательства второго утверждения положим

$$Af_1 = \lambda_1 f_1, \qquad Af_2 = \lambda_2 f_2, \qquad \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

В таком случае

$$\lambda_1 (f_1, f_2) = (Af_1, f_2) = (f_1, Af_2) = \lambda_2 (f_1, f_2),$$

откуда

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(f_1, f_2) = 0$$

и, следовательно,

$$(f_1, f_2) = 0.$$

Теорема 5. *Если* G *есть инвариантное подпространство симметрического оператора A и если проектирование на* G *не выводит элементов из* D_A, *то подпространство* G *приводит оператор A.*

Доказательство. На основании теоремы 1 n° 45 все сводится к доказательству того, что подпространство $\mathrm{H} \ominus \mathrm{G}$ является инвариантным подпространством оператора A.

Беря произвольный элемент f из D_A, принадлежащий $\mathrm{H} \ominus \mathrm{G}$, и заставляя g пробегать D_A, будем, в силу условий теоремы, иметь равенство

$$(Af, Pg) = (f, APg) = 0,$$

где P — оператор проектирования на G. Итак, при любом g из D_A

$$(Af, Pg) = 0$$

или

$$(PAf, g) = 0.$$

В силу плотности D_A в H, это значит, что

$$PAf = 0,$$

т. е.

$$Af \in \mathrm{H} \ominus \mathrm{G},$$

и теорема доказана.

В заключение отметим следующую лемму, которой нам придется воспользоваться позднее.

Лемма. *Для того чтобы линейное многообразие* D ($\mathrm{D}_A \subset \subset \mathrm{D} \subset \mathrm{D}_{A^*}$) *являлось областью определения самосопряженного расширения симметрического оператора* A, *необходимо и достаточно, чтобы совокупность всех элементов* f *из* D_{A^*}, *удовлетворяющих при любом* $g \in \mathrm{D}$ *условию*

$$(A^*f, g) = (f, A^*g),$$

совпадала с D.

Доказательство этой леммы непосредственно следует из рассмотрений настоящего параграфа.

47. Снова об изометрических и унитарных операторах. Мы будем рассматривать в настоящем пункте изометрические операторы в узком смысле, т. е. областью определения D_V и областью значений Δ_V оператора V будут некоторые подпространства одного и того же пространства H. Изометрический оператор называют *максимальным*, если он не имеет изометрических расширений.

Теорема 1 *). *Собственные значения изометрического оператора по модулю равны* 1.

Доказательство. Действительно, пусть

$$Vf = \lambda f.$$

Тогда

$$(f, f) = (Vf, Vf) = (\lambda f, \lambda f) = |\lambda|^2 (f, f),$$

откуда $|\lambda| = 1$, так как $(f, f) \neq 0$.

Теорема 2. *Собственные векторы* f_1, f_2, *принадлежащие двум различным собственным значениям* λ_1, λ_2 *изометрического оператора, ортогональны.*

Доказательство. Пусть

$$Vf_1 = \lambda_1 f_1, \qquad Vf_2 = \lambda_2 f_2.$$

В таком случае

$$(f_1, f_2) = (Vf_1, Vf_2) = (\lambda_1 f_1, \lambda_2 f_2) = \lambda_1 \bar{\lambda}_2 (f_1, f_2),$$

откуда

$$(1 - \lambda_1 \bar{\lambda}_2)(f_1, f_2) = 0$$

и, значит,

$$(f_1, f_2) = 0,$$

так как $1 - \lambda_1 \bar{\lambda}_2 \neq 0$.

Теорема 3. *Для того чтобы подпространство* G *приводило унитарный оператор* U, *необходимо и достаточно, чтобы под-*

*) В сущности, этот факт нами был установлен уже в n° 45.

пространство G *было инвариантным подпространством для каждого из операторов* U, U^{-1}.

Доказательство. Пусть G приводит U. Тогда $H \ominus G$ есть инвариантное подпространство оператора U, т. е. при любом $f \in H \ominus G$ и любом $g \in G$

$$(Uf, g) = 0,$$

откуда

$$(f, U^{-1}g) = 0,$$

а это и означает, что $U^{-1}g \in G$, т. е. что G является инвариантным подпространством для U^{-1}.

Обратно, пусть G инвариантно относительно оператора U^{-1}. Тогда при любом $f \in H \ominus G$ и любом $g \in G$

$$(Uf, g) = (f, U^{-1}g) = 0,$$

откуда вытекает, что подпространство $H \ominus G$ инвариантно относительно оператора U. Кроме того, G инвариантно относительно U по условию. Следовательно, G приводит оператор U.

48. Понятие о спектре. В линейной алгебре под спектром матрицы понимают совокупность ее собственных значений. В элементарной теории интегральных уравнений спектр вводится как совокупность характеристических чисел этого уравнения. При этом оказывается, что некоторое неоднородное уравнение (векторное или функциональное), содержащее параметр λ, разрешимо, и притом однозначно, при любой правой части, если λ не принадлежит спектру, и, вообще говоря, неразрешимо, если λ принадлежит спектру.

Перейдем теперь к общим рассмотрениям и примем, что нам дан некоторый замкнутый линейный оператор T, определенный на плотном в H многообразии D_T. Обозначим через λ параметр, который может принимать любые комплексные значения, и рассмотрим операторное уравнение

$$Tf - \lambda f = g.$$

Исследование этого уравнения сводится к исследованию линейного многообразия $\Delta_T(\lambda)$, пробегаемого вектором $(T - \lambda I) f$, когда f пробегает D_T. Коротко $\Delta_T(\lambda)$ можно записать в виде $\Delta_T(\lambda) = (T - \lambda I) D_T$. Оператор $T - \lambda I = T_\lambda$ осуществляет соответствие (не обязательно взаимно однозначное) между D_T и $\Delta_T(\lambda)$. Если это соответствие взаимно однозначно, то оператор $T - \lambda I$ имеет обратный оператор $(T - \lambda I)^{-1}$ с областью определения $\Delta_T(\lambda)$ и областью значений D_T.

Определение 1. Значения параметра λ, для которых обратный оператор $(T - \lambda I)^{-1}$ существует, определен всюду в H ($\Delta_T(\lambda) = H$) и ограничен, называются *регулярными значениями* (или *регулярными точками*) оператора T. Все остальные точки комплексной плоскости образуют *спектр* оператора T.

В упомянутых выше случаях, которые относятся к линейной алгебре и теории интегральных уравнений, спектр оператора состоит из всех его собственных значений. Вообще же совокупность собственных значений не исчерпывает спектр. Действительно, приводимая далее теорема 1 характеризует собственные значения оператора, как такие значения параметра λ, для которых оператор $T - \lambda I$ не имеет обратного, а между тем может представиться еще и тот случай, когда при рассматриваемом значении параметра λ обратный оператор $(T - \lambda I)^{-1}$ существует, но определен не всюду в H или неограничен.

Теорема 1. *Осуществляемое оператором $T - \lambda I$ соответствие между D_T и $\Delta_T(\lambda)$ взаимно однозначно в том и только том случае, если λ не есть собственное значение оператора T.*

Доказательство. Если оператор $T - \lambda I$ не осуществляет взаимно однозначного соответствия между D_T и $\Delta_T(\lambda)$, то существуют такие $f_1, f_2 \in D_T$ ($f_1 \neq f_2$), что

$$Tf_1 - \lambda f_1 = g, \qquad Tf_2 - \lambda f_2 = g.$$

Следовательно,

$$Tf = \lambda f,$$

где $f = f_1 - f_2 \neq 0$, т. е. λ есть собственное значение оператора T.

Доказательство обратного утверждения так же просто и может быть предоставлено читателю.

Не останавливаясь в общем случае на детальном априорном разборе всех возможных предположений относительно оператора $(T - \lambda I)^{-1}$ и области $\Delta_T(\lambda)$, ограничимся тем особенно важным случаем, когда исходный оператор есть оператор самосопряженный (мы будем его обозначать не T, а A).

Теорема 2. *Число λ является собственным значением самосопряженного оператора A в том и только том случае, если*

$$\overline{\Delta_A(\lambda)} \neq H.$$

Доказательство. Пусть λ есть собственное значение оператора A, так что

$$Af = \lambda f \qquad (f \neq 0).$$

В таком случае при любом $h \in D_A$

$$(f, (A - \lambda I) h) = (Af - \lambda f, h) = 0$$

и, значит,

$$f \perp \Delta_A(\lambda),$$

что возможно только при $\overline{\Delta_A(\lambda)} \neq H$.

Допустим теперь, что $\overline{\Delta_A(\lambda)} \neq \mathrm{H}$. В таком случае существует отличный от нуля вектор f, ортогональный многообразию $\Delta_A(\lambda)$. Поэтому при любом $h \in \mathrm{D}_A$

$$(f, (A-\lambda I)\,h) = 0,$$

откуда следует, что $f \in \mathrm{D}_{A^*}$ и

$$A^* f = \bar{\lambda} f.$$

Но $A^* = A$, поэтому

$$Af = \bar{\lambda} f,$$

т. е. $\bar{\lambda}$ есть собственное значение оператора A (и, значит, вещественно).

Отметим, что в ходе доказательства теоремы 2 нами доказана

Теорема 2*. *Собственное подпространство оператора A, принадлежащее собственному значению λ, является ортогональным дополнением в* H *линейного многообразия* $\Delta_A(\lambda) = (A-\lambda I)\,\mathrm{D}_A$.

Теорема 3. *Невещественные точки комплексной плоскости λ являются регулярными точками самосопряженного оператора A.*

Доказательство. Число $\lambda = \xi + i\eta$ $(\eta \neq 0)$ не может быть собственным значением оператора A. Поэтому на основании теоремы 1 существует оператор $(A - \lambda I)^{-1}$. Пусть

$$(A-\lambda I)\,f = g.$$

Тогда

$$\|g\|^2 = ((A-\xi I)\,f - i\eta f,\quad (A-\xi I)\,f - i\eta f) =$$
$$= \|(A-\xi I)\,f\|^2 + i\eta\,((A-\xi I)\,f, f) - i\eta\,(f, (A-\xi I)\,f) + \eta^2\,\|f\|^2 =$$
$$= \|(A-\xi I)\,f\|^2 + \eta^2\,\|f\|^2,$$

откуда

$$\|f\| \leqslant \frac{1}{|\eta|}\,\|g\|,$$

т. е.

$$\|(A-\lambda I)^{-1} g\| \leqslant \frac{1}{|\eta|}\,\|g\|.$$

Так как это соотношение справедливо при любом $g \in \Delta_A(\lambda)$, то оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ ограничен.

Поскольку λ не является собственным значением оператора, то в силу теоремы 2

$$\overline{\Delta_A(\lambda)} = \mathrm{H}.$$

Остается доказать, что многообразие $\Delta_A(\lambda)$ замкнуто. Допуская, что $\Delta_A(\lambda) \neq \overline{\Delta_A(\lambda)}$, мы должны заключить, что оператор

$(A - \lambda I)^{-1}$, как оператор ограниченный, можно расширить на $\overline{\Delta_A(\lambda)}$. Это расширение совпадет с замыканием оператора $(A - \lambda I)^{-1}$, который поэтому не замкнут. Но это невозможно, так как замкнутость оператора A влечет замкнутость оператора $(A - \lambda I)^{-1}$.

Следствие 1. *Спектр самосопряженного оператора лежит на вещественной оси.*

Следствие 2. *Регулярная точка самосопряженного оператора A может быть определена как такое значение параметра λ, для которого $\Delta_A(\lambda) = H$.*

Доказательство. Если λ — невещественная точка, то ее регулярность установлена теоремой 3. Если λ вещественно и $\Delta_A(\lambda) = H$, то, в силу теоремы 2, λ не есть собственное значение оператора A. Поэтому, в силу теоремы 1, существует определенный всюду в H обратный оператор $(A - \lambda I)^{-1}$. Этот оператор является самосопряженным оператором и, следовательно (см. начало n° 46), он ограничен, так что применимость определения 1 доказана.

Мы можем теперь, не вступая в противоречие с определением 1, принять следующее

Определение 2. Если A — самосопряженный оператор, то точка λ называется *регулярной* его точкой при $\Delta_A(\lambda) = H$ и точкой *спектра* при $\Delta_A(\lambda) \neq H$.

Классификацию точек спектра самосопряженного оператора дает следующее

Определение 3. Значение λ принадлежит *точечному* спектру самосопряженного оператора A, если $\overline{\Delta_A(\lambda)} \neq H$, и принадлежит *непрерывному* спектру, если $\Delta_A(\lambda) \neq \overline{\Delta_A(\lambda)}$ или если λ есть собственное значение бесконечной кратности.

Заметим, что этим определением не исключается принадлежность точки λ одновременно обеим частям спектра даже в том случае, когда λ не есть собственное значение бесконечной кратности.

На основании теоремы 2 точечный спектр оператора совпадает с совокупностью его собственных значений. Множество всех изолированных точек спектра, за исключением собственных значений бесконечной кратности, называют иногда *дискретным* спектром*).

Заканчивая настоящий пункт, докажем следующее предложение.

Теорема 4. *Спектр самосопряженного оператора замкнут.*

Доказательство. Достаточно доказать, что множество регулярных точек самосопряженного оператора A открыто.

---

*) Из дальнейшего (см. n° 93) вытекает, что дискретный спектр является частью точечного спектра.

Пусть λ_0 — регулярная точка. В таком случае существует такое число $k>0$, что при любом $f \in D_A$

$$\|Af-\lambda_0 f\| \geqslant k\|f\|.$$

Если $0<\delta \leqslant \frac{1}{2}k$, то при $|\lambda-\lambda_0| \leqslant \delta$ и любом $f \in D_A$

$$\|Af-\lambda f\| \geqslant \|Af-\lambda_0 f\|-\delta\|f\| \geqslant \frac{1}{2}k\|f\|,$$

откуда видно, во-первых, что λ не есть собственное значение оператора A, так что $\overline{\Delta_A(\lambda)} = H$, и, во-вторых, что обратный оператор $(A-\lambda I)^{-1}$ ограничен. Равенство $\Delta_A(\lambda) = \overline{\Delta_A(\lambda)}$ является следствием замкнутости оператора A. Таким образом, все точки λ из окрестности $|\lambda-\lambda_0|<\delta$ регулярны, и теорема доказана.

49. Резольвента. Как и в предыдущем пункте, начнем с произвольного замкнутого линейного оператора T, область определения которого плотна в H, а затем обратимся к самосопряженному оператору A.

Резольвентой оператора T называют зависящий от параметра λ оператор

$$R_\lambda = (T-\lambda I)^{-1},$$

рассматриваемый на множестве всех тех значений λ, для которых он существует и для которых его область определения, т. е. $\Delta_T(\lambda)$, плотна в H.

В каждой регулярной точке оператора T резольвента R_λ есть определенный во всем пространстве ограниченный оператор.

Оператор R_λ осуществляет взаимно однозначное соответствие между $\Delta_T(\lambda)$ и D_T. Отсюда, в частности, вытекает, что если для какой-нибудь регулярной точки λ оператора T имеет место равенство $R_\lambda h = 0$, то $h = 0$.

Теорема 1. *Для любых двух регулярных значений* λ, μ *оператора* T *имеет место равенство* (так называемое соотношение Гильберта)

$$R_\mu - R_\lambda = (\mu-\lambda) R_\mu R_\lambda.$$

Доказательство. Так как λ, μ — регулярные точки оператора T, то для любого $h \in H$

$$R_\lambda h = R_\mu (T-\mu I) R_\lambda h, \qquad R_\mu h = R_\mu (T-\lambda I) R_\lambda h.$$

Вычитая первое равенство из второго, мы и получим требуемое соотношение.

Из соотношения Гильберта следует перестановочность резольвент при всех регулярных значениях λ, μ:

$$R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda.$$

Это есть частный случай следующего общего предложения.

Теорема 2. *Для перестановочности оператора T с ограниченным оператором S, определенным всюду в* H, *необходимо, чтобы оператор S был перестановочен с резольвентой $R_\lambda = (T - \lambda I)^{-1}$ для любого регулярного значения λ, и достаточно, чтобы S и R_λ были перестановочны хотя бы для одного регулярного значения λ.*

Доказательство. Допустим, что операторы T и S перестановочны, т. е. что равенство

$$TSf = STf$$

имеет место для любого $f \in \mathrm{D}_T$.

Если λ — регулярная точка оператора T и

$$f = R_\lambda h,$$

то f пробегает D_T, когда h пробегает H. А так как из перестановочности операторов T и S следует, что при любом $f \in \mathrm{D}_T$

$$(T - \lambda I) Sf = S (T - \lambda I) f$$

и, значит,

$$R_\lambda (T - \lambda I) Sf = R_\lambda S (T - \lambda I) f,$$

то в случае перестановочности операторов T и S

$$SR_\lambda h = R_\lambda Sh.$$

Доказательство второй части утверждения нисколько не сложнее.

Обратимся теперь к самосопряженному оператору A с тем, чтобы определить его резольвенту R_λ также и для собственных значений, после чего резольвента самосопряженного оператора будет определена для всех точек плоскости λ.

С этой целью примем, что λ' есть собственное значение оператора A и обозначим через $\mathrm{G}_{\lambda'}$ собственное подпространство оператора A, принадлежащее λ'. Как мы знаем, $\mathrm{G}_{\lambda'}$ приводит оператор A. Пусть A' — часть оператора A, лежащая в $\mathrm{H} \ominus \mathrm{G}_{\lambda'} = \mathrm{H}'$. Легко видеть, что A' есть самосопряженный оператор в H', для которого λ' не есть собственное значение. Мы определим $R_{\lambda'}$, полагая

$$R_{\lambda'} = (A' - \lambda' I)^{-1}.$$

Областью определения оператора $R_{\lambda'}$ является плотное в H' многообразие $\Delta_{A'}(\lambda')$. Его описывает точка

$$(A' - \lambda' I) f' = (A - \lambda' I) f',$$

когда точка f' пробегает $\mathrm{D}_{A'}$. Но легко видеть, что то же многообразие описывает точка

$$(A - \lambda' I) f,$$

когда точка f пробегает D_A. Таким образом,

$$\Delta_{A'}(\lambda') = \Delta_A(\lambda').$$

Что касается области значений оператора $R_{\lambda'}$, то она получится, если D_A спроектировать на ортогональное дополнение к собственному подпространству, принадлежащему собственному значению λ'.

Заканчивая настоящий пункт, покажем, что

$$(R_\lambda)^* = R_{\bar{\lambda}}, \tag{1}$$

если только λ не принадлежит точечному спектру оператора (в последнем случае оператор R_λ вообще не имеет сопряженного).

Действительно, в силу теоремы 2 n° 44 имеем

$$(R_\lambda)^* = [(A - \lambda I)^{-1}]^* = [(A - \lambda I)^*]^{-1} = (A - \bar{\lambda} I)^{-1} = R_{\bar{\lambda}},$$

что и доказывает формулу (1).

50. Оператор сопряжения*). Так называют определенный всюду в H оператор J, для которого

1) $$(Jf, Jg) = \overline{(f, g)},$$
2) $$J^2 f = f$$

для любых $f, g \in$ H.

Из 2) следует, что областью значений оператора J также является все пространство. Действительно, любой вектор $h \in$ H можно представить в виде $h = Jg$, стоит лишь взять $g = Jh$.

Оператор J вместо обычной линейности обладает следующим свойством:

$$J(\alpha f + \beta g) = \bar{\alpha} Jf + \bar{\beta} Jg.$$

Действительно, полагая в 1)

$$g = Jh,$$

где h будет пробегать H, получим

$$(Jf, h) = \overline{(f, Jh)},$$

откуда

$$(J(\alpha f + \beta g), h) = \overline{(\alpha f + \beta g, Jh)} = \bar{\alpha}\,\overline{(f, Jh)} + \bar{\beta}\,\overline{(g, Jh)} =$$
$$= \bar{\alpha}(Jf, h) + \bar{\beta}(Jg, h) = (\bar{\alpha} Jf + \bar{\beta} Jg, h),$$

и утверждение доказано.

*) Результаты настоящего пункта будут использованы лишь в добавлении II.

Примером оператора сопряжения в L^2 является операция перехода к комплексно сопряженной функции

$$J\varphi(t)=\overline{\varphi(t)}.$$

Для всякого оператора сопряжения в сепарабельном пространстве можно так выбрать ортонормированный базис $\{e_k\}_1^\infty$, что из

$$f=\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$$

будет следовать

$$Jf=\sum_{k=1}^{\infty} \overline{x}_k e_k.$$

Доказательство этого простого факта предоставляем читателю.

Определение. Симметрический оператор A называют *вещественным* по отношению к данному оператору сопряжения J, если операторы A и J перестановочны, т. е. если из $f \in D_A$ следует, что $Jf \in D_A$ и

$$JAf=AJf.$$

Теорема. *Если A — самосопряженный оператор, вещественный относительно данного оператора сопряжения J, то резольвента оператора A при всех невещественных λ удовлетворяет соотношению*

$$R_\lambda=JR_\lambda^*J. \tag{1}$$

Доказательство. Применим оператор сопряжения к обеим частям равенства

$$(A-\lambda I)R_\lambda=E.$$

Получим

$$J(A-\lambda I)R_\lambda=J.$$

Отсюда, в силу вещественности оператора A по отношению к оператору J, находим

$$(A-\overline{\lambda}I)JR_\lambda=J.$$

Теперь применим к обеим частям оператор $JR_{\overline{\lambda}}$. Это даст

$$R_\lambda=JR_{\overline{\lambda}}J,$$

что и требовалось доказать, так как $R_{\overline{\lambda}}=R_\lambda^*$.

Если T — линейный оператор с плотной в H областью определения, а J — заданный оператор сопряжения, то, по аналогии с терминологией теории матриц, оператор JT^*J можно назвать *транспонированным* с T и обозначить T'. Доказанное только что соотношение (1) можно, следовательно, записать в виде

$$R'_\lambda = R_\lambda.$$

51. Метод графика. Рассмотрим множество *пар* $\{f, g\}$, где *абсцисса* f и *ордината* g пробегают гильбертово пространство H. Будем считать эти пары элементами ортогональной суммы пространств $\mathrm{H}_1 \oplus \mathrm{H}_2$, где $\mathrm{H}_1 = \mathrm{H}_2 = \mathrm{H}$ (см. п° 7).

Образованное этими парами гильбертово пространство $\mathrm{H} \oplus \mathrm{H}$ мы будем обозначать $\mathbf{H}$.

Пусть T — какой-нибудь оператор в H. В таком случае совокупность $\mathbf{M}(T)$ всех точек вида $\{f, Tf\}$ называют *графиком* оператора T.

Все точки множества $\mathbf{M}(T)$ однозначно определяются своими абсциссами. Обратно, если все точки некоторого множества $\mathbf{M}$ из $\mathbf{H}$ однозначно определяются своими абсциссами, то в H существует оператор T, графиком которого является множество $\mathbf{M}$.

Весьма просто отражается на графике, замкнут или не замкнут оператор T, а именно, для замкнутости оператора T необходимо и достаточно, чтобы было замкнуто в $\mathbf{H}$ точечное множество $\mathbf{M}(T)$. Так как любое множество в $\mathbf{H}$ можно замкнуть, то на основании сказанного может показаться, что любой оператор T в H допускает замыкание. Но дело в том, что замыкание графика $\mathbf{M}(T)$ оператора T может привести к множеству $\overline{\mathbf{M}(T)}$, точки которого не определяются однозначно своими абсциссами, и в этом случае множество $\overline{\mathbf{M}(T)}$ не будет графиком, т. е. не порождается никаким оператором. Если же множество $\overline{\mathbf{M}(T)}$ не содержит двух различных точек с равными абсциссами, то оператор T допускает замыкание $\overline{T}$ и $\mathbf{M}(\overline{T}) = \overline{\mathbf{M}(T)}$.

Легко видеть, что если оператор T линеен, то множество $\mathbf{M}(T)$ будет линейным многообразием в $\mathbf{H}$.

Определим теперь всюду в $\mathbf{H}$ оператор $\mathbf{U}$, полагая

$$\mathbf{U}\{f, g\} = \{g, -f\}.$$

$\mathbf{U}$ есть унитарный оператор. Действительно, его областью значений является все пространство $\mathbf{H}$, а с другой стороны,

$$(\mathbf{U}\{f_1, g_1\}, \mathbf{U}\{f_2, g_2\}) = (\{g_1, -f_1\}, \{g_2, -f_2\}) =$$
$$= (g_1, g_2) + (f_1, f_2) = (\{f_1, g_1\}, \{f_2, g_2\}).$$

Заметим также, что $\mathbf{U}^2 = -\mathbf{I}$.

Применим метод графика для решения поставленных в п° 44 вопросов относительно существования T^{**} и равенства $T^{**} = \overline{T}$.

С этой целью возьмем равенство

$$(Tf, g)-(f, g^*)=(\{Tf, -f\}, \{g, g^*\})=(\mathbf{U}\{f, Tf\}, \{g, g^*\}),$$

верное для любого $f \in \mathrm{D}_T$ и любой пары элементов g, g^* из H. Из написанного равенства вытекает ряд следствий:

1°. Для того чтобы элементы g, $g^* \in \mathrm{H}$ удовлетворяли соотношению

$$(Tf, g)=(f, g^*)$$

при любом $f \in \mathrm{D}_T$, необходимо и достаточно, чтобы элемент $\{g, g^*\}$ пространства $\mathbf{H}$ был ортогонален множеству $\mathbf{UM}(T)$, в которое оператор $\mathbf{U}$ переводит график оператора T.

2°. Если оператор T^* существует, то его графиком является

$$\mathbf{M}(T^*)=\mathbf{H} \ominus \overline{\mathbf{UM}(T)}.$$

3°. Для существования оператора T^* необходимо и достаточно, чтобы точки множества

$$\mathbf{H} \ominus \overline{\mathbf{UM}(T)}$$

однозначно определялись своими абсциссами.

Следствие 3° есть другой критерий существования сопряженного оператора (первый критерий — плотность многообразия D_T в H — был установлен в n° 44).

Т е о р е м а 1. *Если линейный оператор T с плотной в H областью определения допускает замыкание, то оператор T^{**} существует и является замыканием* *) *оператора T*:

$$T^{**}=\overline{T}.$$

(В частности, если оператор T замкнут и $\overline{\mathrm{D}}_T=\mathrm{H}$, то $T=T^{**}$.)

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим вначале, что оператор T замкнут. В таком случае замкнуто множество $\mathbf{M}(T)$, а значит, и множество $\mathbf{UM}(T)$. Поэтому устанавливаемое следствием 2 соотношение можно переписать в виде

$$\mathbf{H}=\mathbf{UM}(T) \oplus \mathbf{M}(T^*).$$

Отсюда, применяя оператор $\mathbf{U}$ и учитывая, что $\mathbf{M}(T)=-\mathbf{M}(T)$, получим

$$\mathbf{H}=\mathbf{M}(T) \oplus \mathbf{UM}(T^*). \tag{1}$$

Иначе говоря,

$$\mathbf{H} \ominus \mathbf{UM}(T^*)=\mathbf{M}(T). \tag{2}$$

А так как точки множества $\mathbf{M}(T)$, как графика, однозначно определяются своими абсциссами, то, в силу следствия 3, оператор T^{**}

*) Таким образом, теорема 1 дает прием для нахождения замыкания оператора. Этот прием иногда применяется в приложениях (см. n° 54).

существует, а на основании (2) и следствия 2° он совпадает с T. Итак, если оператор T замкнут, теорема доказана.

Примем теперь, что оператор T не замкнут, но допускает замыкание. В таком случае, по доказанному,

$$(\bar{T})^{**} = \bar{T}.$$

Но

$$(\bar{T})^{**} = [(\bar{T})^*]^* = (T^*)^* = T^{**}$$

и, следовательно,

$$T^{**} = \bar{T},$$

что и требовалось доказать.

Докажем методом графика еще одно замечательное предложение.

Теорема 2. *Если T — замкнутый линейный оператор с плотной в* H *областью определения, то произведение T^*T есть самосопряженный (и притом положительный) оператор.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что при любых $f, g \in D_{T^*T}$ имеет место соотношение

$$(T^*Tf, g) = (Tf, Tg) = (f, T^*Tg)$$

и, в частности,

$$(T^*Tf, f) = (Tf, Tf) \geqslant 0,$$

так что положительность оператора T^*T уже доказана.

Пусть h — произвольный элемент H. В силу справедливого, благодаря замкнутости оператора T, соотношения (1) элемент $\{h, 0\} \in \mathbf{H}$ однозначно представим в виде

$$\{h, 0\} = \{f_0, Tf_0\} + \mathbf{U}\{g_0, T^*g_0\}$$

или

$$\{h, 0\} = \{f_0, Tf_0\} + \{T^*g_0, -g_0\}.$$

Следовательно,

$$h = f_0 + T^*g_0, \qquad 0 = Tf_0 - g_0$$

и, значит,

$$h = (I + T^*T) f_0.$$

Таким образом, при любом $h \in$ H уравнение

$$(I + T^*T) f = h \tag{3}$$

разрешимо (однозначно). Отсюда вытекает, что D_{T^*T} плотно в H. В самом деле, допустим, что существует вектор $h \neq 0$, ортогональный D_{T^*T}. Но вектор h можно представить в виде (3). Следовательно, при любом $g \in D_{T^*T}$

$$0 = (h, g) = ((I + T^*T) f, g) = (f, (I + T^*T) g)$$

и, беря $g = f$, получим

$$0 = (f, f) + (f, T^*Tf) = (f, f) + (Tf, Tf),$$

откуда $f = 0$ и, значит, $h = 0$, что невозможно.

Итак, D_{T^*T} плотно в H. Значит, T^*T и, следовательно, $I + T^*T$ — симметрический оператор. Но область значений оператора $I + T^*T$, по доказанному, совпадает со всем пространством H. Поэтому (см. n° 46) $I + T^*T$ есть самосопряженный оператор и таковым является также

$$T^*T = (I + T^*T) - I.$$

Доказательство закончено.

Совершенно аналогично доказывается, что при условиях теоремы является положительным самосопряженным оператором произведение TT^*.

Результат, полученный в настоящем пункте, позволяет обобщить теорему 1 n° 46 на случай произвольного замкнутого оператора, а именно, справедлива

Теорема 3. *Если замкнутый линейный оператор* T *определен всюду в* H, *то он ограничен.*

Доказательство. Установим вначале ограниченность сопряженного оператора T^*. С этой целью допустим противное. В таком случае существует последовательность $\{g_k\}_1^\infty \subset D_{T^*}$ ($\| g_k \| = 1$), для которой

$$\lim_{k \to \infty} \| T^* g_k \| = \infty. \tag{4}$$

Рассмотрим последовательность функционалов

$$\Phi_k(f) = (f, T^* g_k) = (Tf, g_k) \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Так как при каждом $f \in$ H числовая последовательность $\{\Phi_k(f)\}_1^\infty$ ограничена, то по теореме 2 n° 26 найдется такое $\mathscr{M} < \infty$, что

$$\| \Phi_k \| \leqslant \mathscr{M} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

а это противоречит (4), ибо $\| \Phi_k \| = \| T^* g_k \|$.

Итак, оператор T^* ограничен; а так как он замкнут, то его область определения D_{T^*} есть подпространство. С другой стороны, из замкнутости исходного оператора T, в силу теоремы 1 настоящего пункта, вытекает, что D_{T^*} плотно в H. Поэтому $D_{T^*} =$ H. А так как $T = (T^*)^*$, то и T — ограниченный оператор, что и требовалось доказать.

Заметим, что теорема 3 является частным случаем одной общей теоремы Банаха *).

---

*) Банах С., Курс функціонального аналізу, Київ, 1948.

52. Обобщение понятия о проектирующем операторе, о котором здесь будет идти речь, соответствует переходу от ортогонального проектирования к проектированию косому.

Пусть пространство H разложено в прямую (но, вообще говоря, не ортогональную) сумму подпространств G и F:

$$\mathrm{H} = \mathrm{G} \oplus \mathrm{F},$$

так что каждый элемент $h \in \mathrm{H}$ однозначно представим в виде

$$h = g + f,$$

где $g \in \mathrm{G}$ и $f \in \mathrm{F}$.

Определенный всюду в H оператор P, который каждому вектору h относит его компоненту $g \in \mathrm{G}$, называется оператором проектирования (на G параллельно F) или, короче, *проектором*.

В частности, если подпространства G и F ортогональны, оператор P совпадает с проектирующим оператором, который был введен нами в n° 35 и который теперь удобнее называть *ортопроектором*.

Равенство $\|P\| = 1$, имеющее место для ортопроекторов, не сохраняется при переходе к произвольным проекторам, так как уже в конечномерном пространстве норма проектора может быть сколь угодно большой. В связи с этим возникает вопрос о том, является ли произвольный проектор в H ограниченным оператором. Положительный ответ на этот вопрос вытекает из теоремы 3 предыдущего пункта. Чтобы убедиться в этом, нужно лишь доказать, что всякий проектор P является замкнутым оператором.

Допуская противное, мы приходим к выводу, что существует последовательность $\{h_n\}_1^\infty$, для которой

$$h_n \to h, \qquad Ph_n \to g' \neq Ph. \tag{1}$$

Так как

$$h_n = Ph_n + f'_n,$$

где $f'_n \in \mathrm{F}$, то в силу (1) $f'_n \to f' \in \mathrm{F}$, и, значит, справедливо следующее разложение h на две компоненты:

$$h = g' + f'.$$

Но, с другой стороны, имеет место второе представление

$$h = Ph + f \qquad (f \in \mathrm{F}).$$

Это противоречит определению прямой суммы.

Теперь нетрудно (мы предоставляем это читателю) перенести на проекторы основные свойства ортопроекторов, изложенные в n° 36 и 37. В частности,

1°. Оператор P, определенный всюду в H, является проектором в том и только том случае, когда он ограничен и удовлетворяет соотношению $P^2 = P$.

2°. Если P есть проектор на G параллельно F, то $I-P$ есть проектор на F параллельно G.

3°. Если проекторы P_1 и P_2 перестановочны, то их произведение $P=P_1P_2$ также является проектором.

Заметим, однако, что, в отличие от ортопроекторов, косой проектор не является самосопряженным оператором.

В заключение рассмотрим случай, когда прямая (не ортогональная) сумма двух подпространств G и F плотна в H, но не совпадает со всем H. В этом случае можно определить оператор P на плотном в H многообразии $D_P = G \oplus F$ формулой

$$Ph=g, \tag{2}$$

если

$$h=g+f, \quad g\in G, \quad f\in F. \tag{3}$$

Подобно рассмотренным выше проекторам, оператор P удовлетворяет условию

$$P^2=P, \tag{4}$$

однако, в отличие от проекторов, определенных во всем H, оператор P неограничен.

Мы сохраним название проектор лишь за операторами, определенными во всем H. Операторы, обладающие свойством (4), в том числе все проекторы, называются *идемпотентными* операторами.

Приведем пример неограниченного идемпотентного оператора P. Пусть совокупности $\{e_i\}_1^\infty$ и $\{f_i\}_1^\infty$ *вместе* образуют ортонормированный базис в H. Построим последовательность $g_n = f_n + \frac{1}{n}e_n$ и обозначим через F подпространство, натянутое на орты $\{f_i\}_1^\infty$, а через G — подпространство, натянутое на совокупность $\{g_i\}_1^\infty$. Очевидно, H есть замкнутая линейная оболочка подпространств F и G, однако H не совпадает с их прямой суммой. Действительно, возьмем вектор

$$h_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e_n \in H.$$

Тогда

$$h_0 = \sum_{n=1}^{\infty} (g_n - f_n),$$

но h_0 нельзя представить в виде (3), так как тогда следовало бы положить

$$g=\sum_1^\infty g_n, \qquad f=-\sum_1^\infty f_n,$$

однако ни одна из этих сумм не существует. Легко видеть, что идемпотентный оператор P, определенный формулами (2), (3) на многообразии $D_P = G \oplus F$, не ограничен.

53. Матричное представление неограниченных симметрических операторов. Настоящий пункт примыкает по своему содержанию к n° 29. Мы снова предположим пространство H сепарабельным и снова займемся вопросом о матричном представлении оператора A, на сей раз уже неограниченного, но зато симметрического и замкнутого.

Как и в n° 29, возьмем в H ортонормированный базис $\{e_k\}_1^\infty$, который теперь не может быть произвольным, но должен принадлежать (плотному в H) множеству D_A. Затем положим

$$Ae_k = g_k \qquad (k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots) \tag{1}$$

и

$$(Ae_k,\ e_i) = a_{ik} \qquad (i,\ k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots) \tag{2}$$

и сделаем попытку восстановить оператор A по его значениям на ортах e_k или, что то же, по матрице (a_{ik}). С этой целью введем линейную оболочку $L = L(e_1,\ e_2,\ \ldots)$ совокупности всех ортов e_k $(k = 1,\ 2,\ \ldots)$ и построим линейный оператор B с областью определения $D_B = L$, который удовлетворяет соотношениям

$$Be_k = g_k \qquad (k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \tag{3}$$

Оператор B этими условиями определяется однозначно и $B \subset A$. Так как B — симметрический оператор (поскольку $\overline{a_{ik}} = a_{ki}$), то он допускает замыкание $\overline{B}$, которое однозначно определяется оператором B, т. е. условиями (3), и

$$\overline{B} \subseteq A.$$

$\overline{B}$ есть минимальный замкнутый линейный оператор, удовлетворяющий условиям (1), и если матрицу (a_{ik}) мы хотим рассматривать как представление в базисе $\{e_k\}_1^\infty$ некоторого линейного замкнутого оператора, то этим оператором, очевидно, следует считать именно оператор $\overline{B}$, а не какое-нибудь его расширение, которое, конечно, также удовлетворяет соотношениям (1), (2). Может оказаться, что $\overline{B} = A$. В этом случае можно сказать, что оператор A представим матрицей (a_{ik}) в базисе $\{e_k\}_1^\infty$. При изменении базиса $\{e_k\}_1^\infty$ меняется матрица (a_{ik}), а также оператор $\overline{B}$. Поэтому возникает вопрос: нельзя ли для данного замкнутого симметрического оператора A найти такой ортонормированный базис $\{e_k\}_1^\infty$, чтобы в этом базисе $\overline{B} = A$, т. е. чтобы в этом базисе оператор A допускал матричное представление? Ниже (теорема 3) мы дадим на этот вопрос положительный ответ.

Определение. Ортонормированный базис $\{e_k\}_1^\infty$ называется *базисом матричного представления* для замкнутого симметрического оператора A, если

1) элементы этого базиса принадлежат D_A и

2) A есть минимальный замкнутый линейный оператор, принимающий на ортах e_k значения Ae_k.

В отличие от n° 29, мы пока не касались вопроса о нахождении компонент вектора Af по компонентам вектора f. Следующие две теоремы посвящены этому вопросу.

Теорема 1. *Пусть A — замкнутый симметрический оператор, пусть $\{e_k\}_1^\infty$ — произвольный ортонормированный базис, элементы которого принадлежат D_A, и пусть, наконец,*

$$(Ae_k, e_i) = a_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3, \ldots).$$

В таком случае значение оператора A на каждом элементе $f \in D_A$ находится по формулам

$$Af = \sum_{i=1}^{\infty} y_i e_i, \tag{4'}$$

$$y_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots), \tag{4''}$$

если

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k. \tag{5}$$

Доказательство. В самом деле,

$$y_i = (Af, e_i) = (f, Ae_i) = \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k)(e_k, Ae_i) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k)(Ae_k, e_i) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots).$$

Теорема 2. *Пусть A — замкнутый симметрический оператор, пусть $\{e_k\}_1^\infty$ — его базис матричного представления и*

$$a_{ik} = (Ae_k, e_i) \qquad (i, k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Пусть, наконец, оператор T определен соотношениями

$$Tf = \sum_{i=1}^{\infty} z_i e_i, \qquad z_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k$$

на совокупности D_T всех векторов

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k,$$

для которых

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k \right|^2 < \infty.$$

В таком случае $T = A^*$, т. е. T есть оператор, сопряженный с A.

Доказательство. Докажем вначале, что

$$A^* \subseteq T. \tag{6'}$$

Пусть $g \in D_{A^*}$ и $A^* g = g^*$. Полагая

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k, \qquad g^* = \sum_{i=1}^{\infty} z_i e_i,$$

будем иметь

$$z_i = (g^*, e_i) = (g, Ae_i) = \sum_{k=1}^{\infty} (g, e_k)(e_k, Ae_i) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (g, e_k)(Ae_k, e_i) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k.$$

Так как

$$\sum_{i=1}^{\infty} |z_i|^2 = \| g^* \|^2 < \infty,$$

то вектор g принадлежит D_T и $Tg = g^*$.

Соотношение (6'), следовательно, доказано, причем даже не использовано, что $\{e_k\}_1^{\infty}$ есть базис матричного представления.

Теперь докажем, что

$$T \subseteq A^*, \tag{6''}$$

после чего теорема будет доказана полностью.

Пусть $g \in D_T$ и

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k.$$

В таком случае

$$(Ae_i, g) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{x}_k (Ae_i, e_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ki} \bar{x}_k.$$

А так как

$$(Tg, e_i) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{a}_{ki} x_k,$$

то

$$(Ae_i, g) = \overline{(Tg, e_i)} = (e_i, Tg).$$

Мы видим, что равенство

$$(Af, g)=(f, Tg) \tag{7}$$

справедливо при $f=e_i$ ($i=1,2,\ \ldots$). Следовательно, это равенство справедливо также при любом f из линейной оболочки ортов e_i ($i=1,\ 2,\ \ldots$). А так как $\{e_k\}_1^\infty$ есть базис матричного представления оператора A, то равенство (7) справедливо при любом $f \in D_A$. Отсюда вытекает, что $g \in D_{A^*}$ и $A^*g=Tg$. Таким образом, соотношение (6″) доказано.

Заметим, что в силу теоремы 2 имеет место равенство

$$\sum_{i=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}x_k\Big)\bar{y}_i=\sum_{k=1}^{\infty} x_k\overline{\Big(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ki}y_i\Big)}, \tag{8}$$

каков бы ни был вектор $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k e_k$ из D_A, и вектор $\sum\limits_{i=1}^{\infty} y_i e_i$ из D_{A^*}. Равенство (8) можно представить в виде

$$\sum_{i=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}x_k\Big)\bar{y}_i=\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ik}\bar{y}_i\Big)x_k.$$

Если эта перестановка порядка суммирования допустима для любых векторов из D_{A^*}, то оператор A^* является симметрическим. В этом и только этом случае A есть оператор самосопряженный.

Доказанные теоремы поясняют, почему для неограниченных симметрических операторов нельзя определять матричную представимость наличием формул вида (4′), (4″), (5), как это делалось в n° 29 для ограниченных операторов.

Теорема 3. *Для любого замкнутого симметрического оператора A существует базис матричного представления.*

Доказательство. Мы докажем, что существует последовательность $\{f_k\}_1^\infty \subset D_A$, обладающая тем свойством, что при любом $f \in D_A$ найдется подпоследовательность $\{f_{k_i}\}_{i=1}^\infty$, для которой

$$\lim_{i\to\infty} f_{k_i}=f, \qquad \lim_{i\to\infty} Af_{k_i}=Af.$$

После этого для доказательства теоремы останется ортогонализовать последовательность $\{f_k\}_1^\infty$.

Итак, займемся построением последовательности $\{f_k\}_1^\infty$. С этой целью возьмем произвольную плотную в H последовательность $\{h_k\}_1^\infty$. Если для некоторой тройки натуральных чисел m, n, p существуют элементы $f \in D_A$, удовлетворяющие неравенствам

$$\|h_m-f\|\leqslant\frac{1}{p}, \qquad \|h_n-Af\|\leqslant\frac{1}{p},$$

то отнесем этой тройке один из таких элементов f и назовем его

$f_{m,n,p}$. Таким образом, мы получим последовательность $\{f_{m,n,p}\}$. То обстоятельство, что не каждой тройке m, n, p относится требуемый элемент, а также, что различным тройкам может быть отнесен один и тот же элемент, никакой роли в дальнейшем играть не будет. Перенумеровав последовательность $\{f_{m,n,p}\}$ с помощью одного индекса, мы и получим требуемую последовательность $\{f_k\}_1^\infty$. Для доказательства возьмем произвольный элемент $f \in D_A$ и произвольное положительное число ε, затем возьмем натуральное число $p' \geqslant \frac{2}{\varepsilon}$ и, поскольку последовательность $\{h_k\}_1^\infty$ плотна в H, найдем натуральные числа m', n' так, чтобы

$$\| h_{m'} - f \| \leqslant \frac{1}{p'}, \qquad \| h_{n'} - Af \| \leqslant \frac{1}{p'}. \tag{9'}$$

Эти неравенства свидетельствуют о том, что при построении последовательности $\{f_{m,n,p}\}$ тройке m', n', p' был отнесен некоторый элемент $f_{m',n',p'}$, причем

$$\| h_{m'} - f_{m',n',p'} \| \leqslant \frac{1}{p'}, \qquad \| h_{n'} - Af_{m',n',p'} \| \leqslant \frac{1}{p'}. \tag{9''}$$

Из (9′) и (9″) вытекает, что

$$\| f_{m',n',p'} - f \| \leqslant \varepsilon, \qquad \| Af_{m',n',p'} - Af \| \leqslant \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то существование требуемой подпоследовательности $\{f_{k_i}\}_{i=1}^\infty$ доказано. Тем самым доказана теорема.

Мы доказали, что всякому замкнутому симметрическому оператору отвечает матрица (эрмитова), представляющая оператор в определенном базисе. Однако не всякая эрмитова матрица представляет симметрический оператор.

Теорема 4. *Если эрмитова матрица* (a_{ik}) *удовлетворяет соотношениям*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_{ik}|^2 < \infty \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots), \tag{10}$$

то при заданном ортонормированном базисе она представляет замкнутый симметрический оператор.

Доказательство. Достаточно положить

$$Ae_k = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ik} e_i \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

а затем построить оператор $\overline{B}$ указанным в начале настоящего пункта приемом.

Эрмитовы матрицы, удовлетворяющие условиям (10), но не удовлетворяющие требованиям ограниченности, называют неограниченными эрмитовыми матрицами.

Неограниченная эрмитова матрица (a_{ik}) не допускает, вообще говоря, преобразований с помощью унитарной матрицы по схеме

$$(\mathring{a}_{ik}) = (u^*_{ir}) \cdot (a_{rs}) \cdot (u_{sk}).$$

Если соответствующие бесконечные ряды сходятся и, следовательно, такое преобразование формально допустимо, то может случиться, что преобразованная эрмитова матрица

$$(\mathring{a}_{ik})$$

уже не будет удовлетворять условиям (10) и, следовательно, вовсе не определяет оператора в H. Более того, если даже преобразованная матрица удовлетворяет условию (10), то определяемый ею оператор $\mathring{A}$ может не совпадать с A. (Любопытно отметить, что пересечение $\mathrm{D}_A \cap \mathrm{D}_{\mathring{A}}$ может оказаться пустым.)

Изложенные обстоятельства составляют основу так называемых *патологических* свойств неограниченных эрмитовых матриц *). Эти свойства являются причиной нецелесообразности изучения неограниченных симметрических операторов с помощью матриц.

54. Оператор умножения на независимую переменную. Если (a, b) — конечный интервал, то оператор $\mathfrak{Q}$ умножения на независимую переменную определяется на всех функциях $\varphi = \varphi(t) \in \in \mathrm{L}^2(a, b)$ равенством

$$\mathfrak{Q}\varphi = t\varphi(t). \tag{1}$$

$\mathfrak{Q}$ есть ограниченный самосопряженный оператор, норма которого равна большему из чисел $|a|$, $|b|$. В случае бесконечного интервала (a, b) мы считаем оператор умножения $\mathfrak{Q}$ определенным формулой (1) на многообразии $\mathrm{D}_{\mathfrak{Q}}$ функций $\varphi(t) \in \mathrm{L}^2(a, b)$, для которых также $t\varphi(t) \in \mathrm{L}^2(a, b)$.

В случае бесконечного интервала оператор умножения $\mathfrak{Q}$ определен на всюду плотном многообразии (так как он определен, например, на множестве $\mathrm{D} \subset \mathrm{D}_{\mathfrak{Q}}$ всех финитных функций, принадлежащих $\mathrm{L}^2(a, b)$) и является, очевидно, неограниченным симметрическим оператором. Покажем, что и в этом случае оператор $\mathfrak{Q}$ самосопряженный.

Пусть $\psi \in \mathrm{D}_{\mathfrak{Q}^*}$ и $\psi^* = \mathfrak{Q}^*\psi$. При всех $\varphi \in \mathrm{D}_{\mathfrak{Q}}$

$$(\mathfrak{Q}\varphi, \psi) = (\varphi, \psi^*),$$

*) I. von Neumann, Zur Theorie der unbeschränkten Matrizen, J. f. reine und angew. Math. 16 (1929).

т. е.

$$\int_a^b t\varphi(t)\overline{\psi(t)}\,dt = \int_a^b \varphi(t)\overline{\psi^*(t)}\,dt$$

или

$$\int_a^b \varphi(t)\,\{\overline{t\psi(t)} - \overline{\psi^*(t)}\}\,dt = 0.$$

Последнее равенство справедливо, в частности, для любой финитной функции $\varphi(t)$, принадлежащей $L^2(a, b)$, т. е.

$$\int_\alpha^\beta \varphi(t)\,\{\overline{t\,\psi(t)} - \overline{\psi^*(t)}\}\,dt = 0$$

при любых α и β из интервала (a, b), откуда следует почти всюду в (a, b) равенство

$$\psi^*(t) = t\psi(t)$$

и, значит, включение

$$t\psi(t) \in L^2(a, b),$$

так что

$$\psi \in D_{\mathfrak{A}}, \quad \psi^* = \mathfrak{A}\psi.$$

Приведенные рассуждения показывают, что $\mathfrak{A}^* \subseteq \mathfrak{A}$, а так как $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}^*$ в силу симметричности оператора $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^*$.

Из равенства $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^*$ следует, в частности, замкнутость $\mathfrak{A}$.

Если бы мы ограничили область определения оператора умножения лишь финитными функциями из L^2, положив

$$\mathfrak{A}_1\varphi = t\varphi(t), \qquad D_{\mathfrak{A}_1} = D,$$

то, повторяя приведенные выше рассуждения, получили бы

$$\mathfrak{A}_1^* = \mathfrak{A},$$

откуда (см. n° 51, теорема 1)

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^* = \mathfrak{A}_1^{**} = \overline{\mathfrak{A}}_1,$$

т. е. ранее определенный оператор $\mathfrak{A}$ является замыканием оператора $\mathfrak{A}_1$.

Оператор умножения на независимую переменную не имеет собственных функций, так как предположение

$$\mathfrak{A}\varphi = \lambda\varphi$$

означает, что

$$\int_a^b |t-\lambda|^2 |\varphi(t)|^2 dt = 0,$$

откуда $\varphi(t) = 0$ всюду, за исключением множества меры нуль, т. е. $\varphi = 0$.

Все точки интервала (a, b) принадлежат непрерывному спектру оператора $\mathfrak{A}$, ибо многообразие

$$\Delta_{\mathfrak{A}}(\lambda) = (\mathfrak{A} - \lambda I)\, \mathrm{D}_{\mathfrak{A}} \qquad (a < \lambda < b)$$

состоит из функций $\psi(t)$, остающихся в $\mathrm{L}^2(a, b)$ после деления на $t-\lambda$, т. е.

$$\psi(t) \in \mathrm{L}^2(a, b)$$

и

$$\frac{\psi(t)}{t-\lambda} \in \mathrm{L}^2(a, b).$$

Очевидно, $\Delta_{\mathfrak{A}}(\lambda)$ плотно в $\mathrm{L}^2(a, b)$, но не совпадает с $\mathrm{L}^2(a, b)$, так как, например, не содержит функции, равной единице в окрестности точки $t = \lambda$.

Подпространство $M = M_e$ функций из $\mathrm{L}^2(a, b)$, которые равны нулю вне некоторого точечного множества $e \subset (a, b)$, очевидно, приводит оператор $\mathfrak{A}$.

С другой стороны, если $\beta - \alpha \leqslant \varepsilon$, то оператор $\mathfrak{A}$ в $\mathrm{L}^2(\alpha, \beta)$ удовлетворяет соотношению

$$\| \mathfrak{A}\varphi - \lambda_0\varphi \| \leqslant \varepsilon \| \varphi \|$$

при произвольно выбранном фиксированном λ_0 из интервала $[\alpha, \beta]$, т. е. оператор $\mathfrak{A}$ в этом пространстве отличается не более чем на ε от преобразования подобия $\lambda_0 E$.

Таким образом, разбивая интервал (a, b) на части достаточно малой длины, мы получаем разложение пространства $\mathrm{L}^2(a, b)$ на счетную сумму приводящих $\mathfrak{A}$ подпространств, в каждом из которых индуцированный оператор достаточно мало отличается от оператора подобия *).

Можно было бы рассмотреть оператор умножения не на независимую переменную, а на функцию от нее. Мы ограничимся здесь одним частным случаем.

Пусть оператор U определен на всех функциях $\varphi(t)$ из $\mathrm{L}^2(0, 2\pi)$ равенством

$$U\varphi = e^{it}\varphi(t).$$

---

*) В дальнейшем (см. главу VI) мы увидим, что аналогичное приближенное разложение на преобразования подобия допускает всякий самосопряженный оператор. Это обстоятельство играет фундаментальную роль во всей теории.

Каждый элемент ортонормированного базиса $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{ikt}\right\}_{k=-\infty}^{\infty}$ преобразуется оператором U в следующий элемент, так как

$$Ue^{ikt}=e^{i(k+1)t} \qquad (-\infty<k<\infty).$$

Из этого обстоятельства следует, что оператор U унитарно эквивалентен рассмотренному нами в п° 45 оператору U_0 в сепарабельном H. Действительно, если определить изометрический оператор V, преобразующий H в $L^2(0, 2\pi)$, равенствами

$$Ve_k=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{ikt} \qquad (-\infty<k<\infty), \tag{2}$$

то

$$U=VU_0V^{-1}.$$

Реализация U оператора U_0 позволяет обнаружить приводящие U_0 (бесконечномерные) подпространства *). При этом мы будем опираться на следующее общее предложение (доказательство которого предоставляем читателю): *если подпространство* G *пространства* H *приводит линейный оператор* T, *а оператор* T_1, *действующий в пространстве* H_1, *унитарно эквивалентен оператору* T ($T_1 = VTV^{-1}$), *то подпространство* $G_1 = VG$ *пространства* H_1 *приводит оператор* T_1.

В соответствии с этим предложением оператор U_0 обладает приводящими подпространствами G_e, состоящими из элементов f вида

$$f=V^{-1}\varphi(t),$$

где $\varphi(t)=0$ вне любого фиксированного измеримого множества $e \in (0, 2\pi)$, а оператор V определен формулами (2).

В заключение отметим, что вместо оператора умножения $\mathfrak{Q}$ в пространстве $L^2(a, b)$ можно было бы рассмотреть оператор умножения $\mathfrak{Q}_\sigma$ на независимую переменную в пространстве $L^2_\sigma(a, b)$.

Нетрудно проверить, что $\mathfrak{Q}_\sigma$ — самосопряженный оператор.

Мы предлагаем читателю в качестве полезного упражнения доказать следующие предложения:

a) вещественные точки регулярности оператора $\mathfrak{Q}_\sigma$ совпадают с точками постоянства функции $\sigma(t)$;

b) собственные значения оператора $\mathfrak{Q}_\sigma$ совпадают с точками разрыва функции $\sigma(t)$;

c) непрерывный спектр оператора $\mathfrak{Q}_\sigma$ совпадает с множеством неизолированных точек роста функции $\sigma(t)$.

Операторы $\mathfrak{Q}_\sigma$ играют особую роль в теории самосопряженных операторов: в главе VI мы увидим, что изучение любого самосопряженного оператора может быть сведено к изучению операторов $\mathfrak{Q}_\sigma$.

---

*) См. конец п° 45.

55. Оператор дифференцирования. Оператор $\mathcal{P}$ в $L^2(a, b)$ с определяемой ниже областью $D_{\mathcal{P}}$, который функции $\varphi(t)$ относит функцию

$$\mathcal{P}\varphi = i\,\frac{d\varphi}{dt},$$

называется *оператором дифференцирования*.

Необходимым для принадлежности функции $\varphi(t)$ к области $D_{\mathcal{P}}$ является следующее условие:

(A) Функция $\varphi(t)$ должна быть абсолютно непрерывной в каждой конечной части интервала (a, b) и должна принадлежать $L^2(a, b)$ вместе с $\varphi'(t)$.

Мы отдельно рассмотрим случай конечного интервала (a, b), полуоси и всей оси. В первых двух случаях область определения оператора будет состоять из функций, которые, кроме условия (A), удовлетворяют еще некоторому краевому условию (B).

1°. Конечный интервал. В случае конечного интервала, в качестве которого мы примем $(0, 2\pi)$, краевое условие имеет вид

$$\text{(B)} \qquad \varphi(0) = \varphi(2\pi) = 0.$$

Совокупность $D_{\mathcal{P}}$ функций, удовлетворяющих условиям (A), (B), очевидно, плотна в $L^2(0, 2\pi)$. При этом $\mathcal{P}$ есть симметрический (неограниченный) оператор, так как для любых $\varphi, \psi \in D_{\mathcal{P}}$

$$(\mathcal{P}\varphi, \psi) = \int_0^{2\pi} i\varphi'(t)\overline{\psi(t)}\,dt =$$

$$= i\{\varphi(2\pi)\overline{\psi(2\pi)} - \varphi(0)\overline{\psi(0)}\} + \int_0^{2\pi} \varphi(t)\overline{\{i\psi'(t)\}}\,dt$$

и, значит,

$$(\mathcal{P}\varphi, \psi) = (\varphi, \mathcal{P}\psi),$$

поскольку внеинтегральное выражение равняется нулю. Это внеинтегральное выражение равняется нулю также и в том случае, когда только φ принадлежит $D_{\mathcal{P}}$, а ψ удовлетворяет одному лишь условию (A). Следовательно, всякая функция $\psi(t)$, удовлетворяющая условию (A), принадлежит $D_{\mathcal{P}^*}$, и при этом

$$\mathcal{P}^*\psi = i\psi'(t).$$

Наоборот, пусть $\psi \in D_{\mathcal{P}^*}$ и $\mathcal{P}^*\psi = \psi^*$. Тогда при любом $\varphi \in D_{\mathcal{P}}$

$$(\mathcal{P}\varphi,\ \psi) = (\varphi,\ \psi^*) = \int_0^{2\pi} \varphi(t)\,\overline{\psi^*(t)}\,dt =$$

$$= -i \int_0^{2\pi} \varphi(t)\, \frac{d}{dt}\,\overline{\left\{ -\int_0^t i\psi^*(s)\,ds + C \right\}}\,dt,$$

где C — произвольная константа. Интегрируя по частям, получим

$$(\mathcal{P}\varphi,\ \psi) = \int_0^{2\pi} i\varphi'(t)\,\overline{\left\{ -\int_0^t i\psi^*(s)\,ds + C \right\}}\,dt, \qquad (1)$$

ибо $\varphi(t)$ обращается в нуль на концах интервала. Из (1) следует, что

$$\int_0^{2\pi} \varphi'(t)\,\overline{\left\{ \psi(t) + \int_0^t i\psi^*(s)\,ds - C \right\}}\,dt = 0 \qquad (2)$$

при любой функции $\varphi(t) \in D_{\mathcal{P}}$. Определив C равенством

$$\int_0^{2\pi} \left\{ \psi(t) + \int_0^t i\psi^*(s)\,ds - C \right\} dt = 0,$$

возьмем в качестве $\varphi(t)$ функцию

$$\varphi_0(t) = \int_0^t \left\{ \psi(t) + \int_0^t i\psi^*(s)\,ds - C \right\} dt,$$

которая, очевидно, принадлежит $D_{\mathcal{P}}$. Тогда (2) примет вид

$$\int_0^{2\pi} \left| \psi(t) + \int_0^t i\psi^*(s)\,ds - C \right|^2 dt = 0.$$

Следовательно,

$$\psi(t) + \int_0^t i\psi^*(s)\,ds - C = 0,$$

и, значит, почти всюду

$$i\psi'(t) = \psi^*(t).$$

Мы доказали, что областью определения оператора $\mathcal{P}^*$ является совокупность всех функций $\psi(t)$, удовлетворяющих условию (A), и что

$$\mathcal{P}^*\psi = i\psi'(t).$$

Из доказанного факта следует, что симметрический оператор $\mathscr{P}$ не является самосопряженным оператором; действительно, функции из $D_{\mathscr{P}}$ удовлетворяют двум условиям (A) и (B), а функции из $D_{\mathscr{P}^*}$ — одному лишь условию (A).

Докажем теперь, что оператор $\mathscr{P}$ замкнут. Вместо того, чтобы непосредственно проверять этот факт, покажем, что (см. n° 51)

$$\mathscr{P}^{**}=\mathscr{P}.$$

Из соотношения

$$\mathscr{P}\dot{\subset}\mathscr{P}^*$$

следует, что

$$\mathscr{P}^{**}\subseteq\mathscr{P}^*.$$

Поэтому функции $\chi(t)$ из $D_{\mathscr{P}^{**}}$ удовлетворяют условию (A) и

$$\mathscr{P}^{**}\chi=i\chi'(t),$$

а следовательно, при любом $\psi\in D_{\mathscr{P}^*}$

$$\int_0^{2\pi}\psi(t)\overline{i\chi'(t)}\,dt=(\psi,\ \mathscr{P}^{**}\chi)=(\mathscr{P}^*\psi,\ \chi)=\int_0^{2\pi}i\psi'(t)\overline{\chi(t)}\,dt=$$
$$=i\left[\psi(2\pi)\overline{\chi(2\pi)}-\psi(0)\overline{\chi(0)}\right]+\int_0^{2\pi}\psi(t)\overline{i\chi'(t)}\,dt.$$

Это соотношение показывает, что

$$\psi(2\pi)\overline{\chi(2\pi)}-\psi(0)\overline{\chi(0)}=0.$$

В силу произвольности значений $\psi(0)$, $\psi(2\pi)$, это равенство возможно лишь при

$$\chi(0)=\chi(2\pi)=0,$$

т. е. при $\chi(t)\in D_{\mathscr{P}}$. Мы доказали, таким образом, что

$$\mathscr{P}^{**}\subseteq\mathscr{P}.$$

А так как всегда

$$\mathscr{P}\subseteq\mathscr{P}^{**},$$

то

$$\mathscr{P}=\mathscr{P}^{**},$$

и замкнутость оператора $\mathscr{P}$ доказана.

Если бы мы заменили условия (A) и (B) более жесткими, потребовав, например, от функций из области определения оператора многократной (или даже бесконечнократной) дифференцируемости и обращения в нуль при $t=0$ и $t=2\pi$ производных всех порядков, то после замыкания такого оператора мы снова получили бы оператор $\mathcal{P}$. Чтобы убедиться в этом, следует проверить, что новый оператор с двумя звездочками совпадает с $\mathcal{P}$.

Можно, конечно, так усилить условия (А) и (В), что полученный оператор после замыкания уже не совпадет с оператором $\mathcal{P}$.

Если, например, оставить условие (А) без изменения, а условие (В) заменить на

$$\varphi(0)=\varphi(\pi)=\varphi(2\pi)=0,$$

то полученный оператор $\mathcal{P}_0$ окажется замкнутым, но $\mathcal{P}_0 \neq \mathcal{P}$ (разумеется, $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}$).

Кстати, заметим, что подпространство равных нулю при $\pi < t \leqslant 2\pi$ функций из $L^2(0, 2\pi)$, мы можем это подпространство отождествить с $L^2(0, \pi)$, приводит оператор $\mathcal{P}_0$, но не приводит оператора $\mathcal{P}$.

Перейдем к отысканию симметрических расширений оператора $\mathcal{P}$. Пусть $\tilde{\mathcal{P}}$ — одно из них. Так как $\tilde{\mathcal{P}} \subset \mathcal{P}^*$, то функции из $D_{\tilde{\mathcal{P}}}$ удовлетворяют условию (А).

Следовательно, для любых двух функций $\varphi, \psi \in D_{\tilde{\mathcal{P}}}$ будем иметь:

$$(\tilde{\mathcal{P}}\varphi, \psi)=\int_0^{2\pi} i\varphi'(t)\overline{\psi(t)}\,dt=$$

$$=i[\varphi(2\pi)\overline{\psi(2\pi)}-\varphi(0)\overline{\psi(0)}]+\int_0^{2\pi}\varphi(t)\overline{i\psi'(t)}\,dt=$$

$$=i[\varphi(2\pi)\overline{\psi(2\pi)}-\varphi(0)\overline{\psi(0)}]+(\varphi, \tilde{\mathcal{P}}\psi).$$

Так как оператор $\tilde{\mathcal{P}}$, по условию, симметричен, то должно выполняться соотношение

$$\varphi(2\pi)\overline{\psi(2\pi)}-\varphi(0)\overline{\psi(0)}=0. \qquad (3)$$

Если

$$\tilde{\mathcal{P}} \neq \mathcal{P},$$

то в $D_{\tilde{\mathcal{P}}}$ существует функция $\psi_0(t)$, не удовлетворяющая условию (В); пусть, для определенности, $\psi_0(2\pi) \neq 0$. Полагая в (3) $\psi(t)=\psi_0(t)$, мы найдем для любой функции $\varphi(t) \in D_{\tilde{\mathcal{P}}}$ соотношение

$$(\tilde{\mathrm{B}}) \qquad \varphi(2\pi)=\vartheta\varphi(0),$$

где постоянная ϑ равна

$$\vartheta = \frac{\overline{\psi_0(0)}}{\overline{\psi_0(2\pi)}} .$$

Так как условие $(\widetilde{\mathrm{B}})$ должно выполняться и при $\varphi(t) = \psi_0(t)$, то $|\vartheta| = 1$.

Наш результат гласит: все функции $\varphi(t)$ из $D_{\widetilde{\mathcal{P}}}$ должны удовлетворять условию (А) и условию $(\widetilde{\mathrm{B}})$ при фиксированном для данного расширения $\widetilde{\mathcal{P}}$ значении постоянной ϑ, равной по модулю единице.

Докажем, что справедливо и обратное, т. е. что всякая функция $\psi(t)$, удовлетворяющая условиям (А), $(\widetilde{\mathrm{B}})$, принадлежит $D_{\widetilde{\mathcal{P}}}$.

С этой целью выберем постоянную α так, чтобы

$$\psi(0) - \alpha\psi_0(0) = 0,$$

и положим

$$\varphi(t) = \psi(t) - \alpha\psi_0(t).$$

Легко видеть, что $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям (А), (В) и, следовательно, принадлежит $D_{\mathcal{P}}$. А так как $D_{\mathcal{P}} \subset D_{\widetilde{\mathcal{P}}}$, то $\varphi(t) \in D_{\widetilde{\mathcal{P}}}$, и, следовательно, принадлежит $D_{\widetilde{\mathcal{P}}}$ также и функция

$$\psi(t) = \varphi(t) + \alpha\psi_0(t).$$

Итак, любое симметрическое расширение $\widetilde{\mathcal{P}}$ оператора $\mathcal{P}$ характеризуется условиями (А) и $(\widetilde{\mathrm{B}})$. Расширение оператора $\mathcal{P}$ свелось к ослаблению условия (В).

Поскольку каждое расширение определяется числом ϑ ($|\vartheta| = 1$), фигурирующим в $(\widetilde{\mathrm{B}})$, то мы будем вместо $\widetilde{\mathcal{P}}$ писать $\mathcal{P}_\vartheta$.

Нетрудно проверить, что $D_{\mathcal{P}_\vartheta^*}$ содержит те и только те функции $\psi(t)$ из $D_{\mathcal{P}^*}$, для которых при любой функции $\varphi(t) \in D_{\mathcal{P}_\vartheta}$ имеет место равенство

$$\varphi(2\pi)\overline{\psi(2\pi)} - \varphi(0)\overline{\psi(0)} = 0.$$

Отсюда вытекает, что $D_{\mathcal{P}_\vartheta}$ и $D_{\mathcal{P}_\vartheta^*}$ совпадают и, следовательно, каждое расширение $\mathcal{P}_\vartheta$ оператора $\mathcal{P}$ является оператором самосопряженным.

Для простоты найдем спектр оператора $\mathcal{P}_\vartheta$ при $\vartheta = 1$. Равенство

$$\mathcal{P}_1\varphi = \lambda\varphi$$

означает, что

$$i\varphi'(t)=\lambda\varphi(t),$$
$$\varphi(2\pi)=\varphi(0).$$

Отсюда

$$\lambda=\lambda_k=k,$$
$$\varphi(t)=\varphi_k(t)=e^{-ikt} \qquad (\pm k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Нетрудно проверить, что при $\lambda \neq \lambda_k$ уравнение

$$(\mathcal{P}_1-\lambda I)f=g$$

или

$$if'(t)-\lambda f(t)=g(t) \qquad [f(2\pi)=f(0)]$$

разрешимо при любой функции $g(t) \in L^2(0,\ 2\pi)$. Следовательно, непрерывный спектр у $\mathcal{P}_1$ отсутствует.

2°. Полуось $(0,\ \infty)$. Если функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условию (A) для случая полуоси, то на всей полуоси абсолютно интегрируемо произведение $\varphi(t)\overline{\varphi'(t)}$.

Формула

$$\int_0^t \varphi(s)\overline{\varphi'(s)}\,ds=|\varphi(t)|^2-|\varphi(0)|^2-\int_0^t \varphi'(s)\overline{\varphi(s)}\,ds$$

показывает поэтому, что $|\varphi(t)|$ имеет предел при $t\to\infty$. А так как $\varphi(t) \in L^2(0,\ \infty)$, то

$$\lim_{t\to\infty}\varphi(t)=0.$$

Как видим, краевое условие на правом, бесконечно удаленном конце полуоси выполняется автоматически.

В качестве второго условия для определения области $D_{\mathcal{P}}$ мы примем поэтому

$$\text{(B)} \qquad \varphi(0)=0.$$

При любых $\varphi,\ \psi \in D_{\mathcal{P}}$ будем иметь:

$$(\mathcal{P}\varphi,\ \psi)=i\int_0^\infty \varphi'(t)\overline{\psi(t)}\,dt=\int_0^\infty \varphi(t)\overline{i\psi'(t)}\,dt=(\varphi,\ \mathcal{P}\psi).$$

Следовательно, $\mathcal{P}$ есть оператор симметрический.

Как и в случае конечного интервала, нетрудно доказать, что $D_{\mathcal{P}^*}$ есть совокупность всех функций, удовлетворяющих одному условию (A), и что

$$\mathcal{F}^*\psi = i\psi'.$$

Таким образом, $\mathcal{F} \neq \mathcal{F}^*$, т. е. оператор $\mathcal{F}$ не самосопряженный. При этом, в отличие от случая конечного интервала, оператор дифференцирования на полуоси не имеет симметрических расширений.

Действительно, область определения такого расширения $\widetilde{\mathcal{F}}$ должна была бы содержать функцию $\varphi_0(t)$, отличную от нуля при $t = 0$. Но тогда мы имели бы

$$(\widetilde{\mathcal{F}}\psi_0, \psi_0) = i \int_0^\infty \psi_0'(s)\overline{\psi_0(s)}\,ds =$$

$$= i\,|\psi_0(0)|^2 + \int_0^\infty \psi_0(s)\overline{i\psi_0'(s)}\,ds \neq (\psi_0, \widetilde{\mathcal{F}}\psi_0),$$

что невозможно.

Таким образом, оператор дифференцирования на полуоси есть максимальный симметрический оператор. Позже (см. n° 104) мы покажем, что он неприводим.

3°. Полная ось. Для всякой функции $\varphi(t)$, удовлетворяющей условию (A), краевые условия

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \lim_{t\to-\infty} \varphi(t) = 0$$

выполняются автоматически. Поэтому область $D_{\mathcal{F}}$ определяется одним лишь требованием (A) и без труда доказывается, что $\mathcal{F}$ есть самосопряженный оператор.

Оператор $\mathcal{F}$ не имеет собственных значений, так как уравнение

$$i\,\frac{d\varphi}{dt} = \lambda\varphi$$

не имеет нетривиальных решений в $L^2(-\infty, \infty)$.

Мы установим связь между оператором $\mathcal{Q}$ (умножения на независимую переменную) и оператором $\mathcal{F}$. Из этой связи, между прочим, будет следовать, что любая точка вещественной оси принадлежит непрерывному спектру оператора $\mathcal{F}$.

На мысль о наличии упомянутой связи, точнее, об унитарной эквивалентности *) операторов дифференцирования и умножения на независимую переменную (в случае полной оси), наводят

*) См. n° 41.

формальные соотношения

$$\psi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(s)\,e^{-ist}\,ds,$$

$$i\psi'(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}s\varphi(s)\,e^{-ist}\,ds,$$

которые показывают, что умножение на s функции $\varphi(s)$ соответствует дифференцированию функции $\psi(t)$.

Теорема. *Имеет место равенство*

$$\mathfrak{P}=\mathfrak{F}\mathfrak{Q}\mathfrak{F}^{-1},$$

где $\mathfrak{F}$ *— оператор Фурье — Планшереля.*

Доказательство распадается на две части. Во-первых, надлежит доказать, что из $h\in D_{\mathfrak{Q}}$ следует

$$\mathfrak{F}h\in D_{\mathfrak{P}},\qquad \mathfrak{P}\mathfrak{F}h=\mathfrak{F}\mathfrak{Q}h,$$

и, во-вторых, надлежит доказать, что из $g\in D_{\mathfrak{P}}$ следует

$$\mathfrak{F}^{-1}g\in D_{\mathfrak{Q}},\qquad \mathfrak{F}^{-1}\mathfrak{P}g=\mathfrak{Q}\mathfrak{F}^{-1}g.$$

Пусть $h\in D_{\mathfrak{Q}}$. В таком случае

$$\mathfrak{F}\mathfrak{Q}h=\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ist}-1}{-is}\,sh(s)\,ds=$$

$$=i\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\{e^{-ist}-1\}\,h(s)\,ds. \qquad (4)$$

Так как $h\in D_{\mathfrak{Q}}$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty}|h(s)|\,ds<\infty.$$

Поэтому

$$\mathfrak{F}h=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ist}h(s)\,ds,$$

и соотношение (4) можно представить в виде

$$\mathfrak{F}\mathfrak{Q}h=i\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ist}h(s)\,ds,$$

откуда и следует как включение $\mathfrak{F}h \in D_{\mathcal{P}}$, так и равенство

$$\mathfrak{F}\mathcal{Q}h = \mathcal{P}\mathfrak{F}h.$$

Примем теперь, что $g \in D_{\mathcal{P}}$. В таком случае

$$\mathfrak{F}^{-1}\mathcal{P}g = \frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ist}-1}{is}\,ig'(s)\,ds =$$

$$= -\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ist}ist-(e^{ist}-1)}{s^2}\,g(s)\,ds =$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{t}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ist}-1}{is}\,g(s)\,ds + \frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ist}-1-ist}{s^2}\,g(s)\,ds =$$

$$= t\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ist}-1}{is}\,g(s)\,ds = t\mathfrak{F}^{-1}g.$$

Так как левая часть принадлежит $L^2(-\infty, \infty)$, то правая тоже принадлежит $L^2(-\infty, \infty)$, следовательно, включение $\mathfrak{F}^{-1}g \in D_{\mathcal{Q}}$ доказано. Равным образом доказано и соотношение

$$\mathfrak{F}^{-1}\mathcal{P}g = \mathcal{Q}\mathfrak{F}^{-1}g.$$

Пользуясь унитарной эквивалентностью операторов $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{P}$, легко указать подпространства, приводящие $\mathcal{P}$. Таковы подпространства функций $\psi(t)$, допускающих представление

$$\psi(t) = \mathfrak{F}\varphi(t),$$

где $\varphi(t)$ равняется нулю вне произвольного измеримого фиксированного множества числовой оси.

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ОПЕРАТОРОВ

56. Два вспомогательных предложения. Настоящая глава посвящена спектральной теории некоторых классов вполне непрерывных операторов. Являясь прямым и легко обозримым обобщением соответствующих разделов линейной алгебры и элементарной теории интегральных уравнений, спектральная теория вполне непрерывных операторов представляет наиболее естественное введение в общую спектральную теорию операторов в пространстве Гильберта.

При построении спектральной теории вполне непрерывных операторов полнота пространства, как мы ниже увидим, используется не всюду. С другой стороны, при отказе от требования полноты область приложений теории расширяется. Поэтому в настоящей главе наряду с предложениями, относящимися к операторам в пространстве Гильберта H, будет установлен ряд предложений относительно операторов в произвольной линейной метризованной системе R. К числу этих предложений относятся также две леммы, которым посвящен настоящий пункт.

Лемма 1. *Если $\{g_k\}_0^\infty$ есть бесконечная ортонормированная последовательность векторов в* R *и если*

$$Ag_k = \beta_{k0}g_0 + \beta_{k1}g_1 + \ldots + \beta_{kk}g_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

где A — вполне непрерывный оператор в R, *то*

$$\lim_{k\to\infty} \beta_{kk} = 0.$$

Доказательство. Пусть $n > m$. Тогда

$$\| Ag_n - Ag_m \|^2 =$$
$$= \| \beta_{nn}g_n + \ldots + \beta_{n,m+1}g_{m+1} + (\beta_{nm} - \beta_{mm})\, g_m + \ldots + (\beta_{n0} - \beta_{m0})\, g_0 \|^2 =$$
$$= | \beta_{nn} |^2 + \ldots + | \beta_{n,m+1} |^2 + | \beta_{nm} - \beta_{mm} |^2 + \ldots + | \beta_{n0} - \beta_{m0} |^2 \geqslant | \beta_{nn} |^2.$$

Если β_{kk} не стремится к нулю при $k \to \infty$, то существует бесконечная последовательность индексов

$$n_1 < n_2 < n_3 < \ldots,$$

для которой

$$|\beta_{n_j n_j}| \geqslant \delta > 0 \quad (j=1, 2, 3, \ldots).$$

Поэтому

$$\| Ag_{n_k} - Ag_{n_i} \|^2 \geqslant \delta^2 > 0$$

и, значит, бесконечная последовательность векторов $\{Ag_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ не содержит ни одной сходящейся подпоследовательности, что противоречит компактности множества векторов $\{Ag_k\}_0^{\infty}$, вытекающей из вполне непрерывности оператора A.

Лемма 2. *Если $\lambda \neq 0$, A — вполне непрерывный оператор в R и $\{f_k\}_0^{\infty}$ — бесконечная последовательность векторов в R, удовлетворяющая соотношениям*

$$\begin{aligned} &Af_0 - \lambda f_0 = 0, \\ &Af_n - \lambda f_n = f_{n-1} \qquad (n=1, 2, 3, \ldots), \end{aligned}$$

то $f_0 = 0$ (а значит, и $f_n = 0$ при $n = 1, 2, \ldots$).

Доказательство. Докажем вначале, что если $f_0 \neq 0$, то среди векторов f_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ нет линейно зависимых. Действительно, если мы примем, что в ряду векторов

$$f_0, f_1, f_2, \ldots, f_k, \ldots$$

найдутся элементы, являющиеся линейными комбинациями предыдущих, и первый среди них есть вектор f_n, так что

$$f_n = \alpha_0 f_0 + \alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_{n-1} f_{n-1}, \tag{1}$$

то, применяя к обеим частям этого соотношения оператор A, получим равенство

$$\lambda f_n + f_{n-1} = \alpha_0 \lambda f_0 + \alpha_1 (\lambda f_1 + f_0) + \ldots + \alpha_{n-1} (\lambda f_{n-1} + f_{n-2}),$$

откуда в силу (1) будет следовать противоречащее нашему предположению соотношение

$$f_{n-1} = \alpha_1 f_0 + \alpha_2 f_1 + \ldots + \alpha_{n-1} f_{n-2}.$$

Допуская, что лемма неверна, мы должны, следовательно, считать векторы $f_0, f_1, f_2, \ldots$ линейно независимыми и поэтому можем эту последовательность ортогонализовать. Пусть

$$\begin{aligned} &g_0 = \alpha_{00} f_0, \\ &g_1 = \alpha_{10} f_0 + \alpha_{11} f_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &g_k = \alpha_{k0} f_0 + \alpha_{k1} f_1 + \ldots + \alpha_{kk} f_k, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

есть полученная таким образом ортонормированная последовательность. Заметим теперь, что

$$Ag_k = \alpha_{k0}\lambda f_0 + \alpha_{k1}(\lambda f_1 + f_0) + \ldots + \alpha_{kk}(\lambda f_k + f_{k-1}) =$$
$$= \alpha_{k1} f_0 + \alpha_{k2} f_1 + \ldots + \alpha_{kk} f_{k-1} + \lambda g_k =$$
$$= \beta_{k0} g_0 + \beta_{k1} g_1 + \ldots + \beta_{k,k-1} g_{k-1} + \lambda g_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Однако эти соотношения противоречат лемме 1, что и доказывает невозможность неравенства $f_0 \neq 0$.

57. О собственных значениях вполне непрерывных операторов в R. В настоящем пункте, как показывает его заголовок, операторы рассматриваются в произвольной линейной метризованной системе R. В следующих двух пунктах мы уже предположим, что система R полна, т. е. является пространством H.

Теорема 1. *Всякий вполне непрерывный оператор A в R может иметь при любом $\varrho > 0$ только конечное число линейно независимых собственных векторов, принадлежащих собственным значениям, которые по модулю превосходят ϱ.*

Доказательство. Допуская противное, предположим, что существует бесчисленное множество линейно независимых векторов f_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, для которых

$$Af_n = \lambda_n f_n, \qquad |\lambda_n| > \varrho > 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Ортогонализуя последовательность $\{f_n\}_1^\infty$, получим ортонормированную последовательность векторов

$$\begin{aligned} g_1 &= \alpha_{11} f_1, \\ g_2 &= \alpha_{21} f_1 + \alpha_{22} f_2, \\ &\ldots\ldots\ldots, \\ g_k &= \alpha_{k1} f_1 + \alpha_{k2} f_2 + \ldots + \alpha_{kk} f_k, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

При этом

$$Ag_k = \alpha_{k1} Af_1 + \alpha_{k2} Af_2 + \ldots + \alpha_{kk} Af_k =$$
$$= \alpha_{k1}\lambda_1 f_1 + \alpha_{k2}\lambda_2 f_2 + \ldots + \alpha_{kk}\lambda_k f_k$$

и, следовательно,

$$Ag_k - \lambda_k g_k = \alpha_{k1}(\lambda_1 - \lambda_k) f_1 + \ldots + \alpha_{k,k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) f_{k-1} =$$
$$= \beta_{k1} g_1 + \beta_{k2} g_2 + \ldots + \beta_{k,k-1} g_{k-1}.$$

Таким образом,

$$Ag_k = \beta_{k1} g_1 + \beta_{k2} g_2 + \ldots + \beta_{k,k-1} g_{k-1} + \lambda_k g_k.$$

В силу леммы 1 предыдущего пункта это противоречит предположению $|\lambda_k| > \varrho > 0$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$.

Следствие 1. *Единственной предельной точкой собственных значений вполне непрерывного оператора в* R *может быть точка* 0.

Следствие 2. *Каждому отличному от нуля собственному значению вполне непрерывного оператора в* R *принадлежит конечное число линейно независимых собственных векторов.* Иначе говоря, *кратность каждого отличного от нуля собственного значения вполне непрерывного оператора в* R *конечна.*

Следствие 3. *Всякий вполне непрерывный оператор в* R *имеет не более счетного множества линейно независимых собственных векторов, принадлежащих отличным от нуля собственным значениям.*

Теорема 2. *Если A есть вполне непрерывный оператор в* R *и если уравнение*

$$Af-\lambda f=h \tag{1}$$

при некотором $\lambda \neq 0$ разрешимо для любого $h \in$ R, *то уравнение*

$$Af-\lambda f=0 \tag{2}$$

имеет единственное решение $f=0$, т. е. λ не есть собственное значение оператора A.

Доказательство. Если уравнению (2) удовлетворяет вектор $f_0 \neq 0$, то, решая уравнение (1) при $h=f_0$, мы найдем вектор f_1, для которого

$$Af_1-\lambda f_1=f_0.$$

Затем найдем вектор f_2, для которого

$$Af_2-\lambda f_2=f_1,$$

и, продолжая этот процесс, получим бесконечную последовательность векторов $\{f_k\}_0^\infty$ таких, что

$$\begin{aligned} &Af_k-\lambda f_k=f_{k-1} \qquad (k=1, 2, 3, \ldots),\\ &Af_0-\lambda f_0=0, \qquad f_0\neq 0, \end{aligned}$$

но эти соотношения противоречат лемме 2 предыдущего пункта. Таким образом, теорема доказана.

Следствие 4. *Если при некотором $\lambda \neq 0$ уравнение* (1) *разрешимо при любом $h \in$* R, *то это уравнение при любом $h \in$* R *разрешимо однозначно, и следовательно, оператор $A-\lambda I$* имеет обратный *оператор* $(A-\lambda I)^{-1}$ (*во всем* R).

Теорема 3. *Существует такая константа $\mathscr{L}$, зависящая только от оператора A* (*вполне непрерывного в* R) *и от числа $\lambda \neq 0$, что всякий раз, когда уравнение*

$$Af-\lambda f=h \tag{1}$$

разрешимо по крайней мере для одного его решения f, выполняется неравенство

$$\| f \| \leqslant \mathscr{L} \, \| h \|.$$

Доказательство. Пусть

$$f_1, \ f_2, \ \ldots, \ f_k$$

все линейно независимые собственные векторы оператора A, принадлежащие λ. Мы не исключаем и того случая, когда λ не является собственным значением оператора A; в этом случае $k = 0$. Пусть f^* — некоторое решение уравнения (1); тогда общее решение этого уравнения имеет вид

$$f = f^* + \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_k f_k,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — произвольные числа. Эти числа подберем так, чтобы норма вектора $\| f \|$ была минимальной. Полученное решение назовем $\mathring{f}$; оно совпадает с f^*, если $k = 0$. Пусть h пробегает совокупность M всех тех векторов, для которых уравнение (1) разрешимо. Каждому вектору $h \in M$ отвечает некоторый вектор $\mathring{f}$, и нам надлежит доказать, что

$$\sup_{h \in M} \frac{\| \mathring{f} \|}{\| h \|} < \infty.$$

Допустим противное. Это значит, что существует такая последовательность векторов $\{h_k\}_1^\infty$, для которой

$$\frac{\| \mathring{f}_k \|}{\| h_k \|} \to \infty.$$

Разделим обе части равенства

$$A\mathring{f}_k - \lambda \mathring{f}_k = h_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

на $\| \mathring{f}_k \|$. Мы получим равенство

$$A\mathring{f}'_k - \lambda \mathring{f}'_k = h'_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

где

$$h'_k = \frac{h_k}{\| \mathring{f}_k \|}, \quad \| \mathring{f}'_k \| = 1 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

При этом единица есть минимум нормы решения уравнения (1), если правая часть равна h'_k. Так как оператор A вполне непрерывен, то найдется такая подпоследовательность

$$\mathring{f}'_{n_1}, \ \mathring{f}'_{n_2}, \ \mathring{f}'_{n_3}, \ \ldots,$$

для которой существует

$$\lim_{i\to\infty} A\mathring{f}'_{n_i}.$$

Поскольку, кроме того,

$$h'_k \to 0,$$

то существует также

$$\lim_{i\to\infty} \mathring{f}'_{n_i} = g$$

и, следовательно,

$$Ag - \lambda g = 0,$$

причем $\| g \| = 1$, т. е. g есть собственный вектор оператора A.

Вектор $\mathring{f}'_{n_i} - g$ подобно вектору $\mathring{f}'_{n_i}$, представляет решение уравнения (1) при правой части h'_{n_i}. А так как минимум нормы решения этого уравнения есть единица, то

$$\| \mathring{f}'_{n_i} - g \| \geqslant 1,$$

что невозможно. Таким образом, теорема доказана.

58. Дальнейшие свойства вполне непрерывных операторов.

Теорема 1. *Если $\lambda \neq 0$ есть собственное значение вполне непрерывного оператора A в пространстве* H, *то $\overline{\lambda}$ есть собственное значение оператора A^*.*

Доказательство. Пусть вектор h пробегает H. Тогда вектор

$$Ah - \lambda h = g$$

будет пробегать не все пространство, а только некоторое линейное многообразие $\mathrm{G} \subset \mathrm{H}$, так как уравнение

$$Af - \lambda f = g$$

разрешимо не для любой правой части g. Нетрудно видеть, что многообразие G замкнуто и, следовательно, представляет подпространство. Действительно, если $g_n \in \mathrm{G}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, то по теореме 3 предыдущего пункта существуют векторы $\mathring{h}_n$, для которых

$$A\mathring{h}_n - \lambda \mathring{h}_n = g_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

и

$$\| \mathring{h}_n \| \leqslant \mathscr{L} \| g_n \| \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Если $g_n \to g$, то последовательность векторов $\{\mathring{h}_n\}_1^\infty$ ограничена, и поэтому найдется подпоследовательность $\{\mathring{h}_{n_i}\}_{i=1}^\infty$, для которой существует

$$\lim_{i\to\infty} A\mathring{h}_{n_i}.$$

Следовательно, существует

$$h = \lim_{i\to\infty} \mathring{h}_{n_i}$$

и, значит, имеет место равенство

$$Ah - \lambda h = g,$$

чем и доказано, что $g \in$ G, т. е. многообразие G замкнуто.

Поскольку подпространство G не совпадает с H, то существует отличный от нуля вектор f, ортогональный G, т. е. при любом $h \in$ H

$$(Ah - \lambda h, f) = 0,$$

откуда

$$(Ah, f) = (\lambda h, f)$$

или

$$(h, A^*f) = (h, \bar{\lambda} f).$$

Это соотношение показывает, что

$$A^*f = \bar{\lambda} f.$$

Теорема доказана.

Теперь мы можем несколько углубить теорему 2 предыдущего пункта. Эта теорема устанавливала, что если $\lambda \neq 0$ есть собственное значение вполне непрерывного оператора A в R, то уравнение

$$Af - \lambda f = g \tag{1}$$

разрешимо не для всякого $g \in$ R. Теперь, предполагая, что оператор A действует в H, мы укажем для каких векторов g уравнение (1) разрешимо.

Т е о р е м а 2. *Пусть A — вполне непрерывный оператор в* H. *В таком случае для разрешимости уравнения* (1) *при $\lambda \neq 0$ необходимо и достаточно, чтобы вектор g был ортогонален собственному подпространству* F *оператора A^*, принадлежащему числу $\bar{\lambda}$. При этом в случае, когда $\bar{\lambda}$ не есть собственное значение оператора A^*, под* F *надлежит понимать нулевое подпространство, т. е. в этом случае уравнение* (1) *разрешимо при любой правой части.*

Доказательство. Пусть G — совокупность всех векторов g, допускающих представление

$$g = Ah - \lambda h.$$

Мы видели выше, при доказательстве теоремы 1, что G образует подпространство. Поэтому нам достаточно доказать, что $H \ominus G$ совпадает с собственным подпространством F оператора A^*, принадлежащим числу $\bar{\lambda}$.

Пусть вектор f ортогонален G. В таком случае, повторяя соответствующее место доказательства теоремы 1, найдем, что

$$A^*f = \bar{\lambda} f.$$

Таким образом, $f \in F$ и, значит,

$$H \ominus G \subseteq F.$$

Отсюда, в частности, следует, что если $\bar{\lambda}$ не есть собственное значение оператора A^*, то $H \ominus G = 0$, т. е. $G = H$ и, значит, в этом случае уравнение (1) разрешимо при любой правой части.

Нам остается доказать, что в том случае, когда $\bar{\lambda}$ есть собственное значение оператора A^*, имеет место соотношение

$$F \subseteq H \ominus G. \tag{2}$$

Итак, пусть F непусто, и пусть вектор $f \neq 0$ принадлежит F. Возьмем любой вектор вида

$$g = Ah - \lambda h.$$

Имеем:

$$(f, g) = (f, Ah - \lambda h) = (A^*f - \bar{\lambda} f, h) = 0.$$

Это значит, что $f \perp G$. Поэтому соотношение (2) доказано. Вместе с тем доказана и теорема.

Читатель, знакомый с теорией интегральных уравнений, конечно, заметит, что доказанные нами предложения являются обобщением двух теорем Фредгольма.

Справедливо также обобщение третьей теоремы Фредгольма. Оно формулируется следующим образом: *размерности собственных подпространств вполне непрерывных операторов A и A^* в* H, *принадлежащих собственным значениям λ и $\bar{\lambda}$, одинаковы.* Эта теорема будет доказана в следующем пункте.

59. Метод Ф. Рисса в теории линейных функциональных уравнений. Пусть A — вполне непрерывный оператор в H. Возьмем какое-нибудь число $\lambda \neq 0$ и обозначим через K_λ совокупность всех векторов g, для которых уравнение

$$(A - \lambda I)^n x = g$$

разрешимо при любом из значений $n=1, 2, 3, \ldots$ Далее, обозначим через N_λ совокупность всех векторов f, которые при каком-нибудь натуральном m удовлетворяют уравнению

$$(A-\lambda I)^m f=0. \tag{1}$$

Если λ не является собственным значением оператора A, то $\mathrm{K}_\lambda = \mathrm{H}$, а N_λ состоит из одного лишь нулевого вектора. Поэтому введенные совокупности представляют интерес только в том случае, когда λ — собственное значение оператора A. Нам понадобятся также многообразия $\mathrm{K}_{\bar\lambda}^*$, $\mathrm{N}_{\bar\lambda}^*$, которые получаются при замене оператора A и числа λ соответственно сопряженным оператором A^* и сопряженным числом $\bar\lambda$.

Перечислим теперь свойства введенных многообразий:

1°. *Каждое из многообразий* K_λ, N_λ *является подпространством в* H.

2°. *Всякий вектор* $h \in \mathrm{H}$ *однозначно представим в виде*

$$h=g+f,$$

где $g \in \mathrm{K}_\lambda$ *и* $f \in \mathrm{N}_\lambda$, *т. е.* H *разлагается в прямую сумму подпространств* K_λ *и* N_λ.

3°. N_λ *имеет конечное число измерений.*

4°. $\mathrm{N}_{\bar\lambda}^* = \mathrm{H} \ominus \mathrm{K}_\lambda$.

5°. *Размерности подпространств* N_λ *и* $\mathrm{N}_{\bar\lambda}^*$ *одинаковы.*

Число измерений подпространства N_λ условимся называть *рангом* собственного значения λ. Напомним, что число измерений собственного подпространства, принадлежащего λ (т. е. максимальное число линейно независимых собственных векторов), мы называем *кратностью* этого собственного значения. Ясно, что ранг больше или равен кратности. Подпространства N_λ называются *корневыми подпространствами* оператора A в H, а каждый отличный от нуля вектор $f \in \mathrm{N}_\lambda$ называется *корневым вектором* *) оператора A.

Допустим на минуту, что перечисленные свойства многообразий K_λ, N_λ уже установлены, и докажем с их помощью аналог третьей теоремы Фредгольма, сформулированный в конце n° 58. С этой целью заметим, что каждый собственный вектор e оператора A, принадлежащий собственному значению λ, можно представить в виде

$$e=\xi_1 f_1+\xi_2 f_2+\ldots+\xi_n f_n,$$

*) Иногда рассматриваются корневые векторы, принадлежащие собственному значению $\lambda = 0$. Соответствующее корневое многообразие является нулевым многообразием оператора. Во всех наших рассмотрениях, однако, $\lambda \neq 0$.

где $f_1, f_2, \ldots, f_n$ — какой-нибудь базис в N_λ. Для определения коэффициентов $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ имеем уравнение

$$(A-\lambda I)e \equiv \xi_1[Af_1-\lambda f_1]+\xi_2[Af_2-\lambda f_2]+\ldots+\xi_n[Af_n-\lambda f_n]=0.$$

Так как вектор, представляющий левую часть этого уравнения, назовем его h, принадлежит N_λ, то по свойству 4° он ортогонален $K_{\bar\lambda}^*$. Но по свойству 2°

$$h=g+f,$$

где $g \in K_{\bar\lambda}^*$ и $f \in N_{\bar\lambda}^*$. Следовательно,

$$(h, h)=(h, g+f)=(h, f).$$

Поэтому для равенства $h=0$ достаточно, чтобы $h \perp N_{\bar\lambda}^*$. Но это условие очевидно и необходимо. Итак, для определения коэффициентов ξ_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ мы должны потребовать, чтобы вектор h был ортогонален каждому из линейно независимых векторов f_k^*, порождающих $N_{\bar\lambda}^*$. Так как по свойству 5° число этих векторов есть n, то мы получим систему

$$\xi_1(Af_1-\lambda f_1, f_i^*)+\xi_2(Af_2-\lambda f_2, f_i^*)+\ldots+\xi_n(Af_n-\lambda f_n, f_i^*)=0$$
$$(i=1, 2, \ldots, n). \qquad (2)$$

Подобным образом, для нахождения собственных векторов

$$e^*=\eta_1 f_1^*+\eta_2 f_2^*+\ldots+\eta_n f_n^*$$

оператора A^*, принадлежащих $\bar\lambda$, мы получим систему

$$\eta_1(A^*f_1^*-\bar\lambda f_1^*, f_i)+\eta_2(A^*f_2^*-\bar\lambda f_2^*, f_i)+\ldots+\eta_n(A^*f_n^*-\bar\lambda f_n^*, f_i)=0$$
$$(i=1, 2, \ldots, n),$$

которую можно переписать в виде

$$\bar\eta_1(Af_i-\lambda f_i, f_1^*)+\bar\eta_2(Af_i-\lambda f_i, f_2^*)+\ldots+\bar\eta_n(Af_i-\lambda f_i, f_n^*)=0$$
$$(i=1, 2, \ldots, n). \qquad (3)$$

Системы (2) и (3) являются транспонированными одна относительно другой. Поэтому у них одинаковое число линейно независимых решений. Таким образом, кратность собственного значения λ оператора A равна кратности собственного значения $\bar\lambda$ оператора A^*. В этом и состоит третья теорема Фредгольма, приведенная в конце n° 58.

Теперь обратимся к доказательству сформулированных свойств многообразий K_λ, N_λ. Начнем с изучения многообразия K_λ. Совершенно очевидно, что это многообразие линейно. Очевидно также, что при любом натуральном n

$$K_\lambda \subseteq G^{(n)},$$

где $G^{(n)}$ есть линейное многообразие, пробегаемое вектором

$$g_n = (A - \lambda I)^n h,$$

когда h пробегает H. При доказательстве теоремы 1 п° 58 было показано, что многообразие $G^{(1)}$, пробегаемое вектором

$$g_1 = (A - \lambda I) h,$$

замкнуто и поэтому представляет подпространство в H. Но в таком случае замкнуто и, значит, является подпространством в H любое из многообразий $G^{(n)}$. Действительно, вектор g_n, пробегающий $G^{(n)}$, можно представить в виде

$$g_n = (B + (-1)^n \lambda^n I) h,$$

где оператор

$$B = A^n - \binom{n}{1} \lambda A^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} \lambda^{n-1} A$$

вполне непрерывен, так как вполне непрерывен оператор A.

Нетрудно видеть, что $G^{(n+1)} \subseteq G^{(n)}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Однако можно утверждать больше, а именно, что при некотором натуральном k

$$G^{(k+1)} = G^{(k)}$$

и, следовательно,

$$G^{(k)} = G^{(k+1)} = G^{(k+2)} = \ldots,$$

а значит,

$$G^{(k)} = K_\lambda,$$

следовательно, K_λ является подпространством. То, что процесс образования подпространств $G^{(n)}$, таким образом, обрывается, является наиболее характерным и существенным для излагаемого нами метода Ф. Рисса.

Доказательство существования указанного значения k проведем от противного и поэтому предположим, что $G^{(n+1)} \neq G^{(n)}$ для любого натурального n. Из этого предположения следует существование бесконечной последовательности векторов $\{g_i^*\}_0^\infty$ такой, что

a) $\quad g_i^* \in G^{(i)}$,

b) $\quad \| g_i^* \| = 1 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots; \; G^{(0)} = H)$,

c) $\quad g_i^* \perp G^{(i+1)}$.

Если $j > i$, то $G^{(j)} \subseteq G^{(i+1)}$, а поэтому, в силу c), $g_i^* \perp G^{(j)}$. Значит,

$$(g_i^*, g_j^*) = 0 \qquad (i \neq j), \tag{4}$$

С другой стороны, так как $(A-\lambda I)\,\mathrm{G}^{(i)}=\mathrm{G}^{(i+1)}$, то

$$Ag_i^*-\lambda g_i^*\in \mathrm{G}^{(i+1)}$$

и

$$Ag_j^*-\lambda g_j^*\in \mathrm{G}^{(j+1)}\subset \mathrm{G}^{(i+1)} \qquad (j>i).$$

Поэтому

$$(Ag_i^*-\lambda g_i^*,\ g_i^*)=0$$

и в силу (4)

$$(Ag_j^*,\ g_i^*)=0.$$

Из этих соотношений следует, что при любых $j>i$

$$\|Ag_j^*-Ag_i^*\|^2=\|\lambda g_i^*+(Ag_i^*-\lambda g_i^*)-Ag_j^*\|^2=$$
$$=|\lambda|^2+\|(Ag_i^*-\lambda g_i^*)-Ag_j^*\|^2\geqslant|\lambda|^2.$$

Это неравенство противоречит компактности множества векторов

$$Ag_1^*,\ Ag_2^*,\ \ldots,\ Ag_i^*,\ \ldots$$

Таким образом, доказано, что при некотором натуральном k

$$\mathrm{G}^{(k)}=\mathrm{K}_\lambda.$$

Теперь покажем, что натуральный ряд значений m в определении (1) многообразия N_λ также можно оборвать, а именно: если $f\in\mathrm{N}_\lambda$, то равенство (1) выполняется уже при $m=k$ (но может не выполняться при $m<k$). Отсюда легко следует, что N_λ является пространством. Итак, пусть

$$(A-\lambda I)^m f=0 \tag{5}$$

при $m>k$. В таком случае $m-1\geqslant k$ и, следовательно,

$$g=(A-\lambda I)^{m-1}f\in\mathrm{K}_\lambda,$$

а в силу (5)

$$Ag-\lambda g=0.$$

Так как $g\in\mathrm{K}_\lambda=\mathrm{G}^{(k)}$, то $g\in\mathrm{G}^{(k+1)}$ и, значит,

$$g=(A-\lambda I)\,g_1,$$

где $g_1\in\mathrm{G}^{(k)}=\mathrm{K}_\lambda$. Поэтому $g_1\in\mathrm{G}^{(k+1)}$ и, значит,

$$g_1=(A-\lambda I)\,g_2,$$

где $g_2\in\mathrm{G}^{(k)}=\mathrm{K}_\lambda$. Продолжая этот процесс, приходим к уравнениям

$$Ag_n-\lambda g_n=g_{n-1} \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots;\ g_0=g),$$
$$Ag=g,$$

из которых благодаря лемме 2 n° 56 следует, что *) $g=0$. Таким образом, мы доказали, что из (5) следует равенство

$$(A-\lambda I)^{m-1}f=0,$$

если $m>k$. Повторяя это рассуждение, мы и придем к равенству

$$(A-\lambda I)^k f=0.$$

Теперь докажем, что здесь, вообще говоря, нельзя заменить показатель k меньшим. С этой целью выберем вектор h таким образом, чтобы

$$(A-\lambda I)^{k-1}h \overline{\in} \mathrm{G}^{(k)}.$$

Это можно сделать, так как $\mathrm{G}^{(k-1)} \neq \mathrm{G}^{(k)}$, а $(A-\lambda I)^{k-1}f$ пробегает $\mathrm{G}^{(k-1)}$, когда f пробегает H. Вектор

$$h_1=(A-\lambda I)^k h$$

уже входит в K_λ, а поэтому может быть представлен в виде

$$h_1=(A-\lambda I)^{2k}h_0=(A-\lambda I)^k g,$$

где $g=(A-\lambda I)^k h_0 \in \mathrm{G}^{(k)}=\mathrm{K}_\lambda$. Мы видим, что вектор $f=h-g$ удовлетворяет соотношению

$$(A-\lambda I)^k f=0,$$

т. е. принадлежит N_λ. Вместе с тем

$$(A-\lambda I)^{k-1}f=(A-\lambda I)^{k-1}h-(A-\lambda I)^{k-1}g;$$

а правая часть этого равенства отлична от нуля, так как первый ее член не принадлежит, в то время как второй принадлежит подпространству $\mathrm{G}^{(k)}$.

Первое свойство многообразий K_λ, N_λ нами доказано. Переходим ко второму свойству. Пусть в H взят произвольный вектор h. Положим

$$h_1=(A-\lambda I)^k h.$$

Так как $h_1 \in \mathrm{G}^{(k)}=\mathrm{G}^{(k+1)}$, то, как уже только что было сделано, h_1 можно представить в виде

$$h_1=(A-\lambda I)^k g,$$

где $g \in \mathrm{G}^{(k)}=\mathrm{K}_\lambda$. Полагая

$$f=h-g,$$

---

*) Не мешает заметить, что нами попутно доказано следующее предложение: если

$$Ag=\lambda g$$

и

$$g \in \mathrm{K}_\lambda,$$

то $g=0$. Мы воспользуемся ниже этим фактом.

найдем, что $(A-\lambda I)^k f = (A-\lambda I)^k h - (A-\lambda I)^k g = 0$, т. е. $f \in \mathrm{N}_\lambda$. Итак, представление любого элемента $h \in \mathrm{H}$ в виде

$$h = f + g,$$

где

$$f \in \mathrm{N}_\lambda, \qquad g \in \mathrm{K}_\lambda,$$

доказано.

Если бы написанное разложение было не единственным, то нашелся бы вектор $f \neq 0$, принадлежащий обоим подпространствам N_λ, K_λ. Из включения $f \in \mathrm{N}_\lambda$ следовало бы, что при некотором натуральном $p \leqslant k$

$$(A-\lambda I)^p f = 0,$$

тогда как

$$g = (A-\lambda I)^{p-1} f \neq 0.$$

Значит,

$$Ag = \lambda g, \qquad g \neq 0$$

и

$$g \in \mathrm{K}_\lambda.$$

Но мы уже видели выше (см. подстрочное примечание на стр. 183), что это абсурдно.

Таким образом, свойство 2° также доказано.

Всякий вектор $f \in \mathrm{N}_\lambda$ удовлетворяет уравнению

$$(B - (-1)^{k-1} \lambda^k I) f = 0,$$

где

$$B = A^k - \lambda \binom{k}{1} A^{k-1} + \ldots + (-\lambda)^{k-1} \binom{k}{k-1} A.$$

Если $f \neq 0$, то f есть собственный вектор вполне непрерывного оператора B, принадлежащий собственному значению $(-1)^{k-1}\lambda^k \neq 0$. Благодаря следствию 2 n° 57 число линейно независимых векторов, обладающих этим свойством, конечно.

Следовательно, свойство 3° доказано.

Докажем свойство 4°. С этой целью возьмем вектор $f^* \perp \mathrm{K}_\lambda$. Таким образом, при любом $h \in \mathrm{H}$

$$(f^*, (A-\lambda I)^k h) = 0,$$

что можно записать в виде

$$((A^* - \bar{\lambda} I)^k f^*, h) = 0.$$

В силу произвольности вектора h отсюда следует, что

$$(A^* - \bar{\lambda} I)^k f^* = 0,$$

иначе говоря, $f^* \in N^*_{\bar\lambda}$, т. е. мы доказали, что

$$H \ominus K_\lambda \subseteq N^*_{\bar\lambda}.$$

Положим теперь, что $f^* \in N^*_{\bar\lambda}$. Это значит, что

$$(A^* - \bar\lambda I)^m f^* = 0,$$

где, очевидно, можно считать, что $m \geqslant k$. При произвольном $h \in H$ будем иметь равенство

$$((A^* - \bar\lambda I)^m f^*, h) = 0,$$

которое можно записать в виде

$$(f^*, (A - \lambda I)^m h) = 0.$$

Когда h пробегает H, вектор $(A - \lambda I)^m h$ пробегает K_λ. Поэтому $f^* \perp K_\lambda$ и, следовательно, мы доказали, что

$$N^*_{\bar\lambda} \subseteq H \ominus K_\lambda.$$

Сопоставляя с ранее полученным включением, приходим к выводу, что

$$N^*_{\bar\lambda} = H \ominus K_\lambda,$$

а в этом и состоит свойство 4°.

Для доказательства последнего свойства возьмем какой-нибудь базис $f_1, f_2, \ldots, f_n$ в подпространстве N_λ. Обозначим через g_i ортогональную проекцию f_i на K_λ и положим

$$f_i^* = f_i - g_i \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Поскольку $f_i^* \perp K_\lambda$, то, в силу свойства 4°, $f_i^* \in N^*_{\bar\lambda}$. Векторы f_i^* линейно независимы, так как в противном случае мы имели бы равенство

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_n f_n = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \ldots + \alpha_n g_n,$$

где не все α_i равны 0. Но левая часть принадлежит N_λ, а правая — K_λ. Следовательно, это равенство противоречит свойству 2°. Итак, все f_i^* линейно независимы и, значит, размерность $N^*_{\bar\lambda}$ не меньше, чем размерность N_λ. Но $(A^*)^* = A$ и, следовательно, размерность N_λ не меньше, чем размерность $N^*_{\bar\lambda}$.

Таким образом, последнее свойство также доказано.

60. Теорема о существовании собственного вектора у самосопряженного вполне непрерывного оператора. Основная теорема о самосопряженных вполне непрерывных операторах гласит:

Всякий вполне непрерывный самосопряженный оператор $A \neq 0$ в произвольной линейной метризованной системе R *имеет по крайней* *мере один собственный вектор e, принадлежащий отличному от нуля собственному значению λ.*

Мы дадим два доказательства этой теоремы.

Первое доказательство. Пусть

$$M = \sup_{\|g\|=1} |(Ag, g)| = \sup_{\|g\|=1} \|Ag\|.$$

По определению верхней грани найдется последовательность нормированных векторов $\{g_n\}_1^\infty$, для которой существует

$$\lim_{n\to\infty} (Ag_n, g_n),$$

равный $+M$ или $-M$. Этот отличный от нуля предел назовем λ.

Из ограниченной последовательности $\{g_n\}_1^\infty$ выделим подпоследовательность $\{g_{n_i}\}_{i=1}^\infty$, для которой существует

$$\lim_{i\to\infty} Ag_{n_i} = h, \tag{1}$$

что возможно по определению вполне непрерывного оператора.

Поскольку

$$\|Ag_{n_i} - \lambda g_{n_i}\|^2 = \|Ag_{n_i}\|^2 - 2\lambda (Ag_{n_i}, g_{n_i}) + \lambda^2,$$

то

$$\lim_{i\to\infty} \|Ag_{n_i} - \lambda g_{n_i}\|^2 = \|h\|^2 - 2\lambda^2 + \lambda^2 = \|h\|^2 - \lambda^2. \tag{2}$$

Но

$$\|Ag_{n_i}\| \leqslant M \|g_{n_i}\| = M = |\lambda|,$$

следовательно,

$$\|h\| \leqslant |\lambda|.$$

А так как левая часть равенства (2) неотрицательна, то $\|h\| = |\lambda|$ и, значит,

$$\lim_{i\to\infty} \|Ag_{n_i} - \lambda g_{n_i}\| = 0, \tag{3}$$

откуда следует, что $\lim\limits_{i\to\infty} g_{n_i}$ существует и равняется $\frac{h}{\lambda}$. Вводя вектор $e = \frac{h}{\lambda}$, норма которого равна 1, перепишем (3) в виде

$$Ae - \lambda e = 0.$$

Тем самым доказательство закончено.

Второе доказательство. Возьмем какой-нибудь вектор f_0, для которого $Af_0 \neq 0$. Нетрудно видеть, что в таком случае $A^n f_0 \neq 0$ при любом натуральном n. В самом деле, если бы при некотором $k \geqslant 1$

$$A^k f_0 \neq 0, \qquad A^{k+1} f_0 = 0,$$

то мы имели бы

$$0 = (A^{k+1} f_0,\ A^{k-1} f_0) = (A^k f_0,\ A^k f_0) \neq 0,$$

что абсурдно. Из сказанного следует, что мы можем ввести две последовательности векторов

$$\{f_k\}_0^\infty, \qquad \{f'_k\}_0^\infty,$$

определяемые при помощи равенств

$$f'_k = \frac{f_k}{\| f_k \|}, \qquad f_{k+1} = A f'_k \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Из этих определений вытекает, что

$$\| f_k \| \leqslant \| f_{k+1} \| \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots) \tag{4}$$

и

$$\| f_{k-1} \| \cdot \| f_k \| = (f_{k-1},\ f_{k+1}) = (f_{k+1},\ f_{k-1}) \qquad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \tag{5}$$

Действительно,

$$\| f_k \| = (f_k,\ f'_k) = (A f'_{k-1},\ f'_k) = (f'_{k-1},\ A f'_k) =$$
$$= (f'_{k-1},\ f_{k+1}) \leqslant \| f'_{k-1} \| \cdot \| f_{k+1} \| = \| f_{k+1} \|,$$

что доказывает неравенство (4). Попутно доказано, что

$$(f'_{k-1},\ f_{k+1}) = \| f_k \|,$$

откуда вытекает соотношение (5):

$$\left(\frac{f_{k-1}}{\| f_{k-1} \|},\ f_{k+1} \right) = \| f_k \|.$$

Поскольку норма оператора A обозначена через M, то

$$\| A f'_{k-1} \| \leqslant M.$$

Следовательно,

$$\| f_k \| \leqslant M.$$

Таким образом, неубывающая последовательность норм $\{\| f_k \|\}_1^\infty$ ограничена. Значит, она имеет конечный предел

$$\lim_{k \to \infty} \| f_k \| = \lambda. \tag{6}$$

Далее, на основании вполне непрерывности оператора A, существует такая подпоследовательность $\{f'_{n_i}\}_{i=1}^\infty$, для которой последовательность

$$f_{n_i+1} = A f'_{n_i} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

имеет предел. Назовем этот предел g:

$$f_{n_i+1} \to g.$$

Замечая, что

$$f_{n_i+2} = Af'_{n_i+1} = \frac{Af_{n_i+1}}{\|f_{n_i+1}\|},$$

нетрудно заключить, что сходится последовательность $\{f_{n_i+2}\}_{i=1}^{\infty}$, и аналогично устанавливается сходимость последовательности $\{f_{n_i+3}\}_{i=1}^{\infty}$. Положим

$$f_{n_i+2} \to h, \qquad f_{n_i+3} \to h'$$

и вычислим $\| h' - g \|^2$:

$$\|h' - g\|^2 = \lim_{i\to\infty} \| f_{n_i+3} - f_{n_i+1} \|^2 =$$
$$= \lim_{i\to\infty} \{ \| f_{n_i+3} \|^2 + \| f_{n_i+1} \|^2 - (f_{n_i+3}, f_{n_i+1}) - (f_{n_i+1}, f_{n_i+3}) \} = 0.$$

При этом использованы соотношения (5), (6). Итак, $h' = g$. С другой стороны,

$$h = \frac{Ag}{\lambda}, \qquad h' = \frac{Ah}{\lambda}.$$

Таким образом,

$$Ag = \lambda h, \qquad Ah = \lambda g,$$

откуда

$$A(h+g) = \lambda(h+g), \qquad A(h-g) = -\lambda(h-g).$$

Вектор g не равен нулю, так как $\| g \| = \lambda$. Поэтому из векторов $h + g$, $h - g$ по крайней мере один отличен от нуля. Этот отличный от нуля вектор и является собственным вектором оператора A, принадлежащим собственному значению λ или $-\lambda$.

Заметим, что доказанная теорема для произвольных (несамосопряженных) вполне непрерывных операторов неверна. Например, интегральный оператор Вольтерра в $L_2(0, 1)$

$$Tf = \int_0^x K(x, t) f(t)\, dt$$

с непрерывным ядром $K(x, t)$ не имеет ни одного собственного вектора.

61. Спектр вполне непрерывных самосопряженных операторов в R. В предыдущем пункте мы доказали, что у отличного от нуля вполне непрерывного самосопряженного оператора A в R существует по крайней мере одно собственное значение $\lambda \neq 0$. В этом пункте мы построим полную систему отличных от нуля собственных значений оператора A, а именно, докажем, что имеет место

Теорема. *Оператор A имеет конечную или бесконечную последовательность попарно ортогональных и нормированных собственных векторов*

$$e_1, e_2, e_3, \ldots,$$

отвечающих отличным от нуля собственным числам

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$$

$$(|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant |\lambda_3| \geqslant \ldots),$$

которая в области значений Δ_A оператора A полна, т. е. для всякого вектора f вида $f = Ah$ имеет место уравнение замкнутости

$$\|f\|^2 = \sum_k |(f, e_k)|^2.$$

Доказательство. На основании теоремы предыдущего пункта существует такой вектор e_1 ($\|e_1\| = 1$), что

$$Ae_1 = \lambda_1 e_1,$$

где

$$\lambda_1 = \pm \sup_{\|g\|=1} |(Ag, g)|.$$

Для удобства обозначим нашу линейную систему R через R_1, а оператор A — через A_1. Положим

$$\mathrm{R}_2 = \mathrm{R}_1 \ominus \{e_1\}.$$

Ясно, что R_2 также является линейной метризованной системой. При этом, если $f \in \mathrm{R}_2$, то $A_1 f \in \mathrm{R}_2$. Действительно, из $(f, e_1) = 0$ следует, что

$$(A_1 f, e_1) = (f, A_1 e_1) = (f, \lambda_1 e_1) = 0.$$

Далее, часть A_2 оператора A_1, лежащая в R_2, является также оператором вполне непрерывным и самосопряженным. Если оператор A_2 не равен нулю тождественно, то к нему можно применить теорему предыдущего пункта. На основании этой теоремы существует вектор e_2, для которого

$$A_2 e_2 = \lambda_2 e_2 \qquad (\|e_2\| = 1).$$

Так как $e_2 \in \mathrm{R}_2$, то $(e_2, e_1) = 0$. При этом

$$|\lambda_2| = \sup_{\substack{\|f\|=1 \\ f \in \mathrm{R}_2}} |(A_1 f, f)| \leqslant \sup_{\|g\|=1} |(A_1 g, g)| = |\lambda_1|.$$

Теперь продолжаем процесс далее. Строим линейную систему

$$\mathrm{R}_3 = \mathrm{R}_2 \ominus \{e_2\}$$

и определяем собственный вектор e_3 и собственное значение λ_3 и т. д. Этот процесс оборвется только в том случае, если при некотором n часть A_n оператора A_1, лежащая в R_n, окажется тождественно равной нулю. В этом случае мы получим конечное число попарно ортогональных и нормированных векторов

$$e_1, \ e_2, \ \ldots, \ e_{n-1},$$

принадлежащих не равным нулю собственным значениям

$$\lambda_1, \ \lambda_2, \ \ldots, \ \lambda_{n-1},$$

причем

$$|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_{n-1}|$$

и

$$|\lambda_k| = \sup_{\|f\|=1, \, f \in \mathrm{R}_k} |(A_1 f, f)|.$$

Если процесс не оборвется, мы получим бесконечную ортонормированную последовательность $\{e_k\}_1^\infty$, причем $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = 0$ в силу теоремы 1 n° 57.

Возьмем теперь какой-нибудь вектор $f = Ah$ и положим

$$g = h - \sum_{k=1}^{m} (h, e_k)\, e_k,$$

где m равно числу элементов последовательности $\{e_k\}$, если это число конечно, и m равняется произвольному натуральному числу в противном случае.

Так как

$$(g, e_k) = 0 \qquad (k = 1, \ 2, \ 3, \ \ldots, \ m),$$

то $g \in \mathrm{R}_{m+1}$. Поэтому

$$\|Ag\|^2 \leqslant \|A_{m+1}\|^2_{\mathrm{R}_{m+1}} \|g\|^2$$

или

$$\|Ah - \sum_{k=1}^{m} (h, e_k)\, Ae_k\|^2 \leqslant \|A_{m+1}\|^2_{\mathrm{R}_{m+1}} \|g\|^2. \tag{1}$$

Замечая, что

$$(h, e_k)\, Ae_k = (h, e_k)\, \lambda_k e_k = (h, Ae_k)\, e_k = (Ah, e_k)\, e_k,$$

а также, что

$$\|g\| \leqslant \|h\|,$$

и учитывая, что $f = Ah$, перепишем (1) в виде

$$\| f - \sum_{k=1}^{m} (f, e_k) e_k \|^2 \leqslant \| A_{m+1} \|^2_{\mathrm{R}_{m+1}} \| h \|^2. \tag{2}$$

В случае, когда последовательность

$$e_1, \; e_2, \; e_3, \; \ldots \tag{3}$$

конечна, отсюда вытекает равенство

$$f = \sum_{k=1}^{m} (f, e_k) e_k.$$

Если же последовательность (3) бесконечна, то из (2) следует, что

$$\| f - \sum_{k=1}^{m} (f, e_k) e_k \|^2 \leqslant \lambda^2_{m+1} \| h \|^2$$

или

$$0 \leqslant \| f \|^2 - \sum_{k=1}^{m} | (f, e_k) |^2 \leqslant \lambda^2_{m+1} \| h \|^2.$$

Полагая $m \to \infty$, мы получим, что

$$\| f \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} | (f, e_k) |^2,$$

и теорема доказана.

62. Вполне непрерывные нормальные операторы. Пусть в линейной метризованной системе R дан вполне непрерывный оператор S, обладающий определенным всюду в R сопряженным оператором S^*; пусть, кроме того, $S^*S = SS^*$. Коротко скажем, что S есть вполне непрерывный нормальный оператор в R. Рассмотрим оператор $A = S^*S$. Это — вполне непрерывный самосопряженный оператор, для которого $AS = SA$, $AS^* = S^*A$ и $(Af, f) \geqslant 0$ при любом $f \in \mathrm{R}$. Последнее вытекает из того, что

$$(Af, f) = (S^*Sf, f) = (Sf, Sf).$$

Отметим, что в силу этого свойства все собственные значения оператора A неотрицательны. Обозначим их

$$\varrho_1^2 \geqslant \varrho_2^2 \geqslant \varrho_3^2 \geqslant \ldots$$

На основании предыдущего пункта оператор A имеет полную в Δ_A ортонормированную систему собственных векторов g_k:

$$Ag_k = \varrho_k^2 g_k \qquad (k = 1, \; 2, \; 3, \; \ldots).$$

Возьмем какое-нибудь собственное значение оператора A (пусть это будет ϱ^2) и положим, что его кратность есть r. Далее, обозначим через

$$g^{(1)}, g^{(2)}, \ldots, g^{(r)}$$

ортонормированные собственные векторы оператора A, принадлежащие собственному значению ϱ^2, а натянутое на них подпространство обозначим через G. Покажем, что G является инвариантным подпространством как для S, так и для S^*.

Пусть $g \in$ G. Тогда

$$ASg = SAg = \varrho^2 Sg$$

и, значит, вектор Sg либо равен нулю, что будет только при $g = 0$, либо является собственным вектором оператора A, принадлежащим собственному значению ϱ^2; поэтому $Sg \in$ G. Аналогично устанавливается, что $S^*g \in$ G.

Заметим теперь, что если $g \in$ G и $h \in$ G, то

$$(Sg, Sh) = (S^*Sg, h) = (Ag, h) = \varrho^2 (g, h).$$

Поэтому на подпространстве G имеем $S = \varrho U$, где U — унитарный G оператор. Кроме того, справедливы равенства $S^* = \varrho U^* = \varrho U^{-1}$.

Так как $Ug^{(i)} \in$ G, то можно положить

$$Ug^{(i)} = \alpha_{1i} g^{(1)} + \alpha_{2i} g^{(2)} + \ldots + \alpha_{ri} g^{(r)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

Будем искать собственные векторы оператора U. Если f есть собственный вектор и

$$f = x_1 g^{(1)} + x_2 g^{(2)} + \ldots + x_r g^{(r)},$$

то из равенства

$$Uf = \theta f$$

будет следовать, что

$$\begin{gathered}
\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1r}x_r = \theta x_1, \\
\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2r}x_r = \theta x_2, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\alpha_{r1}x_1 + \alpha_{r2}x_2 + \ldots + \alpha_{rr}x_r = \theta x_r.
\end{gathered}$$

Таким образом, для θ получается уравнение

$$\begin{vmatrix}
\alpha_{11} - \theta & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1r} \\
\alpha_{21} & \alpha_{22} - \theta & \ldots & \alpha_{2r} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\alpha_{r1} & \alpha_{r2} & \ldots & \alpha_{rr} - \theta
\end{vmatrix} = 0.$$

Каждому корню этого уравнения отвечает собственный вектор оператора U; поэтому все корни нашего уравнения по модулю равны 1. Пусть $\theta^{(1)}$ — один из этих корней, а $f^{(1)}$ — соответствующий ему собственный вектор. Возьмем совокупность всех векторов пространства $\mathrm{G} \equiv \mathrm{G}_1$, которые ортогональны $f^{(1)}$. Эта совокупность векторов есть некоторое пространство G_2 и U является унитарным оператором в G_2. Поэтому, повторяя проведенные рассуждения, мы найдем, что оператор U имеет собственный вектор в G_2, назовем этот вектор $f^{(2)}$, а соответствующее собственное значение $\theta^{(2)}$.

Применяя этот процесс отщепления, построим систему из r ортогональных векторов, которые можно считать и нормированными:

$$f^{(1)},\ f^{(2)},\ \ldots,\ f^{(r)},$$

для которых

$$Uf^{(j)} = \theta^{(j)} f^{(j)} \qquad (j = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots, r).$$

Но

$$Sf^{(j)} = \varrho U f^{(j)} = \varrho \theta^{(j)} f^{(j)} \qquad (j = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ r).$$

Поэтому $f^{(j)}$ есть собственный вектор оператора S, принадлежащий собственному значению $\varrho\theta^{(j)}$. Аналогично доказывается, что $f^{(j)}$ есть собственный вектор оператора S^*, принадлежащий собственному значению $\varrho\overline{\theta}^{(j)}$. Заменяя в системе собственных векторов

$$g_1,\ g_2,\ g_3,\ \ldots$$

оператора A векторы

$$g^{(1)}, g^{(2)},\ \ldots,\ g^{(r)}$$

векторами

$$f^{(1)},\ f^{(2)},\ \ldots,\ f^{(r)}$$

и поступая так с каждым собственным значением оператора A, кратность которого больше 1, мы получаем доказательство первой части следующей теоремы.

Теорема. *Всякому вполне непрерывному нормальному оператору $S \neq 0$ в* R *отвечает ортонормированная система векторов* $\{e_k\}$ *и система не равных нулю (комплексных) чисел* $\{\lambda_k\}$, *для которых*

$$Se_k = \lambda_k e_k, \qquad S^* e_k = \overline{\lambda}_k e_k \qquad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Эта система векторов является полной в том смысле, что любой элемент f, имеющий вид Sh или S^*h, представим рядом

$$f = \sum_k (f,\ e_k)\, e_k. \tag{1}$$

Чтобы доказать вторую часть утверждения, положим $f = Sh$ и рассмотрим вектор

$$f' = S^*f = S^*Sh = Ah.$$

На основании теоремы о самосопряженном вполне непрерывном операторе и того, что векторы *) e_k образуют полную в смысле указанной теоремы ортонормированную систему векторов оператора A, имеет место уравнение замкнутости

$$\| f' \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(f', e_k)|^2.$$

Иначе говоря, f' есть сильный предел последовательности

$$\sum_{k=1}^{n} (f', e_k) e_k \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Поэтому

$$(f', h) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (f', e_k)(e_k, h) = \sum_{k=1}^{\infty} (f', e_k)(e_k, h).$$

А так как

$$(f', h) = (S^*f, h) = (f, Sh) = (f, f),$$

$$(f', e_k) = (S^*f, e_k) = (f, Se_k) = \bar{\lambda}_k (f, e_k),$$

$$(e_k, h) = \frac{1}{\bar{\lambda}_k} (S^*e_k, h) = \frac{1}{\bar{\lambda}_k} (e_k, Sh) = \frac{1}{\bar{\lambda}_k} (e_k, f),$$

то полученное нами соотношение можно представить в виде

$$\| f \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(f, e_k)|^2.$$

Таким образом, равенство (1) доказано, если $f = Sh$, и аналогично доказывается, если $f = S^*h$.

63. Приложение к теории почти-периодических функций. Как уже было указано в n° 15, непрерывная, вообще говоря, комплексная функция $f(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ называется почти-периодической, если каждому $\varepsilon > 0$ можно сопоставить такое $l = l(\varepsilon) > 0$, что в любом интервале длины l содержится по крайней мере одно число τ (число смещения), для которого

$$|f(t+\tau) - f(t)| < \varepsilon$$

при всех t.

---

*) Мы примем для определенности, что их бесконечное множество.

Отправляясь от этого определения, нетрудно установить ряд простых свойств почти-периодических функций. Мы приведем эти свойства без доказательства *).

I. Всякая почти-периодическая функция ограничена и равномерно непрерывна на всей оси.

II. Для всякой почти-периодической функции $f(t)$ существует и притом равномерно по α так называемое *среднее значение*

$$\mathbf{M}\{f(t)\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)\,dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T+\alpha}^{T+\alpha} f(t)\,dt.$$

III. Произведение и сумма двух почти-периодических функций являются функциями почти-периодическими.

IV. Если $f(t)$ есть почти-периодическая функция и если

$$\mathbf{M}\{|f(t)|^2\} = 0,$$

то $f(t) \equiv 0$.

Совокупность всех почти-периодических функций становится линейной метризованной системой R, если скалярное произведение определить формулой

$$(f, g) = \mathbf{M}\{f(t)\overline{g(t)}\}. \tag{1}$$

То, что из $(f, f) = 0$ следует $f = 0$, составляет содержание свойства IV.

В n° 15 скалярное произведение (1) было введено для всех многочленов вида

$$\sum_k A_k e^{i\lambda_k t}. \tag{2}$$

Будучи суммой чисто периодических, а значит, и почти-периодических функций, всякий такой многочлен принадлежит нашей линейной системе R. В частности, линейной системе принадлежит континуум функций

$$e^{i\lambda t} \qquad (-\infty < \lambda < \infty),$$

образующий ортонормированную систему. Поэтому, подобно упомянутому в n° 15 пространству B^2, линейная система R несепарабельна. Заметим также, что R не обладает полнотой.

Центральное место в теории почти-периодических функций занимает своеобразный гармонический анализ.

Вместо обычных констант Фурье чисто-периодической функции, при гармоническом анализе почти-периодической функции $f(t)$

*) Читатель найдет подробное изложение в монографии Б. М. Левитана «Почти-периодические функции», Гостехиздат, 1953.

вводится величина

$$a(\lambda)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)\,e^{-i\lambda t}\,dt=\mathbf{M}\{f(t)\,e^{-i\lambda t}\}=(f,\,e^{i\lambda t}),$$

существование которой при любом вещественном λ вытекает из свойств II и III. На основании замечания на стр. 37 (см. n° 10) для каждой функции $f(t)\in\mathrm{R}$ существует не более счетного множества значений (вещественного) параметра λ, для которых $a(\lambda)\neq 0$. Обозначим эти значения

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \ldots$$

и назовем их *показателями Фурье* функции $f(t)$. Отвечающие им числа

$$C_k=a(\lambda_k)\qquad (k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

назовем *константами Фурье* функции $f(t)\in\mathrm{R}$.

Таким образом, каждой функции $f(t)\in\mathrm{R}$ принадлежит *ряд Фурье*

$$f(t)\sim\sum_k C_k e^{i\lambda_k t}$$

и из общих положений n° 8 следует, что

$$\sum_k |C_k|^2\leqslant \mathbf{M}\{|f(t)|^2\}. \tag{3}$$

Такой вид принимает здесь неравенство Бесселя.

Основной теоремой теории Бора является теорема о том, что *в неравенстве* (3) *всегда имеет место знак равенства.* Мы приведем принадлежащее Г. Вейлю доказательство этой теоремы, основанное на теории вполне непрерывных операторов.

С этой целью положим

$$v(s)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(s-t)\,u(t)\,dt=\mathbf{M}_t\{f(s-t)\,u(t)\}.$$

Эта формула относит каждой функции $u(t)\in\mathrm{R}$ некоторую функцию $v(t)$, которая, очевидно, также принадлежит R. Таким образом, мы имеем некоторый линейный оператор, который порождается функцией $f(t)$ и переводит $u(t)$ в $v(t)$. Этот оператор мы обозначим через A.

Докажем в первую очередь, что A есть оператор нормальный. С этой целью введем второй оператор, полагая $w = Bu$, если

$$w(s) = \underset{t}{\mathbf{M}}\{\overline{f(t-s)}\,u(t)\},$$

и докажем, что:

a) для любых $u_1(t),\ u_2(t) \in \mathrm{R}$

$$(Au_1,\ u_2) = (u_1,\ Bu_2),$$

b) $AB = BA$.

Свойство a) доказывается с помощью следующих простых преобразований, справедливость которых вытекает из равномерности существования средних:

$$\begin{aligned}(Au_1,\ u_2) &= \underset{s}{\mathbf{M}}\{\underset{t}{\mathbf{M}}[f(s-t)\,u_1(t)]\,\overline{u_2(s)}\} = \\ &= \underset{t}{\mathbf{M}}\{u_1(t)\,\underset{s}{\mathbf{M}}[f(s-t)\,\overline{u_2(s)}]\} = \\ &= \underset{t}{\mathbf{M}}\{u_1(t)\,\overline{\underset{s}{\mathbf{M}}[\overline{f(s-t)}\,u_2(s)]}\} = (u_1,\ Bu_2).\end{aligned}$$

Докажем свойство b). Прежде всего заметим, что

$$ABu = \underset{t}{\mathbf{M}}\{f(s-t)\,\underset{\tau}{\mathbf{M}}[\overline{f(\tau-t)}\,u(\tau)]\} = \underset{\tau}{\mathbf{M}}\{u(\tau)\,\underset{t}{\mathbf{M}}[f(s-t)\,\overline{f(\tau-t)}]\}.$$

Затем рассмотрим подробнее функцию

$$\varphi = \underset{t}{\mathbf{M}}[f(s-t)\,\overline{f(\tau-t)}] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(s-t)\,\overline{f(\tau-t)}\,dt.$$

С помощью замены переменной

$$\tau - t = \sigma - s$$

получаем

$$\begin{aligned}\varphi &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{\tau+s-T}^{\tau+s+T} f(\sigma-\tau)\,\overline{f(\sigma-s)}\,d\sigma = \\ &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(\sigma-\tau)\,\overline{f(\sigma-s)}\,d\sigma = \underset{\sigma}{\mathbf{M}}[f(\sigma-\tau)\,\overline{f(\sigma-s)}].\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}ABu &= \underset{\tau}{\mathbf{M}}\{u(\tau)\,\underset{\sigma}{\mathbf{M}}[f(\sigma-\tau)\,\overline{f(\sigma-s)}]\} = \\ &= \underset{\sigma}{\mathbf{M}}\{\overline{f(\sigma-s)}\,\underset{\tau}{\mathbf{M}}[f(\sigma-\tau)\,u(\tau)]\} = BAu,\end{aligned}$$

и свойство b) доказано.

Теперь докажем, что A есть оператор вполне непрерывный. Пусть дано некоторое множество функций $u(t) \in \mathrm{R}$, для которых

$$\|u\|^2 = \mathbf{M}\{|u(t)|^2\} \leqslant 1.$$

Мы должны доказать, что это множество содержит последовательность $\{u_n(t)\}_1^\infty$, которая оператором A переводится в последовательность $\{v_n(t)\}_1^\infty$, сходящуюся в метрике R к некоторой функции $v(t) \in \mathrm{R}$. Функция $u(t)$ оператором A переводится в функцию

$$v(s) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(s-t)\, u(t)\, dt. \tag{4}$$

Из этой формулы следует, что

$$|v(s)| \leqslant \lim_{T\to\infty} \sqrt{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |f(s-t)|^2\, dt}\ \sqrt{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |u(t)|^2\, dt}$$

или

$$|v(s)| \leqslant \sqrt{\mathbf{M}\{|f(t)|^2\}} = C,$$

т. е. преобразованные функции $v(s)$ равномерно ограничены.

Далее из формулы (4) следует, что

$$v(s') - v(s'') = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \{f(s'-t) - f(s''-t)\}\, u(t)\, dt,$$

откуда

$$|v(s') - v(s'')| \leqslant \sqrt{\mathop{\mathbf{M}}_{t}\{|f(s'-t) - f(s''-t)|^2\}}.$$

Это неравенство показывает, что функции $v(s)$ равностепенно непрерывны. В самом деле, $f(t)$ равномерно непрерывна. Поэтому при $|s'-s''| \leqslant \delta = \delta(\varepsilon)$ имеет место неравенство

$$|f(s'-t) - f(s''-t)| \leqslant \varepsilon \qquad (-\infty < t < \infty)$$

и, следовательно, при $|s'-s''| \leqslant \delta$

$$|v(s') - v(s'')| \leqslant \sqrt{\mathbf{M}\{\varepsilon^2\}} = \varepsilon.$$

С помощью известной теоремы Арцеля и диагонального процесса из множества функций $v(t)$ можно выделить последовательность $\{v_n(t)\}_1^\infty$, равномерно сходящуюся в каждом конечном интервале числовой оси. Пусть предельная функция есть $V(t)$. Она также удовлетворяет неравенству

$$|V(s') - V(s'')| \leqslant \sqrt{\mathop{\mathbf{M}}_{t}\{|f(s'-t) - f(s''-t)|^2\}}.$$

Поэтому, во-первых, $V(t)$ равномерно непрерывна на всей числовой оси и, во-вторых, если τ есть число смещения функции $f(t)$, принадлежащее ε и $s' - s'' = \tau$, то

$$|V(s') - V(s'')| \leqslant \varepsilon.$$

Покажем, что в силу этих двух фактов последовательность $\{v_n(t)\}_1^\infty$ сходится к $V(t)$ равномерно на всей оси. Действительно, зададимся числом $\varepsilon > 0$ и прежде всего найдем для функции $f(t)$ число $l = l\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$, которое входит в определение почти-периодической функции. Это число l принадлежит в понятном смысле каждой функции $v_n(t)$, а также функции $V(t)$. Затем определим номер $\mathcal{N} = \mathcal{N}\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$ так, чтобы при $n \geqslant \mathcal{N}$ имело место неравенство

$$|v_n(t) - V(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \qquad (-l \leqslant t \leqslant l),$$

что возможно, так как в каждом конечном интервале сходимость последовательности $\{v_n(t)\}_1^\infty$ равномерна. Теперь возьмем любую точку x числовой оси, заключим ее в интервал длины l и найдем в этом интервале точку τ, представляющую число смещения, принадлежащее $\frac{\varepsilon}{3}$. Тогда $x = \tau + t$, где $-l \leqslant t \leqslant l$, и поэтому

$$|v_n(x) - V(x)| \leqslant |v_n(\tau + t) - v_n(t)| + |v_n(t) - V(t)| + \\ + |V(t) - V(\tau + t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Итак, наше утверждение доказано. А так как

$$\sqrt{\mathbf{M}\{|w_1(t) - w_2(t)|^2\}} \leqslant \sup_{-\infty < t < \infty} |w_1(t) - w_2(t)|,$$

то последовательность $\{v_n(t)\}_1^\infty$ сходится не только равномерно на оси, но и подавно в метрике R. Таким образом, вполне непрерывность оператора A доказана.

Пусть μ — какое-нибудь отличное от нуля собственное значение оператора A и пусть

$$g_1(t),\ g_2(t),\ \ldots,\ g_n(t) \tag{5}$$

есть какая-нибудь полная ортонормированная система собственных элементов оператора A, принадлежащих собственному значению μ. Если $g(t)$ — один из этих собственных элементов, то

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(s - t)\, g(t)\, dt = \mu g(s).$$

Отсюда видно, что при любом (вещественном) σ функция $g(t + \sigma)$ также будет собственным элементом, принадлежащим числу μ.

В силу этого обстоятельства должны иметь место соотношения

$$g_r(t+\sigma)=\sum_{k=1}^{n} c_{rk}(\sigma)\, g_k(t) \qquad (r=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n). \tag{6}$$

Таким образом, попарно ортогональные и нормированные почти-периодические функции (5) удовлетворяют функциональным уравнениям (6). Отсюда различными способами *) можно установить, что каждая из функций $g_r(t)$ имеет вид

$$g_r(t)=\sum_{k=1}^{n} c_r^{(k)} e^{i\lambda_k t},$$

где $c_r^{(k)}$ — константы. Вводя, если это нужно, вместо первоначальных собственных элементов $g_r(t)$ их надлежащие линейные комбинации, можно в качестве собственных элементов принять функции

$$e^{i\lambda_1 t},\ e^{i\lambda_2 t},\ \ldots,\ e^{i\lambda_n t}.$$

По определению величины $a(\lambda)$,

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(s-t)\, e^{i\lambda_r t}\, dt =$$

$$= e^{i\lambda_r s}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(s-t)\, e^{i\lambda_r (t-s)}\, dt = e^{i\lambda_r s}\, a(\lambda_r).$$

Таким образом, мы нашли общий вид собственных векторов оператора A и установили, что собственному вектору $e^{i\lambda_r t}$ в качестве собственного значения отвечает константа Фурье

$$a(\lambda_r)=\mathbf{M}\{f(t)\, e^{-i\lambda_r t}\}.$$

---

*) Для этого нужно сначала показать, что функции $c_{rk}(\sigma)$ непрерывно дифференцируемы, после чего из системы уравнений (6) выводится дифференциальная система

$$g_r'(t)=\sum_{k=1}^{n} c_{rk}'(0)\, g_k(t) \qquad (r=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n).$$

Решениями этой дифференциальной системы являются линейные комбинации функций вида

$$(a_0+a_1 t+\ldots+a_m t^m)\, e^{\beta t}.$$

Затем остается принять во внимание, что функции $g_k(t)$ должны быть ограничены на всей оси. В силу этого обстоятельства β должно быть чисто мнимым, а многочлен — множитель при $e^{\beta t}$ — должен сводиться к первому члену. Другой, идейно более содержательный, путь основан на одновременном приведении к диагональному виду абелевой группы унитарных матриц

$$(c_{rk}(\sigma))_{r,\ k=1}^{n}.$$

Пусть

$$e^{i\lambda_1 t}, \quad e^{i\lambda_2 t}, \quad e^{i\lambda_3 t}, \quad \ldots$$

есть последовательность всех собственных векторов оператора A, которым отвечают отличные от нуля собственные значения

$$C_1 = a(\lambda_1), \qquad C_2 = a(\lambda_2), \qquad C_3 = a(\lambda_3), \ \ldots$$

Возьмем ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k (\Phi, \ e^{i\lambda_k t})\, e^{i\lambda_k t}, \tag{7}$$

где $\Phi \in \mathrm{R}$. Так как

$$\sum_{k=m}^{\infty} |C_k (\Phi, \ e^{i\lambda_k t})| \leqslant \sqrt{\sum_{k=m}^{\infty} |C_k|^2} \sqrt{\sum_{k=m}^{\infty} |(\Phi, \ e^{i\lambda_k t})|^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{k=m}^{\infty} |C_k|^2} \sqrt{M\{|\Phi(t)|^2\}},$$

то ряд (7) сходится равномерно по t. Теперь рассмотрим функцию

$$\underset{s}{\mathbf{M}} \{f(t-s) \overline{f(-s)}\},$$

имеющую вид Ag, где $g(t) \in \mathrm{R}$. По теореме n° 62 эта функция в метрике R представима рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k \underset{s}{\mathbf{M}} \{\overline{f(-s)}\, e^{-i\lambda_k s}\}\, e^{i\lambda_k t}.$$

Так как по сказанному выше *) этот ряд сходится равномерно то имеет место равенство

$$\underset{s}{\mathbf{M}} \{f(t-s) \overline{f(-s)}\} = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \underset{s}{\mathbf{M}} \{\overline{f(-s)}\, e^{-i\lambda_k s}\}\, e^{i\lambda_k t},$$

откуда при $t = 0$

$$\mathbf{M} \{|f(-s)|^2\} = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \underset{s}{\mathbf{M}} \{\overline{f(-s)}\, e^{-i\lambda_k s}\}$$

или

$$\mathbf{M} \{|f(t)|^2\} = \sum_{k=1}^{\infty} |C_k|^2,$$

и основная теорема Бора доказана.

---

*) Роль функции $\Phi(t)$ играет $\overline{f(-t)}$.

64. Разложение произвольного вполне непрерывного оператора в ряд одномерных операторов. В n° 22 было показано, что конечномерный оператор T характеризуется представлением в виде суммы одномерных операторов следующего вида:

$$Th = (h,\ f_1) g_1 + (h,\ f_2) g_2 + \ldots + (h,\ f_n) g_n. \tag{1}$$

Обобщением этого элементарного факта является следующая

Теорема 1. *Пусть T — произвольный вполне непрерывный оператор в* H, *а* H_0 — *его нулевое подпространство. В таком случае существуют две ортонормированные системы векторов* $\{e_k\}_1^\infty$, $\{g_k\}_1^\infty$ *и монотонно убывающая последовательность положительных чисел* $\{\mu_k\}_1^\infty$, $\mu_k \to 0$, *обладающие следующим свойством: для любого вектора* $h \in \mathrm{H}$ *имеют место разложения*

$$\left.\begin{aligned} h &= h_0 + (h,\ e_1) e_1 + (h,\ e_2) e_2 + \ldots \qquad (h_0 \in \mathrm{H}_0) \\ Th &= \mu_1 (h,\ e_1) g_1 + \mu_2 (h,\ e_2) g_2 + \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

понимаемые в смысле сильной сходимости.

Доказательство. Начнем с того, что в случае, когда оператор T самосопряженный, наша теорема является следствием теоремы n° 61. Действительно, полагая в этом случае $T = A$ (чтобы не отклоняться от обозначений n° 61) и беря собственные векторы $e_1, e_2, e_3, \ldots$ оператора A, принадлежащие отличным от нуля собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ ($\lambda_k \to 0$), мы получим согласно n° 61 для любого вектора вида $f = Ah$ представление

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} (f,\ e_k) e_k,$$

где

$$(f,\ e_k) = (Ah,\ e_k) = (h,\ Ae_k) = \lambda_k (h,\ e_k).$$

Таким образом, для любого $h \in \mathrm{H}$

$$Ah = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (h,\ e_k) e_k.$$

Если положить

$$h_0 = h - \sum_{k=1}^{\infty} (h,\ e_k) e_k,$$

так что

$$h = h_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (h,\ e_k) e_k,$$

то

$$Ah_0 = Ah - \sum_{k=1}^{\infty} (h,\ e_k) Ae_k = 0.$$

Итак, в случае, когда $T = A$ есть самосопряженный оператор, наша теорема верна, причем можно принять $\mu_k = \lambda_k$ и $g_k = e_k$.

Обратимся теперь к случаю произвольного вполне непрерывного оператора T. Прежде всего, построим вполне непрерывный самосопряженный оператор $A = T^*T$ и введем последовательность отличных от нуля собственных значений $\{\lambda_k\}_1^\infty$ $(\lambda_k \to 0)$ этого оператора и ортонормированную последовательность $\{e_k\}_1^\infty$ соответствующих собственных векторов:

$$(e_k, e_j) = \delta_{kj}.$$

Заметим при этом, что

$$\lambda_k = (Ae_k, e_k) = (T^*Te_k, e_k) = (Te_k, Te_k) > 0.$$

Следовательно, можно положить $\lambda_k = \mu_k^2$, где $\mu_k > 0$, $\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \ldots$ По доказанному, любой элемент $h \in \mathrm{H}$ можно представить в виде

$$h = h_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (h, e_k) e_k, \tag{3}$$

где h_0 принадлежит нулевому подпространству оператора A. Так как при любых $f_1, f_2 \in \mathrm{H}$

$$(Tf_1, Tf_2) = (T^*Tf_1, f_2) = (Af_1, f_2),$$

то нулевые подпространства операторов T и A совпадают. Из (3) следует поэтому, что

$$Th = \sum_{k=1}^{\infty} (h, e_k) Te_k. \tag{4}$$

Полагая

$$Te_k = \mu_k g_k,$$

получаем соотношение

$$\mu_k \mu_j (g_k, g_j) = (Te_k, Te_j) = (Ae_k, e_j) = \lambda_k (e_k, e_j),$$

из которых следует, что

$$(g_k, g_j) = \delta_{kj}.$$

Так как представление (4) можно записать в виде

$$Th = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k (h, e_k) g_k,$$

то наша теорема полностью доказана.

Из доказанной теоремы и теоремы 2 n° 30 вытекает следующий важный результат.

Теорема 2. *Для вполне непрерывности определенного всюду в* H *линейного оператора* T *необходимо и достаточно, чтобы при* *любом* $\varepsilon > 0$ *существовал конечномерный линейный оператор* T_ε, *удовлетворяющий неравенству*

$$\| T - T_\varepsilon \| < \varepsilon. \tag{5}$$

Доказательство необходимости. Пусть оператор T вполне непрерывен. В таком случае он допускает представление (2) и, значит, при любом $\varepsilon > 0$ конечномерный оператор, определяемый формулой

$$T_\varepsilon h = \mu_1 (h, e_1) g_1 + \mu_2 (h, e_2) g_2 + \ldots + \mu_n (h, e_n) g_n,$$

удовлетворяет неравенству

$$\| Th - T_\varepsilon h \|^2 \leqslant \mu_{n+1}^2 \{ |(h, e_{n+1})|^2 + |(h, e_{n+2})|^2 + \ldots \} \leqslant \mu_{n+1}^2 \| h \|^2,$$

откуда и вытекает (5), если $\mu_{n+1} < \varepsilon$.

Достаточность прямо следует из теоремы 2 n° 30, так как конечномерный оператор всегда вполне непрерывен.

65. Теорема о существовании инвариантного подпространства у любого вполне непрерывного оператора в H. Наличие у оператора собственного вектора означает, что оператор обладает инвариантным подпространством (одномерным). Как было отмечено в конце n° 60, вполне непрерывный оператор может не иметь ни одного собственного вектора. Поэтому он может не иметь ни одного одномерного инвариантного подпространства. Но отсюда вовсе не следует, что у этого оператора вообще нет инвариантных подпространств. Приведенный в n° 60 интегральный оператор

$$Tf = \int_0^x K(x, t) f(t)\, dt, \qquad f(t) \in L_2(0, 1),$$

у которого нет ни одного собственного вектора, обладает целым множеством непрерывных инвариантных подпространств. В самом деле, при любом a, $0 < a < 1$, совокупность всех функций $f(t) \in L^2(0, 1)$, которые равны нулю в интервале $0 < t < a$, представляет такое инвариантное подпространство.

Поэтому возникает вопрос, не имеет ли каждый вполне непрерывный оператор нетривиального инвариантного подпространства. Положительный ответ на этот вопрос был дан в 1935 г. Нейманом. В настоящем пункте мы изложим его замечательную теорему.

Теорема 1. *Любой вполне непрерывный оператор* A *в пространстве* H *обладает нетривиальным инвариантным подпространством.*

Доказательство. Если пространство H несепарабельно, то утверждение теоремы почти очевидно. Действительно, взяв какой-нибудь элемент $h_0 \neq 0$, образуем элементы

$$h_0, \quad Ah_0 = h_1, \quad Ah_1 = h_2, \ldots$$

Их замкнутая линейная оболочка представляет сепарабельное, а потому отличное от H подпространство, размерность которого $\geqslant 1$ и которое, очевидно, инвариантно относительно A.

Таким образом, мы можем предполагать, что пространство H сепарабельно. Для доказательства теоремы мы построим с помощью некоторых предельных переходов операторы $S \neq I$ и $T \neq 0$, определенные всюду в H и удовлетворяющие следующим условиям:

$$\left.\begin{aligned} &\|S\| \leqslant 1, \quad \|T\| \leqslant 1, \quad T - S \neq I, \\ &SAS = AS, \quad TAT = AT. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Затем введем подпространство G всех элементов $g \in$ H, для которых

$$Sg = g,$$

и подпространство F всех элементов $f \in$ H, для которых

$$Tf = f.$$

Каждое из этих подпространств инвариантно относительно оператора A. Например, если $g \in$ G, то

$$Ag = ASg,$$

а в силу (1) $ASh \in$ G при любом $h \in$ H; поэтому $Ag \in$ G. Отсюда уже виден путь для доказательства теоремы, и нужно лишь убедиться в том, что на этом пути получается нетривиальное инвариантное подпространство. С этой целью заметим, что в силу свойств операторов S, T всегда имеет место по крайней мере один из следующих двух случаев:

I. $\qquad S \neq 0, \quad S \neq I,$

II. $\qquad T \neq 0, \quad T \neq I.$

Так как они совершенно аналогичны, то ограничимся рассмотрением первого из них.

Из $S \neq I$ следует, что G $\neq$ H. Если окажется, что сверх того G $\neq \{0\}$, то подпространство G будет нетривиальным, и теорема верна.

Допустим теперь, что G $= \{0\}$. Тогда, беря любой вектор $h \in$ H, для которого $Sh \neq 0$ (а такой вектор существует, так как $S \neq 0$), и используя сделанное выше замечание, что $ASh \in$ G, заключаем, что $ASh = 0$ и, следовательно, Sh есть собственный вектор оператора A для собственного значения 0. Одномерное подпространство, порождаемое этим собственным вектором, и является в этом случае инвариантным подпространством, существование которого утверждает теорема.

Теперь наша задача состоит в построении операторов S и T, удовлетворяющих перечисленным выше условиям. С этой целью выберем в H какой-нибудь ортонормированный базис $\{h_n\}_1^\infty$ и при любом натуральном k обозначим через H_k (k-мерную) линейную оболочку векторов $h_1, h_2, \ldots, h_k$, а через P_k — оператор ортогонального проектирования на H_k. В каждом подпространстве H_k определим оператор $A_k = P_k A$. По известной алгебраической теореме Шура оператор A_k представим в некотором базисе (пространства H_k) треугольной матрицей. Геометрически это означает, что в H_k существует строго возрастающая последовательность подпространств

$$\{0\} = \mathrm{H}_{k0} \subset \mathrm{H}_{k1} \subset \ldots \subset \mathrm{H}_{kk} = \mathrm{H}_k,$$

каждое из которых инвариантно относительно оператора A_k. Обозначим через P_{kj} оператор проектирования из H на H_{kj} и заметим, что $h_1 \in \mathrm{H}_k$ при любом $k = 1, 2, \ldots,$ где h_1 — первый орт выбранного нами базиса пространства H. Поэтому при любом k справедливы соотношения

$$0 = \| h_1 - P_{kk} h_1 \| \leqslant \| h_1 - P_{k, k-1} h_1 \| \leqslant \ldots \leqslant \| h_1 - P_{k0} h_1 \| = 1.$$

Из них вытекает, что при фиксированном θ $(0 < \theta < 1)$ для каждого натурального k найдется единственный номер $r(k) < k$ такой, что

$$\| h_1 - P_{k, r(k)+1} h_1 \| < \theta \leqslant \| h_1 - P_{k, r(k)} h_1 \|. \tag{2}$$

На основании теоремы 1 п° 34 о слабой компактности множества равномерно ограниченных операторов можно найти последовательность $\{k_i\}_{i=1}^\infty$ так, чтобы обе последовательности операторов $\{P_{k_i, r(k_i)}\}_{i=1}^\infty$, $\{P_{k_i, r(k_i)+1}\}_{i=1}^\infty$ слабо сходились.

Предельные операторы обозначим S и T. Итак, при любом $h \in \mathrm{H}$ и $i \to \infty$

$$P_{k_i, r(k_i)} h \xrightarrow{\text{сл}} Sh, \qquad P_{k_i, r(k_i)+1} h \xrightarrow{\text{сл}} Th. \tag{3}$$

Согласно п° 34 $\| S \| \leqslant 1$, $\| T \| \leqslant 1$. Покажем теперь, что $T \neq 0$, $S \neq I$ и $T - S \neq I$. Действительно, так как 0 есть проектирующий оператор, то в случае $T = 0$ сходимость $P_{k_i, r(k_i)+1} h \to 0$, согласно теореме 2 п° 38, была бы не только слабой, но и сильной. Поэтому из (2) мы получили бы, что

$$\lim_{i \to \infty} \| h_1 - P_{k_i, r(k_i)+1} h_1 \| = \| h_1 \| \leqslant \theta,$$

что невозможно, так как $\| h_1 \| = 1$.

Аналогично, при $S = I$ оказалась бы сильной сходимость $P_{k_i, r(k_i)} h \to h$ и мы получили бы из (2):

$$\theta \leqslant \lim_{i\to\infty} \| h_1 - P_{k_i, r(k_i)} h_1 \| = 0,$$

что абсурдно.

Наконец, при $T - S = I$ по той же теореме 2 n° 38, оказалось бы, что сильно сходится к I последовательность одномерных проекторов $\{P_{k_i, r(k_i)+1} - P_{k_i, r(k_i)}\}_{i=1}^{\infty}$, что, очевидно, невозможно.

Остается доказать соотношения (1). Они аналогичны, и мы можем ограничиться доказательством первого. С этой целью заметим вначале, что для любого вполне непрерывного оператора B при $i \to \infty$

$$P_{k_i, r(k_i)} B P_{k_i, r(k_i)} \xrightarrow{\text{сл}} SBS. \tag{4}$$

Действительно, при любом $h \in \mathrm{H}$ последовательность $\{P_{k_i, r(k_i)} h\}_{i=1}^{\infty}$ слабо сходится, а потому вполне непрерывный оператор B переводит ее в сильно сходящуюся:

$$f_i \equiv BP_{k_i, r(k_i)} h \to BSh \equiv f.$$

С другой стороны,

$$P_{k_i, r(k_i)} f_i = P_{k_i, r(k_i)} f + P_{k_i, r(k_i)} (f_i - f),$$

где первое слагаемое правой части при $i \to \infty$ сходится слабо к Sf, а второе сходится сильно к нулю, так как $\| f_i - f \| \to 0$. Поэтому при $i \to \infty$

$$P_{k_i, r(k_i)} f_i \xrightarrow{\text{сл}} Sf,$$

а это и значит, что при $i \to \infty$

$$P_{k_i, r(k_i)} B P_{k_i, r(k_i)} h \xrightarrow{\text{сл}} SBSh,$$

т. е. (4) доказано для любого вполне непрерывного оператора B. Если же взять $B = A$, то будем иметь еще равенство

$$P_{k_i, r(k_i)} A P_{k_i, r(k_i)} = P_{k_i} A P_{k_i, r(k_i)}. \tag{5}$$

Но P_k сильно сходится к I при $k \to \infty$, откуда следует, что (в сильном смысле)

$$P_{k_i} A P_{k_i, r(k_i)} \to AS. \tag{6}$$

Используя (4) при $B = A$ вместе с соотношениями (5) и (6), мы и найдем, что

$$SAS = AS.$$

Таким образом, теорема 1 полностью доказана. Из нее вытекает следующее важное предложение о промежуточном инвариантном подпространстве.

Теорема 2. *Если подпространства* G' *и* $\mathrm{G}'' \supset \mathrm{G}'$ *инвариантны относительно вполне непрерывного оператора* A *и*

$$\dim(\mathrm{G}'' \ominus \mathrm{G}') > 1,$$

то оператор A *обладает инвариантным подпространством* G, *удовлетворяющим соотношению*

$$\mathrm{G}' \subset \mathrm{G} \subset \mathrm{G}''.$$

Доказательство. Обозначим через A'' часть A, лежащую в G''. Тогда G' является инвариантным подпространством оператора A'', а значит, $\mathrm{G}'' \ominus \mathrm{G}'$ есть инвариантное подпространство оператора $(A'')^*$. Согласно теореме 1 в $\mathrm{G}'' \ominus \mathrm{G}'$ должно существовать инвариантное подпространство F оператора $(A'')^*$, отличное от нулевого и от $\mathrm{G}'' \ominus \mathrm{G}'$. Но тогда $\mathrm{G} = \mathrm{G}'' \ominus \mathrm{F}$ удовлетворяет всем требованиям, и теорема доказана.

Изложенные в этом пункте результаты Неймана были впервые опубликованы в статье Ароншайна и Смита *), посвященной обобщению теоремы Неймана на банаховы пространства.

66. Ядерные операторы. Этот пункт, где пространство H снова предполагается сепарабельным, посвящен одному классу вполне непрерывных операторов, еще более специальному, чем класс операторов Гильберта — Шмидта.

Начнем с того, что при рассмотрении произвольного вполне непрерывного оператора T полезно вводить, как это уже было сделано в n° 64, положительный вполне непрерывный оператор $A = T^*T$. Его отличные от нуля собственные значения положительны. Пусть

$$\mu_1^2 \geqslant \mu_2^2 \geqslant \mu_3^2 \geqslant \ldots \qquad (\mu_k > 0)$$

есть полная последовательность этих собственных значений, а

$$e_1, \ e_2, \ e_3, \ \ldots$$

— соответствующая ортонормированная последовательность собственных векторов. Числа μ_k часто называют *s-числами* (*сингулярными числами*) оператора T и пишут

$$\mu_k = s_k(T) \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

*) Aronszain N., Smith K. T., Invariant subspaces of completely continuous operators, Ann. Math. **60** (1954), 345—350. Есть русский перевод в сб. переводов «Математика», **2** : 1 (1958), 97—102.

Непосредственно из определения наибольшего собственного значения следует, что

$$\|T\| = \sqrt{\|A\|} = \mu_1.$$

В терминах спектра оператора A нетрудно представить также и абсолютную норму оператора T. Действительно,

$$N^2(T) = \sum_{k=1}^{\infty} \|Te_k\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (Te_k, Te_k) =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} (T^*Te_k, e_k) = \sum_{k=1}^{\infty} (Ae_k, e_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2.$$

Таким образом, оператор T является оператором Гильберта — Шмидта в том и только том случае, когда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 < \infty. \tag{1}$$

Теперь примем следующее

Определение. Вполне непрерывный оператор T называется *ядерным*, если

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k < \infty. \tag{2}$$

Так как из (2) следует (1), то всякий ядерный оператор является оператором Гильберта — Шмидта.

Теорема 1. *Пусть T — ядерный оператор. В таком случае при любом выборе в* H *ортонормированного базиса $\{f_k\}_1^\infty$ ряд*

$$\sum_{1}^{\infty} (Tf_k, f_k)$$

сходится абсолютно, его сумма не зависит от выбора базиса и имеет место неравенство

$$\sum_{1}^{\infty} |(Tf_k, f_k)| \leqslant \sum_{1}^{\infty} \mu_k. \tag{3}$$

Доказательство. Согласно теореме 1 n° 64 для любого вектора $h \in$ H можно написать следующие разложения:

$$h = h_0 + (h, e_1) e_1 + (h, e_2) e_2 + \ldots,$$
$$Th = \mu_1 (h, e_1) g_1 + \mu_2 (h, e_2) g_2 + \ldots,$$

где

$$Te_k = \mu_k g_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

а h_0 принадлежит нулевому подпространству оператора T. Из этих разложений следует, что

$$(Tf_k, f_k) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i (f_k, e_i)(g_i, f_k) \tag{4}$$

и, значит,

$$\sum_1^{\infty} |(Tf_k, f_k)| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |(f_k, e_i)|^2\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |(f_k, g_i)|^2\right\}^{\frac{1}{2}} = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i.$$

Поэтому первое и третье утверждения доказаны. Второе утверждение следует из соотношений

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f_k, e_i)(g_i, f_k) = (g_i, e_i) \qquad (i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Действительно, суммируя (4), получаем в силу этих соотношений равенство

$$\sum_1^{\infty} (Tf_k, f_k) = \sum_1^{\infty} \mu_i (g_i, e_i),$$

из которого видно, что левая часть не зависит от выбора ортонормированного базиса $\{f_k\}_1^{\infty}$.

Вспоминая терминологию линейной алгебры, можем сказать, что всякий ядерный оператор T имеет конечный *матричный след*

$$\operatorname{Sp} T \equiv \sum_{k=1}^{\infty} (Tf_k, f_k).$$

Наша теорема утверждает значительно меньше, чем соответствующая теорема алгебры. Однако и в интересующем нас случае имеются дальнейшие важные предложения и в первую очередь следующая

Теорема 2. *Если T — ограниченный оператор, определенный всюду в* H, *и если хотя бы для одного ортонормированного базиса $\{f_k\}_1^{\infty}$ ряд*

$$\sum_1^{\infty} (Tf_k, f_k)$$

абсолютно сходится, то T — ядерный оператор.

Полное доказательство этой теоремы читатель найдет в недавно вышедшей книге И. Ц. Гохберга и М. Г. Крейна *).

*) И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн, Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, «Наука», 1965.

Ограничимся здесь доказательством теормы 2 для того частного случая, когда T есть ограниченный положительный оператор, определенный всюду в H. Для него справедливы соотношения

$$|(Tf_j, f_k)|^2 \leqslant (Tf_j, f_j)(Tf_k, f_k).$$

Поэтому неравенство

$$\sum_1^{\infty} (Tf_k, f_k) < \infty \tag{4'}$$

влечет неравенство

$$\sum_{j, k=1}^{\infty} |(Tf_j, f_k)|^2 < \infty,$$

откуда следует, что T — оператор Гильберта — Шмидта, а значит, он вполне непрерывен. Пусть $\{\lambda_k\}$ — полная последовательность его положительных собственных значений, а $\{e_k\}$ — ортонормированная последовательность собственных векторов. Построим оператор S, определяемый на любом элементе $h \in$ H с помощью формулы

$$Sh = \sum_1^{\infty} \sqrt{\lambda_k}\,(h, e_k)\,e_k \qquad \left(\sqrt{\lambda_k} > 0\right).$$

Ясно, что S — положительный вполне непрерывный оператор и $S^2 = T$.

Так как

$$\sum_1^{\infty} (Tf_k, f_k) = \sum_1^{\infty} (S^2 f_k, f_k) = \sum_1^{\infty} \| Sf_k \|^2,$$

то в силу условия (4′)

$$\sum_1^{\infty} \| Sf_k \|^2 < \infty,$$

а это значит, что S есть также оператор Гильберта — Шмидта и поэтому при любом ортонормированном базисе $\{g_k\}_1^{\infty}$

$$\sum_1^{\infty} \| Sg_k \|^2 = \sum_1^{\infty} \| Sf_k \|^2 = \sum_1^{\infty} \| Se_k \|^2 = \sum_1^{\infty} \lambda_k. \tag{5}$$

Здесь один шаг нуждается в пояснении. Дело в том, что ортонормированная последовательность $\{e_k\}$ не является базисом в H, однако если бы мы ее дополнили до базиса с помощью некоторой последовательности векторов $\{e_i'\}$, то каждый из векторов e_i' принадлежал бы нулевому подпространству оператора T и мы имели бы равенства

$$\| Se_i' \|^2 = (Se_i', Se_i') = (Te_i', e_i') = 0.$$

Из равенства (5) следует, что

$$\sum_1^\infty (Tg_k, g_k) = \sum_1^\infty \lambda_k.$$

Тем самым утверждение теоремы 2 доказано, если оператор T позитивен.

Для доказательства теоремы 2 в общем случае приходится оператор T представлять в виде суммы. При этом основой доказательства является неравенство Ки Фана *), которое состоит в том, что

$$\sum_{k=1}^\infty s_k(T'+T'') \leqslant \sum_{k=1}^\infty s_k(T') + \sum_{k=1}^\infty s_k(T'')$$

для любых вполне непрерывных операторов T' и T''.

В упомянутой книге И. Ц. Гохберга и М. Г. Крейна приводится также доказательство следующей интересной теоремы В. Б. Лидского, обобщающей известное предложение теории матриц.

Теорема 3. *Если оператор T ядерный и $\{\lambda_k\}$ — совокупность всех его собственных значений, то*

$$\operatorname{Sp} T = \sum_k \lambda_k.$$

В частности, $\operatorname{Sp} T = 0$, если у оператора T нет собственных значений, что, например, имеет место для интегральных операторов Вольтерра.

---

*) См. Ky Fan, Maximum properties and inequalities for the eigenvalues of completely continuous operators, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 37 (1951), 760—766.

ГЛАВА VI

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ УНИТАРНЫХ И САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

Основная цель настоящей главы — обобщение на любые самосопряженные (и унитарные) операторы в H понятия разложения по собственным векторам, рассмотренного нами в предыдущей главе для вполне непрерывных операторов. Мы будем оставаться в рамках классической теории, и не затронем вопросов, связанных с разложениями по обобщенным собственным векторам (или обобщенным собственным функциям — в L^2), которые получили широкое развитие в течение последних 10—15 лет (главным образом, в связи с теорией дифференциальных операторов в частных производных). Эти вопросы нашли глубокое развитие и освещение в ряде фундаментальных монографий *), где содержатся также подробные библиографические указания.

67. Разложение единицы. Припомним результат, относящийся к вполне непрерывным самосопряженным операторам, который был получен в n° 61, а затем в иной форме представлен в n° 64. Согласно этому результату задание в гильбертовом пространстве H вполне непрерывного самосопряженного оператора A позволяет рассматривать пространство H как ортогональную сумму

$$\mathrm{H} = \mathrm{H}_0 \oplus \mathrm{H}_1 \oplus \mathrm{H}_2 \oplus \ldots$$

подпространств H_k, из которых все, кроме H_0, конечномерны, а H_0 может быть даже несепарабельным. Каждому подпространству H_k отвечает вещественное число λ_k, причем $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_k \neq \lambda_i$, если $k \neq i$. Это расщепление пространства H таково, что в каждом из подпространств H_k действие оператора A сводится к умножению элемента на соответствующее число λ_k, т. е.

$$Af = \lambda_k f,$$

*) И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов, Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений, «Обобщенные функции», вып. 3, Физматгиз, 1958; И. М. Гельфанд и Н. Я. Виленкин, Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, «Обобщенные функции», вып. 4, Физматгиз, 1961; Ю. М. Березанский, Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, Наукова думка, Киев, 1965.

если $f \in \mathrm{H}_k$. Обозначая оператор проектирования на H_k через P_k, мы можем написать, что

$$I = P_0 + P_1 + P_2 + \ldots \tag{1}$$

и

$$A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \ldots \tag{2}$$

Числа λ_k единственной предельной точкой могут иметь только точку 0. С целью дальнейших обобщений удобно записать представления (1), (2) с помощью интеграла Стилтьеса.

Для этого введем при любом вещественном t подпространство G_t, порождаемое всеми собственными векторами, принадлежащими собственным значениям, меньшим, чем t. При этом число 0 также рассматривается как собственное значение, относящееся к собственному подпространству H_0. Пусть E_t есть оператор проектирования на G_t. Оператор E_t имеет предел как при возрастании, так и при убывании t. Поэтому существуют E_{t-0} и E_{t+0}. Легко видеть, что E_t есть непрерывная слева операторная функция от t. Если λ_k есть собственное значение, то разность

$$E_{\lambda_k+0} - E_{\lambda_k} = P_k$$

есть оператор проектирования на собственное подпространство H_k. Теперь формулы (1), (2) можно представить в виде

$$f = If = \int_\alpha^\beta dE_t f, \tag{1'}$$

$$Af = \int_\alpha^\beta t\, dE_t f, \tag{2'}$$

где интегралы берутся по интервалу $[\alpha, \beta]$, содержащему все собственные значения оператора.

Эти интегралы являются не чем иным, как суммами некоторых рядов, и если мы их написали, то потому, что именно формулы (1'), (2') допускают, как мы дальше увидим, обобщение на произвольные (не обязательно вполне непрерывные) самосопряженные операторы в H. Имея в виду этот общий случай, примем следующее

Определение. *Разложением единицы* называется однопараметрическое семейство проектирующих операторов E_t, заданное в конечном или бесконечном интервале *) $[\alpha, \beta]$ и удовлетворяющее следующим условиям:

а) $E_u E_v = E_s \qquad (s = \min\{u, v\})$,

*) Если интервал $[\alpha, \beta]$ бесконечен, то, по определению, принимается

$$E_{-\infty} = \lim_{t \to -\infty} E_t, \qquad E_\infty = \lim_{t \to \infty} E_t$$

(в смысле сильной сходимости).

b) в смысле сильной сходимости

$$E_{t-0} = E_t \qquad (\alpha < t < \beta),$$

c) $E_\alpha = 0$, $E_\beta = I$.

Из определения следует, что при любом $f \in$ H величина

$$(E_t f, f) = \sigma(t)$$

является непрерывной слева, неубывающей функцией ограниченного изменения, для которой

$$\sigma(\alpha) = 0, \qquad \sigma(\beta) = (f, f).$$

Действительно, при $s < t$

$$(E_s f, f) = \| E_s f \|^2 = \| E_s E_t f \|^2 \leqslant \| E_t f \|^2 = (E_t f, f).$$

Имея интервал $\Delta = [t', t''] \subset [\alpha, \beta]$, мы будем разность $E_{t''} - E_{t'}$ обозначать $E(\Delta)$.

Возьмем два интервала Δ_1, Δ_2; в таком случае из а) следует, что

$$E(\Delta_1) E(\Delta_2) = E(\Delta),$$

где Δ — пересечение интервалов Δ_1, Δ_2. В частности, если интервалы Δ_1, Δ_2 не имеют общих внутренних точек, то

$$E(\Delta_1) E(\Delta_2) = 0,$$

т. е. подпространства, на которые $E(\Delta_1)$ и $E(\Delta_2)$ проектируют, ортогональны. На основании сказанного свойство а) называют свойством *ортогональности* разложения единицы.

Рассмотрения, которые мы предпослали нашему общему определению, показывают, что всякий вполне непрерывный самосопряженный оператор порождает некоторое разложение единицы и сам представим через него. В настоящей главе эти результаты будут распространены на унитарные операторы U и произвольные самосопряженные операторы A в H, а именно, будет показано, что каждый такой оператор обладает вполне определенным разложением единицы E_t и представим через него в виде интеграла Стилтьеса:

$$U = \int_0^{2\pi} e^{it}\, dE_t, \qquad A = \int_{-\infty}^{\infty} t\, dE_t.$$

Точный смысл этих представлений будет выяснен ниже, в соответствующих пунктах.

Имеются различные пути для получения интересующих нас общих результатов. Хронологически первый из них связан с так называемой проблемой моментов. Ему посвящены n°n° 71—75, которым предпосылается (см. n°n° 68—70) изложение всех необходимых теоретико-функциональных фактов. Далее, в n°n° 77—79 дано непосредственное, чисто операторное построение теории *).

68. Тригонометрическая проблема моментов. В общем виде проблема моментов может быть сформулирована следующим образом: дано некоторое множество функций $u_\alpha(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$, каждой из которых сопоставлено некоторое число c_α; требуется найти неубывающую функцию ограниченного изменения $\sigma(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$, удовлетворяющую системе уравнений

$$\int_a^b u_\alpha(t)\, d\sigma(t) = c_\alpha. \tag{1}$$

Эта проблема распадается на несколько проблем, из которых первая состоит в определении условий разрешимости написанной системы уравнений в указанном классе функций $\sigma(t)$.

В настоящем пункте мы рассмотрим тригонометрическую проблему моментов. Для нее система (1) имеет вид

$$c_k = \int_0^{2\pi} e^{ikt}\, d\sigma(t) \quad (\pm k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ \overline{c_k} = c_{-k}). \tag{2}$$

Теорема 1. *Для существования неубывающей функции* **) $\sigma(t)$, *удовлетворяющей уравнениям* (2), *необходимо, чтобы из неотрицательности тригонометрической суммы*

$$\sum_{k=-n}^{n} \xi_k e^{ikt} \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

во всем интервале $[0, 2\pi]$ *всегда следовало неравенство*

$$\sum_{k=-n}^{n} \xi_k c_k \geqslant 0,$$

и достаточно, чтобы для любого вещественного числа v *были неотрицательны выражения*

$$\sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) e^{-ikv} c_k \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

---

*) Это изложение не зависит от n°n° 68—75 (кроме n° 72).

**) Ограниченность изменения здесь получается автоматически в силу того из уравнений (2), для которого $k = 0$.

отвечающие специальным неотрицательным тригонометрическим суммам

$$\sum_{k=-n}^{n}\left(1-\frac{|k|}{n}\right)e^{ik(t-v)}=\frac{1}{n}\left|\sum_{k=0}^{n-1}e^{ik(t-v)}\right|^2.$$

Доказательство. Необходимость условия очевидна, так как в случае разрешимости системы (2) будет иметь место равенство

$$\sum_{k=-n}^{n}\xi_k c_k=\int_0^{2\pi}\sum_{k=-n}^{n}\xi_k e^{ikt}\,d\sigma(t).$$

Чтобы доказать вторую часть теоремы, рассмотрим последовательность неотрицательных по условию тригонометрических сумм

$$\psi_n(v)=\sum_{k=-n}^{n}\left(1-\frac{|k|}{n}\right)c_k e^{-ikv}\qquad(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Положим

$$\sigma_n(t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^t\psi_n(v)\,dv\qquad(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Это — неубывающие функции, для которых

$$\sigma_n(0)=0,\quad \sigma_n(2\pi)=c_0\qquad(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Таким образом, мы имеем последовательность неубывающих в интервале $[0,\ 2\pi]$ функций $\sigma_n(t)$, удовлетворяющих неравенству

$$0\leqslant\sigma_n(t)\leqslant c_0\qquad(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Согласно первой теореме Хелли поэтому существует такая неубывающая функция $\sigma(t)$ и такая подпоследовательность $\{\sigma_{n_j}(t)\}_{j=1}^{\infty}$, что во всех точках непрерывности функции $\sigma(t)$

$$\lim_{j\to\infty}\sigma_{n_j}(t)=\sigma(t).$$

По второй теореме Хелли

$$\int_0^{2\pi}e^{ikt}\,d\sigma(t)=\lim_{j\to\infty}\int_0^{2\pi}e^{ikt}\,d\sigma_{n_j}(t)=\lim_{j\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{ikt}\psi_{n_j}(t)\,dt=$$

$$=\lim_{j\to\infty}\left(1-\frac{|k|}{n_j}\right)c_k=c_k,$$

и наше предложение полностью доказано.

Обратимся теперь к вопросу о числе решений системы (2). С этой целью допустим, что система (2) имеет два различных решения $\sigma(t)$, $\sigma^*(t)$. Их разность

$$\omega(t) = \sigma(t) - \sigma^*(t)$$

есть функция ограниченного изменения, для которой

$$\int_0^{2\pi} e^{ikt}\, d\omega(t) = 0 \qquad (\pm k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Теорема 2. *Если функция ограниченного изменения* $\omega(t)$ *(вещественная или даже комплексная) удовлетворяет соотношениям (3), то она равна постоянной во всех своих точках непрерывности.*

Доказательство. Возьмем верное при любом целом $k \neq 0$ равенство

$$\int_0^{2\pi} e^{ikt}\, d\omega(t) = e^{ikt}\omega(t)\Big|_0^{2\pi} - ik\int_0^{2\pi} e^{ikt}\omega(t)\, dt = \int_0^{2\pi} d\omega(t) - ik\int_0^{2\pi} e^{ikt}\omega(t)\, dt.$$

Из него в силу соотношений (3) следует, что

$$\int_0^{2\pi} e^{ikt}\omega(t)\, dt = 0 \qquad (\pm k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Беря

$$C = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \omega(t)\, dt,$$

найдем, что

$$\int_0^{2\pi} e^{ikt}\{\omega(t) - C\}\, dt = 0 \qquad (\pm k = 0, 1, 2, \ldots).$$

По теореме единственности теории рядов Фурье из последних равенств вытекает, что во всех точках непрерывности функции $\omega(t)$ имеет место равенство

$$\omega(t) - C = 0.$$

Из доказанного, в частности, следует, что если $\sigma(t)$, $\sigma^*(t)$ — два различных решения системы (2), то их разность есть постоянная во всех точках, где эта разность непрерывна. Этот факт коротко выражают словами: решение системы (2) *в существенном* единственно.

Единственность решения будет обеспечена полностью, а не только в существенном, если искомую функцию $\sigma(t)$ подчинить дополнительно следующим двум условиям нормировки:

1) Непрерывность слева, т. е. $\sigma(t)=\sigma(t-0)$ $(0<t\leqslant 2\pi)$,
2) $\sigma(0)=0$.

Чтобы перейти от некоторого решения $\sigma_1(t)$ системы (2) к нормированному решению $\sigma(t)$, следует положить

$$\sigma(t)=\begin{cases}\sigma_1(t-0)-\sigma_1(0)+\sigma_1(2\pi)-\sigma_1(2\pi-0) & (0<t\leqslant 2\pi),\\ 0 \quad (t=0).\end{cases} \tag{4}$$

Функция $\sigma(t)$, очевидно, удовлетворяет условиям нормировки. С другой стороны, какова бы ни была непрерывная функция $f(t)$ с периодом 2π,

$$\int_0^{2\pi} f(t)\,d\sigma(t)=\int_0^{2\pi} f(t)\,d\sigma_1(t).$$

Действительно,

$$\int_0^{2\pi} f(t)\,d\sigma(t)-\int_0^{2\pi} f(t)\,d\sigma_1(t)=\int_{+0}^{2\pi-0} f(t)\,d\sigma(t)-\int_{+0}^{2\pi-0} f(t)\,d\sigma_1(t)+$$
$$+f(0)\,\sigma(+0)-f(0)\,[\sigma_1(+0)-\sigma_1(0)]-f(2\pi)\,[\sigma_1(2\pi)-\sigma_1(2\pi-0)]=$$
$$=f(0)\,\{\sigma(+0)-[\sigma_1(+0)-\sigma_1(0)]-[\sigma_1(2\pi)-\sigma_1(2\pi-0)]\},$$

а это в силу (4) равно 0.

В дальнейшем мы всегда будем предполагать выполненными условия нормировки для рассматриваемых решений тригонометрической проблемы моментов.

69. Аналитические функции со значениями, лежащими в полуплоскости. В этом пункте мы будем рассматривать аналитические функции, регулярные внутри круга или полуплоскости и принимающие значения, которые также принадлежат некоторой полуплоскости.

Теорема 1. *Для того чтобы заданная и конечная в круге* $|\zeta|<1$ *функция* $f(\zeta)$ *допускала представление*

$$f(\zeta)=i\beta+\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+\zeta}{e^{it}-\zeta}\,d\sigma(t), \tag{1}$$

где β *— вещественная постоянная, а* $\sigma(t)$ *— неубывающая функция*),*

*) Ограниченность изменения функции $\sigma(t)$ получается автоматически в силу конечности значения $f(0)$.

необходимо и достаточно, чтобы $f(\zeta)$ в круге $|\zeta|<1$ была регулярна и имела неотрицательную вещественную часть.

Предварительное замечание. Мы имеем здесь некоторую проблему моментов, где моментные функции равны

$$u_\zeta(t)=\frac{e^{it}+\zeta}{e^{it}-\zeta},$$

а роль моментов играют числа

$$c_\zeta=f(\zeta)-i\beta,$$

причем параметр ζ пробегает уже не последовательность, а двумерный континуум $|\zeta|<1$.

Заметим также, что $\beta=\mathfrak{I}f(0)$.

Доказательство. Необходимость условия теоремы очевидна, так как правая часть формулы (1) в области $|\zeta|<1$ регулярна и

$$\mathfrak{R}\left\{\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+\zeta}{e^{it}-\zeta}\,d\sigma(t)\right\}=\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\varphi)+r^2}\,d\sigma(t)\geqslant 0,$$

где $r=|\zeta|<1$ и $\varphi=\arg\zeta$.

Займемся доказательством достаточности. Если $f(\zeta)$ регулярна в круге $|\zeta|<1$, то, как известно из теории функций, при $|\zeta|\leqslant R<1$ имеет место представление

$$f(\zeta)=i\beta+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{Re^{it}+\zeta}{Re^{it}-\zeta}\,u(Re^{it})\,dt,$$

где

$$u(re^{it})=\frac{f(re^{it})+\overline{f(re^{it})}}{2}$$

есть вещественная часть функции $f(\zeta)$. При этом

$$\mathfrak{R}f(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(Re^{it})\,dt.$$

Указанное представление можно переписать в виде

$$f(\zeta)=i\beta+\int_0^{2\pi}\frac{Re^{it}+\zeta}{Re^{it}-\zeta}\,d\sigma_R(t), \tag{2}$$

где

$$\sigma_R(t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^t u(Re^{is})\,ds.$$

Так как, по условию, $u(Re^{is}) \geqslant 0$, то $\sigma_R(t)$ — неубывающая функция от t и для любого t из $[0, 2\pi]$

$$0 \leqslant \sigma_R(t) \leqslant \sigma_R(2\pi) = \Re f(0),$$

т. е. множество функций $\sigma_R(t)$ $(0 < R < 1)$ равномерно ограничено. По теореме Хелли, следовательно, существует неубывающая функция $\sigma(t)$ и такая последовательность

$$R_1 < R_2 < R_3 < \ldots \qquad (R_j \to 1),$$

что во всех точках непрерывности функции $\sigma(t)$

$$\lim_{j\to\infty} \sigma_{R_j}(t) = \sigma(t).$$

Применяя к (2) вторую теорему Хелли, мы и найдем, что всюду в круге $|\zeta| < 1$

$$f(\zeta) = i\beta + \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+\zeta}{e^{it}-\zeta}\, d\sigma(t). \tag{3}$$

Теорема доказана.

Если $f(\zeta)$ разложить в ряд Маклорена

$$f(\zeta) = c + 2c_{-1}\zeta + 2c_{-2}\zeta^2 + \ldots$$

и положить $\frac{c+\bar{c}}{2} = c_0$, то в силу (3) мы получим для коэффициентов следующие выражения:

$$c_0 = \int_0^{2\pi} d\sigma(t), \quad c_{-k} = \int_0^{2\pi} e^{-ikt}\, d\sigma(t) \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Вводя еще числа $c_k = \overline{c_{-k}}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, мы приходим к тем уравнениям, которые выражают тригонометрическую проблему моментов. Поэтому при условиях нормировки n° 68 функция $\sigma(t)$ в представлении (3) однозначно определяется функцией $f(\zeta)$.

В справедливости этого факта можно убедиться также при помощи следующей, известной из теории рядов Фурье, формулы обращения

$$\frac{\sigma(t-0)+\sigma(t+0)}{2} = \mathrm{const} + \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^t \Re f(re^{is})\, ds.$$

Теорема 2. *Для того чтобы заданная и конечная в полуплоскости* $\Im z > 0$ *функция* $\varphi(z)$ *допускала представление*

$$\varphi(z) = \alpha + \mu z + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+tz}{t-z}\, d\sigma(t),$$

*где $\mu \geqslant 0$ и $\alpha \lesseqgtr 0$ — две постоянные, а $\sigma(t)$ — неубывающая функция *), необходимо и достаточно, чтобы $\varphi(z)$ была в полуплоскости $\Im z > 0$ регулярна и имела неотрицательную мнимую часть.*

При этом интеграл Стилтьеса с бесконечными пределами понимается как

$$\lim_{\substack{A\to-\infty\\ B\to\infty}} \int_A^B \frac{1+tz}{t-z}\, d\sigma(t),$$

что соответствует предположению

$$\sigma(-\infty) = \lim_{A\to-\infty} \sigma(A),$$

$$\sigma(\infty) = \lim_{B\to\infty} \sigma(B).$$

Если к этому добавить условия нормировки

$$\sigma(t-0) = \sigma(t), \quad \sigma(-\infty) = 0,$$

то функция $\sigma(t)$ определяется однозначно.

Доказательство. Положим

$$z = i\frac{1+\zeta}{1-\zeta},$$

$$\varphi(z) = if(\zeta).$$

Тогда полуплоскость $\Im z > 0$ переходит в круг $|\zeta| < 1$, а регулярная в полуплоскости функция $\varphi(z)$ с неотрицательной мнимой частью переходит в регулярную в круге функцию $f(\zeta)$ с неотрицательной вещественной частью, интегральное представление которой рассмотрено выше. Это представление имеет вид

$$f(\zeta) = i\beta + \int_0^{2\pi} \frac{e^{is}+\zeta}{e^{is}-\zeta}\, d\varrho(s) = i\beta + \int_{+0}^{2\pi-0} \frac{e^{is}+\zeta}{e^{is}-\zeta}\, d\varrho(s) +$$

$$+ \frac{1+\zeta}{1-\zeta}\{\varrho(2\pi) - \varrho(2\pi-0) + \varrho(+0) - \varrho(0)\} =$$

$$= i\beta + \mu\frac{1+\zeta}{1-\zeta} + \int_{+0}^{2\pi-0} \frac{e^{is}+\zeta}{e^{is}-\zeta}\, d\varrho(s),$$

где функцию распределения мы обозначили $\varrho(s)$. С помощью упомянутых преобразований мы получаем, что

$$\varphi(z) = -\beta + i\mu\frac{1+\zeta}{1-\zeta} + i\int_{+0}^{2\pi-0} \frac{e^{is}+\zeta}{e^{is}-\zeta}\, d\varrho(s) \tag{4}$$

*) Ограниченность изменения функции $\sigma(t)$ следует из конечности значения $\varphi(i)$.

или

$$\varphi(z) = -\beta + \mu z + \int_{+0}^{2\pi-0} \frac{z \operatorname{ctg} \frac{s}{2} - 1}{\operatorname{ctg} \frac{s}{2} + z} d\varrho(s).$$

Если положить

$$-\beta = \alpha, \quad -\operatorname{ctg} \frac{s}{2} = t, \quad \varrho(s) = \sigma(t),$$

то для $\varphi(z)$ получится представление

$$\varphi(z) = \alpha + \mu z + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+tz}{t-z} d\sigma(t). \tag{5}$$

Полученный нами переход от (4) к (5), очевидно, верен и в обратную сторону, что и позволяет считать теорему 2 доказанной, включая ее утверждение о единственности функции $\sigma(t)$. Впрочем, единственность $\sigma(t)$ может быть установлена и непосредственно с помощью формулы обращения Стилтьеса — Перрона для интеграла

$$\varphi(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} - \frac{y}{1+t^2} \right\} d\psi(t) \qquad (-\infty < x < \infty, \ y > 0),$$

где $\psi(t)$ имеет ограниченное изменение в каждом конечном интервале и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|d\psi(t)|}{1+|t|^3} < \infty.$$

Формула обращения имеет вид *)

$$\frac{\psi(t+0) + \psi(t-0)}{2} - \frac{\psi(c+0) + \psi(c-0)}{2} = \lim_{y \to 0} \frac{1}{\pi} \int_c^t \varphi(x, y)\, dx,$$

где c, t — произвольные вещественные числа.

Теорема 3. *Для того чтобы функция $\varphi(z)$ допускала в полуплоскости $\Im z > 0$ представление*

$$\varphi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega(t)}{t-z}$$

*) Доказательство см., например, в книге: Н. И. Ахиезер, Классическая проблема моментов, Физматгиз, 1961 (стр. 155—156).

с неубывающей функцией ограниченного изменения $\omega(t)$, необходимо и достаточно, чтобы $\varphi(z)$ в полуплоскости $\Im z > 0$ была регулярна и имела неотрицательную мнимую часть, и чтобы

$$\sup_{y>0} |y\varphi(iy)| < \infty.$$

При этом функция $\omega(t)$ однозначно определяется функцией $\varphi(z)$, если потребовать, чтобы

$$\omega(-\infty) = \lim_{A\to-\infty} \omega(A) = 0, \quad \omega(t-0) = \omega(t) \qquad (-\infty < t \leqslant \infty).$$

Доказательство. Необходимость условия проверяется очень просто. Поэтому мы займемся доказательством достаточности. Если функция $\varphi(z)$ в полуплоскости $\Im z > 0$ регулярна и имеет неотрицательную мнимую часть, то она во всяком случае допускает представление

$$\varphi(z) = \alpha + \mu z + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+tz}{t-z}\, d\sigma(t),$$

бывшее предметом рассмотрения предыдущей теоремы. Из этого представления следует, что

$$y\varphi(iy) = \alpha y + i\mu y^2 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(1+ity)}{t-iy}\, d\sigma(t).$$

По условию доказываемой теоремы, существует такая постоянная M, что

$$\left|\alpha y + i\mu y^2 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(1+ity)}{t-iy}\, d\sigma(t)\right| \leqslant M. \qquad (y>0).$$

Следовательно, и подавно

$$\left.\begin{aligned} &\left|\alpha y + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(1-y^2)\,t}{t^2+y^2}\, d\sigma(t)\right| \leqslant M, \\ &\left|\mu y^2 + y^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+t^2}{t^2+y^2}\, d\sigma(t)\right| \leqslant M. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Второе соотношение показывает, что $\mu = 0$, а также, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^2}{t^2+y^2}(1+t^2)\, d\sigma(t) \leqslant M.$$

Следовательно, при любом $N > 0$

$$\int_{-N}^{N} \frac{y^2}{t^2+y^2}(1+t^2)\,d\sigma(t) \leqslant M,$$

откуда, полагая $y \to \infty$,

$$\int_{-N}^{N} (1+t^2)\,d\sigma(t) \leqslant M,$$

так что

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+t^2)\,d\sigma(t) \leqslant M. \tag{7}$$

Мы можем поэтому ввести неубывающую функцию

$$\omega(t) = \int_{-\infty}^{t} (1+t^2)\,d\sigma(t),$$

для которой, очевидно,

$$\lim_{t\to-\infty} \omega(t) = 0,$$

и которая непрерывна слева вместе с $\sigma(t)$.

Первое из соотношений (6) показывает, что

$$\alpha = \lim_{y\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(y^2-1)\,t}{t^2+y^2}\,d\sigma(t) = \lim_{y\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[t - \frac{t(1+t^2)}{t^2+y^2}\right] d\sigma(t)$$

и, следовательно,

$$\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} t\,d\sigma(t),$$

ибо в силу (7)

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t(1+t^2)}{t^2+y^2}\,d\sigma(t) \right| \leqslant \frac{M}{2y}.$$

Так как, по доказанному, $\mu = 0$, то (5) принимает вид

$$\varphi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} t\,d\sigma(t) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+tz}{t-z}\,d\sigma(t)$$

или

$$\varphi(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega(t)}{t-z},$$

что и требовалось доказать.

Единственность этого представления (при наших условиях нормировки) вытекает из единственности функции $\sigma(t)$ в теореме 2, как это следует из равенства

$$\sigma(t)=\int_{-\infty}^{t}\frac{d\omega(t)}{1+t^2},$$

связывающего функции $\sigma(t)$, $\omega(t)$. Впрочем, и здесь единственность может быть установлена непосредственно с помощью формулы обращения Стилтьеса

$$\frac{\omega(t-0)+\omega(t+0)}{2}=\mathrm{const}+\lim_{y\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{t}\Im\varphi(x+iy)\,dx.$$

70. Теорема Бохнера — Хинчина. В настоящем пункте мы рассмотрим континуальный аналог тригонометрической проблемы моментов. Задача состоит в нахождении условий, которым должна удовлетворять заданная конечная на всей оси $-\infty<t<\infty$ функция $F(t)$ для того, чтобы имело место представление

$$F(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{ist}\,d\omega(s), \tag{1}$$

где $\omega(s)$ — неубывающая функция *). С. Бохнер и А. Я. Хинчин доказали, что *указанное представление при надлежащей нормировке* **) *единственно и существует в том и только том случае, когда функция $F(t)$ непрерывна и для любого натурального n, любых вещественных $t_1, t_2, \ldots, t_n$ и любых комплексных $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$*

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}F(t_\alpha-t_\beta)\,\varrho_\alpha\bar\varrho_\beta\geqslant 0. \tag{2}$$

Функции, удовлетворяющие условию (2), называются *положительно определенными*.

Необходимость этих условий почти очевидна. Действительно, правая часть формулы (1) есть непрерывная функция от t, а

---

*) Ограниченность ее изменения следует из конечности значения $F(0)$.
**) См. теорему 3 n° 69.

с другой стороны, в силу (1) имеет место равенство

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^{n} F(t_\alpha - t_\beta)\, \varrho_\alpha \bar{\varrho}_\beta = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{n} \varrho_k e^{ist_k} \right|^2 d\omega(s),$$

правая часть которого, конечно, больше или равна нулю.

Доказательство достаточности, к которому мы теперь перейдем, уже не так просто.

Итак, пусть $F(t)$ есть непрерывная функция, удовлетворяющая условию (2). Заметим, что в силу (2) мы имеем *) для любого t $(-\infty < t < \infty)$ равенство

$$\overline{F(t)} = F(-t)$$

и неравенство

$$|F(t)| \leqslant F(0). \tag{3}$$

Положим

$$\Phi(z) = \int_0^\infty e^{itz} F(t)\, dt.$$

В силу (3) функция $\Phi(z)$ регулярна в области $\Im z > 0$. Кроме того, для любого $y > 0$

$$|y\Phi(iy)| \leqslant \int_0^\infty ye^{-ty} |F(t)|\, dt \leqslant F(0) \int_0^\infty ye^{-ty}\, dt = F(0).$$

Докажем теперь, что $\Re\Phi(z) \geqslant 0$ при $y > 0$ $(z = x + iy)$. С этой целью возьмем тождество

$$\frac{1}{2y} = \int_0^\infty e^{izv} e^{-i\bar{z}v}\, dv.$$

Имеем далее

$$\Phi(z) + \overline{\Phi(z)} = \int_0^\infty e^{izu} F(u)\, du + \int_0^\infty e^{-i\bar{z}u} F(-u)\, du.$$

---

*) Достаточно положить $n = 2$, $t_1 = t$, $t_2 = 0$. Мы найдем, что при любых ϱ_1, ϱ_2:

$$F(0)\,|\varrho_1|^2 + F(t)\,\varrho_1\bar{\varrho}_2 + F(-t)\,\bar{\varrho}_1\varrho_2 + F(0)\,|\varrho_2|^2 \geqslant 0,$$

а это значит, что

$$F(0) \geqslant 0, \qquad F(-t) = \overline{F(t)}$$

и

$$\begin{vmatrix} F(0) & F(t) \\ F(-t) & F(0) \end{vmatrix} \geqslant 0.$$

Поэтому

$$\frac{\Phi(z)+\overline{\Phi(z)}}{2y}=$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{iz(u+v)}e^{-i\bar{z}v}F(u)\,du\,dv+\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-i\bar{z}(u+v)}e^{izv}F(-u)\,du\,dv=$$

$$=\int_0^\infty d\beta\int_\beta^\infty e^{i\alpha z}e^{-i\beta\bar{z}}F(\alpha-\beta)\,d\alpha+\int_0^\infty d\alpha\int_\alpha^\infty e^{i\alpha z}e^{-i\beta\bar{z}}F(\alpha-\beta)\,d\beta=$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty F(\alpha-\beta)\,e^{ix(\alpha-\beta)}e^{-y(\alpha+\beta)}\,d\alpha\,d\beta=$$

$$=\lim_{A\to\infty}\int_0^A\int_0^A F(\alpha-\beta)\,e^{ix(\alpha-\beta)}e^{-y(\alpha+\beta)}\,d\alpha\,d\beta=$$

$$=\lim_{A\to\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{A^2}{n^2}\sum_{r,\,s=1}^{n}F\left(\frac{r-s}{n}A\right)e^{ix\frac{r-s}{n}A}e^{-y\frac{r+s}{n}A},$$

и наше утверждение вытекает из того, что сумма в правой части имеет вид (2) $\left(\text{достаточно положить } t_k=\frac{kA}{n},\ \varrho_k=e^{-y\frac{kA}{n}}e^{ix\frac{kA}{n}}\right)$.

Так как $\Phi(z)$ отличается только множителем i от бывшей предметом рассмотрения в n° 69 функции (теорема 3), то при наших условиях нормировки однозначно определяется неубывающая функция $\omega(s)$, для которой

$$\Phi(z)=i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega(s)}{s+z}\qquad(\Im z>0).$$

С другой стороны,

$$\frac{i}{s+z}=\int_0^\infty e^{i(s+z)t}\,dt.$$

Следовательно,

$$\int_0^\infty e^{itz}F(t)\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}d\omega(s)\int_0^\infty e^{i(s+z)t}\,dt=\int_0^\infty e^{itz}\,dt\int_{-\infty}^{\infty}e^{ist}\,d\omega(s).$$

Значит, две кусочно-непрерывные абсолютно интегрируемые функции от t, равные нулю при $t<0$ и равные

$$e^{-ty}F(t),\quad e^{-ty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ist}\,d\omega(s)$$

при $t \geqslant 0$, имеют одинаковые преобразования Фурье. В силу известной теоремы единственности эти функции тождественны, т. е.

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist}\, d\omega(s)$$

сначала при $t \geqslant 0$, а затем и на всей числовой оси $-\infty < t < \infty$. Таким образом, представление (1) получено, и его единственность доказана.

Из единственности этого представления вытекает следующее более общее предложение: если $\omega_1(s)$, $\omega_2(s)$ — две комплексные функции ограниченного изменения, принятым образом нормированные, и если при $-\infty < t < \infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ist}\, d\omega_1(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist}\, d\omega_2(s), \tag{4}$$

то

$$\omega_1(s) = \omega_2(s).$$

Действительно, если (4) имеет место и

$$\tilde{\omega}(s) = \omega_1(s) - \omega_2(s),$$

то

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ist}\, d\tilde{\omega}(s) = 0 \qquad (-\infty < t < \infty).$$

Полагая

$$\tilde{\omega}(s) = \varphi(s) + i\psi(s),$$

где $\varphi(s)$ и $\psi(s)$ — вещественны, получим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos st\, d\varphi(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin st\, d\psi(s),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin st\, d\varphi(s) = -\int_{-\infty}^{\infty} \cos st\, d\psi(s).$$

Отсюда, поскольку в одной части каждого из этих равенств четная, а в другой — нечетная функция,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos st\, d\varphi(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin st\, d\varphi(s) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cos st\, d\psi(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin st\, d\psi(s) = 0.$$

Иначе говоря, для всех вещественных t

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ist}\, d\varphi(s) = 0, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist}\, d\psi(s) = 0.$$

Так как каждая из функций $\varphi(s)$, $\psi(s)$ есть разность двух неубывающих функций, то равенства

$$\varphi(s) = 0, \quad \psi(s) = 0 \qquad (-\infty < s < \infty)$$

являются прямым следствием теоремы Бохнера — Хинчина.

71. Спектральное разложение унитарного оператора. Пусть U — унитарный оператор в H. Взяв произвольный элемент $f \in$ H, положим

$$(U^k f,\ f) = c_k(f) = c_k \qquad (\pm k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{1}$$

так что

$$c_{-k} = (U^{-k} f,\ f) = (f,\ U^k f) = \overline{c_k}.$$

Докажем, что при любом натуральном n и любом вещественном

$$\Phi_n(t) \equiv \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) c_k e^{-ikt} \geqslant 0. \tag{2}$$

Действительно, на основании (1)

$$\Phi_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) e^{-ikt} (U^k f,\ f).$$

С другой стороны, если

$$T = I + e^{-it}U + e^{-2it}U^2 + \ldots + e^{-(n-1)it}U^{n-1},$$

то

$$(Tf,\ Tf) = \sum_{r,\, s=0}^{n-1} e^{i(s-r)t} (U^r f,\ U^s f) =$$

$$= \sum_{r,\, s=0}^{n-1} e^{i(s-r)t} (U^{r-s} f,\ f) = \sum_{k=-n}^{n} (n - |k|)\, e^{-ikt} (U^k f,\ f).$$

Таким образом,

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{n} (Tf,\ Tf),$$

чем и доказана справедливость неравенства (2).

Как видим, последовательность $\{c_k\}_{-\infty}^{\infty}$ удовлетворяет условию теоремы 1 n° 68. Поэтому однозначно определяется нормированная неубывающая функция $\sigma(t)$, для которой

$$c_k = \int_0^{2\pi} e^{ikt}\, d\sigma(t) \qquad (\pm k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Функция $\sigma(t)$ при каждом t является некоторым функционалом от f:

$$\sigma(t) = \sigma(t;\ f).$$

Определим с помощью этого функционала другой функционал, уже от пары векторов $f,\ g \in \mathrm{H}$, а именно, положим

$$\sigma(t;\ f,\ g) = \frac{1}{4}\sigma(t;\ f+g) - \frac{1}{4}\sigma(t;\ f-g) + \\ + \frac{i}{4}\sigma(t;\ f+ig) - \frac{i}{4}\sigma(t;\ f-ig).$$

Переменная t здесь, как и выше, изменяется в интервале $[0,\ 2\pi]$. Учитывая, что

$$\int_0^{2\pi} e^{ikt}\, d\sigma(t;\ h) = (U^k h,\ h) \qquad (\pm k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

и беря последовательно

$$h = f+g,\ f-g,\ f+ig,\ f-ig,$$

мы найдем без труда, что

$$\int_0^{2\pi} e^{ikt}\, d\sigma(t;\ f,\ g) = (U^k f,\ g) \qquad (\pm k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{3}$$

Таким образом, мы получили представление в виде тригонометрических интегралов Стилтьеса не только величин $(U^k f,\ f)$, но и величин $(U^k f,\ g)$. Это представление единственно (в силу условий нормировки функции $\sigma(t;\ f,\ g)$) на основании теоремы 2 n° 68.

Опираясь на единственность представления (3), докажем, что $\sigma(t;\ f,\ g)$ есть билинейный функционал от $f,\ g$, норма которого не превосходит 1.

Пусть

$$f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2.$$

В таком случае

$$(U^k f,\ g) = \alpha_1 (U^k f_1,\ g) + \alpha_2 (U^k f_2,\ g)$$

и, следовательно,

$$\int_0^{2\pi} e^{ikt}\, d\sigma(t;\ f,\ g) = \alpha_1 \int_0^{2\pi} e^{ikt}\, d\sigma(t;\ f_1,\ g) + \alpha_2 \int_0^{2\pi} e^{ikt}\, d\sigma(t;\ f_2,\ g) =$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{ikt}\, d_t \{\alpha_1\sigma(t;\ f_1,\ g) + \alpha_2\sigma(t;\ f_2,\ g)\}.$$

Так как это соотношение имеет место при $\pm k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, и условия нормировки выполнены, то

$$\sigma(t;\ f,\ g) = \alpha_1\sigma(t;\ f_1,\ g) + \alpha_2\sigma(t;\ f_2,\ g).$$

Мы видим, что σ, как функция от f, g, линейна по первому из этих аргументов.

Заметим теперь, что, с одной стороны,

$$(g,\ U^k f) = (U^{-k} g,\ f) = \int_0^{2\pi} e^{-ikt}\, d\sigma(t;\ g,\ f),$$

а с другой стороны,

$$(g,\ U^k f) = \overline{(U^k f,\ g)} = \int_0^{2\pi} e^{-ikt}\, d\overline{\sigma(t;\ f,\ g)}.$$

Поэтому для любого целого k

$$\int_0^{2\pi} e^{-ikt}\, d\overline{\sigma(t;\ f,\ g)} = \int_0^{2\pi} e^{-ikt}\, d\sigma(t;\ g,\ f).$$

Следовательно,

$$\overline{\sigma(t;\ f,\ g)} = \sigma(t;\ g,\ f).$$

Из доказанного соотношения и линейности по аргументу f вытекает, что

$$\sigma(t;\ f,\ \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2) = \overline{\beta}_1\sigma(t;\ f,\ g_1) + \overline{\beta}_2\sigma(t;\ f,\ g_2).$$

Припомним теперь теорему n° 23. Так как $\sigma(t; f, f)$ — неубывающая функция от t и

$$\sigma(0;\ f,\ f) = 0,$$

$$\sigma(t;\ f,\ f) \leqslant \sigma(2\pi,\ f,\ f) = \int_0^{2\pi} d\sigma(t;\ f,\ f) = (f,\ f),$$

то из указанной теоремы и следует, что $\sigma(t; f, g)$ есть билинейный функционал от f, g с нормой, не превосходящей единицы.

На основании теоремы об общем виде билинейного функционала существует такое зависящее от параметра t $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ семейство операторов E_t, что

$$\sigma(t;\ f,\ g) = (E_t f,\ g).$$

Теперь мы докажем, что E_t есть разложение единицы.

Прежде всего из справедливости равенства

$$\overline{\sigma(t;\ f,\ g)} = \sigma(t;\ g,\ f)$$

заключаем, что

$$(g,\ E_t f) = (E_t g,\ f),$$

иначе говоря, E_t есть ограниченный самосопряженный оператор.

Переписав формулу (3) в виде

$$(U^k f,\ g) = \int_0^{2\pi} e^{ikt}\, d(E_t f,\ g), \tag{3'}$$

положим

$$g = U^{-r} h \qquad (\pm r = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Мы получим тогда равенство

$$(U^k f,\ U^{-r} h) = \int_0^{2\pi} e^{ikt}\, d(E_t f,\ U^{-r} h),$$

или

$$(U^{k+r} f,\ h) = \int_0^{2\pi} e^{ikt}\, d(U^r E_t f,\ h).$$

А так как

$$(U^r E_t f,\ h) = \int_0^{2\pi} e^{irs}\, d_s (E_s E_t f,\ h),$$

то

$$(U^{k+r} f,\ h) = \int_0^{2\pi} e^{ikt}\, d_t \left\{ \int_0^{2\pi} e^{irs}\, d_s (E_s E_t f,\ h) \right\}. \tag{4}$$

Но, с другой стороны,

$$(U^{k+r} f,\ h) = \int_0^{2\pi} e^{i(k+r)t}\, d(E_t f,\ h) = \int_0^{2\pi} e^{ikt}\, d_t \left\{ \int_0^{t} e^{irs}\, d(E_s f,\ h) \right\}. \tag{5}$$

Из справедливости представлений (4), (5) при любом целом k и наличия у функций от t

$$\int_0^{2\pi} e^{irs}\, d_s(E_s E_t f,\ h), \qquad \int_0^t e^{irs}\, d(E_s f,\ h)$$

принятых свойств нормировки следует, что

$$\int_0^{2\pi} e^{irs}\, d_s(E_s E_t f,\ h) = \int_0^t e^{irs}\, d(E_s f,\ h).$$

Это соотношение выполняется при любом целом r. Поэтому снова в силу единственности представления справедливо равенство

$$(E_s E_t f,\ h) = (E_s f,\ h)$$

при любых $f,\ h \in$ H, если только $s \leqslant t$.

Иными словами, мы доказали, что

$$E_s E_t = E_s \qquad (s \leqslant t). \tag{6}$$

Отсюда вытекает, что

$$E_t^2 = E_t,$$

т. е. E_t есть оператор проектирования, а также, что вместо (6) можно написать более общее соотношение

$$E_u E_v = E_s \qquad (s = \min\{u,\ v\}).$$

Нам остается проверить, что

$$E_0 = 0,\ E_{2\pi} = I,\ E_{t-0} = E_t \qquad (0 < t \leqslant 2\pi)$$

и будет завершено доказательствс того, что E_t есть разложение единицы. Первое и второе соотношения в доказательстве не нуждаются. Чтобы доказать третье соотношение, воспользуемся условиями нормировки, которые показывают, что

$$\lim_{\substack{s \to t \\ s < t}} (E_s f,\ g) = (E_t f,\ g).$$

Таким образом, в смысле слабой сходимости равенство

$$E_{t-0} = E_t$$

доказано. Но оно имеет место и в смысле сильной сходимости, так как при $t > s$

$$\|(E_t - E_s) f\|^2 = ((E_t - E_s) f,\ f) = (E_t f,\ f) - (E_s f,\ f)$$

и, значит,

$$\|(E_t-E_s)f\|$$

стремится к нулю, когда $s\to t$ $(s<t)$.

Мы получили некоторое разложение единицы в интервале $[0, 2\pi]$, которое принадлежит оператору U в том смысле, что при любом целом k и любых $f, g\in \mathrm{H}$

$$(U^kf, g)=\int_0^{2\pi} e^{ikt}\,d(E_tf, g). \tag{3'}$$

Часто эти равенства записывают в виде

$$U^kf=\int_0^{2\pi} e^{ikt}\,dE_tf. \tag{3''}$$

Полученные формулы (3′) и (3″) дают при $k=1$ искомое спектральное разложение унитарного оператора U. При произвольном целом k они представляют спектральное разложение унитарного оператора U^k.

Мы покажем теперь, что интеграл в правой части (3″) существует как предел операторных интегральных сумм Римана — Стилтьеса T_n в смысле равномерной операторной сходимости, а потому равенство (3″) можно понимать непосредственно, а не лишь как символическую запись представления (3′).

Возьмем, как это делается в элементах интегрального исчисления, некоторое подразделение интервала $[0, 2\pi]$:

$$0=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_n=2\pi, \qquad \max_j(t_j-t_{j-1})=\delta.$$

Для этого подразделения построим оператор

$$T_n=e^{ikt_1}E(\Delta_1)+e^{ikt_2}E(\Delta_2)+\ldots+e^{ikt_n}E(\Delta_n),$$

где $\Delta_j=[t_{j-1}, t_j]$. При любом $f\in\mathrm{H}$ имеем

$$((T_n-U^k)f, f)=(T_nf, f)-(U^kf, f)=\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(e^{ikt_j}-e^{ikt})\,d(E_tf, f).$$

Отсюда следует, что

$$|((T_n-U^k)f, f)|\leqslant\sum_{j=1}^{n}|k|\int_{t_{j-1}}^{t_j}(t_j-t)\,d(E_tf, f)\leqslant\delta\,|k|\cdot\|f\|^2,$$

а потому (см. подстрочное примечание к теореме п° 23)

$$\|T_n-U^k\|\leqslant 2|k|\delta,$$

т. е. оператор T_n равномерно стремится к U^k при $\delta \to 0$ $(n \to \infty)$. Предел оператора T_n и принимается за определение интеграла

$$\int_0^{2\pi} e^{ikt}\, dE_t.$$

Не мешает заметить, что в силу наших рассмотрений разложение единицы $E_t (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ не только вполне определяется оператором U, но в свою очередь вполне определяет этот оператор.

Заканчивая настоящий n°, покажем еще, что оператор E_t при любом фиксированном t приводит оператор U, а также любую целую степень оператора U. Наше утверждение сводится к тому, что при любых $f, g \in \mathrm{H}$ имеет место равенство

$$(U^k E_t f, g) = (E_t U^k f, g) \qquad (\pm k = 0, 1, 2, \ldots);$$

иначе говоря, что операторы U^k и E_t перестановочны. Доказательство немедленно следует из формул представления (3′); действительно,

$$(U^k E_t f, g) = \int_0^{2\pi} e^{iks}\, d_s (E_s E_t f, g) = \int_0^t e^{iks}\, d (E_s f, g),$$

а, с другой стороны,

$$(E_t U^k f, g) = (U^k f, E_t g) = \int_0^{2\pi} e^{iks}\, d_s (E_s f, E_t g) =$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{iks}\, d_s (E_t E_s f, g) = \int_0^t e^{iks}\, d (E_s f, g).$$

72. Операторные интегралы Стилтьеса. В n° 71 мы определили интеграл

$$\int_0^{2\pi} e^{ikt}\, dE_t,$$

с одной стороны, как некоторый символ, связанный с билинейным функционалом

$$\int_0^{2\pi} e^{ikt}\, d (E_t f, g),$$

а с другой стороны, непосредственно, как предел в смысле равномерной сходимости оператора

$$e^{ikt_1} E(\Delta_1) + e^{ikt_2} E(\Delta_2) + \ldots + e^{ikt_n} E(\Delta_n),$$

построенного по образцу интегральной суммы Стилтьеса. Частный вид подынтегральной функции e^{ikt} здесь, очевидно, не существен. В настоящем пункте мы покажем, как наши построения проводятся в общем виде.

Возьмем какое-нибудь разложение единицы E_t в конечном или бесконечном интервале $[\alpha, \beta]$. С помощью этого разложения единицы сопоставим любому вектору $f \in H$ функцию распределения $\sigma(t) = (E_t f, f)$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$, а значит, и σ-меру, которая позволяет строить интегралы Лебега — Стилтьеса.

Если какое-нибудь условие выполняется относительно всех σ-мер, порождаемых различными элементами $f \in H$, то будем говорить, что оно выполняется относительно операторной меры E_t. Не мешает заметить, что в случае сепарабельного пространства здесь появляется сильное упрощение. Например, в этом случае можно найти один элемент $g \in H$ так, что почти всюду относительно меры $(E_t g, g)$ означает то же самое, что и почти всюду относительно операторной меры E_t. Эта теорема будет доказана ниже (см. n° 76).

Переходя теперь к функциям $\varphi(t)$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$, на которых мы хотим определить операторные интегралы, условимся раз навсегда, что эти функции (как вещественные, так и невещественные) должны быть определенными и конечными почти всюду относительно операторной меры E_t и, кроме того, относительно E_t измеримыми. Отсюда, в частности, следует, что функция $\varphi(t)$ не может обращаться в ∞ в точке t_0 $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$, если в этой точке хотя бы при одном элементе $f \in H$ функция $(E_t f, f)$ имеет скачок.

Простейшим случаем, несомненно, является тот, когда функция $\varphi(t)$ ограничена. В этом случае при любом $f \in H$ имеет смысл интеграл Лебега — Стилтьеса,

$$\int_\alpha^\beta \varphi(t)\, d(E_t f, f).$$

А так как при любых $f, h \in H$

$$(E_t f, h) = \frac{1}{4}\{(E_t(f+h), f+h) - (E_t(f-h), f-h) + \\ + i(E_t(f+ih), f+ih) - i(E_t(f-ih), f-ih)\},$$

то, очевидно, при любых $f, h \in H$ имеет смысл интеграл Лебега — Стилтьеса

$$\int_\alpha^\beta \overline{\varphi(t)}\, d\,\overline{(E_t f, h)},$$

и при фиксированном f этот интеграл представляет линейный функционал от h.

По теореме Ф. Рисса, следовательно, существует такой зависящий от f элемент Tf, что

$$\int_{\alpha}^{\beta} \overline{\varphi(t)}\, d\,\overline{(E_t f, h)} = (h, Tf)$$

или

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t)\, d\,(E_t f, h) = (Tf, h). \tag{1}$$

При этом легко видеть, что T есть линейный оператор. Кроме того, он ограничен. Для доказательства последнего утверждения положим $h = Tf$ и заметим, что

$$(E_t f, Tf) = \overline{(Tf, E_t f)} = \int_{\alpha}^{\beta} \overline{\varphi(s)}\, d_s\,\overline{(E_s f, E_t f)} = \int_{\alpha}^{t} \overline{\varphi(s)}\, d\,(E_s f, f).$$

Благодаря этому равенству формула (1) принимает вид

$$\|Tf\|^2 = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t)\, d \int_{\alpha}^{t} \overline{\varphi(s)}\, d\,(E_s f, f) = \int_{\alpha}^{\beta} |\varphi(t)|^2\, d\,(E_t f, f), \tag{2}$$

откуда следует неравенство

$$\|Tf\| \leqslant \sup_{\alpha \leqslant t \leqslant \beta} |\varphi(t)| \cdot \|f\|,$$

выражающее, что оператор T ограничен.

Формулу (1) можно представить в виде

$$\int_{\alpha}^{\beta} \overline{\varphi(t)}\, d\,(h, E_t f) = (h, Tf);$$

а так как левая часть есть

$$\int_{\alpha}^{\beta} \overline{\varphi(t)}\, d\,(E_t h, f),$$

то мы приходим к выводу, что сопряженный оператор T^* определяется формулой

$$\int_{\alpha}^{\beta} \overline{\varphi(t)}\, d\,(E_t h, f) = (T^* h, f). \tag{3}$$

Мы можем теперь определить интегралы

$$T = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t)\, dE_t, \qquad T^* = \int_{\alpha}^{\beta} \overline{\varphi(t)}\, dE_t \tag{4}$$

в слабом смысле, т. е. как операторы, отвечающие билинейным функционалам (1) и (3), где f, h — любые элементы H. Если предположить, что функция $\varphi(t)$ не только ограничена, но и непрерывна, то интегралы (4), как легко показать, повторяя рассмотрения n° 71, определяются и непосредственно, как равномерные пределы операторных интегральных сумм Римана — Стилтьеса.

Следующий шаг состоит в отказе от предположения об ограниченности функции $\varphi(t)$. Вместо этого предположения примем, что множество D элементов f, для которых

$$\int_{\alpha}^{\beta} |\varphi(t)|^2\, d(E_t f, f) < \infty, \tag{5}$$

плотно в H. Здесь прежде всего легко доказать, что D есть линейное многообразие. Действительно, из неравенства

$$\| E_t (f+g) \|^2 \leqslant \| E_t (f+g) \|^2 + \| E_t (f-g) \|^2 = 2 \| E_t f \|^2 + 2 \| E_t g \|^2$$

находим, что

$$(E_t (f+g),\ f+g) \leqslant 2 (E_t f,\ f) + 2 (E_t g,\ g).$$

Поэтому соотношения

$$\int_{\alpha}^{\beta} |\varphi(t)|^2\, d(E_t f, f) < \infty, \qquad \int_{\alpha}^{\beta} |\varphi(t)|^2\, d(E_t g, g) < \infty$$

влекут соотношение

$$\int_{\alpha}^{\beta} |\varphi(t)|^2\, d(E_t (f+g),\ f+g) < \infty.$$

Введя обычное обозначение

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{если } |\varphi(t)| \leqslant n, \\ 0, & \text{если } |\varphi(t)| > n, \end{cases}$$

мы можем согласно предыдущему построить билинейные функционалы, определенные всюду в H, и принадлежащие им ограниченные операторы

$$T_n = \int_\alpha^\beta \varphi_n(t)\, dE_t. \tag{4'}$$

Согласно (2)

$$\| T_n f - T_m f \|^2 = \int_\alpha^\beta | \varphi_n(t) - \varphi_m(t) |^2 \, d(E_t f, f).$$

Если $f \in \mathrm{D}$, то правая часть этого соотношения стремится к нулю при $m \to \infty$, $n \to \infty$. Поэтому последовательность элементов $T_n f$ стремится при $n \to \infty$ к некоторому элементу из H. Этот элемент и является, по определению, значением на векторе f операторного интеграла

$$\int_\alpha^\beta \varphi(t)\, dE_t = T.$$

Таким образом, T определяется как оператор с областью определения $\mathrm{D}_T = \mathrm{D}$.

Заменяя в наших рассуждениях $\varphi(t)$ на $\overline{\varphi(t)}$, мы придем ко второму оператору, а именно,

$$S = \int_\alpha^\beta \overline{\varphi(t)}\, dE_t,$$

с областью определения D_S, которая также совпадает с D. Докажем, что $S = T^*$ и в рассматриваемом случае. Так как для любых $f, g \in \mathrm{D}$

$$(Tf, g) = \int_\alpha^\beta \varphi(t)\, d(E_t f, g)$$

и

$$(f, Sg) = \overline{(Sg, f)} = \overline{\int_\alpha^\beta \overline{\varphi(t)}\, d(E_t g, f)} = \int_\alpha^\beta \varphi(t)\, d(E_t f, g),$$

т. е.

$$(Tf, g) = (f, Sg),$$

то $S \subseteq T^*$. Покажем теперь, что $\mathrm{D}_{T^*} \subseteq \mathrm{D}$, откуда следует, что $T^* = S$. С этой целью примем, что для некоторой пары элементов $h, h^* \in \mathrm{H}$

$$(Tf, h) = (f, h^*) \tag{6}$$

при любом $f \in \mathrm{D}$. Затем определим оператор S_n по функции $\overline{\varphi(t)}$, подобно тому как формулой (4') был определен оператор T_n по функции $\varphi(t)$. Так как

$$(E_tS_nh, g) = (S_nh, E_tg) = \\ = \int_\alpha^\beta \overline{\varphi_n(u)}\, d_u(E_uh, E_tg) = \int_\alpha^t \overline{\varphi_n(u)}\, d(E_uh, g), \tag{7}$$

то

$$(E_tS_nh, S_nh) = \int_\alpha^t \overline{\varphi_n(u)}\, d_u\left\{\int_\alpha^u \varphi_n(v)\, d(E_vh, h)\right\} = \int_\alpha^t |\varphi_n(u)|^2 d(E_uh, h).$$

Следовательно, при любом $h \in \mathrm{H}$ для элемента $f_n = S_nh$ будем иметь неравенство

$$\int_\alpha^\beta |\varphi(t)|^2 d(E_tf_n, f_n) = \int_\alpha^\beta |\varphi_n(t)|^4 d(E_th, h) < \infty,$$

т. е. $f_n \in \mathrm{D}$, и мы можем в формуле (6) положить $f = f_n$. Здесь мы учли, что $\varphi(t)\varphi_n(t) = \varphi_n^2(t)$. Снова пользуясь тождеством (7), уже при $g = h$, найдем, что

$$(Tf_n, h) = (TS_nh, h) = \int_\alpha^\beta \varphi(t)\, d(E_tS_nh, h) = \int_\alpha^\beta |\varphi_n(t)|^2 d(E_th, h).$$

На основании формулы (6) при $f = f_n$ получаем отсюда, что

$$\int_\alpha^\beta |\varphi_n(t)|^2 d(E_th, h) \leqslant \|f_n\|\cdot\|h^*\| = \sqrt{\int_\alpha^\beta |\varphi_n(t)|^2 d(E_th, h)}\cdot\|h^*\|,$$

откуда

$$\int_\alpha^\beta |\varphi_n(t)|^2 d(E_th, h) \leqslant \|h^*\|^2$$

и, значит,

$$\int_\alpha^\beta |\varphi(t)|^2 d(E_th, h) \leqslant \|h^*\|^2,$$

т. е. $h \in \mathrm{D}$. Тем самым включение $\mathrm{D}_{T^*} \subseteq \mathrm{D}$ доказано, а вместе с ним установлено и сформулированное выше утверждение: $S = T^*$.

Заметим, что так как переход от T к T^* получается заменой $\varphi(t)$ на комплексно сопряженную функцию $\overline{\varphi(t)}$, в соответствии с формулой (4), то $(T^*)^* = T$. Отсюда, в частности, следует, что оператор T замкнут.

Из рассмотрений настоящего пункта вытекает, как частный случай, следующая

Теорема. *Всякому разложению единицы E_t $(-\infty \leqslant t \leqslant \infty)$ отвечает вполне определенный самосопряженный оператор*

$$B = \int_{-\infty}^{\infty} t\, dE_t. \tag{8}$$

Областью определения D_B этого оператора является совокупность всех векторов f, для которых выполняется неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2\, d(E_t f, f) < \infty. \tag{9}$$

При этом левая часть этого неравенства есть $\| Bf \|^2$.

73. Интегральное представление группы унитарных операторов. Метод, который мы применили в п° 71 при рассмотрении унитарного оператора, применим и в некоторых других случаях. Мы получим с его помощью интегральное представление *группы унитарных операторов* (настоящий пункт) и *резольвенты самосопряженного оператора* (п° 74).

Пусть дано семейство унитарных операторов U_s, зависящих от одного параметра s $(-\infty < s < \infty)$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $U_s U_t = U_{s+t}$,

2) $U_0 = I$,

3) $(U_t f, g)$ есть непрерывная функция от t при любых $f, g \in H$.

Из 1) и 2) вытекает, что $U_t^{-1} = U_{-t}$. А так как $U_t^* = U_t^{-1}$, то, следовательно, $U_t^* = U_{-t}$.

Рассматриваемое семейство операторов представляет *непрерывную абелеву группу*.

Взяв произвольный элемент $f \in H$, рассмотрим функцию

$$F(t) = (U_t f, f).$$

Это — положительно определенная функция. Действительно, она непрерывна и при любых вещественных t_α $(\alpha = 1, 2, 3, \ldots, n)$ и комплексных ϱ_α $(\alpha = 1, 2, 3, \ldots, n)$

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^{n} F(t_\alpha - t_\beta)\, \varrho_\alpha \bar{\varrho}_\beta = \sum_{\alpha, \beta=1}^{n} (U_{t_\alpha} U_{-t_\beta} f, f)\, \varrho_\alpha \bar{\varrho}_\beta =$$

$$= \sum_{\alpha, \beta=1}^{n} (\varrho_\alpha U_{t_\alpha} f, \varrho_\beta U_{t_\beta} f) = \Big\| \sum_{k=1}^{n} \varrho_k U_{t_k} f \Big\|^2 \geqslant 0.$$

Таким образом, к $F(t)$ применима теорема Бохнера — Хинчина, и в силу этой теоремы однозначно определяется неубывающая функция

$$\omega(s) = \omega(s; f),$$

удовлетворяющая условиям

$$\omega(-\infty) = \lim_{s \to -\infty} \omega(s) = 0, \quad \omega(s-0) = \omega(s) \qquad (-\infty < s \leqslant \infty),$$

через которую $F(t)$ выражается в виде

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist}\, d\omega(s) \qquad (-\infty < t < \infty).$$

Отсюда при $t = 0$ следует, что

$$(f, f) = F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega(s) = \omega(\infty).$$

Далее, по функции $\omega(s; f)$ строится функция $\omega(s; f, g)$ такая, что

$$(U_t f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist}\, d\omega(s; f, g).$$

При принятых условиях нормировки

$$\omega(-\infty; f, g) = \lim_{s \to -\infty} \omega(s; f, g) = 0, \quad \omega(s-0; f, g) = \omega(s; f, g)$$
$$(-\infty < s \leqslant \infty)$$

это представление единственно. На основании этой единственности, как и выше, доказывается, что $\omega(s; f, g)$ есть билинейный функционал от f, g, норма которого не превосходит единицы и который обладает следующим свойством:

$$\overline{\omega(s; f, g)} = \omega(s; g, f).$$

Поэтому существует однопараметрическое семейство ограниченных самосопряженных операторов E_s такое, что

$$\omega(s; f, g) = (E_s f, g) \qquad (-\infty \leqslant s \leqslant \infty).$$

Доказательство того, что E_s $(-\infty \leqslant s \leqslant \infty)$ есть разложение единицы, также мало отличается от аналогичного доказательства n° 71. Действительно, с одной стороны,

$$(U_{t+\tau} f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{is(t+\tau)}\, d(E_s f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist}\, d_s \left\{ \int_{-\infty}^{s} e^{i\sigma\tau}\, d(E_\sigma f, g), \right.$$

а с другой стороны,

$$(U_{t+\tau}f,\ g) = (U_t U_\tau f,\ g) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist}\, d_s (E_s U_\tau f,\ g).$$

Поэтому в силу единственности представления

$$(E_s U_\tau f,\ g) = \int_{-\infty}^{s} e^{i\sigma\tau}\, d(E_\sigma f,\ g).$$

Воспользуемся теперь равенством

$$(E_s U_\tau f,\ g) = (U_\tau f,\ E_s g) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma\tau}\, d_\sigma (E_\sigma f,\ E_s g).$$

Отсюда, снова в силу единственности представления, и получается равенство

$$(E_\sigma f,\ g) = (E_\sigma f,\ E_s g) = (E_s E_\sigma f,\ g) \qquad (\sigma \leqslant s),$$

из которого следует соотношение

$$E_u E_v = E_s \qquad (s = \min\{u,\ v\}).$$

Далее, на основании условий нормировки функции ω доказывается сначала в смысле слабой сходимости, а затем и в смысле сильной, что

$$E_{s-0} = E_s, \quad E_{-\infty} = 0, \quad E_\infty = I.$$

Таким образом, показано, что рассматриваемая группа унитарных операторов допускает интегральное представление *)

$$U_t f = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist}\, dE_s f, \tag{1}$$

которое, как легко видеть, справедливо в смысле сильной сходимости несобственного интеграла, а не есть лишь символическая запись равенства

$$(U_t f,\ g) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist}\, d(E_s f,\ g).$$

Предоставляем читателю проверку того, что оператор E_s приводит оператор U_t.

В заключение отметим, что полученное представление (1), как мы увидим ниже, после введения функций от самосопряженного

*) Интегральное представление группы унитарных операторов впервые получено М. Стоном.

оператора (п° 88), может быть записано в виде

$$U_t f = e^{iBt} f,$$

где B — самосопряженный оператор, отвечающий разложению единицы E_s в силу теоремы п° 72.

74. Интегральное представление резольвенты самосопряженного оператора. Пусть A — самосопряженный оператор и $R_z = (A - zI)^{-1}$ — его резольвента, которую мы будем рассматривать лишь при $\Im z \neq 0$. Возьмем какой-нибудь элемент $f \in H$ и порождаемую им в верхней половине плоскости z функцию

$$(R_z f, f) = \varphi(z).$$

На основании соотношения Гильберта

$$R_{z'} - R_z = (z' - z) R_{z'} R_z$$

получаем

$$\frac{\varphi(z') - \varphi(z)}{z' - z} = (R_{z'} R_z f, f),$$

откуда следует, что при $z' \to z$ существует

$$\lim \frac{\varphi(z') - \varphi(z)}{z' - z} = (R_z R_z f, f).$$

Мы видим, что $\varphi(z)$ есть регулярная аналитическая **функция** в верхней полуплоскости. Ее мнимая часть равна

$$\frac{\varphi(z) - \overline{\varphi(z)}}{2i} = \frac{(R_z f, f) - (f, R_z f)}{2i} = \frac{(R_z f, f) - (R_z^* f, f)}{2i}.$$

Но (см. п° 49)

$$R_z^* = R_{\bar{z}}.$$

Следовательно, снова в силу соотношения Гильберта,

$$(R_z f, f) - (R_z^* f, f) = (z - \bar{z})(R_{\bar{z}} R_z f, f) = (z - \bar{z})(R_z f, R_z f).$$

Поэтому при $y = \Im z > 0$

$$\Im \varphi(z) = y (R_z f, R_z f) \geqslant 0,$$

т. е. мнимая часть функции $\varphi(z)$ в верхней полуплоскости неотрицательна; она даже положительна, если $f \neq 0$, так как из $R_z f = 0$ следует $f = 0$.

Заметим еще, что

$$\sup_{y > 0} y |\varphi(iy)| < \infty.$$

Действительно, мы видели в n° 48, что

$$\| R_z f \| \leqslant \frac{1}{y} \| f \|.$$

Поэтому

$$y\,|\varphi(iy)| = y\,|(R_{iy} f,\ f)| \leqslant (f,\ f).$$

Вспомним теперь теорему 3 n° 68. В силу этой теоремы существует неубывающая функция ограниченного изменения $\omega(t) = \omega(t;\ f)$, которая однозначно определяется нормировкой

$$\omega(-\infty) = \lim_{t \to -\infty} \omega(t) = 0, \quad \omega(t-0) = \omega(t) \quad (-\infty < t \leqslant \infty),$$

и для которой

$$\varphi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega(t)}{t-z} \quad (\Im z > 0).$$

Таким образом, доказано, что при $\Im z > 0$

$$(R_z f,\ f) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega(t;\ f)}{t-z}. \tag{1}$$

Из этого представления находим, что

$$(f,\ R_{\bar z} f) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega(t;\ f)}{t-z}$$

и, значит,

$$(R_{\bar z} f,\ f) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega(t;\ f)}{t-\bar z}. \tag{2}$$

Если z лежит в верхней полуплоскости, то $\bar z$ лежит в нижней. Поэтому из формул (1) и (2) следует, что представление

$$(R_z h,\ h) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega(t;\ h)}{t-z}$$

справедливо для любого невещественного z и любого $h \in H$. Полагая

$$\omega(t;\ f,\ g) = \frac{1}{4}\omega(t;\ f+g) - \frac{1}{4}\omega(t;\ f-g) + \\ + \frac{i}{4}\omega(t;\ f+ig) - \frac{i}{4}\omega(t;\ f-ig),$$

найдем, что для любого невещественного z и любых $f, g \in \mathrm{H}$

$$(R_z f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega(t; f, g)}{t-z}. \tag{3}$$

Здесь $\omega(t; f, g)$ есть некоторая комплексная функция ограниченного изменения, равная нулю при $t = -\infty$ и в каждой точке $t > -\infty$ непрерывная слева. Нетрудно проверить, что при этих условиях нормировки интегральное представление (3) единственно. Действительно, в противном случае существует комплексная функция ограниченного изменения

$$\sigma(t) = \alpha(t) + i\beta(t),$$

для которой

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{t-z} = 0 \tag{4}$$

при любом невещественном z. Следовательно, вместе с (4)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{t-\bar{z}} = 0$$

или

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\overline{\sigma(t)}}{t-z} = 0. \tag{4'}$$

Сравнение (4) с (4') показывает, что при любом невещественном z

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha(t)}{t-z} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\beta(t)}{t-z} = 0.$$

Но в силу теоремы 3 n° 68 и условий нормировки отсюда вытекает, что

$$\alpha(t) = \beta(t) = 0.$$

После того, как единственность представления (3) доказана, уже легко доказать, что

$$\overline{\omega(t; f, g)} = \omega(t; g, f), \tag{5}$$

а также, что

$$\omega(t; \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g) = \alpha_1 \omega(t; f_1, g) + \alpha_2 \omega(t; f_2, g).$$

Покажем теперь, что

$$\omega(t; f, f) \leqslant (f, f).$$

Тогда из теоремы n° 23 будет следовать, что $\omega\,(t;\ f,\ g)$ есть билинейный функционал от f, g с нормой, не превосходящей единицы.

Мы уже отмечали, что

$$y\,|(R_{ty}f,\ f)|\leqslant(f,\ f)\quad (y>0).$$

Иначе говоря,

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{y\,d\omega\,(t;\ f,\ f)}{t-iy}\right|\leqslant(f,\ f).$$

Разбивая интеграл на три части, находим, что

$$\left|\int\limits_{-A}^{A}\frac{y\,d\omega\,(t;\ f,\ f)}{t-iy}\right|\leqslant(f,\ f)+\int\limits_{-\infty}^{-A}d\omega\,(t;\ f,\ f)+\int\limits_{A}^{\infty}d\omega\,(t;\ f,\ f).$$

Переходя к пределу при $y\to\infty$, получим

$$\int\limits_{-A}^{A}d\omega\,(t;\ f,\ f)\leqslant(f,\ f)+\int\limits_{-\infty}^{-A}d\omega\,(t;\ f,\ f)+\int\limits_{A}^{\infty}d\omega\,(t;\ f,\ f).$$

Отсюда при $A\to\infty$

$$\omega\,(\infty;\ f,\ f)\leqslant(f,\ f).$$

Но $\omega\,(t;\ f,\ f)$ есть неубывающая функция от t; поэтому неравенство

$$\omega\,(t;\ f,\ f)\leqslant(f,\ f)$$

доказано.

На основании теоремы об общем виде билинейного функционала существует семейство операторов E_t $(-\infty\leqslant t\leqslant\infty)$ такое, что

$$\omega\,(t;\ f,\ g)=(E_tf,\ g).$$

Из соотношения (5) вытекает, что

$$(E_tf,\ g)=(f,\ E_tg),$$

т. е. оператор E_t самосопряженный. Далее, функция $(E_tf,\ f)$ не убывает при увеличении t.

Мы имеем равенство

$$(R_zf,\ g)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{t-z}\,d\,(E_tf,\ g),$$

справедливое для любых $f,\ g\in\mathrm{H}$ и любого невещественного z.

Из этого равенства вытекает, что

$$(R_zf,\ R_{\overline{z}}g)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{t-z}\,d\,(E_tf,\ R_{\overline{z}}g),\tag{6}$$

а с другой стороны

$$(R_z f, R_{\bar{z}'} g) = (R_{z'} R_z f, g) = \frac{1}{z'-z}\{(R_{z'} f, g) - (R_z f, g)\} =$$

$$= \frac{1}{z'-z} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{t-z'} - \frac{1}{t-z}\right) d(E_t f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t-z)(t-z')} d(E_t f, g).$$

Итак, кроме представления (6), мы имеем представление

$$(R_z f, R_{\bar{z}'} g) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t-z} d_t \left\{ \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{s-z'} d(E_s f, g) \right\}.$$

Эти представления должны быть тождественными, так как условия нормировки выполнены здесь для обеих функций распределения. Поэтому

$$\int_{-\infty}^{t} \frac{1}{s-z'} d(E_s f, g) = (E_t f, R_{\bar{z}'} g) = (R_{z'} E_t f, g)$$

или

$$\int_{-\infty}^{t} \frac{1}{s-z'} d(E_s f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{s-z'} d_s(E_s E_t f, g).$$

Так как эти представления тождественны, то

$$(E_s f, g) = (E_s E_t f, g) \qquad (s \leqslant t).$$

Отсюда следует, что

$$E_u E_v = E_s \qquad (s = \min\{u, v\})$$

и, значит,

$$E_s \leqslant E_t \qquad (s \leqslant t).$$

Из условий нормировки функции $\omega(t;\, f,\, g)$ вытекает сначала в смысле слабой сходимости, а затем и в смысле сильной, что

$$E_{-\infty} = 0, \quad E_{t-0} = E_t.$$

Далее, существует сильный предел

$$\lim_{t\to\infty} E_t = E_\infty.$$

Докажем, что

$$E_\infty = I,$$

откуда будет следовать, что E_t есть некоторое разложение единицы. Пусть $I - E_\infty = F$. Тогда

$$FE_t = (I - E_\infty) E_t = E_t - \lim_{s\to\infty} E_s E_t = E_t - E_t = 0.$$

Следовательно, при любых $f, g \in \mathrm{H}$

$$(R_z F f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t-z} \, d\,(E_t F f, g) = 0.$$

Значит, при любом $f \in \mathrm{H}$

$$R_z F f = 0.$$

Отсюда вытекает, что

$$Ff = 0.$$

Следовательно, $F = 0$, что и требовалось доказать.

Полученное нами представление резольвенты R_z самосопряженного оператора A также является иллюстрацией общих построений n° 72 и может быть записано в виде

$$R_z = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t-z} \, dE_t \qquad (\Im z \neq 0).$$

Предлагаем читателю проверить, что оператор E_t при любом t приводит резольвенту R_z для любого невещественного z, т. е.

$$E_t R_z = R_z E_t.$$

75. Спектральное разложение самосопряженных операторов. В конце n° 72 было установлено, что каждым разложением единицы E_t $(-\infty \leqslant t \leqslant \infty)$ порождается некоторый самосопряженный оператор B. Основной задачей настоящего пункта является доказательство обратного предложения, именно, что каждому самосопряженному оператору A принадлежит некоторое разложение единицы, которое порождает его в смысле упомянутой теоремы n° 72. Более того, мы докажем, что этим разложением единицы является разложение единицы резольвенты оператора A. Первым шагом на пути к этому доказательству является следующая

Лемма. *Если E_t $(-\infty \leqslant t \leqslant \infty)$ есть разложение единицы, принадлежащее резольвенте R_z самосопряженного оператора A, то совокупность всех векторов $f \in \mathrm{H}$, для которых имеет место* *неравенство*

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 d(E_t f,\ f) < \infty,$$

совпадает с областью определения D_A *оператора* A.

Доказательство. Мы знаем, что вектор $f = R_z h$ пробегает D_A, когда вектор h пробегает H, а z есть какое-нибудь фиксированное невещественное число. Мы примем $z = i$ и для краткости будем писать

$$R_i = R,\quad R_{-i} = R^*.$$

Наше предложение будет доказано, если мы проверим эквивалентность следующих двух утверждений:

α. Элемент f таков, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 d(E_t f,\ f) < \infty.$$

β. Существует такой вектор h, что

$$f = Rh.$$

Докажем вначале, что из β следует α. Итак, пусть

$$f = Rh.$$

В таком случае

$$(E_t f,\ f) = (E_t Rh,\ Rh) = (RE_t h,\ Rh) = (R^* RE_t h,\ h) =$$

$$= \frac{1}{2i}(\{R - R^*\} E_t h,\ h) = \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{s-i} - \frac{1}{s+i}\right) d_s(E_s E_t h,\ h) =$$

$$= \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{1+s^2}\, d(E_s h,\ h),$$

а следовательно,

$$\int_{-M}^{M} t^2 d(E_t f,\ f) = \int_{-M}^{M} \frac{t^2}{1+t^2}\, d(E_t h,\ h) \leqslant \int_{-M}^{M} d(E_t h,\ h) \leqslant (h,\ h).$$

Это неравенство и показывает, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 d(E_t f,\ f) \leqslant (h,\ h) < \infty,$$

т. е. утверждение α доказано.

Теперь докажем, что из α следует β. Пусть α имеет место. Это значит, что вектор f принадлежит области определения оператора B, о котором шла речь в теореме n° 72.

Положим

$$h=(B-iI)\,f.$$

Утверждение β будет доказано, если мы проверим, что

$$R\,(B-iI)\,f=f.$$

Взяв произвольный вектор $g \in \mathrm{H}$, можем написать равенство

$$(R\,(B-iI)\,f,\ g)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{t-i}\,d\,(E_t\,(B-iI)\,f,\ g).$$

А с другой стороны,

$$((B-iI)\,f,\ E_t g)=\int_{-\infty}^{\infty}(s-i)\,d_s\,(E_s f,\ E_t g)=\int_{-\infty}^{t}(s-i)\,d\,(E_s f,\ g).$$

Поэтому

$$(R\,(B-iI)\,f,\ g)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t-i}{t-i}\,d\,(E_t f,\ g)=(f,\ g).$$

В силу произвольности g это и означает, что

$$R\,(B-iI)\,f=f. \tag{1}$$

Теорема 1. *Разложение единицы E_t $(-\infty \leqslant t \leqslant \infty)$ резольвенты R_z самосопряженного оператора A является разложением единицы оператора A, т. е., во-первых, D_A есть совокупность всех векторов f, для которых*

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 d\,(E_t f,\ f)<\infty,$$

и, во-вторых, для любого $f \in \mathrm{D}_A$

$$Af=\int_{-\infty}^{\infty} t\,dE_t f.$$

Доказательство. Построим оператор B, отвечающий в смысле теоремы n° 72 разложению единицы E_t резольвенты R_z оператора A. На основании леммы $\mathrm{D}_B=\mathrm{D}_A$, следовательно, остается доказать, что для любого $f \in \mathrm{D}_A$ имеет место равенство

$$Bf=Af. \tag{2}$$

Но в n° 49 было показано, что равенство

$$R_z g = 0$$

при каком-нибудь невещественном z возможно лишь в том случае, когда $g = 0$. Поэтому вместо (2) достаточно доказать, что

$$RBf = RAf$$

или

$$R(B - iI)f = R(A - iI)f.$$

Это равенство, несомненно, имеет место, так как левая часть равна f в силу (1), а правая равна f по определению резольвенты.

Интегральное представление оператора A, установленное теоремой 1, называется *спектральным разложением* этого оператора. Спектральное разложение ограниченного самосопряженного оператора было впервые получено Д. Гильбертом, а обобщение на неограниченные самосопряженные операторы принадлежит Нейману.

Теорема 2. *Разложение единицы E_t $(-\infty \leqslant t \leqslant \infty)$ принадлежит самосопряженному оператору A в том и только том случае, если:*

1°. *$E(\Delta)$ приводит A при любом интервале $\Delta \subset [-\infty, \infty]$.*

2°. *Из включения*

$$f \in (E_t - E_s)\,\mathrm{H} \qquad (-\infty \leqslant s < t \leqslant \infty)$$

всякий раз следует неравенство

$$s\,\|f\|^2 \leqslant (Af, f) \leqslant t\,\|f\|^2.$$

Доказательство. Необходимость условия 1° доказана выше для унитарных операторов. В нашем случае доказательство аналогично. Необходимость условия 2° вытекает из представления

$$(Af, f) = \int_s^t \tau\, d(E_\tau f, f),$$

верного, если $f \in (E_t - E_s)\,\mathrm{H}$.

Обратимся к доказательству достаточности указанных условий. Итак, пусть условия 1°, 2° выполнены. Возьмем какой-нибудь элемент $f \in \mathrm{D}_A$. В силу условия 1° области D_A принадлежит $(E_\beta - E_\alpha)f$, каковы бы ни были числа α, β. Произведя разбиение (мы считаем α, β конечными)

$$\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{n-1} < \alpha_n = \beta \qquad (3)$$

интервала $[\alpha, \beta]$, представим $(E_\beta - E_\alpha)f$ в виде

$$(E_\beta - E_\alpha)f = \sum_{k=0}^{n-1} (E_{\alpha_{k+1}} - E_{\alpha_k})f.$$

Отсюда на основании 1°

$$(E_\beta - E_\alpha) Af = \sum_{k=0}^{n-1} A (E_{\alpha_{k+1}} - E_{\alpha_k}) f. \tag{4}$$

Но из условия 2° вытекает, что при $f \in (E_t - E_s)$ H

$$-\frac{t-s}{2}(f, f) \leqslant \left(Af - \frac{s+t}{2} f, f\right) \leqslant \frac{t-s}{2}(f, f),$$

иначе говоря, часть самосопряженного оператора

$$A - \frac{s+t}{2} I,$$

лежащая в $(E_t - E_s)$ H, имеет норму $\leqslant \frac{t-s}{2}$. Поэтому, переписав (4) в виде

$$(E_\beta - E_\alpha) Af = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_k + \alpha_{k+1}}{2} (E_{\alpha_{k+1}} - E_{\alpha_k}) f + \\ + \sum_{k=0}^{n-1} \left(A - \frac{\alpha_k + \alpha_{k+1}}{2} I\right) (E_{\alpha_{k+1}} - E_{\alpha_k}) f, \tag{5}$$

и замечая, что

$$\left\| \sum_{k=0}^{n-1} \left(A - \frac{\alpha_k + \alpha_{k+1}}{2} I\right) (E_{\alpha_{k+1}} - E_{\alpha_k}) f \right\|^2 \leqslant \\ \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\alpha_{k+1} - \alpha_k}{2}\right)^2 \| (E_{\alpha_{k+1}} - E_{\alpha_k}) f \|^2 \leqslant \varepsilon^2 \| f \|^2,$$

где

$$\varepsilon = \max_k \frac{\alpha_{k+1} - \alpha_k}{2},$$

сделаем в (5) предельный переход, устремляя диаметр подразделения (3), т. е. число 2ε, к нулю. Мы получим тогда, что

$$(E_\beta - E_\alpha) Af = \int_\alpha^\beta t \, dE_t f$$

и

$$\| (E_\beta - E_\alpha) Af \|^2 = \int_\alpha^\beta t^2 d (E_t f, f).$$

Второе из этих соотношений показывает, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 \, d(E_t f, f) = \| Af \|^2 < \infty,$$

а первое дает

$$Af = \int_{-\infty}^{\infty} t \, dE_t f.$$

Тем самым теорема доказана.

При выводе интегрального представления резольвенты самосопряженного оператора (n° 74) было использовано лишь, что R_z ($\Im z \neq 0$) есть семейство определенных всюду в H операторов, удовлетворяющих следующим условиям:

1°. $\| R_z f \| \leqslant \frac{1}{|y|} \| f \|$ $(y = \Im z)$.

2°. $R_z^* = R_{\bar{z}}$.

3°. $R_{z'} - R_z = (z' - z) R_{z'} R_z$.

4°. Если $R_z f = 0$ при каком-нибудь z, то $f = 0$.

Теперь мы можем утверждать, что всякое семейство операторов, удовлетворяющее этим условиям, представляет резольвенту некоторого самосопряженного оператора *). Действительно, имея такое семейство операторов, мы можем найти его интегральное представление через некоторое разложение единицы E_t, а затем построить самосопряженный оператор A с этим разложением единицы. Резольвентой этого оператора A и является семейство R_z.

Заканчивая настоящий n°, приведем несколько простых фактов относительно самосопряженных операторов, которые являются непосредственными следствиями интегрального представления этих операторов:

1). Если A — самосопряженный оператор, для которого

$$\inf_{f \in D_A} \frac{(Af, f)}{(f, f)} = \alpha, \qquad \sup_{f \in D_A} \frac{(Af, f)}{(f, f)} = \beta,$$

то спектральное разложение оператора A имеет вид

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} t \, dE_t,$$

---

*) Следует заметить, что этот факт может быть установлен без использования интегрального представления семейства операторов R_z. Если опираться лишь на свойства 2°, 3°, 4°, то легко показать, что оператор A, определенный равенством $A = zI + R_z^{-1}$, не зависит от z и является самосопряженным, а его резольвента есть R_z. При этом обнаруживается, что свойство 1° является следствием остальных.

т. е.

$$E_t = 0 \quad (\text{при } t \leqslant \alpha),$$
$$E_t = I \quad (\text{при } t \geqslant \beta).$$

2). Для того чтобы некоторый вектор $f \in H$ допускал n-кратное применение самосопряженного оператора A, иначе говоря, чтобы имели смысл

$$A^k f = A(A^{k-1} f) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^{2n}\, d(E_t f, f) < \infty,$$

и если это неравенство выполнено, то

$$A^k f = \int_{-\infty}^{\infty} t^k\, dE_t f, \ \| A^k f \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^{2k}\, d(E_t f, f) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

3). Существует плотное в H линейное многообразие, на котором определены все натуральные степени самосопряженного оператора A. В качестве такого многообразия можно взять совокупность векторов вида $E(\Delta)\, h$, где h пробегает H, а Δ пробегает множество всех конечных интервалов числовой оси.

Доказательство этих утверждений предоставляем читателю.

76. О множествах нулевой операторной меры в сепарабельном пространстве. В этом пункте мы докажем предложение, которое было упомянуто в n° 72. Вот оно:

Теорема 1. *Если H — сепарабельное пространство Гильберта и E_t — некоторое разложение единицы на конечном или бесконечном интервале, то можно указать элемент $g \in H$ так, чтобы множество меры нуль относительно функции распределения $(E_t g, g)$ имело меру нуль относительно $(E_t h, h)$ при любом $h \in H$.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что достаточно рассмотреть случай разложения единицы на конечном интервале. Действительно, если E_t есть разложение единицы на оси $[-\infty, \infty]$, то $F_s = E_t$, где $t = \operatorname{tg} s$, будет разложением единицы на интервале $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. При этом, каков бы ни был элемент $h \in H$, любому точечному множеству оси $-\infty \leqslant t \leqslant \infty$, имеющему нулевую σ_1-меру, где $\sigma_1(t) = (E_t h, h)$, в силу соответствия $t = \operatorname{tg} s$ отвечает множество нулевой σ_2-меры на интервале $-\frac{\pi}{2} \leqslant s \leqslant \frac{\pi}{2}$, где

$\sigma_2(s) = (F_s h, h)$, и наоборот. Поэтому мы можем сразу предположить, что разложение единицы E_t задано на конечном интервале. Обозначим через A ограниченный самосопряженный оператор, принадлежащий разложению единицы E_t.

Так как пространство H сепарабельно, то существует счетное множество $\{g^{(i)}\}_1^\infty$, плотное в H. Положим $g_1 = g^{(1)}$ и введем подпространство

$$\mathrm{G}_1 = \{g_1, Ag_1, A^2g_1, \ldots\},$$

порождаемое векторами $g_1, Ag_1, A^2g_1, \ldots$ Оператор проектирования на G_1 обозначим P_1. Положим далее

$$g_2 = g^{(2)} - P_1 g^{(2)}$$

и введем подпространство

$$\mathrm{G}_2 = \{g_2, Ag_2, A^2g_2, \ldots\}$$

и ортопроектор P_2, проектирующий на G_2. Затем положим

$$g_3 = g^{(3)} - P_1 g^{(3)} - P_2 g^{(3)},$$

введем G_3 и P_3 и т. д. Таким образом, мы получим бесконечную последовательность векторов $\{g_k\}_1^\infty$, соответствующих подпространств $\{\mathrm{G}_k\}_1^\infty$ и ортопроекторов $\{P_k\}_1^\infty$.

Заметим, что подпространства G_k (а значит, и векторы g_k) попарно ортогональны, а каждый из ортопроекторов P_k перестановочен с оператором A. При доказательстве второго из этих утверждений используются теоремы 1 и 2 n° 45.

Теперь возьмем последовательность положительных чисел γ_k так, чтобы

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^2 \| g_k \|^2 < \infty,$$

и докажем, что в качестве требуемого вектора g можно взять

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k g_k. \tag{1}$$

Доказательство основано на следующих леммах:

1°. Если точечное множество $\mathfrak{M}$ имеет меру нуль относительно $(E_t f, f)$, то оно имеет меру нуль относительно $(E_t Cf, Cf)$, где C — любой ограниченный самосопряженный оператор, перестановочный с оператором A, а потому и с E_t.

2°. Если множество $\mathfrak{M}$ имеет меру нуль относительно $(E_t f', f')$ и относительно $(E_t f'', f'')$, то оно обладает тем же свойством относительно $(E_t f, f)$, где $f = f' + f''$.

3°. Если множество $\mathfrak{M}$ имеет меру нуль относительно каждой из функций $(E_t f_n, f_n)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ и если $\| h - f_n \| \to 0$ $(n \to \infty)$, то $\mathfrak{M}$ имеет меру нуль относительно $(E_t h, h)$.

Чтобы доказать леммы 1° и 2°, положим $F = E_\mu - E_\lambda$ $(\mu \geqslant \lambda)$. Тогда

$$(FCf, Cf) = (F^2Cf, Cf) = (CFf, CFf) \leqslant \| C \|^2 (Ff, Ff) = \| C \|^2 (Ff, f),$$

откуда вытекает справедливость леммы 1°. Далее

$$(F(f' + f''), f' + f'') = (F(f' + f''), F(f' + f'')) \leqslant$$
$$\leqslant \{(Ff', Ff')^{\frac{1}{2}} + (Ff'', Ff'')^{\frac{1}{2}}\}^2 \leqslant 2(Ff', f') + 2(Ff'', f'').$$

Из этого неравенства следует справедливость леммы 2°.

Для доказательства леммы 3° заметим, что функция $\psi_n(t) = (E_t(h - f_n), h - f_n)$ при возрастании t не убывает и всегда $\leqslant \| h - f_n \|^2$. Возьмем n столь большим, чтобы $\| h - f_n \|^2 \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$, и заключим $\mathfrak{M}$ в систему интервалов, на которой изменение функции $(E_t f_n, f_n)$ меньше, чем $\frac{\varepsilon}{4}$. Тогда на этой системе интервалов изменение функции $(E_t h, h)$ будет меньше ε. Тем самым лемма 3° также доказана.

Теперь обратимся к доказательству теоремы.

Пусть некоторое множество $\mathfrak{M}$ имеет меру нуль относительно функции $(E_t g, g)$, где g — построенный нами вектор (1). Пусть, далее, h — произвольный вектор из H. Мы хотим доказать, что $\mathfrak{M}$ имеет меру нуль относительно $(E_t h, h)$. С этой целью заметим, что элемент h можно представить в виде

$$h = \sum_{k=1}^{\infty} h_k, \tag{2}$$

где $h_k = P_k h$. Действительно, вектор

$$h_1 + h_2 + \ldots + h_n$$

представляет проекцию вектора h на подпространство

$$\mathrm{G}_1 \oplus \mathrm{G}_2 \oplus \ldots \oplus \mathrm{G}_n,$$

а каждый из векторов $g^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ принадлежит этому подпространству. Поэтому

$$\| h - h_1 - h_2 - \ldots - h_n \| \leqslant \| h - g^{(k)} \| \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

А так как множество $\{g^{(k)}\}_1^\infty$ плотно в H и, значит, при любом $\varepsilon > 0$ можно найти такое $k = k_\varepsilon$, что $\| h - g^{(k)} \| < \varepsilon$, то при $n \geqslant k_\varepsilon$

$$\| h - h_1 - h_2 - \ldots - h_n \| < \varepsilon.$$

Следовательно, представление (2) доказано.

На основании лемм 2° и 3° поэтому достаточно доказать, что множество $\mathfrak{M}$ имеет меру нуль относительно функции $(E_t h_k,\ h_k)$ при любом натуральном k. Это мы и докажем. Для этого прежде всего возьмем равенства

$$g_n = \frac{1}{\gamma_n} P_n g, \qquad AP_n = P_n A,$$

из которых по лемме 1° следует, что множество $\mathfrak{M}$ имеет меру нуль относительно функции $(E_t g_n,\ g_n)$, и на основании той же леммы 1° множество $\mathfrak{M}$ имеет меру нуль относительно каждой из функций $(E_t A^r g_n,\ A^r g_n)$ $(r = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$. Поэтому в силу лемм 2° и 3° множество $\mathfrak{M}$ имеет меру нуль относительно функции $(E_t f,\ f)$, каков бы ни был элемент $f \in \mathrm{G}_n$. Но в таком случае множество $\mathfrak{M}$ имеет меру нуль относительно $(E_t h_k,\ h_k)$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, и доказательство закончено, так как n можно взять сколь угодно большим.

Следующее предложение, которое будет использовано далее в n° 91, примыкает к теореме 1.

Т е о р е м а 2. *Пусть* H — *сепарабельное пространство Гильберта,* E_t — *некоторое разложение единицы на конечном интервале и* A — *принадлежащий ему самосопряженный оператор. Если* T — *линейный замкнутый оператор с плотной в* H *областью определения* D_T, *перестановочный с каждым ограниченным самосопряженным оператором, который сам перестановочен с оператором* A, *то можно указать элемент* $g \in \mathrm{D}_T$ *так, чтобы множество меры нуль относительно функции распределения* $(E_t g,\ g)$ *имело меру нуль относительно* $(E_t h,\ h)$ *при любом* $h \in$ H.

Д о к а з а т е л ь с т в о проводится аналогично доказательству теоремы 1. Отметим лишь, что теперь плотное в H счетное множество векторов $\{g^{(i)}\}_1^\infty$ нужно выбрать из элементов, принадлежащих D_T. Тогда векторы g_k $(k = 1, 2, 3,\ \ldots)$, определяемые, как и в предыдущем доказательстве, по оператору A, все будут принадлежать D_T, так как из перестановочности операторов P_j и A следует перестановочность P_j и T и включение $P_j g^{(i)} \in \mathrm{D}_T$ $(j < i;\ i,\ j = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$. Поэтому вектор

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k g_k,$$

где числа γ_k положительны и выбраны так, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^2 \{\|g_k\|^2 + \|Tg_k\|^2\} < \infty,$$

также будет принадлежать D_T.

77. Функции от унитарного оператора. Отправляясь от простейших понятий и определений, мы можем, так же как и в линейной алгебре, ввести всевозможные многочлены от оператора, заданного во всем гильбертовом пространстве. Наибольшее значение для нас имеют случаи, когда в качестве исходного оператора взят ограниченный самосопряженный оператор A или унитарный оператор U. В этом последнем случае, которому *) посвящен настоящий пункт, многочлены могут содержать также и отрицательные степени оператора.

Если

$$P(e^{it}) = \sum_{k=-m}^{n} c_k e^{ikt}$$

— произвольный «квазиполином» от e^{it}, то мы полагаем

$$P(U) = \sum_{k=-m}^{n} c_k U^k,$$

устанавливая, таким образом, некоторое соответствие между тригонометрическими суммами от t и функциями от оператора U. Это соответствие обладает следующими свойствами:

1°. Если

$$P_3(e^{it}) = P_1(e^{it}) + P_2(e^{it}), \quad P_4(e^{it}) = P_1(e^{it})\, P_2(e^{it}),$$

то

$$P_3(U) = P_1(U) + P_2(U), \quad P_4(U) = P_1(U)\, P_2(U).$$

2°. Если

$$P(e^{it}) = \sum_{k=-m}^{n} c_k e^{ikt} \tag{1}$$

и $T = P(U)$, то

$$T^* = \sum_{k=-m}^{n} \bar{c}_k U^{-k} = \bar{P}(U^{-1}),$$

*) С помощью применяемого здесь метода, при весьма незначительных изменениях, трактуется и тот случай, когда исходным является ограниченный самосопряженный оператор, а не унитарный.

так что оператор $P(U)$ будет самосопряженным в том и только том случае, когда $m=n$ и $c_{-k}=\overline{c}_k$, т. е. когда квазиполином (1) веществен.

3°. Если квазиполином (1) удовлетворяет неравенству

$$P(e^{it})\geqslant 0 \qquad (0\leqslant t\leqslant 2\pi), \tag{2}$$

то при любом $f\in \mathrm{H}$

$$(P(U)f,\ f)\geqslant 0,$$

т. е. оператор $P(U)$ позитивен.

В доказательстве нуждается лишь последнее утверждение. Приведем его. С этой целью воспользуемся тем, что квазиполином $P(e^{it})$, удовлетворяющий неравенству (2), можно представить в виде *)

$$P(e^{it})=\Big|\sum_{k=0}^{n}\xi_k e^{ikt}\Big|^2=\overline{Q}(e^{-it})\,Q(e^{it}),$$

где

$$Q(e^{it})=\sum_{k=0}^{n}\xi_k e^{ikt}.$$

Поэтому

$$P(U)=T^*T,$$

где

$$T=Q(U).$$

Следовательно, при любом $f\in \mathrm{H}$

$$(P(U)f,\ f)=(T^*Tf,\ f)=(Tf,\ Tf)\geqslant 0.$$

Займемся теперь распространением рассматриваемого соответствия на функции, отличные от квазиполиномов. В настоящем пункте это будет сделано для функций довольно узкого класса. Общей же постановке вопроса будет посвящен один из дальнейших пунктов.

Обозначим буквой **K** класс, который состоит из всех непрерывных на единичной окружности вещественных функций; мы будем их обозначать $\varphi(e^{it})$, а также из всех кусочно-непрерывных функций $\psi(e^{it})$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$, которые являются пределами монотонно убывающих, сходящихся в каждой точке последовательностей $\{\varphi_n(e^{it})\}_1^\infty$.

---

*) Чтобы получить это представление, нужно принять во внимание, что в силу вещественности функции $P(z)$ на окружности $|z|=1$ она удовлетворяет равенству

$$\overline{P(z)}=\overline{P}\left(\frac{1}{z}\right)$$

и ее корни расположены симметрично относительно окружности $|z|=1$.

Лемма. *Для всякой функции $\psi(e^{it}) \in \mathbf{K}$ можно построить бесконечную последовательность квазиполиномов $\{P_n(e^{it})\}_1^\infty$, монотонно убывающую и сходящуюся в каждой точке к функции $\psi(e^{it})$.*

Доказательство. По определению класса $\mathbf{K}$ существует монотонно убывающая последовательность непрерывных функций $\{\varphi_n(e^{it})\}_1^\infty \subset \mathbf{K}$, сходящаяся в каждой точке к функции $\psi(e^{it})$. При каждом натуральном n построим в согласии с теоремой Вейерштрасса вещественный квазиполином $P_n(e^{it})$, удовлетворяющий для всех t неравенству

$$\left| P_n(e^{it}) - \left[\varphi_n(e^{it}) + \frac{3}{2^{n+2}} \right] \right| \leqslant \frac{1}{2^{n+2}}.$$

Из этого неравенства следует, что в каждой точке t

$$\frac{1}{2^{n+1}} \leqslant P_n(e^{it}) - \varphi_n(e^{it}) \leqslant \frac{1}{2^n}, \tag{3}$$

и, значит, последовательность $\{P_n(e^{it})\}_1^\infty$ сходится к $\psi(e^{it})$ в каждой точке. С другой стороны, благодаря неравенству (3)

$$P_{n+1}(e^{it}) \leqslant \varphi_{n+1}(e^{it}) + \frac{1}{2^{n+1}} \leqslant \varphi_n(e^{it}) + \frac{1}{2^{n+1}} \leqslant P_n(e^{it}), \tag{4}$$

и лемма доказана.

Теперь построим операторы $P_n(U)$. Они самосопряженные, имеют общую нижнюю грань

$$\inf \psi(e^{it})$$

и образуют монотонно убывающую последовательность. Согласно теореме 3 n° 33 эта последовательность сильно сходится к некоторому оператору S, который, по определению, примем за $\psi(U)$. Нужно только доказать, что оператор S не зависит от выбора последовательности квазиполиномов, аппроксимирующих указанным в лемме способом функцию $\psi(e^{it})$, а зависит лишь от этой функции. Для доказательства допустим, что, кроме последовательности $\{P_n(e^{it})\}_1^\infty$, есть вторая монотонно убывающая последовательность квазиполиномов $\{Q_n(e^{it})\}_1^\infty$, сходящаяся в каждой точке к функции $\psi(e^{it})$.

Возьмем произвольное натуральное m и рассмотрим сумму

$$P_m(e^{it}) + \frac{1}{m}.$$

Для каждого t, очевидно, найдется такое N, при котором

$$Q_N(e^{it}) < P_m(e^{it}) + \frac{1}{m}.$$

В силу непрерывности обеих функций $P_m(e^{it})$, $Q_N(e^{it})$ это неравенство будет иметь место не только в точке e^{it}, но и в некоторой дуговой окрестности этой точки. Ясно, что во всей этой окрестности будет и подавно выполнено неравенство

$$Q_n(e^{it}) < P_m(e^{it}) + \frac{1}{m} \tag{5}$$

при любом $n \geqslant N$. По лемме Бореля, окружность можно покрыть конечным числом таких окрестностей и тогда, беря наибольшее из отвечающих им чисел N, мы найдем, что для всех n, превосходящих его, неравенство (5) будет выполнено во всех точках окружности. Аналогично найдем, что при любом натуральном m всюду на окружности будет иметь место неравенство

$$P_n(e^{it}) < Q_m(e^{it}) + \frac{1}{m},$$

если только n достаточно велико. Этим неравенствам между квазиполиномами соответствуют следующие неравенства между операторами:

$$Q_n(U) < P_m(U) + \frac{1}{m} I, \qquad P_n(U) < Q_m(U) + \frac{1}{m} I. \tag{6}$$

Полагая

$$\lim_{n \to \infty} Q_n(U) = T, \qquad \lim_{n \to \infty} P_n(U) = S$$

и фиксируя в неравенствах (6) число m, найдем, что

$$T \leqslant P_m(U) + \frac{1}{m} I, \qquad S \leqslant Q_m(U) + \frac{1}{m} I.$$

Увеличивая теперь m, получим, что

$$T \leqslant S, \qquad S \leqslant T,$$

откуда и следует наше утверждение.

Таким образом, соответствие между функциями и операторами распространено на весь класс **K**. Легко видеть, что отмеченные выше для квазиполиномов свойства этого соответствия переносятся на весь класс **K**. А именно, если $\psi_1(e^{it}), \psi_2(e^{it}) \in \mathbf{K}$ и

$$\psi_3(e^{it}) = \psi_1(e^{it}) + \psi_2(e^{it}), \ \psi_4(e^{it}) = \psi_1(e^{it})\,\psi_2(e^{it}),$$

то

$$\psi_3(U) = \psi_1(U) + \psi_2(U), \ \psi_4(U) = \psi_1(U)\,\psi_2(U),$$

и если

$$\psi_1(e^{it}) \geqslant \psi_2(e^{it}) \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi),$$

то

$$\psi_1(U) \geqslant \psi_2(U).$$

Теперь введем линейную оболочку $\hat{\mathbf{K}}$ множества $\mathbf{K}$ и распространим соответствие на нее, полагая

$$\psi(U)=\sum_{k=1}^{m} c_k\psi_k(U),$$

если

$$\psi(e^{it})=\sum_{k=1}^{m} c_k\psi_k(e^{it}),$$

каковы бы ни были функции $\psi_k(e^{it})\in\mathbf{K}$ и комплексные числа c_k. Однако здесь нужно убедиться в том, что оператор $\psi(U)$ при этом определяется по функции $\psi(e^{it})$ однозначно. Последний факт достаточно установить для случая вещественных коэффициентов c_k, так как общий случай сводится к этому путем выделения самосопряженной части оператора $\psi(U)$ и вещественной части функции $\psi(e^{it})$. (Напомним, что функции $\psi_k(e^{it})$ вещественны, а потому операторы $\psi_k(U)$ самосопряжены.) Итак, пусть c_k вещественны. Группируя отдельно слагаемые с положительными c_k и отдельно с отрицательными c_k, мы сведем вопрос к следующему: пусть функция $\omega(e^{it})$ представлена двумя способами в виде разности двух функций из $\mathbf{K}$, а именно

$$\omega(e^{it})=\psi_1(e^{it})-\psi_2(e^{it}),\quad \omega(e^{it})=\psi_3(e^{it})-\psi_4(e^{it});$$

будет ли иметь место равенство

$$\psi_1(U)-\psi_2(U)=\psi_3(U)-\psi_4(U)? \tag{7}$$

Ответ на этот вопрос положителен, так как из тождества

$$\psi_1(e^{it})-\psi_2(e^{it})=\psi_3(e^{it})-\psi_4(e^{it})$$

следует тождество

$$\psi_1(e^{it})+\psi_4(e^{it})=\psi_2(e^{it})+\psi_3(e^{it}),$$

обе части которого принадлежат $\mathbf{K}$, в силу чего

$$\psi_1(U)+\psi_4(U)=\psi_2(U)+\psi_3(U).$$

Из этого равенства уже следует равенство (7).

Аналогичным путем доказывается, что свойство монотонности построенного соответствия справедливо не только в $\mathbf{K}$, а и в $\hat{\mathbf{K}}$. Под этим мы понимаем, что если $\omega_1(e^{it}),\ \omega_2(e^{it})\in\hat{\mathbf{K}}$ и

$$\omega_1(e^{it})\geqslant\omega_2(e^{it})\qquad(0\leqslant t\leqslant 2\pi),$$

то

$$\omega_1(U)\geqslant\omega_2(U).$$

Замечание. Унитарный оператор U перестановочен со всеми функциями $\psi(U)$, $\psi(e^{it}) \in \hat{K}$. Действительно, равенство $U\psi(U) = \psi(U)U$ является прямым следствием тождества $z\psi(z) = \psi(z)z$ $(z = e^{it})$.

78. Прямой вывод спектрального разложения унитарного оператора. Введем при любом λ из интервала $0 < \lambda \leqslant 2\pi$ функцию

$$\psi_\lambda(e^{it}) = \begin{cases} 1 & (0 \leqslant t < \lambda), \\ 0 & (\lambda \leqslant t < 2\pi), \\ 1 & (t = 2\pi) \end{cases}$$

и положим еще

$$\psi_0(e^{it}) \equiv 0 \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

Эта функция принадлежит классу K n° 77. Поэтому мы можем сопоставить ей оператор

$$E_\lambda = \psi_\lambda(U) \qquad (E_0 = 0, \ E_{2\pi} = I).$$

Так как E_λ — самосопряженный оператор и $E_\lambda^2 = E$, то это проектирующий оператор. Если $0 \leqslant \lambda < \mu \leqslant 2\pi$, то

$$\psi_\mu(e^{it}) \geqslant \psi_\lambda(e^{it}) \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi),$$

поэтому

$$E_\lambda \leqslant E_\mu,$$

т. е. мы имеем монотонную (неубывающую) последовательность ортопроекторов. Поскольку, далее *),

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \psi_{\lambda-\varepsilon}(e^{it}) = \psi_\lambda(e^{it}) \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

при любом $\lambda \in (0, 2\pi]$, то

$$E_{\lambda-0} = E_\lambda \qquad (0 < \lambda \leqslant 2\pi).$$

Таким образом, E_λ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 2\pi)$ представляет некоторое разложение единицы. Остается доказать, что оно порождает спектральное разложение рассматриваемого унитарного оператора U. С этой целью заметим, что при фиксированном целом r, любом $t \in [0, 2\pi]$ и любом подразделении

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = 2\pi$$

---

*) Здесь и в дальнейшем запись $x \downarrow a$ означает, что $x \to a$, $x > a$. Аналогично $x \uparrow b$ означает, что $x \to b$, $x < b$.

справедливо неравенство

$$\left| e^{irt} - \sum_{k=1}^{n} e^{irt_{k-1}} [\psi_{t_k}(e^{it}) - \psi_{t_{k-1}}(e^{it})] \right| \leqslant |r| \max_s (t_s - t_{s-1}).$$

Действительно, если $t_{s-1} \leqslant t < t_s$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$, то левая часть написанного неравенства есть

$$|e^{irt} - e^{irt_{s-1}}| = 2 \left| \sin \frac{r(t - t_{s-1})}{2} \right| \leqslant |r| \cdot |t_s - t_{s-1}|.$$

Если $t = t_s$ при $s = n$, то неравенство также справедливо.

Если подразделение имеет достаточно малый диаметр, то мы получим, что всюду в интервале $[0, 2\pi]$

$$\overline{\left\{ e^{irt} - \sum_{k=1}^{n} e^{irt_{k-1}} [\psi_{t_k}(e^{it}) - \psi_{t_{k-1}}(e^{it})] \right\}} \times$$
$$\times \left\{ e^{irt} - \sum_{k=1}^{n} e^{irt_{k-1}} [\psi_{t_k}(e^{it}) - \psi_{t_{k-1}}(e^{it})] \right\} \leqslant \varepsilon^2.$$

Переходя к операторам, находим, что

$$0 \leqslant \left\{ U^r - \sum_{k=1}^{n} e^{irt_{k-1}} (E_{t_k} - E_{t_{k-1}}) \right\}^* \left\{ U^r - \sum_{k=1}^{n} e^{irt_{k-1}} (E_{t_k} - E_{t_{k-1}}) \right\} \leqslant \varepsilon^2 I$$

или

$$\left\| U^r - \sum_{k=1}^{n} e^{irt_{k-1}} (E_{t_k} - E_{t_{k-1}}) \right\| \leqslant \varepsilon,$$

откуда в пределе получаем

$$U^r = \int_0^{2\pi} e^{irt} \, dE_t \qquad (\pm r = 0, 1, 2, \ldots),$$

а это при $r = 1$ и есть спектральное разложение оператора U.

Так как $E_\lambda = \psi_\lambda(U)$, то из замечания в конце n° 77 следует перестановочность оператора U со своим разложением единицы.

Заметим, что аналогичным методом можно было бы вывести спектральное разложение ограниченного самосопряженного оператора. Однако в этом нет надобности, так как, имея спектральное разложение унитарного оператора, можно получить спектральное разложение любого самосопряженного оператора с помощью так называемого преобразования Кэли, что и будет нами сделано в n° 79.

В качестве приложения наших построений докажем следующую теорему: *пусть последовательность унитарных операторов* $\{U_n\}_1^\infty$ *сильно сходится к оператору* (очевидно, унитарному) U, *для которого точка* 1 *не является собственным значением; в таком случае* *при любом* λ $(0 < \lambda < 2\pi)$, *для которого* $e^{i\lambda}$ *не есть собственное значение оператора* U, *имеет место в сильном смысле соотношение*

$$E_\lambda^{(n)} \to E_\lambda,$$

где $E_t^{(n)}$ — *спектральная функция оператора* U_n, *а* E_t — *спектральная функция оператора* U.

В самом деле, рассмотрим непрерывную на единичной окружности $\zeta = e^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, функцию

$$\omega(e^{it}) = \psi_\lambda(e^{it})(e^{it} - e^{i\lambda})(e^{it} - 1).$$

Положим

$$B_n = (U_n - e^{i\lambda}I)(U_n - I),$$
$$B = (U - e^{i\lambda}I)(U - I).$$

Так как по условию теоремы имеют место в сильном смысле соотношения

$$\lim_{n\to\infty} \omega(U_n) = \omega(U) \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} B_n = B$$

и так как

$$\psi_\lambda(U) = E_\lambda, \qquad \psi_\lambda(U_n) = E_\lambda^{(n)},$$

то при любом $f \in \mathrm{H}$

$$\lim_{n\to\infty} E_\lambda^{(n)} B_n f = E_\lambda B f.$$

С другой стороны,

$$\| E_\lambda^{(n)} B f - E_\lambda B f \| \leqslant \| E_\lambda^{(n)} (B - B_n) f \| + \| E_\lambda^{(n)} B_n f - E_\lambda B f \|.$$

Поэтому мы заключаем, что

$$\lim_{n\to\infty} E_\lambda^{(n)} B f = E_\lambda B f. \tag{1}$$

На основании условия теоремы оператор B^{-1} определен на плотном в H многообразии Δ_B. Для любого g из этого многообразия найдем в силу (1)

$$\lim_{n\to\infty} E_\lambda^{(n)} g = \lim_{n\to\infty} E_\lambda^{(n)} B B^{-1} g = E_\lambda B B^{-1} g = E_\lambda g.$$

Окончание доказательства теоремы очевидно.

79. Преобразование Кэли. Пусть A — замкнутый симметрический оператор, а z — какое-нибудь невещественное число; пусть h

пробегает D_A и пусть

$$(A-\bar{z}I)h=f, \tag{1}$$

$$(A-zI)h=g. \tag{2}$$

Вектор f будет пробегать некоторое линейное многообразие F, а вектор g — некоторое линейное многообразие G. Докажем, что F и G замкнуты и, следовательно, являются подпространствами в H. С этой целью положим, что

$$f_n=(A-\bar{z}I)h_n \qquad (n=1, 2, 3, \ldots)$$

и

$$f_n \to f. \tag{3}$$

Если $z=x+iy$, $y \neq 0$, то

$$f_n=(A-xI)h_n+iyh_n$$

и, значит,

$$\|f_n-f_m\|^2=\|(A-xI)(h_n-h_m)\|^2+y^2\|h_n-h_m\|^2.$$

Поэтому из (3) следует, что существуют

$$\lim_{n\to\infty}(A-xI)h_n \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty}h_n.$$

Обозначая второй из этих пределов через h, мы заключаем на основании замкнутости оператора A, что

$$f=(A-xI)h+iyh=(A-\bar{z}I)h.$$

Следовательно, $f \in$ F, т. е. многообразие F замкнуто. Аналогично доказывается замкнутость G.

С помощью соотношения (1) многообразие D_A отображается взаимно однозначно на F, а с помощью (2) на G. Поэтому для любого $f \in$ F найдется один и только один элемент $h \in D_A$, удовлетворяющий соотношению (1). Найдя этот элемент h, определим по формуле (2) элемент g. Таким образом, каждому элементу $f \in$ F однозначно сопоставляется элемент $g \in$ G, т. е. мы имеем некоторый оператор V с областью определения $D_V =$ F и областью значений $\Delta_V =$ G:

$$g=Vf.$$

Легко видеть, что V есть оператор изометрический. Действительно, он линеен и

$$\|f\|^2=\|(A-xI)h\|^2+y^2\|h\|^2=\|g\|^2.$$

Изометрический оператор V называют *преобразованием Кэли* симметрического оператора A.

Мы будем полагать $z = i$. Тогда уравнения (1) и (2) примут вид

$$(A+iI)\,h=f, \tag{1'}$$

$$(A-iI)\,h=g=Vf. \tag{2'}$$

Из этих соотношений следует, что

$$h=\frac{1}{2i}(f-g)=\frac{1}{2i}(I-V)\,f,$$

$$Ah=\frac{1}{2}(f+g)=\frac{1}{2}(I+V)\,f.$$

Поэтому

$$Ah=i\,(I+V)\,(I-V)^{-1}h. \tag{4}$$

Так выражается симметрический оператор A через его преобразование Кэли V.

Заметим, что преобразование Кэли самосопряженного оператора есть оператор унитарный. Следующая теорема показывает, что справедливо и обратное. Попутно получается новый вывод спектрального разложения самосопряженного оператора, установленного в n° 75.

Теорема 1. *Пусть преобразование Кэли симметрического оператора A есть унитарный оператор U с разложением единицы F_s $(0\leqslant s\leqslant 2\pi)$. В таком случае оператор A самосопряжен, и ему принадлежит разложение единицы $E_t = F_s$, $t = -\mathrm{ctg}\,\frac{s}{2}$. Это значит, что область определения D_A оператора A есть совокупность всех тех векторов h, для которых*

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2\,d\,(E_t h,\,h)<\infty,$$

и оператор A допускает представление

$$Ah=\int_{-\infty}^{\infty} t\,dE_t h.$$

Доказательство. Пусть $h\in D_A$, а f — тот элемент, который отвечает элементу h в силу отображения (1′), т. е.

$$h=\frac{1}{2i}(I-U)\,f.$$

В таком случае

$$F_s h=\frac{1}{2i}(I-U)\,F_s f=\frac{1}{2i}\int_0^{2\pi}(1-e^{i\tau})\,d_\tau\,(F_\tau F_s f)=\frac{1}{2i}\int_0^{s}(1-e^{i\tau})\,dF_\tau f \tag{5}$$

и

$$(F_s h, h) = \frac{1}{4}(\{I-U\}F_s f, \{I-U\}f) =$$
$$= \frac{1}{4}(\{I-U^{-1}\}\{I-U\}F_s f, f) = \frac{1}{4}(\{2I-U-U^{-1}\}F_s f, f) =$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(2-e^{i\tau}-e^{-i\tau})\,d_\tau(F_\tau F_s f, f) = \int_0^s \sin^2\frac{\tau}{2}\,d(F_\tau f, f). \qquad (6)$$

С другой стороны,

$$Ah = \frac{1}{2}(I+U)f = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+e^{is})\,dF_s f \qquad (7)$$

и

$$\|Ah\|^2 = \frac{1}{4}(\{I+U\}f, \{I+U\}f) = \frac{1}{4}(\{2I+U+U^{-1}\}f, f) =$$
$$= \int_0^{2\pi}\cos^2\frac{s}{2}\,d(F_s f, f). \qquad (8)$$

Сравнение (6) и (8) показывает, что

$$\|Ah\|^2 = \int_0^{2\pi}\operatorname{ctg}^2\frac{s}{2}\sin^2\frac{s}{2}\,d(F_s f, f) = \int_0^{2\pi}\operatorname{ctg}^2\frac{s}{2}\,d(F_s h, h).$$

Равным образом из (5) и (7) следует, что при любом $h' \in \mathrm{H}$

$$(Ah, h') = -\int_0^{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{s}{2}\,d(F_s h, h').$$

Положим теперь

$$t = -\operatorname{ctg}\frac{s}{2}, \qquad E_t = F_s.$$

Тогда E_t также является разложением единицы, но в интервале $[-\infty, \infty]$, а полученный нами результат состоит в том, что из включения $h \in \mathrm{D}_A$ следует неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2\,d(E_t h, h) < \infty \qquad (9)$$

и представление

$$Ah = \int_{-\infty}^{\infty} t\,dE_t h. \qquad (10)$$

Теперь покажем, что если имеет место неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2\, d(E_t h, h) = \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg}^2 \frac{s}{2}\, d(F_s h, h) < \infty, \tag{11}$$

то $h \in D_A$.

Итак, пусть (11) имеет место. В таком случае на элементе h определен оператор

$$-\int_0^{2\pi} e^{-\frac{is}{2}} \frac{1}{\sin \frac{s}{2}}\, dF_s.$$

Положим

$$-\int_0^{2\pi} e^{-\frac{is}{2}} \frac{1}{\sin \frac{s}{2}}\, dF_s h = f.$$

Тогда при любом $h' \in H$

$$-\int_0^{2\pi} e^{-\frac{is}{2}} \frac{1}{\sin \frac{s}{2}}\, d(F_s h, h') = (f, h').$$

Беря

$$h' = -\frac{1}{2i}(I - U^{-1}) f',$$

найдем

$$\left(\frac{1}{2i}\{I - U\} f, f'\right) = (f, h') = -\frac{1}{2i} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-\frac{is}{2}}}{\sin \frac{s}{2}}\, d(F_s h, \{I - U^{-1}\} f') =$$

$$= -\frac{1}{2i} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-\frac{is}{2}}}{\sin \frac{s}{2}} (1 - e^{is})\, d(F_s h, f') = \int_0^{2\pi} d(F_s h, f') = (h, f').$$

В силу произвольности элемента f' это означает, что

$$h = \frac{1}{2i}(I - U) f;$$

иными словами, элемент h допускает представление, из которого следует, что он принадлежит D_A.

Таким образом, спектральное разложение оператора A и область определения D_A определяются разложением единицы E_t по формулам (10) и (9), а потому в силу теоремы конца n° 72 оператор A самосопряжен.

Теорема 1 полностью доказана.

Теорема 2. *Пусть $\{A_n\}_1^\infty$ — последовательность произвольных самосопряженных операторов, для которой на некотором плотном множестве существует в сильном смысле $\lim_{n\to\infty} A_n$, и замыкание этого предельного оператора есть самосопряженный оператор A с разложением единицы E_t. В таком случае в каждой точке μ, которая не является собственным значением оператора A, имеет место в сильном смысле соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} E_\mu^{(n)} = E_\mu,$$

где $E_\mu^{(n)}$ — разложение единицы оператора A_n $(n = 1, 2, \ldots)$.

Доказательство. Перейдем от рассматриваемых самосопряженных операторов к их преобразованиям Кэли — унитарным операторам

$$U_n = (A_n - iI)(A_n + iI)^{-1}, \qquad U = (A - iI)(A + iI)^{-1}.$$

Разложения единицы операторов U_n, U получаются по формулам

$$F_s^{(n)} = E_t^{(n)}, \quad F_s = E_t, \quad t = -\operatorname{ctg}\frac{s}{2}.$$

Точка $e^{i\lambda} = \frac{\mu - i}{\mu + i}$ в силу условия теоремы не будет собственным значением оператора U, а точка 1 не является собственным значением ни одного из операторов U_n, U по свойству преобразования Кэли. Поэтому применима теорема конца n° 78, в силу которой в сильном смысле

$$\lim_{n\to\infty} F_\lambda^{(n)} = F_\lambda,$$

а значит, в том же смысле

$$\lim_{n\to\infty} E_\mu^{(n)} = E_\mu.$$

Теорема доказана.

80. О перестановочных операторах. В n° 17 было дано определение перестановочности двух операторов S и T, из которых по крайней мере один (пусть это будет S) задан всюду в H. В силу этого определения перестановочность означает, что из включения $f \in D_T$ следует включение $Sf \in D_T$ и равенство

$$STf = TSf.$$

Теперь мы примем в качестве оператора T некоторый самосопряженный оператор A. Оператор же S по-прежнему будет произвольным, определенным всюду в H ограниченным оператором.

Теорема. *Перестановочность операторов S и A эквивалентна перестановочности оператора S с разложением единицы E_t оператора A при любом t.*

Доказательство. Пусть операторы S и A перестановочны. Тогда при любом невещественном z и любом $f \in \mathrm{D}_A$

$$S(A-zI)f=(A-zI)Sf.$$

Вектор f пробегает D_A, если он имеет вид $R_z h$, где h пробегает H, а R_z есть резольвента оператора A. Таким образом, для любого $h \in \mathrm{H}$

$$S(A-zI)R_z h=(A-zI)SR_z h,$$

откуда

$$Sh=(A-zI)SR_z h$$

и, значит,

$$R_z Sh=SR_z h.$$

В силу интегрального представления резольвенты из этого неравенства вытекает при любом $g \in \mathrm{H}$ следующее соотношение:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t-z}\, d(E_t Sh, g)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t-z}\, d(SE_t h, g).$$

Так как это соотношение имеет место для любого невещественного z, то в силу уже применявшейся аргументации (см. n° 74) при любом t

$$E_t S=SE_t.$$

Рассматривая написанные нами формулы в обратном порядке, завершим доказательство теоремы.

81. Спектральное разложение ограниченных нормальных операторов. Пусть T — ограниченный нормальный оператор. Введем его вещественную и мнимую компоненты

$$A=\frac{1}{2}(T+T^*), \qquad B=\frac{1}{2i}(T-T^*),$$

которые являются перестановочными, ограниченными, самосопряженными операторами. Таким образом,

$$T=A+iB. \tag{1}$$

Пусть

$$A=\int\limits_a^b s\,dE_s, \qquad B=\int\limits_c^d t\,dF_t$$

— интегральные представления операторов A, B. Согласно условию

$$E_s F_t = F_t E_s \qquad (a \leqslant s \leqslant b,\ c \leqslant t \leqslant d).$$

Это соотношение показывает, что зависящий от двух параметров оператор

$$\mathscr{E}_{st} = E_s F_t$$

является (см. теорему 1 n° 37) проектирующим оператором (ортопроектором). Каждому прямоугольнику $Q = \Delta' \times \Delta''$, где $\Delta' \subset [a, b]$, $\Delta'' \subset [c, d]$, мы можем сопоставить оператор

$$E(\Delta') F(\Delta'') = \mathscr{E}(Q),$$

который, очевидно, также является ортопроектором. Если мы обозначим буквой R прямоугольник, определяемый неравенствами $a \leqslant s \leqslant b$, $c \leqslant t \leqslant d$, то при любом $f \in \mathrm{H}$ сможем написать следующие представления:

$$Af = \int_a^b s\, dE_s f = \int_a^b s\, dE_s \int_c^d dF_t f = \iint_R s\, d\mathscr{E}_{st} f,$$

$$Bf = \int_c^d t\, dF_t f = \int_c^d t\, dF_t \int_a^b dE_s f = \iint_R t\, d\mathscr{E}_{st} f.$$

Подставляя эти выражения в (1), получаем следующее интегральное представление для Tf:

$$Tf = \iint_R (s + it)\, d\mathscr{E}_{st} f. \tag{2}$$

Таким образом, спектральное разложение нормального оператора получено. Из этого разложения (2), между прочим, вытекает, что

$$\| Tf \|^2 = \iint_R (s^2 + t^2)\, d(\mathscr{E}_{st} f, f).$$

Обоснование выполненных выше преобразований не представляет труда, если определять кратный интеграл (2) как сильный предел соответствующих векторных интегральных сумм вида

$$\sum_{j,\,k} (s_j + it_k)\, \mathscr{E}(Q_{jk})\, f,$$

где $Q_{jk} = \Delta'_j \times \Delta''_k$. С помощью приема, примененного впервые в n° 71, можно, сверх того, показать, что операторные суммы

$$\sum_{j,\,k} (s_j + it_k)\, \mathscr{E}(Q_{jk})$$

равномерно сходятся к оператору T, так что можно писать

$$T = \int_R\int (s + it)\, d\mathcal{E}_{st}.$$

Семейство операторов $\mathcal{E}_{st}$, представляющее двумерный аналог разложения единицы, обладает по отношению к оператору T рядом свойств, аналогичных тем, которые по отношению к самосопряженному оператору имеет одномерное разложение единицы. В частности,

1°. При любом $Q = [s', s''] \times [t', t''] \subset R$ подпространство $\mathcal{E}(Q)$ H приводит оператор T.

2°. Если $f \in \mathcal{E}(Q)$ H, то

$$s' \leqslant \Re(Tf, f) \leqslant s'', \qquad t' \leqslant \Im(Tf, f) \leqslant t''.$$

Заканчивая настоящий пункт, заметим, что унитарный оператор U является нормальным. Поэтому он обладает представлением (2). Однако из равенства $\| Uf \| = \| f \|$, которое имеет место при любом $f \in$ H, нетрудно вывести, что $\mathcal{E}(Q) = 0$ всякий раз, когда прямоугольник Q не имеет общих точек с окружностью $s^2 + t^2 = 1$. Это дает возможность преобразовать двойной интеграл (2) в интеграл по единичной окружности в полном соответствии с полученным выше спектральным разложением унитарного оператора.

82. Спектр самосопряженного и унитарного операторов. Пусть E_t — некоторое разложение единицы. Мы будем считать, что интервалом изменения t является вся числовая ось. Действительно, если t изменяется в интервале $[\alpha, \beta]$, отличном от всей оси, то мы можем продолжить E_t за пределы этого интервала, полагая $E_t = I$ при $t \geqslant \beta$ и $E_t = 0$ при $t < \alpha$.

Будем называть точку t *точкой постоянства* разложения единицы, если существует такое $\varepsilon > 0$, что $E_{t+\varepsilon} - E_{t-\varepsilon} = 0$, и *точкой роста* в противном случае. Естественно, далее, точку t считать *точкой разрыва* (скачка), если $E_{t+0} - E_t \neq 0$, и *точкой непрерывности*, если $E_{t+0} - E_t = 0$. (Напомним, что, по определению, $E_{t-0} - E_t = 0$ всегда.)

Докажем, что если E_t есть разложение единицы самосопряженного оператора A, то:

a) вещественное число λ является регулярной точкой оператора A в том и только том случае, когда λ есть точка постоянства разложения единицы,

b) вещественное число λ является собственным значением оператора A в том и только том случае, когда λ есть точка скачка разложения единицы.

Чтобы доказать утверждение a), напишем равенство

$$\|(A-\lambda I)f\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}(t-\lambda)^2\,d(E_tf,\,f), \tag{1}$$

верное для любого $f\in D_A$.

Если λ — точка постоянства разложения единицы, то функция $(E_tf,\,f)$ постоянна в некоторой окрестности точки λ. Пусть ε — радиус этой окрестности. Тогда из (1) вытекает неравенство

$$\|(A-\lambda I)f\|^2\geqslant\int_{-\infty}^{\lambda-\varepsilon}+\int_{\lambda+\varepsilon}^{\infty}(t-\lambda)^2\,d(E_tf,\,f)\geqslant\varepsilon^2(f,\,f).$$

Это неравенство означает, что λ есть регулярная точка оператора A.

Обратно, если λ — регулярная точка, то при некотором $\varepsilon>0$ и любом $f\in D_A$

$$\|(A-\lambda I)f\|\geqslant\varepsilon\|f\|,$$

и, значит, при любом $f\in D_A$

$$\int_{-\infty}^{\infty}(t-\lambda)^2\,d(E_tf,\,f)\geqslant\varepsilon^2\int_{-\infty}^{\infty}d(E_tf,\,f). \tag{2}$$

Допуская, что λ не есть точка постоянства для разложения единицы оператора A, выберем элемент g и некоторое положительное $\eta<\varepsilon$ так, чтобы

$$(E_{\lambda+\eta}-E_{\lambda-\eta})\,g\neq 0,$$

и применим неравенство (2) к элементу

$$f=(E_{\lambda+\eta}-E_{\lambda-\eta})\,g,$$

который, как известно, принадлежит D_A. Мы получим неравенство

$$\int_{\lambda-\eta}^{\lambda+\eta}(t-\lambda)^2\,d(E_tg,\,g)\geqslant\varepsilon^2\int_{\lambda-\eta}^{\lambda+\eta}d(E_tg,\,g),$$

невозможность которого позволяет считать утверждение a) доказанным.

Перейдем к доказательству утверждения b).

Пусть λ есть собственное значение оператора A и f — принадлежащий ему собственный вектор. В таком случае

$$0=\|(A-\lambda I)f\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}(t-\lambda)^2\,d(E_tf,\,f).$$

Это равенство показывает, что единственной точкой роста функции $(E_t f, f)$ может быть точка $t = \lambda$. А так как

$$0 \neq (f, f) = \int_{-\infty}^{\infty} d(E_t f, f),$$

то точка $t = \lambda$ не только может быть точкой роста, но и обязательно ею будет. Но изолированная точка роста есть точка скачка, следовательно,

$$(E_{\lambda+0} f, f) \neq (E_\lambda f, f)$$

и, значит, $E_{\lambda+0} \neq E_\lambda$. Обратно, пусть точка λ такова, что $E_{\lambda+0} \neq$ $\neq E_\lambda$. Это значит, что для некоторого вектора g

$$(E_{\lambda+0} - E_\lambda) g = f \neq 0.$$

Вектор f принадлежит D_A и

$$\| (A - \lambda I) f \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (t - \lambda)^2 \, d(E_t f, f).$$

Но функция

$$(E_t f, f) = (E_t \{E_{\lambda+0} - E_\lambda\} g, f)$$

равна нулю при $t < \lambda$ и не зависит от t при $t > \lambda$. Следовательно,

$$\| (A - \lambda I) f \| = 0,$$

т. е. λ есть собственное значение оператора A.

Тривиальным следствием наших рассмотрений является то, что спектр всякого самосопряженного оператора есть множество непустое.

Из приведенных выше рассуждений также вытекает, что если λ есть собственное значение оператора A, то $(E_{\lambda+0} - E_\lambda)\,\mathrm{H}$ есть соответствующее собственное подпространство.

Используя формулу (1), можно получить следующую теорему, которая содержит в качестве частного случая доказанное выше утверждение а). В формулировке этой теоремы каждое собственное значение при подсчете количества точек спектра учитывается столько раз, какова его кратность.

Теорема 1. *Количество r $(r \leqslant \infty)$ точек спектра самосопряженного оператора A, лежащих в интервале $\Delta = (\lambda_0 - \delta,$ $\lambda_0 + \delta)$, равно максимальной размерности s $(s \leqslant \infty)$ линейных многообразий $\mathrm{G} \subset \mathrm{D}_A$, на которых выполнено неравенство*

$$\| (A - \lambda_0 I) g \| < \delta \| g \|. \tag{3}$$

Доказательство. Так как в качестве G можно, в частности, взять подпространство $E(\Delta)\,\mathrm{H}$, размерность которого равна r, то должно быть $r \leqslant s$. Предположив, что $r < s$, легко придем к противоречию. Действительно, в этом случае существует многообразие $\mathrm{G} \subset \mathrm{D}_A$, на котором выполнено неравенство (3) и размерность которого больше $r = \dim E(\Delta)\,\mathrm{H}$. Поэтому в G найдется вектор $g \neq 0$, ортогональный к $E(\Delta)\,\mathrm{H}$. Но для такого вектора в силу (1) будет выполняться неравенство $\|(A - \lambda_0 I)g\| \geqslant \geqslant \delta \|g\|$, несовместимое с (3).

Совершенно аналогично устанавливается следующее предложение.

Теорема 2. *Количество точек спектра самосопряженного оператора A, лежащих левее данной точки λ_0, равно максимальной размерности линейных многообразий $\mathrm{G} \subset \mathrm{D}_A$, на которых выполнено неравенство*

$$(Af - \lambda_0 f, f) < 0.$$

Переходя от самосопряженного оператора к унитарному оператору, припомним, что всякое собственное значение унитарного оператора по модулю равно единице, т. е. имеет вид $e^{i\lambda}$, где λ называют *собственной частотой* унитарного оператора. При этом для любого целого k будет иметь место равенство

$$U^k f = e^{ik\lambda} f,$$

если f есть собственный вектор, принадлежащий собственной частоте λ.

В континуальном случае, когда рассматривается непрерывная группа унитарных операторов U_s $(-\infty < s < \infty)$, число λ называют собственной частотой этой группы, если существует такой элемент $f \neq 0$ (собственный вектор), что при любом вещественном s

$$U_s f = e^{is\lambda} f.$$

Докажем, что *вещественное число λ является собственной частотой унитарного оператора U (соответственно непрерывной группы унитарных операторов U_s) в том и только том случае, если λ есть точка скачка разложения единицы.*

Для определенности рассмотрим случай группы унитарных операторов. Пусть λ есть ее собственная частота, а f — собственный вектор, так что при любом вещественном s

$$U_s f - e^{is\lambda} f = 0.$$

Так как

$$\begin{aligned}\|(U_s - e^{is\lambda} I) f\|^2 &= (\{U_{-s} - e^{-is\lambda} I\}\{U_s - e^{is\lambda} I\} f, f) = \\ &= (\{2I - e^{is\lambda} U_{-s} - e^{-is\lambda} U_s\} f, f) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} (2 - e^{is(\lambda - t)} - e^{-is(\lambda - t)})\, d(E_t f, f) &= \int_{-\infty}^{\infty} 4 \sin^2 \frac{s(\lambda - t)}{2}\, d(E_t f, f),\end{aligned}$$

то единственной точкой роста функции $(E_t f, f)$ может быть $t=\lambda$; эта точка и должна быть точкой роста, ибо в противном случае не могло бы иметь место неравенство

$$0 \neq (f, f) = \int_{-\infty}^{\infty} d(E_t f, f).$$

Следовательно,

$$(E_{\lambda+0} f, f) \neq (E_\lambda f, f),$$

и, значит,

$$E_{\lambda+0} \neq E_\lambda.$$

Мы замечаем, что роль неотрицательного множителя $(\lambda - t)^2$ в случае самосопряженного оператора теперь играет $4\sin^2 \frac{s(\lambda-t)}{2}$. В остальном нет разницы в доказательстве. Это относится и ко второй части утверждения, а также и к следующему предложению: *точка λ является точкой постоянства разложения единицы унитарного оператора U (соответственно группы унитарных операторов U_s) в том и только том случае, если $e^{ik\lambda}$ при любом целом k (соответственно, $e^{is\lambda}$ при любом вещественном s) является регулярной точкой оператора U^k (соответственно оператора U_s).*

Так как разложение единицы самосопряженного или унитарного оператора вполне определяет спектр этого оператора, то разложение единицы часто называют *спектральной функцией.*

О принадлежности данной точки λ к спектру самосопряженного оператора A можно также судить по поведению его резольвенты R_z в окрестности точки λ.

Вот относящееся сюда предложение: *вещественная точка λ не принадлежит спектру самосопряженного оператора A и, следовательно, является регулярной точкой этого оператора в том и только том случае, когда для любого элемента $f \in H$ функция $(R_z f, f)$, во-первых, регулярна в некоторой окрестности точки λ и, во-вторых, принимает вещественные значения в некотором интервале $\lambda - \delta < t < \lambda + \delta$.*

Необходимость этих условий вытекает из интегрального представления резольвенты и из условия а). Достаточность следует из формулы обращения Стилтьеса (см. n° 69) и из условия а).

В n° 83 мы познакомимся с классом операторов, для которых указанные условия достаточно проверять лишь для одного (специальным образом выбранного) элемента f.

83. Простой спектр. В линейной алгебре и теории интегральных уравнений спектр оператора называют *простым*, если кратность каждого собственного значения этого оператора равна единице. Это определение не переносится на произвольные операторы в пространстве Гильберта, так как, вообще говоря, совокупность собственных значений оператора не исчерпывает его спектр. Мы примем следующее

Определение. Спектр самосопряженного (соответственно унитарного) оператора называется *простым*, если существует такой вектор $g \in \mathrm{H}$ (*порождающий вектор*), что плотна в H линейная оболочка множества векторов $E(\Delta) g$, где Δ пробегает совокупность всех интервалов числовой оси (соответственно, отрезка $[0, 2\pi]$).

В силу этого определения спектры самосопряженного оператора и его преобразования Кэли одновременно просты или непросты. Кроме того, из данного определения следует, что в несепарабельном пространстве самосопряженный (унитарный) оператор не может иметь простой спектр.

Для оператора, с которым имеет дело линейная алгебра и теория интегральных уравнений, характерно, что линейная оболочка совокупности всех его собственных векторов совпадает с пространством или, во всяком случае, плотна в нем. Нетрудно показать, что для произвольного самосопряженного (или унитарного) оператора в H, обладающего этим свойством, принятое нами теперь новое определение простоты спектра находится в полном согласии с упомянутым в начале настоящего пункта элементарным определением. Это обстоятельство можно рассматривать как оправдание данного нами общего определения.

Рассмотрим в качестве примера оператор умножения Q в $\mathrm{L}^2_\sigma(-\infty, \infty)$ (см. n° 54) *). Спектральная функция E_t этого оператора определяется равенством

$$E(\Delta) f(t) = \chi_\Delta(t) f(t) \qquad (f(t) \in \mathrm{L}^2_\sigma),$$

где $\chi_\Delta(t)$ есть характеристическая функция интервала Δ. Чтобы в этом убедиться, достаточно вспомнить теорему 2 n° 75. Оператор Q имеет простой спектр. В самом деле, возьмем кусочно-постоянную функцию $g(t)$, удовлетворяющую условиям

$$g(t) = \alpha_k > 0 \qquad (k-1 \leqslant t < k),$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k^2 \{\sigma(k) - \sigma(k-1)\} < \infty.$$

Эта функция является порождающей функцией для оператора Q в смысле нашего определения. Действительно, линейная оболочка множества функций $E(\Delta) g(t)$ совпадает с совокупностью всех финитных кусочно-постоянных функций, а эта совокупность плотна в $\mathrm{L}^2_\sigma(-\infty, \infty)$ (см. n° 14).

---

*) Наряду с принятым в n° 54 обозначением $\mathfrak{Q}$ мы используем для оператора умножения букву Q. Здесь мы пишем для простоты Q вместо Q_σ.

Очевидно, функция, равная нулю на множестве положительной σ-меры, не может быть порождающей для оператора Q.

Наоборот, в качестве порождающего элемента можно взять любую функцию $g(t) \in L^2_\sigma(-\infty, \infty)$, отличную от нуля всюду, за возможным исключением множества нулевой σ-меры.

Для доказательства этого утверждения достаточно установить, что любую функцию $f(t)$ из $L^2_\sigma(a, b)$ можно с любой степенью точности аппроксимировать произведениями вида $g(t)q(t)$, где $q(t)$ — кусочно-постоянная функция:

$$\int_a^b |f(t)-g(t)q(t)|^2 d\sigma(t) < \varepsilon^2. \tag{1}$$

Введем пространство $L^2_\varrho(a, b)$, где

$$\varrho(t) = \int_a^t |g(s)|^2 d\sigma(s). \tag{2}$$

Функция $\frac{f(t)}{g(t)}$ принадлежит $L^2_\varrho(a, b)$; поэтому существует такая кусочно-постоянная функция $q(t)$, что

$$\int_a^b \left|\frac{f(t)}{g(t)} - q(t)\right|^2 d\varrho(t) < \varepsilon^2.$$

Отсюда после замены $\varrho(t)$ по формуле (2) и получаем (1).

Теорема 1. *Если спектр унитарного оператора U прост и g есть какой-нибудь порождающий элемент, то линейная оболочка векторов $U^k g$ $(\pm k = 0, 1, 2, \ldots)$ плотна в* H.

Обратно, если существует такой вектор g, что линейная оболочка векторов $U^k g$ $(\pm k = 0, 1, 2, \ldots)$ плотна в H, *то спектр оператора U прост и вектор g является порождающим элементом.*

Доказательство. Пусть спектр оператора U прост и пусть g — какой-нибудь порождающий элемент. Допуская, что линейная оболочка множества векторов $U^k g$ $(\pm k = 0, 1, 2, \ldots)$ не плотна в H, возьмем вектор $h \neq 0$, для которого

$$(U^k g, h) = 0 \qquad (\pm k = 0, 1, 2, \ldots).$$

В силу интегрального представления унитарного оператора отсюда следует, что

$$\int_0^{2\pi} e^{ikt} d(E_t g, h) = 0 \qquad (\pm k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Из этих равенств на основании теоремы единственности вытекает, что

$$(E_t g, h) = 0 \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

и, значит, вектор h ортогонален каждому вектору вида $E(\Delta)g$, а это противоречит тому, что g — порождающий элемент. Таким образом, первое утверждение теоремы доказано.

Второе утверждение доказывается так же просто.

Теорема 2 (каноническая форма самосопряженного оператора с простым спектром). *Пусть A — самосопряженный оператор с простым спектром, g — какой-нибудь порождающий элемент и $\sigma(t) = (E_t g, g)$. В таком случае формула*

$$f = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dE_t g \tag{3}$$

относит каждой функции $f(t) \in \mathrm{L}^2_\sigma(-\infty, \infty)$ вектор $f \in \mathrm{H}$, и это соответствие является изометрическим отображением $\mathrm{L}^2_\sigma(-\infty, \infty)$ на H.

Оно переводит область определения D_Q оператора умножения Q в $\mathrm{L}^2_\sigma(-\infty, \infty)$ в область определения D_A оператора A, и если элементу $f \in \mathrm{D}_A$ отвечает функция $f(t) \in \mathrm{L}^2_\sigma(-\infty, \infty)$, то элементу Af отвечает функция $tf(t)$.

Доказательство. Обозначим через G совокупность всех векторов из H, допускающих представление (3). G есть линейное многообразие, содержащее все векторы вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi_\Delta(t)\, dE_t g = E(\Delta) g,$$

и поэтому G плотно в H. Если $f(t)$ принадлежит введенному в n° 72 множеству функций (например, непрерывна), то

$$(E_t g, f) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(s)}\, d_s(E_t g, E_s g) = \int_{-\infty}^{t} \overline{f(s)}\, d(E_s g, g)$$

и

$$(f, f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, d(E_t g, f) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, d(E_t g, g) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, d\sigma(t).$$

Таким образом, линейное многообразие функций, плотное $\mathrm{L}^2_\sigma(-\infty, \infty)$, формулой (3) изометрически переводится в некоторое линейное многообразие, плотное в G. Из полноты $\mathrm{L}^2_\sigma(-\infty, \infty)$ поэтому следует замкнутость G и, следовательно, G совпадает с H, т. е. первая часть теоремы доказана.

Чтобы доказать вторую часть теоремы, заставим $f(t)$ пробегать совокупность всех финитных непрерывных функций. Если $f(t)$ — такая функция и f — отвечающий ей вектор из H, то $f \in D_A$ и в силу (3) при любом $h \in H$

$$(Af, h) = \int_{-\infty}^{\infty} t\,d(E_t f, h) = \int_{-\infty}^{\infty} t\,d(f, E_t h) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} t\,d\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\,d_s(E_s g, E_t h)\right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} t\,d\left\{\int_{-\infty}^{t} f(s)\,d(E_s g, h)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} tf(t)\,d(E_t g, h). \tag{4}$$

Отсюда вытекает, что

$$Af = \int_{-\infty}^{\infty} tf(t)\,dE_t g, \tag{5}$$

а полагая в (4)

$$h = Af,$$

получим

$$\|Af\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |tf(t)|^2\,d\sigma(t). \tag{6}$$

Припоминая определение операторного интеграла (n° 72), мы заключаем на основании формул (5) и (6), что принадлежность к области D_Q произвольной функции $f(t) \in L^2_\sigma(-\infty, \infty)$ имеет место в том и только том случае, когда $f \in D_A$, а также что применению оператора A к вектору f отвечает умножение функции $f(t)$ на t.

В силу доказанной теоремы любой самосопряженный оператор с простым спектром в сепарабельном пространстве изоморфен оператору умножения на независимую переменную в $L^2_\sigma(-\infty, \infty)$, который и принимается в качестве *канонической формы* оператора A.

В силу этого изоморфизма из

$$f = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dE_t g \tag{3}$$

следует

$$E(\Delta) f = \int_{\Delta} f(t)\,dE_t g \tag{3'}$$

сначала для финитных непрерывных функций $f(t)$, а затем для любых $f(t) \in L^2_\sigma(-\infty, \infty)$.

Беря в (3) различные порождающие элементы g, мы получим целый класс операторов умножения, изоморфных A. Характеристикой всех функций распределения $\sigma(t) = (E_t g, g)$ мы займемся в n° 84.

Здесь же отметим одно общее свойство всех порождающих элементов g: каждая точка роста спектральной функции E_t является точкой роста функции $(E_t g, g)$. Справедливость этого утверждения следует из того, что если Δ_0 — интервал постоянства функции $(E_t g, g)$, то линейная оболочка множества векторов $E(\Delta) g$, где Δ пробегает совокупность всех интервалов числовой оси, ортогональна к подпространству $E(\Delta_0)$ H.

Отсюда, между прочим, и вытекает, что указанный в конце n° 82 критерий принадлежности данной точки λ к спектру самосопряженного оператора A в случае простоты спектра этого оператора достаточно проверить лишь для какого-нибудь одного порождающего элемента.

Закончим настоящий пункт одним предложением относительно самосопряженных операторов, которое аналогично теореме 1.

Теорема 3. *Если самосопряженный оператор A имеет простой спектр, то существует вектор h, на котором имеют смысл все натуральные степени оператора A, такой, что линейная оболочка множества векторов $A^k h$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ плотна в* H.

Обратно, если на некотором векторе h имеют смысл все натуральные степени оператора A, и если линейная оболочка множества векторов $A^k h$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ плотна в H, *то спектр оператора A простой, а вектор h является порождающим.*

Доказательство второй части очень просто. Действительно, пусть линейная оболочка множества $A^k h$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ плотна в H. Интегральное представление

$$(A^k h, f) = \int_{-\infty}^{\infty} t^k d(E_t h, f)$$

показывает, что не существует вектора $f \neq 0$, ортогонального $E_t h$ при любом t. Следовательно, линейная оболочка множества $E(\Delta) h$ плотна в H, т. е. спектр оператора A прост и h есть порождающий элемент.

Переходя к первой части теоремы, докажем, что в качестве вектора h можно взять

$$h = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dE_t g,$$

где g — какой-нибудь порождающий элемент оператора A. Действительно,

$$A^k h = \int_{-\infty}^{\infty} t^k e^{-t^2} dE_t g \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

и если бы существовал вектор $f \neq 0$, ортогональный всем векторам $A^k h$, то мы имели бы равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^k e^{-t^2} f(t)\, d\sigma(t) = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

где $\sigma(t) = (E_t g, g)$, а $f(t)$ определена формулой (3), и

$$0 \neq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 d\sigma(t) < \infty. \tag{7}$$

Отсюда, полагая

$$\omega(t) = \int_{-\infty}^{t} f(s)\, d\sigma(s) - C, \tag{8}$$

мы нашли бы при надлежащем выборе константы C, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^k e^{-t^2} \omega(t)\, dt = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

а это в силу полноты системы функций Чебышева — Эрмита влечет равенство $\omega(t) = 0$, которое на основании (7) и (8) приводит к противоречию:

$$0 \neq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 d\sigma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)}\, d\omega(t) = 0.$$

Ортогонализуя последовательность векторов $\{A^k h\}_0^\infty$, мы получим ортонормированный базис $\{e_k\}_0^\infty$, все элементы которого принадлежат D_A. Очевидно, при $i > k + 1$

$$(Ae_k, e_i) = 0,$$

а так как оператор A симметричен, то это равенство имеет место и при $i < k - 1$. Следовательно, матрица $((Ae_k, e_i))_{i,k=0}^\infty$ оператора A в базисе $\{e_k\}_0^\infty$ является матрицей Якоби. При этом построенный нами базис есть базис матричного представления оператора A в смысле п° 53.

84. О спектральных типах. Напомним, что мы называем функцией распределения любую непрерывную слева, неубывающую функцию ограниченного изменения, заданную на всей числовой оси.

Если $\sigma(t)$ — такая функция, то $\sigma(\Delta)=\sigma(t'')-\sigma(t')$ (t' и t'' — концы Δ) является *аддитивной функцией интервала* (мы сохраним также для $\sigma(\Delta)$ название функции распределения).

Условимся говорить, что функция распределения $\sigma(t)$ *подчинена* функции распределения $\varrho(t)$, и писать

$$\sigma(t) \prec \varrho(t), \tag{1}$$

если $\sigma(t)$ абсолютно непрерывна по отношению к $\varrho(t)$, т. е. если при любом $\Delta \subset (-\infty, \infty)$

$$\sigma(\Delta)=\int_{\Delta} \varphi(t)\, d\,\varrho(t),$$

где $\varphi(t)$ — ϱ-измеримая неотрицательная функция.

Если одновременно с (1)

$$\varrho(t) \prec \sigma(t), \tag{2}$$

то функции распределения $\sigma(t)$ и $\varrho(t)$ считаются имеющими одинаковый *спектральный тип*.

Если имеет место (1), но не имеет места (2), то мы будем говорить, что спектральный тип $\sigma(t)$ менее спектрального типа $\varrho(t)$.

Пусть теперь A — произвольный самосопряженный оператор и E_t — его спектральная функция.

Функция $(E_t f, f)$ при любом $f \in \mathrm{H}$ является, очевидно, функцией распределения.

Спектральный тип функции $(E_t f, f)$ мы будем называть *спектральным типом элемента* f (относительно оператора A), а о спектральных типах элементов f мы будем говорить, что они принадлежат A. Если среди элементов $f \in \mathrm{H}$ существует элемент *максимального спектрального типа* относительно A (т. е. такой элемент g, что $(E_t f, f) \prec (E_t g, g)$ при любом $f \in \mathrm{H}$, то этот спектральный тип приписывается оператору A.

Если A — самосопряженный оператор с простым спектром, то существуют элементы максимального спектрального типа относительно A. Это вытекает из следующей теоремы, которая вместе с тем дает ответ на вопрос предыдущего пункта о характеристике множества порождающих элементов оператора с простым спектром.

Теорема 1. *Пусть A — самосопряженный оператор с простым спектром. Для того чтобы элемент g был порождающим, необходимо и достаточно, чтобы он обладал максимальным спектральным типом относительно A.*

Доказательство. Пусть g есть порождающий элемент, а f — произвольный вектор из H. В таком случае

$$f=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dE_t g,$$

где $f(t)$ — некоторая функция из $L^2_\sigma(-\infty, \infty)$, а $\sigma(t)=(E_t g, g)$. Вместе с этим соотношением при любом $\Delta \subset [-\infty, \infty]$ имеет место соотношение

$$E(\Delta) f=\int_{\Delta} f(t)\, dE_t g=\int_{-\infty}^{\infty} \chi_\Delta(t) f(t)\, dE_t g.$$

Таким образом, при рассматриваемом отображении H на $L^2_\sigma(-\infty, \infty)$ векторам f, $E(\Delta) f$ отвечают функции $f(t)$, $\chi_\Delta(t) f(t)$. В силу изометричности отображения

$$(E(\Delta) f, f)=\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \chi_\Delta(t)\, d\sigma(t)=\int_{\Delta} |f(t)|^2\, d\sigma(t).$$

Мы видим, что

$$(E_t f, f) \prec (E_t g, g),$$

т. е. необходимость доказана.

Примем теперь, что g — элемент максимального спектрального типа, так что для любого $f \in$ H

$$(E_t f, f) \prec (E_t g, g).$$

В частности, это соотношение имеет место и для порождающего элемента g_0 (которым оператор A обладает в силу простоты своего спектра), т. е.

$$(E_t g_0, g_0) \prec (E_t g, g).$$

С другой стороны, в силу уже доказанной первой части теоремы,

$$(E_t g, g) \prec (E_t g_0, g_0).$$

Таким образом, элементы g и g_0 имеют один и тот же спектральный тип и, значит,

$$\sigma(\Delta) \equiv (E(\Delta) g, g)=\int_{\Delta} p^2(t)\, d\sigma_0(t),$$

$$\sigma_0(\Delta) \equiv (E(\Delta) g_0, g_0)=\int_{\Delta} p_0^2(t)\, d\sigma(t),$$

где функции $p(t) \geqslant 0$ и $p_0(t) \geqslant 0$ принадлежат соответственно $L^2_{\sigma_0}(-\infty, \infty)$ и $L^2_\sigma(-\infty, \infty)$. В силу этих равенств множества нулевой σ-меры и нулевой σ_0-меры совпадают. Кроме того, нетрудно видеть, что всюду, кроме множества σ-меры нуль,

$$p(t)\,p_0(t)=1.$$

Поэтому каждая из функций $p(t)$, $p_0(t)$ может равняться нулю лишь на множестве нулевой σ-меры.

Мы должны доказать, что g есть порождающий элемент для оператора A, т. е. что выполнение равенства

$$(E(\Delta)\,g,\ h)=0$$

для любого $\Delta \subset [-\infty,\ \infty]$ возможно только при $h=0$. Но в силу изоморфизма между H и $L^2_{\sigma_0}(\infty,\ \infty)$

$$(E(\Delta)\,g,\ h)=\int\limits_{\Delta} g(t)\,\overline{h(t)}\,d\sigma_0(t),$$

где $g(t), h(t) \in L^2_{\sigma_0}(-\infty,\ \infty)$ и $|g(t)|=p(t)$. Следовательно, если g не есть порождающий элемент, то для некоторой функции $h(t) \in L^2_{\sigma_0}(-\infty,\ \infty)$, не σ_0-эквивалентной нулю и для любого $\Delta \subset (-\infty,\ \infty)$

$$\int\limits_{\Delta} g(t)\,\overline{h(t)}\,d\sigma_0(t)=0$$

или

$$\int\limits_{\Delta} p(t)\,\overline{h_0(t)}\,d\sigma_0(t)=0,$$

где $h_0(t)$ определена равенством $g(t)\,\overline{h(t)}=p(t)\,\overline{h_0(t)}$. Это невозможно, так как линейная оболочка совокупности функций $\chi_\Delta(t)p(t)$, как мы показали в п° 83, плотна в $L^2_{\sigma_0}(-\infty,\ \infty)$, поскольку функция $p(t) \geqslant 0$ и обращается в нуль лишь на множестве нулевой σ_0-меры.

В связи с доказанной теоремой возникает вопрос: можно ли любую функцию распределения с типом, не превосходящим спектрального типа A, представить в виде $(E_t f,\ f)$. Утвердительный ответ на этот вопрос дает следующая

Теорема 2. *Пусть A — самосопряженный оператор с простым спектром, а $\sigma(t)$ — заданная функция распределения с типом, не превосходящим спектрального типа A. При этих условиях существует вектор $f \in$ H, порождающий эту функцию распределения, т. е. такой, что*

$$\sigma(t)=(E_t f,\ f).$$

Доказательство. Из условий теоремы следует, что функция распределения $\sigma(t)$ представима в виде

$$\sigma(t)=\int\limits_{\Delta} \varphi(t)\,d(E_t g,\ g),$$

где g — порождающий элемент, а $\varphi(t) \geqslant 0$, и мы вправе положить

$$f = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dE_t g = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\varphi(t)}\, dE_t g.$$

Элемент f порождает функцию распределения $\sigma(t)$, так как

$$(E(\Delta) f, f) = \int_{\Delta} |f(t)|^2\, d(E_t g, g) = \sigma(\Delta).$$

85. Кратный спектр. Если линейная оболочка совокупности всех собственных векторов самосопряженного оператора плотна в пространстве, то под кратностью (общей кратностью) спектра этого оператора естественно понимать максимальную кратность его собственных значений.

Прежде чем дать определение кратности спектра произвольного самосопряженного оператора в H, введем понятие о порождающем подпространстве.

Подпространство G называется *порождающим подпространством* самосопряженного оператора A со спектральной функцией E_t, если замыкание линейной оболочки множества $E(\Delta)\,\mathrm{G}$, где Δ пробегает совокупность всех интервалов, совпадает с H.

Определение 1. *Кратностью* (или *общей кратностью*) спектра самосопряженного *) оператора A называется минимальная размерность порождающего подпространства этого оператора. Если у оператора A не существует конечномерных порождающих подпространств, то кратность спектра такого оператора считается бесконечной. *Кратностью спектра* оператора A *в интервале* $\Delta_0 = [t', t'']$ называется общая кратность спектра оператора $E(\Delta_0)\, A$ в подпространстве $E(\Delta_0)\,\mathrm{H}$.

Легко видеть, что если G — порождающее подпространство оператора $E(\Delta_0)\,A$, то при $\Delta_1 \subset \Delta_0$ подпространство $E(\Delta_1)\,\mathrm{G}$ является порождающим подпространством оператора $E(\Delta_1)\,A$. Поэтому при $\Delta_1 \subset \Delta_0$ кратность спектра оператора A в интервале Δ_1 не превосходит его кратности в интервале Δ_0.

Мы вправе, следовательно, принять также

Определение 2. *Кратностью спектра* самосопряженного оператора A *в точке* λ называется предел (монотонно убывающей) последовательности кратностей спектра этого оператора в интервалах $[\lambda - \frac{1}{n}, \lambda + \frac{1}{n}]$ при $n \to \infty$.

Нетрудно проверить, что в том случае, когда λ есть изолированная точка спектра, определение 2 совпадает с принятым ранее

*) Аналогичные определения для унитарных операторов мы опускаем. Очевидно, кратности спектров самосопряженного оператора и его преобразования Кэли совпадают.

определением кратности собственного значения. Если же линейная оболочка совокупности всех собственных векторов плотна в пространстве, то определение 1 дает в качестве общей кратности спектра максимальную кратность собственных значений.

Из определения 1 следует, что в несепарабельном пространстве общая кратность спектра самосопряженного оператора не может быть конечной.

В заключение докажем лемму, которая будет использована в n° 86.

Лемма. *Пусть самосопряженный оператор A имеет n-кратный спектр и пусть G есть порождающее подпространство. Если оператор $A_0 \subset A$ определен лишь на линейной оболочке множества $E(\Delta)\,\mathrm{G}$, где Δ пробегает совокупность всех конечных интервалов, то оператор A есть замыкание оператора A_0.*

Доказательство. Так как включение $\overline{A_0} \subseteq A$ очевидно, то нам надлежит лишь доказать, что $A \subseteq \overline{A_0}$. С этой целью возьмем произвольный вектор $f \in \mathrm{D}_A$ и положим

$$f_k = E(\Delta_k)\,f \qquad (k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

где $\Delta_k = [-k,\ k]$. Так как G есть порождающее подпространство, то замкнутая линейная оболочка множества $E(\Delta')\,\mathrm{G}$, где Δ' пробегает все подынтервалы конечного интервала Δ, совпадает с $E(\Delta)\,\mathrm{H}$. Поэтому векторы f_k принадлежат области определения оператора A_0 и

$$A_0 f_k = AE(\Delta_k)\,f = E(\Delta_k)\,Af.$$

При $k \to \infty$ мы имеем

$$E(\Delta_k)\,f \to f, \quad E(\Delta_k)\,Af \to Af.$$

Поэтому вектор f принадлежит области определения оператора $\overline{A_0}$ и

$$\overline{A_0} f = Af,$$

т. е. включение

$$A \subseteq \overline{A_0}$$

доказано.

86. Каноническая форма самосопряженного оператора с конечнократным спектром. В настоящем пункте мы наметим обобщение теоремы 2 n° 83 на случай операторов со спектром конечной кратности. С этой целью введем сначала пространство вектор-функций $\mathrm{L}^2_S(-\infty,\ \infty)$, являющееся обобщением пространства скалярных функций $\mathrm{L}^2_\sigma(-\infty,\ \infty)$.

Пусть

$$S(t) = (\sigma_{ik}(t))_{i,\,k=1}^{m} \qquad (m < \infty;\ -\infty < t < \infty)$$

— эрмитова матрица-функция, удовлетворяющая двум условиям:

1°. При любых комплексных ξ_k

$$\sum_{i,\,k=1}^{m} \{\sigma_{ik}(t'') - \sigma_{ik}(t')\}\,\xi_i \bar{\xi}_k \geqslant 0,$$

если только $t' \leqslant t''$.

2°. $S(-\infty)=0,\ S(t-0)=S(t)$.

В таком случае будем называть $S(t)$ *матричной функцией распределения* и будем писать $S(\Delta)$ вместо $S(t'')-S(t')$, если $\Delta=[t', t'']$.

Из условия 1° легко заключить, что функции $\sigma_{ii}(t)$ $(i=1, 2, \ldots, m)$ не убывают и что функции $\sigma_{ik}(t)$ $(i, k=1, 2, \ldots, m)$ имеют в каждом конечном интервале ограниченное изменение.

По матрице-функции $S(t)$ мы вначале построим некоторую линейную метризованную систему R. С этой целью примем в качестве отправного пункта совокупность всех вектор-функций вида

$$\vec{\chi}(t)=\{\chi_1(t), \chi_2(t), \ldots, \chi_m(t)\},$$

где $\chi_k(t)$ есть характеристическая функция интервала Δ_k $(k=1, 2, \ldots, m)$. Такие вектор-функции будем называть *характеристическими*.

Для получения линейной метризованной системы R образуем линейную оболочку всех характеристических вектор-функций, полагая

$$\alpha_1\vec{\chi}^{(1)}(t)+\alpha_2\vec{\chi}^{(2)}(t)=\{\alpha_1\chi_1^{(1)}(t)+\alpha_2\chi_1^{(2)}(t),\ \alpha_1\chi_2^{(1)}(t)+\alpha_2\chi_2^{(2)}(t), \ldots\},$$

и определяя скалярное произведение вектор-функций вида

$$\vec{\chi}^{(1)}(t)=\{0, \ldots, 0, \chi_i^{(1)}(t), 0, \ldots, 0\},$$

$$\vec{\chi}^{(2)}(t)=\{0, \ldots, 0, \chi_k^{(2)}(t), 0, \ldots, 0\}$$

по формуле

$$(\vec{\chi}^{(1)}(t), \vec{\chi}^{(2)}(t))=\sigma_{ik}(\Delta_i^{(1)}\cap\Delta_k^{(2)}),$$

где $\Delta_i^{(1)}$, Δ_k^2 — интервалы, характеристическими функциями которых являются $\chi_i^{(1)}(t)$, $\chi_k^2(t)$. По линейности скалярное произведение распространяется на всю систему R. После этого пространство $\mathrm{L}_S^2(-\infty, \infty)$ определяется как результат пополнения линейной метризованной системы R.

Что касается теоретико-функциональной характеристики элементов пространства $\mathrm{L}_S^2(-\infty, \infty)$, то, вводя скалярную функцию распределения

$$v(t)=\sum_{i=1}^{m}\sigma_{ii}(t),$$

можно показать *), что пространство $\mathrm{L}_S^2(-\infty, \infty)$ состоит из всех вектор-функций $\vec{f}(t)=\{f_1(t), \ldots, f_m(t)\}$ с v-измеримыми и v-почти всюду конечными компонентами, для которых

$$\lim_{N\to\infty}(\vec{f}_N(t), \vec{f}_N(t))<\infty,$$

где

$$\vec{f}_N(t)=\begin{cases}\vec{f}(t), & \text{если для рассматриваемого значения } t \max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}|f_i(t)|<N,\\ 0, & \text{если для рассматриваемого значения } t \max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}|f_i(t)|\geqslant N.\end{cases}$$

*) И. Кац, О гильбертовых пространствах, порождаемых монотонными эрмитовыми матрицами-функциями. Записки Научно-исследовательского ин-та матем. и мех. и Харьковского матем. о-ва, т. XXII (1950).

Впрочем, для нашей цели теоретико-функциональная характеристика элементов пространства $L^2_S(-\infty, \infty)$ не является необходимой. Заметим лишь, что из нашего построения пространства $L^2_S(-\infty, \infty)$ во всяком случае следует принадлежность к нему вектор-функций с непрерывными финитными компонентами. Поэтому мы вправе определить на многообразии таких непрерывных финитных вектор-функций

$$\vec{f}(t) = \{f_1(t),\ f_2(t),\ \ldots,\ f_m(t)\} \tag{1}$$

оператор умножения:

$$Q_0\vec{f}(t) = \{tf_1(t),\ tf_2(t),\ \ldots,\ tf_m(t)\}.$$

Замыкание Q этого симметрического оператора мы и назовем *оператором умножения на t в пространстве* $L^2_S(-\infty, \infty)$. Нетрудно показать, что Q есть самосопряженный оператор. Действительно, возьмем преобразование Кэли оператора Q:

$$(Q+iI)\vec{f}(t) = \vec{g}(t), \qquad (Q-iI)\vec{f}(t) = V\vec{g}(t).$$

Линейные многообразия D_V и Δ_V, очевидно, содержат все непрерывные финитные вектор-функции. Поэтому оператор V унитарен. Но тогда по теореме n° 79 оператор Q является самосопряженным.

Теорема 2 n° 75 позволяет получить спектральную функцию оператора Q. На непрерывных финитных вектор-функциях (1) спектральная функция E_t задается равенством

$$E(\Delta)\vec{f}(t) = \{\chi_\Delta(t) f_1(t),\ \chi_\Delta(t) f_2(t),\ \ldots,\ \chi_\Delta(t) f_m(t)\},$$

где $\chi_\Delta(t)$ — характеристическая функция интервала Δ. Отсюда видно, что кратность спектра оператора Q в $L^2_S(-\infty, \infty)$ не превосходит порядка m матрицы-функции $S(t)$, так как для Q можно указать m-мерное порождающее подпространство, натянутое на элементы

$$\begin{aligned}
\vec{g}_1(t) &= \{g(t),\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0\},\\
\vec{g}_2(t) &= \{0,\ g(t),\ 0,\ \ldots,\ 0\},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\vec{g}_m(t) &= \{0,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ g(t)\},
\end{aligned}$$

где функция $g(t) > 0$ построена по весу $v(t)$ так же, как на стр. 280 она строилась по $\sigma(t)$.

Пусть теперь A — самосопряженный оператор со спектром кратности n $(n < \infty)$ и спектральной функцией E_t.

Условимся называть всякий базис любого порождающего подпространства оператора A *порождающим базисом* этого оператора. Пусть $g_1, g_2, \ldots, g_m$ — какой-нибудь порождающий базис оператора A. Обозначим через G_i замыкание линейной оболочки множества всех векторов $E(\Delta)g_i$ при рассматриваемом i. Мы будем предполагать порождающий базис $g_1, g_2, \ldots, g_n$ выбранным всегда так, что соответствующие подпространства $G_1, G_2, \ldots, G_m$ линейно независимы. Покажем, что такой выбор базиса возможен, по крайней мере при $m = n$, т. е. в случае, когда он является *минимальным порождающим базисом*. Действительно, пусть $h_1, h_2, \ldots, h_n$ — какой-нибудь минимальный порождающий базис. Положим $g_1 = h_1$ и образуем подпространство G_1. Ясно, что $h_2 \overline{\in} G_1$, так как в противном случае уже система векторов $h_1, h_3, h_4, \ldots, h_n$ представляла бы порождающий базис и, следовательно, кратность спектра была бы $<n$. Из сказанного вытекает, что $g_2 = (I - P_{G_1}) h_2 \neq 0$. Образуем подпространство G_2, которое, как легко видеть, ортогонально G_1. Ясно, как следует эту процедуру продолжать далее. В результате мы получим порождающий базис $g_1, g_2, \ldots, g_n$, для которого подпространства $G_1, G_2, \ldots, G_n$ попарно ортогональны, а следовательно, и линейно независимы.

Каждому порождающему базису $g_1, g_2, \ldots, g_m$ $(n \leqslant m < \infty)$ мы можем отнести матрицу

$$S(t) = ((E_t g_i, g_k))_{i,\, k=1}^{m},$$

которая, очевидно, является матричной функцией распределения.

Т е о р е м а. *Пусть A — самосопряженный оператор с n-кратным спектром, $g_1, g_2, \ldots, g_m$ $(n \leqslant m < \infty)$ — какой-нибудь порождающий базис и $S(t) = ((E_t g_i, g_k))_{i,\, k=1}^{m}$.*

В таком случае существует изометрическое отображение пространства H на $L_S^2(-\infty, \infty)$, при котором области определения D_A оператора A в H и D_Q оператора умножения Q в $L_S^2(-\infty, \infty)$ переходят друг в друга и элементу Af соответствует вектор-функция $Q\vec{f}(t)$, если элементу $f \in H$ соответствует вектор-функция $\vec{f}(t) \in L_S^2(-\infty, \infty)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отнесем вектору

$$f = E(\Delta_1) g_1 + E(\Delta_2) g_2 + \ldots + E(\Delta_m) g_m \tag{2}$$

из H характеристическую вектор-функцию

$$\vec{f}(t) = \{\chi_{\Delta_1}(t), \chi_{\Delta_2}(t), \ldots, \chi_{\Delta_m}(t)\} \tag{3}$$

из $L_S^2(-\infty, \infty)$. Тогда

$$\| f \|^2 = (f, f) = \Big(\sum_{i=1}^{m} E(\Delta_i) g_i, \sum_{k=1}^{m} E(\Delta_k) g_k \Big) =$$

$$= \sum_{i,\, k=1}^{m} (E(\Delta_i \cap \Delta_k) g_i, g_k) = \sum_{i,\, k=1}^{m} \sigma_{ik}(\Delta_i \cap \Delta_k) = \| \vec{f}(t) \|^2.$$

Легко также проверить, что ортогональным векторам вида (2) соответствуют ортогональные вектор-функции вида (3). Отсюда следует, что расширяя по линейности и непрерывности установленное соответствие на все пространство H, мы получим изометрическое отображение пространства H на $L_S^2(-\infty, \infty)$.

Нетрудно также видеть, что для непрерывных финитных вектор-функций $\vec{f}(t) = \{f_1(t), f_2(t), \ldots, f_m(t)\}$ формула, соответствующая формуле (3) n° 83, теперь имеет вид

$$f = \sum_{i=1}^{m} \int_{-\infty}^{\infty} f_i(t)\, dE_t g_i.$$

Найдем вектор-функцию, соответствующую вектору Af, где f — вектор вида (2). Имеем:

$$Af=\int_{-\infty}^{\infty} t\,dE_t f=\int_{-\infty}^{\infty} t\,dE_t\left(\sum_{i=1}^{m} E(\Delta_i)\,g_i\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\int_{\Delta_i} t\,dE_t g_i=\sum_{i=1}^{m}\int_{-\infty}^{\infty} t\chi_i(t)\,dE_t g_i.$$

Если учесть способ построения оператора умножения Q и лемму предыдущего пункта, то теорема о канонической форме доказана.

В n° 83 мы показали, что для всякого самосопряженного оператора с простым спектром можно выбрать ортогональный базис, в котором матрица оператора будет матрицей Якоби.

Теперь мы покажем, что этот результат обобщается на самосопряженные операторы с конечнократным спектром. Пусть A — такой оператор. Выберем порождающий базис $g_1, g_2, \ldots, g_n$ так, чтобы

$$\mathrm{H}=\mathrm{G}_1\oplus\mathrm{G}_2\oplus\ldots\oplus\mathrm{G}_n\qquad(\mathrm{G}_i\perp\mathrm{G}_k,\ i\neq k).$$

Повторяя упомянутые рассуждения n° 83, получим в каждом G_r свою матрицу Якоби

$$(Ae_{ri},\ e_{rk}).$$

Если выбрать теперь в H единый ортонормированный базис $e_s(s=1, 2, 3, \ldots)$, нумеруя орты e_{rk} $(r=1, 2, 3, \ldots, n,\ k=1, 2, 3, \ldots)$ сначала в порядке возрастания первых индексов, а затем в порядке возрастания вторых индексов, т. е. полагая

$$e_1=e_{11},\ e_2=e_{21},\ \ldots,\ e_n=e_{n1},\ e_{n+1}=e_{12},\ e_{n+2}=e_{22},\ \ldots,$$

то в базисе $\{e_s\}_{s=1}^{\infty}$ мы получим обобщенную матрицу Якоби $((Ae_i,\ e_k))$. Она будет специального вида, так как ее значащие элементы будут располагаться лишь на главной и двух n-х диагоналях.

87. Понятие об унитарных инвариантах самосопряженных операторов. Операторы A_1 и A_2, действующие соответственно в гильбертовых пространствах H_1 и H_2, называются *) *изоморфными* (или *унитарно эквивалентными*), если существует такое изометрическое отображение V пространства H_1 на H_2, что

$$\mathrm{D}_{A_2}=V\mathrm{D}_{A_1}\tag{1}$$

и

$$A_2=VA_1V^{-1}.\tag{2}$$

Если оператор A_1 — симметрический (самосопряженный), то изоморфный ему оператор A_2 также симметрический (самосопряженный), как это непосредственно следует из (1) и (2).

Спектры изоморфных самосопряженных операторов совпадают, ибо из (1) и (2) вытекает, что

$$\Delta_{A_2-\lambda I}=(A_2-\lambda I)\,\mathrm{D}_{A_2}=(VAV^{-1}-\lambda VV^{-1})\,\mathrm{D}_{A_2}=V(A_1-\lambda I)\,\mathrm{D}_{A_1}=V\Delta_{A_1-\lambda I}.\tag{3}$$

*) Мы повторяем здесь определение, данное в n° 41.

Более того, из этих равенств следует, что не только весь спектр, но и каждая из его частей (дискретная и непрерывная) также являются *унитарными инвариантами*, т. е. не меняются при переходе от A_1 к изоморфному оператору A_2.

Мы ограничимся здесь некоторыми замечаниями относительно унитарной эквивалентности самосопряженных операторов.

Пусть E_{1t} — разложение единицы оператора A_1. Положим

$$E_{2t}=VE_{1t}V^{-1}. \tag{4}$$

Эта формула определяет некоторое семейство ограниченных самосопряженных операторов в H_2, и легко видеть, что E_{2t} есть разложение единицы в пространстве H_2.

Проверим, например, что

$$E_{2u}E_{2v}=E_{2s},$$

где $s=\min\{u, v\}$. Действительно,

$$E_{2u}E_{2v}=VE_{1u}V^{-1}VE_{1v}V^{-1}=VE_{1u}E_{1v}V^{-1}=VE_{1s}V^{-1}=E_{2s}.$$

Покажем теперь, что E_{2t} является разложением единицы оператора A_2. С этой целью возьмем интегральное представление

$$(A_1f_1, g_1)=\int_{-\infty}^{\infty} t\,d(E_{1t}f_1, g_1).$$

Полагая здесь

$$f_1=V^{-1}f_2,\quad g_1=V^{-1}g_2,$$

получим

$$(VA_1V^{-1}f_2, g_2)=\int_{-\infty}^{\infty} t\,d(VE_{1t}V^{-1}f_2, g_2)$$

или

$$(A_2f_2, g_2)=\int_{-\infty}^{\infty} t\,d(E_{2t}f_2, g_2),$$

что и является основным моментом в подлежащем доказательству утверждении.

Из соотношения (4) следует, что кратность спектра (общая кратность и кратность в каждой точке) также является унитарным инвариантом самосопряженного оператора.

Если линейная оболочка последовательности всех собственных векторов самосопряженного оператора плотна в H, то спектр оператора и кратность спектра в каждой точке представляют полную систему унитарных инвариантов оператора, т. е. все такие операторы с одинаковым спектром и одинаковой кратностью спектра в каждой точке являются изоморфными.

С случае самосопряженных операторов с произвольным простым спектром также нетрудно указать полную систему унитарных инвариантов.

Пусть A_1 и A_2 — два унитарно эквивалентных самосопряженных оператора с простым спектром, действующие в пространствах H_1 и H_2.

Равенства

$$(E_{2t}f_2, f_2)=(E_{1t}V^{-1}f_2, V^{-1}f_2)=(E_{1t}f_1, f_1)$$

показывают, что спектральные типы элемента f_1 относительно A_1 и элемента $f_2 = Vf_1$ относительно A_2 совпадают. Отсюда следует совпадение спектральных типов операторов A_1 и A_2.

Из этого вытекает, что спектр и кратность спектра в каждой точке, вообще говоря, не представляют полной системы унитарных инвариантов.

Так, например, операторы умножения Q_{σ_1} в $L^2_{\sigma_1}(0, 1)$ и Q_{σ_2} в $L^2_{\sigma_2}(0, 1)$ при $\sigma_1(t) = t$ и

$$\sigma_2(t) = \begin{cases} 1+t & (t>0), \\ 0 & (t=0) \end{cases}$$

имеют общий спектр кратности единица, но они не изоморфны, так как спектральные типы функций распределения $\sigma_1(t)$, $\sigma_2(t)$ не совпадают.

С другой стороны, два оператора с простым спектром и одинаковыми спектральными типами изоморфны, ибо согласно пп° 83 и 84 оба они изоморфны одному и тому же оператору умножения.

Таким образом, имеет место следующая

Теорема. *Для того чтобы два оператора с простым спектром были изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы их спектральные типы совпадали.*

При переходе от случая простого спектра к общему случаю кратного спектра отыскание полной системы унитарных инвариантов существенно усложняется. Вопрос о полной системе унитарных инвариантов самосопряженного оператора с кратным спектром не может быть решен простым разложением такого оператора в ортогональную сумму операторов с простым спектром, ибо такое разложение не определяется однозначно. Для решения задачи в общем случае следует специальным образом выбрать разложение оператора в ортогональную сумму, что требует введения понятия о так называемых *независимых спектральных типах*.

Теория унитарных инвариантов самосопряженных операторов была разработана Хеллингером для случая сепарабельного пространства и развита далее А. И. Плеснером для случая несепарабельного пространства. Рассмотрение относящихся сюда вопросов не входит в задачу настоящей книги *).

88. Общее определение функции от самосопряженного оператора. В n° 72 мы строили операторные интегралы

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, dE_t,$$

отправляясь от заданного разложения единицы E_t. При этом мы предполагали, что функция $\varphi(t)$ определена и конечна почти всюду относительно операторной меры E_t и относительно этой меры измерима. Сохраняя во всем дальнейшем это предположение о функции $\varphi(t)$, мы введем теперь в рассмотрение еще тот самосопряженный оператор A, которому принадлежит разложение единицы E_t. Мы

*) Читателю, желающему ознакомиться с теорией инвариантов, можно рекомендовать книгу А. И. Плеснера, Спектральная теория линейных операторов, «Наука», 1965, где эта теория изложена с исчерпывающей полнотой.

предположим, так же как в n° 72, что в H существует плотное множество D элементов f, для которых

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|^2 d(E_t f, f) < \infty, \tag{1}$$

и примем следующее

Определение. *Функцией* $\varphi(A)$ называется оператор, определяемый формулой

$$\varphi(A) f = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, dE_t f$$

на всех тех векторах $f \in H$, для которых выполнено соотношение (1).

Необходимо отметить, что для некоторой части рассматриваемого здесь класса функций мы уже ранее определили понятие функции от оператора. Данное ранее определение согласуется с определением этого пункта. Далее, заметим, что некоторые свойства оператора $\varphi(A)$, вытекающие из приведенного определения, фактически уже были установлены в n° 72. Так, в n° 72 было доказано, что область определения $D = D_{\varphi(A)}$ есть линейное многообразие, а также, что $[\varphi(A)]^* = \overline{\varphi}(A)$. Заметим еще, что для существования оператора, обратного по отношению к $\varphi(A)$, необходимо и достаточно, чтобы функция $\psi(t) = \frac{1}{\varphi(t)}$ удовлетворяла всем условиям, перечисленным в начале настоящего пункта, и тогда

$$[\varphi(A)]^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\varphi(t)}\, dE_t.$$

Наконец, отметим, что равенство $|\varphi(t)| = 1$ (почти всюду относительно операторной меры E_t) необходимо и достаточно, чтобы оператор $\varphi(A)$ был унитарным. Это условие, например, выполнено в случае

$$\varphi(t) = \frac{t-i}{t+i},$$

который приводит к преобразованию Кэли, и в случае

$$\varphi(t) = e^{ist} \quad (-\infty < s < \infty),$$

который приводит к абелевой группе унитарных операторов. Точно так же, для того чтобы оператор $\varphi(A)$ был ортопроектором, необходимо и достаточно, чтобы почти всюду относительно E_t функция $\varphi(t)$ принимала лишь два значения: 0 или 1.

Рассмотрим теперь, какие упрощения вносит в теорию предположение, что спектр оператора A прост. Примем это предположение и обозначим через g какой-нибудь порождающий элемент оператора A, а через $\sigma(t)$ — функцию распределения $(E_t g, g)$. Покажем, что достаточно проверить налагаемые на $\varphi(t)$ требования на единственной мере $\sigma(t)=(E_t g, g)$, вместо всех мер $(E_t f, f)$ в общем случае. Действительно, пусть некоторое множество $e \in (-\infty, \infty)$ имеет конечную σ-меру. Эта мера равна

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi_e(t)\, d\sigma(t), \tag{2}$$

где $\chi_e(t)$ — характеристическая функция множества e. Если f — произвольный вектор, то при любом $\Delta \subset (-\infty, \infty)$

$$(E(\Delta) f, f) = \int_\Delta p(t)\, d(E_t g, g) = \int_\Delta p(t)\, d\sigma(t), \tag{3}$$

где $p(t)$ — некоторая неотрицательная σ-интегрируемая функция. Сопоставляя (2) и (3), получаем, что мера множества e относительно функции распределения $(E_t f, f)$ равна

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi_e(t)\, d(E_t f, f) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t)\, \chi_e(t)\, d\sigma(t),$$

т. е. конечна и обращается в нуль вместе с интегралом (2).

Сделаем еще одно замечание относительно изоморфизма между пространством $L^2_\sigma(-\infty, \infty)$ и пространством H, осуществляемого соотношением

$$f = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dE_t g. \tag{4}$$

Это соотношение показывает, что

$$f = f(A)\, g.$$

Отсюда, если $f \in D_{\varphi(A)}$, то

$$\varphi(A) f = \varphi(A) f(A)\, g = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) f(t)\, dE_t g.$$

Таким образом, при изоморфном отображении H на $L^2_\sigma(-\infty, \infty)$ с помощью соотношения (4) оператору $\varphi(A)$ в H отвечает оператор умножения на $\varphi(t)$ в $L^2_\sigma(-\infty, \infty)$.

89. Примеры. Проиллюстрируем некоторые из рассмотренных нами фактов на примере оператора дифференцирования

$$\mathcal{P} = i\frac{d}{dt}$$

в $L^2(-\infty, \infty)$ и оператора Q умножения на независимую переменную в том же пространстве. Оба оператора являются самосопряженными. При этом они унитарно эквивалентны, а именно,

$$\mathcal{P} = \mathfrak{F} Q \mathfrak{F}^*,$$

где $\mathfrak{F}$ есть оператор Фурье — Планшереля. Поскольку спектр оператора Q прост и заполняет всю числовую ось (см. n° 83), то тем же свойством обладает спектр оператора $\mathcal{P}$.

A. Пусть $E_t^{(Q)}$ есть спектральная функция оператора Q, а $E_t^{(\mathcal{P})}$ — оператора $\mathcal{P}$. Так как

$$E^{(Q)}(\Delta) h = \chi_\Delta(t) h(t),$$

где $\chi_\Delta(t)$ — характеристическая функция интервала Δ, а $h = h(t)$ — произвольный элемент пространства $L^2(-\infty, \infty)$ и так как (см. n° 87)

$$E_t^{(\mathcal{P})} = \mathfrak{F} E_t^{(Q)} \mathfrak{F}^*,$$

то для произвольного конечного интервала $\Delta = [\alpha, \beta]$

$$E^{(\mathcal{P})}(\Delta) f = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\beta(u-t)} - e^{i\alpha(u-t)}}{i(u-t)} f(u)\, du,$$

где $f = f(t)$ — произвольный элемент $L^2(-\infty, \infty)$.

B. Припомним теорему 2 n° 83. В силу этой теоремы, если g есть какой-нибудь порождающий элемент оператора Q, то формула

$$f = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, dE_t^{(Q)} g,$$

которая элементу $f = f(t) \in L^2(-\infty, \infty)$ относит элемент $\varphi(t) \in L^2_\sigma(-\infty, \infty)$, где $\sigma(t) = (E_t g, g)$, устанавливает изометрическое отображение $L^2(-\infty, \infty)$ на $L^2_\sigma(-\infty, \infty)$. Так как исходный оператор есть уже сам оператор умножения в $L^2(-\infty, \infty)$, то естественно возникает вопрос о таком выборе порождающего элемента g_0, при котором указанное изометрическое отображение превратилось бы в тождественное преобразование

$$f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dE_t^{(Q)} g_0.$$

Для возможности этого равенства необходимо и достаточно, чтобы

$$E^{(Q)}(\Delta) g_0 = \chi_\Delta(t),$$

где Δ — произвольный конечный интервал, а $\chi_\Delta(t)$ — его характеристическая функция. Но при $\Delta \to [-\infty, \infty]$ функция $\chi_\Delta(t)$ не имеет предела в $L^2(-\infty, \infty)$. Следовательно, требуемый вектор g_0 не существует. Если мы все же желаем, чтобы ответ на поставленный выше вопрос был положителен, то мы должны пополнить пространство $L^2(-\infty, \infty)$ *несобственным элементом* g_0, проекция которого на подпространство $L^2(a, b)$ при любых конечных a, b есть функция, равная тождественно единице. Этот элемент g_0 есть, таким образом, не принадлежащая пространству $L^2(-\infty, \infty)$ *единичная функция*, $g_0(t) \equiv 1$.

C. Обратимся теперь к оператору $\mathscr{P}$. Пусть $h = h(t)$ — какой-нибудь порождающий элемент этого оператора. Тогда для любого $f \in L^2(-\infty, \infty)$ существует такой элемент $\psi(t) \in L^2_\sigma(-\infty, \infty)$, где $\sigma(t) = (E_t^{(\mathscr{P})}h, h)$, что

$$f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)\, dE_t^{(\mathscr{P})} h.$$

Здесь естественно поставить вопрос о таком выборе порождающего элемента h_0, при котором $\psi(t)$ есть преобразование Фурье — Планшереля функции $f(t)$ (или ему обратное). Мы потребуем, чтобы

$$\psi(t) = (\mathfrak{F}^* f)(t).$$

Таким образом, наряду с представлением

$$f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)\, dE_t^{(\mathscr{P})} h_0$$

мы имеем представление

$$f(s) = \operatorname{l.i.m.} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)\, e^{-ist}\, dt,$$

и, следовательно, должно иметь место соотношение

$$E^{(\mathscr{P})}(\Delta) h_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i\beta t} - e^{-i\alpha t}}{-it},$$

каков бы ни был конечный интервал $\Delta = [\alpha, \beta]$. Таким образом, требуемый вектор h_0 должен удовлетворять соотношениям

$$E^{(\mathscr{P})}(\Delta) h_0 = \mathfrak{F} E^{(Q)}(\Delta) g_0, \tag{1}$$

где g_0 есть единичная функция. Такого вектора h_0 в пространстве $L^2(-\infty, \infty)$ не существует. Мы введем h_0 как второй несобственный элемент пространства $L^2(-\infty, \infty)$. Равенство (1) показывает, что элемент h_0 надлежит рассматривать как преобразование Фурье — Планшереля несобственного элемента $g_0 \equiv 1$, которым, как известно, оказывается $h_0 = \sqrt{2\pi}\,\delta(t)$, где $\delta(t)$ есть δ-функция Дирака.

D. Функции $\varphi(t)$ от оператора $\mathcal{P}$, к которым мы теперь обратимся, должны удовлетворять прежде всего требованию измеримости. Если мы хотим, чтобы функция $\varphi(t)$ порождала ограниченный оператор, определенный всюду в $L^2(-\infty, \infty)$, то мы должны потребовать, чтобы она была ограниченной.

Пусть $\varphi(t)$ — такая функция. Если $f = f(t)$ — произвольная функция из $L^2(-\infty, \infty)$, а $g = g(t)$ — ее обратное преобразование Фурье — Планшереля, то

$$\varphi(\mathcal{P}) f = \mathfrak{F}\{\varphi(t)\, g(t)\}. \tag{2}$$

Особенно просто обстоит дело в том случае, когда функция $\varphi(t)$ не только ограничена, но и принадлежит $L^2(-\infty, \infty)$. Действительно, в этом случае существует

$$\psi(t) = (\mathfrak{F}\varphi)(t),$$

и правая часть формулы (2) равна

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t-s)\, f(s)\, ds.$$

Таким образом, в этом случае

$$\varphi(\mathcal{P}) f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t-s)\, f(s)\, ds. \tag{3}$$

Так как правая часть формулы (2) превращается в $\psi(t)$, когда в качестве $g(t)$ взята единичная функция $g_0(t)$, то $\psi(t)$ надлежит рассматривать как результат применения оператора $\varphi(\mathcal{P})$ к несобственному элементу h_0:

$$\psi(t) = \varphi(\mathcal{P})\, h_0.$$

Итак, если $\varphi(t)$ ограничена и принадлежит $L^2(-\infty, \infty)$, то достаточно найти $\varphi(\mathcal{P})\, h_0$, и определение $\varphi(\mathcal{P}) f$ сведется к нахождению некоторой свертки по формуле (3).

Допустим теперь, что функция $\varphi(t)$ ограничена, но не принадлежит $L^2(-\infty, \infty)$. Тогда естественно представить функцию $\varphi(t)$ в следующем виде:

$$\varphi(t) = (t+i)\,\varphi_1(t),$$

где

$$\varphi_1(t)=\frac{\varphi(t)}{t+i}$$

уже принадлежит $L^2(-\infty,\infty)$. Пусть

$$\varphi_1(\mathcal{F})h_0=\psi_1(t).$$

Тогда

$$\varphi_1(\mathcal{F})f=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_1(t-s)f(s)\,ds$$

и

$$\varphi(\mathcal{F})f=(\mathcal{F}+i)\varphi_1(\mathcal{F})f=\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{d}{dt}+1\right)\int_{-\infty}^{\infty}\psi_1(t-s)f(s)\,ds.$$

Е. В различных вопросах анализа часто встречаются интегральные операторы, ядра которых — функции от разности двух аргументов. Мы видим, что такие операторы являются функциями от оператора дифференцирования. В качестве примера приведем оператор D_λ, определяемый формулой

$$D_\lambda f=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(t-s)}{t-s}f(s)\,ds,$$

где λ — неотрицательный вещественный параметр. Этот оператор играет важную роль в теории интеграла Фурье. Для нас здесь представляет интерес то, что D_λ есть разложение единицы. Этот факт вытекает из следующего общего положения: *если E_λ есть разложение единицы самосопряженного оператора A, то*

$$E_{\sqrt{\lambda}}-E_{-\sqrt{\lambda}+0}\ (\lambda\geqslant 0)$$

есть разложение единицы оператора A^2. Но легко видеть, что

$$D_\lambda=E_{\sqrt{\lambda}}^{(\mathcal{F})}-E_{-\sqrt{\lambda}+0}^{(\mathcal{F})}.$$

Поэтому D_λ есть разложение единицы и притом оператора $\mathcal{F}^2$. А теперь покажем, что оператор $\mathcal{F}^2$ совпадает с оператором L, который определяется формулой

$$Lf=-\frac{d^2f}{dt^2}$$

на всех функциях $f(t)$ из $L^2(-\infty,\infty)$, имеющих абсолютно непрерывную производную $f'(t)$ и производную $f''(t)$, принадлежащую $L^2(-\infty,\infty)$.

Наперед ясно, что

$$\mathcal{P}^2 \subseteq L.$$

Поэтому подлежит доказательству лишь следующий факт: если

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f''(t)|^2 dt < \infty,$$

то

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|^2 dt < \infty.$$

Достаточно доказать этот факт для случая, когда функция $f(t)$ вещественна, а интегрирование происходит по полуоси. Возьмем тождества

$$\int_0^s [f'(t)]^2 dt = f(s) f'(s) - f(0) f'(0) - \int_0^s f(t) f''(t) dt,$$

$$\int_0^t f(s) f'(s) ds = \frac{1}{2}[f(t)]^2 - \frac{1}{2}[f(0)]^2.$$

Допуская, что $f'(t)$ не принадлежит $L^2(0, \infty)$ и, значит, принимая, что

$$\lim_{s\to\infty} \int_0^s [f'(t)]^2 dt = \infty,$$

заключаем из первого тождества, последний член правой части которого ограничен, что

$$\lim_{s\to\infty} f(s) f'(s) = \infty.$$

Поэтому из второго тождества найдем, что

$$\lim_{t\to\infty} [f(t)]^2 = \infty,$$

а это противоречит предположению о конечности интеграла

$$\int_0^{\infty} [f(t)]^2 dt < \infty.$$

Докажем теперь, что спектр оператора L двукратный. Прежде всего убедимся в том, что этот спектр не может быть простым. Допуская противное, возьмем какой-нибудь порождающий элемент

g оператора L, так что линейная оболочка множества векторов $D_\lambda g$ $(\lambda \geqslant 0)$ плотна в $L^2(-\infty, \infty)$. Следовательно, элемент g и подавно является порождающим для оператора $\mathscr{P}$. А так как спектр оператора $\mathscr{P}$ заполняет всю числовую ось, то ни для какого конечного интервала Δ вектор $E^{(\mathscr{P})}(\Delta)\,g$ не может равняться нулю. Возьмем какой-нибудь конечный интервал $\Delta = [\alpha, \beta]$, где $\beta > \alpha > 0$, и представим вектор $E^{(\mathscr{P})}(\Delta)\,g$ в виде

$$E^{(\mathscr{P})}(\Delta)\,g = \int_0^\infty \varphi(t)\,dD_t g,$$

что возможно, так как g есть порождающий элемент оператора L. Это представление можно переписать в виде

$$\int_\alpha^\beta dE_t^{(\mathscr{P})} g = \int_0^\infty \varphi(s)\,d\,\{E_{\sqrt{s}}^{(\mathscr{P})} - E_{-\sqrt{s}+0}^{(\mathscr{P})}\}\,g = \int_{-\infty}^\infty \varphi(t^2)\,dE_t^{(\mathscr{P})} g,$$

откуда вытекает, что

$$\varphi(t^2) = \begin{cases} 1 & (\alpha < t < \beta), \\ 0 & (-\beta < t < -\alpha), \end{cases}$$

что невозможно.

Итак, спектр оператора L не простой. Чтобы доказать, что он двукратный, надлежит показать, что оператор L имеет порождающий базис, состоящий из двух векторов. Возьмем два порождающих элемента $h_1 = h_1(t)$, $h_2 = h_2(t)$ оператора $\mathscr{P}$, из которых первый представляет нечетную, а второй — четную функцию. Произвольную функцию $f(t)$ из $L^2(-\infty, \infty)$ представим в виде суммы

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t)$$

нечетной функции $f_1(t)$ и четной функции $f_2(t)$. Так как h_1 — порождающий элемент оператора $\mathscr{P}$, то

$$f_1 = f_1(t) = \int_{-\infty}^\infty \varphi_1(s)\,d\,(E_s^{(\mathscr{P})} - E_0^{(\mathscr{P})})\,h_1. \tag{4}$$

Но

$$(E_s^{(\mathscr{P})} - E_0^{(\mathscr{P})})\,h_1 \equiv g_1(t;\,s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{is(u-t)}-1}{i\,(u-t)}\,h_1(u)\,du.$$

Следовательно,

$$g_1(-t;\ -s)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{is(-u-t)}-1}{i(u+t)}h_1(u)\,du=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{is(u-t)}-1}{i(-u+t)}h_1(-u)\,du=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{is(u-t)}-1}{i(u-t)}h_1(u)\,du=g_1(t;\ s).$$

Благодаря нечетности $f_1(t)$ из (4) вытекает поэтому, что

$$f_1(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(-s)\,d\,(E_s^{(\mathcal{P})}-E_0^{(\mathcal{P})})\,h_1.$$

Значит, $\varphi_1(t)$ есть четная функция и представление (4) принимает вид

$$f_1=\int_0^{\infty}\varphi_1(s)\,d\,(E_s^{(\mathcal{P})}-E_{-s}^{(\mathcal{P})})\,h_1=\int_0^{\infty}\varphi_1(\sqrt{t})\,dD_th_1.$$

Аналогично доказывается, что

$$f_2=\int_0^{\infty}\varphi_2(\sqrt{t})\,dD_th_2.$$

Следовательно, векторы h_1, h_2 образуют порождающий базис для оператора L. Не мешает заметить, что этот базис ортогональный.

F. Пространство $\mathrm{L}^2(-\infty,\infty)$ представимо в виде ортогональной суммы подпространств, составленных только из четных или только из нечетных функций. Каждое из этих подпространств приводит оператор $L=\mathcal{P}^2$. Учитывая четность (или нечетность) элементов из данных приводящих подпространств, легко видеть, что разложение единицы оператора L на каждом из этих подпространств есть интегральный оператор, в качестве ядра которого можно взять четную или, соответственно, нечетную часть ядра

$$\frac{1}{\pi}\frac{\sin\sqrt{\lambda}\,(t-s)}{t-s}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\sqrt{\lambda}}(\cos\mu t\cdot\cos\mu s+\sin\mu t\cdot\sin\mu s)\,d\mu.$$

Рассмотрение оператора L на четных (или нечетных) функциях в $\mathrm{L}^2(-\infty,\infty)$ эквивалентно изучению (положительных) операторов

$$L_cf=-f''\quad\text{и}\quad L_sf=-f''$$

в пространстве $L^2(0, \infty)$ с областью определения, состоящей из функций f с абсолютно непрерывной производной f' и с $f'' \in L^2 \in (0, \infty)$, при дополнительном условии

$$f'(0) = 0 \quad (\text{для } L_c), \quad f(0) = 0 \quad (\text{для } L_s).$$

Поэтому разложение единицы для оператора L_c в $L^2(0,\infty)$ порождается ядром

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\sqrt{\lambda}} \cos \mu t \cdot \cos \mu s \cdot d\mu = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{\sin\sqrt{\lambda}\,(t-s)}{t-s} + \frac{\sin\sqrt{\lambda}\,(t+s)}{t+s}\right\},$$

а для оператора L_s — ядром

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\sqrt{\lambda}} \sin \mu t \cdot \sin \mu s d\mu = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{\sin\sqrt{\lambda}\,(t-s)}{t-s} - \frac{\sin\sqrt{\lambda}\,(t+s)}{t+s}\right\}$$

(в обеих формулах $\lambda \geqslant 0$).

Таким образом, *спектр каждого из операторов* L_c и L_s *непрерывен и состоит из полуоси* $0 \leqslant \lambda < \infty$. Легко видеть, что этот спектр прост.

90. Кольца ограниченных самосопряженных операторов.

Определение. Совокупность $\mathfrak{R}$ ограниченных самосопряженных операторов называют *кольцом*, если из включений $A \in \mathfrak{R}$, $B \in \mathfrak{R}$ вытекают включения $AB \in \mathfrak{R}$ и $\alpha A + \beta B \in \mathfrak{R}$, где α, β — произвольные вещественные числа.

Кольцо $\mathfrak{R}$ называется *слабо замкнутым*, если из $A_n \in \mathfrak{R}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) и $A_n \overset{\text{сл}}{\to} A$ следует, что $A \in \mathfrak{R}$.

Так как произведение двух ограниченных самосопряженных операторов является самосопряженным оператором в том и только том случае, когда эти операторы перестановочны, то все операторы образующие кольцо, должны быть попарно перестановочными.

Обратно, всякое множество $\mathfrak{N} = \{A, B, C, \ldots\}$ попарно перестановочных ограниченных самосопряженных операторов вполне определяет некоторое слабо замкнутое кольцо, а именно минимальное слабо замкнутое кольцо, содержащее $\mathfrak{N}$. Это кольцо мы обозначим $\mathfrak{R}(\mathfrak{N})$ или $\mathfrak{R}(A, B, C, \ldots)$. Оно может быть определено как пересечение всех слабо замкнутых колец, содержащих $\mathfrak{N}$.

Нейману принадлежит следующая

Теорема. *Если пространство* H *сепарабельно, то всякому слабо замкнутому кольцу* $\mathfrak{R}$ *принадлежит такой ограниченный самосопряженный оператор* A, *что* $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(A)$.

Настоящий пункт посвящен доказательству этой теоремы. Для большей ясности выделим в виде лемм два промежуточных утверждения, которые в этом доказательстве используются.

Лемма 1. *Ограниченный самосопряженный оператор A с разложением единицы E_t принадлежит слабо замкнутому кольцу $\mathfrak{R}$ в том и только том случае, когда этому кольцу принадлежит E_λ при любом $\lambda \leqslant 0$ и $I - E_\mu$ при любом $\mu > 0$.* (При этом сепарабельность пространства H не предполагается.)

Доказательство. Чтобы доказать достаточность условия, примем, что спектр оператора A лежит в интервале $(-c, c)$, и возьмем точки

$$-c = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m < \ldots < t_n = c,$$

среди которых содержится также точка 0 (скажем, $t_m = 0$). Введем оператор

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} t_{k-1} (E_{t_k} - E_{t_{k-1}}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} t_{k-1} (E_{t_k} - E_{t_{k-1}}) + \sum_{k=m+2}^{n} t_{k-1} \{(I - E_{t_{k-1}}) - (I - E_{t_k})\},$$

который, по условию, принадлежит $\mathfrak{R}$. При неограниченном увеличении n и стремлении к нулю наибольшей из разностей $t_k - t_{k-1}$ оператор A_n равномерно стремится к оператору

$$\int_{-c}^{c} t \, dE_t = A.$$

Поэтому, в силу слабой замкнутости кольца, $A \in \mathfrak{R}$, и значит, достаточность доказана.

При доказательстве необходимости будем опираться на то, что вместе с A кольцу $\mathfrak{R}$ принадлежит любой многочлен от A без свободного члена, с вещественными коэффициентами. Построим при любом $\lambda \leqslant 0$ функцию

$$h_\varepsilon(t; \lambda) = \begin{cases} 1 & (t \leqslant \lambda - \varepsilon), \\ \dfrac{\lambda - t}{\varepsilon} & (\lambda - \varepsilon \leqslant t \leqslant \lambda), \\ 0 & (t \geqslant \lambda) \end{cases}$$

и возьмем вещественный многочлен $p_\varepsilon(t)$ без свободного члена, удовлетворяющий неравенству

$$|h_\varepsilon(t; \lambda) - p_\varepsilon(t)| \leqslant \varepsilon \qquad (-c \leqslant t \leqslant c).$$

Существование такого многочлена доказывается с помощью теоремы Вейерштрасса. Теперь при любых $f, g \in$ H можно написать следующее тождество:

$$(p_\varepsilon(A) f, g) - (E_\lambda f, g) = \int_{-c}^{c} p_\varepsilon(t)\, d(E_t f, g) - \int_{-c}^{\lambda} d(E_t f, g) =$$

$$= \int_{-c}^{c} \{p_\varepsilon(t) - h_\varepsilon(t; \lambda)\}\, d(E_t f, g) + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\lambda-\varepsilon}^{\lambda} (\lambda - \varepsilon - t)\, d(E_t f, g) = \mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2.$$

Но легко видеть, что

$$|\mathfrak{J}_1| \leqslant \|g\| \sqrt{\int_{-c}^{c} |p_\varepsilon(t) - h_\varepsilon(t; \lambda)|^2\, d(E_t f, f)} \leqslant \varepsilon \|f\| \cdot \|g\|$$

и, значит, $\mathfrak{J}_1 \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. С другой стороны,

$$\mathfrak{J}_2 = -(E_\lambda f, g) + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\lambda-\varepsilon}^{\lambda} (E_t f, g)\, dt = \frac{1}{\varepsilon}\int_{\lambda-\varepsilon}^{\lambda} ((E_t - E_\lambda) f, g)\, dt,$$

откуда следует, что

$$|\mathfrak{J}_2| \leqslant \|(E_\lambda - E_{\lambda-\varepsilon}) f\| \cdot \|g\|,$$

т. е. $\mathfrak{J}_2$ также стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Таким образом, принадлежащий $\mathfrak{R}$ оператор $p_\varepsilon(A)$ слабо (и даже сильно) сходится к оператору E_λ, который поэтому должен принадлежать $\mathfrak{R}$. Аналогично доказывается, что кольцу $\mathfrak{R}$ принадлежит $I - E_\mu$ при $\mu > 0$. Здесь нужно лишь взять функцию

$$h_\varepsilon(t; \mu) = \begin{cases} 0 & (t \leqslant \mu - \varepsilon), \\ \dfrac{t - \mu + \varepsilon}{\varepsilon} & (\mu - \varepsilon \leqslant t \leqslant \mu), \\ 1 & (t \geqslant \mu). \end{cases}$$

Лемма 2. *Если пространство* H *сепарабельно, то для любого слабо замкнутого кольца* $\mathfrak{R}$ *можно указать последовательность попарно перестановочных ортопроекторов* $P_1, P_2, P_3, \ldots$ *такую, что*

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(P_1, P_2, P_3, \ldots).$$

Доказательство. Пусть кольцо $\mathfrak{R}$ порождается ограниченными самосопряженными операторами $A^{(\alpha)}, A^{(\beta)}, \ldots,$ которым принадлежат разложения единицы $E_t^{(\alpha)}, E_t^{(\beta)}, \ldots$ В таком случае, по лемме 1,

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(E_\lambda^\alpha, I - E_\mu^\alpha, E_\lambda^\beta, I - E_\mu^\beta, \ldots),$$

где μ пробегает всевозможные положительные, а λ — всевозможные неположительные значения. Таким образом, мы можем сказать, что

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(\mathfrak{N}),$$

где $\mathfrak{N}$ означает некоторый континуум попарно перестановочных проектирующих операторов. Однако, по теореме 2 n° 34 этот континуум содержит плотную в нем в смысле сильной сходимости последовательность $P_1, P_2, P_3, \ldots$ Если мы положим

$$\mathfrak{R}(P_1, P_2, P_3, \ldots) = \mathfrak{R}_1,$$

то, очевидно, $\mathfrak{R}_1 \subseteq \mathfrak{R}$. А так как для любого $P \in \mathfrak{N}$ найдется подпоследовательность $\{P_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, сильно сходящаяся к P, то $P \in \mathfrak{R}_1$ и, значит, $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{R}_1$, откуда следует, что и $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{R}_1$. Поэтому $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}$, и лемма 2 доказана.

Теперь мы можем приступить к доказательству теоремы Неймана.

Итак, пусть дано слабо замкнутое кольцо $\mathfrak{R}$. Согласно лемме 2 оно порождается какой-то последовательностью попарно перестановочных проектирующих операторов:

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(P_1, P_2, P_3, \ldots).$$

Займемся прежде всего некоторой «перестройкой» этой порождающей последовательности $\{P_k\}_1^{\infty}$. Иначе говоря, шаг за шагом построим другую последовательность $\{Q_k\}_1^{\infty}$ попарно перестановочных проектирующих операторов, которая порождает то же кольцо $\mathfrak{R}$.

Прежде всего полагаем

$$Q_1 = P_1. \tag{1}$$

Затем возьмем ортопроектор P_2 и с его помощью построим и присоединим к Q_1 два оператора, а именно

$$Q_2 = P_2 Q_1, \qquad Q_3 = Q_1 + P_2 - P_2 Q_1. \tag{2}$$

Эта запись показывает, что операторы Q_2 и Q_3 входят в $\mathfrak{R}$, и из нее видно также, что

$$P_2 = Q_2 + Q_3 - Q_1. \tag{2'}$$

Оператор Q_3 можно еще представить в виде суммы

$$Q_3 = Q_1 + P_2(I - Q_1)$$

двух ортопроекторов, проектирующих на взаимно ортогональные подпространства. Отсюда и из вида оператора Q_2, который проектирует на пересечение двух подпространств, заключаем, что

$$Q_2 \leqslant Q_1 \leqslant Q_3. \tag{2''}$$

На дальнейших этапах мы будем по уже построенным новым операторам Q_i и одному старому P_j получать целую систему новых операторов, а именно, на n-м шаге мы введем 2^{n-1} операторов, которые будут «перемежаться» с уже построенными до этого $2^{n-1}-1$ операторами в том смысле, что будет иметь место неравенство, аналогичное неравенству (2″). При этом оператор P_n будет представляться через операторы Q_i по формуле, аналогичной равенству (2′). Третий шаг таков: берем оператор P_3 и по операторам Q_2, Q_1, Q_3 строим

$$\left.\begin{aligned} &Q_4 = P_3Q_2, && Q_5 = Q_2 + P_3(Q_1 - Q_2), \\ &Q_6 = Q_1 + P_3(Q_3 - Q_1), && Q_7 = Q_3 + P_3 - P_3Q_3 = Q_3 + P_3(I - Q_3); \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

при этом

$$P_3 = Q_4 + Q_5 + Q_6 + Q_7 - (Q_1 + Q_2 + Q_3) \tag{3′}$$

и

$$Q_4 < Q_2 < Q_5 < Q_1 < Q_6 < Q_3 < Q_7. \tag{3″}$$

Отсюда уже видно, как эта процедура продолжается далее; в результате мы и получим искомую последовательность проекторов Q_i, которая порождает кольцо $\mathfrak{R}$ и которую мы примем вместо первоначальной.

Теперь займемся построением некоторого разложения единицы. С этой целью возьмем интервал $[-1, 0]$, разделим его на три равные части и обозначим открытый средний интервал $\mathfrak{J}_1$. Каждый из двух оставшихся интервалов также разделим на три равные части и обозначим два открытых средних интервала в порядке слева направо через $\mathfrak{J}_2$ и $\mathfrak{J}_3$. Неограниченно продолжая этот процесс, получим бесконечную последовательность открытых интервалов, которые представляют собой не что иное, как смежные интервалы канторова совершенного множества. После построения последовательности интервалов $\{\mathfrak{J}_k\}_1^\infty$ положим

$$E_t = Q_k, \quad \text{если } t \in \mathfrak{J}_k.$$

Функция E_t определена, таким образом, на некотором плотном в интервале $[-1, 0]$ точечном множестве $\mathfrak{J}$. Из свойства ортопроекторов Q_k следует, что

$$E_\lambda \leqslant E_\mu, \quad E_\lambda E_\mu = E_\mu E_\lambda = E_\lambda \qquad (\lambda \leqslant \mu; \quad \lambda, \mu \in \mathfrak{J}).$$

Первое из этих соотношений показывает, что всякая последовательность $\{E_{t_n}\}_{n=1}^\infty$, где

$$t_n \in \mathfrak{J}, \quad t_n \leqslant t_{n+1} \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} t_n = t \qquad (-1 < t \leqslant 0), \tag{4}$$

имеет предел, который по теореме 1 n° 38 является ортопроектором. Если мы докажем, что этот предел не зависит от последовательности $\{t_n\}_1^\infty$, а лишь от t, после чего обозначим его E_t, то, дополнив данное определение соглашениями

$$E_t = 0$$

при $t \leqslant -1$ и

$$E_t = I$$

при $t > 0$, мы и получим разложение единицы, которое является целью нашего построения. Доказательство упомянутой независимости является следствием того, что из двух различных последовательностей, удовлетворяющих условиям (4) и имеющих общий предел, можно составить единую последовательность того же типа и с тем же пределом.

Построенное разложение единицы определяет некоторый ограниченный самосопряженный оператор A, и этот оператор, как легко видеть, порождает кольцо $\mathfrak{R}$. Действительно, $I - E_\mu = 0$ при $\mu > 0$. Следовательно, по лемме 1

$$\mathfrak{R}(A) = \mathfrak{R}(E_\lambda),$$

где λ пробегает все значения $\leqslant 0$. С другой же стороны, в силу нашего построения,

$$\mathfrak{R}(E_\lambda) = \mathfrak{R}.$$

Таким образом, теорема Неймана доказана.

91. Характеристическое свойство функций от самосопряженного оператора. Пусть T — линейный замкнутый оператор с плотной в H областью определения, а A — некоторый самосопряженный оператор в том же пространстве. При каких условиях T является функцией от A? Необходимое условие без труда получается из рассмотрений n° 90 и состоит в перестановочности оператора T со всяким самосопряженным оператором, который сам перестановочен с A. Оказывается, что в случае сепарабельного пространства это условие является и достаточным. Относящаяся сюда теорема в неявной форме содержится в работах Неймана, относящихся к 1931—1932 гг. (она получается из сопоставления результатов двух статей этого автора) *). Первая явная формулировка и прямое доказательство принадлежат Ф. Риссу **) (1935 г.). В дальнейшем доказательство Ф. Рисса упростил Б. С.-Надь ***) (1942 г.).

---

*) Neuman J., Über Funktionen von Funktionaloperatoren, Ann. of Math. 32 (1931), 191—226; Über einen Satz von Herrn M. Stone, Ann. of Math. 33 (1932), 567—573.

**) Riesz F., Sur les fonctions des transformations hermitiennes dans l'espace de Hilbert, Acta Sci. Math. Szeged 7 (1935), 147—159.

***) Sz.-Nagy B., Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes, Erg. d. Math., Berlin, 1942.

В книге по функциональному анализу Ф. Рисса и Б. С.-Надя *) читатель найдет это упрощенное доказательство вместе с некоторыми дальнейшими литературными указаниями. Здесь же мы изложим некоторый близкий к нему вариант доказательства.

Переходя к подлежащей доказательству теореме, заметим, что оператор A можно предположить ограниченным. Действительно, оператор $A' = \operatorname{arctg} A$ всегда ограничен, а если мы докажем, что некоторый оператор T есть функция от оператора A', то тем самым будет доказано, что он является также функцией от оператора A.

Условимся в дальнейшем обозначать символом $\mathfrak{P}(A)$ совокупность всех ограниченных самосопряженных операторов, перестановочных с самосопряженным оператором A.

Т е о р е м а. *Пусть пространство* H *сепарабельно, а* A — *некоторый ограниченный самосопряженный оператор в нем. Если замкнутый линейный оператор* T *с плотной в* H *областью определения перестановочен с каждым из операторов совокупности* $\mathfrak{P}(A)$, *то* T *есть функция от оператора* A.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть E_t — разложение единицы оператора A, а $g \in \mathrm{D}_T$ — существующий согласно теореме 2 n° 76 элемент, такой, что всякое множество меры нуль относительно функции распределения $(E_t g, g)$ имеет меру нуль относительно $(E_t h, h)$ при любом $h \in \mathrm{H}$. Этим элементом g мы воспользуемся ниже, а вначале докажем одно вспомогательное предложение.

Л е м м а. *Для любого* $f \in \mathrm{D}_T$ *можно указать последовательность многочленов* $\mathcal{P}_n(t)$ *так, чтобы*

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{P}_n(A) f = Tf. \tag{1}$$

Действительно, как и в n° 76, введем в H подпространство

$$\mathrm{F} = \{f, Af, A^2 f, \ldots\}$$

и пусть P — оператор проектирования на F. Этот самосопряженный оператор перестановочен с A и, значит, входит в $\mathfrak{P}(A)$. Следовательно, оператор T перестановочен с P, а потому

$$Tf = TPf = PTf \in \mathrm{F}.$$

Полученное включение означает, что для некоторой последовательности полиномов $\mathcal{P}_n(t)$ имеет место (1).

Теперь образуем, как это было сделано в n° 51, гильбертово пространство $\mathrm{H} \oplus \mathrm{H}$ пар $\{h_1, h_2\}$ и сопоставим оператору B в H оператор

$$\mathbf{B}\{h_1, h_2\} = \{Bh_1, Bh_2\}$$

*) R i e s z F. e t S z-N a g y B., Leçons d'analyse fonctionelle, Budapest, 1953. (Есть русский перевод: Ф. Р и с с и Б. С.-Н а д ь, Лекции по функциональному анализу, ИЛ, 1954.)

в $\mathrm{H} \oplus \mathrm{H}$. Оператору A в H будет соответствовать ограниченный самосопряженный оператор $\mathbf{A}$ в $\mathrm{H} \oplus \mathrm{H}$, а оператору T — лишь замкнутый линейный оператор $\mathbf{T}$ с плотной в $\mathrm{H} \oplus \mathrm{H}$ областью определения. Ясно, что оператор $\mathbf{T}$ перестановочен с каждым из операторов совокупности $\mathfrak{P}(\mathbf{A})$. Поэтому мы можем к операторам $\mathbf{T}$ и $\mathbf{A}$ применить только что доказанную лемму. Мы применим ее к элементу $\{g, f\}$, где f — произвольный вектор из D_T, а g — тот специальный вектор, который был введен в самом начале доказательства. На основании леммы найдется последовательность полиномов $\mathcal{P}_n(t)$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{P}_n(\mathbf{A})\{g, f\} = \mathbf{T}\{g, f\}.$$

Но это равенство означает, что

$$\lim \mathcal{P}_n(A) g = Tg, \tag{2}$$

$$\lim \mathcal{P}_n(A) f = Tf, \tag{3}$$

т. е. одна и та же последовательность полиномов, о которых идет речь в лемме, может быть выбрана для двух элементов из D_T (то, что один из этих двух элементов нами взят специальным образом, сыграет свою роль позже). Благодаря соотношению (2) величина

$$\| [\mathcal{P}_n(A) - \mathcal{P}_m(A)] g \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{P}_n(t) - \mathcal{P}_m(t)|^2 \, d(E_t g, g)$$

стремится к нулю при $m, n \to \infty$. Отсюда следует, что последовательность $\{\mathcal{P}_n(t)\}_1^\infty$ сходится в пространстве L_σ^2, где $\sigma(t) = (E_t g, g)$ к некоторой функции $\varphi(t)$. На основании известной теоремы теории функций (см. п° 11), найдется подпоследовательность $\{\mathcal{P}_{n_i}(t)\}_{i=1}^\infty$, которая сходится к $\varphi(t)$ всюду, кроме некоторого множества нулевой σ-меры, на котором мы можем положить $\varphi(t) = 0$.

Если бы мы взяли другую последовательность полиномов $\{\mathcal{Q}_n(A)\}_1^\infty$, для которой

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{Q}_n(A) g = Tg,$$

то из соотношения

$$\| [\mathcal{P}_n(A) - \mathcal{Q}_m(A)] g \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{P}_n(t) - \mathcal{Q}_m(t)|^2 \, d(E_t g, g)$$

мы заключили бы, что

$$\lim_{m\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t) - \mathcal{Q}_m(t)|^2 \, d(E_t g, g) = 0,$$

т. е. функция, к которой в L_σ^2 сходится последовательность $\{\mathcal{Q}_n(t)\}_1^\infty$ совпадает с $\varphi(t)$ почти всюду относительно $\sigma(t)$.

Таким образом, мы получили вполне определенную функцию $\varphi(t)$, которая в силу свойства элемента g измерима и почти всюду конечна относительно операторной меры E_t. Кроме того, благодаря соотношению (3), функция $\varphi(t)$ принадлежит также пространству L_τ^2 при $\tau(t) = (E_t f, f)$, где f — любой элемент из D_T. Отсюда видно, что функция $\varphi(t)$ определяет некоторый оператор $\varphi(A)$ и из равенства

$$(Tf, f) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, d(E_t f, f) \qquad (f \in D_T)$$

легко заключить, что

$$\varphi(A) f = Tf$$

для любого $f \in D_T$. Это означает, что $\varphi(A) \supseteq T$. Теперь докажем, что $T \supseteq \varphi(A)$, откуда уже будет следовать, что $T = \varphi(A)$. С этой целью обозначим через $\chi_n(t)$ характеристическую функцию множества, на котором $|\varphi(t)| \leqslant n$, и введем проектирующий оператор $\chi_n(A)$, который, очевидно, принадлежит $\mathfrak{P}(A)$. Поэтому оператор T перестановочен с $\chi_n(A)$ и, следовательно, для любого $f \in D_T$ вектор $\chi_n(A)h$ принадлежит D_T, а значит, и $D_{\varphi(A)}$, так что

$$T\chi_n(A)h = \varphi(A)\chi_n(A)h.$$

Покажем, что это равенство справедливо не только при $h \in D_T$, но и при любом $h \in H$. Для этого построим последовательность $h_i \in D_T$, $h_i \to h$, где h — произвольный вектор из H. Так как оператор $\varphi(A)\chi_n(A)$ ограничен, то при $i \to \infty$

$$T\chi_n(A)h_i = \varphi(A)\chi_n(A)h_i \to \varphi(A)\chi_n(A)h.$$

Из замкнутости оператора $T\chi_n(A)$ следует, что $h \in D_{T\chi_n(A)}$ и

$$T\chi_n(A)h = \varphi(A)\chi_n(A)h. \tag{4}$$

Теперь примем, что $h \in D_{\varphi(A)}$. Тогда это равенство можно представить в виде

$$T\chi_n(A)h = \chi_n(A)\varphi(A)h.$$

Но вектор $\chi_n(A)h$ стремится к h при $n \to \infty$. А так как правая часть (4) при $n \to \infty$ стремится к $\varphi(A)h$, то вектор $T\chi_n(A)h$ при $n \to \infty$ имеет предел. В силу замкнутости оператора T это означает, что $h \in D_T$, чем и доказано включение $D_{\varphi(A)} \subseteq D_T$.

92. Теорема о порождающем операторе. Нейману принадлежит также следующая

Т е о р е м а. *Для любого множества $\{C_\alpha\}$ попарно перестановочных самосопряженных операторов C_α в сепарабельном пространстве* *можно указать ограниченный самосопряженный оператор A такой, что все операторы C_α являются функциями от него.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда все операторы C_α ограничены. Сделав это предположение, введем минимальное слабо замкнутое кольцо $\mathfrak{R}$, содержащее все операторы C_α. По теореме п° 90 это кольцо $\mathfrak{R}$ порождается каким-то одним ограниченным самосопряженным оператором A:

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(A).$$

Теперь введем кольцо $\mathfrak{F}(A)$ всех ограниченных самосопряженных операторов, являющихся функциями от оператора A. Ограниченный самосопряженный оператор B принадлежит $\mathfrak{F}(A)$ в том и только том случае, когда он перестановочен с каждым из операторов, входящих в $\mathfrak{P}(A)$. Отсюда следует, что кольцо $\mathfrak{F}(A)$ слабо замкнуто. А так как это кольцо содержит оператор A, то оно содержит кольцо $\mathfrak{R}(A)$, порождаемое оператором A. Значит,

$$\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{F}(A),$$

что и доказывает теорему.

ГЛАВА VII

СПЕКТР И ВОЗМУЩЕНИЯ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

93. Непрерывный спектр самосопряженного оператора. Напомним, что классификация точек спектра самосопряженного оператора была дана в п° 48, а затем в п° 82 было установлено, что полный спектр $\mathcal{S}(A)$ самосопряженного оператора A совпадает с множеством точек роста его спектральной функции E_t и что множество точек разрыва функции E_t совпадает с совокупностью всех собственных значений оператора A, т. е. с его точечным спектром $\mathcal{D}(A)$. Чтобы непрерывный спектр самосопряженного оператора A также охарактеризовать в терминах спектральной функции, примем для него сейчас новое определение, а затем покажем *) его эквивалентность определению п° 48.

Определение. *Непрерывный спектр* $\mathcal{C}(A)$ самосопряженного оператора A (называемый также *предельным спектром* или *спектром сгущения*) есть совокупность всех неизолированных точек роста принадлежащего оператору A разложения единицы E_t, а также собственных значений бесконечной кратности.

Заметим сразу же, что из этого определения следует замкнутость множества $\mathcal{C}(A)$.

Точки непрерывного спектра, подобно собственным значениям оператора A, могут быть описаны с помощью однородного уравнения

$$Af-\lambda f=0. \tag{1}$$

Однако, в отличие от точек $\lambda \in \mathcal{D}(A)$, для которых уравнение (1) имеет точные нетривиальные решения, точки $\lambda \in \mathcal{C}(A)$ характеризуются приближенной нетривиальной разрешимостью этого уравнения. Точный смысл этого утверждения выражает следующая

Теорема 1. *Точка λ принадлежит непрерывному спектру $\mathcal{C}(A)$ оператора A в том и только том случае, когда в D_A существует бесконечная ортонормированная последовательность элементов f_n, для которой*

$$\lim_{n\to\infty}(Af_n-\lambda f_n)=0. \tag{2}$$

*) См. теорему 3 настоящего пункта.

Доказательство. Если $\lambda \in \mathscr{C}(A)$, то λ — либо собственное значение бесконечной кратности оператора A, либо неизолированная точка роста функции E_t. В первом случае в качестве $\{f_n\}_1^\infty$ можно взять любую бесконечную ортонормированную последовательность элементов из принадлежащего λ собственного подпространства. Во втором случае при любом $\delta > 0$ существует такое положительное $\delta' < \delta$, что подпространство $(E_{\lambda+\delta'} - E_{\lambda-\delta'})\,\mathrm{H}$ составляет правильную часть подпространства $(E_{\lambda+\delta} - E_{\lambda-\delta})\,\mathrm{H}$. Поэтому в $(E_{\lambda+\delta} - E_{\lambda-\delta})\,\mathrm{H}$ найдется нормированный вектор f, ортогональный к $(E_{\lambda+\delta'} - E_{\lambda-\delta'})\,\mathrm{H}$. Выберем неограниченно убывающую последовательность положительных чисел δ_n так, чтобы каждый раз пространство $(E_{\lambda+\delta_n} - E_{\lambda-\delta_n})\,\mathrm{H}$ было правильной частью пространства $(E_{\lambda+\delta_{n-1}} - E_{\lambda-\delta_{n-1}})\,\mathrm{H}$ и построим бесконечную последовательность элементов $f_n \in (E_{\lambda+\delta_n} - E_{\lambda-\delta_n})\,f$, для которой

$$\| f_n \| = 1 \quad \text{и} \quad f_n \perp (E_{\lambda+\delta_{n-1}} - E_{\lambda-\delta_{n-1}})\,\mathrm{H}.$$

Векторы f_n удовлетворяют соотношению (2), так как

$$\| Af_n - \lambda f_n \|^2 = \int_{\lambda-\delta_n}^{\lambda+\delta_n} (t-\lambda)^2\, d(E_t f_n, f_n) \leqslant \delta_n^2.$$

Таким образом, одно утверждение теоремы доказано.

Для доказательства второго утверждения примем, что существует ортонормированная последовательность векторов $\{f_n\}_1^\infty$, удовлетворяющих соотношению (2), причем, вопреки утверждению теоремы, $\lambda \in \mathscr{C}(A)$. Последнее означает, что λ есть либо точка постоянства спектральной функции E_t, либо собственное значение конечной кратности оператора A, изолированное от других точек роста функции E_t. В первом случае мы будем иметь при некотором $\delta > 0$ соотношение

$$(E_{\lambda+\delta} - E_{\lambda-\delta})\,\mathrm{H} = 0,$$

из которого следует неравенство

$$\| Af - \lambda f \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (t-\lambda)^2\, d(E_t f, f) \geqslant \delta^2 \| f \|^2 \tag{3}$$

для любого $f \in \mathrm{D}_A$. Это неравенство, очевидно, несовместимо с существованием указанной выше последовательности $\{f_n\}_1^\infty$. Во втором случае обозначим через G_λ собственное подпространство оператора A, принадлежащее собственному значению λ. Это подпространство конечномерно, пусть $g_1, g_2, \ldots, g_r$ — какой-нибудь его ортонормированный базис. Присоединим эти r векторов к последовательности

$\{f_n\}_1^\infty$ и проортонормируем полученную последовательность так, чтобы первыми r векторами были $g_1, g_2, \ldots, g_r$. Дальнейшие векторы обозначим $g_{r+1}, g_{r+2}, \ldots$

Соотношение (2) теперь можно переписать в виде

$$\lim_{n\to\infty}(Ag_n - \lambda g_n) = 0. \tag{2'}$$

С другой стороны, при некотором $\delta > 0$ для любого элемента $f \in D_A$, ортогонального подпространству G_λ, будем иметь неравенство

$$\| Af - \lambda f \| \geqslant \delta \| f \|. \tag{3'}$$

Поэтому при любом $n > r$

$$\| Ag_n - \lambda g_n \| \geqslant \delta. \tag{3''}$$

Так как соотношения (2′) и (3″) несовместимы, то доказательство теоремы 1 закончено.

Следующие две теоремы дополняют результаты п°п° 48 и 49. При этом, как и в п° 49, A' означает часть оператора A, действующую в инвариантном подпространстве $H' = H \ominus G_\lambda$, если $\lambda \in \mathscr{D}(A)$ и G_λ — соответствующее собственное подпространство оператора A, и $A' = A$, если $\lambda \overline{\in} \mathscr{D}(A)$.

Т е о р е м а 2. 1°. *Если* $\lambda \overline{\in} \mathscr{C}(A)$, *то оператор* $(A' - \lambda I)^{-1}$ *ограничен.* 2°. *Если* $\lambda \in \mathscr{C}(A)$ *и не является собственным значением бесконечной кратности оператора* A, *то оператор* $(A' - \lambda I)^{-1}$ *неограничен.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\lambda \overline{\in} \mathscr{C}(A)$, то для всех $f \in D_A$, при некотором $\delta > 0$ имеет место неравенство (3′), т. е.

$$\| A'f - \lambda f \| \geqslant \delta \| f \|,$$

откуда следует, что

$$\| (A' - \lambda I)^{-1} \| \leqslant \frac{1}{\delta},$$

и утверждение 1° доказано.

Пусть выполнено условие второго утверждения. Тогда λ оказывается неизолированной точкой роста для разложения единицы E'_t оператора A' в H', т. е. $\lambda \in \mathscr{C}(A')$, причем $\lambda \overline{\in} \mathscr{D}(A')$. По теореме 1 найдется бесконечная ортонормированная последовательность векторов $f_n \in H'$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, для которой

$$\lim_{n\to\infty}(A'f_n - \lambda f_n) = 0,$$

а это значит, что оператор $(A' - \lambda I)^{-1}$ неограничен.

Следующая теорема показывает в частности (см. утверждения 3° и 4°), что принятое в этом пункте определение непрерывного спектра эквивалентно определению п° 48.

Теорема 3. 1°. *Соотношение* $\lambda \overline{\in} \mathscr{S}(A)$ *равносильно равенству* $\overline{\Delta_\lambda(A)} = \mathrm{H}$. 2°. *Соотношение* $\lambda \in \mathscr{D}(A)$ *равносильно неравенству* $\overline{\Delta_\lambda(A)} \neq \mathrm{H}$. 3°. *Если* $\lambda \overline{\in} \mathscr{C}(A)$, *то* $\overline{\Delta_\lambda(A)} = \Delta_\lambda(A)$. 4°. *Если* $\lambda \in \mathscr{C}(A)$ *и не является собственным значением бесконечной кратности, то* $\overline{\Delta_\lambda(A)} \neq \Delta_\lambda(A)$.

Доказательство. Утверждения 1° и 2° имеют место в силу определения 2 и теоремы 2 п° 48.

Если $\lambda \overline{\in} \mathscr{C}(A)$, то по теореме 2 настоящего пункта оператор $(A' - \lambda I)^{-1}$ ограничен. Отсюда и из замкнутости оператора A' следует замкнутость многообразия $\Delta_\lambda(A')$. А так как, согласно п° 49, $\Delta_\lambda(A') = \overline{\Delta_\lambda(A)}$, то утверждение 3° также доказано.

Если, наконец, выполнено условие утверждения 4°, то симметрический оператор $(A' - \lambda I)^{-1}$ неограничен, снова по теореме 2 настоящего пункта. Поэтому (см. п° 25) его область определения $\Delta_\lambda(A') = \overline{\Delta_\lambda(A)}$ не может совпадать со всем подпространством $\overline{\Delta_\lambda(A)}$, и теорема доказана.

Критерий отсутствия в данном замкнутом интервале точек непрерывного спектра самосопряженного оператора A дает

Теорема 4. *Замкнутый интервал* $[\lambda_0 - \varrho,\ \lambda_0 + \varrho]$ *не содержит точек из* $\mathscr{C}(A)$ *в том и только том случае, когда существует конечномерное подпространство* $\mathrm{G} \subset \mathrm{H}$ *такое, что для любого вектора* $f \neq 0$ *из* D_A, *ортогонального* G, *имеет место неравенство*

$$\|(A - \lambda_0 I) f\| > \varrho \|f\|. \tag{4}$$

Доказательство. Если множество $\mathscr{C}(A)$ не имеет точек в интервале $[\lambda_0 - \varrho,\ \lambda_0 + \varrho]$, то часть спектра $\mathscr{S}(A)$, лежащая в этом интервале, исчерпывается конечным числом собственных значений конечной кратности. Обозначая через G линейную оболочку всех отвечающих этим собственным значениям собственных векторов, получим при некотором $\delta > \varrho$ неравенство

$$\|(A - \lambda_0 I) f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (t - \lambda_0)^2 \, d(E_t f, f) \geqslant \delta^2 \|f\|^2,$$

если только $f \in \mathrm{D}_A$ и $f \perp \mathrm{G}$. Отсюда и получается (4) (при $f \neq 0$).

Допустим теперь, что условие теоремы выполнено, но, вопреки теореме, пересечение $[\lambda_0 - \varrho,\ \lambda_0 + \varrho] \cap \mathscr{C}(A)$ непусто. Это значит, что подпространство $(E_{\lambda_0+\rho+0} - E_{\lambda_0-\rho})\,\mathrm{H}$ бесконечномерно. Следовательно, в этом подпространстве найдется вектор $f \neq 0$, ортогональный $(E_{\lambda_0+\rho+0} - E_{\lambda_0-\rho})\,\mathrm{G}$. Этот вектор f, очевидно, принадлежит D_A и ортогонален G. Поэтому для него должно быть выполнено (4). А с другой стороны, для него

$$\|(A-\lambda_0 I) f\|^2=\int_{\lambda_0-\rho}^{\lambda_0+\rho+0}(t-\lambda_0)^2\, d(E_t f, f)\leqslant$$

$$\leqslant \varrho^2 \int_{\lambda_0-\rho}^{\lambda_0+\rho+0} d(E_t f, f)=\varrho^2(f, f).$$

Противоречие получено; значит, теорема доказана.

В заключение отметим, что в случае произвольного замкнутого, но не самосопряженного оператора T точечный спектр $\mathscr{D}(T)$ определяется как множество собственных значений, а непрерывный спектр $\mathscr{C}(T)$ как множество тех λ, для которых существует ограниченная некомпактная последовательность $\{f_n\}_1^\infty$ векторов, удовлетворяющих условию (2). При этом спектр $\mathscr{S}(T)$, вообще говоря, не исчерпывается точками множеств $\mathscr{D}(T)$ и $\mathscr{C}(T)$, а возможен еще так называемый *остаточный спектр*, состоящий из тех значений λ, при которых $\Delta_\lambda(T)$ не плотно в H и которые при этом не являются собственными значениями оператора T.

94. Теоремы Г. Вейля и Неймана о вполне непрерывных возмущениях. Г. Вейлю *) принадлежит следующая замечательная

Теорема 1. *Если к самосопряженному оператору A прибавить вполне непрерывный самосопряженный оператор K, то непрерывный спектр оператора A не изменится, т. е.*

$$\mathscr{C}(A+K)=\mathscr{C}(A).$$

Доказательство. Из спектрального разложения вполне непрерывных самосопряженных операторов следует, что при любом $\varepsilon>0$ оператор K можно представить в виде

$$K=R+B,$$

где R — конечномерный самосопряженный оператор, а B — самосопряженный оператор, для которого $\|B\|\leqslant\varepsilon$. Поэтому теорема 1 будет доказана, если будут доказаны следующие более простые предложения.

Лемма 1. *Если A — произвольный самосопряженный оператор, а R — конечномерный самосопряженный оператор, то*

$$\mathscr{C}(A+R)=\mathscr{C}(A).$$

*) См. H. Weyl, Über beschränkte quadratische Formen, deren Differenz vollstetig ist, Rend. Circolo mat. Palermo, 27, 1909, стр. 373—392.

Лемма 2. *Если A — произвольный самосопряженный оператор, а B — ограниченный самосопряженный оператор, то $\mathscr{C}(A+B)$, т. е. непрерывный спектр возмущенного оператора, лежит в $\|B\|$-окрестности множества $\mathscr{C}(A)$.*

Обе леммы доказываются с помощью теоремы 4 n° 93.

Действительно, введем подпространство $\mathrm{G} = \Delta_R$. Так как на его ортогональном дополнении $\mathrm{H} \ominus \mathrm{G}$ оператор R равен 0, то при любом λ и любом $f \in \mathrm{D}_A \cap (\mathrm{H} \ominus \mathrm{G})$ имеет место равенство

$$\|(A+R)f-\lambda f\| = \|Af-\lambda f\|.$$

Отсюда на основании теоремы 4 n° 93, которая здесь применима, так как подпространство Δ_R конечномерно, заключаем, что если некоторый замкнутый интервал не содержит точек одного из множеств $\mathscr{C}(A)$, $\mathscr{C}(A+R)$, то он не содержит также точек второго множества, а это и есть лемма 1.

Чтобы доказать лемму 2, заметим, что в формулировке этой леммы можно поменять местами операторы A и $A+B$. Поэтому достаточно доказать, что $\|B\|$-окрестность каждой точки множества $\mathscr{C}(A)$ содержит по крайней мере одну точку множества $\mathscr{C}(A+B)$. С этой целью допустим противное и примем, что в $\|B\|$-окрестности некоторой точки $\lambda \in \mathscr{C}(A)$ нет точек множества $\mathscr{C}(A+B)$. Отсюда в силу теоремы 4 n° 93 вытекает существование конечномерного подпространства G и такого $\varrho > \|B\|$, что для любого элемента $f \neq 0$ из D_A, ортогонального G, имеет место неравенство

$$\|(A+B-\lambda I)f\| > \varrho\|f\|.$$

Но тогда для тех же f получим неравенство

$$\|(A-\lambda I)f\| \geqslant \|(A+B-\lambda I)f\| - \|Bf\| > (\varrho - \|B\|)\|f\|,$$

откуда по той же теореме 4 n° 93 следует, что $\lambda \overline{\in} \mathscr{C}(A)$, вопреки нашему предположению.

Таким образом, лемма 2, а вместе с нею и теорема 1, доказаны.

Заметим, что теорема Вейля обобщается на случай произвольного линейного замкнутого оператора A и любого вполне непрерывного оператора K, т. е. требование о самосопряженности этих операторов можно отбросить *).

Устанавливая, что вполне непрерывное возмущение K оператора A не меняет его непрерывного спектра, теорема 1 ничего не утверждает о характере изменения точечного спектра $\mathscr{D}(A)$.

О том, насколько существенным может быть это изменение, говорит следующая, принадлежащая Нейману,

*) См., например, И. М. Глазман, Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов, Физматгиз, 1963.

Теорема 2. *К любому самосопряженному оператору A, действующему в сепарабельном гильбертовом пространстве, можно прибавить самосопряженный оператор K, не только вполне непрерывный, но даже имеющий сколь угодно малую абсолютную норму, и такой, что система всех собственных векторов оператора $A+K$ будет полной* *) в H.

Доказательство достаточно провести для случая, когда оператор A ограничен. Действительно, неограниченный оператор A можно представить в виде суммы ограниченных самосопряженных операторов $A_j = E(\Delta_j)A$, где $\Delta_j = [j-1, j]$ $(-\infty < j < \infty)$. Если для операторов A_j теорема доказана, то можно построить вполне непрерывные операторы K_j, действующие в ортогональных подпространствах $E(\Delta_j)\,\mathrm{H}$, такие, что $N(K_j) < \frac{\delta}{j^2+1}$, где δ — произвольно выбранное положительное число. Но тогда оператор $K = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \oplus K_j$ будет (см. n° 31) искомым возмущением для неограниченного оператора A.

Итак, оператор A будем считать ограниченным.

Приводимое ниже доказательство Неймана **) основано на одном вспомогательном предложении, которое мы сначала лишь сформулируем, а позже докажем.

Лемма 3. *Пусть A — ограниченный самосопряженный оператор, а $g \neq 0$ — произвольный элемент пространства* H. *В таком случае для любого $\delta > 0$ существует конечномерное подпространство* $\mathrm{G} \subset \mathrm{H}$ *и конечномерный самосопряженный оператор R такие, что*

1°. $g \in \mathrm{G}$.

2°. G *приводит* $A+R$.

3°. $N(R) \leqslant \delta$.

С помощью этой леммы путем счетного числа шагов мы построим вполне непрерывный самосопряженный оператор K и полную ортогональную систему конечномерных подпространств, инвариантных относительно $A+K$. Оператор $A+K$, очевидно, будет обладать полной в H системой собственных векторов.

Переходя к этому построению, зададимся всюду плотной в H последовательностью $\{f_k\}_1^\infty$ и некоторым числом $\varepsilon > 0$.

---

*) Таким образом, множество $\mathscr{D}(A+K)$ будет всюду плотно в $\mathscr{C}(A) = \mathscr{C}(A+K)$, хотя множество $\mathscr{D}(A)$ могло быть пустым.

**) См. J. von Neumann, Charakterisierung des Spektrums eines Integraloperators (Act. sc. et ind.), Paris, 1935.

Аналогичное теореме 2 предложение было ранее установлено Г. Вейлем, но без утверждения о возможности ограничиться вполне непрерывными возмущениями из класса Гильберта — Шмидта.

Применяя лемму 3 к элементу $g = g_1 = f_1$ и числу $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, найдем конечномерное подпространство G_1 и конечномерный самосопряженный оператор K_1 с абсолютной нормой $N(K_1) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. При этом оператор $A + K_1$ приводится подпространством G_1, а значит, и подпространством $H \ominus G_1$. Так как последовательность $\{f_k\}_1^\infty$ плотна в H, то все элементы f_k не могут лежать в G_1. Мы можем, не нарушая общности, принять, что уже f_2 не лежит в G_1. В таком случае назовем g_2 проекцию f_2 на $H \ominus G_1$ и применим лемму 3 к $g = g_2$ и числу $\delta = \frac{\varepsilon}{2^2}$, заменяя при этом H на $H \ominus G_1$ и A на $A + K_1$. Мы получим конечномерное подпространство $G_2 \subset H \ominus G_1$ и оператор K_2 в $H \ominus G_1$. При этом оператор $A + K_1 + K_2$ в $H \ominus G_1$ приводится подпространством G_2 и $N(K_2) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^2}$. Если расширить линейно K_2 на все пространство H, положив $K_2 = 0$ в G_1, то неравенство $N(K_2) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^2}$, очевидно, сохранится, а оператор $A + K_1 + K_2$ в H также будет приводиться подпространством G_2. Продолжая начатый процесс, мы придем к бесконечной последовательности попарно ортогональных подпространств G_j и последовательности конечномерных операторов K_j с абсолютными нормами $N(K_j) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^j}$ таких, что при каждом j оператор $A + K_1 + K_2 + \ldots + K_j$ приводится каждым из подпространств $G_1, G_2, \ldots, G_j$.

Определим теперь оператор K формулой

$$K = \sum_{j=1}^{\infty} K_j.$$

Сходимость ряда в правой части и неравенство $N(K) \leqslant \varepsilon$ вытекают из теоремы n° 31.

Очевидно, оператор $A + K$ приводится каждым из подпространств G_j $(j = 1, 2, 3, \ldots)$ и остается установить, что подпространство

$$G = G_1 \oplus G_2 \oplus \ldots \oplus G_n \oplus \ldots$$

совпадает с H. Для этого достаточно доказать, что каждый из векторов f_k $(k = 1, 2, \ldots)$ ортогонален к $H \ominus G$. Но, по построению, $f_1 = g_1 \in G_1$, так что $f_1 \perp H \ominus G_1$ и, следовательно, тем более $f_1 \perp H \ominus G$. Далее $f_2 = g_2 + h_2$, где $g_2 \in G_2$ и $h_2 \perp H \ominus G_1$, откуда следует, что $f_2 \perp H \ominus (G_1 \oplus G_2)$, а значит, и тем более $f_2 \perp H \ominus G$. Эти рассмотрения показывают, что при любом натуральном n справедливо соотношение $f_n \perp H \ominus \sum_{j=1}^{n} \oplus G_j$, откуда и следует, что $f_n \perp H \ominus G$.

Теперь нам осталось доказать лемму 3.

С этой целью обозначим через α и β нижнюю и верхнюю грани оператора A и, взяв некоторое $\varepsilon > 0$, разделим интервал $[\alpha, \beta + \varepsilon]$ на n равных частей точками γ_k ($k = 0, 1, 2, \ldots$; $\gamma_0 = \alpha$, $\gamma_n = \beta + \varepsilon$). Способ выбора числа $n = n(\delta)$ будет указан позже.

Положив $\Delta_k = [\gamma_{k-1}, \gamma_k]$, введем n векторов

$$h_k = E(\Delta_k) g \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

и обозначим их линейную оболочку через G, а оператор ортогонального проектирования на G —через P. Нормируя векторы h_k, получим ортонормированный базис $\{g_k\}_1^n$ подпространства G. Если некоторые из векторов h_k равны нулю, то размерность G будет меньше n, но это никак не отразится на дальнейших рассуждениях, и мы вправе для удобства считать $\dim G = n$. Положим, далее,

$$R_1 = -(I-P) AP,$$

и определим конечномерный оператор R равенством

$$R = R_1 + R_1^*.$$

Тогда

$$A + R = (I-P) A (I-P) + PAP,$$

так что оператор $A + R$ перестановочен с P и, следовательно, приводится подпространством G.

Остается оценить абсолютную норму $N(R)$. Дополняя последовательность $\{g_k\}_1^n$ до ортонормированного базиса $\{g_k\}_1^\infty$ в H, будем иметь

$$N^2(R_1) = \sum_{j,\, k=1}^{\infty} |(R_1 g_j, g_k)|^2 = \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ n+1 \leqslant k < \infty}} |(R_1 g_j, g_k)|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{n} \| R_1 g_j \|^2. \quad (1)$$

Так как $g_j \in E(\Delta_j)$ H, то

$$\| A g_j - \gamma_j g_j \| \leqslant \frac{\beta - \alpha + \varepsilon}{n}$$

или

$$A g_j = \gamma_j g_j + f_j,$$

где

$$\| f_j \| \leqslant \frac{\beta - \alpha + \varepsilon}{n}.$$

Заменяя в полученном равенстве g_j на $Pg_j = g_j$ и применяя к обеим его частям оператор $(P - I)$, получаем соотношение

$$R_1 g_j = (P-I) APg_j = (P-I) f_j$$

и неравенство

$$\|R_1 g_j\| \leqslant \|f_j\| \leqslant \frac{\beta-\alpha+\varepsilon}{n}.$$

Теперь оценка (1) дает

$$N(R_1) \leqslant \frac{\beta-\alpha+\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

и, следовательно,

$$N(R) \leqslant N(R_1)+N(R_1^*) = 2N(R_1) \leqslant \frac{2(\beta-\alpha+\varepsilon)}{\sqrt{n}}.$$

Выбирая число n достаточно большим, получим требуемое неравенство $N(R) \leqslant \delta$, и лемма доказана.

В связи с теоремой 1 возникает следующий вопрос: что можно сказать о «близости» двух ограниченных самосопряженных операторов A и B, если их непрерывные спектры совпадают? Легко убедиться на простых примерах в том, что разность $A-B$ таких операторов может не быть вполне непрерывным оператором. Таким образом, непосредственное обращение теоремы 1 невозможно. Однако справедлива следующая, установленная Нейманом *),

Теорема 3. *Если пространство* H *сепарабельно и A, B — ограниченные самосопряженные операторы в нем с одним и тем же непрерывным спектром, то найдется унитарный оператор U такой, что оператор*

$$K = B - UAU^{-1} \tag{2}$$

будет вполне непрерывным.

Доказательство. В силу теоремы 2 можно считать, что каждый из операторов A, B имеет полную в H ортонормированную систему собственных векторов. Пусть этими системами являются $\{e_k\}_1^\infty$ для оператора A и $\{f_k\}_1^\infty$ для оператора B. Соответствующие последовательности собственных значений пусть будут $\{\lambda_k\}_1^\infty$ и $\{\mu_k\}_1^\infty$. Если при некоторой перестановке $\{p_k\}_1^\infty$ натуральных чисел окажется, что

$$\lim_{k\to\infty} (\lambda_k - \mu_{p_k}) = 0, \tag{3}$$

то, определяя унитарный оператор U соотношениями

$$Ue_k = f_{p_k} \qquad (k=1, 2, \ldots)$$

и самосопряженный оператор K равенством (2), найдем, что

$$Kf_{p_k} = (\mu_{p_k} - \lambda_k) f_{p_k} \qquad (k=1, 2, \ldots),$$

а это означает в силу (3), что оператор K вполне непрерывен.

*) См. ссылку в подстрочном примечании на стр. 322.

Теперь доказательство теоремы сводится к построению перестановки $\{p_k\}_1^\infty$, для которой будет выполняться соотношение (3). Возможность этого построения основана на совпадении множества $\mathscr{C}(A)$ предельных точек последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$ со множеством $\mathscr{C}(B)$ предельных точек последовательности $\{\mu_k\}_1^\infty$. Относящееся сюда предложение из теории пределов числовых последовательностей формулируется следующим образом:

Пусть множество M предельных точек ограниченной вещественной последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$ совпадает со множеством предельных точек аналогичной последовательности $\{\mu_k\}_1^\infty$. В таком случае существует такая перестановка $\{p_k\}_1^\infty$ натуральных чисел, для которой

$$\lim_{k\to\infty}(\lambda_k-\mu_{p_k})=0.$$

Для доказательства *) определим при любом натуральном k числа

$$\varepsilon_k=\min_{t\in M}|\lambda_k-t|+\frac{1}{k},$$

$$\eta_k=\min_{t\in M}|\mu_k-t|+\frac{1}{k}.$$

Так как при любом $\delta>0$ лишь конечное число точек λ_j, μ_j лежит от M на расстоянии $>\delta$, то

$$\lim_{k\to\infty}\varepsilon_k=\lim_{k\to\infty}\eta_k=0.$$

Из определения чисел ε_k следует, что при любом k интервал $(\lambda_k-\varepsilon_k,\ \lambda_k+\varepsilon_k)$ содержит точки из M; поэтому этот интервал содержит бесконечное число точек μ_j. Обозначим через r_k наименьший индекс r, при котором $\mu_r\in(\lambda_k-\varepsilon_k,\ \lambda_k+\varepsilon_k)$ и который удовлетворяет неравенствам $r>r_j$ $(j=1, 2, \ldots, k-1)$, $r>2k$. Аналогично, отправляясь от интервала $(\mu_k-\eta_k,\ \mu_k+\eta_k)$, определим число s_k. Все индексы r_k, как и индексы s_k, между собою различны и

$$\lim_{k\to\infty}(\lambda_k-\mu_{r_k})=\lim_{k\to\infty}(\mu_k-\lambda_{s_k})=0. \tag{4}$$

Если бы по крайней мере одна из последовательностей $\{r_k\}_1^\infty$, $\{s_k\}_1^\infty$ содержала все натуральные числа, теорема была бы доказана. Однако это условие здесь не выполнено. Поэтому продолжим построение, а именно, определим индуктивно две последовательности, $\{u_k\}_1^\infty$ и $\{v_k\}_1^\infty$, натуральных чисел следующим образом:

$$u_1=1,\qquad v_1=r_1;$$

---

*) См. статью Неймана, цитированную на стр. 322.

v_{2k} есть наименьшее натуральное число, отличное от v_j ($j = 1, 2, \ldots, 2k-1$), $u_{2k} = s_{v_{2k}}$; u_{2k+1} есть наименьшее натуральное число, отличное от u_j ($j = 1, 2, \ldots, 2k$), $v_{2k+1} = r_{u_{2k+1}}$.

Покажем, что каждая из построенных последовательностей $\{u_k\}_1^\infty$, $\{v_k\}_1^\infty$ является перестановкой натурального ряда чисел. Для этого установим, что каждая из этих последовательностей содержит все натуральные числа и притом по одному разу. Если числа $1, 2, \ldots, k-1$ содержатся в последовательности $\{u_j\}^{2k-2}$, то либо число k также содержится в этой последовательности, либо $u_{2k-1} = k$. В обоих случаях последовательность $\{u_j\}_1^{2k}$ содержит числа $1, 2, \ldots, k$. Так как последовательность $\{u_j\}_1^2$ содержит число 1, то по индукции получается, что последовательность $\{u_j\}_1^\infty$ содержит все натуральные числа. Тем же свойством обладает и последовательность $\{v_j\}_1^\infty$.

Теперь остается установить, что в каждой из последовательностей $\{u_j\}_1^\infty$, $\{v_j\}_1^\infty$ нет одинаковых чисел.

Начнем с последовательности $\{u_j\}_1^\infty$. Так как по построению $u_{2k-1} \neq u_1, u_2, \ldots, u_{2k-2}$, то нужно лишь показать, что $u_{2k} \neq u_1, u_2, \ldots, u_{2k-1}$. По определению, $u_{2k} = s_{v_{2k}}$ и $s_{v_{2k}} \neq s_1, s_2, \ldots, s_{v_{2k-1}}$. Поэтому, в частности, $s_{v_{2k}} \neq s_{v_2}, s_{v_4}, \ldots, s_{v_{2k-2}}$, ибо $v_2 < v_4 < \ldots < v_{2k-2}$, а последовательность $\{s_k\}_1^\infty$ монотонно возрастает. Полученное неравенство можно переписать в виде $u_{2k} \neq u_2, u_4, \ldots, u_{2k-2}$ и остается показать, что $u_{2k} \neq u_1, u_3, \ldots, u_{2k-1}$. Но по построению $u_{2k} = s_{v_{2k}} \geqslant 2v_{2k} \geqslant 2k$ и $u_1, u_3, \ldots, u_{2k-1} \leqslant 2k-1$, так что $u_{2k} > u_{2k-1}$ и, следовательно, $u_{2k} \neq u_1, u_3, \ldots, u_{2k-1}$.

Переходя к последовательности $\{v_k\}_1^\infty$, отметим в первую очередь, что по построению $v_{2k-1} = r_{u_{2k-1}} \neq r_1, r_2, \ldots, r_{u_{2k-3}}$ и, значит, в частности, $v_{2k-1} \neq v_1, v_3, \ldots, v_{2k-3}$. Далее, $v_{2k-1} = r_{u_{2k-1}} \geqslant 2u_{2k-1} \geqslant 2k$ и так как $v_2, v_4, \ldots, v_{2k-2} \leqslant 2k-2$, то $v_{2k-1} \neq v_1, v_2, \ldots, v_{2k-2}$. Наконец, по построению $v_{2k} \neq v_1, v_2, \ldots, v_{2k-1}$.

Для завершения доказательства достаточно убедиться в том, что

$$\lim_{k\to\infty} (\mu_{v_k} - \lambda_{u_k}) = 0.$$

Но это следует из того, что при $k \to \infty$

$$|\mu_{v_{2k}} - \lambda_{u_{2k}}| = |\mu_{v_{2k}} - \lambda_{s_{v_{2k}}}| \to 0,$$

$$|\mu_{v_{2k-1}} - \lambda_{u_{2k-1}}| = |\mu_{r_{u_{2k-1}}} - \lambda_{u_{2k-1}}| \to 0$$

в силу (4).

95. Абсолютно непрерывная и сингулярная части спектра. В связи с так называемыми операторами рассеяния или волновыми операторами (см. далее п° 97), возникшими в физических исследованиях, в последние годы появилась необходимость в классификации точек спектра более тонкой, чем та, которую мы приняли в п°п° 82, 93.

Пусть A — самосопряженный оператор, а E_t — его спектральная функция.

Элемент $f \in \mathrm{H}$ назовем *регулярным* относительно A, если функция $\sigma(t; f) = (E_t f, f)$ абсолютно непрерывна, и *сингулярным*, если абсолютно непрерывная часть функции $\sigma(t; f)$ равна нулю.

Множество всех регулярных относительно A элементов обозначим H_a, а множество всех сингулярных элементов обозначим H_s.

Теорема 1. *Множества* H_a *и* H_s *являются подпространствами* H, *они взаимно ортогональны и*

$$\mathrm{H}_a \oplus \mathrm{H}_s = \mathrm{H}.$$

Доказательство. Пусть $f \in \mathrm{H}_a$ и $g \in \mathrm{H}_s$. В таком случае, каково бы ни было точечное множество e нулевой лебеговой меры,

$$\int_e d(E_t f, f) = 0 \tag{1}$$

и найдется борелевское множество *) θ лебеговой меры нуль такое, что на его дополнении $C\theta$

$$\int_{C\theta} d(E_t g, g) = 0. \tag{2}$$

Воспользуемся теперь неравенством

$$\left| \int_{\mathscr{E}} d(E_t f, g) \right|^2 \leqslant \int_{\mathscr{E}} d(E_t f, f) \int_{\mathscr{E}} d(E_t g, g),$$

которое верно для любого борелевского множества $\mathscr{E} \subset (-\infty, \infty)$ и представляет собой неравенство Коши — Буняковского для квазискалярного произведения

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathscr{E}} d(E_t f, g)$$

(см. п° 3). В силу этого неравенства из (1) и (2) следует, что

$$\int_{\theta} d(E_t f, g) = 0, \qquad \int_{C\theta} d(E_t f, g) = 0.$$

*) См., например, В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. V, Физматгиз, 1959, или Г. Е. Шилов, Б. Л. Гуревич, Интеграл, мера и производная, «Наука», 1964.

Поэтому

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} d(E_t f, g) = 0$$

и, значит, $\mathrm{H}_a \perp \mathrm{H}_s$.

Возьмем теперь произвольный отличный от 0 вектор $h \in \mathrm{H}$. Ему принадлежит неубывающая функция $\sigma(t; h) = (E_t h, h)$, из которой мы выделим абсолютно непрерывную часть $\sigma_a(t; h)$:

$$\sigma(t; h) = \sigma_a(t; h) + \sigma_s(t; h).$$

Затем возьмем борелевское множество θ лебеговой меры нуль, дополнение которого $C\theta$ имеет нулевую σ_s-меру, и положим

$$f = \int_{C\theta} dE_u h, \qquad g = \int_{\theta} dE_u h, \tag{3}$$

так что

$$h = f + g. \tag{4}$$

Из (3) следует, что

$$(E_t f, f) = \int_{-\infty}^{t} \chi_{C\theta}(u)\, d(E_u h, h) = \int_{-\infty}^{t} d\sigma_a(u; h),$$

$$(E_t g, g) = \int_{-\infty}^{t} \chi_{\theta}(u)\, d(E_u h, h) = \int_{-\infty}^{t} d\sigma_s(u; h),$$

где χ_θ, $\chi_{C\theta}$ — характеристические функции множеств θ и $C\theta$. Из этих представлений вытекает, что функция $(E_t f, f)$ абсолютно непрерывна и что абсолютно непрерывная часть функции $(E_t g, g)$ есть нуль. Поэтому элементы f и g в представлении (4) принадлежат соответственно H_a и H_s. Из разложения любого элемента $h \in \mathrm{H}$ в ортогональную сумму (4) элементов $f \in \mathrm{H}_a$ и $g \in \mathrm{H}_s$ вытекает линейность и замкнутость множеств H_a и H_s. Тем самым доказательство теоремы закончено.

Т е о р е м а 2. *Подпространства* H_a *и* H_s *приводят оператор* A.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно установить, что при любом λ подпространство H_a приводит E_λ. Если $f \in \mathrm{H}_a$, то функция $\sigma(t; f)$ абсолютно непрерывна, но тогда функция

$$\sigma(t; E_\lambda f) = (E_t E_\lambda f, E_\lambda f) = (E_{\min(t,\lambda)} f, f) = \begin{cases} \sigma(t; f) & (t \leqslant \lambda), \\ \sigma(\lambda; f) = \mathrm{const} & (t > \lambda) \end{cases}$$

также абсолютно непрерывна и поэтому $E_\lambda f \in \mathrm{H}_a$. Аналогично доказывается, что если $f \in \mathrm{H}_s$, то и $E_\lambda f \in \mathrm{H}_s$.

Этим теорема доказана.

Часть A_a оператора A, действующая в подпространстве H_a регулярных элементов, называется *абсолютно непрерывной частью оператора* A, а спектр $\mathcal{S}(A_a)$ этого оператора A_a называется *абсолютно непрерывной частью спектра* оператора A. Очевидно, $\mathcal{S}(A_a)$ образует замкнутое множество без изолированных точек (т. е. совершенное множество), причем $\mathcal{S}(A_a) \subseteq \mathcal{C}(A)$. Часть A_s оператора A, действующая в подпространстве H_s сингулярных элементов, называется *сингулярной частью оператора* A, а ее спектр $\mathcal{S}(A_s)$ — *сингулярной частью спектра* оператора A. Очевидно, $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{S}(A_s)$.

Собственные значения, которые все входят в $\mathcal{S}(A_s)$, образуют *дискретную компоненту* сингулярной части спектра оператора A. Дополнение этой компоненты до всего $\mathcal{S}(A_s)$ называется *непрерывной компонентой* сингулярной части спектра оператора A.

96. Инвариантность абсолютно непрерывной части спектра относительно конечномерных возмущений. Из установленной в n° 94 теоремы 2 следует, что при произвольных вполне непрерывных возмущениях самосопряженного оператора абсолютно непрерывная часть его спектра, в отличие от непрерывной части, может не сохраняться. Однако при более слабых возмущениях и, в частности, при возмущениях конечномерных, абсолютно непрерывная часть спектра не изменяется. Этот результат, а также его обобщение на случай любых ядерных возмущений, принадлежит М. Розенблюму и Т. Като *).

Пусть A — произвольный самосопряженный оператор в пространстве H, сепарабельность которого мы здесь предполагать не будем. Пусть, далее, K — одномерный самосопряженный оператор, который порождается некоторым ортом g и некоторым вещественным числом γ в то смысле, что для любого $f \in \mathrm{H}$

$$Kf = \gamma (f, g) g. \tag{1}$$

Обозначим E_t и F_t спектральные функции операторов A и соответственно $B = A + K$, и заставим $[\alpha, \beta]$ пробегать множество всех интервалов числовой оси. Этому множеству интервалов отвечает множество элементов $(E_\beta - E_\alpha) g$, замкнутую линейную оболочку которых обозначим G_A, и множество элементов $(F_\beta - F_\alpha) g$, аналогичную оболочку которых назовем G_B. Ясно, что G_A есть наименьшее

---

*) M. Rosenblum, Perturbation of the continuous spectrum and unitary equivalence. Pacif. Journ. Math. 7, N 1, 1957; см. также сборник переводов «Математика», 3 : 3, 1959. T. Kato, On finite-demensional perturbations of selfadjoint operators.J. of the Math. Soc. Jap. 9, N 2, 1957; Perturbation of Continuous Spectra by Trace Class Operators, Proc. of the Jap. Ac. XXXIII, N 5, 1957.

В нашем изложении мы следуем Т. Като.

подпространство в H, содержащее g и приводящее оператор A, а G_B обладает этим же свойством по отношению к B. Кроме того, каждое из подпространств G_A, G_B приводит оператор K. Из равенства $B = A + K$ поэтому следует, что $\mathrm{G}_A = \mathrm{G}_B \equiv \mathrm{H}_g$. Так как $Kf = 0$, если $f \in \mathrm{H} \ominus \mathrm{H}_g$, то

$$Af = Bf \qquad (f \in \mathrm{H} \ominus \mathrm{H}_g),$$

и вопрос о влиянии одномерного возмущения K на абсолютно непрерывную часть спектра оператора A достаточно рассмотреть в подпространстве *) H_g. Этим мы сейчас и займемся.

Так как подпространство H_g является замыканием как линейной оболочки элементов $(E_\beta - E_\alpha) g$, так и линейной оболочки элементов $(F_\beta - F_\alpha) g$, то части операторов A и B, лежащие в H_g, имеют простой спектр. Поэтому (см. n° 83) при любом $f \in \mathrm{H}_g$

$$f = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, dE_t g, \qquad f = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)\, dF_t g \tag{2}$$

и

$$\| f \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|^2 d\varrho(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 d\sigma(t),$$

где $\varrho(t) = (E_t g, g)$, $\sigma(t) = (F_t g, g)$.

С другой стороны, при $\Im\zeta \neq 0$

$$(B - \zeta I)^{-1} - (A - \zeta I)^{-1} = -(A - \zeta I)^{-1} K (B - \zeta I)^{-1},$$

откуда, согласно (1),

$$([B - \zeta I]^{-1} f, g) - ([A - \zeta I]^{-1} f, g) =$$
$$= -\gamma ([B - \zeta I]^{-1} f, g)([A - \zeta I]^{-1} g, g). \tag{3}$$

С помощью представлений (2) из этого соотношения выводится равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(\mu)\, d\sigma(\mu)}{\mu - \zeta} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda)\, d\varrho(\lambda)}{\lambda - \zeta} = -\gamma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(\mu)\, d\sigma(\mu)}{\mu - \zeta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varrho(\lambda)}{\lambda - \zeta}$$

или

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(\mu)\, d\sigma(\mu)}{\mu - \zeta} \left[1 + \gamma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varrho(\lambda)}{\lambda - \zeta} \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda)\, d\varrho(\lambda)}{\lambda - \zeta}. \tag{4}$$

---

*) Заметим, что подпространство H_g сепарабельно

Если бы мы предварительно приняли в (3) $f=g$, то получили бы равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\mu)}{\mu-\zeta}\left[1+\gamma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varrho(\lambda)}{\lambda-\zeta}\right]=\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varrho(\lambda)}{\lambda-\zeta},$$

которое можно переписать в виде

$$\left(1+\gamma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varrho(\lambda)}{\lambda-\zeta}\right)\left(1-\gamma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\mu)}{\mu-\zeta}\right)=1.$$

Положив здесь $\zeta=\xi+i\eta$, $\eta=\Im\zeta$, и делая предельный переход $\eta \to 0$, в силу известной теоремы теории функций *) найдем, что 1) почти всюду на вещественной оси функция

$$\omega(\zeta) \equiv 1+\gamma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varrho(\lambda)}{\lambda-\zeta}=\frac{1}{1-\gamma \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\mu)}{\mu-\zeta}} \tag{5}$$

имеет конечные, отличные от нуля пределы $\omega(\xi+i0)$ и $\omega(\xi-i0)=\overline{\omega(\xi+i0)}$ и 2) почти всюду

$$\pi\gamma\varrho'(\xi)=\Im\omega(\xi+i0),$$

$$\pi\gamma\sigma'(\xi)=-\Im\frac{1}{\omega(\xi+i0)}=\frac{\Im\omega(\xi+i0)}{|\omega(\xi+i0)|^2},$$

так что почти всюду

$$\varrho'(\xi)=|\omega(\xi+i0)|^2\sigma'(\xi) \tag{6}$$

и, значит, почти всюду

$$\Im\omega(\xi+i0)=\pi\gamma|\omega(\xi+i0)|^2\sigma'(\xi). \tag{6'}$$

Из соотношения (6) и сказанного выше относительно функции $\omega(\xi+i0)$ заключаем, что абсолютно непрерывные части спектров операторов A и B совпадают с точностью до множества меры нуль. Однако нетрудно доказать, что если пересечение абсолютно непрерывного спектра с каким-нибудь открытым интервалом имеет лебегову меру нуль, то это пересечение пусто. Поэтому абсолютно непрерывные части спектров операторов A и B совпадают полностью. Более того, из теоремы п° 87 вытекает унитарная эквивалентность абсолютно непрерывных частей A_a и B_a операторов A и B.

Изложенные рассмотрения позволяют сформулировать следующее предложение.

*) См. И. И. Привалов, Граничные свойства аналитических функций, Гостехиздат, 1950, стр. 183—194.

Теорема. *Пусть A — произвольный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве* H, *а K — произвольный конечномерный самосопряженный оператор в нем. Тогда абсолютно непрерывные части A_a и B_a операторов A и $B = A + K$ унитарно эквивалентны, так что, в частности,*

$$\mathcal{S}(B_a) = \mathcal{S}(A_a).$$

Доказательство для случая, когда оператор K одномерен, мы полностью провели. Так как m-мерное возмущение есть сумма одномерных возмущений, а понятие унитарной эквивалентности транзитивно, то отсюда вытекает справедливость теоремы для любых конечномерных возмущений.

Упомянутое в начале настоящего пункта обобщение этой теоремы на случай любых самосопряженных ядерных возмущений будет дано лишь в п° 99, так как для этого обобщения понадобится аппарат волновых операторов, которым посвящены п°п° 97 и 98.

В заключение установим некоторые вспомогательные факты, которые будут использованы в п° 98.

Прежде всего получим уравнение, связывающее функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ из представлений (2).

Из (4) и (5) следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(\mu)\, d\sigma(\mu)}{\mu-\zeta} = \left[1 - \gamma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\mu)}{\mu-\zeta}\right] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda)\, d\varrho(\lambda)}{\lambda-\zeta}. \qquad (4')$$

Делая здесь предельный переход, получим, что почти всюду

$$\pm \pi i \psi(\xi)\, \sigma'(\xi) + \int_{-\infty}^{\infty}{}' \frac{\psi(\mu)\, d\sigma(\mu)}{\mu-\xi} = \frac{1}{\omega(\xi \pm i0)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda)\, d\varrho(\lambda)}{\lambda-(\xi \pm i0)}, \qquad (7)$$

где штрих у знака интеграла означает, что интеграл рассматривается как главное значение в смысле Коши. Из соотношений (7) с помощью вычитания находим

$$2\pi i \psi(\xi)\, \sigma'(\xi) = \frac{1}{\omega(\xi+i0)} \int_{-\infty}^{\infty}{}' \frac{\varphi(\lambda)\, d\varrho(\lambda)}{\lambda-(\xi+i0)} - \frac{1}{\omega(\xi-i0)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda)\, d\varrho(\lambda)}{\lambda-(\xi-i0)}$$

или

$$2\pi i \psi(\xi)\, \sigma'(\xi) = \frac{\omega(\xi-i0)-\omega(\xi+i0)}{|\omega(\xi+i0)|^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda)\, d\varrho(\lambda)}{\lambda-(\xi+i0)} +$$

$$+ \frac{1}{\omega(\xi-i0)} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda)\, d\varrho(\lambda)}{\lambda-(\xi+i0)} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda)\, d\varrho(\lambda)}{\lambda-(\xi-i0)}\right].$$

Отсюда, благодаря (6′), следует, что почти всюду

$$2\pi i\psi(\xi)\,\sigma'(\xi) = \frac{2\pi i}{\omega(\xi+i0)}\,\varphi(\xi)\,\varrho'(\xi) - 2\pi i\gamma\sigma'(\xi)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\lambda)\,d\varrho(\lambda)}{\lambda-(\xi+i0)}.$$

После сокращения получаем искомое соотношение:

$$\psi(\xi) = \omega(\xi+i0)\,\varphi(\xi) - \gamma\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\lambda)\,d\varrho(\lambda)}{\lambda-(\xi+i0)} \tag{8}$$

почти всюду на множестве, где $\sigma'(\xi)\neq 0$.

Нам понадобится также следующая

Лемма. *Если* $f(\lambda)\in L^2(-\infty,\infty)$, *то*

$$\lim_{t\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{it(\mu-\lambda)}-1}{\mu-\lambda}f(\lambda)\,d\lambda - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\lambda)\,d\lambda}{\lambda-(\mu+i0)}\right|^2 d\mu = 0.$$

Доказательство. Напишем равенство

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\lambda)\,d\lambda}{\lambda-(\mu+i0)} = if(\mu)+\tilde f(\mu),$$

где

$$\tilde f(\mu) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}{}'\,\frac{f(\lambda)}{\lambda-\mu}\,d\lambda.$$

Пусть $F(x)$ — преобразование Фурье функции $f(\lambda)$, так что

$$f(\mu) = \underset{A\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A}F(x)\,e^{i\mu x}\,dx.$$

В таком случае, как известно *),

$$\tilde f(\mu) = \underset{A\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A}F(x)\,\mathrm{sign}\,x\,e^{i\mu x}\,dx$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\lambda)\,d\lambda}{\lambda-(\mu+i0)} = \underset{A\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{A}F(x)\,e^{i\mu x}\,dx.$$

*) Е. Титчмарш, Введение в теорию интегралов Фурье, перев. с англ., Гостехиздат, 1948, стр. 159—166.

С другой стороны, по теореме о свертке, при $t > 0$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{it(\mu-\lambda)}-1}{\mu-\lambda}f(\lambda)\,d\lambda=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\,e^{i\mu x}\,dx\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-e^{-ity}}{y}\,e^{iyx}\,dy=$$

$$=\frac{1}{\pi\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\,e^{i\mu x}\,dx\int_{0}^{\infty}\frac{\sin(yx)-\sin y(x-t)}{y}\,dy=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{t}F(x)\,e^{i\mu x}\,dx.$$

Сопоставление полученных соотношений и доказывает лемму.

97. Определение и формальные свойства волновых операторов. Пусть A и B — самосопряженные операторы в H, R_A и R_B — подпространства, образованные регулярными элементами оператора A, соответственно B и P_A, P_B — операторы ортогонального проектирования на R_A и R_B. Примем следующее

Определение. Если существует сильный предел

$$U_+\{B,\ A\}=\lim_{t\to\infty}e^{itB}e^{-itA}P_A, \tag{1}$$

то говорят, что упорядоченная пара операторов A, B имеет *волновой оператор* $U_+\{B,\ A\}$.

Аналогично определяется волновой оператор *)

$$U_-\{B,\ A\}=\lim_{t\to-\infty}e^{itB}e^{-itA}P_A. \tag{2}$$

В этом пункте мы установим ряд свойств волновых операторов в предположении, что они существуют. Что касается доказательств существования, то они будут приведены в n° 98. При этом мы будем рассматривать лишь оператор (1), так как формулировка и доказательство соответствующих свойств для оператора (2) совершенно аналогичны.

Теорема 1. *При любом вещественном* τ

$$e^{i\tau B}U_+\{B,\ A\}=U_+\{B,\ A\}\,e^{i\tau A}. \tag{3}$$

*) Понятие о волновых операторах было впервые введено К. Меллером с помощью выражения

$$\lim_{\pm t\to\infty}e^{itB}e^{-itA}.$$

См. C. Møller, Dan. Vid. Selsk.-fys. Medd, 23, n° 1 (1945).

Действительно,

$$e^{i\tau B}U_+\{B,\ A\}=\lim_{t\to\infty} e^{i(t+\tau)B}e^{-i(t+\tau)A}e^{i\tau A}P_A=$$
$$=\lim_{t\to\infty} e^{i(t+\tau)B}e^{-i(t+\tau)A}P_A e^{i\tau A}=U_+\{B,\ A\}\,e^{i\tau A}.$$

Теорема 2. *При любом вещественном* λ

$$F_\lambda U_+\{B,\ A\}=U_+\{B,\ A\}\,E_\lambda, \tag{4}$$

где E_λ — *спектральная функция оператора* A, *а* F_λ — *спектральная функция оператора* B.

Действительно, из (3) следует, что при любых $f, g\in \mathrm{H}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau\lambda}\,d\,(F_\lambda U_+\{B,\ A\}\,f,\ g)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau\lambda}\,d\,(U_+\{B,\ A\}\,E_\lambda f,\ g),$$

откуда, в силу теоремы единственности для интегралов Фурье — Стилтьеса, и получается соотношение (4).

Теорема 3. *Оператор* $U_+\ \{B, A\}$ *частично изометричен. Его начальная область есть* R_A, *а конечная область лежит в* R_B.

Доказательство. При любом $f\in\mathrm{H}$

$$\|U_+\{B,\ A\}\,f\,\|=\lim_{t\to\infty}\|\,e^{itB}e^{-itA}P_Af\,\|=\|\,P_Af\,\|, \tag{5}$$

откуда вытекает справедливость первых двух утверждений. Чтобы доказать третье утверждение, заметим, что в силу (4) и (5)

$$(F_\lambda U_+\{B,\ A\}\,f,\ U_+\{B,\ A\}\,f)=\|\,F_\lambda U_+\{B,\ A\}\,f\,\|^2=$$
$$=\|\,U_+\{B,\ A\}\,E_\lambda f\,\|^2=\|\,P_AE_\lambda f\,\|^2=\|\,E_\lambda P_Af\,\|^2=(E_\lambda h,\ h), \tag{5'}$$

где $h=P_A\,f\in\mathrm{R}_A$. Так как правая часть есть абсолютно непрерывная функция, то тем же свойством обладает левая. Следовательно, вектор $U_+\ \{B, A\}\,f$ является регулярным элементом оператора B, т. е. $U_+\ \{B, A\}\,f\in\mathrm{R}_B$.

Теорема 4. *Если конечная область оператора* $U_+\ \{B, A\}$ *совпадает с* R_B, *то операторы* A_a *и* B_a *унитарно эквивалентны и при любом* $f\in\mathrm{R}_A\cap\mathrm{D}_A$

$$U_+^*B_aU_+f=A_af, \tag{6}$$

где $U_+=U_+\ \{B, A\}$.

Доказательство. Первое утверждение вытекает из предыдущей теоремы, если доказано соотношение (6). Итак, докажем (6). Для этого заметим, что из формулы (5′) следует для любого $f\in\mathrm{R}_A$ равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2\,d\,(F_\lambda U_+f,\ U_+f)=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2\,d\,(E_\lambda f,\ f),$$

где оба интеграла сходятся или расходятся одновременно. Поэтому, если $f \in \mathrm{D}_A \cap \mathrm{R}_A$, то $U_+ f \in \mathrm{D}_B$, а если $U_+ f \in \mathrm{D}_B$ при $f \in \mathrm{R}_A$, то $f \in \mathrm{D}_A$. Далее, в силу теоремы 2 при любом $g \in \mathrm{H}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d(F_\lambda U_+ f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d(U_+ E_\lambda f, g),$$

но это и означает, что

$$B_a U_+ f = U_+ A_a f, \tag{6'}$$

т. е. равенство (6).

Теорема 5 *). *Если существуют волновые операторы* $U_+\{B, A\}$, $U_+\{C, B\}$, *то существует волновой оператор* $U_+\{C, A\}$ *и*

$$U_+\{C, A\} = U_+\{C, B\}\, U_+\{B, A\}. \tag{7}$$

Доказательство. По определению,

$$U_+\{B, A\} = \lim_{t\to\infty} e^{itB} e^{-itA} P_A,$$

$$U_+\{C, B\} = \lim_{t\to\infty} e^{itC} e^{-itB} P_B.$$

Следовательно,

$$U_+\{C, B\}\, U_+\{B, A\} = \lim_{t\to\infty} e^{itC} e^{-itB} P_B e^{itB} e^{-itA} P_A.$$

Заменяя P_B на $I - (I - P_B)$, находим, что

$$U_+\{C, B\}\, U_+\{B, A\} =$$
$$= \lim_{t\to\infty} e^{itC} e^{-itA} P_A - \lim_{t\to\infty} e^{itC} e^{-itB} (I - P_B)\, e^{itB} e^{-itA} P_A$$

Первый член правой части есть $U_+\{C, A\}$. Остается доказать, что второй член есть нуль. Но оператор

$$(I - P_B)\, e^{itB} e^{-itA} P_A$$

при $t \to \infty$ стремится к нулю, а оператор

$$e^{itC} e^{-itB}$$

при любом t унитарен, откуда и следует, что их произведение стремится к нулю.

Теорема 6. *Для совпадения с* R_B *конечной области оператора* $U_+\{B, A\}$ *необходимо и достаточно, чтобы существовал оператор* $U_+\{A, B\}$.

*) Эту теорему называют *теоремой умножения* волновых операторов.

Доказательство. Если оба оператора, $U_+\{B, A\}$ и $U_+\{A, B\}$, существуют, то по теореме 5 при любом $f \in \mathrm{R}_B$

$$f = P_B f = U_+\{B, B\} f = U_+\{B, A\} U_+\{A, B\} f$$

или

$$f = U_+\{B, A\} g,$$

где $g = U_+\{A, B\} f$ принадлежит R_A, а значит, f принадлежит конечной области оператора $U_+\{B, A\}$.

Достаточность условия теоремы доказана.

Пусть теперь известно, что конечная область оператора $U_+\{B, A\}$ есть R_B; требуется доказать, что для любого $f \in \mathrm{R}_B$ существует

$$\lim_{t\to\infty} e^{itA} e^{-itB} f.$$

Для элемента f найдется такой элемент $g \in \mathrm{R}_A$, что

$$f = U_+\{B, A\} g.$$

Поэтому

$$f = \lim_{t\to\infty} f_t, \qquad f_t = e^{itB} e^{-itA} g.$$

Но из равенства

$$e^{itA} e^{-itB} f = e^{itA} e^{-itB} (f - f_t + f_t) = e^{itA} e^{-itB} (f - f_t) + g$$

следует, что

$$g = \lim_{t\to\infty} e^{itA} e^{-itB} f.$$

Таким образом, оператор $U_+\{A, B\}$ существует и $g = U_+\{A, B\} f$.

Операторы $U_+\{A, B\}$, $U_+\{B, A\}$, очевидно, взаимно обратны на соответствующих областях, так что

$$U_+\{B, A\} = U_+^*\{A, B\}. \tag{8}$$

Введем еще одно понятие, а именно понятие об *операторе рассеяния* для упорядоченной пары A, B. Так называют оператор

$$S\{B, A\} = U_+^*\{B, A\} U_-\{B, A\} \tag{9}$$

в предположении, что все четыре волновых оператора $U_\pm\{B, A\}$, $U_\pm\{A, B\}$ существуют.

Теорема 7. *Оператор рассеяния $S\{B, A\}$ в пространстве R_A унитарен и коммутирует с оператором A.*

Доказательство. Первое утверждение вытекает из теоремы 6.

Далее покажем, что $S\{B, A\}$ перестановочен с разложением единицы E_λ оператора A при любом $\lambda \in (-\infty, \infty)$. Обозначим коротко $U_\pm\{B, A\}$ через $U_\pm$. Тогда из (9), дважды используя теорему 2, имеем

$$S\{B, A\} E_\lambda = U_+^* U_- E_\lambda = U_+^* F_\lambda U_- = (F_\lambda U_+)^* U_- = \\ = (U_+ E_\lambda)^* U_- = E_\lambda U_+^* U_- = E_\lambda S\{B, A\}.$$

Это означает, в силу теоремы n° 80, что

$$S\{B, A\} A \subseteq AS\{B, A\},$$

т. е. A и $S\{B, A\}$ перестановочны в H, а поэтому и в приводящем их обоих подпространстве R_A. При этом, если $f \in R_A$, то

$$(E_\lambda Sf, Sf) = (SE_\lambda f, Sf) = (E_\lambda f, f),$$

где $S = S\{B, A\}$, а значит, f (из R_A) и Sf одновременно либо принадлежат либо не принадлежат $R_A \cap D_A$. Поэтому на R_A

$$A_a S\{B, A\} = S(B, A) A_a$$

или, во всем H,

$$AS\{B, A\} = S\{B, A\} AP_A.$$

Справедлива также следующая теорема умножения для операторов рассеяния.

Т е о р е м а 8. *Если существуют операторы рассеяния $S\{B, A\}$ и $S\{C, B\}$, то существует оператор рассеяния $S\{C, A\}$ и притом*

$$S\{C, A\} = S^+(C, B) S\{B, A\},$$

где

$$S^+\{C, B\} = U_+\{A, B\} S\{C, B\} U_+(B, A).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Существование оператора $S\{C, A\}$ вытекает из теоремы 5. Далее, имеем

$$S\{C, A\} = U_+^*\{C, A\} U_-\{C, A\} = \\ = U_+^*\{B, A\} U_+^*\{C, B\} U_-\{C, B\} U_-\{B, A\} = \\ = U_+^*\{B, A\} U_+^*\{C, B\} U_-\{C, B\} U_+\{B, A\} U_+^*\{B, A\} U_-\{B, A\} = \\ = U_+\{A, B\} S\{C, B\} U_+\{B, A\} S\{B, A\}.$$

(Последнее равенство справедливо в силу (8).) Теорема доказана.

98. Существование волновых операторов в случае конечномерных возмущений. Этот пункт непосредственно примыкает к n° 96, обозначений которого мы здесь будем придерживаться. Положим вначале, как и в n° 96, что оператор K одномерный и что его область значений порождается элементом g, по которому строится сепарабельное пространство Гильберта H_g. Предположим также, что H_g

совпадает со всем H. Определим в $H_g = H$ оператор V_+f, полагая

$$V_+f = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\lambda + i0)\, \varphi(\lambda)\, dF_\lambda P_B g, \tag{1}$$

если

$$f = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\, dE_\lambda g.$$

Введем также оператор

$$U_t = e^{itB} e^{-itA} P_A \qquad (-\infty < t < \infty)$$

и докажем, что

$$\lim_{t \to \infty} U_t f = V_+ f \qquad (f \in H). \tag{2}$$

Заметим, что это соотношение достаточно доказать лишь для $f \in R_A$, так как $U_t f = 0$ и $V_+ f = 0$, если $f \perp R_A$. Последнее вытекает из того, что в силу (1) и формулы (6) n° 96 при любом $f \in H$ имеем

$$\|V_+f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\omega(\lambda + i0)|^2 |\varphi(\lambda)|^2 d(F_\lambda P_B g, g) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\lambda)|^2 |\omega(\lambda + i0)|^2 d\sigma_a(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\lambda)|^2 d\varrho_a(\lambda) = \|P_A f\|^2, \tag{3}$$

где $\sigma_a(\lambda) = (F_\lambda P_B g, g)$ — абсолютно непрерывная часть функции $\sigma(\lambda) = (F_\lambda g, g)$, а $\varrho_a(\lambda) = (E_\lambda P_A g, g)$ — абсолютно непрерывная часть функции $\varrho(\lambda) = (E_\lambda g, g)$.

Таким образом,

$$V_+ P_A = V_+, \qquad U_t P_A = U_t. \tag{3'}$$

Переходим к доказательству соотношения (2) при $f \in R_A$. Для этого воспользуемся равенством

$$(U_t f, h) - (f, h) = i\gamma \int_0^t (e^{-i\tau A} f, g)(e^{i\tau B} g, h)\, d\tau, \tag{4}$$

где $h \in H$. Написанное равенство достаточно проверить при $f \in D_A \cap R_A$; в этом случае оно получается интегрированием тождества

$$\frac{d}{d\tau}(e^{i\tau B} e^{-i\tau A} f, h) = i(e^{i\tau B} B e^{-i\tau A} f, h) - i(e^{i\tau B} A e^{-i\tau A} f, h) =$$

$$= i(e^{i\tau B} K e^{-i\tau A} f, h) = i\gamma(e^{i\tau B}(e^{-i\tau A} f, g) g, h) = i\gamma(e^{-i\tau A} f, g)(e^{i\tau B} g, h).$$

Если

$$f=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\lambda)\,dE_\lambda g,\quad h=\int_{-\infty}^{\infty}\varkappa(\mu)\,dF_\mu g,$$

то соотношение (4) можно переписать в виде

$$(U_tf,\,h)-(f,\,h)=i\gamma\int_0^t\Big[\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\tau\lambda}\varphi(\lambda)\,d\varrho(\lambda)\Big]\Big[\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\tau\mu}\,\overline{\varkappa(\mu)}\,d\sigma(\mu)\Big]\,d\tau,$$

где, как легко видеть, можно изменить порядок интегрирования, так что

$$(U_tf,\,h)-(f,\,h)=\gamma\int\!\!\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{it(\mu-\lambda)}-1}{\mu-\lambda}\,\varphi(\lambda)\,\overline{\varkappa(\mu)}\,d\varrho(\lambda)\,d\sigma(\mu).$$

Кроме условия $f\in\mathrm{R}_A$, положим теперь, что $h\in\mathrm{R}_B$. В таком случае в написанном двойном интеграле можно заменить $d\varrho(\lambda)$, $d\sigma(\mu)$ соответственно на $\varrho'(\lambda)\,d\lambda$ и $\sigma'(\mu)\,d\mu$. Примем вначале, что, сверх того,

$$\varphi(\lambda)\,\varrho'(\lambda)\in\mathrm{L}^2(-\infty,\,\infty),\ \ \varkappa(\mu)\,\sigma'(\mu)\in\mathrm{L}^2(-\infty,\,\infty).\tag{5}$$

Тогда на основании леммы n° 96

$$\lim_{t\to\infty}(U_tf,\,h)=(f,\,h)+\gamma\int\!\!\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\lambda)\,\varrho'(\lambda)}{\lambda-(\mu+i0)}\,\overline{\varkappa(\mu)}\,\sigma'(\mu)\,d\lambda\,d\mu,$$

откуда в силу равенства (8) n° 96

$$\lim_{t\to\infty}(U_tf,\,h)=(f,\,h)+\int_{-\infty}^{\infty}\omega(\mu+i0)\,\varphi(\mu)\,\overline{\varkappa(\mu)}\,d\sigma(\mu)-$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\mu)\,\overline{\varkappa(\mu)}\,d\sigma(\mu)=\int_{-\infty}^{\infty}\omega(\mu+i0)\,\varphi(\mu)\,\overline{\varkappa(\mu)}\,d\sigma(\mu),$$

и в силу формулы (1)

$$\lim_{t\to\infty}(U_tf,\,h)=(V_+f,\,h).\tag{6}$$

Это равенство мы доказали в предположении (5), тогда как нам оно необходимо для случая, когда

$$\varphi(\lambda)\sqrt{\varrho'(\lambda)}\in\mathrm{L}^2(-\infty,\,\infty),\ \ \varkappa(\mu)\sqrt{\sigma'(\mu)}\in\mathrm{L}^2(-\infty,\,\infty),\tag{5'}$$

т. е. когда

$$\varphi(\lambda)\in\mathrm{L}^2_{\rho_a}(-\infty,\,\infty),\ \ \varkappa(\mu)\in\mathrm{L}^2_{\sigma_a}(-\infty,\,\infty),\tag{5''}$$

так как только в этом случае соотношение (6) будет доказано для любых $f \in \mathrm{R}_A$ и $h \in \mathrm{R}_B$. Однако здесь достаточно заметить, что если $\Omega(\lambda)$ пробегает множество всех финитных ступенчатых функций, то множество функций

$$\varphi(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\Omega(\lambda)}{\sqrt{\varrho'(\lambda)}}, & \varrho'(\lambda) \neq 0, \\ 0 \quad , & \varrho'(\lambda) = 0 \end{cases}$$

плотно в $\mathrm{L}^2_{\rho_a}(-\infty, \infty)$ и удовлетворяет условию (5), а множество функций

$$\varkappa(\mu) = \begin{cases} \dfrac{\Omega(\mu)}{\sqrt{\sigma'(\mu)}}, & \sigma'(\mu) \neq 0, \\ 0 \quad , & \sigma'(\mu) = 0 \end{cases}$$

плотно в $\mathrm{L}^2_{\sigma_a}(-\infty, \infty)$ и тоже удовлетворяет условию (5).

Так как оператор U_t равномерно ограничен по t, то из (6) и (3′) следует, что всюду в H в смысле слабой сходимости

$$\lim_{t\to\infty} P_B U_t = V_+. \tag{7}$$

Теперь мы докажем, что это равенство справедливо и в смысле сильной сходимости, а также, что множитель P_B в нем можно отбросить. Действительно, из слабой сходимости следует, что

$$\| V_+ f \|^2 = \lim_{t\to\infty} (P_B U_t f, \ V_+ f) \leqslant \underline{\lim}_{t\to\infty} \| V_+ f \| \cdot \| P_B e^{itB} e^{-itA} P_A f \|,$$

откуда

$$\| V_+ f \| \leqslant \underline{\lim}_{t\to\infty} \| P_B e^{itB} e^{-itA} P_A f \| \leqslant \overline{\lim}_{t\to\infty} \| P_B e^{itB} e^{-itA} P_A f \| \leqslant \| P_A f \|.$$

Но в силу (3)

$$\| V_+ f \| = \| P_A f \|,$$

а поэтому

$$\| V_+ f \| = \lim_{t\to\infty} \| P_B e^{itB} e^{-itA} P_A f \| = \| P_A f \|,$$

откуда следует, что (7) справедливо в смысле сильной сходимости. А так как

$$\| P_A f \|^2 = \| P_B e^{itB} e^{-itA} P_A f \|^2 + \| (I - P_B) e^{itB} e^{-itA} P_A f \|^2,$$

то, в смысле сильной сходимости,

$$\lim_{t\to\infty} (I - P_B) e^{itB} e^{-itA} P_A f = 0,$$

а это благодаря (7) и означает, что

$$\lim_{t\to\infty} U_t f = V_+ f,$$

т. е. соотношение (2) доказано.

Теорема. *Если A — произвольный самосопряженный оператор в H, K — конечномерный самосопряженный оператор и $B = A + K$, то волновые операторы $U_\pm\{B, A\}$ и $U_\pm\{A, B\}$ существуют и осуществляют изометрическое соответствие между абсолютно непрерывными частями операторов A и B.*

Доказательство достаточно провести для оператора $U_+\{B, A\}$. Если оператор K одномерен и $\mathrm{H} = \mathrm{H}_g$, то доказательство уже проведено выше. В общем случае одномерного оператора K, когда $\mathrm{H}_g \neq \mathrm{H}$, волновой оператор

$$U_+\{B, A\} = \lim_{t\to\infty} e^{itB}e^{-itA}P_A$$

также существует, причем на подпространстве $\mathrm{H} \ominus \mathrm{R}_A$ он, очевидно, равен нулю; на подпространстве $\mathrm{R}_A \cap (\mathrm{H} \ominus \mathrm{H}_g)$ он является единичным оператором, и, наконец, на подпространстве H_g он может быть определен, в соответствии с (1) и (2), равенством

$$U_+ f = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\lambda + i0)\,\varphi(\lambda)\,dF_\lambda P_{(\mathrm{R}_B \cap \mathrm{H}_g)} g,$$

если

$$f = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\,dE_\lambda g.$$

Переход от одномерного возмущения к любому конечномерному осуществляется с помощью теоремы 5 n° 97.

99. Переход к общему случаю ядерных возмущений.

Лемма *). *Пусть A — самосопряженный оператор в H и E_λ — его спектральная функция. Если элемент $f \in \mathrm{H}$ регулярен относительно A и если почти всюду*

$$\frac{d(E_\lambda f, f)}{d\lambda} \leqslant \mathscr{M}^2, \tag{1}$$

то для любого оператора Гильберта — Шмидта T с абсолютной нормой $N(T)$ имеет место неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \| Te^{-itA} f \|^2\, dt \leqslant 2\pi \mathscr{M}^2 N^2(T). \tag{2}$$

*) Эта тонкая лемма принадлежит М. Розенблюму (см. ссылку на стр. 330).

Доказательство. Пусть $\{g_n\}_1^\infty$ — ортонормированный базис в Δ_T. Тогда

$$\| Te^{-itA}f \|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(Te^{-itA}f, g_n)|^2 =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda} d(E_\lambda f, T^* g_n) \right|^2. \quad (3)$$

Оценим входящие в (3) интегралы. Для этого докажем, что в силу (1) при любом $h \in \mathrm{H}$, в частности при $h = T^* g_n$, функция $(E_\lambda f, h)$ абсолютно непрерывна, а ее производная

$$\frac{d(E_\lambda f, h)}{d\lambda} \in \mathrm{L}^2(-\infty, \infty)$$

и удовлетворяет неравенству

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d(E_\lambda f, h)}{d\lambda} \right|^2 d\lambda \leqslant \mathscr{M}^2 \| h \|^2.$$

Действительно, пусть H_f — подпространство, порождаемое совокупностью векторов $E(\Delta) f$, когда Δ пробегает множество всех интервалов числовой оси. Тогда можно положить $h = h_1 + h_2$, где $h_1 \in \mathrm{H}_f$, $h_2 \perp \mathrm{H}_f$. Далее (см. n° 83), найдется такая функция $\varphi(\mu)$, что

$$h_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\mu)\, dE_\mu f,$$

$$\| h_1 \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\mu)|^2 d(E_\mu f, f) \leqslant \| h \|^2.$$

Поэтому

$$(E_\lambda f, h) = (E_\lambda f, h_1) = \int_{-\infty}^{\lambda} \overline{\varphi(\mu)}\, d(E_\mu f, f),$$

откуда и вытекает наше утверждение.

Этот результат показывает, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda} d(E_\lambda f, T^* g_n) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda} \frac{d(E_\lambda f, T^* g_n)}{d\lambda} d\lambda$$

можно рассматривать как преобразование Фурье — Планшереля.

Следовательно, применимо равенство Парсеваля, в силу которого

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Big| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda} d\,(E_\lambda f,\, T^* g_n) \Big|^2 dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d(E_\lambda f,\, T^* g_n)}{d\lambda} \right|^2 d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi \mathscr{M}^2 \| T^* g_n \|^2,$$

откуда следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{m} \Big| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda} d\,(E_\lambda f,\, T^* g_n) \Big|^2 dt \leqslant 2\pi \mathscr{M}^2 \sum_{n=1}^{m} \| T^* g_n \|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi \mathscr{M}^2 N^2 (T^*) = 2\pi \mathscr{M}^2 N^2 (T).$$

Благодаря равенству (3) и теореме Фату, при любых конечных α и $\beta > \alpha$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \Big| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda}\, d\,(E_\lambda f,\, T^* g_n) \Big|^2 dt = \int_{\alpha}^{\beta} \| T e^{-itA} f \|^2 dt \leqslant 2\pi \mathscr{M}^2 N^2 (T),$$

откуда (полагая $\alpha \to -\infty$, $\beta \to \infty$) мы и получаем (2).

Теперь мы можем перейти к обобщению результатов n°n° 96 и 98 на случай произвольных ядерных возмущений K. Вот полная формулировка этого обобщения, включающего ранее полученные предложения.

Теорема. *Пусть A — произвольный самосопряженный оператор в* H, *а K — самосопряженное ядерное возмущение, так что в некотором ортонормированном базисе $\{g_j\}_1^\infty$*

$$Kf = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (f,\, g_j)\, g_j \qquad (f \in \mathrm{H}), \tag{4}$$

где

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| < \infty.$$

В таком случае

1. *Волновой оператор*

$$U_+ = U_+ \{B,\, A\} = \lim_{t\to\infty} e^{itB} e^{-itA} P_A,$$

где $B = A + K$, существует.

2. *Он частично изометричен: с начальной областью R_A и конечной областью R_B.*

3. *Абсолютно непрерывные части A_a и B_a операторов A и B унитарно эквивалентны, а именно*

$$B_a = U_+ A_a U_+^*, \qquad A_a = U_+^* B_a U_+.$$

4. *Остальные волновые операторы* $U_-\{B, A\}$ и $U_\pm\{A, B\} = U_\pm^*\{B, A\}$ *также существуют и обладают аналогичными свойствами.*

Доказательство. Благодаря результатам предыдущих пунктов достаточно доказать только первое утверждение. С этой целью положим при любом конечном m:

$$K_m f = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (f, g_j) g_j, \qquad s_m = \sum_{j=1}^{m} |\lambda_j|, \qquad B_m = A + K_m$$

и

$$U_t^{(m)} = e^{itB_m} e^{-itA} P_A \qquad (-\infty < t < \infty).$$

Используя дифференцирование по t вектора

$$e^{itB_m} e^{-itA} f,$$

мы, как и в n° 98, найдем, что при $f \in \mathrm{R}_A$

$$(U_t^{(m)} - U_s^{(m)}) f = i \int_s^t e^{i\tau B_m} K_m e^{-i\tau A} f \, d\tau.$$

В силу уже доказанного существования волнового оператора $U_+^{(m)} = U_+\{B_m, A\}$ $(m < \infty)$ мы можем сделать здесь предельный переход $t \to \infty$. Таким путем мы получим соотношение

$$(U_+^{(m)} - U_s^{(m)}) f = i \int_s^\infty e^{i\tau B_m} K_m e^{-i\tau A} f \, d\tau. \tag{5}$$

Так как $\| U_+^{(m)} f \| = \| f \|$ и $\| U_s^{(m)} f \| = \| f \|$, то

$$\| (U_+^{(m)} - U_s^{(m)}) f \|^2 = 2\Re ((U_+^{(m)} - U_s^{(m)}) f, U_+^{(m)} f).$$

Отсюда с помощью формулы (5) и теоремы 1 n° 97 находим, что

$$\| (U_+^{(m)} - U_s^{(m)}) f \|^2 = 2\Re i \int_s^\infty (K_m e^{-i\tau A} f, U_+^{(m)} e^{-i\tau A} f) \, d\tau. \tag{6}$$

Теперь представим возмущение K_m в виде

$$K_m = W_m |K_m| = W_m |K_m|^{1/2} |K_m|^{1/2}, \tag{7}$$

где $W_m = \operatorname{sign} K_m$ есть частично изометрический оператор. Предположим сначала, что для элемента f

$$\mathcal{M} = \operatorname{vrai\,sup} \frac{d(E_\lambda f, f)}{d\lambda} < \infty. \tag{8}$$

Тогда из (6) и (7) следует, что

$$\| (U_+^{(m)} - U_s^{(m)}) f \|^2 \leqslant$$
$$\leqslant 2 \left[\int_s^\infty \| \, |K_m|^{1/2} e^{-i\tau A} f \|^2 d\tau \right]^{1/2} \times$$
$$\times \left[\int_s^\infty \| \, |K_m|^{1/2} W_m^* U_+^{(m)} e^{-i\tau A} f \|^2 d\tau \right]^{1/2}, \quad (9)$$

причем существование обоих интегралов вытекает из (8) в силу леммы Розенблюма. Во втором из этих интегралов заменим s на $-\infty$. На основании упомянутой леммы и оценки для абсолютной нормы произведения (стр. 97)

$$N^2 (|K_m|^{1/2} W_m^* U_+^{(m)}) \leqslant s_m,$$

неравенство (9) можно представить в виде

$$\| (U_+^{(m)} - U_s^{(m)}) f \| \leqslant (8\pi \mathcal{M}^2 s_m)^{1/4} \left[\int_s^\infty \| \, |K_m|^{1/2} e^{-i\tau A} f \|^2 d\tau \right]^{1/4}.$$

Отсюда следует, что

$$\| (U_t^{(m)} - U_s^{(m)}) f \| \leqslant \| (U_+^{(m)} - U_t^{(m)}) f \| + \| (U_+^{(m)} - U_s^{(m)}) f \| \leqslant$$
$$\leqslant (8\pi \mathcal{M}^2 s_m)^{1/4} \left\{ \left[\int_s^\infty \| \, |K_m|^{1/2} e^{-i\tau A} f \|^2 d\tau \right]^{1/4} + \right.$$
$$\left. + \left[\int_t^\infty \| \, |K_m|^{1/2} e^{-i\tau A} f \|^2 d\tau \right]^{1/4} \right\}. \quad (10)$$

Покажем, что в полученном неравенстве возможен предельный переход при $m \to \infty$. Действительно, с одной стороны, при любом m

$$s_m \leqslant s_\infty = \sum_{j=1}^\infty |\lambda_j| < \infty$$

и, как видно из представления (4),

$$\| \, |K_m|^{1/2} h \| \leqslant \| \, |K|^{1/2} h \|$$

при всех $h \in \mathrm{H}$.

С другой стороны, при $m \to \infty$

$$U_t^{(m)} h \to U_t h \qquad (h \in \mathrm{H}),$$

ибо в смысле сильной сходимости (по крайней мере)

$$e^{itB_m} \longrightarrow e^{itB}.$$

Это следует из того, что в каждой точке непрерывности спектральной функции F_λ, принадлежащей оператору B, в силу теоремы 2 n° 79 имеет место предельное соотношение

$$\lim_{m\to\infty} F_\lambda^{(m)} = F_\lambda$$

(в смысле сильной сходимости), где $F_\lambda^{(m)}$ — разложение единицы оператора B_m.

Таким образом, при $m \longrightarrow \infty$ находим из (10):

$$\|(U_t - U_s) f\| \leqslant (8\pi\mathscr{M}^2 s_\infty)^{1/4} \left\{ \left[\int\limits_s^\infty \| \, |K|^{1/2} e^{-i\tau A} f \|^2 \, d\tau \right]^{1/4} + \right.$$

$$\left. + \left[\int\limits_t^\infty \| \, |K|^{1/2} e^{-i\tau A} f \|^2 \, d\tau \right]^{1/4} \right\},$$

где

$$U_t = e^{itB} e^{-itA} P_A.$$

Из полученного неравенства вытекает существование $\lim\limits_{t\to\infty} U_t f$ для всех элементов $f \in \mathrm{R}_A$, удовлетворяющих неравенству (8). Но множество всех таких элементов f при всевозможных $\mathscr{M}$ плотно в R_A, а оператор U_t равномерно ограничен по t. Поэтому $\lim\limits_{t\to\infty} U_t f$ существует при всех $f \in \mathrm{R}_A$, а это и означает, что волновой оператор $U_+ \{B, A\}$ существует. Таким образом, теорема доказана.

В заключение отметим, что волновые операторы и операторы рассеяния для заданной пары самосопряженных операторов $\{A, B\}$ существуют не только в случае ядерных возмущений, т. е. когда разность $B - A$ ядерна, но также и тогда, когда оказывается ядерной разность некоторых натуральных степеней p резольвент этих операторов:

$$R_z^p(A) - R_z^p(B) \qquad (\Im z \neq 0),$$

а также и в ряде более общих случаев *).

*) М. Ш. Бирман и М. Г. Крейн, ДАН СССР **144**, № 3 (1962); М. Ш. Бирман, ДАН СССР **143**, № 3 (1962), **159**, № 3 (1964); T. Kato, Wave operators and unitary equivalence, препринт (1963).

ТЕОРИЯ РАСШИРЕНИЯ СИММЕТРИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

100. Индексы дефекта. Пусть T — произвольный линейный оператор, область определения которого мы даже не предполагаем пока плотной в H.

Назовем число λ (вещественное или невещественное) *точкой регулярного типа* оператора T, если существует такое $k = k(\lambda) > 0$, что при всех $f \in \mathrm{D}_T$

$$\|(T-\lambda I)f\| \geqslant k\|f\|.$$

Поэтому собственные значения оператора T не являются для него точками регулярного типа. Далее, если λ есть точка регулярного типа оператора T, то оператор $(T-\lambda I)^{-1}$ существует и ограничен, хотя его область определения может оказаться не плотной в H, и обратно, если оператор $(T-\lambda I)^{-1}$ существует и ограничен, то λ есть точка регулярного типа.

Если λ_0 есть точка регулярного типа, то при $|\lambda-\lambda_0| \leqslant \delta \leqslant \frac{1}{2}k(\lambda_0)$ и любом $f \in \mathrm{D}_T$ имеет место неравенство

$$\|(T-\lambda I)f\| \geqslant \|(T-\lambda_0 I)f\| - |\lambda-\lambda_0|\cdot\|f\| \geqslant$$
$$\geqslant \{k(\lambda_0)-\delta\}\|f\| \geqslant \frac{1}{2}k(\lambda_0)\|f\|.$$

Это уже однажды применявшееся нами соображение (см. доказательство теоремы 4 n° 48) показывает, что множество точек регулярного типа всегда открыто. Мы будем называть это множество точек *полем регулярности* оператора T.

Если A есть симметрический оператор и $z = x + iy$ $(y \neq 0)$, то (сравни доказательство теоремы 3 n° 48) при любом $f \in \mathrm{D}_A$

$$\|(A-zI)f\|^2 = \|(A-xI)f\|^2 + y^2\|f\|^2 \geqslant y^2\|f\|^2,$$

откуда видно, что верхняя и нижняя половины z-плоскости являются связными компонентами поля регулярности любого симметрического оператора.

Поле регулярности изометрического оператора V также содержит две связные компоненты: область внутри и область вне единичного круга. Действительно, при $|\zeta| < 1$

$$\|(V-\zeta I)f\| \geqslant \|Vf\| - |\zeta|\cdot\|f\| = (1-|\zeta|)\|f\|$$

и, аналогично, при $|\zeta| > 1$,

$$\|(V-\zeta I)f\| \geqslant |\zeta|\cdot\|f\| - \|Vf\| = (|\zeta|-1)\|f\|.$$

Т е о р е м а. *Если Γ есть связная компонента поля регулярности линейного оператора T, то размерность подпространства $\mathrm{H} \ominus \Delta_T(\lambda)$ одинакова для всех $\lambda \in \Gamma$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через P_λ оператор ортогонального проектирования на подпространство

$$\mathfrak{N}_\lambda = \mathrm{H} \ominus \Delta_T(\lambda).$$

Если мы покажем, что для любых $\lambda_1, \lambda_2 \in \Gamma$

$$\|P_{\lambda_1} - P_{\lambda_2}\| < 1, \tag{1}$$

то из теоремы п° 39 будет следовать, что размерности подпространств $\mathfrak{N}_{\lambda_1}$, $\mathfrak{N}_{\lambda_2}$ одинаковы. Чтобы доказать неравенство (1) для любых $\lambda_1, \lambda_2 \in \Gamma$, достаточно установить, что для любого $\lambda_0 \in \Gamma$ найдется такое $\delta = \delta(\lambda_0) > 0$, что при $|\lambda - \lambda_0| < \delta$

$$\|P_\lambda - P_{\lambda_0}\| < 1,$$

а затем учесть, что любые две точки $\lambda_1, \lambda_2 \in \Gamma$ можно соединить путем, который в силу леммы Гейне — Бореля покрывается конечным числом построенных δ-окрестностей.

Итак, пусть λ_0 — некоторая фиксированная точка области Γ и пусть

$$\delta = \delta(\lambda_0) \leqslant \frac{1}{3} k(\lambda_0).$$

Так как

$$k(\lambda_0)\|f\| \leqslant \|(T-\lambda_0 I)f\| \leqslant \|(T-\lambda I)f\| + |\lambda-\lambda_0|\cdot\|f\|,$$

то при $|\lambda - \lambda_0| \leqslant \delta$

$$\|(T-\lambda I)f\| \geqslant \frac{2}{3} k(\lambda_0)\|f\|.$$

Примем, что $|\lambda - \lambda_0| \leqslant \delta$. В таком случае для любого $h \in \mathfrak{N}_\lambda$ ($\|h\| = 1$)

$$\|(I-P_{\lambda_0})h\| = \sup_{f \in \mathrm{D}_T} \frac{|(h, \{T-\lambda_0 I\} f)|}{\|(T-\lambda_0 I)f\|} =$$

$$= \sup_{f \in \mathrm{D}_T} \frac{|(h, \{T-\lambda I\} f + (\lambda-\lambda_0) f)|}{\|(T-\lambda_0 I)f\|} = \sup_{f \in \mathrm{D}_T} \frac{|\lambda-\lambda_0|\cdot|(h, f)|}{\|(T-\lambda_0 I)f\|} \leqslant \frac{1}{2}, \tag{2}$$

и для любого $h \in \mathfrak{N}_{\lambda_0}$ ($\| h \| = 1$)

$$\| (I - P_\lambda) h \| \leqslant \frac{1}{2} . \tag{3}$$

На основании второго определения раствора двух линейных многообразий (см. n° 39) из неравенств (2), (3) следует, что

$$\| P_\lambda - P_{\lambda_0} \| \leqslant \frac{1}{2} .$$

Тем самым теорема *) доказана.

Из наших рассмотрений вытекает, что

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \| P_\lambda - P_{\lambda_0} \| = 0 \qquad (\lambda, \lambda_0 \in \Gamma).$$

Это соотношение выражает, что подпространство $\mathfrak{N}_\lambda$ *непрерывно* вращается вокруг точки $f = 0$ при движении точки λ по области Γ.

Условимся называть *дефектным числом* линейного многообразия $\mathfrak{M}$ размерность его ортогонального дополнения $\mathfrak{N} = \mathrm{H} \ominus \mathfrak{M}$ и будем писать

$$\operatorname{def} \mathfrak{M} = \dim \mathfrak{N}.$$

Дефектное число может быть как конечным, так и бесконечным.

Доказанная только что теорема дает право ввести следующее

Определение. Дефектное число линейного многообразия $\mathfrak{M}_\lambda = \Delta_T(\lambda)$ для точек λ, принадлежащих данной связной компоненте поля регулярности оператора T, называется *дефектным числом* оператора T в этой компоненте поля регулярности. При этом $\mathfrak{N}_\lambda = \mathrm{H} \ominus \mathfrak{M}_\lambda$ называется *дефектным подпространством* оператора T для точки λ, а любой отличный от нуля элемент дефектного подпространства называется *дефектным элементом*.

Каждый симметрический оператор A имеет два дефектных числа, а именно одно ($\mathfrak{m}$) в нижней, другое ($\mathfrak{n}$) в верхней полуплоскости. Их называют также *индексами дефекта* оператора A:

$$\operatorname{def} \Delta_A(z) = \begin{cases} \mathfrak{m} & (\Im z < 0), \\ \mathfrak{n} & (\Im z > 0). \end{cases}$$

Подобным образом два дефектных числа (или индексы дефекта) имеет любой изометрический оператор V:

$$\operatorname{def} \Delta_V(\zeta) = \begin{cases} \mathfrak{m} & (|\zeta| > 1), \\ \mathfrak{n} & (|\zeta| < 1). \end{cases}$$

*) Эта теорема принадлежит М. Г. Крейну и М. А. Красносельскому (см. их статью, цитированную в n° 39). Для симметрических операторов (см. ниже предложения 1° и 2°) теорема была доказана ранее Нейманом, а самый факт, выражаемый теоремой Неймана, был обнаружен еще ранее Г. Вейлем — на дифференциальных операторах второго порядка, Т. Карлеманом — на интегральных операторах и Хеллингером — на якобиевых матрицах (см. работы, цитируемые в n° 102 и в добавлениях).

Индексы дефекта симметрического (соответственно изометрического) оператора образуют упорядоченную пару чисел *) $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$. В тех случаях, когда будет наперед известна конечность дефектных чисел, мы будем обозначать их латинскими буквами.

Из доказанной нами теоремы непосредственно вытекают следующие три предложения.

1°. *Если симметрический оператор имеет вещественную точку регулярного типа, то его дефектные числа равны:* $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$. *То же справедливо относительно изометрического оператора, если он имеет точку регулярного типа на единичной окружности.*

2°. *Если A — симметрический оператор, то любое невещественное число z является для сопряженного оператора A^* собственным значением: кратности* $\mathfrak{m}$, *если* $\Im z > 0$, *и кратности* $\mathfrak{n}$, *если* $\Im z < 0$.

Действительно, если f пробегает D_A, а g пробегает $\mathfrak{N}_{\bar{z}}$ то

$$(g, \{A-\bar{z}I\} f)=0,$$

откуда

$$(A^*g-zg, f)=0$$

или

$$A^*g=zg.$$

Таким образом, z есть собственное значение оператора A^* и притом кратности $\dim \mathfrak{N}_{\bar{z}}$.

3°. *Дефектные числа изометрического оператора V могут быть определены с помощью следующих равенств:*

$$\mathfrak{m}=\operatorname{def} D_V,$$
$$\mathfrak{n}=\operatorname{def} \Delta_V.$$

Нуждается в доказательстве только первое равенство. Его справедливость следует из того, что при любом $\zeta \neq 0$

$$\Delta_V(\zeta)=(V-\zeta I) D_V=\left(\frac{1}{\zeta} V-I\right) D_V=$$
$$=\left(\frac{1}{\zeta} I-V^{-1}\right) V D_V=\left(V^{-1}-\frac{1}{\zeta} I\right) D_{V^{-1}}=\Delta_{V^{-1}}\left(\frac{1}{\zeta}\right),$$

а потому, при $|\zeta|>1$,

$$\mathfrak{m}=\operatorname{def} \Delta_V(\zeta)=\operatorname{def} \Delta_{V^{-1}}\left(\frac{1}{\zeta}\right)=\operatorname{def} \Delta_{V^{-1}}(0)=\operatorname{def} \Delta_{V^{-1}}=\operatorname{def} D_V.$$

Справедливо также следующее предложение.

4°. *Если A — произвольный симметрический оператор в* H, *а B — ограниченный самосопряженный оператор в* H, *то индексы дефекта операторов A и $A+B$ одинаковы.*

---

*) Иногда индексом дефекта называют весь символ $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$.

Для доказательства достаточно взять при фиксированном невещественном λ_0 семейство операторов $A - \lambda_0 I + tB$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ и установить независимость от t размерности подпространства $\mathrm{H} \ominus \Delta_{A+tB}(\lambda_0)$, подобно тому как это было сделано при доказательстве основной теоремы настоящего пункта.

101. Снова о преобразовании Кэли. В п° 79 мы впервые ввели преобразование Кэли V замкнутого симметрического оператора A при помощи формул

$$\left.\begin{aligned} (A-\bar{z}I)\,h &= f, \\ (A-zI)\,h &= Vf, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где z — какое-нибудь невещественное число, а h пробегает D_A. Мы будем предполагать в настоящем пункте, что $\Im z > 0$. Оператор V выражается через оператор A формулой

$$Vf = (A-zI)\,(A-\bar{z}I)^{-1}\,f;$$

при этом областью определения D_V оператора V является $\Delta_A(\bar{z})$. Заметим также, что в силу формул (1)

$$\left.\begin{aligned} h &= \frac{(V-I)\,f}{\bar{z}-z}, \\ Ah &= \frac{(\bar{z}V-zI)\,f}{\bar{z}-z}, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

и поэтому

$$Ah = (\bar{z}V - zI)\,(V-I)^{-1}\,h. \tag{2'}$$

Для дальнейшего весьма важно, что *индексы дефекта* $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ *оператора A совпадают с индексами дефекта оператора V*. Действительно, по определению,

$$\mathfrak{m} = \operatorname{def}\Delta_A(\bar{z}).$$

Но

$$\Delta_A(\bar{z}) = \mathrm{D}_V,$$

следовательно,

$$\operatorname{def}\mathrm{D}_V = \mathfrak{m}.$$

С другой стороны, снова по определению,

$$\mathfrak{n} = \operatorname{def}\Delta_A(z)$$

и

$$\Delta_A(z) = \Delta_V,$$

так что

$$\operatorname{def}\Delta_V = \mathfrak{n}.$$

Остается принять во внимание предложение 3° п° 100.

Теорема 1. *Если V — изометрический оператор и если многообразие Δ_V (1) плотно в Н, то определяемый формулой* (2′) *оператор A — симметрический, а оператор V есть его преобразование Кэли.*

Доказательство. Так как Δ_V (1) плотно в Н, то обратный оператор $(V-I)^{-1}$ существует. Действительно, несуществование этого оператора означает, что единица есть собственное значение оператора V. Но если

$$Vg=g \qquad (g\neq 0),$$

то при любом $f\in D_V$

$$(Vf-f,\ g)=(Vf,\ g)-(f,\ g)=(Vf,\ Vg)-(f,\ g)=0,$$

т. е. $g\perp\Delta_V$ (1).

Поскольку оператор $(V-I)^{-1}$ существует, то оператор

$$A=(\bar{z}V-zI)(V-I)^{-1}$$

имеет смысл, а его область определения плотна в Н. Докажем, что этот оператор — симметрический.

Пусть f, g — произвольные элементы из $D_A=\Delta_V$ (1):

$$\begin{aligned} f&=V\varphi-\varphi,\\ g&=V\psi-\psi, \end{aligned} \qquad (\varphi,\ \psi\in D_V).$$

В таком случае,

$$Af=(\bar{z}V-zI)\,\varphi=\bar{z}V\varphi-z\varphi,$$

$$Ag=(\bar{z}V-zI)\,\psi=\bar{z}V\psi-z\psi.$$

Поэтому

$$(Af,\ g)=(\bar{z}V\varphi-z\varphi,\ V\psi-\psi)=(z+\bar{z})(\varphi,\ \psi)-\bar{z}(V\varphi,\ \psi)-z(\varphi,\ V\psi)$$

и

$$(f,\ Ag)=(V\varphi-\varphi,\ \bar{z}V\psi-z\psi)=(z+\bar{z})(\varphi,\ \psi)-\bar{z}(V\varphi,\ \psi)-z(\varphi,\ V\psi).$$

Мы видим, что

$$(Af,\ g)=(f,\ Ag).$$

Доказательство соотношения

$$V=\frac{A-zI}{A-\bar{z}I}$$

не представляет никакого труда. Таким образом, оператор V является преобразованием Кэли оператора A.

В дальнейшем мы будем применять название «преобразование Кэли» к каждому из операторов V, A, связанных соотношениями (1) и (2), т. е. мы не только будем называть оператор V преобразованием Кэли оператора A, но и оператор A — преобразованием Кэли оператора V.

Из доказанных нами предложений непосредственно следует

Теорема 2. *Пусть A_1 и A_2 — симметрические операторы, а V_1 и V_2 — их преобразования Кэли. Для того чтобы оператор A_2 был расширением оператора A_1, необходимо и достаточно, чтобы оператор V_2 был расширением оператора V_1.*

Теоремой 2 вопрос о симметрических расширениях заданного оператора A сводится к вопросу об изометрических расширениях его преобразования Кэли V.

Так как замкнутые линейные многообразия F и G могут служить соответственно областью определения и изменения изометрического оператора тогда и только тогда, когда равны их размерности (см. п° 10), то изометрические расширения оператора V могут быть получены следующим образом.

Выберем в дефектных подпространствах $\mathrm{H} \ominus \mathrm{D}_V$, $\mathrm{H} \ominus \Delta_V$ два подпространства, F и G, равных размерностей и построим произвольный изометрический оператор V_1 с областью определения F и областью значений G.

Определим, далее, линейный оператор $\widetilde{V}$ с областью определения $\mathrm{D}_{\widetilde{V}} = \mathrm{D}_V \oplus \mathrm{F}$ и областью значений $\Delta_{\widetilde{V}} = \Delta_V \oplus \mathrm{G}$ формулами

$$\widetilde{V}f = \begin{cases} Vf & \text{при} \quad f \in \mathrm{D}_V, \\ V_1 f & \text{при} \quad f \in \mathrm{F}. \end{cases}$$

Очевидно, $\widetilde{V}$ есть изометрическое расширение V и при всевозможных изменениях F, G, V_1 мы получим все изометрические расширения $\widetilde{V}$ оператора V и каждое по одному разу.

Чтобы найти некоторое симметрическое расширение $\widetilde{A}$ оператора A, следует перейти к преобразованию Кэли оператора A, найти по описанному выше методу некоторое расширение $\widetilde{V}$ оператора V и, наконец, вернуться к $\widetilde{A}$, выполнив преобразование Кэли над $\widetilde{V}$. Соответствующая этому процессу формула будет дана в п° 102.

Из приведенных выше рассуждений следует, в частности, что оператор A является максимальным симметрическим (самосопряженным) тогда и только тогда, когда его преобразование Кэли V является максимальным изометрическим (соответственно унитарным) оператором.

Поэтому имеет место

Теорема 3. *Для того чтобы симметрический оператор был максимальным, необходимо и достаточно, чтобы одно из его дефектных чисел равнялось нулю. Для того чтобы симметрический оператор был самосопряженным, необходимо и достаточно, чтобы оба его дефектных числа равнялись нулю.*

Из описанного ранее процесса расширения следует также

Теорема 4. *Пусть A — произвольный симметрический оператор с индексами дефекта* $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$. *Оператор A всегда можно расширить до максимального. Если* $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{n}$, *то среди таких расширений нет самосопряженных; если* $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$ *и* $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ *конечны, то любое максимальное расширение оператора A является самосопряженным; если же дефектные числа* $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ *бесконечны и равны, то среди максимальных расширений имеются как самосопряженные, так и несамосопряженные.*

102. Формулы Неймана.

Теорема. *Пусть A — произвольный симметрический оператор с областью определения* D_A, *а* $\mathfrak{N}_{\bar z}$ *и* $\mathfrak{N}_z$ $(\Im z > 0)$ — *какая-нибудь пара его дефектных подпространств. Для области определения* D_{A^*} *оператора A^* имеет место следующее представление в виде прямой суммы трех линейных многообразий:*

$$D_{A^*} = D_A \oplus \mathfrak{N}_{\bar z} \oplus \mathfrak{N}_z.$$

Доказательство. Покажем, что любой элемент f из D_{A^*} представим в виде

$$f = f_0 + g_z + g_{\bar z}, \tag{1}$$

где *) $f_0 \in D_A$, $g_z \in \mathfrak{N}_{\bar z}$, $g_{\bar z} \in \mathfrak{N}_z$; при этом следует заметить, что вместе с (1) будет иметь место формула

$$A^* f = A f_0 + z g_z + \bar z g_{\bar z}. \tag{1'}$$

Пусть $f \in D_{A^*}$. Разложим элемент $A^* f - z f$ на составляющие в ортогональных подпространствах $\mathfrak{M}_z$ и $\mathfrak{N}_z$:

$$A^* f - z f = (A f_0 - z f_0) + (\bar z - z) g_{\bar z}.$$

*) Напомним (см. утверждение 2° n° 100), что $\mathfrak{N}_{\bar z}$ есть собственное подпространство оператора A^*, принадлежащее собственному значению z. Поэтому элементы из $\mathfrak{N}_{\bar z}$ обозначены g_z.

Но $A^* g_{\bar{z}} = \bar{z} g_{\bar{z}}$; поэтому

$$A^* (f - f_0 - g_{\bar{z}}) = z (f - f_0 - g_{\bar{z}}),$$

откуда заключаем, что

$$f - f_0 - g_{\bar{z}} \in \mathfrak{N}_{\bar{z}},$$

т. е.

$$f - f_0 - g_{\bar{z}} = g_z$$

или

$$f = f_0 + g_z + g_{\bar{z}}.$$

Для окончания доказательства теоремы осталось установить, что представление (1) каждого элемента $f \in D_{A^*}$ единственно. Допуская противное, примем, что

$$f_0 + g_z + g_{\bar{z}} = 0. \tag{2}$$

Применяя к обеим частям этого равенства оператор A^*, получаем

$$Af_0 + z g_z + \bar{z} g_{\bar{z}} = 0. \tag{2'}$$

Умножая далее (2) на z и вычитая из (2′), получим

$$Af_0 - z f_0 + (\bar{z} - z)\, g_{\bar{z}} = 0,$$

откуда, вследствие ортогональности слагаемых, следует, что $(\bar{z} - z)\, g_{\bar{z}} = 0$; точно так же получим, что $(\bar{z} - z)\, g_z = 0$; следовательно,

$$f_0 = g_{\bar{z}} = g_z = 0.$$

Теорема доказана.

Найдем теперь $\mathfrak{J}\,(A^* f, f)$ при любом $f \in D_{A^*}$. В соответствии с (1) и (1′), имеем $f = f_0 + g$, где $g = g_z + g_{\bar{z}}$, и

$$(A^* f, f) = (Af_0 + A^* g,\ f_0 + g) =$$
$$= (Af_0, f_0) + (g, Af_0) + (Af_0, g) + (z g_z + \bar{z} g_{\bar{z}},\ g_z + g_{\bar{z}}).$$

Так как сумма первых трех слагаемых вещественна, то

$$\mathfrak{J}\,(A^* f, f) = \mathfrak{J}\,\{z \| g_z \|^2 + \bar{z} \| g_{\bar{z}} \|^2 + [z\,(g_z, g_{\bar{z}}) + \bar{z}\,(g_{\bar{z}}, g_z)]\},$$

где в квадратных скобках снова стоит вещественная величина, а потому окончательно находим

$$\mathfrak{J}\,(A^* f, f) = \mathfrak{J} z\,(\| g_z \|^2 - \| g_{\bar{z}} \|^2). \tag{3}$$

В соответствии с формулой (3) область D_{A^*} состоит из трех (нелинейных) многообразий: Γ^+ (совокупность элементов f, для которых $\mathfrak{I}(A^*f, f) > 0$), Γ^- (совокупность элементов f, для которых $\mathfrak{I}(A^*f, f) < 0$) и Γ^0 (совокупность элементов f, для которых (A^*f, f) вещественно). Элемент

$$f = f_0 + g_z + g_{\bar z}$$

принадлежит Γ^+, Γ^- или Γ^0, смотря по тому, будет ли

$$\| g_z \| > \| g_{\bar z} \|, \quad \| g_z \| < \| g_{\bar z} \| \text{ или } \| g_z \| = \| g_{\bar z} \| \quad (\text{если } \mathfrak{I}z > 0).$$

Найдем теперь для области определения $D_{\tilde A}$ любого симметрического расширения $\tilde A$ оператора A представление, аналогичное формуле (1).

Чтобы подчеркнуть зависимость введенных в п° 101 подпространств F и G от z, будем писать F_z и G_z. Таким образом, $F_z \subseteq \mathfrak{N}_{\bar z}$, $G_z \subseteq \mathfrak{N}_z$.

Из рассмотрений п° 101 следует, что

$$D_{\tilde A} = (\tilde V - I)\, D_{\tilde V} = (\tilde V - I)\,(D_V \oplus F_z) =$$
$$= (V - I)\, D_V \oplus (V_1 - I)\, F_z = D_A \oplus (V_1 - I)\, F_z$$

или, полагая $V_1 = -V'$,

$$D_{\tilde A} = D_A \oplus (V' + I)\, F_z.$$

Из $A^* \supset \tilde A$ следует, что при

$$f = f_0 + g_z + V' g_z \qquad (g_z \in F_z) \tag{4}$$

будет

$$\tilde A f = A f_0 + z g_z + \bar z V' g_z. \tag{4'}$$

Формулы (1) и (4) будем называть соответственно *первой* и *второй формулой Неймана* *).

Из первой формулы Неймана непосредственно следует для размерности D_{A^*} по модулю D_A формула:

$$\dim D_{A^*}/D_A = \dim \mathfrak{N}_{\bar z} + \dim \mathfrak{N}_z. \tag{5}$$

Отметим, что, используя первую формулу Неймана и введенные выше многообразия Γ^+, Γ^-, Γ^0, нетрудно получить теорему о постоянстве дефектных чисел симметрического оператора в каждой из полуплоскостей $\mathfrak{I}z \gtrless 0$ (т. е. утверждение 2° п° 100) без использования общей теоремы п° 100. В частности, в случае равных индексов дефекта названное утверждение вытекает из одной лишь формулы (5), так как левая ее часть, очевидно, не зависит от z.

---

*) J. von Neumann, Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktional Operatoren, Math. Ann. **102** (1929), 49—131. В п°п° 102—104 мы следуем этой статье Неймана.

Вторая формула Неймана совместно с равенством (4′) описывает все симметрические расширения $\widetilde{A}$ заданного оператора A. Если, в частности, оператор A имеет равные дефектные числа и $\widetilde{A}$ есть его самосопряженное расширение, то в формуле (4) элемент g_z будет пробегать все подпространство $\mathfrak{N}_{\bar{z}}$, а $V'g_z$ — все $\mathfrak{N}_z$. Обратно, если в (4) элемент g_z пробегает все $\mathfrak{N}_{\bar{z}}$, а $V'g_z$ — все $\mathfrak{N}_z$, то оператор $\widetilde{A}$ будет самосопряженным расширением оператора A. Если индексы дефекта оператора A и его симметрического расширения $\widetilde{A}$ суть (m, n) и $(m-p, n-p)$, где $m, n < \infty$, то из второй формулы Неймана вытекает соотношение

$$\dim \mathrm{D}_{\widetilde{A}}/\mathrm{D}_A = p.$$

Поясним изложенную теорию на примере оператора дифференцирования $\mathcal{F}$, который мы ввели в n° 55.

Уравнение

$$\mathcal{F}^* g = zg$$

имеет вид

$$\frac{dg}{dt} + izg = 0.$$

Его формальным решением является функция

$$g(t) = Ce^{-izt}. \tag{6}$$

В случае полной оси $(-\infty < t < +\infty)$ эта функция принадлежит L^2 только при $C=0$. Следовательно, индексы дефекта оператора дифференцирования на всей оси суть (0, 0). В случае полуоси $(0 \leqslant t < \infty)$ индексами дефекта являются (0, 1), так как функция (6) принадлежит $\mathrm{L}^2(0, \infty)$ при $\mathfrak{J}z < 0$ и не принадлежит $\mathrm{L}^2(0, \infty)$ при $\mathfrak{J}z > 0$. Наконец, в случае интервала $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ индексы дефекта будут (1, 1), так как функция (6) принадлежит $\mathrm{L}^2(0, 2\pi)$ при любом z.

Полагая в формуле (4)

$$z = i, \qquad g_z = e^t$$

и

$$V'g_z = \vartheta g_{\bar{z}},$$

где $g_{\bar{z}} = e^{2\pi - t}$, а ϑ $(|\vartheta| = 1)$ есть постоянная, и меняя $\arg \vartheta$ в интервале $[0, 2\pi]$, получим все самосопряженные расширения $\widetilde{\mathcal{F}}$ оператора $\mathcal{F}$ (на интервале $[0, 2\pi]$) в следующем виде:

$$\varphi(t) = \varphi_0(t) + \alpha\,(e^t + \vartheta e^{2\pi - t}),$$

$$\widetilde{\mathcal{F}}\varphi(t) = i\varphi_0'(t) + \alpha i\,(e^t - \vartheta e^{2\pi - t});$$

здесь $\varphi_0(0) = \varphi_0(2\pi) = 0$, а α — произвольная постоянная.

Легко проверить, что этот результат совпадает с результатом n° 55, причем связь между фигурирующими здесь и там параметрами имеет вид

$$\vartheta = \frac{\theta - e^{2\pi}}{1 - e^{2\pi}\theta}.$$

103. Простые симметрические операторы. Симметрический (соответственно изометрический) оператор называется *простым*, если не существует приводящего его подпространства, в котором он индуцировал бы самосопряженный (соответственно унитарный) оператор.

Для простоты симметрического оператора A необходимо и достаточно, чтобы было простым его преобразование Кэли V.

Справедливость этого утверждения вытекает из следующего предложения.

Теорема 1. *Подпространство* $\mathfrak{G}$ *приводит симметрический оператор* A *в том и только том случае, когда оно приводит преобразование Кэли* V *оператора* A.

Доказательство. Пусть $h \in \mathfrak{D}_A$, так что

$$h = (V - I) f, \qquad Ah = (\bar{z}V - zI) f \qquad (f \in \mathfrak{D}_V).$$

Принимая, что подпространство $\mathfrak{G}$ приводит V, и обозначая через P оператор проектирования на $\mathfrak{G}$, будем иметь

$$Pf \in \mathfrak{D}_V, \qquad VPf = PVf.$$

Поэтому

$$Ph = (V - I) Pf \in \mathfrak{D}_A$$

и

$$APh = A(V - I) Pf = (\bar{z}V - zI) Pf = P(\bar{z}V - zI) f = PAh.$$

Таким образом, достаточность условия теоремы доказана.

Чтобы доказать необходимость, предположим, что $f \in \mathfrak{D}_V$ и, следовательно,

$$f = (A - \bar{z}I) h, \qquad Vf = (A - zI) h \qquad (h \in \mathfrak{D}_A).$$

Принимая, что подпространство $\mathfrak{G}$ приводит оператор A, будем иметь

$$Pf = (A - \bar{z}I) Ph \in \mathfrak{D}_V.$$

Остается проверить, что

$$VPf = PVf.$$

Но

$$VPf = V(A - \bar{z}I) Ph = (A - zI) Ph = P(A - zI) h = PVf,$$

и теорема доказана.

Если изометрический оператор V не простой и, значит, имеет унитарные части, то среди этих унитарных частей существует *максимальная* (в том смысле, что она является расширением любой другой унитарной части оператора V). Действительно, максимальной унитарной частью оператора V является часть V, лежащая в замкнутой линейной оболочке G_0 всех тех приводящих V подпространств, в которых V индуцирует унитарные операторы.

Подобным образом может быть определена *максимальная самосопряженная часть* непростого симметрического оператора.

Лемма. *Пусть V — изометрический оператор с равными дефектными числами, U_0 — его максимальная унитарная часть и U — какое-нибудь унитарное расширение оператора V.*

В таком случае D_{U_0} является ортогональным дополнением линейной оболочки L подпространств U^k $(H \ominus D_V)$ $(\pm k = 0, 1, 2, \ldots)$.

Доказательство. Введем подпространство

$$G = H \ominus \overline{L}.$$

Оно является инвариантным подпространством как для U, так и для U^{-1}. Поэтому по теореме 3 n° 47 подпространство G приводит U. Пусть U' есть часть U, лежащая в G.

Так как G ортогонально L, то и подавно G ортогонально $H \ominus D_V$ и, следовательно, принадлежит D_V:

$$G \subseteq D_V.$$

Равным образом

$$G \subseteq \Delta_V.$$

Следовательно, G приводит V, а потому U' есть унитарная часть V, лежащая в G и, значит,

$$G \subseteq D_{U_0}. \tag{1}$$

Но, с другой стороны,

$$D_{U_0} \subseteq D_V,$$

и, значит, D_{U_0} ортогонально подпространству $H \ominus D_V$. А так как $U^k D_{U_0} = U_0^k D_{U_0} = D_{U_0}$, то $U^k D_{U_0}$ ортогонально к $H \ominus D_V$ при $\pm k = 0, 1, 2, \ldots$ Следовательно, D_{U_0} ортогонально L, т. е.

$$D_{U_0} \subseteq G. \tag{2}$$

Сравнение (1) с (2) и доказывает лемму.

В дальнейшем нам понадобится непосредственно вытекающее из доказанной леммы

Следствие. *В несепарабельном пространстве не существует простых симметрических операторов с равными и конечными дефектными числами.*

Дальнейшим следствием леммы является

Теорема 2. *Для простоты изометрического оператора V с равными дефектными числами необходимо, чтобы при любом, и достаточно, чтобы при каком-нибудь его унитарном расширении U линейная оболочка подпространств* U^k (H $\ominus$ D$_V$) ($\pm k = 0, 1, 2, \ldots$) *была плотной в* H.

Из этой теоремы и теоремы 1 n° 83 следует, что любое унитарное (самосопряженное) расширение простого изометрического (симметрического) оператора с индексами дефекта (1, 1) имеет простой спектр.

Аналогично доказывается общая

Теорема 3. *Кратность спектра любого унитарного (самосопряженного) расширения простого изометрического (симметрического) оператора с конечными индексами дефекта* (m, m) *не превосходит* m.

104. Структура максимальных операторов. Пусть пространство H сепарабельно и $\{e_k\}_1^\infty$ — какой-нибудь ортонормированный базис в нем. Введем в рассмотрение линейные операторы V_+ и V_-, определяемые формулами

$$V_+e_k = e_{k+1} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$
$$V_-e_k = e_{k-1} \qquad (k = 2, 3, 4, \ldots).$$

Очевидно, V_+ и V_- — изометрические операторы с индексами дефекта (0, 1) и (1, 0) соответственно.

Желая перейти к преобразованиям Кэли A_+ и A_- операторов V_+ и V_-, проверим, что многообразия $\Delta_{V_+}(1)$ и $\Delta_{V_-}(1)$ плотны в H. Установим это, например, для первого многообразия. Беря

$$f = e_k + \frac{r-1}{r} e_{k+1} + \ldots + \frac{1}{r} e_{k+r-1} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

найдем

$$(V_+ - I) f = \left(e_{k+1} + \frac{r-1}{r} e_{k+2} + \ldots + \frac{1}{r} e_{k+r}\right) - \left(e_k + \frac{r-1}{r} e_{k+1} + \ldots + \frac{1}{r} e_{k+r-1}\right) = \frac{1}{r}(e_{k+1} + e_{k+2} + \ldots + e_{k+r}) - e_k.$$

Но

$$\left\| \frac{1}{r}(e_{k+1} + e_{k+2} + \ldots + e_{k+r}) \right\|^2 = \frac{1}{r},$$

откуда заключаем, что орты e_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$) являются предельными для векторов из $\Delta_{V_+}(1)$ и, следовательно, многообразие $\Delta_{V_+}(1)$ плотно в H.

Симметрические операторы A_+ и A_- являются максимальными с индексами дефекта (0, 1) и (1, 0) соответственно.

Теорема 1. *Операторы A_+ и A_- неприводимы.*

Для доказательства утверждения относительно A_+ достаточно установить (см. п° 103), что оператор V_+ неприводим.

Допустим, что подпространство F (и, следовательно, его ортогональное дополнение G) приводит V_+, и положим $V_+\mathrm{F} = \mathrm{F}_+$, $V_+\mathrm{G} = \mathrm{G}_+$.

Тогда

$$\mathrm{F}_+ \subseteq \mathrm{F}, \qquad \mathrm{G}_+ \subseteq \mathrm{G}.$$

В двух последних соотношениях одновременное выполнение знаков равенства невозможно, ибо из $\mathrm{F}_+ = \mathrm{F}$ и $\mathrm{G}_+ = \mathrm{G}$ следовало бы $V_+\mathrm{H} = \mathrm{H}$. Пусть, например, $\mathrm{F} \ominus \mathrm{F}_+ \neq \{0\}$ и

$$f \in \mathrm{F} \ominus \mathrm{F}_+ \qquad (f \neq 0).$$

Вектор f, как элемент из F, ортогонален G и, следовательно,

$$f \perp \mathrm{F}_+ \oplus \mathrm{G}_+. \tag{1}$$

Из (1) следует $f \perp e_k$ $(k = 2, 3, \ldots)$, т. е. $f = \alpha e_1$ $(\alpha \neq 0)$, откуда $e_1 \in \mathrm{F} \ominus \mathrm{F}_+$ и, стало быть, $e_1 \in \mathrm{F}$.

Так как F приводит V_+, то вместе с e_1 подпространство F содержит все e_k $(k = 2, 3, \ldots)$, т. е. $\mathrm{F} = \mathrm{H}$, и теорема доказана относительно A_+. Вторая часть доказывается аналогично.

Итак, мы показали, что операторы A_+, A_- неприводимы и, следовательно, являются простыми симметрическими операторами.

Важное принципиальное значение этих операторов вытекает из следующего предложения.

Теорема 2. *Если простой симметрический оператор A в пространстве H имеет индексы дефекта* (0, 1) (*соответственно* (1, 0)), *то пространство H сепарабельно, а оператор A изоморфен оператору A_+ (соответственно A_-).*

Доказательство. Примем для определенности, что индексами дефекта оператора A являются (0, 1). Пусть V — преобразование Кэли оператора A и пусть $e_1 \perp \Delta_V$ $(\| e_1 \| = 1)$. Образуем замкнутую оболочку M векторов $V^k e_1 = e_{k+1}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. M есть подпространство, и $\{e_k\}_0^\infty$ является ортонормированным базисом в нем.

Так как M инвариантно относительно V и V^{-1}, то M приводит V и, следовательно, $\mathrm{H} \ominus M$ также приводит V. Часть V, лежащая в M, очевидно, изоморфна V_+ и, значит, имеет индексы дефекта (0, 1). Часть V, лежащая в $\mathrm{H} \ominus M$, должна быть унитарной, так как в противном случае по крайней мере одно из дефектных чисел оператора V превосходило бы соответствующее дефектное число оператора V_+ и, значит, оператора A.

С другой стороны, простой оператор V не имеет унитарных частей. Таким образом, $\mathrm{H} \ominus M = \{0\}$ и оператор V изоморфен V_+, а следовательно, его преобразование Кэли A изоморфно A_+, что и требовалось доказать.

С помощью оператора A_+ (A_-) можно построить максимальный оператор с индексами дефекта $(0, \mathfrak{n})$ (соответственно $(\mathfrak{m}, 0)$). С этой целью достаточно построить ортогональную сумму сепарабельных гильбертовых пространств H_α, где α пробегает множество мощности $\mathfrak{n}$ (соответственно $\mathfrak{m}$), и в каждом из них реализовать оператор A_+ (соответственно A_-).

Как показал впервые Нейман, таким путем может быть получен любой простой максимальный оператор, т. е. имеет место

Теорема 3. *Простой симметрический оператор A с индексами дефекта* $(0, \mathfrak{n})$ (*или* $(\mathfrak{m}, 0)$) *распадается в ортогональную сумму операторов A_+* (*соответственно A_-*):

$$A = \sum_{\alpha \in \mathrm{M}} \oplus A_+^{(\alpha)} \quad (\mathrm{M} — \textit{множество мощности } \mathfrak{n})$$

или, соответственно,

$$A = \sum_{\alpha \in \mathrm{M}} \oplus A_-^{(\alpha)} \quad (\mathrm{M} — \textit{множество мощности } \mathfrak{m}).$$

Доказательство. Пусть V есть преобразование Кэли оператора A и $\mathrm{D}_V = \mathrm{H}$, $\mathrm{H} \ominus \Delta_V = \mathrm{M}_1$ $(\dim \mathrm{M}_1 = \mathfrak{n})$.

Положим

$$V^k \mathrm{M}_1 = \mathrm{M}_{k+1} \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Так же как в теореме 2, получим, что

$$\mathrm{M}_i \perp \mathrm{M}_k \qquad (i \neq k;\quad i,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

и что замыкание линейной оболочки подпространств M_k $(k = 1, 2, \ldots)$ совпадает с H.

Пусть $\{e_1^{(\alpha)}\}_{\alpha \in \mathrm{M}}$ — ортонормированный базис в M_1, а H^α — замыкание линейной оболочки векторов $\{e_k^{(\alpha)}\}_{k=1}^{\infty}$, где $e_{k+1}^{(\alpha)} = V^k e_1^{(\alpha)}$. Подпространства $\mathrm{H}^{(\alpha)}$ и $\mathrm{H}^{(\alpha')}$ ортогональны при $\alpha \neq \alpha'$ и ортогональная сумма всех таких подпространств равна H, так как при каждом k совокупность $\{e_k^{(\alpha)}\}_{\alpha \in \mathrm{M}}$ образует ортонормированный базис в M_k.

Очевидно, каждое из подпространств $\mathrm{H}^{(\alpha)}$ приводит V, и часть V, лежащая в $\mathrm{H}^{(\alpha)}$, изоморфна V_+. Переходя к преобразованиям Кэли, завершаем доказательство теоремы.

Теорема 3 исчерпывает вопрос о структуре простых максимальных операторов.

Операторы A_+ и A_- (соответственно V_+ и V_-) будем называть *элементарными максимальными операторами*.

С помощью элементарных максимальных операторов можно построить оператор с заданными индексами дефекта $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$. Для этого следует по описанному выше способу построить операторы с индексами дефекта $(\mathfrak{m}, 0)$ и $(0, \mathfrak{n})$, а затем образовать их ортогональную сумму. Однако произвольный простой оператор с индексами дефекта $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$, вообще говоря, не может быть сконструирован из элементарных максимальных операторов.

В качестве иллюстрации предложений настоящего пункта рассмотрим снова оператор дифференцирования $\mathcal{P}$ на полуоси $(0, \infty)$. Этот оператор имеет индексы дефекта $(0, 1)$. Для того чтобы выяснить структуру оператора $\mathcal{P}$, перейдем к его преобразованию Кэли

$$V = (\mathcal{P} - iI)(\mathcal{P} + iI)^{-1}$$

и рассмотрим степени $V^k g$, где $g = e^{-t}$ есть дефектный элемент оператора $\mathcal{P}$ для точки i. Будем рассматривать этот элемент e^{-t} как нулевую функцию Чебышева — Лагерра (см. n° 12) от удвоенного аргумента:

$$e^{-t} = \psi_0(2t),$$

и покажем, что

$$V\psi_k(2t) = \psi_{k+1}(2t) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Представим $\psi_k(2t)$ в виде

$$\psi_k(2t) = if'(t) + if(t) \equiv (\mathcal{P} + iI) f;$$

так как $f(0) = 0$, то

$$f(t) = -ie^{-t} \int_0^t \psi_k(2s) e^s \, ds.$$

Поэтому

$$V\psi_k(2t) = (\mathcal{P} - iI) f = \psi_k(2t) - 2e^{-t} \int_0^t \psi_k(2s) e^s \, ds.$$

Таким образом, все сводится к доказательству тождества

$$\psi_{k+1}(2t) = \psi_k(2t) - 2e^{-t} \int_0^t \psi_k(2s) e^s \, ds.$$

Это доказательство никакого труда не представляет.

Так как функции Чебышева — Лагерра образуют полную ортонормированную систему в $\mathrm{L}^2(0, \infty)$, то оператор V изоморфен V_+ и, следовательно, $\mathcal{P}$ изоморфен A_+.

Таким образом, мы доказали, что *любой простой оператор с индексами дефекта* $(0, 1)$ *или* $(1, 0)$ *изоморфен оператору дифференцирования* $\mathcal{P}$ *на полуоси* $(0, \infty)$ *или соответственно* $(-\infty, 0)$.

Оператор $\mathcal{P}$ дифференцирования на оси $(-\infty, \infty)$ изоморфен некоторому самосопряженному расширению оператора $A_+ \oplus A_-$. Отсюда (см. n° 89) можно вывести унитарную эквивалентность оператора $\mathcal{P}$ и оператора умножения на независимую переменную.

105. Спектры самосопряженных расширений заданного симметрического оператора. Спектр симметрического, но не самосопряженного оператора, в соответствии с общим определением n° 48, содержит дополнение множества точек регулярного типа рассматриваемого оператора. Хотя спектр и не исчерпывается этим дополнением (так, например, по крайней мере одна из открытых полуплоскостей $\mathfrak{J}z > 0$, $\mathfrak{J}z < 0$ принадлежит остаточному спектру), оно, тем не менее, занимает в спектре оператора особое место.

Определение. Дополнение множества точек регулярного типа симметрического оператора называется *ядром спектра* этого оператора.

Желая дать классификацию точек, образующих ядро спектра симметрического оператора A, условимся, как и прежде, обозначать через $A'_\lambda = A'$ часть оператора A, лежащую в подпространстве $H \ominus G_\lambda$, где G_λ есть собственное подпространство оператора A, принадлежащее числу λ, если λ есть собственное значение оператора A, и G_λ есть нулевое подпространство в противном случае.

Прежде всего в ядре спектра выделяется *точечная часть*; это — совокупность всех собственных значений оператора (она отсутствует, если оператор простой).

Переходя к характеристике остальной части ядра спектра оператора A, заметим, что оператор $A' - \lambda I$ имеет обратный для любого λ. Совокупность тех значений λ, для которых оператор $(A' - \lambda I)^{-1}$ не ограничен, очевидно, принадлежит ядру спектра; эту совокупность мы назовем *непрерывной частью* ядра спектра *). Таким образом, всякая точка ядра спектра принадлежит либо точечной части, либо непрерывной части, либо им обеим.

Для самосопряженного оператора понятия регулярной точки и точки регулярного типа совпадают. Поэтому ядро спектра самосопряженного оператора совпадает со спектром этого оператора. Следовательно, ядро спектра самосопряженного оператора не может быть пустым множеством. Для произвольного симметрического оператора такое утверждение было бы неправильным **).

Если $\tilde{A}$ есть симметрическое (в частности, максимальное или самосопряженное) расширение оператора A, то, как легко видеть,

*) Легко видеть, что непрерывная часть ядра спектра симметрического оператора A принадлежит его непрерывному спектру $\mathscr{C}(A)$, определенному в конце n° 93.

**) См. пример в подстрочном примечании на стр. 375.

ядро спектра оператора $\tilde{A}$ содержит ядро спектра оператора A; при этом каждая из частей (точечная и непрерывная) ядра спектра оператора $\tilde{A}$ содержит соответствующую часть ядра спектра оператора A.

Отметим один частный случай, когда непрерывная часть ядра спектра оператора A не меняется при симметрических расширениях этого оператора. Этим случаем является тот, когда дефектные числа оператора A конечны. Действительно, в этом случае в силу второй формулы Неймана (см. n° 102) многообразие $(\tilde{A}' - \lambda I)\,\mathrm{D}_{\tilde{A}}$, где $\tilde{A}$ — какое-нибудь симметрическое расширение оператора A, шире многообразия $(A' - \lambda I)\,\mathrm{D}_A$ разве лишь на конечное число измерений (в смысле числа измерений по модулю) и, следовательно, оператор $(\tilde{A}' - \lambda I)^{-1}$ ограничен вместе с оператором $(A' - \lambda I)^{-1}$.

Из сказанного вытекает следующая простая

Теорема 1. *Все самосопряженные расширения оператора с равными и конечными дефектными числами имеют один и тот же непрерывный спектр.*

Относительно точечной части ядра спектра имеет место

Теорема 2. *При произвольном расширении оператора с конечными индексами дефекта (m, m) до самосопряженного оператора кратность собственных значений повышается не более чем на m единиц (в частности, новые собственные значения имеют кратность, не превосходящую m).*

Доказательство. Пусть $\tilde{A}$ — самосопряженное расширение оператора A и λ — собственное значение кратности p оператора A. Предположим, что кратность числа λ, как собственного значения оператора $\tilde{A}$, равна $p+q$ и, вопреки утверждению теоремы, $q > m$. Выберем линейно независимую систему решений $f_1, f_2, \ldots, f_p, f_{p+1}, \ldots, f_{p+q}$ уравнения $\tilde{A}f - \lambda f = 0$ так, чтобы $f_k \in \mathrm{D}_A$ при $k \leqslant p$. Так как число измерений $\mathrm{D}_{\tilde{A}}$ по модулю D_A равно m, то существуют константы α_k такие, что

$$\alpha_1 f_{p+1} + \alpha_2 f_{p+2} + \ldots + \alpha_q f_{p+q} \in \mathrm{D}_A.$$

Последнее означает, что кратность λ, как собственного значения оператора A, выше p, вопреки предположению.

Следующая теорема является в некотором смысле обращением теоремы 2.

Теорема 3. *Если λ — вещественная точка регулярного типа симметрического оператора A с индексами дефекта (m, m) $(m < \infty)$, то существует самосопряженное расширение $\tilde{A}$ оператора A, для которого число λ является собственным значением кратности m.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{N}_\lambda$ означает линейное многообразие всех решений уравнения

$$A^*g-\lambda g=0.$$

В силу теоремы об инвариантности дефектного числа в поле регулярности (см. n° 100) число измерений многообразия $\mathfrak{N}_\lambda$ равно m.

Область определения D_A оператора A и линейное многообразие $\mathfrak{N}_\lambda$ линейно независимы, ибо в противном случае число λ было бы собственным значением оператора A.

Положим

$$\mathrm{D}=\mathrm{D}_A\oplus\mathfrak{N}_\lambda \tag{1}$$

и пусть $\widetilde{A}$ означает оператор, совпадающий с оператором A^* на $\mathrm{D}=\mathrm{D}_{\widetilde{A}}$, так что число λ будет собственным значением оператора $\widetilde{A}$ кратности m.

Покажем, что оператор $\widetilde{A}$ самосопряженный.

Для этого достаточно установить, что оператор $\widetilde{A}$ симметрический, ибо из (1) следует, что

$$\dim \mathrm{D}_{\widetilde{A}}=m \pmod{\mathrm{D}_A}.$$

Если f и g — произвольные элементы из $\mathrm{D}_{\widetilde{A}}$ и

$$f=f_1+f_2 \qquad (f_1\in\mathrm{D}_A,\ f_2\in\mathfrak{N}_\lambda),$$
$$g=g_1+g_2 \qquad (g_1\in\mathrm{D}_A,\ g_2\in\mathfrak{N}_\lambda),$$

то

$$(\widetilde{A}f,\ g)=(Af_1,\ g_1)+(A^*f_2,\ g_1)+(Af_1,\ g_2)+(A^*f_2,\ g_2)=$$
$$=(Af_1,\ g_1)+\lambda(f_2,\ g_1)+\lambda(f_1,\ g_2)+\lambda(f_2,\ g_2)$$

и

$$(f,\ \widetilde{A}g)=(f_1,\ Ag_1)+(f_1,\ A^*g_2)+(f_2,\ Ag_1)+(f_2,\ A^*g_2)=$$
$$=(f_1,\ Ag_1)+\lambda(f_1,\ g_2)+\lambda(f_2,\ g_1)+\lambda(f_2,\ g_2),$$

откуда следует симметричность оператора $\widetilde{A}$.

В заключение отметим еще одну теорему, относящуюся к числу решений уравнения

$$A^*g-\lambda g=0$$

при вещественных λ.

Теорема 4. *Если A — симметрический оператор с индексами дефекта (m, m) $(m<\infty)$ и λ — вещественное число, не принадлежащее точечному спектру оператора A, то число $m(\lambda)$*

решений уравнения

$$A^*g - \lambda g = 0 \tag{2}$$

не превосходит дефектного числа m.

Для доказательства достаточно построить с помощью многообразия $\mathfrak{N}_\lambda$ решений уравнения (2) область $D_{\tilde{A}}$ по формуле (1), где снова $\tilde{A} \subseteq A^*$.

Из доказательства предыдущей теоремы следует, что оператор $\tilde{A}$ является симметрическим расширением оператора A и, следовательно,

$$m(\lambda) = \dim D_{\tilde{A}} \leqslant m \pmod{D_A}.$$

Теорема доказана.

106. Формула М. Г. Крейна для резольвент самосопряженных расширений заданного симметрического оператора. В этом пункте мы будем рассматривать симметрические операторы с равными и конечными дефектными числами.

Пусть A_1 и A_2 — два самосопряженных расширения такого оператора A с индексами дефекта (m, m) $(m < \infty)$,

$$A_1 \supset A, \qquad A_2 \supset A.$$

Всякий оператор C, удовлетворяющий условиям

$$A_1 \supset C, \qquad A_2 \supset C, \tag{1}$$

естественно называть *общей частью* операторов A_1 и A_2.

Среди операторов C, удовлетворяющих условиям (1), существует, очевидно, такой, который является расширением любой общей части операторов A_1 и A_2; такой оператор назовем *максимальной общей частью* операторов A_1 и A_2. Максимальная общая часть либо является расширением оператора A, либо совпадает с A; в последнем случае расширения A_1 и A_2 будем называть *взаимно простыми*.

Для того чтобы расширения A_1 и A_2 были взаимно простыми, необходимо и достаточно, чтобы одновременное выполнение условий

$$h \in D_{A_1}, \qquad h \in D_{A_2} \tag{2}$$

влекло принадлежность h к D_A.

Если максимальное число линейно независимых по модулю D_A векторов, удовлетворяющих условиям (2), равно p $(0 \leqslant p \leqslant m)$, то максимальная общая часть A_0 операторов A_1 и A_2 имеет индексы дефекта $(m - p,\ m - p)$. В этом случае операторы A_1 и A_2 могут рассматриваться как взаимно простые самосопряженные расширения оператора A_0.

Задачей настоящего пункта является вывод формулы, связывающей резольвенты двух самосопряженных расширений оператора A. Пусть $\mathring{B}$ — фиксированное самосопряженное расширение, B — произвольное самосопряженное расширение, а $\mathring{R}_z$ и R_z — их резольвенты. Пусть, далее, λ — любая общая точка регулярности операторов $\mathring{B}$ и B (в частности, λ может быть произвольным невещественным числом).

Чтобы не выделять случая, когда $\mathring{B}$ и B не являются взаимно простыми расширениями оператора A, будем рассматривать их как взаимно простые расширения их максимальной общей части A_0, имеющей индексы дефекта (r, r), где $0 < r \leqslant m$.

Положим $\mathfrak{M}_\lambda = \Delta_{A_0}(\lambda)$ и $\mathfrak{N}_\lambda = \mathrm{H} \ominus \mathfrak{M}_\lambda$. Для разности резольвент будем иметь

$$(\mathring{R}_\lambda - R_\lambda) f \begin{cases} = 0 & \text{при } f \in \mathfrak{M}_\lambda, \\ \in \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}} & \text{при } f \in \mathfrak{N}_\lambda. \end{cases} \tag{3}$$

Последнее вытекает из того, что при любом $h \in \mathfrak{M}_{\bar{\lambda}}$

$$(\{\mathring{R}_\lambda - R_\lambda\} f, h) = (f, \{\mathring{R}_\lambda - R_\lambda\}^* h) = (f, \{\mathring{R}_{\bar{\lambda}} - R_{\bar{\lambda}}\} h) = (f, 0) = 0.$$

Выберем как-нибудь r линейно независимых векторов $g_1(\bar{\lambda})$, $g_2(\bar{\lambda}), \ldots, g_r(\bar{\lambda})$ из $\mathfrak{N}_\lambda$ и r линейно независимых векторов $g_1(\lambda)$, $g_2(\lambda), \ldots, g_r(\lambda)$ из $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$. Из (3) для любого $f \in \mathrm{H}$ следует

$$(\mathring{R}_\lambda - R_\lambda) f = \sum_{k=1}^{r} c_k g_k(\lambda). \tag{4}$$

Согласно (4) константы c_k являются линейными функционалами от f, и мы можем положить

$$c_k = (f, h_k(\lambda)) \qquad (k = 1, 2, \ldots, r).$$

Так как, в силу (3) и линейной независимости векторов $g_1(\lambda)$, $g_2(\lambda), \ldots, g_r(\lambda)$, при любом f, ортогональном к $\mathfrak{N}_\lambda$, должно быть

$$(f, h_k(\lambda)) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

то

$$h_k(\lambda) \in \mathfrak{N}_\lambda \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

т. е.

$$h_k(\lambda) = \sum_{i=1}^{r} \overline{p_{ik}(\lambda)}\, g_i(\bar{\lambda}) \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots, r), \tag{5}$$

и (4) принимает вид

$$(\mathring{R}_\lambda - R_\lambda) f = \sum_{i,\,k=1}^{r} p_{ik}(\lambda)\,(f,\ g_i(\overline{\lambda}))\,g_k(\lambda). \tag{6}$$

Заметим, что матричная функция $(p_{ik}(\lambda)) = \mathfrak{P}(\lambda)$, определенная на множестве общих точек регулярности операторов $\mathring{B}$ и B, является неособенной.

Действительно, предположение $\det(p_{ik}(\lambda_0)) = 0$ влечет в силу (5) линейную зависимость векторов $h_k(\lambda_0)$ $(k = 1, 2, \ldots, r)$, что означает существование вектора $h \neq 0$, удовлетворяющего условиям

$$h \perp h_k(\lambda_0), \qquad h \in \mathfrak{N}_{\lambda_0} \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ r).$$

Для вектора h получаем из (4)

$$(\mathring{R}_{\lambda_0} - R_{\lambda_0})\,h = 0,$$

а это противоречит взаимной простоте операторов $\mathring{B}$ и B, как расширений оператора A_0.

Опуская в (6) элемент f и рассматривая $(\cdot,\ g_i(\overline{\lambda}))\,g_k(\lambda)$ $(i, k = 1, 2, 3, \ldots, r)$ как операторы, получаем для любого значения λ из множества общих точек регулярности операторов $\mathring{B}$ и B формулу

$$R_\lambda = \mathring{R}_\lambda - \sum_{i,\,k=1}^{r} p_{ik}(\lambda)\,(\cdot,\ g_i(\overline{\lambda}))\,g_k(\lambda). \tag{7}$$

До сих пор выбор вектор-функций $g_k(\lambda)$ и $g_i(\overline{\lambda})$ $(i, k = 1, 2, \ldots, r)$ оставался произвольным. Вместе с тем левая, а значит, и правая части формулы (6) являются регулярными аналитическими вектор-функциями от λ. Теперь мы *покажем, что* $g_k(\lambda)$ $(k = 1, 2, \ldots, r)$ *могут быть определены как регулярные аналитические вектор-функции от* λ, *и получим соответствующую этому выбору формулу для матричной функции* $\mathfrak{P}(\lambda)$.

С этой целью возьмем какое-нибудь фиксированное значение λ_0 и введем оператор

$$U_{\lambda\lambda_0} = (\mathring{B} - \lambda_0 I)(\mathring{B} - \lambda I)^{-1} = I + (\lambda - \lambda_0)\,\mathring{R}_\lambda$$

с областью определения

$$(\mathring{B} - \lambda I)\,\mathrm{D}_{\mathring{B}} = \mathrm{H}$$

и областью значений

$$(\mathring{B} - \lambda_0 I)\,\mathrm{D}_{\mathring{B}} = \mathrm{H}.$$

Оператор $U_{\lambda\lambda_0}$ определяется формулами

$$\left.\begin{array}{l}(\overset{\circ}{B}-\lambda I)\ f=h,\\ (\overset{\circ}{B}-\lambda_0 I)\ f=U_{\lambda\lambda_0}h\end{array}\right. \qquad (f\in \mathrm{D}_{\overset{\circ}{B}}),$$

из которых следует, что осуществляемое им отображение H на H взаимно однозначно.

В частном случае, при $\lambda=\overline{\lambda}_0$ оператор $U_{\lambda\lambda_0}$ приводится к преобразованию Кэли оператора $\overset{\circ}{B}$ и отображает дефектное подпространство $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}_0}$ оператора A_0 в его дефектное подпространство $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$. Покажем, что вообще

$$U_{\lambda\lambda_0}\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}_0}=\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}.$$

Выберем произвольно базис $g_1(\lambda_0)$, $g_2(\lambda_0)$, ..., $g_r(\lambda_0)$ (векторы $g_k(\lambda_0)$, вообще говоря, не ортогональны и не нормированы) и докажем, что

$$U_{\lambda\lambda_0}g_k(\lambda_0)\in\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}.$$

Имеем

$$\begin{aligned}A_0^*U_{\lambda\lambda_0}g_k(\lambda_0)&=A_0^*\{I+(\lambda-\lambda_0)\}\overset{\circ}{R}_\lambda\}g_k(\lambda_0)=\\&=\lambda_0g_k(\lambda_0)+(\lambda-\lambda_0)\overset{\circ}{B}\overset{\circ}{R}_\lambda g_k(\lambda_0)=\\&=\lambda_0g_k(\lambda_0)+(\lambda-\lambda_0)(I+\lambda\overset{\circ}{R}_\lambda)g_k(\lambda_0)=\\&=\lambda\{I+(\lambda-\lambda_0)\overset{\circ}{R}_\lambda\}g_k(\lambda_0)=\lambda U_{\lambda\lambda_0}g_k(\lambda_0),\end{aligned}$$

т. е. $U_{\lambda\lambda_0}g_k(\lambda_0)\in\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$ $(k=1,2,\ldots,r)$. При этом в силу взаимной однозначности отображения, осуществляемого оператором $U_{\lambda\lambda_0}$, векторы $U_{\lambda\lambda_0}g_k(\lambda_0)$ образуют базис в $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$, и мы можем принять, что векторы $g_k(\lambda)$ в любой точке регулярности оператора $\overset{\circ}{B}$ определены формулами

$$g_k(\lambda)=U_{\lambda\lambda_0}g_k(\lambda_0)=g_k(\lambda_0)+(\lambda-\lambda_0)\overset{\circ}{R}_\lambda g_k(\lambda_0)$$
$$(k=1,2,3,\ldots,r),$$

и, следовательно, являются регулярными аналитическими вектор-функциями от λ.

С помощью функционального уравнения резольвенты легко проверить, что в таком случае для любых двух регулярных точек λ и μ оператора $\overset{\circ}{B}$ имеют место равенства

$$g_k(\mu)=U_{\mu\lambda}g_k(\lambda)=g_k(\lambda)+(\mu-\lambda)\overset{\circ}{R}_\mu g_k(\lambda). \tag{8}$$

Теперь значение матричной функции $\mathfrak{P}(\lambda)$ при любом λ (регулярном для $\mathring{B}$ и B) определяется по ее значению $\mathfrak{P}(\lambda_0)$; для нахождения соответствующей формулы воспользуемся функциональным уравнением резольвенты

$$R_\lambda = R_{\lambda_0} + (\lambda - \lambda_0) R_\lambda R_{\lambda_0}. \tag{9}$$

С другой стороны, в силу (7)

$$\left.\begin{aligned} R_\lambda &= \mathring{R}_\lambda - \sum_{i,\,k=1}^{r} p_{ik}(\lambda)(\cdot,\ g_i(\bar{\lambda}))\, g_k(\lambda), \\ R_{\lambda_0} &= \mathring{R}_{\lambda_0} - \sum_{i,\,k=1}^{r} p_{ik}(\lambda_0)(\cdot,\ g_i(\bar{\lambda}_0))\, g_k(\lambda_0). \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Вставляя правые части (10) в (9) (и пользуясь функциональным уравнением резольвенты $\mathring{R}_z$), получаем:

$$\begin{aligned} -\sum_{i,\,k=1}^{r} p_{ik}(\lambda)(\cdot,\ g_i(\bar{\lambda}))\, g_k(\lambda) &= \\ = -\sum_{i,\,k=1}^{r} p_{ik}(\lambda_0)&(\cdot,\ g_i(\bar{\lambda}_0))\, g_k(\lambda_0) - \\ -(\lambda-\lambda_0)\sum_{i,\,k=1}^{r} p_{ik}(\lambda_0)&(\cdot,\ g_i(\bar{\lambda}_0))\, \mathring{R}_\lambda g_k(\lambda_0) - \\ -(\lambda-\lambda_0)\sum_{i,\,k=1}^{r} p_{ik}(\lambda)&(\mathring{R}_{\lambda_0}\cdot,\ g_i(\bar{\lambda}))\, g_k(\lambda) + \\ +(\lambda-\lambda_0)\sum_{i,\,k,\,j,\,s=1}^{r} p_{ik}(\lambda)(g_s(\lambda_0),\ g_i(\bar{\lambda}))\, & p_{js}(\lambda_0)(\cdot,\ g_j(\bar{\lambda}_0))\, g_k(\lambda). \end{aligned} \tag{11}$$

Если с помощью (8) приведем сумму второго и третьего слагаемых в правой части к виду

$$\sum_{i,\,k=1}^{r} p_{ik}(\lambda_0)(\cdot,\ g_i(\bar{\lambda}_0))\,\{g_k(\lambda_0) - g_k(\lambda)\} + \\ + \sum_{i,\,k=1}^{r} p_{ik}(\lambda)(\cdot,\ g_i(\bar{\lambda}_0) - g_i(\bar{\lambda}))\, g_k(\lambda),$$

и после этого приведем в (11) подобные члены, то получим

$$-\sum_{i,\,k=1}^{r} p_{ik}(\lambda_0)(\cdot,\ g_i(\bar{\lambda}_0))\, g_k(\lambda) + \sum_{i,\,k=1}^{r} p_{ik}(\lambda)(\cdot,\ g_i(\bar{\lambda}_0))\, g_k(\lambda) + \\ +(\lambda-\lambda_0)\sum_{i,\,k,\,j,\,s=1}^{r} p_{ik}(\lambda)(g_s(\lambda_0),\ g_i(\bar{\lambda}))\, p_{js}(\lambda_0)(\cdot,\ g_j(\bar{\lambda}_0))\, g_k(\lambda) = 0.$$

Отсюда, в силу линейной независимости векторов $g_k(\lambda)$,

$$-\sum_{i=1}^{r} p_{ik}(\lambda_0)(\cdot, g_i(\bar{\lambda}_0)) + \sum_{i=1}^{r} p_{ik}(\lambda)(\cdot, g_i(\bar{\lambda}_0)) +$$
$$+ (\lambda-\lambda_0) \sum_{i,j,s=1}^{r} p_{ik}(\lambda)(g_s(\lambda_0), g_i(\bar{\lambda})) p_{js}(\lambda_0)(\cdot, g_j(\bar{\lambda}_0)) = 0$$

и, далее, в силу линейной независимости $g_i(\bar{\lambda}_0)$

$$-p_{ik}(\lambda_0) + p_{ik}(\lambda) + (\lambda-\lambda_0) \sum_{j,s=1}^{r} p_{is}(\lambda_0)(g_s(\lambda_0), g_j(\bar{\lambda})) p_{jk}(\lambda) = 0$$

или, в матричном виде,

$$\mathfrak{P}(\lambda) - \mathfrak{P}(\lambda_0) + (\lambda-\lambda_0)\mathfrak{P}(\lambda_0)((g_s(\lambda_0), g_j(\bar{\lambda})))_{s,j=1}^{r}\mathfrak{P}(\lambda) = 0.$$

Умножая последнее равенство справа на $\mathfrak{P}^{-1}(\lambda)$ и слева на $\mathfrak{P}^{-1}(\lambda_0)$, получаем, наконец, искомое соотношение

$$\mathfrak{P}^{-1}(\lambda) = \mathfrak{P}^{-1}(\lambda_0) + (\lambda-\lambda_0)((g_s(\lambda_0), g_j(\bar{\lambda})))_{s,j=1}^{r}. \qquad (12)$$

Нетрудно проверить, что из (12) для любых двух общих регулярных точек λ и μ операторов $\mathring{B}$, B следует

$$\mathfrak{P}^{-1}(\lambda) = \mathfrak{P}^{-1}(\mu) + (\lambda-\mu)((g_s(\mu), g_j(\bar{\lambda})))_{s,j=1}^{r}.$$

107. О самосопряженных расширениях полуограниченных операторов. Не снижая общности, будем считать полуограниченный оператор положительным. Тогда отрицательная полуось принадлежит его полю регулярности, ибо из равенства

$$(Af, f) \geqslant 0$$

при отрицательных λ следует

$$\|(A-\lambda I)f\|^2 = \|Af\|^2 - 2\lambda(Af, f) + \lambda^2\|f\|^2 \geqslant \lambda^2\|f\|^2,$$

т. е.

$$\|(A-\lambda I)f\| \geqslant |\lambda|\cdot\|f\|.$$

Из этого обстоятельства на основании предложения 1° n° 100 вытекает, что дефектные числа полуограниченного оператора равны между собою и, следовательно, полуограниченный оператор допускает самосопряженные расширения.

Отметим, что из принадлежности отрицательной полуоси полю регулярности симметрического оператора нельзя сделать вывод о положительности этого оператора *), кроме случая, когда оператор A самосопряженный.

В этом последнем случае при любом $f \in \mathrm{D}_A$

$$(Af, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, d(E_t f, f) = \int_0^{\infty} t\, d(E_t f, f) \geqslant 0.$$

Квадрат произвольного самосопряженного оператора является положительным оператором. Обратно, любой положительный самосопряженный оператор A можно представить в виде квадрата некоторого самосопряженного оператора B. В самом деле, если

$$A = \int_0^{\infty} t\, dE_t,$$

то можно, например, положить

$$B = \int_0^{\infty} \sqrt{t}\, dE_t.$$

Если полуограниченный оператор имеет конечные индексы дефекта, то любое его самосопряженное расширение также полуограничено. Более того, имеет место следующая

Теорема 1. *Если A — положительный оператор с конечными индексами дефекта (m, m), то любое его самосопряженное расширение имеет конечное число отрицательных собственных значений, сумма кратностей которых не превосходит m.*

Доказательство. Пусть $\tilde{A}$ — некоторое самосопряженное расширение оператора A и

$$\tilde{A} = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, dE_t.$$

Пусть, далее, Δ означает интервал $[-N, -\varepsilon]$.

Для доказательства теоремы достаточно установить, что число измерений подпространства $E(\Delta)\mathrm{H}$ при любых $N > \varepsilon > 0$ не превосходит дефектного числа m.

Предположим, что при некоторых $N > \varepsilon > 0$

$$\dim E(\Delta)\mathrm{H} > m. \tag{1}$$

*) Например, для оператора дифференцирования на конечном интервале полем регулярности является вся плоскость, но этот оператор не полуограничен.

Так как $E(\Delta)\,\mathrm{H} \subseteq \mathrm{D}_{\widetilde{A}}$ и

$$\dim \mathrm{D}_{\widetilde{A}} = m \ (\mathrm{mod}\, \mathrm{D}_A),$$

то, в силу (1), в подпространстве $E(\Delta)\,\mathrm{H}$ существует вектор f_0, принадлежащий D_A. Для f_0 будет

$$(Af_0, f_0) = (\widetilde{A}f_0, f_0) = \int_{-N}^{-\varepsilon} t\, d\,(E_t f_0, f_0) < 0,$$

что противоречит положительности оператора A.

Теорема доказана.

С помощью приведенных рассуждений легко также установить следующее предложение, аналогичное теореме 1 n° 105.

Теорема 2. *Если отрицательная часть спектра одного из самосопряженных расширений оператора с конечными индексами дефекта (m, m) исчерпывается конечным числом собственных значений конечной кратности, то этим свойством обладает и любое другое самосопряженное расширение данного оператора.*

Заметим, что теорема 2, как и теорема 1 n° 105, являются также непосредственными следствиями теорем 1 и 2 n° 82 соответственно.

Справедлива также следующая теорема о самосопряженных расширениях полуограниченных операторов с произвольными индексами дефекта.

Теорема 3. *Полуограниченный снизу оператор A может быть расширен до самосопряженного оператора $\widetilde{A}$ с той же нижней гранью.*

Эта теорема была высказана в виде предположения Нейманом и затем различными методами была доказана другими авторами *).

*) М. Стоном, К. Фридрихсом и Г. Фрейденталем. См. M. Stone, Linear Transformations in Hilbert Spaces, New-York, 1932, K. Friedrichs, Spektraltheorie halbbeschränkten Operatoren und Anwendung auf die Spektralzerlegung von Differential Operatoren, Math. Ann. 109 (1934); H. Freudental, Über die Friedrichsche Forzetzung halbbeschränkter Operatoren, Akad. van Wetenschappen te Amsterdam, XXXIX, N 7 (1936).

Сравнительно недавно Кильпи предложил новое доказательство теоремы 3, которое, в отличие от построений перечисленных здесь авторов, остается в рамках теории расширений Неймана. См. Y. Kilpi, Über selbstadjungierte Fortsetzungen symmetrischer Transformationen im Hilbertschen Raum, Ann. Acad. Fennicae, 1959.

Наиболее полная теория самосопряженных расширений полуограниченных операторов с сохранением грани была построена М. Г. Крейном. См. работу этого автора: Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения: (часть I — Матем. сб., т. 20 (62): 3 (1947), стр. 431—495; часть II — Матем. сб., т. 21 (63): 3, (1947), стр. 366—404).

К доказательству теоремы 3 мы вернемся ниже, а сейчас докажем более простую теорему, которая была установлена Нейманом.

Теорема 3′. *Полуограниченный оператор A с нижней гранью μ может быть расширен до самосопряженного оператора $\widetilde{A}$ с нижней гранью, не меньшей, чем произвольно взятое число $\mu' < \mu$.*

Доказательство. Установим сначала справедливость теоремы при $\mu = 1$, $\mu' = 0$.

Имеем

$$(f, f) \leqslant (Af, f) \leqslant \| Af \| \cdot \| f \|,$$

т. е.

$$\| Af \| \geqslant \| f \|,$$

откуда следует существование и ограниченность оператора A^{-1}, определенного на подпространстве Δ_A. Повторяя рассуждения, относящиеся к утверждению 2° n° 100, легко усмотреть, что

$$\mathfrak{N}_0 = \mathrm{H} \ominus \Delta_A$$

есть собственное подпространство оператора A^*, принадлежащее собственному значению $\lambda = 0$. При этом подпространство $\mathfrak{N}_0$ и многообразие D_A линейно независимы, так как если элемент g из $\mathfrak{N}_0$ принадлежит D_A, то $Ag = 0$, что возможно лишь при $g = 0$.

Определим расширение $\widetilde{A}$ оператора A на область

$$\mathrm{D}_{\widetilde{A}} = \mathrm{D}_A \oplus \mathfrak{N}_0,$$

полагая

$$\widetilde{A}h = Af$$

при

$$h = f + g, \qquad f \in \mathrm{D}_A, \qquad g \in \mathfrak{N}_0.$$

Очевидно, $\widetilde{A}$ — симметрическое расширение A, ибо при

$$h_1,\ h_2 \in \mathrm{D}_{\widetilde{A}} \qquad (h_i = f_i + g_i,\ f_i \in \mathrm{D}_A,\ g_i \in \mathfrak{N}_0,\ i = 1,\ 2)$$

$$(\widetilde{A}h_1, h_2) = (Af_1, f_2 + g_2) = (Af_1, f_2) =$$
$$= (f_1, Af_2) = (f_1 + g_1, Af_2) = (h_1, \widetilde{A}h_2).$$

Далее очевидно, что подпространство $\mathfrak{N}_0$ приводит $\widetilde{A}$, ибо $\mathfrak{N}_0 \subset \mathrm{D}_{\widetilde{A}}$ и $\widetilde{A}h = 0$ при $h \in \mathfrak{N}_0$. Вместе с $\mathfrak{N}_0$ приводит $\widetilde{A}$ его ортогональное дополнение Δ_A. Пусть $\widetilde{A}'$ и $\widetilde{A}''$ — части $\widetilde{A}$, лежащие соответственно в Δ_A и $\mathfrak{N}_0$.

Область значений оператора $\widetilde{A}'$ заполняет подпространство Δ_A и, следовательно (см. n° 46), оператор $\widetilde{A}'$ — самосопряженный.

Так как $\tilde{A}'' = 0$, то оператор

$$\tilde{A} = \tilde{A}' \oplus \tilde{A}''$$

также самосопряженный.

Далее, при

$$h = f + g \qquad (f \in D_A,\ g \in \mathfrak{N}_0)$$

будем иметь

$$(\tilde{A}h, h) = (Af, f+g) = (Af, f) \geqslant \|f\|^2 \geqslant 0,$$

т. е. нижняя грань оператора $\tilde{A}$ не менее нуля.

Таким образом, для случая $\mu = 1$, $\mu' = 0$ теорема доказана, а общий случай сводится к рассмотренному с помощью линейного преобразования

$$A_1 = \frac{1}{\mu - \mu'} A - \frac{\mu'}{\mu - \mu'} I.$$

Вернемся теперь к теореме 3. Она легко доказывается в случае, когда индексы дефекта оператора A конечны.

Действительно, пусть A — симметрический оператор с нижней гранью $\mu > -\infty$ и конечными дефектными числами, так что $\dim \mathfrak{N}_{\bar{z}} = \dim \mathfrak{N}_z < \infty$. В силу теоремы 3′ для каждого $\mu_n < \mu$ существует самосопряженное расширение $\tilde{A}_n$ оператора A с нижней гранью $\geqslant \mu_n$. Каждому такому расширению по формулам Неймана (4) и (4′) n° 102 будет соответствовать изометрическое отображение V'_n всего $\mathfrak{N}_{\bar{z}}$ на все $\mathfrak{N}_z$. При $\mu_n \to \mu$ в силу компактности последовательности $\{V'_n\}_1^\infty$ конечномерных изометрических операторов найдется подпоследовательность $V'_{n_k} \to V'$, где V' — некоторое изометрическое отображение всего $\mathfrak{N}_{\bar{z}}$ на все $\mathfrak{N}_z$. Очевидно, полученный оператор V' по тем же формулам (4) и (4′) n° 102 определит искомое самосопряженное расширение $\tilde{A}$ оператора A с сохранением его нижней грани.

Общему случаю теоремы 3 будет посвящен n° 109, содержащий изложение основных результатов М. Г. Крейна по теории расширения полуограниченных снизу симметрических операторов с сохранением их нижней грани. Здесь же мы кратко остановимся на общем описании метода М. Г. Крейна.

Прежде всего заметим, что для доказательства теоремы 3 достаточно установить, что любой положительный симметрический оператор допускает положительное самосопряженное расширение. Это вытекает из того, что нижняя грань оператора $A - \mu I$ равна нулю, если нижняя грань A есть μ, и наоборот. Если теперь оператор A положительный, то точка $\lambda = -1$ является его точкой регулярного типа и, следовательно, имеет смысл дробно-линейное преобразование

$$S = (I - A)(I + A)^{-1}. \qquad (2)$$

Оператор S, определенный на подпространстве $D_S = (I + A)\, D_A$, удовлетворяет условию симметрии

$$(Sg_1, g_2) = (g_1, Sg_2) \qquad (g_1, g_2 \in D_S)$$

и, как легко показать, его норма не превосходит единицы. При этом оказывается, что задача самосопряженного расширения оператора A с сохранением положительности эквивалентна построению самосопряженного расширения $\widetilde{S}$ оператора S, удовлетворяющего условию $\|\widetilde{S}\| \leqslant 1$. Соответствующее построение М. Г. Крейна и некоторые его вспомогательные предложения, необходимые для описания всевозможных расширений, упомянутых в теореме 3, приводятся в n° 108.

108. Самосопряженные расширения ограниченного симметрического оператора с неплотной в H областью определения, сохраняющие его норму. Пусть S есть произвольный линейный оператор, определенный на неплотной в H области D_S и удовлетворяющий для любых $f, g \in D_S$ соотношению симметрии

$$(Sf, g) = (f, Sg).$$

Мы будем называть такие операторы *симметрическими с неплотной областью определения* *).

Т е о р е м а 1. *Любой ограниченный симметрический оператор S с неплотной в H областью определения $D_S \subset H$ можно расширить до самосопряженного оператора $\widetilde{S}$ ($D_{\widetilde{S}} = H$) с сохранением его нормы* ($\|\widetilde{S}\| = \|S\|$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Не ограничивая общности, будем считать $\|S\| = 1$. Область D_S будем считать замкнутой, так как в противном случае оператор S можно расширить на замыкание D_S по непрерывности. Обозначим через P ортопроектор на D_S и построим операторы

$$S_1 = PS, \qquad S_2 = (I - P)\, S,$$

так что $D_{S_1} = D_{S_2} = D_S$, и при любом $\varphi \in D_S$

$$S\varphi = S_1\varphi + S_2\varphi. \qquad (1)$$

Будем расширять на H каждый из операторов S_1 и S_2 в отдельности.

*) Общая теория расширений таких операторов, аналогичная изложенной нами теории расширений Неймана, была построена М. А. Красносельским (см. его работу «О самосопряженных расширениях эрмитовых операторов», Укр. матем. ж. № 1 (1949)).

Чтобы расширить S_1, напишем для любых $f, g \in \mathrm{D}_S$ равенство

$$(Sf, g) = (f, S_1 g). \tag{2}$$

Левая часть имеет смысл при любом $g \in \mathrm{H}$ и представляет для всякого такого g линейный функционал от $f \in \mathrm{D}_{S_1}$ с нормой $\leqslant \| g \|$. Так как D_S есть гильбертово пространство, то по теореме Ф. Рисса однозначно определится элемент $h \in \mathrm{D}_S$, для которого $(Sf, g) = (f, h)$ при любом $f \in \mathrm{D}_S$ и при этом $\| h \| \leqslant \| g \|$. Полагая

$$h = \widetilde{S}_1 g,$$

мы получаем некоторый линейный оператор в H, который совпадает с S_1 в D_S в силу равенства (2), причем $\| \widetilde{S}_1 g \| \leqslant \| g \|$, откуда

$$\| \widetilde{S}_1 \| \leqslant 1. \tag{3}$$

Отметим, что, по построению, $\Delta_{\widetilde{S}_1} \subseteq \mathrm{D}_S$ и что при $f \in \mathrm{D}_S$, $g \in \mathrm{H}$

$$(Sf, g) = (f, \widetilde{S}_1 g). \tag{2'}$$

Оператор S_2 будем расширять на H так, чтобы неравенство

$$\| \widetilde{S}_1 f \|^2 + \| \widetilde{S}_2 f \|^2 \leqslant \| f \|^2, \tag{4}$$

вытекающее для $f \in \mathrm{D}_S$ из (1), имело место для любого $f \in \mathrm{H}$. С этой целью определим в H билинейный функционал $[f, g]$ по формуле

$$[f, g] = (f, g) - (\widetilde{S}_1 f, \widetilde{S}_1 g). \tag{5}$$

При этом в силу (3) будет

$$[f, f] = (f, f) - (\widetilde{S}_1 f, \widetilde{S}_1 f) \geqslant 0,$$

но здесь равенство нулю не исключено при $f \neq 0$. Следовательно, билинейный функционал (5) является квазискалярным произведением в смысле n° 3. Линейное многообразие $\mathfrak{N}$ всех тех $f \in \mathrm{H}$, для которых $[f, f] = 0$, замкнуто, так как оператор $\widetilde{S}_1$ непрерывен. Переходя от H к фактор-пространству, мы получим линейную метризованную систему $\mathrm{H}/\mathfrak{N}$. Если эта система не полна, то пополним ее обычным способом (см. n° 4). В результате мы получаем гильбертово пространство **H**.

Из неравенства (4), которое теперь можно переписать в виде

$$\| \widetilde{S}_2 f \|^2 \leqslant [f, f], \tag{6}$$

вытекает, что при $\varphi, \psi \in \mathrm{D}_S$ и $\varphi - \psi \in \mathfrak{N}$ будет $S_2 \varphi = S_2 \psi$. Это дает нам право рассматривать S_2 как оператор из **H** в H. Областью определения этого оператора является линейное многообразие

$$\mathbf{F} = \mathrm{D}_S/\mathfrak{N} \subset \mathbf{H},$$

а его область значений лежит в $\mathrm{H} \ominus \mathrm{D}_S$.

Далее, из (6) следует возможность доопределения по непрерывности в $\mathbf{H}$ оператора S_2 на замыкании $\overline{\mathbf{F}}$ многообразия $\mathbf{F}$ в $\mathbf{H}$. Но при этом, очевидно, значения оператора S_2 по-прежнему будут принадлежать $\mathrm{H} \ominus \mathrm{D}_S$ и сохранится неравенство (6).

Обозначим теперь через $\mathbf{P}$ ортопроектор в $\mathbf{H}$ на $\overline{\mathbf{F}}$ и расширим S_2 на $\mathbf{H}$, положив

$$\widetilde{\mathbf{S}}_2\mathbf{f} = S_2\mathbf{P}\mathbf{f} \qquad (\mathbf{f} \in \mathbf{H}).$$

Очевидно, оператор $\widetilde{\mathbf{S}}_2$ отображает все $\mathbf{H}$ на $\mathrm{H} \ominus \mathrm{D}_S$ и в силу (5) для любого $\mathbf{f} \in \mathbf{H}$

$$\|\widetilde{\mathbf{S}}_2\mathbf{f}\|^2 = \|S_2\mathbf{P}\mathbf{f}\|^2 \leqslant [\mathbf{P}\mathbf{f}, \mathbf{P}\mathbf{f}] \leqslant [\mathbf{f}, \mathbf{f}]. \tag{7}$$

Построенное расширение $\widetilde{\mathbf{S}}_2$ можно рассматривать как оператор в исходном пространстве, если для любого $f \in \mathrm{H}$ положить

$$\widetilde{S}_2 f = \widetilde{\mathbf{S}}_2\mathbf{f},$$

где $\mathbf{f}$ есть тот из элементов $\mathbf{H}$, которому в $\mathbf{H}$ отвечает подмножество, содержащее f. При этом в силу (5) будет

$$\|\widetilde{S}_2 f\|^2 \leqslant [\mathbf{f}, \mathbf{f}] = (f, f) - (\widetilde{S}_1 f, \widetilde{S}_1 f),$$

т. е. при любом $f \in \mathrm{H}$ будет выполняться неравенство (4).

Построим теперь оператор T по формуле

$$Tf = \widetilde{S}_1 f + \widetilde{S}_2 f \qquad (f \in \mathrm{H}). \tag{8}$$

В силу ортогональности слагаемых в правой части (8) и неравенства (4) получаем

$$\|Tf\|^2 = \|\widetilde{S}_1 f\|^2 + \|\widetilde{S}_2 f\|^2 \leqslant \|f\|^2.$$

При этом для любого $\varphi \in \mathrm{D}_S$ имеем

$$T\varphi = \widetilde{S}_1\varphi + \widetilde{S}_2\varphi = S_1\varphi + S_2\varphi = S\varphi.$$

Таким образом, оператор T является расширением на все H (вообще говоря, несамосопряженным) оператора S с сохранением его нормы. Покажем, что оператор T^* обладает этими же свойствами.

При любых $\varphi \in \mathrm{D}_S$, $g \in \mathrm{H}$ имеем, учитывая (2′), что

$$(T^*\varphi, g) = (\varphi, Tg) = (\varphi, \widetilde{S}_1 g + \widetilde{S}_2 g) = (\varphi, \widetilde{S}_1 g) = (S\varphi, g),$$

так что, действительно, $T^*\varphi = S\varphi$ при $\varphi \in \mathrm{D}_S$, т. е. $T^* \supset S$. А кроме этого, также

$$\|T^*\| = \|T\| = 1.$$

Полагая, наконец,

$$\widetilde{S} = \frac{1}{2}(T + T^*),$$

получаем искомое самосопряженное расширение $\widetilde{S}$ оператора S с сохранением его нормы.

Теорема доказана.

Для описания *всех* самосопряженных расширений оператора S с сохранением его нормы потребуется следующая

Лемма. *Пусть B — ограниченный положительный оператор в* H, *а* G — *некоторое подпространство* H. *Пусть, далее,* $\mathfrak{C}$ *означает множество всех самосопряженных операторов C, удовлетворяющих условиям*

$$C \leqslant B, \tag{9}$$

$$Cg = 0 \qquad (g \in \mathrm{G}). \tag{10}$$

В таком случае в $\mathfrak{C}$ *существует максимальный оператор* $\overline{C}$ (т. е. оператор, который $\geqslant$ любого из операторов множества $\mathfrak{C}$) *и этот оператор* $\overline{C}$ *представим в виде*

$$\overline{C} = B^{1/2} Q B^{1/2}, \tag{11}$$

где Q — оператор ортогонального проектирования на $\mathrm{H} \ominus \mathrm{F}$, *а* F — многообразие всех векторов $B^{1/2}g$ $(g \in \mathrm{G})$.

Доказательство*). Если $C \in \mathfrak{C}$, то в силу (10) при любых $h \in \mathrm{H}$, $g \in \mathrm{G}$ имеет место равенство $(Ch, g) = 0$ и поэтому

$$(Ch, h) = (C[h-g], h-g).$$

Отсюда в силу (9) и (10)

$$(Ch, h) \leqslant (B[h-g], h-g) = \|B^{1/2}h - B^{1/2}g\|^2$$

и, следовательно,

$$(Ch, h) \leqslant \inf_{g \in \mathrm{G}} \|B^{1/2}h - B^{1/2}g\|^2.$$

Из этого неравенства вытекает соотношение

$$(Ch, h) \leqslant \|QB^{1/2}h\|^2 = (B^{1/2}QB^{1/2}h, h) = (\overline{C}h, h) \qquad (h \in \mathrm{H}),$$

которое и требовалось установить. Лемма доказана.

Теперь пусть $\widetilde{S}_0$ есть фиксированное, а $\widetilde{S}$ — произвольное самосопряженное расширение оператора S ($\|S\| = 1$) с сохранением

*) Приводимое доказательство принадлежит И. М. Гельфанду. См. работу М. Г. Крейна, цитированную на стр. 376.

его нормы. Тогда оператор C, определяемый равенством

$$\widetilde{S}=\widetilde{S}_0+C, \tag{12}$$

обладает следующими двумя свойствами:

$$-(I+\widetilde{S}_0)\leqslant C\leqslant(I-\widetilde{S}_0), \tag{13}$$

$$Cf=0 \text{ при } f\in \mathrm{D}_S. \tag{14}$$

Очевидно также, что если оператор C обладает свойствами (13) и (14), то оператор $\widetilde{S}$, определяемый равенством (12), будет самосопряженным расширением оператора S с сохранением его нормы.

Отсюда, пользуясь леммой, уже нетрудно получить описание всех самосопряженных расширений оператора S с сохранением его нормы.

Для этого обозначим через Q_1 и Q_2 ортопроекторы на ортогональные дополнения к многообразиям $(I+\widetilde{S}_0)^{1/2}\mathrm{D}_S$ и $(I-\widetilde{S}_0)^{1/2}\mathrm{D}_S$ соответственно. Далее построим операторы

$$\overline{C}_1=(I+\widetilde{S}_0)^{1/2}Q_1(I+\widetilde{S}_0)^{1/2} \tag{15}$$

и

$$\overline{C}_2=(I-\widetilde{S}_0)^{1/2}Q_2(I-\widetilde{S}_0)^{1/2}. \tag{16}$$

Наконец, определим два самосопряженных оператора S' и S'' равенствами

$$S'=\widetilde{S}_0-\overline{C}_1, \qquad S''=\widetilde{S}_0+\overline{C}_2. \tag{17}$$

Теорема 2. *Для того чтобы самосопряженный оператор T являлся расширением оператора S с сохранением его нормы, необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял двойному неравенству*

$$S'\leqslant T\leqslant S''. \tag{18}$$

Доказательство. Если T есть самосопряженное расширение оператора S с сохранением его нормы, то (18) непосредственно вытекает из (13), (14) и леммы.

Пусть теперь оператор T удовлетворяет соотношению (18). Если T есть расширение оператора S, то из (13), (14) и леммы непосредственно вытекает равенство $\|T\|=\|S\|$. Поэтому остается показать, что любой оператор, удовлетворяющий двойному неравенству (18), является расширением оператора S.

Положив

$$W=T-S',$$

получаем из (18) двойное неравенство

$$0\leqslant W\leqslant S''-S'$$

и, поскольку $S' \supset S$, $S'' \supset S$, то для любого $f \in D_S$ имеем

$$0 \leqslant (Wf, f) \leqslant ([S'' - S']f, f) = 0,$$

откуда

$$(Wf, f) = 0 \qquad (f \in D_S).$$

Из этого равенства и неотрицательности оператора W вытекает, что $Wf = 0$ при $f \in D_S$, т. е. $Tf = S'f$ при $f \in D_S$ и, значит, $T = \widetilde{S}$. Теорема доказана. Каждому самосопряженному расширению $\widetilde{S}$ оператора S ($\|S\| = 1$) с сохранением его нормы отнесем $\widetilde{S}$-скалярное произведение, и $\widetilde{S}$-норму по формулам

$$(f, g)_{\widetilde{S}} = (f, g) + (\widetilde{S}f, g)$$

и

$$\|f\|_{\widetilde{S}} = \sqrt{(f, f)_{\widetilde{S}}},$$

где $f, g \in H$.

Теорема 3. *Пусть T есть самосопряженное расширение оператора S с сохранением нормы $\|T\| = \|S\| = 1$. Тогда для того чтобы T совпадал с нижней гранью S' в формуле* (18), *необходимо и достаточно, чтобы многообразие D_S было плотно в H по T-норме.*

Доказательство. Принимая T в качестве оператора $\widetilde{S}_0$ при построении формул (17), видим, что равенство $T \equiv \widetilde{S}_0 = S'$ эквивалентно равенству $\widetilde{C}_1 = 0$. С другой стороны, в силу (15)

$$(\widetilde{C}_1 f, f) = \|Q_1 (I + \widetilde{S}_0)^{1/2} f\|^2, \qquad (f \in H).$$

Правая часть полученного равенства в силу определения Q_1 есть

$$\inf_{g \in D_S} \|(I + \widetilde{S}_0)^{1/2} f - (I + \widetilde{S}_0)^{1/2} g\|^2 = \inf_{g \in D_S} \|f - g\|^2_{\widetilde{S}_0}.$$

Таким образом,

$$(\widetilde{C}_1 f, f) = \inf_{g \in D_S} \|f - g\|^2_{\widetilde{S}_0} \qquad (f \in H),$$

откуда и вытекает справедливость теоремы.

В заключение заметим, что хотя для построения операторов S' и S'' по формулам (15) — (17) необходимо задаться некоторым расширением $\widetilde{S}_0$, на деле, как это вытекает из самой теоремы 2, они не зависят от выбора $\widetilde{S}_0$, а являются единственными экстремальными (т. е. наименьшим и наибольшим) элементами множества всех самосопряженных расширений оператора S с сохранением его нормы. Поэтому мы положим $S' = \widetilde{S}_{\min}$, $S'' = \widetilde{S}_{\max}$

и в дальнейшем вместо (18) будем писать

$$\widetilde{S}_{\min} \leqslant T \leqslant \widetilde{S}_{\max}. \tag{19}$$

109. Самосопряженные расширения полуограниченного симметрического оператора с сохранением его нижней грани. Как уже упоминалось в n° 107, полученные в n° 108 результаты позволяют доказать теорему 3 n° 107, если воспользоваться преобразованием (2) n° 107. Мы начинаем настоящий пункт с изучения этого дробно-линейного преобразования.

Пусть A — замкнутый симметрический положительный оператор с плотной в H областью определения D_A. Так как точка $\lambda = -1$ является точкой регулярного типа оператора A, то многообразие $(I + A)\mathrm{D}_A$ есть подпространство и при любом $g \in (I + A)\mathrm{D}_A$ уравнение $Af + f = g$ имеет единственное решение $f \in \mathrm{D}_A$. Поэтому мы можем определить на подпространстве $\mathrm{D}_S = (I + A)\,\mathrm{D}_A$ оператор S формулами

$$\left.\begin{aligned} g &= f + Af, \quad &(1)\\ Sg &= f - Af \quad &(2)\end{aligned}\right\} \quad (f \in \mathrm{D}_A).$$

Нетрудно проверить, что построенный оператор S является симметрическим (вообще говоря, с неплотной областью определения) и его норма не превосходит единицы.

Действительно, при любых $g_1 = f_1 + Af_1 \in \mathrm{D}_S$ и $g_2 = f_2 + Af_2 \in \mathrm{D}_S$ имеем

$$(Sg_1, g_2) = (f_1 - Af_1, f_2 + Af_2) = (f_1, f_2) - (Af_1, Af_2),$$
$$(g_1, Sg_2) = (f_1 + Af_1, f_2 - Af_2) = (f_1, f_2) - (Af_1, Af_2).$$

Далее, при любом $g = f + Af \in \mathrm{D}_S$

$$\|Sg\|^2 = (f - Af, f - Af) = \|f\|^2 - 2(Af, f) + \|Af\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \|f\|^2 + 2(Af, f) + \|Af\|^2 = (f + Af, f + Af) = \|g\|^2,$$

так что

$$\|S\| \leqslant 1. \tag{3}$$

Сверх отмеченных свойств, оператор S обладает еще одной особенностью: число $\mu = -1$ не является его собственным значением. Действительно,

$$Sg + g \neq 0 \qquad (\text{при } g \neq 0), \tag{4}$$

ибо при $g \neq 0$ из (1) следует, что $f \neq 0$, а тогда из (1) и (2) вытекает, что *) $Sg + g = 2f \neq 0$.

*) Не мешает заметить, что при выводе свойств оператора S мы не использовали плотность D_A в H.

Пусть, обратно, S есть симметрический оператор в H, определенный на подпространстве $\mathrm{D}_S \subset \mathrm{H}$ и обладающий свойствами (3) и (4).

В силу (4) мы можем определить на линейном многообразии $\mathrm{D}_A = (I+S)\,\mathrm{D}_S$ оператор A формулами

$$\left.\begin{aligned} f &= \frac{1}{2}(g+Sg), \qquad (5)\\ Af &= \frac{1}{2}(g-Sg) \qquad (6)\end{aligned}\right\} \quad (g \in \mathrm{D}_S).$$

Нетрудно проверить, что построенный оператор A является симметрическим и положительным.

Действительно, при любых $f_1 = \frac{1}{2}(g_1 + Sg_1) \in \mathrm{D}_A$ и $f_2 = = \frac{1}{2}(g_2 + Sg_2) \in \mathrm{D}_A$ имеем

$$4(Af_1, f_2) = (g_1 - Sg_1, g_2 + Sg_2) = (g_1, g_2) - (Sg_1, Sg_2),$$
$$4(f_1, Af_2) = (g_1 + Sg_1, g_2 - Sg_2) = (g_1, g_2) - (Sg_1, Sg_2).$$

Далее, при любом $f = \frac{1}{2}(g + Sg) \in \mathrm{D}_A$

$$4(Af, f) = (g - Sg, g + Sg) = \|g\|^2 - \|Sg\|^2 \geqslant 0.$$

Заметим, что область определения D_A оператора A может быть неплотной в H.

Очевидно, из формул (1) и (2) следуют формулы (5) и (6), и наоборот. Определяемое этими формулами преобразование можно также представить в виде

$$S = (I - A)(I + A)^{-1} \qquad (7)$$

или

$$A = (I - S)(I + S)^{-1}. \qquad (8)$$

Легко проверить, что из самосопряженности одного из двух операторов (7) и (8) вытекает самосопряженность другого.

Как уже указывалось в конце n° 107, для доказательства теоремы 3 n° 107 достаточно установить следующее предложение.

Т е о р е м а 1. *Любой положительный симметрический оператор A, область определения которого D_A плотна в H, обладает по крайней мере одним положительным самосопряженным расширением.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через S оператор, определяемый формулой (7) и, пользуясь теоремой 1 n° 108, построим его самосопряженное расширение $\widetilde{S}$ с нормой $\|\widetilde{S}\| = \|S\| = 1$.

Легко видеть, что оператор $\widetilde{S}$ удовлетворяет условию (4), т. е. $\widetilde{S}g + g \neq 0$ при $g \neq 0$. Действительно, если бы при некотором $g \neq 0$ было $\widetilde{S}g + g = 0$, то было бы также для любого $h \in \mathrm{H}$

$$(g, h+\widetilde{S}h) = (g+\widetilde{S}g, h) = 0$$

и, в частности $(g, h + Sh) = 0$ при любом $h \in \mathrm{D}_S$, но $(I + S)\,\mathrm{D}_S = \mathrm{D}_A$, и равенство нулю последнего скалярного произведения противоречит плотности D_A в H.

Так как оператор $\widetilde{S}$ удовлетворяет условиям (3) и (4), то существует оператор $\widetilde{A} = (I - \widetilde{S})(I + \widetilde{S})^{-1}$, который, очевидно, является положительным расширением оператора A. Так как, наконец, оператор $\widetilde{S}$ самосопряженный, то оператор $\widetilde{A}$ также является самосопряженным. Таким образом, теорема доказана.

Обозначим через $\mathfrak{A}(A)$ множество всех положительных самосопряженных расширений оператора A, а через $\mathfrak{S}(S)$ — множество всех самосопряженных расширений оператора S, связанного с A соотношением (7), имеющих единичную норму. Из доказательства теоремы 1 вытекает, что в формуле

$$\widetilde{A} = (I - \widetilde{S})(I + \widetilde{S})^{-1},$$

где

$$\widetilde{S} \in \mathfrak{S}(S), \quad S = (I - A)(I + A)^{-1},$$

оператор A пробегает все $\mathfrak{A}(A)$, если оператор $\widetilde{S}$ пробегает все $\mathfrak{S}(S)$.

Из теоремы 2 n° 108 следует, что общий вид операторов $\widetilde{A} \in \mathfrak{A}(A)$ дается формулой

$$\widetilde{A} = (I - T)(I + T)^{-1},$$

где T — любой самосопряженный оператор, удовлетворяющий двойному неравенству (19) n° 108. Крайним членам этого неравенства $\widetilde{S}_{\min}$ и $\widetilde{S}_{\max}$ отвечают операторы

$$\widetilde{A}_\mu = (I - \widetilde{S}_{\min})(I + \widetilde{S}_{\min})^{-1}$$

и

$$\widetilde{A}_M = (I - \widetilde{S}_{\max})(I + \widetilde{S}_{\max})^{-1}.$$

При $\widetilde{A}_\mu = \widetilde{A}_M$, и только в этом случае, оператор A имеет единственное положительное самосопряженное расширение.

В общем случае $\widetilde{A}_\mu \neq \widetilde{A}_M$. При этом оба оператора $\widetilde{A}_\mu$ и $\widetilde{A}_M$ обладают некоторыми экстремальными свойствами. Из этих двух операторов наибольший интерес представляет оператор $\widetilde{A}_\mu$, который называется *жестким расширением* положительного оператора A.

Именно это расширение и было получено иным путем К. Фридрихсом при доказательстве справедливости предположения Неймана. Оставшуюся часть этого пункта мы посвятим изучению жесткого самосопряженного расширения $\widetilde{A}_\mu$ положительного симметрического оператора A.

Определим на многообразии D_A сходимость элементов следующим образом. Последовательность элементов $f_n \in D_A$ будем называть *A-сходящейся*, если она сходится в H и, сверх того,

$$\lim_{m,\, n\to\infty} (A[f_n - f_m],\ f_n - f_m) = 0. \tag{9}$$

Замыкание многообразия D_A в смысле A-сходимости обозначим через $D[A]$.

Очевидно, A-сходимость совпадает со сходимостью по A-норме, если последнюю определить соотношениями

$$(f,\ g)_A = (f,\ g) + (Af,\ g),$$

$$\|f\|_A = \sqrt{(f,\ f)_A}\,.$$

Л е м м а *). *Если $\{g_n\}_1^\infty$ и $\{f_n\}_1^\infty$ — какие-нибудь две последовательности из D_A, A-сходящиеся к $g \in D[A]$ и $f \in D[A]$ соответственно, то существует*

$$\lim_{n\to\infty} (Ag_n,\ f_n). \tag{10}$$

При этом предел (10) не зависит от выбора последовательностей $\{g_n\}_1^\infty$ и $\{f_n\}_1^\infty$, и при любом $\widetilde{A} \in \mathfrak{A}(A)$ имеют место соотношения

$$D[A] \subset D_{\widetilde{A}^{1/2}},$$

$$\lim_{n\to\infty} (Ag_n,\ f_n) = (\widetilde{A}^{1/2}g,\ \widetilde{A}^{1/2}f) \qquad (g,\ f \in D[A]).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из спектрального представления самосопряженного положительного оператора $\widetilde{A}$ легко следует включение $D_{\widetilde{A}} \subset D_{\widetilde{A}^{1/2}}$. Поэтому соотношение (9) можно представить в виде

$$\lim_{m,\, n\to\infty} \|\widetilde{A}^{1/2}f_n - \widetilde{A}^{1/2}f_m\| = 0,$$

откуда в силу сходимости $f_n \to f$ и замкнутости оператора $\widetilde{A}^{1/2}$ получаем включение $f \in D_{\widetilde{A}^{1/2}}$ и соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{A}^{1/2}f_n = \widetilde{A}^{1/2}f.$$

*) Это предложение принадлежит К. Фридрихсу.

Аналогичным образом,

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{A}^{1/2} g_n = \widetilde{A}^{1/2} g.$$

Из полученных соотношений непосредственно следует справедливость обоих утверждений леммы.

Следующая теорема М. Г. Крейна дает характеристику жесткого расширения A_μ положительного оператора A.

Теорема 2. *Среди всевозможных самосопряженных полуограниченных снизу расширений положительного симметрического оператора A существует единственное расширение $\widetilde{A}$, для которого $\mathrm{D}_{\widetilde{A}} \subset \mathrm{D}[A]$. Этим расширением является оператор A_μ и для него*

$$\mathrm{D}[A_\mu] = \mathrm{D}[A]. \tag{11}$$

Доказательство. Ограничимся сначала расширениями $\widetilde{A} \in \mathfrak{A}(A)$, так что

$$\widetilde{A} = (I - \widetilde{S})(I + \widetilde{S})^{-1},$$

где $\widetilde{S} \in \mathfrak{S}(S)$ и

$$S = (I - A)(I + A)^{-1}.$$

Если

$$\mathrm{D}_{\widetilde{A}} \subset \mathrm{D}[A], \tag{12}$$

то, очевидно, многообразие D_A будет плотным по $\widetilde{A}$-норме в D_A.

С другой стороны, если $f \in \mathrm{D}_{\widetilde{A}}$, то

$$f = \frac{1}{2}(g + \widetilde{S}g), \qquad \text{где } g = f + \widetilde{A}f,$$

и, следовательно,

$$2[(f, f) + (\widetilde{A}f, f)] = (g, g) + (\widetilde{S}g, g),$$

т. е.

$$2\|f\|_{\widetilde{A}} = \|g\|_{\widetilde{S}}.$$

Поэтому из плотности D_A в $\mathrm{D}_{\widetilde{A}}$ по $\widetilde{A}$-норме вытекает плотность многообразия $\mathrm{D}_S = (I + A)\,\mathrm{D}_A$ по $\widetilde{S}$-норме в $\mathrm{D}_{\widetilde{S}} = (I + \widetilde{A})\,\mathrm{D}_A = \mathrm{H}$. Но тогда по теореме 3 n° 108 будет $\widetilde{S} = S_\mu$ и, следовательно,

$$\widetilde{A} = A_\mu.$$

Обратно, если $\widetilde{A} = A_\mu$, то $\widetilde{S} = S_\mu$, и по той же теореме 3 n° 108 многообразие D_S будет по $\widetilde{S}$-норме плотным в H, а следовательно, многообразие D_A будет плотным в $\mathrm{D}_{\widetilde{A}}$ по $\widetilde{A}$-норме. А так как $\mathrm{D}[A]$ есть замыкание D_A по $\widetilde{A}$-норме, то $\mathrm{D}_{\widetilde{A}} \subset \mathrm{D}[A]$.

С другой стороны, $\mathrm{D}_{\widetilde{A}} \supset \mathrm{D}_A$. Поэтому замыкание $\mathrm{D}_{\widetilde{A}}$ по $\widetilde{A}$-норме совпадает с $\mathrm{D}\,[A]$, т. е.

$$\mathrm{D}[A] = D[\widetilde{A}],$$

что совпадает с (11).

Теперь остается показать, что из соотношения (12) следует равенство $\widetilde{A} = A_\mu$ не только в том случае, когда $\widetilde{A} \in \mathfrak{A}(A)$, но и в более общем случае, когда $\widetilde{A}$ есть произвольное полуограниченное снизу самосопряженное расширение оператора A.

С этой целью по данному $\widetilde{A}$ достаточно подобрать число $a > 0$ такое, чтобы было $\widetilde{A} + aI > 0$. Тогда из (12) вытекает соотношение

$$\mathrm{D}_{\widetilde{A}+aI} = \mathrm{D}_{\widetilde{A}} \subset \mathrm{D}\,[A] = \mathrm{D}\,[A + aI]$$

и, следовательно, согласно уже доказанному будет

$$\widetilde{A} + aI = (A + aI)_\mu.$$

Так как, в частности, соотношение (12) имеет место при $A = A_\mu$, то будет

$$A_\mu + aI = (A + aI)_\mu,$$

откуда получаем $\widetilde{A} = A_\mu$, и теорема доказана полностью.

ГЛАВА IX

ОБОБЩЕННЫЕ РАСШИРЕНИЯ И ОБОБЩЕННЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ СИММЕТРИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

110. Обобщенное разложение единицы. Теорема М. А. Наймарка *). Мы будем называть *обобщенным разложением единицы* всякое однопараметрическое семейство операторов F_t, удовлетворяющее следующим условиям:

(A) При $t_2 > t_1$ разность $F_{t_2} - F_{t_1}$ является ограниченным положительным оператором,

(B) $F_{t-0} = F_t$,

(C) $F_{-\infty} = 0$, $F_\infty = I$.

В отличие от определения обычного разложения единицы (см. n° 67), здесь уже не требуется, чтобы оператор F_t был проектирующим; в соответствии с этим отпадает требование ортогональности

$$F_u F_v = F_s \qquad (s = \min\{u, v\}), \tag{1}$$

ибо из (1) и (A) вытекало бы, что оператор F_t — проектирующий.

Из теоремы 3 n° 33 о монотонных последовательностях операторов (и замечания к этой теореме) следует, что при наличии свойства (A) всегда можно надлежащей нормировкой операторной функции F_t добиться выполнения условия (B).

Обычное разложение единицы является частным случаем обобщенного. Иногда обобщенное разложение единицы называют просто разложением единицы, а обычное разложение единицы называют *ортогональным*.

Вместе с F_t введем также положительную аддитивную операторную функцию интервала $F(\Delta)$ или F_Δ, полагая

$$F(\Delta) = F_\Delta = F_{t_2} - F_{t_1},$$

где t_1 и t_2 ($t_1 < t_2$) — концы интервала Δ.

Простейший пример обобщенного разложения единицы дает операторная функция F_t, определенная равенством

$$F_t = \mu_1 E_t^{(1)} + \mu_2 E_t^{(2)},$$

*) См. М. А. Наймарк, Спектральные функции симметрического оператора. Изв. АН СССР, т. 4, № 3 (1940), стр. 277—318. М. А. Наймарк, Об одном представлении аддитивных операторных функций множеств, ДАН СССР, т. XLI, стр. 373—375 (1943).

где $E_t^{(1)}$ и $E_t^{(2)}$ — произвольные ортогональные разложения единицы, а μ_1 и μ_2 — положительные числа, сумма которых равна единице.

Более поучительный пример представляет операторная функция F_t, получаемая нижеследующим построением.

Пусть E_t — ортогональное разложение единицы пространства H, G — некоторое подпространство пространства H и P — оператор проектирования на G. Положим

$$F_t = PE_t$$

и будем рассматривать F_t как оператор, действующий в пространстве G. Легко видеть, что операторная функция F_t удовлетворяет условиям (A), (B), (C) и является, следовательно, разложением единицы (вообще говоря, не ортогональным) пространства G.

М. А. Наймарк установил, что любое обобщенное разложение единицы пространства H может быть получено только что описанным приемом после вложения пространства H в некоторое пространство H^+.

При доказательстве теоремы М. А. Наймарка нам придется использовать один важный прием построения гильбертовых про странств; изложением этого приема мы и займемся в первую очередь.

С этой целью введем понятие об эрмитово-положительной функции.

Числовая функция $\Phi(\mathfrak{f}, \mathfrak{g})$, определенная на любой паре $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ элементов некоторого множества $\mathfrak{H}$, называется *эрмитово-положительной*, если при любых $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ из $\mathfrak{H}$,

$$\Phi(\mathfrak{f}, \mathfrak{g}) = \overline{\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{f})}$$

и если при любых $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots, \mathfrak{f}_n$ $(n < \infty)$ из $\mathfrak{H}$ эрмитовы формы

$$\sum_{i, k=1}^{n} \Phi(\mathfrak{f}_i, \mathfrak{f}_k)\, \xi_i \bar{\xi}_k$$

неотрицательны.

Примером эрмитово-положительной функции от пар векторов гильбертова пространства является скалярное произведение, так как

$$(f, g) = \overline{(g, f)}$$

и

$$\sum_{i, k=1}^{n} (f_i, f_k)\, \xi_i \bar{\xi}_k = \Big\| \sum_{i=1}^{n} \xi_i f_i \Big\|^2 \geqslant 0.$$

Если, наоборот, задана эрмитово-положительная функция от пары элементов произвольного множества $\mathfrak{H}$ (в $\mathfrak{H}$ не определена алгебра), то это множество можно обратить в гильбертово пространство. Точнее говоря, можно вложить $\mathfrak{H}$ в некоторое гильбертово пространство H^+ так, чтобы на элементах $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ из $\mathfrak{H}$ скалярное произведение определялось формулой

$$(\mathfrak{f}, \mathfrak{g}) = \Phi(\mathfrak{f}, \mathfrak{g}).$$

Для построения H^+ дополним сначала $\mathfrak{H}$ до линейной системы $\hat{\mathfrak{H}}$, введя формально конечные суммы

$$\hat{\mathfrak{f}} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \mathfrak{f}_i$$

при любых $\mathfrak{f}_i \in \mathfrak{H}$ и любых числах ξ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Далее определим в $\hat{\mathfrak{H}}$ квазискалярное произведение (см. n° 3), полагая

$$(\hat{\mathfrak{f}}, \hat{\mathfrak{g}}) = \sum_{i,\, k=1}^{n} \Phi(\mathfrak{f}_i, \mathfrak{g}_k)\, \xi_i \bar{\eta}_k,$$

если

$$\hat{\mathfrak{f}} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \mathfrak{f}_i, \qquad \hat{\mathfrak{g}} = \sum_{k=1}^{n} \eta_k \mathfrak{g}_k.$$

Обозначим через $\hat{\mathfrak{N}}$ линейное многообразие всех тех $\hat{\mathfrak{f}} \in \hat{\mathfrak{H}}$, для которых $(\hat{\mathfrak{f}}, \hat{\mathfrak{f}}) = 0$, и перейдем к фактор-многообразию

$$\mathrm{R}^+ = \hat{\mathfrak{H}} / \hat{\mathfrak{N}}.$$

После пополнения линейной метризованной системы R^+ мы получим некоторое гильбертово пространство, которое обозначим через H^+. Это пространство H^+ и является искомым.

Теперь мы можем перейти к теореме М. А. Наймарка.

Теорема. *Пусть F_t — обобщенное разложение единицы пространства* H.

В таком случае существует гильбертово пространство H^+, *содержащее* H *в качестве подпространства, и существует такое ортогональное разложение единицы E_t^+ пространства* H^+, *что при любом $f \in \mathrm{H}$*

$$F_t f = P^+ E_t^+ f,$$

где P^+ — оператор проектирования на H.

Доказательство. Введем в рассмотрение множество $\mathfrak{H}$ пар $\mathfrak{p}$ вида

$$\mathfrak{p} = \{\Delta, f\},$$

где Δ — произвольный подынтервал интервала $\Omega = [-\infty, \infty]$, а f — произвольный вектор из H.

Определим, далее, на $\mathfrak{H}$ функцию $\Phi(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)$, полагая при $\mathfrak{p}_1 = \{\Delta_1, f_1\}$, $\mathfrak{p}_2 = \{\Delta_2, f_2\}$,

$$\Phi(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2) = (F_{\Delta_1 \cdot \Delta_2} f_1, f_2).$$

Покажем, что функция $\Phi(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)$ является эрмитово-положительной.

Действительно,

$$\Phi(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2) = (F_{\Delta_1 \cdot \Delta_2} f_1, f_2) = (f_1, F_{\Delta_1 \cdot \Delta_2} f_2) = \overline{(F_{\Delta_1 \cdot \Delta_2} f_2, f_1)} = \overline{\Phi(\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_1)},$$

а, с другой стороны,

$$\sum_{i, k=1}^{n} \Phi(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k) \xi_i \bar{\xi}_k = \sum_{i, k=1}^{n} (F_{\Delta_i \cdot \Delta_k} f_i, f_k) \xi_i \bar{\xi}_k. \tag{2}$$

Если интервалы Δ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ попарно не пересекаются, то

$$\sum_{i, k=1}^{n} (F_{\Delta_i \cdot \Delta_k} f_i, f_k) \xi_i \bar{\xi}_k = \sum_{i=1}^{n} (F_{\Delta_i} f_i, f_i) |\xi_i|^2 \geqslant 0. \tag{3}$$

Если же интервалы Δ_i $(i = 2, 3, \ldots, n)$ попарно не пересекаются, а интервалы Δ_1 и Δ_2 совпадают, то сумма в правой части (2) распадается на две: часть, содержащая индексы от 3 до n, будет вида (3), а часть, содержащая индексы 1 и 2, будет

$$\sum_{i, k=1}^{2} (F_{\Delta_i \cdot \Delta_k} f_i, f_k) \xi_i \bar{\xi}_k =$$

$$= \sum_{i, k=1}^{2} (F_{\Delta_1} f_i, f_k) \xi_i \bar{\xi}_k = \left(F_{\Delta_1} \sum_{i=1}^{2} \xi_i f_i, \sum_{k=1}^{2} \xi_k f_k\right) \geqslant 0.$$

Общий случай расположения интервалов Δ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ сводится к рассмотренным, если с помощью дополнительного разбиения привести заданную систему интервалов к системе непересекающихся или совпадающих интервалов и воспользоваться верным при $\Delta_1 \cdot \Delta_2 = 0$ соотношением

$$(F_{(\Delta_1 + \Delta_2) \cdot \Delta_3} f, g) = (F_{(\Delta_1 \cdot \Delta_3 + \Delta_2 \cdot \Delta_3)} f, g) = (F_{\Delta_1 \cdot \Delta_3} f, g) + (F_{\Delta_2 \cdot \Delta_3} f, g).$$

Таким образом, функция $\Phi(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)$ эрмитово-положительна на $\mathfrak{H}$.

Пользуясь описанным ранее приемом, вложим $\mathfrak{H}$ в гильбертово пространство H^+.

Не желая вводить новых обозначений для тех элементов $\mathfrak{P}$ пространства H^+, которые являются подмножествами из $\mathfrak{H}$, т. е. для элементов из R^+, мы условимся в следующем: если некоторый элемент $\mathfrak{p}$ из $\mathfrak{H}$ принадлежит $\mathfrak{P}$, то вместо $\mathfrak{P}$ будем писать $\mathfrak{p}$.

Отмечая скалярное произведение в пространстве H^+ знаком $_+$, имеем

$$(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)_+ = \Phi(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2).$$

Рассмотрим теперь элементы из H^+ вида $\{\Omega, f\}$.

Равенство

$$(\{\Omega, f\}, \{\Omega, g\})_+ = (F_\Omega f, g) = (f, g)$$

дает нам право отождествить пару $\{\Omega, f\}$ с элементом f из H. При этом элемент $\sum_{k=1}^{n} \xi_k \{\Omega, f_k\}$ пространства H^+ отождествится с элементом $\sum_{k=1}^{n} \xi_k f_k$ пространства H. Таким образом, H можно рассматривать как подпространство пространства H^+.

Решим теперь следующую задачу: найти проекцию элемента $\{\Delta, f\}$ пространства H^+ на подпространство H. Обозначая искомую проекцию через $\{\Omega, g\}$, мы должны иметь при любом h из H равенство

$$(\{\Delta, f\} - \{\Omega, g\}, \{\Omega, h\})_+ = 0$$

или

$$(\{\Delta, f\}, \{\Omega, h\})_+ - (\{\Omega, g\}, \{\Omega, h\})_+ =$$
$$= (F_\Delta f, h) - (g, h) = (F_\Delta f - g, h) = 0,$$

откуда

$$g = F_\Delta f,$$

т. е.

$$P^+\{\Delta, f\} = \{\Omega, F_\Delta f\}. \tag{4}$$

Определим теперь операторную функцию E_Δ^+ на любом элементе вида $\{\Delta', f\} \in H^+$ равенством

$$E_\Delta^+\{\Delta', f\} = \{\Delta \cdot \Delta', f\}. \tag{5}$$

Учитывая, что линейная оболочка элементов вида $\{\Delta', f\}$ плотна в H^+, расширим оператор E_Δ^+ по линейности, а затем по непрерывности на все H^+.

Теорема будет доказана, если будет установлено, что операторная функция E_Δ^+ является ортогональным разложением единицы пространства H^+, ибо тогда (4) можно будет представить в виде

$$P^+E_\Delta^+ f = P^+E_\Delta^+\{\Omega, f\} = P^+\{\Delta \cdot \Omega, f\} = P^+\{\Delta, f\} = \{\Omega, F_\Delta f\} = F_\Delta f$$

при любом $f \in H$.

Очевидно, E_Δ^+ — аддитивная операторная функция интервала. Далее из двух равенств

$$(E_\Delta^+)^2\{\Delta', f\} = E_\Delta^+\{\Delta \cdot \Delta', f\} = \{\Delta \cdot \Delta \cdot \Delta', f\} = E_\Delta^+\{\Delta', f\}$$

и

$$(E_\Delta^+\{\Delta', f\},\ \{\Delta'', g\})_+ = (\{\Delta\cdot\Delta', f\},\ \{\Delta'', g\})_+ =$$
$$= (F_{\Delta\cdot\Delta'\cdot\Delta''}f,\ g) = (\{\Delta', f\},\ E_\Delta^+\{\Delta'', g\})_+$$

следует, что E_Δ^+ — проектирующий оператор.

Наконец, очевидно, что $E_\Omega^+\{\Delta', f\} = \{\Delta', f\}$.

В силу установленных свойств, E_Δ^+ представляет собой ортогональное разложение единицы пространства H^+.

Теорема доказана.

111. Самосопряженные расширения с выходом из пространства и спектральные функции симметрических операторов*). Основой наших дальнейших рассмотрений является обобщение понятия о симметрических расширениях.

Пусть A — некоторый симметрический оператор, действующий в пространстве H, а H^+ — некоторое гильбертово пространство, содержащее H.

В дополнение к определению n° 46 мы будем называть *симметрическим* (в частности, *самосопряженным*) *расширением* оператора A любой симметрический (в частности, самосопряженный) оператор B^+, действующий в H^+ и являющийся расширением оператора A. (При этом считаем, что область D_A плотна в H, а область D^{B+} плотна в H^+.)

Аналогично обобщается понятие об *изометрических* (в частности, *унитарных*) *расширениях* изометрического оператора.

Очевидно, преобразование Кэли симметрического (самосопряженного) расширения B^+ оператора A является изометрическим (соответственно унитарным) расширением преобразования Кэли оператора A.

Обратно, преобразование Кэли изометрического (унитарного) расширения некоторого изометрического оператора является симметрическим (соответственно самосопряженным) расширением преобразования Кэли этого оператора.

При $\mathrm{H}^+ = \mathrm{H}$ получаем рассматривавшиеся до сих пор обычные симметрические и изометрические расширения.

---

*) См. М. А. Наймарк, О самосопряженных расширениях второго рода симметрического оператора, Изв. АН СССР, т. 4, № 1 (1940), стр. 53—104; М. А. Наймарк, Спектральные функции симметрического оператора, Изв. АН СССР, т. 4, № 3 (1940), стр. 277—318.

До построения М. А. Наймарком общей теории, которая излагается в этом и следующем пунктах, отдельные результаты различными методами получили А. И. Плеснер и Н. И. Ахиезер. См. А. И. Плеснер, Спектральный анализ максимальных операторов, ДАН СССР, т. XXII, № 5 (1939), стр. 225—228, и Н. И. Ахиезер, К теории максимальных симметрических операторов в гильбертовом пространстве, Уч. зап. Харьковского авиационного ин-та, т. III, вып. 2 (1940).

Пусть B^+ — произвольное симметрическое расширение оператора 1.

Так как имеют место включения

$$\mathrm{D}_A \subseteq \mathrm{D}_{B^+} \cap \mathrm{H} \subseteq \mathrm{D}_{B^+},$$

то удобно классифицировать симметрические расширения B^+ оператора A по следующей схеме:

1. Расширения I рода — при $\mathrm{D}_A \neq \mathrm{D}_{B^+} \cap \mathrm{H} = \mathrm{D}_{B^+}$; эти расширения совпадают с обычными, ибо в этом случае $\mathrm{H}^+ = \mathrm{H}$.

2. Расширения II рода — при $\mathrm{D}_A = \mathrm{D}_{B^+} \cap \mathrm{H} \neq \mathrm{D}_{B^+}$.

3. Расширения III рода — при $\mathrm{D}_A \neq \mathrm{D}_{B^+} \cap \mathrm{H} \neq \mathrm{D}_{B^+}$.

Таким образом, обычные симметрические расширения (т. е. расширения без выхода из пространства) совпадают с расширениями I рода, а симметрические расширения с выходом из пространства могут быть II или III рода.

Очевидно, максимальный оператор может допускать лишь симметрические расширения II рода, так как если бы B^+ было расширением III рода, то P^+B^+ оказалось бы в H нетривиальным симметрическим расширением максимального оператора, что невозможно.

Если симметрическое расширение B^+ оператора A приводится некоторым подпространством $\mathrm{G}^+ \subset \mathrm{H}^+ \ominus \mathrm{H}$, то это подпространство G^+ мы условимся исключать из H^+ (т. е. будем заменять пространство H^+ пространством $\mathrm{H}^+ \ominus \mathrm{G}^+$ и оператор B^+ — его частью в $\mathrm{H}^+ \ominus \mathrm{G}^+$).

В силу этого соглашения самосопряженный оператор не допускает симметрических расширений.

Мы можем теперь перейти к основной теореме настоящего пункта.

Теорема 1. *Действующий в гильбертовом пространстве* H *симметрический оператор* A *с произвольными индексами дефекта* $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ *может быть расширен до самосопряженного оператора* B^+, *действующего в пространстве* $\mathrm{H}^+ \supseteq \mathrm{H}$.

Доказательство. Построим в некотором пространстве H' достаточно большой размерности какой-нибудь симметрический оператор A' с индексами дефекта $(\mathfrak{n}, \mathfrak{m})$ (можно, например, взять H' изоморфным H и A' — изоморфным $(-1)A$).

Построим теперь пространство.

$$\mathrm{H}^+ = \mathrm{H} \oplus \mathrm{H}'$$

и введем в этом пространстве симметрический оператор

$$A^+ = A \oplus A'.$$

Очевидно, оператор A^+ является симметрическим расширением II рода оператора A и для доказательства теоремы достаточно установить, что оператор A^+ можно расширить до самосопряженного оператора, а для этого следует убедиться в равенстве дефектных чисел оператора A^+.

При $\mathfrak{J}z \neq 0$ получаем

$$\mathfrak{M}_z^+ = (A^+ - zI^+)\,\mathrm{D}_{A^+} = (A^+ - zI^+)\,(\mathrm{D}_A \oplus \mathrm{D}_{A'}) =$$
$$= (A - zI)\,\mathrm{D}_A \oplus (A' - zI')\,\mathrm{D}_{A'} = \mathfrak{M}_z \oplus \mathfrak{M}'_z,$$

или, переходя к ортогональным дополнениям многообразий $\mathfrak{M}_z^+$, $\mathfrak{M}_z$ и $\mathfrak{M}'_z$ в пространствах H^+, H и H', —

$$\mathfrak{N}_z^+ = \mathfrak{N}_z \oplus \mathfrak{N}'_z,$$

откуда следует, что индексы дефекта оператора A^+ есть $(\mathfrak{m} + \mathfrak{n}, \mathfrak{m} + \mathfrak{n})$.

Теорема доказана.

Выбирая различным образом пространство H' и оператор A', мы будем получать различные самосопряженные расширения оператора A.

Построенный при доказательстве теоремы 1 оператор B^+ будет, вообще говоря, расширением III рода исходного симметрического оператора A. Однако всегда можно добиться того, чтобы оператор B^+ являлся расширением II рода оператора A. Для этого достаточно построить унитарный оператор U^+, преобразованием Кэли которого явится искомый оператор B^+ так, чтобы

$$U^+\mathfrak{N}_z = \mathfrak{N}'_{\bar{z}}.$$

Опираясь на доказанную теорему, мы покажем теперь, что произвольные симметрические операторы допускают интегральные представления, подобные спектральному разложению самосопряженных операторов, которое мы изучали в гл. VI.

Итак, пусть в H дан симметрический оператор A. Расширим его *) до самосопряженного оператора B^+, выйдя, если нужно, из пространства H в пространство H^+. Пусть $E^+(\Delta)$ — разложение единицы оператора B^+, а P^+ — оператор проектирования H^+ на H. Пусть, наконец,

$$F(\Delta) = P^+E^+(\Delta).$$

Для любых двух элементов $f \in \mathrm{D}_{B^+}$, $g \in \mathrm{H}^+$ имеют место формулы

$$(B^+f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} t\, d(E_t^+ f, g),$$

$$\|B^+f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^2\, d(E_t^+ f, f).$$

*) Мы здесь не предполагаем, что расширение производится тем специальным способом, который послужил нам для доказательства теоремы 1.

Если, в частности, $f \in D_A$ и $g \in H$, то эти формулы могут быть записаны в виде

$$(Af, g) = \int_{-\infty}^{\infty} t\, d(F_t f, g), \tag{1}$$

$$\|Af\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^2\, d(F_t f, f). \tag{2}$$

Мы получили, таким образом, интегральное представление произвольного симметрического оператора, которое напоминает спектральное разложение самосопряженного оператора.

Опираясь на это сходство, примем следующее определение, обобщающее понятие спектральной функции самосопряженного оператора.

Определение. Если A — симметрический оператор, а F_t — обобщенное разложение единицы, такое, что при любом $f \in D_A$ и любом $g \in H$ имеют место формулы (1) и (2), то разложение единицы F_t называется *спектральной функцией* оператора A.

Прежде чем сопоставить формулы (1) и (2) с полученным ранее спектральным разложением самосопряженного оператора, мы покажем, что метод, с помощью которого мы пришли к этим формулам, является общим, а именно, имеет место

Теорема 2. *Всякая спектральная функция симметрического оператора A, действующего в пространстве H, имеет вид*

$$F_t = P^+ E_t^+,$$

где E_t^+ есть разложение единицы некоторого самосопряженного расширения B^+ оператора A, полученного с помощью выхода из пространства H в пространство $H^+ \supseteq H$, а P^+ — оператор проектирования H^+ на H.

Доказательство. Построим по теореме М. А. Наймарка пространство H^+ и в нем ортогональное разложение единицы E_t^+ так, чтобы

$$F_t = P^+ E_t^+. \tag{3}$$

Покажем, что оператор B^+, определенный формулой

$$B^+ f = \int_{-\infty}^{\infty} t\, dE_t^+ f$$

на элементах $f \in H^+$, удовлетворяющих условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2\, d(E_t^+ f, f) < \infty,$$

является самосопряженным расширением оператора A.

Самосопряженность оператора B^+ следует из теоремы n° 72.

Если $f \in D_A$, то $f \in D_{B^+}$, ибо

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 d(E_t^+ f, f) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 d(F_t f, f) = \| Af \|^2 < \infty.$$

Далее, при $f \in D_A$ и $g \in H$ из равенств

$$(Af, g) = \int_{-\infty}^{\infty} t\, d(F_t f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} t\, d(E_t^+ f, g) = (B^+ f, g)$$

следует, что

$$Af = P^+ B^+ f \qquad (f \in D_A). \tag{4}$$

Но при $f \in D_A$

$$\| Af \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 d(F_t f, f) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 d(E_t^+ f, f) = \| B^+ f \|^2. \tag{5}$$

Из (4) и (5) следует, что

$$Af = B^+ f \qquad (f \in D_A).$$

При этом можно считать, что оператор B^+ не приводится никаким подпространством из $H^+ \ominus H$.

Действительно, если подпространство G из $H^+ \ominus H$ приводит оператор B^+, то оно приводит разложение единицы E_t^+ и исключение G из H^+ сведется к исключению части оператора E_t^+, лежащей в G, что не окажет влияния на формулу (3).

Теорема доказана.

Если спектральная функция F_t симметрического оператора представлена в виде (3), где E_t^+ — разложение единицы самосопряженного расширения B^+ оператора A, то мы будем говорить, что спектральная функция F_t порождается самосопряженным расширением B^+.

Таким образом, *каждое самосопряженное расширение оператора A порождает некоторую спектральную функцию этого оператора, и обратно, каждая спектральная функция оператора A порождается некоторым его самосопряженным расширением.*

Приведем теперь ряд фактов, выясняющих, насколько далеко простирается аналогия между представлением (1) и (2) и спектральным представлением самосопряженного оператора.

1° Определенное в гл. VI разложение единицы самосопряженного оператора является его единственной спектральной функцией в смысле определения настоящего пункта. Других спектральных функций самосопряженный оператор не имеет, так как каждая такая спектральная функция должна в силу теоремы порождаться некоторым самосопряженным расширением, а самосопряженный оператор не допускает таких расширений.

2°. Из формулы (2) следует, что при $f \in \mathrm{D}_A$

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2\, d(F_t f, f) < \infty, \tag{6}$$

но обратное заключение, вообще говоря, неверно. Можно лишь утверждать, что если при некотором $f \in \mathrm{H}$ сходится интеграл (6), то

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2\, d(E_t^+ f, f) < \infty, \tag{7}$$

так что вектор f принадлежит многообразию $\mathrm{D}_{B^+} \cap \mathrm{H}$, которое совпадает с D_A тогда и только тогда, когда B^+ есть расширение II рода оператора A.

Таким образом, *те и только те спектральные функции оператора A, которые порождаются самосопряженными расширениями II рода оператора A, характеризуют область определения D_A как множество векторов, для которых сходится интеграл* (6).

В частности, этим свойством обладают спектральные функции максимальных операторов, ибо такие операторы допускают лишь расширения II рода.

В общем случае спектральная функция F_t оператора A, порожденная его самосопряженным расширением B^+, характеризует область определения оператора $C = P^+B^+P^+$, который является для A симметрическим расширением I рода с максимальной областью определения D_C, удовлетворяющей условию

$$\mathrm{D}_A \subset \mathrm{D}_C \subset \mathrm{D}_{B^+}. \tag{8}$$

С этой точки зрения естественнее было бы считать разложение единицы F_t спектральной функцией оператора C, а не оператора A и, в соответствии с этим, включить в определение требование, чтобы разложение единицы F_t, помимо представлений (1) и (2), определяло еще область D_A неравенством (6).

Однако с точки зрения дальнейшего оказывается неудобным введение в определение дополнительного требования относительно характеристики области D_A.

Таким образом, определение допускает, чтобы одно и то же разложение единицы являлось спектральной функцией двух различных операторов (например, операторов A и $C = P^+B^+P^+$).

В частности, спектральная функция некоторого самосопряженного расширения I рода B заданного оператора A с равными дефектными числами в силу определения является спектральной функцией самого оператора A и любого оператора C, удовлетворяющего условию $C \subseteq B$.

3°. Из предыдущего следует, что каждому симметрическому оператору принадлежит некоторое множество спектральных функций и что одна и та же спектральная функция принадлежит некоторому множеству симметрических операторов.

В связи с этим возникает вопрос о том, всякое ли данное наперед обобщенное разложение единицы является спектральной функцией некоторого симметрического оператора.

В случае ортогонального разложения единицы положительный ответ на этот вопрос был дан теоремой n° 72.

Если же F_t — неортогональное разложение единицы, то заранее нельзя утверждать, что множество векторов, для которых существует интеграл (6), будет плотно в пространстве H.

В действительности, как заметил М. А. Наймарк, существуют такие разложения единицы, что интеграл (6) не сходится ни при каком векторе $f \neq 0$ из H.

В качестве примера *) такого рода рассмотрим операторную функцию, определенную в пространстве H равенствами

$$F_t = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0, \\ e^{-1/t} I, & t > 0. \end{cases}$$

Очевидно, операторная функция F_t удовлетворяет условиям (A), (B), (C) n° 110 и, следовательно, является разложением единицы. Однако это разложение единицы не является спектральной функцией какого-либо симметрического оператора, ибо интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 \, d(F_t f, f) = (f, f) \int_{0}^{\infty} t^2 \, de^{-1/t} = (f, f) \int_{0}^{\infty} e^{-1/t} \, dt$$

расходится, каков бы ни был вектор $f \neq 0$.

4°. В главе VI было выяснено, что для самосопряженного оператора представление (1) имеет место в сильном смысле.

В случае неортогональных разложений единицы переход от слабого представления (1) к сильному представлению вида

$$Af = \int_{-\infty}^{\infty} t \, dF_t f \tag{9}$$

неосуществим, и мы будем рассматривать равенство (9) лишь как символическую запись формул (1) и (2).

Вообще понятие об интеграле в сильном смысле в случае неортогональных разложений единицы не вводится.

5°. Из свойства ортогональности спектральной функции E_t самосопряженного оператора A вытекает, что для любого конеч-

*) Этот пример указал нам М. А. Красносельский.

ного интервала Δ числовой оси вектор $E(\Delta)f$ ($f \in \mathrm{H}$) принадлежит D_A и

$$(AE(\Delta)f, g) = \int\limits_{\Delta} t\, d(E_t f, g)$$

при любом $g \in \mathrm{H}$. Этот важный факт, которым мы неоднократно пользовались в гл. VI, уже не имеет места для рассматриваемых теперь интегральных представлений симметрических операторов (даже если бы мы ограничились лишь спектральными функциями, порождаемыми расширениями II рода).

Однако справедливо следующее предложение: *если A — симметрический оператор, F_t — его спектральная функция, Δ — конечный интервал оси и g — произвольный вектор из* H, *то имеет место включение*

$$F(\Delta)\, g \in \mathrm{D}_{A^*}$$

и равенство

$$(A^* F(\Delta)\, g, h) = \int\limits_{\Delta} t\, d(F_t g, h)$$

при любом $h \in \mathrm{H}$.

Действительно, если B^+ — расширение, порождающее F_t, и P^+ — оператор проектирования H^+ на H, то при любом $f \in \mathrm{D}_A$, $g \in \mathrm{H}$

$$(Af, F(\Delta)\, g) = (B^+ f, P^+ E^+(\Delta)\, g) =$$

$$= (B^+ f, E^+(\Delta)\, g) = \int\limits_{\Delta} t\, d(E_t^+ f, g) = \int\limits_{\Delta} t\, d(E_t^+ f, P^+ g) = \int\limits_{\Delta} t\, d(F_t f, g). \tag{10}$$

Но интеграл

$$\int\limits_{\Delta} t\, d(F_t h, g)$$

есть билинейный функционал от h, g в H и поэтому допускает представление (h, Cg), где C — некоторый ограниченный оператор.

Отсюда вытекает, что

$$(Af, F(\Delta)\, g) = (f, g^*)$$

и, значит,

$$F(\Delta)\, g \in \mathrm{D}_{A^*}.$$

Поэтому из (10) следует

$$(f, A^* F(\Delta)\, g) = \int\limits_{\Delta} t\, d(F_t f, g),$$

а так как D_A плотно в H, то вместо $f \in \mathrm{D}_A$ здесь можно взять произвольный вектор $h \in \mathrm{H}$.

Отметим в заключение, что существует также теория расширения ограниченных несимметричных операторов до нормальных, с выходом из пространства (такие расширения возможны лишь при выполнении ряда условий). Указанной теории и связанным с нею вопросам посвящена работа Б. С.-Надя *), в которой нашел отражение ряд полученных в этой области результатов.

112. Спектральные функции симметрического оператора и обобщенные резольвенты. Введем теперь в рассмотрение операторную функцию $\boldsymbol{R}_z$, которая по отношению к спектральной функции симметрического оператора будет играть роль, аналогичную роли резольвенты самосопряженного оператора по отношению к его разложению единицы.

Определение. Пусть A — некоторый симметрический (но не самосопряженный) оператор, B^+ — какое-нибудь самосопряженное расширение этого оператора с выходом из пространства H в H^+ ($\mathrm{H} \subset \mathrm{H}^+$) и резольвентой R_z^+ и, наконец, P^+ — оператор проектирования H^+ на H. Оператор $\boldsymbol{R}_z$, определенный при любом невещественном значении z формулой

$$\boldsymbol{R}_z = P^+ R_z^+$$

во всем пространстве H, называется *обобщенной резольвентой* оператора A, порожденной самосопряженным расширением B^+.

Обобщенные резольвенты оператора A (с равными дефектными числами), порожденные его самосопряженными расширениями I рода, называются *ортогональными*; эти обобщенные резольвенты оператора A являются, одновременно, обычными резольвентами тех самосопряженных расширений, которыми они порождаются.

Следующая теорема устанавливает для обобщенных резольвент интегральное представление, аналогичное полученному в гл. VI для обычных резольвент самосопряженных операторов.

Теорема 1. *Для того чтобы операторная функция* $\boldsymbol{R}_z$ ($\Im z \neq 0$) *была обобщенной резольвентой симметрического оператора* A, *необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление*

$$(\boldsymbol{R}_z f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(F_t f, g)}{t-z} \qquad (f, g \in \mathrm{H}), \tag{1}$$

где F_t *— некоторая спектральная функция оператора* A.

*) См. B. Sz.-Nagy, Prolongements de transformations de l'espace de Hilbert qui sortent de cet espace, App. au livre «Leçons d'analyse fonctionelle» par F. Riesz et B. Sz.-Nagy, 3-me ed., Paris — Budapest, 1955. (Есть русский перевод: Б. С.-Надь, Продолжения операторов в гильбертовом пространстве с выходом из этого пространства, Сб. переводов «Математика», 9 : 6 (1965), стр. 109—144.

Для доказательства необходимости представления (1) следует взять спектральную функцию F_t, принадлежащую тому самосопряженному расширению B^+, которое порождает обобщенную резольвенту $\boldsymbol{R}_z$.

Для доказательства достаточности представления (1) следует взять обобщенную резольвенту $\boldsymbol{R}_z$, порожденную тем самосопряженным расширением B^+, которому принадлежит спектральная функция F_t.

Если обобщенная резольвента $\boldsymbol{R}_z$ и спектральная функция F_t связаны формулой (1), то говорят, что они принадлежат друг другу.

В силу формулы обращения Стилтьеса (n° 69) между множеством спектральных функций заданного симметрического оператора и множеством его обобщенных резольвент существует взаимно однозначное соответствие.

Заметим, что на каждом векторе из подпространства

$$\mathfrak{M}_z = \Delta_A(z) \qquad (\Im z \neq 0)$$

значения всех обобщенных резольвент оператора A совпадают. Действительно, если

$$(A - zI) f = g, \tag{2}$$

то

$$\boldsymbol{R}_z g = \boldsymbol{R}_z (A - zI) f = P^+ R_z^+ (B^+ - zI^+) f = P^+ f = f. \tag{3}$$

Если обобщенная резольвента $\boldsymbol{R}_z$ порождена расширением B^+ с резольвентой R_z^+, то при $f, g \in \mathrm{H}$

$$(\boldsymbol{R}_z f, g) = (P^+ R_z^+ f, g) = (R_z^+ f, g) = (f, R_{\bar z}^+ g) = (f, P^+ R_{\bar z}^+ g) = (f, \boldsymbol{R}_{\bar z} g),$$

и, значит,

$$\boldsymbol{R}_{\bar z} = \boldsymbol{R}_z^*. \tag{4}$$

Если A — максимальный симметрический оператор и, например, при $\Im z > 0$

$$\mathfrak{M}_z = \mathrm{H},$$

то его обобщенные резольвенты должны совпадать при $\Im z > 0$, так как в силу (2) и (3) при $\Im z > 0$ для любого $g \in \mathrm{H}$

$$\boldsymbol{R}_z g = (A - zI)^{-1} g.$$

Но, согласно (4), из совпадения операторов $\boldsymbol{R}_z$ при $\Im z > 0$ следует их совпадение при $\Im z < 0$.

Таким образом, максимальный оператор имеет единственную обобщенную резольвенту и, следовательно, обладает единственной спектральной функцией.

С другой стороны, обобщенная резольвента немаксимального симметрического оператора A не определяется однозначно.

Чтобы в этом убедиться, достаточно взять два различных максимальных симметрических расширения I рода C' и C'' оператора A и затем расширить их до самосопряженных операторов B'^{+} и B''^{+}. Очевидно, обобщенные резольвенты $\boldsymbol{R}'_z$ и $\boldsymbol{R}''_z$ оператора A, порожденные расширениями B'^{+} и B''^{+}, не будут совпадать.

Поскольку немаксимальный симметрический оператор имеет различные обобщенные резольвенты, то его спектральная функция не определяется однозначно.

Если учесть сказанное ранее (n° 111, 1°) о спектральной функции самосопряженного оператора, то можно считать доказанным следующее предложение:

Теорема 2. *Симметрический оператор имеет единственную спектральную функцию в том и только в том случае, когда он максимальный.*

Эта единственная спектральная функция является ортогональной в том и только в том случае, когда оператор самосопряженный.

Легко видеть, что множество всех спектральных функций (обобщенных резольвент) заданного симметрического оператора A является *выпуклым*.

Это означает, что если F'_t и F''_t ($\boldsymbol{R}'_z$ и $\boldsymbol{R}''_z$)— две спектральные функции (соответственно обобщенные резольвенты) оператора A, то при $\alpha' + \alpha'' = 1$, $\alpha' > 0$, $\alpha'' > 0$ операторная функция $\alpha' F'_t + \alpha'' F''_t$ (соответственно $\alpha' \boldsymbol{R}'_z + \alpha'' \boldsymbol{R}''_z$) также есть спектральная функция (соответственно обобщенная резольвента) этого оператора.

В связи с этим укажем один прием построения обобщенных резольвент (спектральных функций) и притом порожденных самосопряженными расширениями II рода с помощью операций в пределах пространства H.

Пусть A — симметрический оператор, действующий в пространстве H, а A' и A'' — какие-нибудь два его максимальных симметрических расширения I рода.

Предположим, для определенности, что при $\Im z > 0$

$$\Delta_{A'}(z) = \Delta_{A''}(z) = \mathrm{H}.$$

Определим операторы $\boldsymbol{R}'_z$ и $\boldsymbol{R}''_z$ равенствами

$$\boldsymbol{R}'_z = \begin{cases} (A' - zI)^{-1} & (\Im z > 0), \\ (R'_{\bar z})^* & (\Im z < 0), \end{cases}$$

$$\boldsymbol{R}''_z = \begin{cases} (A'' - zI)^{-1} & (\Im z > 0), \\ (R''_{\bar z})^* & (\Im z < 0). \end{cases}$$

Операторы $\boldsymbol{R}'_z$ и $\boldsymbol{R}''_z$ являются обобщенными резольвентами максимальных симметрических операторов A' и A'' соответственно.

По обобщенным резольвентам R'_z и R''_z найдем спектральные функции F'_t и F''_t операторов A' и A'' и образуем операторную функцию

$$F_t = \alpha' F'_t + \alpha'' F''_t \qquad (\alpha' + \alpha'' = 1,\ \alpha' > 0,\ \alpha'' > 0).$$

В силу выпуклости множества спектральных функций операторная функция F_t является спектральной функцией оператора A.

Покажем теперь, как выбрать максимальные расширения A' и A'', чтобы спектральная функция F_t оказалась порожденной расширением II рода или, иначе говоря, чтобы спектральная функция F_t задавала область определения D_A оператора A с помощью неравенства

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} t^2\, d(E_t f, f) < \infty. \tag{5}$$

Легко видеть, что вектор $f \in H$ удовлетворяет условию (5) тогда и только тогда, когда

$$f \in D_{A'} \cap D_{A''}.$$

Нам остается доказать, что максимальные расширения A', A'' оператора A можно выбрать так, чтобы пересечением областей $D_{A'}$, $D_{A''}$ была область D_A.

На основании второй формулы Неймана (n° 102)

$$D_{A'} = D_A + \Gamma', \qquad D_{A''} = D_A + \Gamma''.$$

При этом Γ' есть множество всех векторов вида

$$g + U'g \qquad (g \in \mathfrak{N}_{\bar z}),$$

где U' — некоторый изометрический оператор, переводящий $\mathfrak{N}_{\bar z}$ в $U'\mathfrak{N}_{\bar z} \subseteq \mathfrak{N}_z$ ($\Im z > 0$, если для определенности предположить, что $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$). Подобным образом определяется Γ''.

При этом $D_{A'} \cap D_{A''} \supseteq D_A$. Примем, что D_A есть истинная часть пересечения $D_{A'} \cap D_{A''}$ и пусть вектор $h \,\overline{\in}\, D_A$ принадлежит как $D_{A'}$, так и $D_{A''}$. Следовательно,

$$h = f' + g' + U'g', \qquad h = f'' + g'' + U''g'',$$

где $f', f'' \in D_A$; $g', g'' \in \mathfrak{N}_{\bar z}$. Из написанных представлений вытекает, что

$$(f'' - f') + (g'' - g') + (U''g'' - U'g') = 0.$$

Но слагаемые в левой части неравенства принадлежат соответственно многообразиям D_A, $\mathfrak{N}_{\bar z}$ и $\mathfrak{N}_z$, а так как эти многообразия линейно независимы, то

$$f' = f'', \quad g' = g'' = g, \quad U'g = U''g. \tag{6}$$

Из последнего равенства следует, что для выполнения условия

$$\mathrm{D}_{A'} \cap \mathrm{D}_{A''} = \mathrm{D}_A$$

нужно выбрать изометрические операторы U' и U'', определяющие расширения A' и A'', так, чтобы равенство (6) не имело места ни для какого отличного от нуля вектора из $\mathfrak{N}_{\bar{z}}$.

Этого всегда можно достигнуть, выбирая, например, U' произвольно, и полагая $U'' = -U'$.

Таким образом, построенные операторные функции

$$F_t = \alpha' F'_t + \alpha'' F''_t$$

и

$$\boldsymbol{R}_z = \alpha' \boldsymbol{R}'_z + \alpha'' \boldsymbol{R}''_z$$

при произвольных α', α'' ($\alpha' + \alpha'' = 1$, $\alpha' > 0$, $\alpha'' > 0$) являются спектральными функциями и, соответственно, обобщенными резольвентами оператора A, порожденными в смысле n° 111 некоторыми самосопряженными расширениями II рода B^+ оператора A.

Нельзя, однако, утверждать, что подобным приемом можно исчерпать все спектральные функции симметрического оператора *).

Из указанного приема построения спектральных функций следует, между прочим, что теорема 2 останется справедливой, если даже ограничиться лишь спектральными функциями, порожденными самосопряженными расширениями II рода.

Чтобы это установить, надо показать, что немаксимальный симметрический оператор A имеет различные спектральные функции, порожденные самосопряженными расширениями II рода оператора A.

Но это, действительно, имеет место, так как обобщенные резольвенты

$$\alpha \boldsymbol{R}'_z + \beta \boldsymbol{R}''_z$$

и

$$\beta \boldsymbol{R}'_z + \alpha \boldsymbol{R}''_z,$$

где $\alpha \neq \beta$, при указанном выборе максимальных расширений A' и A'' совпадают лишь на векторах из $\Delta_A(z)$ и, следовательно, порождают различные спектральные функции.

*) По этому поводу см. М. А. Наймарк, Экстремальные спектральные функции симметрических операторов. Изв. АН СССР, т. 11, № 4 (1947), а также И. М. Глазман и П. Б. Найман, О выпуклой оболочке ортогональных функций ДАН СССР, т. 102, № 3 (1955).

Дальнейшее развитие теория обобщенных резольвент получила в работах А. В. Штрауса *). Им, в частности, получена формула, описывающая всевозможные обобщенные резольвенты в терминах пространства H.

В заключение проиллюстрируем изложенные в этом и предыдущем пунктах факты и методы на примере оператора дифференцирования.

Пусть $\mathcal{P}_0$ — оператор дифференцирования, действующий в $L^2(0, \infty)$. Индексы дефекта оператора $\mathcal{P}_0$ есть (0, 1).

Для получения обобщенного самосопряженного расширения оператора $\mathcal{P}_0$ по методу теоремы 1 построим оператор $\mathcal{P}'_0$ дифференцирования в $L^2(-\infty, 0)$, определяя его формулой

$$\mathcal{P}'_0 = i\frac{d}{dt}$$

на абсолютно непрерывных функциях $\varphi(t)$, принадлежащих вместе со своей производной $\varphi'(t)$ к $L^2(-\infty, 0)$ и удовлетворяющих граничному условию $\varphi(0) = 0$.

Очевидно, индексы дефекта оператора $\mathcal{P}'_0$ есть (1, 0).

Образуем ортогональные суммы

$$L^2(-\infty, \infty) = L^2(-\infty, 0) \oplus L^2(0, \infty),$$

$$\mathcal{P}_0^+ = \mathcal{P}_0 \oplus \mathcal{P}'_0.$$

Оператор $\mathcal{P}_0^+$ определяется, очевидно, формулой

$$\mathcal{P}_0^+\varphi = i\frac{d}{dt}\varphi(t)$$

на функциях $\varphi(t)$, которые абсолютно непрерывны в интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$, принадлежат вместе со своими производными $\varphi'(t)$ к $L^2(-\infty, \infty)$ и удовлетворяют граничному условию $\varphi(0) = 0$.

Легко видеть, что область определения сопряженного оператора $D_{(\mathcal{P}_0^+)^*}$ получится из $D_{\mathcal{P}_0^+}$, если опустить граничное условие $\varphi(0) = 0$. Отсюда следует, что каждое из уравнений

$$(\mathcal{P}_0^+)^* g + ig = 0, \qquad (\mathcal{P}_0^+)^* g - ig = 0$$

имеет единственное решение; эти решения определяются соответственно формулами

$$g_1(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0), \\ e^{-t} & (t \geqslant 0); \end{cases} \qquad g_2(t) = \begin{cases} e^{t} & (t < 0), \\ 0 & (t \geqslant 0). \end{cases}$$

*) См. А. В. Штраус, Обобщенные резольвенты симметрических операторов, Изв. АН СССР, сер. матем. **18** (1954), стр. 51—86; о расширениях симметрического оператора, зависящих от параметра, там же, **29** (1965), стр. 1389—1416.

Таким образом, индексы дефекта оператора $\mathcal{F}_0^+$ есть (1, 1). Рассмотренный в n° 55 оператор $\mathcal{F}$ дифференцирования на оси $(-\infty, \infty)$ является, очевидно, некоторым самосопряженным расширением оператора $\mathcal{F}_0^+$.

Мы получили, таким образом, в качестве обобщенного самосопряженного расширения оператора дифференцирования на полуоси оператор дифференцирования на оси.

113. Формула М. Г. Крейна для обобщенных резольвент. В связи с результатами предыдущих пунктов возникает вопрос об описании совокупности всех спектральных функций заданного симметрического оператора. Так как между множеством всех спектральных функций и множеством всех резольвент симметрического оператора имеется взаимно однозначное соответствие, вытекающее из формулы

$$(\boldsymbol{R}_\lambda f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(F_t f, g)}{t-\lambda},$$

то указанный вопрос сводится к вопросу об описании всех резольвент. Этот вопрос для случая равных и конечных дефектных чисел решил М. Г. Крейн *). Мы приведем здесь результат М. Г. Крейна для случая индексов дефекта (1, 1).

Пусть A — симметрический оператор с индексами дефекта (1, 1), $\mathring{A}$ — какое-нибудь фиксированное самосопряженное расширение I рода оператора A, $\mathring{R}_\lambda$ — резольвента оператора $\mathring{A}$ и, наконец, $\boldsymbol{R}_\lambda$ — произвольная обобщенная резольвента оператора A, так что

$$\boldsymbol{R}_\lambda = P^+ R_\lambda^+,$$

где R_λ^+ — ортогональная резольвента некоторого самосопряженного расширения A^+ оператора A с выходом из пространства H в H^+, а P^+ — оператор проектирования H^+ на H.

Положим, как обычно,

$$\mathfrak{M}_\lambda = \Delta_A(\lambda) \qquad (\Im\lambda \neq 0),$$
$$\mathfrak{N}_\lambda = \mathrm{H} \ominus \mathfrak{M}_\lambda.$$

В рассматриваемом случае подпространство $\mathfrak{N}_\lambda$ одномерно.

---

*) См. М. Крейн, О резольвентах эрмитова оператора с индексом дефекта (m, m), ДАН СССР, т. LII, № 8 (1946), стр. 657—660. В иной форме формула для обобщенных резольвент оператора с индексами дефекта (1, 1) была получена М. А. Наймарком; см. его статью «О спектральных функциях симметрического оператора», Изв. АН СССР, т. 7, № 6 (1943), стр. 285—296.

Для разности резольвент, так же как и в n° 106, получаем:

$$(\overset{\circ}{R}_\lambda - \boldsymbol{R}_\lambda) f \begin{cases} = 0 & \text{при} \quad f \in \mathfrak{M}_\lambda, \\ \in \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}} & \text{при} \quad f \in \mathfrak{N}_\lambda. \end{cases} \tag{1}$$

Последнее вытекает из того, что при $f \in \mathfrak{N}_\lambda$ и любом $h \in \mathfrak{M}_{\bar{\lambda}}$ в силу формулы (4) n° 112

$$((\overset{\circ}{R}_\lambda - \boldsymbol{R}_\lambda) f,\ h) = (f,\ (\overset{\circ}{R}_{\bar{\lambda}} - \boldsymbol{R}_{\bar{\lambda}}) h) = (f,\ 0) = 0.$$

Из (1), повторяя рассуждения n° 106, получим аналог формулы (6) n° 106 для нашего случая:

$$\boldsymbol{R}_\lambda f = \overset{\circ}{R}_\lambda f - p(\lambda)\,(f,\ g(\bar{\lambda}))\,g(\lambda), \tag{2}$$

где

$$g(\lambda) = g(\lambda_0) + (\lambda - \lambda_0)\,\overset{\circ}{R}_\lambda g(\lambda_0), \tag{2'}$$

а $g(\lambda_0)$ — вектор из $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}_0}$ с равной единице нормой. При этом мы примем для определенности, что фиксированная точка λ_0 лежит в верхней полуплоскости (можно было бы положить $\lambda_0 = i$). Однако функция $Q(\lambda) \equiv p^{-1}(\lambda)$, вообще говоря, уже не удовлетворяет соотношению

$$Q(\lambda) = Q(\lambda_0) + (\lambda - \lambda_0)\,(g(\lambda_0),\ g(\bar{\lambda})), \tag{3}$$

которое мы получили в n° 106 (формула (12)) для случая ортогональных резольвент.

Займемся выяснением природы функции $p(\lambda)$. Прежде всего найдем $p(\lambda_0)$, для чего положим в (2) $\lambda = \lambda_0$ и перейдем от резольвент к преобразованиям Кэли:

$$\overset{\circ}{U}_{\lambda_0} = (\overset{\circ}{A} - \lambda_0 I)(\overset{\circ}{A} - \bar{\lambda}_0 I)^{-1}, \qquad U^{+}_{\lambda_0} = (A^{+} - \lambda_0 I^{+})(A^{+} - \bar{\lambda}_0 I^{+})^{-1}.$$

После элементарной выкладки получаем

$$P^{+} U^{+}_{\bar{\lambda}_0} f = \overset{\circ}{U}_{\bar{\lambda}_0} f - (\lambda_0 - \bar{\lambda}_0)\,p(\lambda_0)\,(f,\ g(\bar{\lambda}_0))\,g(\lambda_0).$$

В этой формуле положим $f = g(\bar{\lambda}_0)$. Тогда будем иметь

$$P^{+} U^{+}_{\bar{\lambda}_0} g(\bar{\lambda}_0) = g(\lambda_0) - (\lambda_0 - \bar{\lambda}_0)\,p(\lambda_0)\,g(\lambda_0). \tag{4}$$

С другой стороны, поскольку элемент $\psi = U^{+}_{\bar{\lambda}_0}\varphi$ пробегает $\mathfrak{M}_{\bar{\lambda}_0}$, когда φ пробегает $\mathfrak{M}_{\lambda_0}$, имеет место равенство

$$0 = (g(\bar{\lambda}_0),\ \varphi) = (U^{+}_{\bar{\lambda}_0} g(\bar{\lambda}_0),\ U^{+}_{\bar{\lambda}_0}\varphi) = (U^{+}_{\bar{\lambda}_0} g(\bar{\lambda}_0),\ \psi) = (P^{+} U^{+}_{\bar{\lambda}_0} g(\bar{\lambda}_0),\ \psi),$$

показывающее, что

$$P^+U^{+}_{\overline{\lambda}_0}g(\overline{\lambda}_0) = \vartheta g(\lambda_0), \tag{5}$$

где $\vartheta = \vartheta(\lambda_0)$ — некоторый параметр, по модулю не превосходящий 1, определяемый расширением A^+ и равный по модулю 1 в том и только том случае, когда A^+ есть расширение I рода.

Из наших рассмотрений вытекает важное следствие: *пусть равенство*

$$\boldsymbol{R}_\lambda = \mathring{R}_\lambda,$$

или даже только

$$\boldsymbol{R}_\lambda g(\overline{\lambda}) = \mathring{R}_\lambda g(\overline{\lambda}),$$

имеет место хотя бы при одном невещественном значении $\lambda = \lambda_1$; *тогда оно имеет место при всех невещественных* λ.

Действительно, при $\lambda = \lambda_1$ из формулы (2) находим, что $p(\lambda_1) = 0$, а затем, полагая $\lambda_0 = \lambda_1$ в формулах (4) и (5), получаем, что множитель $\vartheta = \vartheta(\lambda_1)$ в формуле (5) равен единице. Поэтому $\boldsymbol{R}_\lambda$ есть ортогональная резольвента, а две ортогональные резольвенты одного и того же оператора, совпадающие в одной точке, очевидно, тождественны. Сопоставляя (4) и (5), находим, что

$$p(\lambda_0) = \frac{1-\vartheta}{\lambda_0 - \overline{\lambda}_0} \text{ или } Q(\lambda_0) \equiv p^{-1}(\lambda_0) = i\Im\lambda_0 + \tau, \tag{6}$$

где τ — новый параметр, связанный с параметром ϑ формулой

$$\tau = i\,\frac{1+\vartheta}{1-\vartheta}\,\Im\lambda_0,$$

отображающей единичный круг ϑ-плоскости на верхнюю половину τ-плоскости.

Если $\boldsymbol{R}_\lambda$ пробегает совокупность ортогональных резольвент, то, благодаря справедливости в этом случае формулы (3), формула (2) принимает вид

$$\boldsymbol{R}_\lambda f = \mathring{R}_\lambda f - \frac{(f,\ g(\overline{\lambda}))\,g(\lambda)}{\tau + Q_1(\lambda)}, \tag{7}$$

где

$$Q_1(\lambda) = i\Im\lambda_0 + (\lambda - \lambda_0)\,(g(\lambda_0),\ g(\overline{\lambda})), \tag{7'}$$

а параметр τ пробегает вещественную ось ($-\infty < \tau \leqslant \infty$). Определяемое формулой (7) соответствие между совокупностью всех ортогональных резольвент и значениями параметра τ взаимно однозначно.

В общем случае, когда $\boldsymbol{R}_\lambda$ — произвольная резольвента, мы положим в формуле (2)

$$p(\lambda) = Q^{-1}(\lambda) = [\tau(\lambda) + Q_1(\lambda)]^{-1}.$$

Таким образом,

$$\boldsymbol{R}_\lambda f = \overset{\circ}{R}_\lambda f - \frac{(f, g(\bar\lambda))\, g(\lambda)}{\tau(\lambda) + Q_1(\lambda)}. \tag{8}$$

Покажем, что функция $\tau(\lambda)$ голоморфна и имеет неотрицательную мнимую часть в верхней полуплоскости. С этой целью заметим, что при $\mathfrak{J}\lambda \neq 0$

$$\boldsymbol{R}_\lambda g(\bar\lambda) \neq \overset{\circ}{R}_\lambda g(\bar\lambda),$$

а также

$$(\boldsymbol{R}_\lambda g(\bar\lambda),\ g(\lambda)) \neq (\overset{\circ}{R}_\lambda g(\bar\lambda),\ g(\lambda)),$$

в силу доказанного выше утверждения. Поэтому положим в (8) $f = g(\bar\lambda)$ и умножим обе части скалярно на $g(\lambda)$. Мы получим тогда, что

$$\frac{1}{\tau(\lambda) + Q_1(\lambda)} = ((\overset{\circ}{R}_\lambda - \boldsymbol{R}_\lambda)\, g(\bar\lambda),\ g(\lambda)).$$

Так как здесь $Q_1(\lambda)$ и правая часть голоморфны, причем правая часть отлична от нуля, то голоморфность функции $\tau(\lambda)$ при любом невещественном значении λ доказана. А теперь докажем, что равенство $\mathfrak{J}\tau(\lambda') = 0$ хотя бы в одной точке верхней полуплоскости возможно лишь при $\tau(\lambda) = \mathrm{const}$. Отсюда, между прочим, будет следовать, что неравенство $\mathfrak{J}\tau(\lambda) < 0$ невозможно ни в одной точке верхней полуплоскости. Итак, пусть $\mathfrak{J}\tau(\lambda') = 0$ ($\mathfrak{J}\lambda' > 0$). Возьмем $\lambda = \lambda'$ в обеих формулах (7) и (8), выбрав в формуле (7) в качестве константы τ число $\tau(\lambda')$. Тогда правые части этих формул будут тождественны при любом f. Следовательно, в точке $\lambda = \lambda'$ обобщенная резольвента $\boldsymbol{R}_\lambda$ совпадает с некоторой ортогональной резольвентой R_λ, а отсюда, как мы выше показали, уже вытекает совпадение этих резольвент.

Умножая скалярно обе части равенства (8) на f, и приводя к общему знаменателю, мы получаем формулу вида

$$(\boldsymbol{R}_\lambda f,\ f) = \frac{p_0(\lambda) + p_1(\lambda)\,\tau(\lambda)}{Q_1(\lambda) + \tau(\lambda)}.$$

При фиксированном f функции $p_0(\lambda)$, $p_1(\lambda)$, $Q_1(\lambda)$ не зависят от выбора резольвенты $\boldsymbol{R}_\lambda$, определяющего функцию $\tau(\lambda)$. Так как ортогональные резольвенты получаются, когда $\tau(\lambda)$ есть вещественная константа, а остальные, когда $\tau(\lambda)$ пробегает некоторую совокупность голоморфных функций с неотрицательной мнимой частью, то точка $w = (\boldsymbol{R}_\lambda f,\ f)$ принадлежит некоторой круговой области. Граница этой области — окружность $C(f;\lambda)$ — пробегается точкой w, когда $\boldsymbol{R}_\lambda$ есть ортогональная резольвента. Иначе говоря, окружность $C(f;\lambda)$ описывается точкой

$$w=\frac{p_0(\lambda)+p_1(\lambda)\tau}{Q_1(\lambda)+\tau},$$

когда τ пробегает вещественную ось.

Так как множество всех резольвент заданного оператора выпукло, то точка $w=(\boldsymbol{R}_\lambda f, f)$ пробегает круг $K(f;\lambda)$ с границей $C(f;\lambda)$, когда $\boldsymbol{R}_\lambda$ пробегает совокупность всех резольвент оператора A.

Предшествующими рассуждениями установлено, что *всякая резольвента $\boldsymbol{R}_\lambda$ симметрического оператора A с индексами дефекта* (1, 1) *представима в виде*

$$\boldsymbol{R}_\lambda=\mathring{R}_\lambda-\frac{(\cdot,\, g(\bar\lambda))\, g(\lambda)}{\tau(\lambda)+Q_1(\lambda)}, \tag{9}$$

где $\tau(\lambda)$ принадлежит классу N функций, определенных и голоморфных в полуплоскости $\Im\lambda>0$ и имеющих в этой полуплоскости неотрицательную мнимую часть.

Теперь докажем, что справедливо и обратное предложение, а именно: *всякая функция $\tau(\lambda)$ класса N порождает с помощью формулы* (9) *некоторую резольвенту оператора A.*

Итак, пусть $\tau(\lambda)\in N$ и пусть S_λ — оператор, определяемый равенством

$$S_\lambda=\mathring{R}_\lambda-\frac{(\cdot,\, g(\bar\lambda))\, g(\lambda)}{\tau(\lambda)+Q_1(\lambda)}. \tag{9'}$$

Так как окружность $C(f;\lambda)$ лежит в верхней полуплоскости, а точка $(S_\lambda f, f)$ лежит в круге $K(f;\lambda)$, то скалярное произведение $(S_\lambda f, f)$, являясь в полуплоскости $\Im\lambda>0$ голоморфной функцией, очевидно, принадлежит классу N.

Так как, далее, для ортогональных резольвент R_λ скалярное произведение $(R_\lambda f, f)$ удовлетворяет неравенству

$$|(R_\lambda f, f)|\leqslant\frac{(f, f)}{\Im\lambda}\qquad(\Im\lambda>0),$$

то для скалярного произведения $(S_\lambda f, f)$, лежащего в круге $K(f;\lambda)$, также будет иметь место неравенство

$$|(S_\lambda f, f)|\leqslant\frac{(f, f)}{\Im\lambda}.$$

Пользуясь этим неравенством и повторяя рассуждения n° 74, мы придем к представлению скалярного произведения $(S_\lambda f, f)$ в виде

$$(S_\lambda f, f)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega(t;f)}{t-\lambda}, \tag{10}$$

где $\omega(t;f)=\omega(t)$ — неубывающая непрерывная слева функция, стремящаяся к нулю при $t\to-\infty$ и удовлетворяющая условию

$$\omega(t;f)\leqslant(f,f)\qquad(-\infty<t\leqslant\infty).$$

Из формулы (10), повторяя выкладки n° 74, мы придем к представлению оператора S_λ в виде

$$(S_\lambda f,g)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d(F_tf,g)}{t-\lambda},\tag{10'}$$

где F_t — неубывающая непрерывная слева операторная функция, стремящаяся к нулю при $t\to-\infty$ и удовлетворяющая условию

$$(F_tf,f)\leqslant(f,f)\qquad(-\infty<t\leqslant\infty).\tag{11}$$

Но теперь, в отличие от n° 74, операторная функция S_λ уже не удовлетворяет функциональному уравнению Гильберта и, следовательно, нельзя вывести для F_t свойство ортогональности

$$F_uF_v=F_s\qquad(s=\min\{u,v\}).\tag{12}$$

Вместе с этим отпадает и опиравшееся на последнее соотношение доказательство свойства

$$\lim_{t\to\infty}F_tf=f\qquad(f\in\mathrm{H}),\tag{13}$$

приведенное в конце n° 74.

Чтобы показать, что операторная функция F_t является обобщенным разложением единицы, нам надлежит, обойдя соотношение (12), доказать свойство (13).

Так как, согласно теореме о монотонно возрастающей последовательности операторов (n° 33), предел в левой части равенства (13) существует, то достаточно установить, что при $t\to\infty$ оператор F_t стремится к I слабо, т. е. что при любых f и g из H

$$\lim_{t\to\infty}(F_tf,g)=(f,g).$$

Это соотношение, очевидно, будет выполняться, если для любого $f\in\mathrm{H}$ будет

$$\lim_{t\to\infty}(F_tf,f)=(f,f).\tag{14}$$

Но в силу (11) норма операторной функции F_t ограничена ($\|F_t\|\leqslant1$) и поэтому достаточно проверить равенство (14) для некоторого плотного в H множества векторов. В качестве такого множества мы примем область определения D_A оператора A.

В силу (10′) подлежащее доказательству равенство (14) эквивалентно равенству

$$\lim_{\eta\to\infty} i\eta(S_{i\eta}f, f) = -(f, f). \tag{15}$$

Так как точка $(S_{i\eta}f, f)$ принадлежит кругу $K(f; i\eta)$, то, очевидно,

$$|i\eta(S_{i\eta}f, f) + (f, f)| \leqslant \max_{-\infty<\tau\leqslant\infty} |i\eta(R^{\tau}_{i\eta}f, f) + (f, f)|,$$

где через R^{τ}_{λ} обозначена резольвента I рода, отвечающая параметру τ, и нам остается установить, что при $\eta\to\infty$ величина

$$|i\eta(R^{\tau}_{i\eta}f, f) + (f, f)|$$

стремится к нулю равномерно относительно τ $(-\infty<\tau\leqslant\infty)$. Последнее обстоятельство действительно имеет место, ибо при $f\in D_A$ и $\eta>0$

$$|i\eta(R^{\tau}_{i\eta}f, f) + (f, f)| =$$

$$= \left|\int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\eta}{t-i\eta}\, d(E^{\tau}_t f, f) + \int_{-\infty}^{\infty} d(E^{\tau}_t f, f)\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{t-i\eta}\, d(E^{\tau}_t f, f)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} t^2\, d(E^{\tau}_t f, f)}\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|t-i\eta|^2}\, d(E^{\tau}_t f, f)} \leqslant \frac{1}{\eta}\|Af\|\cdot\|f\|.$$

Таким образом, соотношение (13) доказано, так что операторная функция F_t действительно является обобщенным разложением единицы и, согласно теореме М. А. Наймарка, допускает представление

$$F_t = P^+E^+_t.$$

Введем в рассмотрение самосопряженный оператор

$$A^+f = \int_{-\infty}^{\infty} t\, dE^+_t f.$$

Очевидно,

$$S_\lambda = P^+R^+_\lambda,$$

где R^+_λ — резольвента оператора A^+, и для завершения доказательства теоремы остается показать, что оператор A^+ является расширением оператора A:

$$A^+ \supset A,$$

или что

$$R^+_\lambda f = R_\lambda f$$

при $f\in\mathfrak{M}_\lambda$.

Из формулы (9′) следует, что при $f \in \mathfrak{M}_\lambda$

$$P^+ R^+_\lambda f = S_\lambda f = \overset{\circ}{R}_\lambda f,$$

откуда

$$R^+_\lambda f = \boldsymbol{R}_\lambda f + h,$$

где $h \perp$ H. Покажем, что $h = 0$. Имеем при $f \in \mathfrak{M}_\lambda$

$$A\boldsymbol{R}_\lambda f = f + \lambda \boldsymbol{R}_\lambda f,$$

$$A^+ (\boldsymbol{R}_\lambda f + h) = f + \lambda \boldsymbol{R}_\lambda f + \lambda h,$$

откуда, полагая $g = \boldsymbol{R}_\lambda f$, получим

$$(A^+ (g + h),\ g + h) = (Ag + \lambda h,\ g + h) = (Ag,\ g) + \lambda (h,\ h),$$

что возможно лишь при $h = 0$, ибо $\mathfrak{J}\lambda \neq 0$.

Теорема доказана полностью.

114. Квазисамосопряженные расширения и характеристическая функция симметрического оператора. В настоящем пункте мы рассмотрим еще один вид расширений симметрических операторов с конечными и равными дефектными числами, введенный М. С. Лившицем *).

Квазисамосопряженным расширением симметрического оператора A с индексами дефекта $(m,\ m)$ $(m < \infty)$ мы будем называть любой линейный оператор B, который удовлетворяет условиям

$$A \subset B \subset A^*, \tag{1}$$

$$\dim \mathrm{D}_B = m \pmod{\mathrm{D}_A}, \tag{2}$$

но не является самосопряженным расширением оператора A.

Для простоты изложения мы ограничимся случаем операторов с индексами дефекта (1, 1). В этом случае условие (2) является следствием условия (1) и может быть опущено.

Мы будем предполагать, что оператор A прост (n° 103).

Приведем пример квазисамосопряженного расширения симметрического оператора. Пусть $\mathcal{P}$ есть оператор дифференцирования в пространстве $\mathrm{L}^2(0, a)$ при краевых условиях

$$\varphi(0) = \varphi(a) = 0.$$

В главе IV мы установили, что область определения любого самосопряженного расширения $\mathcal{P}_\theta$ оператора $\mathcal{P}$ задается краевым условием

$$\varphi(a) = \theta\ \varphi(0) \qquad (|\theta| = 1) \tag{3}$$

*) М. С. Лившиц, Об одном классе линейных операторов в гильбертовом пространстве, Матем. сб., т. 19 (61): 2 (1946), стр. 239—260; М. С. Лившиц, К теории изометрических операторов с равными дефектными числами, ДАН СССР, т. LVIII, № 1, (1947), стр. 13—15.

и, обратно, каждое такое условие при $|\theta| = 1$ задает область определения некоторого самосопряженного расширения оператора $\mathcal{P}$.

Если теперь взять в равенстве (3) вместо θ любое комплексное число ϱ, не равное по модулю единице, то оператор $\mathcal{P}_\varrho$ ($\mathcal{P}_\varrho \subset \mathcal{P}^*$), определенный на функциях $\varphi(t)$, удовлетворяющих условию

$$\varphi(a) = \varrho\, \varphi(0) \qquad (|\varrho| \neq 1), \tag{4}$$

будет квазисамосопряженным расширением оператора $\mathcal{P}$. Очевидно, каждое квазисамосопряженное расширение оператора $\mathcal{P}$ задается условием (4) (одно из них — при $\varrho = \infty$).

Для квазисамосопряженных расширений B оператора A можно ввести преобразование Кэли S, определяемое на многообразии

$$D_S = \Delta_B(\bar{\lambda})$$

формулами

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= (B - \bar{\lambda} I) f, \quad &(5)\\ S\varphi &= (B - \lambda I) f \quad &(6)\end{aligned}\right\} \quad (f \in D_B,\ \Im\lambda \neq 0).$$

Это определение теряет смысл лишь тогда, когда вектор f определяется вектором φ не однозначно, т. е. когда λ есть собственное значение оператора B. Но если λ есть собственное значение оператора B, то $\bar{\lambda}$ таковым не является, ибо в противном случае имели бы место включения

$$g_\lambda \in D_B, \qquad g_{\bar{\lambda}} \in D_B,$$

а вместе с ними равенство

$$B = A^*,$$

противоречащее условию (1).

Мы можем поэтому считать, что в формуле (5) λ не есть собственное значение оператора B. Приняв для определенности $\lambda = i$, запишем формулы (5) и (6) в виде

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= (B + iI) f, \quad &(5')\\ S\varphi &= (B - iI) f \quad &(6')\end{aligned}\right\} \quad (f \in D_B).$$

Очевидно, оператор S определен во всем пространстве и является расширением преобразования Кэли V оператора A. Однако теперь, в отличие от случая самосопряженных расширений, оператор S уже не будет унитарным.

Покажем, что ортогональное дополнение многообразия

$$D_V = \mathfrak{M}_{-i} = \Delta_A(-i)$$

переводится оператором S либо в ортогональное дополнение многообразия

$$\Delta_V = \mathfrak{M}_i = \Delta_A(i),$$

либо в нулевое подпространство.

Действительно, если

$$g \perp \mathfrak{M}_{-i},$$

то, полагая в соответствии с (5')

$$g = (B + iI)\, h \qquad (h \in D_B),$$

имеем при любом $f \in D_A$

$$((B + iI)\, h,\ (A + iI)\, f) = 0.$$

С другой стороны, при любом $f \in D_A$, используя включение $B \subset A^*$, получаем

$$\begin{aligned}(Sg, (A - iI)\, f) &= ((B - iI)\, h,\ (A - iI)\, f) = \\ &= (Bh,\ Af) - i\,(h,\ Af) + i\,(Bh,\ f) + (h,\ f) = \\ &= (Bh,\ Af) - i\,(Bh,\ f) + i\,(h,\ Af) + (h,\ f) = \\ &= ((B + iI)\, h,\ (A + iI)\, f) = 0,\end{aligned}$$

так что $Sg \perp \mathfrak{M}_i$ (в частности, может быть $Sg = 0$).

Если g^* означает вектор, ортогональный к многообразию $\mathfrak{M}_i$ и такой, что $\|g^*\| = \|g\|$, то на основании доказанного

$$Sg = \varkappa g^*. \tag{7}$$

При этом число $\varkappa$ не равно по модулю единице, ибо в противном случае оператор B, который, очевидно, выражается через S с помощью формул

$$f = \frac{1}{2i}(I - S)\,\varphi, \tag{8}$$

$$(\varphi \in H),$$

$$Bf = \frac{1}{2}(I + S)\,\varphi \tag{9}$$

был бы самосопряженным.

Оператор $S \equiv S_\varkappa$ называется *квазиунитарным расширением* изометрического оператора V. Легко проверить, что при $\varkappa \neq 0$

$$S_\varkappa^* = S_\eta^{-1},$$

где

$$\eta = \bar{\varkappa}^{-1}.$$

Вообще, *квазиунитарным расширением* заданного изометрического оператора V с индексами дефекта $(m,\ m)$ $(m < \infty)$ называется любой линейный (но не унитарный) оператор $S \supset V$, определенный во всем пространстве и переводящий ортогональное дополнение многообразия D_V в некоторое подпространство $F \subseteq H \ominus \Delta_V$.

Очевидно, каждое квазиунитарное расширение S оператора V порождает по формулам (8) и (9) некоторое квазисамосопряженное расширение B оператора A.

Для случая индексов дефекта (1, 1) существует взаимно однозначное соответствие между совокупностью всех квазисамосопряженных расширений B оператора A (соответственно квазиунитарных расширений S оператора V) и множеством всех комплексных чисел $\varkappa$, не равных единице по модулю. Отмечая это соответствие, мы будем обозначать рассматриваемые расширения $B_\varkappa$ (соответственно $S_\varkappa$).

Перейдем теперь к изучению спектра квазисамосопряженного расширения B оператора A с индексами дефекта (1, 1).

Напомним, что согласно общему определению n°48 число λ называется регулярной точкой линейного оператора T, если оператор $(T - \lambda I)^{-1}$ существует, ограничен и определен во всем пространстве H. Спектром оператора T называется дополнение множества его регулярных точек.

Теорема 1. *Спектр любого квазисамосопряженного расширения B простого оператора A с индексами дефекта* (1, 1) *состоит из ядра спектра* (см. n° 105) *оператора A и собственных значений. Множество собственных значений целиком лежит либо в верхней полуплоскости, либо в нижней. Если оставить в стороне один исключительный случай* *), *когда вся полуплоскость* (*верхняя или нижняя*) *состоит из собственных значений, множество собственных значений может иметь лишь вещественные предельные точки.*

Доказательство. Обозначим ядро спектра оператора A через Λ. При любом $\lambda \in \Lambda$ оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ неограничен и поэтому не может быть ограниченным оператор $(B - \lambda I)^{-1}$. Следовательно, Λ входит в спектр оператора B.

Положим теперь, что $\lambda \overline{\in} \Lambda$. Если оператор $(B - \lambda I)^{-1}$ не существует, то λ есть собственное значение оператора B.

Если же оператор $(B - \lambda I)^{-1}$ существует, то λ есть регулярная точка оператора B.

Действительно, оператор $(B - \lambda I)^{-1}$ не может быть неограниченным, так как ограничен оператор $(A - \lambda I)^{-1}$, а $\Delta_B(\lambda)$ отличается от $\Delta_A(\lambda)$ не более чем на одно измерение. Остается показать, что $\Delta_B(\lambda) = \mathrm{H}$. Допуская противное, найдем, что $\Delta_B(\lambda) = \Delta_A(\lambda)$. Если теперь взять вектор f из D_B, который не принадлежит D_A, то вектор

$$(B - \lambda I) f = f^*,$$

принадлежащий $\Delta_B(\lambda) = \Delta_A(\lambda)$, представим в виде

$$f^* = (A - \lambda I) f' = (B - \lambda I) f' \qquad (f' \in \mathrm{D}_A).$$

Следовательно,

$$(B - \lambda I)(f - f') = 0,$$

*) В дальнейшем этот случай будет охарактеризован (см. следствие теоремы 3).

что противоречит существованию оператора $(B - \lambda I)^{-1}$, а значит, регулярность точки λ доказана.

Таким образом, спектр оператора B состоит из ядра спектра Λ оператора A и собственных значений.

Введя преобразование Кэли $S_\varkappa$ оператора $B = B_\varkappa$, мы без труда замечаем, что точка λ пробегает спектр оператора B, когда точка

$$\zeta = \frac{\lambda - i}{\lambda + i} \tag{10}$$

пробегает спектр оператора $S_\varkappa$, и наоборот, причем формула (10) устанавливает взаимно однозначное соответствие также между собственными значениями операторов B и $S_\varkappa$.

На основании сказанного достаточно найти расположение собственных значений оператора $S_\varkappa$.

Так как оператор A прост, то его преобразование Кэли V не имеет собственных значений, а потому, как легко видеть, при $|\varkappa| < 1$ модули собственных значений оператора $S_\varkappa$ меньше единицы, а при $|\varkappa| > 1$ они больше единицы, поэтому все собственные значения оператора B лежат в верхней полуплоскости (если $|\varkappa| < 1$) или в нижней полуплоскости (если $|\varkappa| > 1$).

Мы будем предполагать, что $|\varkappa| < 1$. Условимся всюду в дальнейшем обозначать через g вектор, ортогональный к многообразию $\mathfrak{M}_{-i}$ и равный по норме единице, через $\mathring{U}$ — некоторое унитарное расширение оператора V, через g^* — вектор, определенный равенством

$$g^* = \mathring{U} g,$$

и через $S_\varkappa$ — казиунитарное расширение оператора V, определенное равенством

$$S_\varkappa g = \varkappa g^*.$$

Представим отвечающий числу ζ собственный вектор оператора $S_\varkappa$ в виде $\varphi + \alpha g$ $(\varphi \in D_V)$. Таким образом,

$$S_\varkappa(\varphi + \alpha g) = \zeta(\varphi + \alpha g),$$

откуда

$$S_\varkappa \varphi + \alpha\varkappa g^* = \zeta\varphi + \alpha\zeta g,$$

или

$$\mathring{U}\varphi - \zeta\varphi = \alpha(\zeta g - \varkappa g^*),$$

и значит,

$$\frac{1}{\alpha}\varphi = \zeta(\mathring{U} - \zeta I)^{-1} g - \varkappa(\mathring{U} - \zeta I)^{-1} g^*. \tag{11}$$

Умножая скалярно обе части (11) на g, получаем уравнение, которому удовлетворяют собственные числа оператора $S_\varkappa$:

$$\zeta((\overset{\circ}{U}-\zeta I)^{-1}g,\ g)-\varkappa((\overset{\circ}{U}-\zeta I)^{-1}g^*,\ g)=0. \tag{12}$$

Обращая ход выкладок, получим, что каждый корень уравнения (12) есть собственное число оператора $S_\varkappa$.

Так как левая часть уравнения (12) есть регулярная функция при $|\zeta|\neq 1$, то утверждение теоремы относительно предельных точек дискретного спектра оператора B доказано, за исключением случая, когда левая часть равенства (12) обращается тождественно в нуль при $|\zeta|<1$.

В этом последнем случае любая точка ζ внутренности единичного круга есть собственное значение оператора $S_\varkappa$.

Покажем, что этот, упомянутый в формулировке теоремы, исключительный случай действительно может иметь место.

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\{e_k\}_{-\infty}^{\infty}$ и $\widetilde{U}$ — унитарный оператор, определенный формулами

$$\widetilde{U}e_k=e_{k-1}.$$

Пусть, далее, $\widetilde{V}\subset\widetilde{U}$ и $\mathrm{D}_{\widetilde{V}}\perp e_0$, а следовательно, $\Delta_{\widetilde{V}}\perp e_{-1}$.

Оператор $\widetilde{V}$ изометрический с индексами дефекта (1, 1).

Пусть теперь S_0 — квазиунитарное расширение оператора $\widetilde{V}$, определенное условием

$$S_0e_0=0.$$

Легко проверить, что при любом ζ из круга $|\ \zeta\ |<1$ вектор

$$\sum_{k=0}^{\infty}\zeta^k e_k$$

является собственным вектором оператора S_0, отвечающим числу ζ.

Ниже мы увидим, что этот исключительный случай является единственным в том смысле, что если некоторый простой симметрический оператор с индексами дефекта (1, 1) допускает квазисамосопряженное расширение с точечным спектром, заполняющим полуплоскость, то этот оператор изоморфен преобразованию Кэли оператора $\widetilde{V}$.

Займемся теперь преобразованием уравнения (12).

Если $\overset{\circ}{F}_t$ — разложение единицы оператора $\overset{\circ}{U}$, то

$$2\zeta((\overset{\circ}{U}-\zeta I)^{-1}g,\ g)=$$

$$=2\zeta\int_0^{2\pi}\frac{1}{e^{is}-\zeta}\,d(\overset{\circ}{F}_s g,\ g)=\int_0^{2\pi}\frac{e^{is}+\zeta}{e^{is}-\zeta}\,d(\overset{\circ}{F}_s g,\ g)-1, \tag{13}$$

$$2\,((\mathring{U}-\zeta I)^{-1}g^*,\,g)=2\,((\mathring{U}-\zeta I)^{-1}\mathring{U}g,\,g)=$$
$$=2\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{is}}{e^{is}-\zeta}\,d\,(\mathring{F}_s g,\,g)=\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{is}+\zeta}{e^{is}-\zeta}\,d\,(\mathring{F}_s g,\,g)+1. \tag{14}$$

Из последней формулы следует, в частности, что скалярное произведение $((\mathring{U}-\zeta I)^{-1}g^*,\,g)$ не обращается в нуль при $|\zeta|<1$ и, следовательно, уравнение (12) можно представить в виде

$$w(\zeta)-\varkappa=0,$$

где

$$w(\zeta)=\frac{\zeta\,((\mathring{U}-\zeta I)^{-1}g,\,g)}{((\mathring{U}-\zeta I)^{-1}g^*,\,g)}\qquad (g^*=\mathring{U}g). \tag{15}$$

На основании формул (13) и (14) функцию $w(\zeta)$ можно представить в виде

$$w(\zeta)=\frac{\Phi(\zeta)-1}{\Phi(\zeta)+1}, \tag{15a}$$

где

$$\Phi(\zeta)=\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{is}+\zeta}{e^{is}-\zeta}\,d\,(\mathring{F}_s g,\,g). \tag{15b}$$

Из этих представлений следует (n° 69), что функция $w(\zeta)$ регулярна в единичном круге, отображает его в свою часть и удовлетворяет условию нормировки $w(0)=0$.

Следуя М. С. Лившицу, мы будем называть функцию $w(\zeta)$ *характеристической функцией изометрического оператора* V, а функцию

$$\omega(\lambda)=w\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right) \tag{15c}$$

—*характеристической функцией симметрического оператора* A.

Функция $\omega(\lambda)$ регулярна в верхней полуплоскости, отображает ее в часть единичного круга и удовлетворяет условию нормировки $\omega(i)=0$.

Чтобы оправдать приведенное определение, следует показать, что функция $w(\zeta)$ в существенном определяется оператором V, хотя по виду (см. формулу (15)) она зависит от выбора унитарного расширения $\mathring{U}$.

С этой целью выразим в формуле (15) оператор $\mathring{U}$ через его преобразование Кэли:

$$\mathring{U}=(\mathring{A}-iI)(\mathring{A}+iI)^{-1}.$$

После элементарной выкладки получаем для характеристической функции $\omega(\lambda)$ формулу

$$\omega(\lambda)=\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\,\frac{(\{I+(\lambda-i)\mathring{R}_\lambda\}g,\,g^*)}{(\{I+(\lambda-i)\mathring{R}_\lambda\}g,\,g)}\,, \tag{16}$$

где $\mathring{R}_\lambda$ — резольвента оператора $\mathring{A}$.

В п° 106 было установлено (см. формулу (8)), что вектор

$$\{I+(\lambda-i)\mathring{R}_\lambda\}\,g$$

принадлежит дефектному подпространству $\mathfrak{N}_{\bar\lambda}$, а так как в рассматриваемом случае оно одномерно, то при ином выборе расширения $\mathring{A}$ этот вектор умножится на скаляр, что не окажет влияния на $\omega(\lambda)$. Что касается вектора g^*, то он при этом умножится на число, равное по модулю единице.

Таким образом, характеристическая функция симметрического (изометрического) оператора определяется этим оператором с точностью до произвольной мультипликативной постоянной, равной по модулю единице. Две характеристические функции, отличающиеся друг от друга таким множителем, мы не будем считать различными.

Теперь формулу (16) можно записать в виде

$$\omega(\lambda)=\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\,\frac{(g_\lambda,\,g^*)}{(g_\lambda,\,g)}\,, \tag{17}$$

где g_λ — произвольное решение уравнения

$$A^*h-\lambda h=0.$$

Вычислим, например, характеристическую функцию оператора дифференцирования $\mathcal{P}$ на интервале $[0,\,a]$ при краевом условии.

$$\varphi(0)=\varphi(a)=0.$$

Для этого случая

$$g=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e^{2a}-1}}\,e^t,\qquad g^*=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-e^{-2a}}}\,e^{-t},\qquad g_\lambda=e^{-i\lambda t}$$

и согласно формуле (17)

$$\omega(\lambda)=\frac{e^a-e^{-ia\lambda}}{1-e^ae^{-ia\lambda}}\,. \tag{18}$$

Кроме функций $w(\zeta)$ и $\omega(\lambda)$, мы введем функции

$$w(\zeta;\,\varkappa)=\frac{w(\zeta)-\varkappa}{\bar\varkappa w(\zeta)-1}\,,\qquad \omega(\lambda;\,\varkappa)=\frac{\omega(\lambda)-\varkappa}{\bar\varkappa\omega(\lambda)-1}$$

и будем их называть *характеристическими функциями* квазиунитарного расширения $S_\varkappa$ оператора V и соответственно квазисамосопряженного расширения $B_\varkappa$ оператора A.

Характеристические функции $w(\zeta; \varkappa)$ и $\omega(\lambda; \varkappa)$ нормированы условиями

$$w(0, \varkappa) = \varkappa, \qquad \omega(i; \varkappa) = \varkappa.$$

С помощью характеристической функции $\omega(\lambda)$ определяется также ядро спектра оператора A, как показывает следующая

Теорема 2. *Для того чтобы вещественное число λ_0 было точкой регулярного типа простого симметрического оператора A с индексами дефекта* (1, 1), *необходимо и достаточно одновременное выполнение двух следующих условий:*

1°. *функция $\omega(\lambda)$ регулярна в окрестности λ_0,*

2°. *функция $\omega(\lambda)$ по модулю равна единице в некотором интервале $\lambda_0 - \varepsilon < \lambda < \lambda_0 + \varepsilon$.*

Доказательство. Пусть λ_0 — точка регулярного типа оператора A и V — его преобразование Кэли.

Очевидно, существует самосопряженное расширение $\mathring{A} \supset A$, для которого точка λ_0 является регулярной, так как если два самосопряженных расширения $\mathring{A}_1$ и $\mathring{A}_2$ имеют общее собственное число λ_0, то

$$\mathring{A}_1 f_1 = \lambda_0 f_1, \qquad \mathring{A}_2 f_2 = \lambda_0 f_2 \qquad (f_1, f_2 \in D_A),$$

откуда

$$A^* f_1 = \lambda_0 f_1, \qquad A^* f_2 = \lambda_0 f_2$$

и, следовательно,

$$f_1 = \alpha f_2,$$

так что

$$D_{\mathring{A}_1} = D_{\mathring{A}_2},$$

т. е.

$$\mathring{A}_1 = \mathring{A}_2.$$

Если выбрать теперь в формуле (15) в качестве $\mathring{U}$ преобразование Кэли оператора $\mathring{A}$, то из формул (15a), (15b), (15c) будет вытекать, что функция $\omega(\lambda)$ обладает свойствами 1° и 2°.

Пусть, обратно, функция $\omega(\lambda)$ обладает свойствами 1° и 2°. Тогда, выбирая в формуле (15) расширение $\mathring{U}$ так, чтобы

$$w(\zeta_0) \neq 1 \qquad \left(\zeta_0 = \frac{\lambda_0 - i}{\lambda_0 + i}\right),$$

получим, что функция

$$\Phi(\zeta) = \frac{1 + w(\zeta)}{1 - w(\zeta)}$$

регулярна в окрестности точки $\zeta_0 = e^{is_0}$, а также, что на некоторой дуге единичного круга, содержащей точку ζ_0, имеет место равенство $\Re\Phi(\zeta) = 0$.

Из этого, после применения формулы обращения n° 69 к представлению (15b), следует, что s_0 есть точка постоянства функции $(\mathring{F}_s g, g)$, а так как вектор g является порождающим для оператора $\mathring{U}$ (см. n° 103), то ζ_0 — регулярная точка этого оператора (см. n° 83).

Таким образом, λ_0 есть регулярная точка оператора $\mathring{A}$ и, следовательно, не принадлежит ядру спектра оператора A.

Из доказанной теоремы 2 мы получаем следующее уточнение теоремы 1: *конечные предельные точки множества собственных значений любого квазисамосопряженного расширения $B_\varkappa$ заданного оператора A принадлежат (за исключением случая, упомянутого в теореме 1) ядру спектра оператора A.*

Если ζ_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$) — корни характеристической функции $w(\zeta; \varkappa)$ квазиунитарного расширения $S_\varkappa$ оператора V при $\varkappa \neq 0$, то $w(\zeta; \varkappa)$ можно представить в виде произведения Бляшке

$$w(\zeta; \varkappa) = e^{-G(\zeta)} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta_k - \zeta}{1 - \bar{\zeta}_k \zeta} \frac{|\zeta_k|}{\zeta_k},$$

где $G(\zeta)$ — регулярная при $|\zeta| < 1$ функция с неотрицательной вещественной частью.

Представляя функцию $G(\zeta)$ в виде (n° 69)

$$G(\zeta) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{is} + \zeta}{e^{is} - \zeta} d\varrho(s) + i\beta,$$

где $\varrho(s)$ — неубывающая функция ограниченного изменения, получаем

$$w(\zeta; \varkappa) = Ce^{\int_0^{2\pi} \frac{\zeta + e^{is}}{\zeta - e^{is}} d\varrho(s)} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \frac{\zeta}{\zeta_k}}{1 - \bar{\zeta}_k \zeta} |\zeta_k| \qquad (|C| = 1). \tag{19}$$

Из теорем 1 и 2 следует, что точечный спектр квазиунитарного расширения $S_\varkappa$ оператора V состоит из точек ζ_k, а остальная часть спектра состоит из точек роста функции $\varrho(s)$ и предельных точек множества корней ζ_k *).

*) Представление (19) послужило отправным пунктом для построения так называемых треугольных моделей некоторых классов несамосопряженных операторов (см. М. С. Лившиц, О спектральном разложении линейных несамосопряженных операторов. Матем. сб. 34 (76); 1 (1954), стр. 145—198. См. также обзорную статью М. С. Бродского и М. С. Лившица «Спектральный анализ несамосопряженных операторов и промежуточные системы», УМН, XIII, вып. 1 (79) (1958), стр. 3—85).

Если ядро спектра оператора A пусто, то собственные значения любого квазисамосопряженного расширения $B_\varkappa$ оператора A могут сгущаться лишь на бесконечности.

В частности, может случиться, что спектр некоторого квазисамосопряженного расширения оператора A есть пустое множество. Таким примером является квазисамосопряженное расширение оператора дифференцирования $\mathcal{F}$, определенное краевым условием

$$\varphi(0)=0.$$

Ниже (см. теорему 4) мы увидим, что этот исключительный случай является единственным, если не рассматривать изоморфные операторы как различные.

Докажем общую теорему, показывающую, что характеристическая функция определяет оператор с точностью до изоморфизма.

Теорема 3. *Для того чтобы простые симметрические (изометрические) операторы с индексами дефекта* (1, 1) *были унитарно эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы их характеристические функции совпадали.*

Доказательство. Приведем доказательство для изометрических операторов.

Пусть операторы V и $\widetilde{V}$, действующие соответственно в пространствах H и $\widetilde{\mathrm{H}}$, унитарно эквивалентны, т. е. пусть

$$\widetilde{V}=\mathfrak{U}V\mathfrak{U}^{-1},$$

где $\mathfrak{U}$ — изометрический оператор, отображающий H на $\widetilde{\mathrm{H}}$. Взяв некоторое унитарное расширение U оператора V, построим унитарное расширение $\widetilde{U}$ оператора $\widetilde{V}$ по формуле

$$\widetilde{U}=\mathfrak{U}U\mathfrak{U}^{-1}.$$

Выберем, далее, в H вектор g, ортогональный к многообразию D_V ($\|g\|=1$), и положим

$$\widetilde{g}=\mathfrak{U}g.$$

При таком выборе вектора $\widetilde{g}$ и оператора $\widetilde{U}$ из формул

$$w(\zeta)=\frac{\zeta((U-\zeta I)^{-1}g,\ g)_{\mathrm{H}}}{((U-\zeta I)^{-1}Ug,\ g)_{\mathrm{H}}}, \tag{20}$$

$$\widetilde{w}(\zeta)=\frac{\zeta((\widetilde{U}-\zeta\widetilde{I})^{-1}\widetilde{g},\ \widetilde{g})_{\widetilde{\mathrm{H}}}}{((\widetilde{U}-\zeta\widetilde{I})^{-1}\widetilde{U}\widetilde{g},\ \widetilde{g})_{\widetilde{\mathrm{H}}}}, \tag{21}$$

следует

$$\widetilde{w}(\zeta)=w(\zeta).$$

Пусть, обратно, характеристические функции $\tilde{w}(\zeta)$ и $w(\zeta)$ операторов $\tilde{V}$ и V, определяемые формулами (20) и (21), совпадают. Полагая

$$\tilde{\Phi}(\zeta)=\frac{1+\tilde{w}(\zeta)}{1-\tilde{w}(\zeta)}, \qquad \Phi(\zeta)=\frac{1+w(\zeta)}{1-w(\zeta)},$$

и применяя к представлениям функций $\tilde{\Phi}(\zeta)$ и $\Phi(\zeta)$ формулы обращения, получим

$$(\tilde{E}_t\tilde{g}, \tilde{g})_{\tilde{\mathrm{H}}}=(E_t g, g)_{\mathrm{H}}.$$

С другой стороны, из простоты операторов $\tilde{V}$ и V следует простота спектров их унитарных расширений $\tilde{U}$ и U; при этом дефектные векторы $\tilde{g}$ и g являются порождающими для $\tilde{U}$ и U (п° 103).

Таким образом, операторы $\tilde{U}$ и U приводятся к одной и той же канонической форме — к оператору умножения на e^{it} в пространстве L^2_σ с функцией распределения

$$\sigma(t)=(\tilde{E}_t\tilde{g}, \tilde{g})_{\tilde{\mathrm{H}}}=(E_t g, g)_{\mathrm{H}}$$

(п° 83) и поэтому изоморфны.

Из изоморфизма операторов $\tilde{U}$ и U непосредственно следует изоморфизм операторов $\tilde{V}$ и V.

Теорема доказана *).

Следствие. Любой простой симметрический оператор с индексами дефекта (1, 1), допускающий квазисамосопряженное расширение с точечным спектром, заполняющим всю полуплоскость, изоморфен преобразованию Кэли оператора $\tilde{V}$, определенного на стр. 422.

Действительно, характеристические функции таких операторов должны тождественно равняться нулю, так что все эти операторы изоморфны.

Приводимая ниже теорема дает любопытную абстрактную характеристику оператора дифференцирования на конечном интервале.

Теорема 4. *Любой простой симметрический оператор с индексами дефекта* (1, 1), *допускающий квазисамосопряженное расширение без спектра, изоморфен оператору дифференцирования на конечном интервале.*

Доказательство. Пусть A — оператор, обладающий свойством, указанным в формулировке теоремы, $B_\varkappa$ — его квазисамосопряженное расширение без спектра и $\omega(\lambda; \varkappa)$ — характеристическая функция оператора $B_\varkappa$.

---

*) В связи с дальнейшими обобщениями понятия характеристической функции и формулировкой в ее терминах условий унитарной эквивалентности, кроме работ, названных в подстрочном примечании на стр. 426, см. также А. В. Штраус, Характеристические функции линейных операторов, Изв. АН СССР, сер. матем. 24 (1960), стр. 43—74.

Пусть, далее, V — преобразование Кэли оператора A и $w(\zeta;\ \varkappa)$ — характеристическая функция преобразования Кэли $S_\varkappa$ оператора $B_\varkappa$.

Так как оператор $B_\varkappa$ не имеет собственных значений, то функция $w(\zeta;\ \varkappa)$, отображающая единичный круг в свою часть, не имеет нулей, а поэтому представима в виде

$$w(\zeta;\ \varkappa) = e^{-G(\zeta)},$$

где функция $G(\zeta)$ регулярна в единичном круге и имеет там неотрицательную вещественную часть.

Заменяя ζ на

$$\frac{\lambda - i}{\lambda + i},$$

получаем

$$\omega(\lambda;\ \varkappa) = e^{iH(\lambda)},$$

где $H(\lambda)$ — функция, регулярная в верхней полуплоскости и отображающая ее в свою часть.

На основании n° 69 функция $H(\lambda)$ представима в виде

$$H(\lambda) = \alpha + \mu\lambda + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+t\lambda}{t-\lambda}\, d\sigma(t),$$

где число α вещественно, $\mu \geqslant 0$, а $\sigma(t)$ — неубывающая функция ограниченного изменения.

Так как, далее, ядро спектра оператора A пусто, то функция $H(\lambda)$ регулярна и вещественна на вещественной оси. Поэтому в силу формулы обращения Стилтьеса (n° 69)

$$\sigma(t) = \text{const}$$

и

$$H(\lambda) = \alpha + \mu\lambda.$$

Таким образом, если отбросить постоянный множитель, равный по модулю единице, то

$$\omega(\lambda;\ \varkappa) = e^{i\mu\lambda},$$

откуда

$$\omega(\lambda) = \frac{\varkappa - \omega(\lambda;\ \varkappa)}{1 - \bar{\varkappa}\omega(\lambda;\ \varkappa)} = \frac{\varkappa - e^{i\mu\lambda}}{1 - \bar{\varkappa}e^{i\mu\lambda}},$$

а так как должно быть

$$\omega(i) = 0,$$

то

$$\omega(\lambda) = \frac{e^{\mu} - e^{-i\mu\lambda}}{1 - e^{\mu}e^{-i\mu\lambda}}.$$

Сравнивая полученную формулу с формулой (18), мы видим, что характеристическая функция оператора A совпадает с характеристической функцией оператора дифференцирования на интервале $[0, \mu]$ при нулевых условиях на концах.

Согласно теореме 3 оператор A унитарно эквивалентен оператору дифференцирования, что и требовалось доказать.

В связи с теоремой 3 возникает вопрос о существовании симметрического (изометрического) оператора с заданной характеристической функцией.

Для изометрических операторов этот вопрос решается в положительном смысле, а именно, имеет место

Теорема 5. *По любой заданной функции $w(\zeta)$, регулярной в единичном круге, отображающей его в свою часть и удовлетворяющей условию нормировки $w(0)=0$, можно построить изометрический оператор V, для которого $w(\zeta)$ является характеристической функцией.*

Доказательство. Введем функцию $\Phi(\zeta)$ равенством

$$w(\zeta)=\frac{\Phi(\zeta)-1}{\Phi(\zeta)+1}.$$

Согласно n° 69 функция $\Phi(\zeta)$ представима в виде

$$\Phi(\zeta)=\int_0^{2\pi}\frac{e^{is}+\zeta}{e^{is}-\zeta}\,d\sigma(s),$$

где $\sigma(s)$ — неубывающая функция с полным изменением, равным единице.

Построим пространство $L^2_\sigma(0, 2\pi)$ и в нем унитарный оператор умножения на e^{it}:

$$\mathring{U}f(t)=e^{it}f(t).$$

Пусть V — изометрический оператор, совпадающий с оператором $\mathring{U}$ на гиперплоскости D_V, ортогональной к функции $g(t)\equiv 1$.

Легко видеть, что оператор V и есть искомый.

Действительно, так как разложение единицы $\mathring{E}_t$ оператора $\mathring{U}$ определяется равенствами

$$\mathring{E}_tf(s)=\begin{cases} f(s) & (s\leqslant t),\\ 0 & (s>t),\end{cases}$$

то

$$((\mathring{U}-\zeta I)^{-1}g, g)=\int_0^{2\pi}\frac{d\sigma(s)}{e^{is}-\zeta},$$

$$((\mathring{U}-\zeta I)^{-1}\mathring{U}g, g)=\int_0^{2\pi}\frac{e^{is}\,d\sigma(s)}{e^{is}-\zeta},$$

и

$$\frac{\zeta((\mathring{U}-\zeta I)^{-1}g, g)}{((\mathring{U}-\zeta I)\mathring{U}g, g)}=\frac{\Phi(\zeta)-1}{\Phi(\zeta)+1}=w(\zeta),$$

что и доказывает (см. формулу (15)) теорему.

Если для оператора V, построенного по заданной характеристической функции $w(\zeta)$, многообразие $\Delta_V(1)$ не плотно в H, то нельзя перейти от V к его преобразованию Кэли A, так что в этом случае не существует симметрического оператора, характеристическая функция которого равна

$$\omega(\lambda)=w\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right). \tag{22}$$

Для того чтобы многообразие $\Delta_V(1)$ было плотно в H, на функцию (22) необходимо наложить дополнительное ограиичение.

Этот последний вопрос исчерпывает

Теорема 6. *Для того чтобы заданная функция $\omega(\lambda)$, регулярная в верхней полуплоскости, отображающая ее внутрь единичного круга и удовлетворяющая условию нормировки $w(i)=0$, была характеристической функцией простого симметрического оператора, необходимо и достаточно выполнение соотношения*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda\{\omega(\lambda)-e^{i\alpha}\}=\infty \qquad (0<\varepsilon\leqslant\arg\lambda\leqslant\pi-\varepsilon)$$

при любом α $(0\leqslant\alpha<2\pi)$ и любом $\varepsilon>0$.

Доказательство. Покажем, что необходимым и достаточным условием для несовпадения замыкания многообразия $\Delta_V(1)$ с H является иаличие уиитарного расширеиия оператора V с собственным числом, равным единице.

Достаточность условия очевидна, так как если U — унитарное расширение оператора V и $U\psi=\psi$ $(\psi\neq 0)$, то при любом $\varphi\in D_V$

$$((V-I)\varphi,\ \psi)=((U-I)\varphi,\ \psi)=(\varphi,\ (U^{-1}-I)\psi)=0.$$

Для доказательства необходимости условия предположим, что при любом $\varphi\in D_V$

$$((V-I)\varphi,\ \psi)=0 \qquad (\|\psi\|=1).$$

Представляя любой вектор $f\in$ H в виде $f=\varphi+\gamma g$, получаем для произвольного квазиуиитариого расширения $S_\varkappa$ оператора V

$$((S_\varkappa-I)f,\ \psi)=(V\varphi-\varphi+\gamma\varkappa g^*-\gamma g,\ \psi)=\gamma\{\varkappa(g^*,\ \psi)-(g,\ \psi)\}.$$

Заметим, что $(g^*,\psi)\neq 0$, ибо в противном случае вектор ψ допускал бы представление $\psi=V\varphi_1$ $(\varphi_1\in D_V,\ \|\varphi_1\|=1)$, так что

$$((V-I)\varphi_1,\ V\varphi_1)=0,$$

т. е.

$$(\varphi_1,\ V\varphi_1)=1.$$

Но это равенство возможно лишь при $V\varphi_1=\varphi_1$, что противоречит простоте оператора V.

Таким образом, $(g^*,\ \psi)\neq 0$, и мы вправе положить в (23)

$$\varkappa=\frac{(g,\ \psi)}{(g^*,\ \psi)},$$

после чего для любого $f\in$ H получаем

$$((S_\varkappa-I)f,\ \psi)=0$$

или

$$(f,\ (S_\varkappa^*-I)\psi)=0.$$

Так как $S^*_\varkappa = S^{-1}_\eta$, где $\eta = \overline{\varkappa}^{-1}$, то полученное равенство означает, что $S^{-1}_\eta\psi = \psi$, следовательно, $S_\eta\psi = \psi$ ($\psi \neq 0$), а это возможно лишь при $|\eta| = |\varkappa| = 1$, так что $S_\varkappa = S_\eta$ и есть искомое унитарное расширение оператора V, имеющее собственное значение, равное единице.

Теперь доказательство теоремы сведено к отысканию необходимых и достаточных условий, которым должна удовлетворять характеристическая функция изометрического оператора V, чтобы ни одно из его унитарных расширений не имело собственного значения, равного единице.

Пусть $\mathring{U}$ — унитарное расширение оператора V, фигурирующее в формуле (15), а $U^{(\alpha)}$ — произвольное унитарное расширение того же оператора, так что $U^{(\alpha)}g = e^{i\alpha}g^*$. Так как дефектный элемент g является порождающим для каждого из операторов $U^{(\alpha)}$, то отсутствие у операторов $U^{(\alpha)}$ $(0 \leqslant \alpha < 2\pi)$ собственного значения, равного единице, эквивалентно отсутствию скачка при $t = 0$ у функции распределения $(F^{(\alpha)}_t, g, g)$, где $F^{(\alpha)}_t$ — спектральная функция оператора $U^{(\alpha)}$ $(0 \leqslant \alpha < 2\pi)$.

С другой стороны, если $w_\alpha(\zeta)$ — характеристическая функция, построенная по формуле (15) с заменой $\mathring{U}$ на $U^{(\alpha)}$, то в силу формул (15c) и (17)

$$w_\alpha(\zeta) = e^{-i\alpha}w(\zeta),$$

а потому из (15a) и (15b) следует равенство

$$\frac{e^{i\alpha}}{e^{i\alpha} - w(\zeta)} = \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{e^{it} - \zeta}\, d(F^{(\alpha)}_t g, g).$$

Отсюда для величины σ скачка функции $(F^{(\alpha)}_t g, g)$ в точке $t = 0$ легко получить выражение

$$\sigma = \lim_{\zeta \to 1} \frac{(1-\zeta)\, e^{i\alpha}}{e^{i\alpha} - w(\zeta)},$$

где $\zeta \to 1$ изнутри круга $|\zeta| < 1$ по любому некасательному направлению.

Пользуясь сделанными указаниями, уже легко закончить доказательство теоремы, что предоставляется читателю.

115. О треугольном разложении некоторых несамосопряженных операторов. По аналогии с характеристической функцией квазисамосопряженного расширения симметрического оператора с индексами дефекта (1,1), М. С. Лившиц построил характеристические матрицы-функции для широкого класса несамосопряженных операторов. Характер ограничений, накладываемых на эти операторы, заключается в том, что они в известном смысле должны мало отличаться от самосопряженных операторов. Так, например, в случае определенного всюду в H, ограниченного оператора T требуется, чтобы его мнимая часть $\frac{1}{2i}(T - T^*)$ была вполне непрерывной. С помощью так называемой теоремы умножения для характеристических матриц-функций были получены (см. подстрочное примечание на стр. 426) первые треугольные разложения для несамосопряженных операторов в H. Эти разложения представляют собой бесконечномерный аналог алгебраической теоремы Шура о приведении конечной матрицы к треугольному виду с помощью унитарного преобразования. Для некоторых классов несамосопряженных операторов треугольное разложение может быть выведено непосредственно из теоремы Неймана (см. n° 65) о существовании нетривиального инвариантного подпространства у любого вполне непрерывного оператора. В настоящем пункте мы, следуя М. С. Бродскому *), проведем такой вывод для *вольтерровых операторов* т. е. для вполне непрерывных операторов с единственной точкой спектра $\lambda=0$. Этот вывод, фактически, использует лишь результаты гл. V и понятие разложения единицы (n° 67).

Начнем с конечномерного случая. Пусть T есть вольтерров оператор в евклидовом пространстве E. Тогда по теореме Шура существует такой ортонормированный базис $\{e_k\}_{k=1}^n$ пространства E, что

$$\left.\begin{aligned} &Te_1=0,\\ &Te_k=t_{k,1}e_1+t_{k,2}e_2+\ldots+t_{k,\,k-1}e_{k-1}\qquad (k>1). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Если P_k есть ортопроектор на одномерное подпространство, содержащее e_k, то

$$\begin{aligned} P_kTP_j&=0 \qquad (k\geqslant j),\\ P_kT^*P_j&=0 \qquad (k\leqslant j), \end{aligned}$$

так что

$$T=\sum_{j,\,k=1}^{n}P_kTP_j=\sum_{j=2}^{n}\sum_{1\leqslant k<j}P_kTP_j=2i\sum_{j=2}^{n}\sum_{1\leqslant k<j}P_k\frac{T-T^*}{2i}P_j. \tag{2}$$

Введем теперь множество $\mathcal{M}$, состоящее из $(n+1)$ точек $0=\mu_0<\mu_1<\ldots<\mu_n=1$, и зададим на $\mathcal{M}$ операторную функцию $E(\mu)$, полагая

$$E_0=0,\quad E(\mu_k)=P_1\oplus P_2\oplus\ldots\oplus P_k \qquad (k=1,\,2,\,\ldots,\,n).$$

Тогда равенство (2) можно представить в виде

$$T=2i\int\limits_{\mathcal{M}}E(\mu)\,K\,dE(\mu), \tag{3}$$

где

$$K=\frac{1}{2i}(T-T^*). \tag{4}$$

*) М. С. Бродский, О треугольном представлении вполне непрерывных операторов с одной точкой спектра. УМН, т. XVI, вып. 1 (97) (1961), стр. 135—141.

Целью всего дальнейшего изложения является обобщение треугольного спектрального разложения (3) на произвольные вольтерровы операторы в сепарабельном гильбертовом пространстве H. При этом мы будем опираться на следующее определение интеграла от операторных функций. Пусть $\mathscr{M}$ есть произвольное замкнутое множество точек отрезка $[0, 1]$, содержащее его концы. Совокупность принадлежащих $\mathscr{M}$ чисел $0=\mu_0<\mu_1<\ldots<\mu_m=1$ назовем δ-разбиением множества $\mathscr{M}$, если точки μ_{k-1} и μ_k ($k = 1, 2, \ldots, m$) либо являются концами дополнительного для $\mathscr{M}$ интервала, либо удовлетворяют условию $\mu_k-\mu_{k-1}<\delta$. Если на $\mathscr{M}$ заданы оператор-функции $F(\mu)$ и $G(\mu)$, то под интегралом

$$\int\limits_{\mathscr{M}} F(\mu)\,dG(\mu)$$

будем понимать предел при $\delta\to 0$ интегральных сумм

$$\sum_{k=1}^{m} F(\xi_k)\{G(\mu_k)-G(\mu_{k-1})\},$$

$$(\mu_{k-1}\leqslant\xi_k\leqslant\mu_k,\quad \xi_k\in\mathscr{M})$$

в смысле операторной нормы, если этот предел существует.

Теперь мы несколько специализируем понятие ортогонального разложения единицы $E(\mu)$, относя его не ко всему отрезку $[0, 1]$, а лишь к множеству $\mathscr{M}$. Таким образом, мы будем считать функцию $E(\mu)$ определенной лишь на $\mathscr{M}$, так что $E(\mu')<E(\mu'')$ при $\mu'<\mu''$ ($\mu', \mu''\in\mathscr{M}$), $E(0)=0$, $E(1)=I$. Кроме того, будем предполагать функцию $E(\mu)$ непрерывной на $\mathscr{M}$ и еще удовлетворяющей следующему *условию* A: если (α, β) есть дополнительный интервал множества $\mathscr{M}$, то $E(\beta)-E(\alpha)$ есть одномерный оператор. Если оператор-функция $E(\mu)$, обладающая всеми указанными свойствами, такова, что при любом $\mu\in\mathscr{M}$ подпространство $E(\mu)\,H$ инвариантно относительно вольтеррова оператора T, то мы будем называть $E(\mu)$ *спектральной функцией* этого оператора. Следует обратить внимание на то, что здесь μ не является спектральной переменной, как это было в случае ортогональных спектральных функций самосопряженных операторов. Спектр вольтеррова оператора состоит из одной лишь нулевой точки, а переменная μ играет роль, аналогичную роли индекса k в формулах (1).

Покажем, что *любой вольтерров оператор T в H обладает спектральной функцией.*

Будем называть некоторую совокупность $\mathfrak{G}$ инвариантных подпространств G оператора T *цепочкой*, если выполнены следующие условия: 1) если $G_1\in\mathfrak{G}$ и $G_2\in\mathfrak{G}$, то либо $G_1\subset G_2$, либо $G_2\subset G_1$, 2) нулевое подпространство и все H принадлежат $\mathfrak{G}$.

Множество всех цепочек $\Gamma\{T\}$, принадлежащих оператору T, можно частично упорядочить, если считать $\mathfrak{G}' \prec \mathfrak{G}''$, когда каждое инвариантное подпространство G из $\mathfrak{G}'$ принадлежит также $\mathfrak{G}''$. Цепочку $\mathfrak{G}$ назовем *максимальной*, если она следует за любой сравнимой с ней цепочкой из $\Gamma\{T\}$. Если γ есть некоторая монотонно возрастающая последовательность цепочек из $\Gamma\{T\}$, то теоретико-множественная сумма всех инвариантных подпространств из этих цепочек является, очевидно, максимальной относительно совокупности γ и также принадлежит $\Gamma\{T\}$. В силу известной леммы Цорна каждая цепочка из $\Gamma\{T\}$ содержится в некоторой максимальной цепочке, принадлежащей $\Gamma\{T\}$.

Пусть теперь $\mathfrak{G}$ есть некоторая максимальная цепочка из $\Gamma\{T\}$ и $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ — какой-нибудь ортонормированный базис пространства H. Назовем *весом* любого подпространства $\mathrm{F} \subset \mathrm{H}$ число

$$\mu=\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \| P g_k \|^2, \tag{5}$$

где P есть ортопроектор на F. Очевидно, различные подпространства из H, принадлежащие одной и той же цепочке, не могут иметь одинаковый вес. Обозначим через $\mathscr{M}$ совокупность весов всех подпространств некоторой максимальной цепочки $\mathfrak{G}$, а через $E(\mu)$ — ортопроектор на подпространство из $\mathfrak{G}$, вес которого равен μ. Легко проверить, что множество $\mathscr{M}$ замкнуто, а оператор-функция $E(\mu)$ обладает всеми свойствами спектральной функции оператора T за исключением, быть может, свойства A. Проверка этого последнего свойства основана на теореме Неймана из n° 65.

Предположим, что условие A не выполняется. Это означает, что для некоторого дополнительного интервала (α, β) множества $\mathscr{M}$ будет $\dim\{\mathrm{G}_\beta \ominus \mathrm{G}_\alpha\} > 1$, где G_α и G_β — подпространства, на которые проектируют $E(\alpha)$ и $E(\beta)$. В силу теоремы 1 n° 65 оператор PTP, где $P = E(\beta) - E(\alpha)$, имеет в $\mathrm{G}_\beta \ominus \mathrm{G}_\alpha$ инвариантное подпространство F ($\mathrm{F} \neq \{0\}$, $\mathrm{F} \neq \mathrm{G}_\beta \ominus \mathrm{G}_\alpha$). Но тогда подпространство $\mathrm{G}_\alpha \oplus \mathrm{F}$ инвариантно относительно T и заключено строго между G_α и G_β, что противоречит максимальности цепочки $\mathfrak{G}$. Итак, $E(\mu)$ является спектральной функцией оператора T.

Максимальную цепочку $\mathfrak{G} \in \Gamma\{T\}$, для которой по формуле (5) введены веса входящих в ее состав подпространств, построено множество $\mathscr{M}$ и определена спектральная функция $E(\mu)$ $(\mu \in \mathscr{M})$, назовем *нормированной максимальной цепочкой*.

Л е м м а. *Для любого дополнительного интервала* (α, β) *множества* $\mathscr{M}$, *построенного для нормированной максимальной цепочки* $\mathfrak{G} \in \Gamma\{T\}$,

$$[E(\beta)-E(\alpha)]\, T\, [E(\beta)-E(\alpha)]=0. \tag{6}$$

Доказательство. Подпространство $\mathfrak{G}_\alpha$ инвариантно относительно части T_β оператора T в $\mathfrak{G}_\beta$. Поэтому одномерное подпространство $\mathfrak{G}_\beta \ominus \mathfrak{G}_\alpha$ инвариантно относительно оператора T^*_β. Но так как вместе с T вольтерровым является оператор T_β, а следовательно, и T^*_β, то $\mathfrak{G}_\beta \ominus \mathfrak{G}_\alpha$ есть нулевое подпространство оператора T^*_β. Поэтому многообразие Δ_{T_β} значений оператора T_β ортогонально к $\mathfrak{G}_\beta \ominus \mathfrak{G}_\alpha$, откуда и вытекает соотношение (6).

Теперь мы можем перейти к теореме М. С. Бродского, являющейся конечной целью этого пункта.

Теорема. *Любой вполне непрерывный вольтерров оператор T допускает треугольное представление*

$$T = 2i \int_{\mathcal{M}} E(\mu) K\, dE(\mu), \tag{7}$$

где K — его мнимая часть (4), *а $E(\mu)$ — его произвольная спектральная функция. Интегральные суммы интеграла* (7) *сходятся к оператору T равномерно.*

Доказательство. Пусть $0 = \mu_0 < \mu_1 < \ldots < \mu_m = 1$ есть некоторое δ-разбиение множества μ. Вводя обозначение $\Delta E(\mu_k) = E(\mu_k) - E(\mu_{k-1})$ и замечая, что $\Delta E(\mu_k) T \Delta E(\mu_j) = 0$ при $k > j$, получаем

$$T = \sum_{j,\,k=1}^{m} \Delta E(\mu_k) T \Delta E(\mu_j) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{1 \leqslant k \leqslant j} \Delta E(\mu_k) T \Delta E(\mu_j) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \Delta E(\mu_k) T \Delta E(\mu_k) + 2i \sum_{j=2}^{m} \sum_{1 \leqslant k < j} \Delta E(\mu_k) K \Delta E(\mu_j) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \Delta E(\mu_k) T \Delta E(\mu_k) + 2i \sum_{j=1}^{m} E(\mu_{j-1}) K \Delta E(\mu_j).$$

Поэтому, если $\mu_{j-1} \leqslant \xi_j \leqslant \mu_j$, то

$$\Big\| T - 2i \sum_{j=1}^{m} E(\xi_j) K \Delta E(\mu_j) \Big\| \leqslant$$

$$\leqslant \Big\| T - 2i \sum_{j=1}^{m} E(\mu_{j-1}) K \Delta E(\mu_j) \Big\| + 2 \Big\| \sum_{j=1}^{m} E(\mu_{j-1}) K \Delta E(\mu_j) -$$

$$- \sum_{j=1}^{m} E(\xi_j) K \Delta E(\mu_j) \Big\| \leqslant$$

$$\leqslant \Big\| \sum_{k=1}^{m} \Delta E(\mu_k) T \Delta E(\mu_k) \Big\| + 2 \Big\| \sum_{j=1}^{m} \Delta E(\mu_j) K \Delta E(\mu_j) \Big\| \leqslant$$

$$\leqslant 3 \Big\| \sum_{k=1}^{m} \Delta E(\mu_k) T \Delta E(\mu_k) \Big\|.$$

Теперь остается доказать, что при $\delta \to 0$ стремится к нулю норма оператора

$$S_\delta = \sum_{k=1}^{m} \Delta E(\mu_k) T \Delta E(\mu_k). \tag{8}$$

Рассмотрим отдельно операторы $\frac{1}{2i}(S_\delta - S_\delta^*)$ и $\frac{1}{2}(S_\delta + S_\delta^*)$. Пусть $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ есть ортонормированный базис собственных векторов оператора K в его области значений, а $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ — соответствующая последовательность собственных значений. Тогда для любого $f \in H$

$$\left|\left(\frac{1}{2i}[S_\delta - S_\delta^*] f, f\right)\right| = \left|\sum_{k=1}^{m} (\Delta E(\mu_k) K \Delta E(\mu_k) f, f)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{\infty} |(\Delta E(\mu_k) f, e_j)|^2 \cdot |\lambda_j| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \| \Delta E(\mu_k) f \|^2 \| \Delta E(\mu_k) e_j \|^2 \cdot |\lambda_j| +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=n+1}^{\infty} |(\Delta E(\mu_k) f, e_j)|^2 \cdot |\lambda_j| \leqslant$$

$$\leqslant \| f \|^2 \left\{ \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| \max_{\substack{1 \leqslant k \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \| \Delta E(\mu_k) e_j \|^2 + \max_{j > n} |\lambda_j| \right\}.$$

Здесь второе слагаемое в фигурных скобках можно сделать сколь угодно малым за счет выбора n. В первом же слагаемом следует учитывать лишь те значения индекса k, для которых $\mu_k - \mu_{k-1} < \delta$, так как для остальных значений k соответствующее слагаемое в (8) выпадает в силу (6). Поэтому, используя равномерную непрерывность функций $E(\mu) e_j$ на замкнутом множестве $\mathcal{M}$, можно и первое слагаемое в фигурных скобках также сделать сколь угодно малым, если при фиксированном n уменьшать δ. Таким образом, $\lim\limits_{\delta \to 0} \| S_\delta - S_\delta^* \| = 0$ и, совершенно аналогично, $\lim\limits_{\delta \to 0} \| S_\delta + S_\delta^* \| = 0$. Тем самым теорема доказана полностью.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

116. Определения и вспомогательные факты. Среди линейных интегральных операторов простейшими являются операторы Гильберта — Шмидта (см. n° 32). Ядра $K(s, t)$ этих операторов характеризуются неравенством

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int |K(s, t)|^2 \, ds\, dt < \infty.$$

В классических работах Гильберта *) изучен также более общий случай, когда для любой функции $f(t) \in L^2(-\infty, \infty)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} ds \left| \int_{-\infty}^{\infty} K(s, t) f(t)\, dt \right|^2 \leqslant M^2 \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt,$$

где M — некоторая константа. В этом случае ядро $K(s, t)$ порождает ограниченный интегральный оператор.

Еще более общим является тот случай, когда предполагается лишь, что для почти всех $s \in (-\infty, \infty)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K(s, t)|^2 \, dt < \infty.$$

Изучение интегральных операторов с симметрическими ядрами, удовлетворяющими этому условию, является предметом настоящего добавления. Теория таких операторов, а также и операторов с ядрами более общего характера, принадлежит Карлеману **).

---

*) См. H i l b e r t, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Berlin, 1912.

**) Построение этой теории относится к 1920—1923 годам. Первое систематическое изложение дано в книге: T. C a r l e m a n, Sur les équations intégrales singulières, Uppsala, 1923. Несколько отличное от первоначального изложение дано в монографии: M. S t o n e, Linear Transformations in Hilbert Space, New-York, 1932.

В нашем изложении мы в основном следуем статье: Н. И. А х и е з е р, Интегральные операторы с ядрами Карлемана (УМН, т. II, вып. 5 (21) (1947)).

Во всем дальнейшем мы будем иметь дело с пространством L^2 функций на всей числовой оси, хотя теория остается в силе и для функций от многих переменных, а также в случае, когда вместо всего (одно- или многомерного) евклидова пространства взято принадлежащее ему произвольное измеримое в смысле Лебега точечное множество положительной меры.

Определение. *Ядром Карлемана* называется всякая измеримая (комплекснозначная) функция $K(s, t)$ $(-\infty < {}^s_t < \infty)$, для которой

a) почти всюду в плоскости s, t

$$\overline{K(s, t)} = K(t, s),$$

b) почти всюду на оси s

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K(s, t)|^2 dt < \infty.$$

Положим

$$K(s) = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |K(s, t)|^2 dt}, \tag{1}$$

если правая часть конечна, и

$$K(s) = 0$$

в противном случае.

Заметим прежде всего, что почти всюду

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K(t, s)|^2 dt = K^2(s). \tag{2}$$

Действительно, в силу условия a) имеем

$$\int\int_{-\infty}^{\infty} |K(s, t) - \overline{K(t, s)}|^2 ds\,dt = 0,$$

а отсюда, по теореме Фубини, следует, что при почти всех s

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K(s, t) - \overline{K(t, s)}|^2 dt = 0.$$

Но это означает, что при почти всех s

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K(t, s)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |K(s, t)|^2 dt = K^2(s),$$

и (2) доказано.

Теперь введем интегральный оператор, порождаемый ядром Карлемана. Если $f(t) \in L^2$, то для почти всех s существует

$$h(s) = \int_{-\infty}^{\infty} K(s, t) f(t)\, dt, \tag{3}$$

однако функция $h(s)$ может и не принадлежать L^2. Поэтому выделим прежде всего множество D^* всех тех функций $f(t) \in L^2$, для которых $h(s) \in L^2$. На этом множестве формула (3) определяет линейный оператор, который мы обозначим A^*. Всякий другой интегральный оператор в пространстве L^2 с ядром $K(s, t)$ будет частью оператора A^*.

Один такой оператор мы теперь определим. Предварительно условимся об одном обозначении, а именно: если $P(s)$ $(-\infty < s < \infty)$ — фиксированная, измеримая, вещественная, неотрицательная функция, то под $[L^2]_P$ мы будем понимать совокупность всех функций $\varphi(s) \in L^2(-\infty, \infty)$, для которых

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(s)\, |\varphi(s)|\, ds < \infty.$$

Условимся левую часть этого неравенства обозначать символом $\| \varphi \|_P$.

Докажем теперь, что $[L^2]_K \subseteq D^*$, где $K(s)$ определена формулой (1). В самом деле, пусть $f(t) \in [L^2]_K$, т. е. $f(t) \in L^2$, и

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(s)\, |f(s)|\, ds < \infty.$$

Мы должны доказать, что в таком случае

$$\int_{-\infty}^{\infty} ds \left| \int_{-\infty}^{\infty} K(s, t) f(t)\, dt \right|^2 < \infty.$$

Но это следует из теоремы Фубини, так как почти всюду

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K(s, u) \overline{K(s, v)} f(u) \overline{f(v)}|\, ds \leqslant$$

$$\leqslant |f(u)| \cdot |f(v)| \cdot \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |K(s, u)|^2 ds} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |K(s, v)|^2 ds} =$$

$$= K(u) K(v) |f(u)| \cdot |f(v)| \tag{4}$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int K(u)K(v)\,|f(u)|\cdot|f(v)|\,du\,dv=\left\{\int_{-\infty}^{\infty}K(u)\,|f(u)|\,du\right\}^2<\infty.$$

Теперь определим оператор A_0 с областью $D_{A_0}=[L^2]_K$, полагая

$$A_0f=A^*f \qquad (f\in D_{A_0}).$$

Отметим, что область D_{A_0} плотна в L^2. Это утверждение является следствием приводимой ниже леммы.

Отметим также, что в силу (4)

$$\|A_0f\|\leqslant\|f\|_K. \tag{5}$$

Л е м м а. *Пусть измеримая функция* $P(s)$ $(-\infty<s<\infty)$ *почти всюду конечна и* $\geqslant 0$, *а функция* $h(s)$ *измерима и такова, что*

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(s)\,h(s)\,ds=0$$

для любой функции $f(s)\in[L^2]_P$. *Тогда почти всюду*

$$h(s)=0. \tag{6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего заметим, что $h(s)$ может обращаться в бесконечность лишь на множестве меры нуль. Далее обозначим через $e(a)$ множество всех s, для которых

$$P(s)\leqslant a, \qquad |h(s)|\leqslant a,$$

и пусть e — произвольное подмножество множества $e(a)$, имеющее конечную меру. Его характеристическая функция $\chi_e(s)$, очевидно, принадлежит $[L^2]_P$. Поэтому

$$\int_e h(s)\,ds=\int_{-\infty}^{\infty}\chi_e(s)\,h(s)\,ds=0.$$

Так как e произвольно, то равенство (6) верно почти всюду в $e(a)$, а в силу произвольности a оно верно почти всюду на всей оси.

С л е д с т в и е. *Множество* $[L^2]_P$ *плотно в* L^2.

Т е о р е м а. *Оператор* A_0 *симметричен, а оператор* A^* *является для* A_0 *сопряженным оператором.*

Доказательство. Пусть $f(t) \in D_{A_0}$, $g(t) \in L^2$. В таком случае почти всюду

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K(s, t)| \cdot |f(t)\overline{g(s)}|\, ds \leqslant$$

$$\leqslant |f(t)| \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |K(s, t)|^2 ds} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |g(s)|^2 ds} = K(t) \cdot |f(t)| \cdot \|g\|.$$

Поэтому

$$\int\int_{-\infty}^{\infty} |K(s, t)| \cdot |f(t)\overline{g(s)}|\, ds\, dt \leqslant \|f\|_K \|g\|,$$

откуда следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} K(s, t) f(t)\, dt \right\} \overline{g(s)}\, ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\overline{K(t, s)}\, g(s)}\, ds. \tag{7}$$

Если предположить, что не только $f(t)$, но и $g(t) \in D_{A_0}$, то полученное соотношение запишется в виде

$$(A_0 f, g) = (f, A_0 g),$$

т. е. первое утверждение доказано.

Докажем второе утверждение. Заметим прежде всего, что при $f(t) \in D_{A_0}$ и $g(t) \in D^*$ соотношение (7) можно представить в виде

$$(A_0 f, g) = (f, g^*),$$

где

$$g^*(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t, s)\, g(s)\, ds$$

есть какой-то элемент пространства L^2. Отсюда следует, что $g(t) \in D_{A^*}$, и, значит, доказано включение $D^* \subseteq D_{A^*}$.

Теперь нужно доказать обратное включение. Для этого примем, что $g(t) \in D_{A_0^*}$. Это значит, что существует функция $g^*(t) \in L^2$, для которой при любом $f \in D_{A_0}$ имеет место равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} K(s, t) f(t)\, dt \right\} \overline{g(s)}\, ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \overline{g^*(t)}\, dt.$$

В силу (7) это можно переписать в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\overline{K(t,s)}\,\overline{g(s)}\,ds-\overline{g^*(t)}\right\}=0.$$

Отсюда следует, в силу леммы, что почти всюду

$$g^*(t)=\int_{-\infty}^{\infty}K(t,s)\,g(s)\,ds,$$

а так как функция $g^*(t)$ принадлежит L^2, то $g(s)\in D^*$ и $A^*g=$ $=g^*(t)$. Таким образом, мы доказали, что $D^*\supseteq D_{A_0^*}$. Тем самым доказано, что $D^*=D_{A_0^*}$, а вместе с тем доказана теорема.

Определение. *Интегральным оператором Карлемана* с ядром $K(s,\ t)$ называют замыкание $A=A^{**}$ оператора A_0.

Мы сохраним обозначение D^* для D_{A^*} и, кроме того, будем писать D вместо D_A.

Следуя Карлеману, назовем $K(s,\ t)$ *ядром первого рода*, если A — оператор самосопряженный, и *ядром второго рода* — в противном случае.

117. Пример. Обозначим через $\{\psi_n(s)\}_0^\infty$ ортонормированную последовательность функций Хаара для интервала $[0,\ 1]$. Эти функции определяются следующим образом:

$$\psi_0(s)=1 \qquad (0\leqslant s\leqslant 1),$$

$$\psi_1(s)=\begin{cases}-1 & \left(0\leqslant s<\frac{1}{2}\right),\\ 1 & \left(\frac{1}{2}\leqslant s\leqslant 1\right),\end{cases}$$

$$\psi_n(s)=\begin{cases}0 & \left(0\leqslant s<1-\frac{1}{2^{n-1}}\right),\\ -2^{\frac{n-1}{2}} & \left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\leqslant s<1-\frac{1}{2^n}\right),\\ 2^{\frac{n-1}{2}} & \left(1-\frac{1}{2^n}\leqslant s\leqslant 1\right)\end{cases}$$

$$(n=2,\ 3,\ \ldots).$$

Так как для всякого $s\in[0,\ 1)$ существует такое p_s, что $\psi_p(s)=0$ при $p\geqslant p_s$, то ряды

$$\sum_{p=0}^{\infty}c_p\psi_p(s),\qquad \sum_{p=0}^{\infty}c_p\psi_p^2(s)$$

сходятся абсолютно в интервале $0 \leqslant s < 1$, каковы бы ни были коэффициенты c_p.

Лемма 1. *Чтобы сумма*

$$\sum_{p=0}^{\infty} c_p \psi_p(s) = \theta(s)$$

равнялась нулю почти всюду в интервале $0 \leqslant s < 1$, *необходимо и достаточно выполнение всех равенств*

$$c_p = 2^{\frac{p-1}{2}} c_0 \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots).$$

Доказательство. Представим интервал $0 \leqslant s < 1$ в виде суммы интервалов

$$(d_n) \qquad 1 - \frac{1}{2^{n-1}} \leqslant s < 1 - \frac{1}{2^n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Так как в интервале (d_1)

$$\theta(s) = c_0 - c_1$$

и в интервале (d_n) $(n \geqslant 2)$

$$\theta(s) = c_0 + c_1 + 2^{\frac{1}{2}} c_2 + 2^{\frac{2}{2}} c_3 + \ldots + 2^{\frac{n-2}{2}} c_{n-1} - 2^{\frac{n-1}{2}} c_n,$$

то, чтобы функция $\theta(s)$ равнялась нулю по крайней мере в одной точке каждого из интервалов (d_n) $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, необходимо выполнение всех равенств

$$c_0 - c_1 = 0,$$

$$c_0 + c_1 + 2^{\frac{1}{2}} c_2 + 2^{\frac{2}{2}} c_3 + \ldots + 2^{\frac{n-2}{2}} c_{n-1} - 2^{\frac{n-1}{2}} c_n = 0$$

$$(n = 2, 3, 4, \ldots).$$

Если все эти равенства выполнены, то функция $\theta(s)$ равна нулю всюду в интервале $0 \leqslant s < 1$. Отсюда и вытекает утверждение леммы 1.

Ниже нам понадобятся функции

$$\varkappa_n(s) = \psi_0(s) + \psi_1(s) + 2^{\frac{1}{2}} \psi_2(s) + \ldots + 2^{\frac{n-2}{2}} \psi_{n-1}(s) - 2^{\frac{n-1}{2}} \psi_n(s)$$

$$(n = 2, 3, \ldots)$$

и

$$\varkappa_1(s) = \psi_0(s) - \psi_1(s).$$

Нетрудно видеть, используя доказательство леммы 1, что

$$\varkappa_n(s)=\begin{cases} 0 & \left(0\leqslant s<1-\frac{1}{2^{n-1}}\right), \\ 2^n & \left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\leqslant s<1-\frac{1}{2^n}\right) \qquad (n=2, 3, \ldots), \\ 0 & \left(1-\frac{1}{2^n}\leqslant s<1\right) \end{cases}$$

и

$$\varkappa_1(s)=\begin{cases} 2 & \left(0\leqslant s<\frac{1}{2}\right), \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\leqslant s<1\right). \end{cases}$$

Таким образом, функция $\varkappa_n(s)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ имеет постоянное отличное от нуля значение в интервале (d_n) и равна нулю вне этого интервала.

Лемма 2. *Всякую функцию* $\varphi(s) \in L^2(0, 1)$ *можно представить в виде сходящегося ряда*

$$\varphi(s)=\sum_{p=0}^{\infty} c_p\psi_p(s)+\omega(s),$$

где

$$\omega(s)\in L^2(0, 1), \qquad \sum_{p=0}^{\infty}|c_p|^2<\infty,$$

$$c_p=\int_0^1 \varphi(s)\,\psi_p(s)\,ds \qquad (p=0, 1, 2, \ldots)$$

и

$$\int_0^1 \omega(s)\,\psi_p(s)\,ds=0 \qquad (p=0, 1, 2, \ldots).$$

Доказательство. Последовательность частичных сумм

$$\theta_n(s)=\sum_{p=0}^{n} c_p\psi_p(s)$$

сходится в метрике $L^2(0, 1)$ к некоторой функции $\theta(s)\in L^2$. Поэтому (см. n° 11) существует некоторая подпоследовательность $\{\theta_{n_k}(s)\}_{k=1}^{\infty}$, которая сходится к $\theta(s)$ почти всюду. А так как ряд

$$\sum_{p=0}^{\infty} c_p\psi_p(s) \qquad (0\leqslant s<1)$$

сходится всюду, то его сумма почти всюду равна $\theta(s)$, и для доказательства леммы остается заметить, что

$$\int_0^1 \theta(s)\,\psi_p(s)\,ds = c_p \qquad (p=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Теперь рассмотрим функцию

$$K(s,\ t) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p \psi_p(s)\,\psi_p(t) \qquad \left(0 \leqslant {s \atop t} < 1\right), \tag{1}$$

где a_p — вещественные числа. Легко видеть, что это — вещественное ядро Карлемана, причем

$$K^2(s) = \int_0^1 [K(s,\ t)]^2\,dt = \sum_{p=0}^{\infty} a_p^2 \psi_p^2(s). \tag{2}$$

Свойства ядра $K(s,\ t)$, естественно, зависят от того, как выбраны числа a_p.

Покажем в первую очередь, что $K(s,\ t)$ будет в том и только в том случае ядром Гильберта — Шмидта, когда ряд

$$\sum_{p=0}^{\infty} a_p^2 \tag{3}$$

сходится.

Действительно, по теореме о почленном интегрировании ряда с неотрицательными членами имеем в силу (2):

$$\int_0^1 \int_0^1 [K(s,\ t)]^2\,ds\,dt = \sum_{p=0}^{\infty} a_p^2,$$

где левая и правая части конечны или бесконечны одновременно, откуда и вытекает наше утверждение.

Так как ядра Гильберта—Шмидта здесь интереса не представляют, то примем, что ряд (3) расходится, и рассмотрим следующую альтернативу:

$$(\mathscr{D}) \qquad \sum_{p=0}^{\infty} \frac{2^{p-1}}{1+a_p^2} = \infty$$

и

$$(\mathscr{C}) \qquad \sum_{p=0}^{\infty} \frac{2^{p-1}}{1+a_p^2} < \infty.$$

Покажем, что в случае $(\mathscr{D})$ $K(s, t)$ является ядром первого рода, а в случае $(\mathscr{C})$ ядром второго рода.

Род ядра зависит от индексов дефекта интегрального оператора A, порождаемого ядром $K(s, t)$. Эти индексы дефекта здесь одинаковы, так как ядро $K(s, t)$ вещественно. Для их нахождения мы должны искать собственные функции оператора A^*, отвечающие произвольно взятому невещественному числу λ, скажем, $\lambda = i$. Искомую собственную функцию на основании леммы 2 можно представить в виде

$$\varphi(s) = \sum_{p=0}^{\infty} c_p \psi_p(s) + \omega(s),$$

где числа c_p и функция $\omega(s)$ должны удовлетворять всем условиям леммы 2. Кроме того, функция $\varphi(s)$ должна удовлетворять уравнению

$$A^* \varphi = i\varphi. \tag{4}$$

Возьмем интервал (d_n). В нем почти всюду левая часть уравнения (4) равна

$$A^* \varphi = \sum_{p=0}^{n} a_p \psi_p(s) \int_0^1 \varphi(t) \psi_p(t)\, dt = \sum_{p=0}^{n} a_p c_p \psi_p(s),$$

а правая часть равна

$$i \left\{ \sum_{p=0}^{n} c_p \psi_p(s) + \omega(s) \right\}.$$

Таким образом, почти всюду в интервале (d_n)

$$\omega(s) = -\sum_{p=0}^{n} (1 + ia_p)\, c_p \psi_p(s).$$

Это равенство показывает, что $\omega(s)$ в каждом интервале (d_n) постоянна. Пусть

$$\omega(s) = \gamma_n, \quad s \in (d_n), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Так как $\omega(s)$ ортогональна ко всем функциям $\psi_p(s)$, то, припоминая свойство функций $\varkappa_n(s)$, находим, что

$$0 = \int_0^1 \omega(s) \varkappa_n(s)\, ds = \int_{(d_n)} \omega(s) \varkappa_n(s)\, ds = \gamma_n \cdot 2^n \cdot \frac{1}{2^n} = \gamma_n$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Как видим, функция $\omega(s)$ должна равняться нулю, а коэффициенты c_p должны быть такими, чтобы всюду в интервале $0 \leqslant s < 1$

$$\sum_{p=0}^{\infty} (1+ia_p)\, c_p \psi_p(s) = 0.$$

На основании леммы 1 это равенство имеет место в том и только том случае, когда

$$(1+ia_p)\, c_p = 2^{\frac{p-1}{2}} (1+ia_0)\, c_0 \qquad (p=1, 2, 3, \ldots)$$

и, значит,

$$|c_p|^2 = |c_0|^2 (1+a_0^2) \frac{2^{p-1}}{1+a_p^2} \qquad (p=1, 2, 3, \ldots).$$

Полученные формулы показывают, что в случае $(\mathscr{D})$ точка i не является собственным значением оператора A^*, а в случае $(\mathscr{C})$ она будет его собственным значением и притом кратности 1. Тем самым наше утверждение доказано, причем мы показали, что в случае $(\mathscr{C})$ индексы дефекта оператора A равны (1,1).

118. Спектральные функции интегрального оператора с ядром Карлемана. Пусть A — интегральный оператор с ядром Карлемана $K(s, t)$, а E_λ $(-\infty \leqslant \lambda \leqslant \infty)$ — какая-нибудь из принадлежащих этому оператору спектральных функций. Положим

$$F_\lambda = \begin{cases} E_\lambda & (\lambda < 0), \\ 0 & (\lambda = 0), \\ E_\lambda - I & (\lambda > 0), \end{cases}$$

так что $F_\lambda \operatorname{sign} \lambda$ есть отрицательный самосопряженный оператор с нижней гранью $\geqslant -1$. Из этих свойств оператора F_λ следует, что оператор $F_\lambda^2 + F_\lambda \operatorname{sign} \lambda$ отрицателен. Поэтому при любом $f \in \mathrm{L}^2$ имеет место неравенство

$$(F_\lambda f, F_\lambda f) \leqslant |(F_\lambda f, f)|. \qquad (1)$$

Нам понадобится также неравенство

$$|(F_\lambda f, f)| \leqslant \frac{1}{\lambda^2} \|f\|_K^2, \qquad (2)$$

верное при любом $f \in [\mathrm{L}^2]_K$. Докажем его, например, при $\lambda > 0$. С этой целью достаточно заметить, что для любого $f \in [\mathrm{L}^2]_K = \mathrm{D}_0$

$$(A_0 f, A_0 f) = (Af, Af) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu^2 d(E_\mu f, f) \geqslant \lambda^2 \int_{\lambda}^{\infty} d(E_\mu f, f) =$$

$$= \lambda^2 ((I - E_\lambda) f, f) = \lambda^2 |(F_\lambda f, f)|$$

и, с другой стороны (см. (4) n° 116),

$$(A_0 f, A_0 f) \leqslant \| f \|_K^2.$$

Теорема 1. *F_λ является интегральным оператором с ядром Карлемана $F(t, s; \lambda)$, которое при каждом $\lambda \neq 0$ удовлетворяет почти всюду на оси t неравенству*

$$\int_{-\infty}^{\infty} | F(t, s; \lambda) |^2 ds \leqslant \frac{K_1^2(t)}{\lambda^2}, \tag{3}$$

где

$$K_1(t) = \max\{1, K(t)\}.$$

Доказательство для удобства разобьем на несколько частей.

1°. Прежде всего заметим, что на основании леммы 1 n° 25, существует функция $G(s, t; \lambda)$, принадлежащая L^2 по t при каждом s, причем $G(0, t; \lambda) = 0$, такая, что для любой функции $f(t) \in L^2$

$$(F_\lambda f)(s) = \frac{d}{ds} \int_{-\infty}^{\infty} G(s, x; \lambda) f(x)\, dx \tag{4}$$

почти всюду *) по s.

Докажем, что функцию $G(s, t; \lambda)$ можно так изменить при каждом s на некотором множестве меры нуль оси t, что измененная функция будет иметь при каждом t почти всюду по s производную

$$F(s, t; \lambda) = \frac{\partial}{\partial s} G(s, t; \lambda),$$

принадлежащую L^2 (по s).

С этой целью положим

$$k(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{K(s)}, & \text{если } K(s) \geqslant 1, \\ 1, & \text{если } K(s) < 1, \end{cases}$$

и применим формулу (4) к функции

$$f_{t,h}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{h} k(x) & \text{при } x \in (t, t+h), \\ 0 & \text{при } x \overline{\in} (t, t+h), \end{cases}$$

---

*) Множество меры нуль, на котором (4) не выполнено, зависит от $f(t)$, а также от λ. Это обстоятельство нужно в дальнейшем иметь в виду. Впрочем, в настоящем рассмотрении можно считать значение $\lambda \neq 0$ фиксированным.

которая при любом $h > 0$ принадлежит $[L^2]_K$. Мы получим, что почти всюду по s

$$(F_\lambda f_{t,h})(s) = \frac{d}{ds}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} G(s, x; \lambda)\, k(x)\, dx = \frac{d}{ds} G_h(s, t; \lambda),$$

где

$$G_h(s, t; \lambda) = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} G(s, x; \lambda)\, k(x)\, dx. \tag{5}$$

Поэтому в силу неравенств (1) и (2)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d}{ds} G_h(s, t; \lambda)\right|^2 ds = (F_\lambda f_{t,h}, F_\lambda f_{t,h}) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\lambda^2}\| f_{t,h}\|_K^2 = \frac{1}{\lambda^2}\left\{\frac{1}{h}\int_t^{t+h} K(s)\, k(s)\, ds\right\}^2 \leqslant \frac{1}{\lambda^2}. \tag{6}$$

Отсюда следует существование зависящей от t последовательности $h_n \to 0$ $(h_n > 0)$ и функции (от s) $g(s, t; \lambda)$, принадлежащей L^2, для которых при $n \to \infty$

$$\frac{d}{ds} G_{h_n}(s, t; \lambda) \xrightarrow{\text{сл.}} g(s, t; \lambda).$$

Значит,

$$\lim_{n\to\infty} G_{h_n}(s, t; \lambda) = \int_0^s g(x, t; \lambda)\, dx$$

при каждом s. С другой стороны, в силу (5) при каждом s для почти всех t

$$\lim_{h\to 0} G_h(s, t; \lambda) = G(s, t; \lambda)\, k(t).$$

Поэтому при каждом s для почти всех t

$$G(s, t; \lambda)\, k(t) = \int_0^s g(x, t; \lambda)\, dx. \tag{7}$$

Изменяя функцию $G(s, t; \lambda)$ при каждом s на некотором множестве меры нуль оси t, добьемся того, что (7) будет иметь место для всех s и t. Так как $k(t) \neq 0$, то измененная функция $G(s, t; \lambda)$ будет иметь при каждом t почти всюду по s производную

$$F(s, t; \lambda) = \frac{\partial}{\partial s} G(s, t; \lambda),$$

которая по s принадлежит L^2.

2°. Следующий шаг состоит в доказательстве того, что для всякой функции $f \in L^2$ имеет место равенство

$$(F_\lambda f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{F(s, t; \lambda)}\, f(s)\, ds \tag{8}$$

почти всюду на оси t. Этот факт очень просто доказывается для элементарной ступенчатой функции (в конечном интервале $[\alpha, \beta]$):

$$\chi_{\alpha, \beta}(s) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad s \in [\alpha, \beta], \\ 0 & \text{при} \quad s \,\bar{\in}\, [\alpha, \beta], \end{cases}$$

а значит, и для любой финитной ступенчатой функции. В самом деле, при любой функции $h(t) \in L^2$

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, dt \int_{-\infty}^{\infty} F(s, t; \lambda)\, \chi_{\alpha, \beta}(s)\, ds =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \{G(\beta, t; \lambda) - G(\alpha, t; \lambda)\}\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{\alpha, \beta}(s) \frac{d}{ds} \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, G(s, t; \lambda)\, dt = (F_\lambda h, \chi_{\alpha, \beta}) = (h, F_\lambda \chi_{\alpha, \beta}).$$

Поэтому для почти всех t

$$(F_\lambda \chi_{\alpha, \beta})(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{F(s, t; \lambda)}\, \chi_{\alpha, \beta}(s)\, ds.$$

Для произвольной функции $f \in L^2$ можно найти сильно сходящуюся к ней последовательность финитных ступенчатых функций $\{f_n\}_1^\infty$. Тогда последовательность $\{F_\lambda f_n\}_1^\infty$ будет сильно сходиться к функции $F_\lambda f$ и, между прочим, найдется последовательность индексов $\{n_i\}_{i=1}^\infty$, такая, что для почти всех t

$$\lim_{i \to \infty} (F_\lambda f_{n_i})(t) = (F_\lambda f)(t). \tag{9}$$

С другой стороны, можно указать множество меры нуль так, чтобы в каждой не принадлежащей ему точке t имели место одновременно все равенства

$$(F_\lambda f_{n_i})(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{F(s, t; \lambda)}\, f_{n_i}(s)\, ds \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots).$$

В каждой из этих точек t правая часть стремится к пределу

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{F(s, t; \lambda)} f(s)\, ds,$$

а в силу (9) этот предел равен $(F_\lambda f)(t)$.

Итак, утверждение 2° доказано.

3°. Теперь докажем соотношение (3). Для этого возьмем содержащееся в (6) неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} ds \left| \frac{1}{h} \int_{t}^{t+h} F(x, s; \lambda)\, k(x)\, dx \right|^2 = (F_\lambda f_{t,h}, F_\lambda f_{t,h}) \leqslant \frac{1}{\lambda^2},$$

из которого следует, что

$$\int_{e} dt \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{1}{k^2(t)} \left| \frac{1}{h} \int_{t}^{t+h} F(x, s; \lambda)\, k(x)\, dx \right|^2 \leqslant \frac{1}{\lambda^2} \int_{e} \frac{dt}{k^2(t)},$$

где e есть произвольное подмножество конечной меры множества $e(a)$ всех тех t, для оторых

$$\frac{1}{k(t)} \leqslant a.$$

Так как при каждом s функция

$$\frac{1}{k^2(t)} \left| \frac{1}{h} \int_{t}^{t+h} F(x, s; \lambda)\, k(x)\, dx \right|^2$$

стремится для почти всех $t \in e$ к пределу $|F(t, s; \lambda)|^2$, когда $h \to 0$, то по теореме Фату

$$\int_{e} dt \int_{-\infty}^{\infty} |F(t, s; \lambda)|^2\, ds \leqslant \frac{1}{\lambda^2} \int_{e} \frac{dt}{k^2(t)}.$$

Поскольку число a и множество $e \subset e(a)$ произвольны, то для почти всех t

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(t, s; \lambda)|^2\, ds \leqslant \frac{1}{\lambda^2} \frac{1}{k^2(t)},$$

откуда и вытекает неравенство (3).

Соотношение (3) и формула (8), дающая представление оператора F_λ, не препятствуют изменению функции $F(t, s; \lambda)$ при каждом из почти всех t на множестве меры нуль оси s.

Воспользуемся этим, чтобы в согласии с леммой 2 n° 25 сделать функцию $F(t, s; \lambda)$ измеримой в плоскости s, t.

4°. Остается доказать, что почти всюду в плоскости s, t имеет место равенство

$$\overline{F(s, t; \lambda)} = F(t, s; \lambda).$$

Для этого возьмем функции $f \in L^2$ и $g \in [L^2]_{K_1}$ и запишем для них равенство

$$(F_\lambda g, f) = (g, F_\lambda f)$$

в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(s)}\, ds \int_{-\infty}^{\infty} \overline{F(t, s; \lambda)}\, g(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, dt \int_{-\infty}^{\infty} F(s, t; \lambda)\, \overline{f(s)}\, ds.$$

Так как в силу (3)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|\cdot|f(s)|\cdot|F(t, s; \lambda)|\, ds \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|\cdot\|f\|\frac{1}{|\lambda|} K_1(t)\, dt < \infty,$$

то по теореме Фубини можно изменить порядок интегрирования в левой части равенства. Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, dt \int_{-\infty}^{\infty} \overline{F(t, s; \lambda)}\, \overline{f(s)}\, ds = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, dt \int_{-\infty}^{\infty} F(s, t; \lambda)\, \overline{f(s)}\, ds,$$

откуда и вытекает справедливость утверждения, поскольку f из L^2 произвольна, а множество функций g плотно в L^2.

Таким образом, доказательство теоремы 1 закончено.

Рассмотрим дальнейшие свойства оператора F_λ.

Лемма. *Пусть*

$$\Omega(\lambda) = (F_\lambda f, g), \tag{10}$$

где $f, g \in L^2$, и пусть Δ — произвольный интервал оси λ, удаленный на расстояние $\delta > 0$ от точки $\lambda = 0$. Тогда

$$\operatorname{Var}_\Delta \Omega(\lambda) \leqslant \|f\|\cdot\|g\|. \tag{11}$$

Если, кроме того, $g \in [L^2]_K$, то

$$\operatorname{Var}_\Delta \Omega(\lambda) = \frac{1}{\delta}\|f\|\cdot\|g\|_K, \tag{12}$$

и если $f, g \in [L^2]_K$, то

$$\operatorname{Var}_\Delta \Omega(\lambda) \leqslant \frac{1}{\delta^2}\|f\|_K\|g\|_K. \tag{13}$$

Доказательство. Возьмем точки

$$\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_n$$

интервала Δ и составим выражение

$$V_n\equiv\sum_{k=1}^{n}|\Omega(\lambda_k)-\Omega(\lambda_{k-1})|=\sum_{k=1}^{n}|((F_{\lambda_k}-F_{\lambda_{k-1}})f,\ g)|.$$

Так как $F_{\lambda_k}-F_{\lambda_{k-1}}$ — позитивный оператор, то благодаря неравенству Коши — Буняковского

$$V_n\leqslant\sum_{k=1}^{n}\sqrt{((F_{\lambda_k}-F_{\lambda_{k-1}})f,\ f)}\sqrt{((F_{\lambda_k}-F_{\lambda_{k-1}})g,\ g)}\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{\sum_{k=1}^{n}((F_{\lambda_k}-F_{\lambda_{k-1}})f,\ f)}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}((F_{\lambda_k}-F_{\lambda_{k-1}})g,\ g)}=$$

$$=\sqrt{((F_{\lambda_n}-F_{\lambda_0})f,\ f)}\sqrt{((F_{\lambda_n}-F_{\lambda_0})g,\ g)}\leqslant\sqrt{(F_\delta f,\ f)(F_\delta g,\ g)}\,.$$

Поскольку $\|F_\delta\|\leqslant 1$, то отсюда вытекает справедливость оценки (11). Применяя к $(F_\delta g,\ g)$ при $g\in[L^2]_K$ оценку (2), убеждаемся в справедливости оценки (12) и, наконец, если $f,\ g\in[L^2]_K$, то, с помощью той же оценки (2), устанавливаем справедливость (13). Лемма доказана.

Теорема 2. *В качестве ядра оператора F_λ можно выбрать (из совокупности эквивалентных по $(s,\ t)$ при каждом λ) такую функцию $F^0(s,\ t;\ \lambda)$, что, за исключением не зависящего от λ множества меры нуль в $(s,\ t)$-плоскости, эта функция имеет ограниченную вариацию по λ в любом конечном или бесконечном интервале Δ оси λ, находящемся на положительном расстоянии от точки $\lambda=0$. При этом имеет место оценка*

$$\mathrm{Var}_\Delta F^0(s,\ t;\ \lambda)\leqslant\frac{1}{\delta^2}K(s)K(t),$$

если указанное расстояние есть δ, и оценка

$$|F^0(s,\ t;\ \lambda)|\leqslant\frac{1}{\lambda^2}K(s)K(t)$$

при $\lambda\neq 0$. Наконец, при каждом $\lambda\neq 0$ почти всюду в $(s,\ t)$-плоскости

$$F^0(s,\ t;\ \lambda-0)=F^0(s,\ t;\ \lambda).$$

Доказательство. Пусть $F(s,\ t;\ \lambda)$ — некоторое ядро оператора F_λ. Мы построим по нему эквивалентное ему в $(s,\ t)$-плоскости при каждом λ ядро $F^0(s,\ t;\ \lambda)$, удовлетворяющее условиям теоремы.

С этой целью введем функции

$$\varphi_n(s;\ u)=\begin{cases}\dfrac{n}{2}, & \text{если}\quad |s-u|\leqslant\dfrac{1}{n},\\[2mm] 0, & \text{если}\quad |s-u|>\dfrac{1}{n},\end{cases}$$

и пусть

$$\varphi_n^{(a)}(s;\ u)=\begin{cases}\varphi_n(s;\ u), & \text{если}\quad u\in e(a),\\ 0, & \text{если}\quad u\overline{\in} e(a),\end{cases}$$

где $e(a)$ — множество тех значений u, при которых $K(u)\leqslant a$. При фиксированном s, очевидно, $\varphi_n^{(a)}(s;u)\in[\mathrm{L}^2]_K$. Положим, далее,

$$\Phi_n^{(a)}(s, t;\ \lambda)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int F(u, v;\ \lambda)\,\varphi_n^{(a)}(s;\ u)\,\varphi_n^{(a)}(t;\ v)\,du\,dv. \tag{14}$$

Заметим, что этот интеграл существует благодаря оценке (3) как двойной в смысле абсолютной сходимости, а не только как повторный.

В силу (13)

$$\mathrm{Var}_\Delta\Phi_n^{(a)}(s, t;\ \lambda)\leqslant\frac{1}{\delta^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int K(u)\,K(v)\,\varphi_n^{(a)}(s;\ u)\,\varphi_n^{(a)}(t;\ v)\,du\,dv\leqslant\frac{a^2}{\delta^2}. \tag{15}$$

Таким образом, все функции $\Phi_n^{(a)}(s,\ t;\ \lambda)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ имеют равномерно ограниченную вариацию по λ в интервале Δ. Следовательно, применима теорема Хелли, комбинируя которую с повторным диагональным процессом, найдем последовательность $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, зависящую от произвольно выбранной точки $(s,\ t)$, такую, что при всех $\lambda\neq 0$ существует

$$\lim_{k\to\infty}\Phi_{n_k}^{(a)}(s, t;\ \lambda)\equiv\Phi^{(a)}(s,\ t;\ \lambda).$$

При этом в силу (15) при любых s, t

$$\mathrm{Var}_\Delta\Phi^{(a)}(s, t;\ \lambda)\leqslant\frac{a^2}{\delta^2}. \tag{16}$$

Последнее неравенство допускает следующее уточнение. Пусть $e_2^*(a)$ — множество всех тех точек $(s, t)\in e(a)\times e(a)\equiv e_2(a)$, в которых

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int K(u)\,K(v)\,\varphi_n^{(a)}(s;\ u)\,\varphi_n^{(a)}(t;\ v)\,du\,dv=K(s)\,K(t).$$

В силу известных теорем $\text{més}\,\{e_2(a)\setminus e_2^*(a)\}=0$.

При $(s, t) \in e_2^*(a)$ можно перейти при $n \to \infty$ к пределу в среднем члене неравенства (15), откуда следует, что

$$\mathrm{Var}_\Delta \Phi^{(a)}(s, t; \lambda) \leqslant \frac{1}{\delta^2} K(s) K(t), \qquad (s, t) \in e_2^*(a). \tag{17}$$

Это — уточнение неравенства (16).

С другой стороны, благодаря (14) при каждом $\lambda \neq 0$ почти всюду в $e_2(a)$ имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n^{(a)}(s, t; \lambda) = F(s, t; \lambda),$$

и, значит, при каждом $\lambda \neq 0$ почти всюду в $e_2(a)$

$$\Phi^{(a)}(s, t;\ \lambda) = F(s, t;\ \lambda). \tag{18}$$

Представим теперь (s, t)-плоскость E_2 в виде суммы непересекающихся множеств: $\mathrm{E}_2 = \bigcup_{a=1}^{\infty} \mathrm{E}_2(a)$, где $\mathrm{E}_2(1) = e_2(1)$, $\mathrm{E}_2(a+1) = e_2(a+1) \setminus e_2(a)$, и определим функцию $F^0(s, t;\ \lambda)$, полагая

$$F^0(s, t; \lambda) = \Phi^{(a)}(s, t; \lambda) \quad \text{при} \quad (s,\ t) \in \mathrm{E}_2(a).$$

Очевидно, при каждом λ почти всюду в (s, t)-плоскости будет в силу (18)

$$F^0(s, t; \lambda) = F(s, t; \lambda)$$

и поэтому $F^0(s,\ t;\ \lambda)$ является ядром оператора F_λ, т. е. при любых $f, g \in \mathrm{L}^2$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int F^0(s, t; \lambda) f(t) \overline{g(s)}\, ds\, dt = (F_\lambda f,\ g).$$

При этом на множестве $\mathrm{E}_2^* = \bigcup_{a=1}^{\infty} (\mathrm{E}_2(a) \cap e_2^*(a))$, т. е. во всей (s, t)-плоскости, за исключением не зависящего от λ множества меры нуль, в силу (17) справедлива оценка:

$$\mathrm{Var}_\Delta F^0(s, t; \lambda) \leqslant \frac{1}{\delta^2} K(s) K(t).$$

Из этой оценки вытекает, в частности, что при $\lambda \neq 0$ почти всюду в (s, t)-плоскости

$$|F^0(s, t; \lambda)| \leqslant \frac{1}{\lambda^2} K(s) K(t).$$

Покажем теперь, что при каждом $\lambda \neq 0$ почти всюду в $(s,\ t)$-плоскости

$$F^0(s, t; \lambda - 0) = F^0(s, t; \lambda). \tag{19}$$

Для этого достаточно заметить, что, во-первых, при $(s, t) \in E_2^*$ существует предел $F^0(s, t; \lambda - 0)$ при любом λ, а во-вторых, что при любых $f, g \in [L^2]_K$

$$|F^0(s, t; \mu) f(t) \overline{g(s)}| \leqslant \frac{1}{\mu^2} K(s) K(t) \cdot |f(s)| \cdot |g(t)|,$$

где правая часть интегрируема во всей (s, t)-плоскости, и поэтому при $\lambda \neq 0$ возможен предельный переход под знаком интеграла в следующем равенстве:

$$\iint_{-\infty}^{\infty} F^0(s, t; \lambda) f(t) \overline{g(s)}\, ds\, dt = (F_\lambda f, g) = (F_{\lambda-0} f, g) =$$

$$= \lim_{\mu \to \lambda - 0} \iint_{-\infty}^{\infty} F^0(s, t; \mu) f(t) \overline{g(s)}\, ds\, dt =$$

$$= \iint_{-\infty}^{\infty} F^0(s, t; \lambda - 0) f(t) \overline{g(s)}\, ds\, dt.$$

Отсюда и вытекает (19). Теорема полностью доказана.

Во всем дальнейшем под ядром $F(s, t; \lambda)$ оператора F_λ мы будем подразумевать ядро $F^0(s, t; \lambda)$.

Замечание. С помощью аналогичных рассуждений, используя вместо оценки (13) оценку (12), легко доказать, что, какова бы ни была функция $f \in L^2$,

$$\operatorname{Var}_\Delta \int_{-\infty}^{\infty} F(s, t; \lambda) f(t)\, dt \leqslant \frac{1}{\delta} K(s) \cdot \|f\|,$$

за исключением не зависящего от Δ множества меры нуль на оси s.

119. Спектральное представление ядра Карлемана.

Теорема 1. *Пусть $\Delta = [\alpha, \beta]$ — конечный интервал, находящийся на положительном расстоянии от точки $\lambda = 0$, и*

$$F(s, t; \Delta) = F(s, t; \beta) - F(s, t; \alpha).$$

В таком случае почти всюду в (s, t)-плоскости

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(s, u) F(u, t; \Delta)\, du = \int_{\alpha}^{\beta} \lambda\, d_\lambda F(s, t; \lambda) \tag{1}$$

(*исключительное множество меры нуль в (s, t)-плоскости, на котором* (1) *не имеет места, зависит, вообще говоря, от α и β*).

Теорема означает, что (1) справедливо при каждом $s \overline{\in} e_{\alpha,\beta}$ для почти всех t ($e_{\alpha,\beta}$ — некоторое множество меры нуль на оси s).

Доказательство. При любых $f, g \in L^2$ имеем равенство

$$(A^*E(\Delta) f, g) = \int_\alpha^\beta \lambda \, d_\lambda (E_\lambda f, g),$$

которое, очевидно, можно переписать в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(s)} \, ds \int_{-\infty}^{\infty} K(s, u) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} F(u, t; \Delta) f(t) \, dt \right\} du =$$
$$= \int_\alpha^\beta \lambda \, d \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(s)} \, ds \int_{-\infty}^{\infty} F(s, t; \lambda) f(t) \, dt \right\}.$$

Положим, что $f, g \in [L^2]_{K_1}$. Тогда в силу теоремы 2 n° 118 правая часть равна

$$\int\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(s)} \left\{ \int_\alpha^\beta \lambda \, d_\lambda F(s, t; \lambda) \right\} dt \, ds.$$

Но почти всюду в силу теоремы 1 n° 118,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K(s, u) F(u, t; \Delta)| \, du \leqslant 2K(s) \frac{K_1(t)}{\delta},$$

где δ — расстояние интервала $[\alpha, \beta]$ от точки $\lambda = 0$. Поэтому в левой части тоже можно изменить порядок интегрирования, а значит,

$$\int\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(s)} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} K(s, u) F(u, t; \Delta) \, du \right\} dt \, ds =$$
$$= \int\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(s)} \left\{ \int_\alpha^\beta \lambda \, d_\lambda F(s, t; \lambda) \right\} dt \, ds$$

при любых $f, g \in [L^2]_{K_1}$. Так как $[L^2]_{K_1}$ плотно в L^2, то отсюда следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(s, u) F(u, t; \Delta) \, du = \int_\alpha^\beta \lambda \, d_\lambda F(s, t; \lambda)$$

почти всюду в (s, t)-плоскости. Теорема доказана.

Теорема 2. *Для почти всех s формула*

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(s, u) F(u, t; \Delta) \, du = \int_\alpha^\beta \lambda \, d_\lambda F(s, t; \lambda)$$

справедлива также при $\beta = \infty$, $\alpha > 0$ (*соответственно при* $\alpha = -\infty$, $\beta < 0$), *если правую часть рассматривать как* l. i. m. *по* t, *когда* $\beta \to \infty$ ($\alpha \to -\infty$) *по произвольно выбранной последовательности.*

Доказательство. Предполагая, что $\alpha > 0$, а β — конечно, перепишем равенство (1) в виде

$$\int_{\alpha}^{\beta} \lambda\, d_\lambda \overline{F(s, t; \lambda)} = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{K(s, u)}\, \overline{F(u, t; \Delta)}\, du =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F(t, u; \Delta) K(u, s)\, du = (F_\beta - F_\alpha) K_s, \qquad (2)$$

где для почти всех s функция $K_s(t) = K(t, s)$ принадлежит L^2. Возьмем стремящуюся к бесконечности последовательность значений β_k. Тогда в силу теоремы 1 можно указать множество e_α меры нуль, зависящее только от α и такое, что при любом $s \,\overline{\in}\, e_\alpha$ будут иметь место почти всюду на оси t одновременно все равенства (2) с $\beta = \beta_k$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$). Отсюда следует, что при $s \,\overline{\in}\, e_\alpha$ и $k = 1, 2, \ldots$

$$\left\| \int_{\alpha}^{\beta_k} \lambda\, d_\lambda \overline{F(s, t; \lambda)} + F_\alpha K_s \right\| = \| E_{\beta_k} K_s - K_s \|.$$

Правая часть стремится к нулю при $k \to \infty$. Таким образом, для всех $s \,\overline{\in}\, e_\alpha$

$$-\int_{-\infty}^{\infty} F(t, u; \alpha) K(u, s)\, du = \operatorname*{l.\,i.\,m.}_{k\to\infty} \int_{\alpha}^{\beta_k} \lambda\, d_\lambda \overline{F(s, t; \lambda)}$$

и, значит, для почти всех s

$$-\int_{-\infty}^{\infty} K(s, u) F(u, t; \alpha)\, du = \operatorname*{l.\,i.\,m.}_{k\to\infty} \int_{\alpha}^{\beta_k} \lambda\, d_\lambda F(s, t; \lambda),$$

откуда и следует теорема.

Теорема 3. *Для почти всех* s

$$K(t, s) = \operatorname{l.\,i.\,m.} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d_\lambda F(t, s; \lambda),$$

где правая часть есть l. i. m. *по* t *несобственного интеграла с* *особыми точками* $\lambda = -\infty,\ 0,\ \infty$; *иными словами, для почти всех* s

$$\lim \int_{-\infty}^{\infty} \left| K(t,\ s) - \left(\int_{-N'}^{-\varepsilon'} + \int_{\varepsilon}^{N} \right) \lambda\, d_\lambda F(t,\ s;\ \lambda) \right|^2 dt = 0,$$

когда $\varepsilon,\ \varepsilon' \to 0,\ N,\ N' \to \infty$ *по произвольно выбранным последовательностям положительных чисел.*

В том же смысле при почти всех s

$$K(s,\ t) = \text{l. i. m.} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d_\lambda F(s,\ t;\ \lambda).$$

Доказательство. Выберем произвольно последовательности положительных чисел $\varepsilon_i,\ \varepsilon_i' \to 0$ $(\varepsilon_i,\ \varepsilon_i' < 1)$ и $N_k,\ N_k' \to \infty$ $(N_k,\ N_k' > 1)$. Тогда, как и при доказательстве предыдущей теоремы, найдется множество e меры нуль такое, что при каждом $s \overline{\in} e$ будут иметь место почти всюду на оси t одновременно для всех $i,\ k,\ l,\ m$ равенства

$$\left(\int_{-N_k'}^{-\varepsilon_i'} + \int_{\varepsilon_l}^{N_m} \right) \lambda\, d_\lambda F(t,\ s;\ \lambda) = (F_{-\varepsilon_i'} - F_{-N_k'}) K_s + (F_{N_m} - F_{\varepsilon_l}) K_s$$

или

$$\left(\int_{-N_k'}^{-\varepsilon_i'} + \int_{\varepsilon_l}^{N_m} \right) \lambda\, d_\lambda F(t,\ s;\ \lambda) - E_0 K_s + E_{+0} K_s - K_s =$$

$$= (E_{-\varepsilon_i'} - E_0) K_s + (E_{+0} - E_{\varepsilon_l}) K_s + (F_{N_m} - F_{-N_k'}) K_s.$$

При каждом $s \overline{\in} e$ правая часть, как функция от t, стремится к нулю в метрике L^2, когда $i,\ k,\ l,\ m \to \infty$. Следовательно, при $s \overline{\in} e$

$$K_s(t) - (E_{+0} - E_0) K_s = \text{l. i. m.} \left(\int_{-N_k'}^{-\varepsilon_i'} + \int_{\varepsilon_l}^{N_m} \right) \lambda\, d_\lambda F(t,\ s;\ \lambda).$$

Остается проверить, что $\| (E_{+0} - E_0) K_s \| = 0$ для почти всех s. Но при любом $f \in L^2$

$$(f,\ (E_{+0} - E_0) K_s) = ((E_{+0} - E_0) f,\ K_s) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{K_s(t)}\, ((E_{+0} - E_0) f)(t)\, dt = A^* (E_{+0} - E_0) f = 0.$$

120. Обобщение формулы Гильберта—Шмидта.

Теорема. *Какова бы ни была функция* $f \in L^2$, *для почти всех* s

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(s, t) f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d_\lambda \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} F(s, t; \lambda) f(t)\, dt \right\},$$

причем интеграл по λ *несобственный относительно точек* $\lambda = -\infty, 0, \infty$.

Доказательство. В силу теоремы 3 n° 119 для любой $f \in L^2$ справедливо при почти всех s равенство:

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(s, t) f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d_\lambda F(s, t; \lambda) \equiv$$

$$\equiv \lim_{\substack{\varepsilon_i', \varepsilon_l \to 0 \\ N_k', N_m \to \infty}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt \left(\int_{-N_k'}^{-\varepsilon_i'} + \int_{\varepsilon_l}^{N_m} \right) \lambda\, d_\lambda F(s, t; \lambda).$$

Нам нужно лишь доказать, что в правой части этого равенства можно изменить порядок интегрирования. Для этого заметим, что

$$\mathrm{Var}_\Delta \int_{-\infty}^{\infty} F(s, t; \lambda) f(t)\, dt \leqslant \frac{1}{\delta} K(s) \| f \|,$$

в силу замечания в конце n° 118, и поэтому для почти всех s при $\alpha\beta > 0$ $(\beta > \alpha)$ интеграл Стилтьеса

$$\int_{\alpha}^{\beta} \lambda\, d_\lambda \int_{-\infty}^{\infty} F(s, t; \lambda) f(t)\, dt \tag{1}$$

существует. Также для почти всех s существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt \int_{\alpha}^{\beta} \lambda\, d_\lambda F(s, t; \lambda) \tag{2}$$

при любой $f(t) \in L^2$, так как

$$\int_{\alpha}^{\beta} \lambda\, d_\lambda F(s, t; \lambda) \in L_t^2(-\infty, \infty),$$

в силу формулы (2) n° 119.

Если $f(t) \in [L^2]_K$, то равенство этих интегралов следует из оценки величины

$$J_n = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt \left\{ \int_{\alpha}^{\beta} \lambda\, d_\lambda F(s,\ t;\ \lambda) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k F(s,\ t;\ \Delta_k) \right\},$$

где в фигурных скобках — разность между интегралом Стилтьеса и его интегральной суммой. Действительно, в силу теоремы 2 n° 118 *)

$$|J_n| \leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\Delta_k| \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,[\mathrm{Var}_{[\alpha,\,\beta]} F(s,\ t;\ \lambda)]\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\Delta_k| \cdot \frac{1}{\delta^2} K(s)\, \| f \|_K,$$

а следовательно, $\lim\limits_{n \to \infty} J_n = 0$, откуда и вытекает равенство интегралов (1) и (2).

Для произвольной функции $f(t) \in L^2$ можно выбрать сходящуюся к ней в L^2 последовательность функций $f_n(t) \in [L^2]_K$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ и затем найти исключительное множество e меры нуль на оси s, общее для всех этих функций. Но тогда по теореме Хелли о предельном переходе в интеграле Стилтьеса будем иметь при $s \overline{\in} e$ соотношение

$$\int_{\alpha}^{\beta} \lambda\, d_\lambda \int_{-\infty}^{\infty} F(s,\ t;\ \lambda) f_n(t)\,dt \to \int_{\alpha}^{\beta} \lambda\, d_\lambda \int_{-\infty}^{\infty} F(s,\ t;\ \lambda) f(t)\,dt.$$

Кроме того,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)\,dt \int_{\alpha}^{\beta} \lambda\, d_\lambda F(s,\ t;\ \lambda) \to \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt \int_{\alpha}^{\beta} \lambda\, d_\lambda F(s,\ t;\ \lambda).$$

Поэтому интегралы (1) и (2) равны между собой для любой функции $f(t) \in L^2$ при любом $s \overline{\in} e$. Теорема доказана.

121. Характеристические свойства интегральных операторов Карлемана.

Т е о р е м а **). *Линейный оператор T в L^2 с плотной в L^2 областью определения является интегральным оператором с ядром*

---

*) Благодаря указанным в этой теореме свойствам функции $F(s,\ t;\ \lambda)$ ее вариацию по λ можно вычислять, исходя из разбиения интервала $[\alpha,\ \beta]$ лишь рациональными точками. Поэтому $\mathrm{Var}_{[\alpha,\beta]} F(s,\ t;\ \lambda)$ измерима в $(s,\ t)$-плоскости.

**) См. В. Б. К о р о т к о в «Об интегральных операторах с ядрами Карлемана» (ДАН СССР, 165 (1965), стр. 748—751). Мы доказываем эту теорему в несколько иной, но эквивалентной формулировке.

Карлемана в том и только том случае, когда существует конечная измеримая функция $P(s) \geqslant 0$, *удовлетворяющая следующим условиям:*

1°. $[L^2]_P \subseteq D_{T^*}$,

2°. $\|T^*g\| \leqslant \|g\|_P$ для любого $g \in [L^2]_P$,

3°. $(T^*f, g) = (f, T^*g)$ для любых $f, g \in [L^2]_P$.

Доказательство необходимости условий очень просто. Действительно, пусть T есть интегральный оператор с ядром Карлемана $K(s, t)$. Покажем, что в таком случае условия 1°—3° будут выполнены при $P(s) = K(s)$. Для этого введем операторы $A_0 \subseteq A \subseteq A^*$, принадлежащие ядру $K(s, t)$ согласно n° 116. Всякий интегральный оператор с ядром $K(s, t)$ является частью оператора A^*. Следовательно, $T \subseteq A^*$. Поэтому $T^* \supseteq A^{**} \supseteq A$ и, значит, $[L^2]_K \subseteq D_{T^*}$, т. е. условие 1° доказано. Равным образом доказано условие 3°, так как при $f, g \in [L^2]_K$

$$(T^*f, g) = (A_0f, g) = (f, A_0g) = (f, T^*g).$$

Наконец, условие 2° следует из того, что при любых $f, g \in [L^2]_K$

$$(T^*f, T^*g) = (A_0f, A_0g) = \int_{-\infty}^{\infty} ds \int_{-\infty}^{\infty} K(s, u) f(u)\, du \int_{-\infty}^{\infty} \overline{K(s, v)}\, \overline{g(v)}\, dv$$

и, значит,

$$|(T^*f, T^*g)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(u)|\, du \int_{-\infty}^{\infty} |g(v)|\, dv \int_{-\infty}^{\infty} |K(s, u) K(s, v)|\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(u)| K(u)\, du \int_{-\infty}^{\infty} |g(v)| K(v)\, dv = \|f\|_K \cdot \|g\|_K.$$

Переходя к доказательству достаточности, примем, что требуемая теоремой функция $P(s)$ существует. Далее, возьмем какой-нибудь элемент $f \in D_T$ и произвольный элемент $g \in [L^2]_P$. Скалярное произведение $(g, Tf) = (T^*g, f)$ является в силу 1° и 2° линейным функционалом от g в $[L^2]_P \subseteq L_P$ с нормой $\leqslant \|f\|$. Этот функционал можно расширить по непрерывности на все пространство L_P. Значит, существует такая измеримая функция $\alpha(s)$, что

$$(g, Tf) = \int_{-\infty}^{\infty} g(s)\, \overline{\alpha(s)}\, ds$$

и

$$\operatorname{vrai}\max \frac{|\alpha(s)|}{P(s)}.$$

Так как почти всюду

$$(Tf)(s) = \alpha(s),$$

то для почти всех s

$$|(Tf)(s)| \leqslant P(s) \|f\|. \tag{1}$$

Это неравенство, таким образом, имеет место для выбранной функции $f \in D_T$ при любом $s \overline{\in} e_f$, где e_f — зависящее от f множество меры нуль. Возьмем теперь какое-нибудь счетное множество, всюду плотное в D_T. Ортогонализируя это множество, получим некоторую ортонормированную последовательность $\{h_k\}_1^\infty \subset D_T$ и возьмем множество $\mathfrak{N}$ элементов вида

$$f_n = c_1h_1 + c_2h_2 + \ldots + c_nh_n,$$

где n пробегает натуральный ряд, а при каждом n коэффициенты $c_1, c_2, \ldots, c_n$ принимают всевозможные комплексные значения с рациональными компонентами. Множество $\mathfrak{N}$ счетно. Каждому элементу $f_n \in \mathfrak{N}$ отвечает свое исключительное множество e_{f_n} меры нуль на оси s. Соединение всех этих множеств e_{f_n} обозначим e. Оно также имеет меру нуль. Таким образом, при $s \overline{\in} e$ для любого элемента $f \in \mathfrak{N}$

$$|(Tf)(s)| \leqslant P(s) \|f\|.$$

Это неравенство будет иметь место при $s \overline{\in} e$ для любого элемента f^*, принадлежащего линейной оболочке $\mathfrak{M}$ множества $\{h_k\}_1^\infty$. В самом деле, пусть

$$f^* = \gamma_1h_1 + \gamma_2h_2 + \ldots + \gamma_nh_n \in \mathfrak{M}.$$

Возьмем элемент

$$f_n = c_1h_1 + c_2h_2 + \ldots + c_nh_n \in \mathfrak{N}.$$

Тогда

$$|(Tf^*)(s) - (Tf_n)(s)| \leqslant n \cdot \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\gamma_k - c_k| \cdot \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |(Th_i)(s)| \leqslant$$

$$\leqslant n \cdot \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\gamma_k - c_k| \cdot P(s)$$

и, значит, при надлежащем выборе чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$ мы будем иметь неравенство

$$|(Tf^*)(s) - (Tf_n)(s)| \leqslant \varepsilon P(s) \qquad (s \overline{\in} e).$$

Отсюда следует, что

$$|(Tf^*)(s)| \leqslant |(Tf_n)(s)| + \varepsilon P(s) \leqslant P(s)\,\|f_n\| + \varepsilon P(s) \leqslant$$
$$\leqslant P(s)\,\|f^*\| + 2\varepsilon P(s),$$

и так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то наше утверждение доказано, т. е. неравенство (1) выполнено при $s \,\bar{\in}\, e$ для любого элемента $f \in \mathfrak{M}$. Но в таком случае $(Tf)(s)$ является при любом $s \,\bar{\in}\, e$ линейным функционалом в $\mathfrak{M} \subset \mathrm{L}^2$ с нормой $\leqslant P(s)$. Этот линейный функционал можно расширить на все пространство L^2 без увеличения нормы. Значит, существует функция $K_s(t) \equiv K(s, t)$, измеримая по t при каждом $s \,\bar{\in}\, e$ и такая, что для любого $f \in \mathfrak{M}$ и $s \,\bar{\in}\, e$

$$(Tf)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} K(s, t) f(t)\, dt, \tag{2}$$

причем

$$\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |K(s, t)|^2 dt \right\}^{1/2} \leqslant P(s). \tag{3}$$

Из (3) следует, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(s, t) h(t)\, dt \qquad (s \,\bar{\in}\, e)$$

существует при любой функции $h(t) \in \mathrm{L}^2$. А так как всякая функция $h(t) \in \mathrm{L}^2$ является пределом последовательности функций $f(t) \in \mathfrak{M}$, для которых рассматриваемый интеграл есть измеримая функция от s, то этот интеграл является измеримой функцией от s при любой функции $h(t) \in \mathrm{L}^2$. Отсюда на основании леммы 2 n° 25 следует, что функцию $K(s, t)$ можно считать измеримой в плоскости s, t.

Докажем, что T есть интегральный оператор с ядром $K(s, t)$. Пусть $f \in \mathfrak{M}$, $g \in [\mathrm{L}^2]_P$. В силу (2)

$$(f, T^*g) = (Tf, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(s)}\, ds \int_{-\infty}^{\infty} K(s, t) f(t)\, dt. \tag{4}$$

С другой стороны, для любого элемента $f \in \mathrm{L}^2$ при $g \in [\mathrm{L}^2]_P$ в силу (3)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(s)|\, ds \int_{-\infty}^{\infty} |K(s, t)| \cdot |f(t)|\, dt \leqslant \|f\| \cdot \int_{-\infty}^{\infty} P(s)\, |g(s)|\, ds < \infty,$$

а значит, по теореме Фубини,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(s)}\, ds \int_{-\infty}^{\infty} K(s,\ t) f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt \int_{-\infty}^{\infty} K(s,\ t) \overline{g(s)}\, ds. \tag{5}$$

Если $f \in \mathfrak{M}$, то в силу (4) левая, а потому и правая части (5), равны $(f,\ T^*g)$. Отсюда благодаря плотности $\mathfrak{M}$ в L^2 заключаем, что почти всюду

$$(T^*g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{K(s,\ t)}\, g(s)\, ds \qquad (g \in [L^2]_P).$$

Поэтому правая часть (5) равна $(f,\ T^*g)$ для любого $f \in L^2$, а следовательно, равенство (4) и вместе с ним представление (2) справедливы для любого $f \in D_T$. Таким образом, доказано, что T есть интегральный оператор с ядром $K(s,\ t)$.

Остается доказать, что почти всюду в плоскости $s,\ t$

$$K(s,\ t) = \overline{K(t,\ s)}\ . \tag{6}$$

Для этого воспользуемся условием 3° теоремы и равенствами (4) и (5) для произвольных элементов $f,\ g \in [L^2]_P$. Мы получим соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(s,\ t)\overline{g(s)} f(t)\, ds\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(s)}\, ds \int_{-\infty}^{\infty} K(s,\ t) f(t)\, dt =$$

$$= (f,\ T^*g) = (T^*f,\ g) = \overline{(g,\ T^*f)} =$$

$$= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)}\, dt \int_{-\infty}^{\infty} K(t,\ s) g(s)\, ds} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{K(t,\ s)}\,\overline{g(s)} f(t)\, ds \cdot dt,$$

из которого и следует равенство (6) почти всюду в плоскости $s,\ t$.

Теорема доказана.

Замечание. Условия 1°—3° доказанной теоремы вместе с требованием

4°. $\qquad |(T^*f,\ g)| \leqslant \|f\|_P \cdot \|g\|_P \qquad (f,\ g \in [L^2]_P)$

необходимы и достаточны для того, чтобы оператор T был интегральным оператором с ядром Карлемана $K(s,\ t)$, удовлетворяющим почти всюду в плоскости $s,\ t$ неравенству

$$|K(s,\ t)| \leqslant P(s)\, P(t).$$

Примером таких операторов являются операторы F_λ $(\lambda \neq 0)$, введенные в n° 118 для произвольного оператора Карлемана

122. Теорема Неймана*). Естественно возникает вопрос о том, насколько широк класс самосопряженных операторов в L^2, которые являются интегральными операторами Карлемана или унитарно эквивалентны им. Ответ на этот вопрос дан Нейманом. Его теорема гласит:

Самосопряженный оператор B в L^2 унитарно эквивалентен интегральному оператору с ядром Карлемана в том и только том случае, когда непрерывный спектр оператора B содержит точку $\lambda = 0$.

Доказательство. Начнем с доказательства достаточности условия. При этом мы можем предположить, что спектр оператора B чисто точечный. Действительно, такой спектр (согласно теореме n° 94) будет во всяком случае у оператора $C = B + R$ при надлежащем выборе самосопряженного оператора R с конечной (даже сколь угодно малой) абсолютной нормой, а оператор R этого рода, равно как и всякий ему унитарно эквивалентный оператор, является интегральным оператором Гильберта — Шмидта.

Таким образом, мы можем принять, что оператор B имеет чисто точечный спектр. Пусть $\{\lambda_i\}_1^\infty$ есть последовательность всех его собственных значений. Положим, что точка $\lambda = 0$ является предельной точкой спектра, так что существует бесконечная последовательность индексов m_q ($\pm q = 1, 2, 3, \ldots$), для которой

$$|\lambda_{m_q}| \leqslant \frac{1}{1+|q|} \qquad (\pm q = 1, 2, 3, \ldots).$$

Множество остальных индексов пусть будет $\{n_p\}_{p=-\infty}^{\infty}$. Представим совокупность всех натуральных чисел в виде счетного множества последовательностей

$$\{l_{pk}\}_{p=-\infty}^{\infty} \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

где

$$l_{p1} = n_p, \qquad l_{pk} = m_{2^{k-2}(2p-1)} \qquad (k = 2, 3, \ldots).$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_{l_{pk}}| \leqslant |\lambda_{n_p}| + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^{k-2}|2p-1|} = |\lambda_{n_p}| + \frac{2}{|2p-1|} = \mathscr{C}_p < \infty.$$

Возьмем какую-нибудь полную ортонормированную систему функций $\{\psi_k(s)\}_1^\infty$ в интервале $0 \leqslant s \leqslant 1$, удовлетворяющую требованию равномерной ограниченности:

$$|\psi_k(s)| \leqslant \mathscr{M} \qquad (0 \leqslant s \leqslant 1,\ k = 1, 2, 3, \ldots).$$

*) J. von Neumann, Charakterisierung des Spektrums eines Integraloperators (Act. sc. et ind.), Paris, 1935.

Например, можно взять $\psi_k(s) = \sqrt{2}\sin(k\pi s)$. Далее положим

$$\varphi_{p,k}(s) = \begin{cases} \psi_k(s-p), & s \in [p, p+1), \\ 0, & s \,\overline{\in}\, [p, p+1). \end{cases}$$

Ясно, что $\{\varphi_{p,k}(s)\}$ есть полная ортонормированная система в $L^2(-\infty, \infty)$. Ряд

$$K(s, t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{l_{pk}} \varphi_{p,k}(s)\varphi_{p,k}(t)$$

сходится всюду и притом абсолютно. Действительно, если, например,

$$i \leqslant s < i+1, \qquad j \leqslant t < j+1,$$

то при $i \neq j$ все члены равны нулю, а при $i = j$

$$K(s, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{l_{ik}} \psi_k(s-i)\psi_k(t-i),$$

откуда

$$|K(s, t)| \leqslant \mathscr{M}^2 \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_{l_{ik}}| \leqslant \mathscr{M}^2\mathscr{C}_i \qquad \left(i \leqslant {s \atop t} < i+1\right).$$

Мы замечаем также, что

$$K^2(s) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |K(s, t)|^2 \, dt \leqslant \mathscr{M}^4\mathscr{C}_i^2 \qquad (i \leqslant s < i+1).$$

Поэтому эта величина конечна при любом s. Таким образом, мы пришли к интегральному оператору

$$(Af)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t, s) f(s) \, ds$$

с ядром Карлемана, и наше построение показывает, что

$$(A\varphi_{p,k})(t) = \lambda_{l_{pk}} \varphi_{p,k}(t).$$

Так как $\{\varphi_{p,k}(t)\}$ есть полная ортонормированная последовательность, то спектр построенного интегрального оператора чисто точечный и последовательность точек $\lambda_{l_{pk}}$, где $\pm p = 0, 1, 2, \ldots$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, образует полную систему его собственных значений.

Доказательство достаточности закончено.

Чтобы доказать необходимость, положим, что нам дан самосопряженный интегральный оператор

$$(Af)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t, s) f(s) \, ds$$

с ядром Карлемана.

Требуется доказать, что точка 0 принадлежит его непрерывному спектру. Для этого достаточно построить (см. n° 93) ортонормированную систему функций $\{\varphi_k(t)\}_1^\infty \subset L^2(-\infty, \infty)$ (не обязательно полную), для которой

$$\lim_{k\to\infty} \| A\varphi_k \| = 0.$$

Возможность этого построения, а вместе с тем и необходимость условия в теореме Неймана, вытекают непосредственно из следующего вспомогательного предложения, к доказательству которого, таким образом, сводится наша задача.

Лемма. *Какова бы ни была конечная система функций* $\{\varphi_k(t)\}_1^m \subset L^2(-\infty, \infty)$ *и каково бы ни было число* $\varepsilon > 0$, *существует функция* $\psi(t) \in L^2$, *удовлетворяющая условиям*

$$\|\psi\| = 1, \quad \|A\psi\| < \varepsilon, \quad (\varphi_k, \psi) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

где A *— интегральный оператор с ядром Карлемана (не обязательно самосопряженный).*

Доказательство леммы. По свойству ядра Карлемана, можно указать некоторое число $N > 0$ и множество $E \subset \subset [0, 1]$ положительной лебеговой меры таким образом, чтобы это ядро $K(s, t)$ удовлетворяло неравенству

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K(s, t)|^2 \, dt \leqslant N \qquad (s \in E).$$

Положим

$$w_s(t) = \begin{cases} \overline{K(s, t)} & (s \in E), \\ 0 & (s \overline{\in} E), \end{cases}$$

так что

$$\|w_s\|^2 \leqslant N \qquad (s \in E),$$

$$\|w_s\| = 0 \qquad (s \overline{\in} E)$$

и, следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|w_s\|^2 \, ds = \int_E \|w_s\|^2 \, ds \leqslant N.$$

Введем теперь новую меру, равную

$$\int_e \|w_s\|^2 \, ds$$

для множества e, и назовем ее для краткости *w-мерой.*

Следующий шаг построений состоит в выборе какого-нибудь ортонормированного базиса $\{g_k(t)\}_1^\infty \subset L^2$. С помощью этого базиса построим бесконечную последовательность функций $\Phi_k(s) = (w_s, g_k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$; все они отличны от нуля лишь при $s \in E$. По теореме Лузина из E можно удалить некоторое множество сколь угодно малой w-меры $\leqslant \eta$ $\left(\text{мы примем } \eta < \frac{1}{4}\varepsilon^2\right)$ так, чтобы на оставшемся множестве функция $\Phi_0(s) = \|w_s\|^2$ была непрерывна. Из этого последнего множества удалим подмножество w-меры $\leqslant \frac{1}{2}\eta$ так, чтобы на новом множестве была непрерывна также функция $\Phi_1(s)$. Продолжая неограниченно этот процесс, мы придем к множеству $F \subset E$, дополнение которого до E имеет w-меру $\leqslant 2\eta$. Множество F можно, очевидно, считать замкнутым, так как замкнутость всегда может быть достигнута удалением еще одного открытого множества сколь угодно малой w-меры. На множестве F все функции $\Phi_k(s)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ непрерывны. Поэтому, если $s \in F$, $s_0 \in F$ и $s \to s_0$, то

$$\|w_s\| \to \|w_{s_0}\|, \quad (w_s, g_k) \to (w_{s_0}, g_k) \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Из этих соотношений следует, что

$$\lim_{s \to s_0} \|w_s - w_{s_0}\| = 0.$$

Более того, в силу ограниченности и замкнутости множества F, здесь имеет место равномерность, а именно: при любом $\theta > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что при $|s'' - s'| < \delta$, $s'' \in F$, $s' \in F$ выполняется неравенство

$$\|w_{s''} - w_{s'}\|^2 < \theta.$$

Поэтому при любом $\theta > 0$ $\left(\text{мы примем } \theta < \frac{1}{2}\varepsilon^2\right)$ можно найти точки $s_1, s_2, \ldots, s_p \in F$, где $p = p(\theta)$, таким образом, чтобы для любой точки $s \in F$ при каком-нибудь j $(1 \leqslant j \leqslant p)$ имело место неравенство

$$\|w_s - w_{s_j}\|^2 < \theta.$$

Теперь возьмем произвольную функцию $\psi(t) \in L^2$, $\|\psi\| = 1$, ортогональную к функциям $w_{s_k}(t)$ $(k = 1, 2, \ldots, p)$, и покажем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(w_s, \psi)|^2 \, ds < \varepsilon^2.$$

В самом деле,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(\omega_s,\ \psi)|^2\, ds = \int_{\mathrm{E}} |(\omega_s,\ \psi)|^2\, ds =$$

$$= \int_{\mathrm{F}} |(\omega_s,\ \psi)|^2\, ds + \int_{\mathrm{E-F}} |(\omega_s,\ \psi)|^2\, ds =$$

$$= \int_{\mathrm{F}} |(\omega_s - \omega_{s_j},\ \psi)|^2\, ds + \int_{\mathrm{E-F}} |(\omega_s,\ \psi)|^2\, ds \leqslant \theta + 2\eta < \varepsilon^2.$$

Примем дополнительно, что $\psi(s) = 0$ при $s \,\overline{\in}\, \mathrm{E}$. Тогда

$$\| A\psi \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} ds \left| \int_{-\infty}^{\infty} K(s,\ t)\,\psi(t)\, dt \right|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} ds \left| \int_{\mathrm{E}} \overline{\overline{K(s,\ t)}\,\overline{\psi(t)}}\, dt \right|^2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} ds \left| \int_{\mathrm{E}} \omega_s(t)\,\overline{\psi(t)}\, dt \right|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |(\omega_s,\ \psi)|^2\, ds < \varepsilon^2.$$

Мы видим, что если бы функция $\psi(t)$ еще была ортогональна каждой из функций $\varphi_k(t)$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$, то она удовлетворяла бы всем условиям леммы, и эта лемма была бы доказана. Итак, остается показать, как такую функцию построить. С этой целью возьмем $m + p + 1$ линейно независимых функций $\psi_k(t) \in \mathrm{L}^2$, равных нулю вне E. Такие функции существуют *), так как мера E положительна. После того как функции $\psi_k(t)$ выбраны, можно положить

$$\psi(t) = \sum_{k=1}^{m+p+1} \gamma_k \psi_k(t),$$

требуя, чтобы

$$\|\psi\| = 1,\ (\varphi_r,\ \psi) = 0\ \ (r = 1,\ 2,\ \ldots,\ m),\ (\omega_{s_k},\ \psi) = 0\ \ (k = 1, 2,\ \ldots,\ p).$$

Эта система уравнений разрешима относительно γ_k (причем с помощью этих уравнений коэффициенты γ_k определяются в существенном однозначно, т. е. с точностью до постоянного множителя, равного 1 по модулю).

Таким образом, лемма доказана и тем самым доказательство теоремы Неймана закончено.

---

*) Например, можно в E выбрать $m + p + 1$ непересекающихся подмножеств положительной меры и взять в качестве функций $\psi_k(t)$ характеристические функции этих подмножеств.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

123. Самосопряженные дифференциальные операции. Настоящее добавление содержит основные сведения по теории обыкновенных дифференциальных операторов. Изложение ряда специальных вопросов, а также другие подходы к теории читатель найдет в монографиях Э. Ч. Титчмарша, Б. М. Левитана, М. А. Наймарка *).

Начнем с изложения некоторых фактов относительно вещественных дифференциальных выражений (или, как мы условимся их называть, *дифференциальных операций*), самосопряженных в смысле Лагранжа.

В курсах анализа устанавливается, что самосопряженная дифференциальная операция второго порядка

$$l_0D^2 + l_1D + l_2D^0 \qquad \left(l_k = l_k(t),\ D^k = \frac{d^k}{dt^k}\right)$$

в предположении k-кратной дифференцируемости коэффициента $l_k(t)$ может быть приведена к виду

$$-Dp_0D + D^0p_1D^0.$$

Здесь $p_0(t)$ есть дифференцируемая функция. Однако можно рассматривать подобную операцию без предположения о дифференцируемости функции $p_0(t)$. При этом полученную операцию придется применять лишь к таким дифференцируемым функциям $\varphi(t)$, для которых произведение $p_0\varphi'$ абсолютно непрерывно.

Обратимся теперь к самосопряженным дифференциальным операциям порядка $2n$. Мы примем здесь в качестве канонической формы такой операции выражение

$$l = p_nD^0 - D\{p_{n-1}D - D[p_{n-2}D^2 - \ldots - D(p_1D^{n-1} - Dp_0D^n)]\}. \quad (1)$$

Если коэффициент $p_{n-k}(t)$ дифференцируем k раз ($k = 0, 1, \ldots$ $\ldots, n$), то мы получим обычную дифференциальную операцию, самосопряженность которой проверяется непосредственно. Мы,

*) Э. Ч. Титчмарш, Разложения по собственным функциям, ИЛ, т. I, 1960; т. II, 1961; Б. М. Левитан, Разложение по собственным функциям, Гостехиздат, 1950; М. А. Наймарк, Линейные дифференциальные операторы, Гостехиздат, 1954.

однако, не будем предполагать дифференцируемость коэффициентов $p_{n-k}(t)$, сохраняя при этом за операцией (1) название дифференциальной. Обозначая через (a, b) тот незамкнутый конечный или бесконечный интервал, в котором дифференциальная операция (1) рассматривается, мы будем предполагать, что коэффициенты $p_k(t)$ в этом интервале измеримы и в каждой замкнутой части $[\alpha, \beta]$ этого интервала (a, b) удовлетворяют условиям

$$\int_\alpha^\beta \frac{dt}{|p_0(t)|} < \infty, \quad \int_\alpha^\beta |p_k(t)|\, dt < \infty \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Если интервал (a, b) конечен и если условия (2) выполняются при $\alpha = a$, $\beta = b$, то операцию (1) называют *регулярной*. Если же интервал (a, b) бесконечен или если он конечен, но условия (2) не выполняются при $\alpha = a$ или $\beta = b$, то операцию (1) называют *сингулярной*. При этом левый конец a называется *сингулярным*, если $a = -\infty$ или $a > -\infty$, но в (2) нельзя положить $\alpha = a$. Аналогично определяется сингулярность правого конца b. Если конец не является сингулярным, то его называют *регулярным*. Сингулярные операции с одним сингулярным концом мы будем рассматривать, не нарушая общности, на полуоси $(0, \infty)$, а с двумя — на всей оси $(-\infty, \infty)$. При этом для удобства введем вместо производных $D^k\varphi = \varphi^{(k)}$ так называемые квазипроизводные $D^{[k]}\varphi = \varphi^{[k]}$, которые определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned} &D^{[k]} = D^k && (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1), \\ &D^{[n]} = p_0 D^n, && \\ &D^{[n+k]} = p_k D^{n-k} - D D^{[n+k-1]} && (k = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}$$

Теперь операция (1) может быть записана в форме

$$l = D^{[2n]}.$$

Пусть D^* означает класс всех тех функций $\varphi(t) \in \mathrm{L}^2(a, b)$, для которых квазипроизводные $\varphi^{[k]}(t)$ $(k = 0, 1, \ldots, 2n-1)$ абсолютно непрерывны, а квазипроизводная $\varphi^{[2n]}(t)$ принадлежит $\mathrm{L}^2(a, b)$. Очевидно, D^* есть наибольшее линейное многообразие в $\mathrm{L}^2(a, b)$, на котором операция l имеет естественный смысл и может рассматриваться как оператор в $\mathrm{L}^2(a, b)$. Мы обозначим этот оператор L^*, так что $\mathrm{D}^* = \mathrm{D}_{L^*}$. Ниже мы обнаружим целесообразность этого обозначения.

Из представления (1) легко получить для любых двух функций $\varphi, \psi \in \mathrm{D}^*$ так называемое *тождество Лагранжа*

$$l[\varphi]\bar{\psi} - \varphi l[\bar{\psi}] = \frac{d}{dt}[\varphi, \psi]_t,$$

где $[\varphi, \psi]_t$ — следующая билинейная форма:

$$[\varphi, \psi]_t = \sum_{k=1}^{n} \{\varphi^{[k-1]}(t)\overline{\psi^{[2n-k]}(t)} - \varphi^{[2n-k]}(t)\overline{\psi^{[k-1]}(t)}\}.$$

Мы будем пользоваться тождеством Лагранжа в виде

$$\int_{\alpha}^{\beta} l[\varphi(t)]\overline{\psi(t)}\,dt - \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t)\, l[\overline{\psi(t)}]\,dt = [\varphi, \psi]_{\alpha}^{\beta},$$

где $[\alpha, \beta]$ — любая замкнутая часть интервала (a, b) и

$$[\varphi, \psi]_{\alpha}^{\beta} = [\varphi, \psi]_{\beta} - [\varphi, \psi]_{\alpha}.$$

Так как каждый из интегралов

$$\int_{\alpha}^{\beta} l[\varphi(t)]\overline{\psi(t)}\,dt, \qquad \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t)\, l[\overline{\psi(t)}]\,dt$$

существует при $\alpha = a$, $\beta = b$, то *билинейная форма* $[\varphi, \psi]_t$ *имеет конечное значение и на концах интервала* (a, b), *независимо от того, являются ли эти концы регулярными или сингулярными*. При этом под значением билинейной формы на сингулярном конце мы понимаем предел $[\varphi, \psi]_t$ при приближении t к этому концу.

Пусть l — дифференциальная операция, регулярная или сингулярная на интервале (a, b), а $g(t)$ — комплексная функция, измеримая и локально суммируемая в этом интервале. *Решением* уравнения

$$l[y] - \lambda y = g(t) \tag{3}$$

при некотором значении параметра λ естественно называть всякую функцию $\varphi(t)$, которая абсолютно непрерывна вместе со своими квазипроизводными до $(2n-1)$-го порядка и которая обращает это уравнение в тождество почти всюду в (a, b).

Для уравнения (3) имеет место следующая теорема существования, доказательство которой нетрудно получить, пользуясь методом последовательных приближений Пикара.

Теорема. *Уравнение* (3) *имеет решение* $\varphi(t)$, *и притом только одно, удовлетворяющее условиям типа Коши*

$$\varphi^{[k]}(t_0) = \alpha_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1),$$

где t_0 — *произвольная внутренняя точка интервала* (a, b) *или его регулярный конец*.

Заметим, что если операция l регулярна на интервале (a, b), и $g(t) \in L^2(a, b)$, то в силу самого уравнения (3) это решение будет принадлежать D^*.

Из теоремы существования следует, в частности, что линейное многообразие решений однородного уравнения

$$l[u]-\lambda u=0 \tag{4}$$

имеет размерность $2n$. Необходимым и достаточным условием линейной независимости решений $u_1, u_2, \ldots, u_{2n}$ уравнения (4) является неравенство нулю определителя типа Вронского

$$W[u_1, u_2, \ldots, u_{2n}]=\det\left(u_i^{[k-1]}(t)\right)_{i,k=1}^{2n}.$$

Любая система $2n$ линейно независимых решений уравнения (4) называется *фундаментальной*.

Если функции

$$u_1(t),\ u_2(t),\ \ldots,\ u_{2n}(t) \tag{5}$$

образуют фундаментальную систему решений уравнения (4), то любое решение неоднородного уравнения (3) можно представить в виде

$$\varphi(t)=\sum_{k=1}^{2n} u_k(t)\int_{t_0}^{t} v_k(s)\,g(s)\,ds+\sum_{k=1}^{2n} c_k u_k(t),$$

что легко установить, модифицируя надлежащим образом классический метод вариации произвольных постоянных. При этом, как и в классическом случае, устанавливается, что функции

$$v_1(t),\ v_2(t),\ \ldots,\ v_{2n}(t) \tag{6}$$

также образуют фундаментальную систему решений уравнения (4), так называемую *сопряженную* по отношению к (5) систему.

Для дальнейшего нам еще понадобится следующая простая

Лемма. *Если операция l регулярна на интервале (a, b), то для разрешимости уравнения* (3) *при граничных условиях*

$$y^{[k]}(a)=y^{[k]}(b)=0 \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 2n-1)$$

необходимо и достаточно, чтобы правая часть $g(t)$ была ортогональна к $2n$-мерному многообразию решений однородного уравнения (4).

Доказательство. Пусть $\varphi(t)$ — решение уравнения (3), удовлетворяющее условиям

$$\varphi^{[k]}(b)=0 \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 2n-1).$$

Применяя тождество Лагранжа к функции $\varphi(t)$ и некоторой функции $u_i(t)$ из фундаментальной системы решений уравнения (4), получаем

$$\sum_{k=1}^{n} \{u_i^{[k-1]}(a)\,\overline{\varphi^{[2n-k]}(a)} - u_i^{[2n-k]}(a)\,\overline{\varphi^{[k-1]}(a)}\} = \int_a^b u_i(s)\,\overline{g(s)}\,ds. \tag{7}$$

Подчиняя фундаментальную систему начальным условиям

$$u_i^{[k-1]}(a) = \begin{cases} 0 & (i \neq k), \\ 1 & (i = k), \end{cases}$$

получим:

$$\overline{\varphi^{[r]}(a)} = \begin{cases} -\int_a^b u_{2n-r}(s)\,\overline{g(s)}\,ds & (r = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1), \\ \int_a^b u_{2n-r}(s)\,\overline{g(s)}\,ds & (r = n,\ n+1,\ \ldots,\ 2n-1), \end{cases} \tag{8}$$

откуда следует справедливость леммы.

124. Регулярные дифференциальные операторы. Пусть l — какая-нибудь регулярная дифференциальная операция, заданная на интервале $(a,\ b)$. Если φ, ψ — произвольно взятые функции из D^*, то разность

$$(L^*\varphi,\ \psi) - (\varphi,\ L^*\psi) = [\varphi,\ \psi]_a^b,$$

вообще говоря, не равна нулю и, следовательно, L^* не является симметрическим оператором. Чтобы правая часть написанного соотношения равнялась нулю, необходимо наложить какие-то дополнительные условия на функции φ, ψ и тем самым перейти от области D^* к некоторой ее части. Во всяком случае достаточно потребовать, чтобы каждая из функций φ, ψ удовлетворяла соотношениям

$$y^{[k]}(a) = y^{[k]}(b) = 0 \quad (k = 0,\ 1,\ \ldots,\ 2n-1). \tag{1}$$

Обозначим через D совокупность всех тех функций из D^*, которые удовлетворяют $4n$ условиям (1). Естественно ожидать, что оператор L, областью определения которого является $D_L = D$ и который в этой области совпадает с L^*, уже будет симметрическим оператором. Так как для любых функций φ, $\psi \in D$

$$(L\varphi,\ \psi) = (\varphi,\ L\psi),$$

то необходимо лишь установить плотность в $L^2(a,\ b)$ многообразия D. Это последнее очевидно в том случае, когда операция l

является дифференциальной в обычном смысле, так как в этом случае многообразие D содержит, например, все многочлены, удовлетворяющие условиям (1). Для доказательства плотности D в $L^2(a, b)$ в общем случае заметим, что на основании леммы n° 123 имеет место разложение в ортогональную сумму

$$L^2(a, b) = \Delta_L \oplus \mathfrak{N}_0, \tag{2}$$

где $\mathfrak{N}_0$ есть $2n$-мерное многообразие решений однородного уравнения

$$l(u) = 0.$$

Примем теперь, что $(h, \varphi) = 0$ для некоторого $h \in L^2(a, b)$ при всех $\varphi \in D$. Мы должны доказать, что $h = 0$. С этой целью обозначим через ψ какое-нибудь решение уравнения

$$l[\psi] = h.$$

На основании тождества Лагранжа

$$(\psi, l[\varphi]) = (l[\psi], \varphi) = (h, \varphi) = 0.$$

Так как $l[\varphi] = L^*\varphi = L\varphi \in \Delta_L$, то в силу (2) $\psi \in \mathfrak{N}_0$, т. е.

$$l[\psi] = 0,$$

и, значит, $h = 0$, что и требовалось доказать.

Докажем теперь, что оператор L^* является сопряженным для оператора L и тем самым оправдывает свое обозначение. Обозначим на минутку оператор, сопряженный с L, через M. Пусть $\psi \in D_M$ и пусть

$$M\psi = \chi.$$

Обозначим через ψ_0 какое-нибудь решение уравнения

$$l[y] = \chi.$$

Тогда в силу тождества Лагранжа при любом $\varphi \in D$

$$(\varphi, \chi) = (\varphi, l[\psi_0]) = (l[\varphi], \psi_0) = (L\varphi, \psi_0).$$

А с другой стороны, по определению сопряженного оператора,

$$(\varphi, \chi) = (\varphi, M\psi) = (L\varphi, \psi).$$

Таким образом,

$$(L\varphi, \psi - \psi_0) = 0.$$

Отсюда, в силу произвольности $\varphi \in D_L$ и разложения (2), следует, что

$$\psi - \psi_0 \in \mathfrak{N}_0.$$

Это включение показывает, что $\psi \in D^*$ и что, следовательно,

$$M\psi = \chi = l[\psi_0] = l[\psi].$$

Итак, мы показали, что

$$M \subseteq L^*.$$

Но, с другой стороны, при любом $\varphi \in D$ и любом $\psi \in D^*$

$$(L\varphi, \psi) - (\varphi, L^*\psi) = [\varphi, \psi]_a^b = 0.$$

Следовательно,

$$L^* \subseteq M.$$

Значит,

$$M = L^*,$$

и наше утверждение доказано.

Читатель легко проверит, что L^{**} совпадает с L, откуда следует замкнутость оператора L.

Как уже отмечалось в п° 123, область D_{L^*} является наиболее широким линейным многообразием, на котором операция l порождает оператор в $L^2(a, b)$. Любой замкнутый симметрический оператор, для которого область определения сопряженного оператора входит в D_{L^*}, является расширением оператора L. Поэтому мы будем называть оператор L регулярным дифференциальным оператором с *минимальной областью определения* или, короче, *минимальным* дифференциальным оператором (порожденным операцией l).

Так как уравнение $L^*\psi - \lambda\psi = 0$ имеет (при любом λ) $2n$ линейно независимых решений, то индексы дефекта оператора L суть $(2n, 2n)$.

125. Самосопряженные расширения *) регулярного дифференциального оператора. Для описания всех самосопряженных расширений оператора L достаточно указать все области определения этих расширений. Мы покажем, что область определения любого самосопряженного расширения оператора L может быть задана с помощью некоторых граничных условий, и дадим характеристику всех таких условий.

---

*) Здесь и далее, говоря о самосопряженных расширениях, мы имеем в виду самосопряжениые расширения первого рода.

Отиосительно общего вида граничных условий, характеризующих самосопряженные расширения диффереициальных операторов, см. М. Г. Крейн, Теория самосопряженных расширеиий полуограиичениых эрмитовых операторов и ее приложения, II, Матем. сб., т. 63 (1947), а также А. А. Графф, К теории линейных дифференциальных систем в области одного измерения, Матем. сб., т. 60 (1946) и т. 63 (1947).

Пусть $\widetilde{L}$ означает некоторое самосопряженное расширение оператора L. Чтобы функция φ из D_{L^*} принадлежала $D_{\widetilde{L}}$, необходимо и достаточно выполнение равенства

$$(L^*\varphi,\ \psi)=(\varphi,\ \widetilde{L}\psi)$$

или, в силу тождества Лагранжа, равенства

$$[\varphi,\ \psi]_a^b=0 \tag{1}$$

при всех $\psi\in D_{\widetilde{L}}$.

Так как

$$\dim D_{\widetilde{L}}=2n \quad (\operatorname{mod} D_L),$$

то в $D_{\widetilde{L}}$ существует $2n$ таких функций $\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_{2n}$, что любая функция ψ из $D_{\widetilde{L}}$ представима в виде

$$\psi=\psi_0+\sum_{k=1}^{2n}\alpha_k\omega_k \quad (\psi_0\in D_L).$$

Так как, далее, в силу условий (1) n° 125, равенство

$$[\varphi,\ \psi_0]_a^b=0$$

имеет место для любой функции φ из D_{L^*}, то условие (1), содержащее «произвольную» функцию ψ, эквивалентно $2n$ условиям

$$[\varphi,\ \omega_k]_a^b=0 \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ 2n); \tag{2}$$

при этом функции $\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_{2n}$ в силу своей принадлежности к $D_{\widetilde{L}}$ удовлетворяют условиям

$$[\omega_i,\ \omega_k]_a^b=0 \quad (i,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ 2n). \tag{3}$$

Равенства (2) можно рассматривать как систему граничных условий, а равенства (3) — как свойство коэффициентов этих условий.

Граничные условия (2) можно записать в виде $2n$ линейно независимых уравнений

$$\sum_{k=1}^{2n}\alpha_{ik}\varphi^{[k-1]}(a)+\sum_{k=1}^{2n}\beta_{ik}\varphi^{[k-1]}(b)=0 \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ 2n), \tag{2'}$$

если положить

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_{ik}=\overline{\omega}_i^{[2n-k]}(a), \qquad \alpha_{i,\,n+k}=-\overline{\omega}_i^{[n-k]}(a),\\ &\beta_{ik}=-\overline{\omega}_i^{[2n-k]}(b),\ \ \beta_{i,\,n+k}=\overline{\omega}_i^{[n-k]}(b) \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n);\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

при этом равенства (3) примут вид

$$\sum_{r=1}^{n} \alpha_{i,\,r}\,\overline{\alpha}_{k,\,2n-r+1}-\sum_{r=1}^{n} \alpha_{i,\,2n-r+1}\,\overline{\alpha}_{k,\,r}=$$
$$=\sum_{r=1}^{n} \beta_{i,\,r}\,\overline{\beta}_{k,\,2n-r+1}-\sum_{r=1}^{n} \beta_{i,\,2n-r+1}\,\overline{\beta}_{k,\,r} \quad (i,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ 2n). \qquad (3')$$

Таким образом, область определения каждого самосопряженного расширения $\widetilde{L}$ оператора L состоит из всех тех функций $\varphi \in \in \mathrm{D}_{L^*}$, которые удовлетворяют $2n$ граничным условиям вида $(2')$ с коэффициентами, обладающими свойством $(3')$.

Положим теперь, что дана некоторая система $2n$ граничных условий вида $(2')$ с коэффициентами, удовлетворяющими условиям $(3')$, и докажем, что такая система задает в вышеуказанном смысле область определения некоторого самосопряженного расширения оператора L.

Примем на мгновение, что в D_{L^*} существует $2n$ функций $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2n}$, удовлетворяющих условиям (4). Тогда условия $(2')$ и равенства $(3')$ примут вид (2) и соответственно (3), и нам придется доказать, что условия (2) при функциях $\omega_k \in \mathrm{D}_{L^*}$, удовлетворяющих соотношениям (3), определяют некоторое самосопряженное расширение оператора L. Докажем сначала это утверждение. С этой целью обозначим через $\widetilde{\mathrm{D}}$ совокупность всех функций $\varphi \in \in \mathrm{D}_{L^*}$, которые удовлетворяют условиям (2), а через D' — совокупность всех функций вида

$$\psi=\psi_0+\sum_{k=1}^{2n} \alpha_k \omega_k,$$

где ψ_0 пробегает D_L, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n}$ — произвольные постоянные. Условия (2) эквивалентны условию, что

$$[\varphi,\ \psi]_a^b=0 \qquad (5)$$

при любом $\psi \in \mathrm{D}'$. Но всякая функция из D' этому условию удовлетворяет, поскольку имеют место соотношения (3). Следовательно, $\mathrm{D}'' \subseteq \widetilde{\mathrm{D}}$. А так как оба многообразия $\widetilde{\mathrm{D}}$ и D'' по модулю D_L $2n$-мерны, то $\widetilde{\mathrm{D}} = \mathrm{D}''$. Поэтому $\widetilde{\mathrm{D}}$ $(\mathrm{D}_L \subset \widetilde{\mathrm{D}} \subset \mathrm{D}_{L^*})$ содержит все функции $\varphi \in \mathrm{D}_{L^*}$, для которых имеет место равенство (5) при любой функции $\psi \in \widetilde{\mathrm{D}}$. На основании леммы п° 46 отсюда и вытекает, что оператор $\widetilde{L} \subset L^*$ с областью определения $\widetilde{\mathrm{D}}$ является самосопряженным расширением оператора L.

Нам остается доказать, что в D_{L^*} существуют функции, принимающие вместе со своими квазипроизводными до $(2n-1)$-го порядка включительно на обоих концах интервала $[a,\ b]$ наперед заданные значения. Действительно, возьмем какую-нибудь функцию $g_1(t)$, ортогональную к многообразию решений однородного уравнения (4) n° 123, и обозначим решение уравнения

$$l[y]-\lambda y=g_1(t),$$

удовлетворяющее заданным условиям в точке a, через $\omega_1(t)$. В силу формул (8) n° 123 $\omega_1^{[k]}(b)=0$ ($k=0, 1, 2, \ldots, 2n-1$). Построив аналогично функцию $\omega_2(t)$, удовлетворяющую заданным условиям на правом конце, и беря сумму $\omega_1(t)+\omega_2(t)$, мы получим функцию из D_{L^*}, удовлетворяющую всем требуемым условиям.

Таким образом, доказана следующая

Теорема. *Система линейно независимых граничных условий* (2′) *определяет самосопряженное расширение оператора* L *в том и только том случае, когда число условий равно* $2n$ *и коэффициенты в* (2′) *обладают свойством* (3′).

Граничные условия, порождающие самосопряженное расширение дифференциального оператора, называются *самосопряженными*.

Условия вида

$$\left.\begin{aligned}&\varphi^{[k-1]}(a)\sin\alpha_k+\varphi^{[2n-k]}(a)\cos\alpha_k=0,\\ &\varphi^{[k-1]}(b)\sin\beta_k+\varphi^{[2n-k]}(b)\cos\beta_k=0\end{aligned}\right\}\quad (k=1, \ldots, n),$$

где α_k, β_k — произвольные вещественные параметры, являются примером самосопряженных (и притом распадающихся) граничных условий.

Повторяя известные выкладки, легко построить функцию Грина $\widetilde{G}(t, s)$ любого такого самосопряженного расширения $\widetilde{L}$ оператора L, для которого $\lambda=0$ не является собственным числом. Функция $\widetilde{G}(t, s)$ есть ядро Гильберта — Шмидта, а интегральный оператор $\widetilde{K}$, определяемый этим ядром, связан с оператором $\widetilde{L}$ формулой

$$\widetilde{K}=\widetilde{L}^{-1}.$$

Отсюда следует, что *спектр оператора* $\widetilde{L}$ *состоит лишь из собственных значений, которые имеют единственную предельную точку и притом на бесконечности.*

Таким будет спектр $\widetilde{L}$ и в том случае, когда $\lambda=0$ оказывается собственным числом. Действительно, меняя параметры в краевых условиях, всегда можно найти такое самосопряженное расширение $\widetilde{L}_1$ оператора L, для которого 0 не является собственным числом, и потому спектр $\widetilde{L}_1$ будет обладать доказанными свойствами. Но тогда эти же свойства сохраняются для спектра любого самосопряженного расширения $\widetilde{L}$ оператора L (так как расширение конечномерно).

В заключение отметим, что если опустить равенства (3′), то граничные условия (2′) определяют квазисамосопряженное расширение оператора L в смысле n° 114.

126. Сингулярные дифференциальные операторы*). Мы начнем со случая, когда интервалом является $(0, \infty)$, т. е. правый конец интервала сингулярен. Левый конец интервала предположим регулярным.

Введем оператор $\mathring{L}$ равенством

$$\mathring{L}\varphi = l[\varphi]$$

на многообразии $D_{\mathring{L}}$, представляющем совокупность всех финитных функций из D^*, которые удовлетворяют условиям

$$\varphi(0) = \varphi^{[1]}(0) = \ldots = \varphi^{[2n-1]}(0) = 0. \quad (1)$$

Так как оператор $\mathring{L}$, очевидно, симметрический, то он допускает замыкание, которое мы обозначим через L и будем называть (см. n° 124) сингулярным дифференциальным оператором с *минимальной областью определения* (короче: *минимальным* дифференциальным оператором).

Теорема 1. *Оператор L^* является сопряженным для оператора L.*

Доказательство. Как и в n° 124, обозначим через M оператор, сопряженный с L. Так как включение

$$D_{L^*} \subseteq D_M$$

и равенство

$$M\psi = l[\psi]$$

при $\psi \in D_{L^*}$ очевидны, то нам надлежит лишь доказать, что

$$D_M \subseteq D_{L^*}.$$

С этой целью, как и в n° 124, возьмем какую-нибудь функцию $\psi \in D_M$ и положим

$$M\psi = \chi.$$

Далее обозначим через ψ_0 какое-нибудь решение уравнения

$$l[y] = \chi.$$

Теперь нам остается доказать, что

$$\psi(t) = \psi_0(t) + u(t),$$

*) n°n° 126, 127 и 128 представляют извлечение из статьи: И. М. Глазман, К теории сингулярных квазидифференциальных операторов, УМН, 5, вып. 6 (1950), 102—135.

где $u(t)$ есть некоторое решение уравнения

$$l[y]=0. \tag{2}$$

С этой целью возьмем функцию $g(t)\in L^2(0,\infty)$, равную нулю при $t\geqslant a$ и ортогональную к $2n$-мерному многообразию решений уравнения (2) в интервале $0\leqslant t\leqslant a$. Тогда согласно n° 123 найдется функция $\varphi(t)$, равная нулю при $t\geqslant a$ и удовлетворяющая уравнению

$$l[\varphi]=g,$$

а также условию (1). Очевидно, $\varphi\in D_L^{\circ}\subset D_L$ и, следовательно,

$$(g,\ \psi)=(L\varphi,\ \psi)=(\varphi,\ M\psi)=(\varphi,\ \chi).$$

Но, с другой стороны *),

$$(g,\ \psi_0)=(l[\varphi],\ \psi_0)=(\varphi,\ l[\psi_0])=(\varphi,\ \chi).$$

Поэтому

$$(g,\ \psi-\psi_0)=0.$$

Отсюда, учитывая степень произвола в выборе функции $g(t)$, мы получим, что

$$\psi(t)-\psi_0(t)=u(t),$$

где $u(t)$ — решение уравнения (2).

Примечание. Отметим, что все функции из D_L удовлетворяют условию (1). Действительно, пусть $\psi(t)$ есть произвольная функция из D_{L^*}, равная нулю при $t\geqslant a$. Тогда при $\varphi\in D_L$ из равенств

$$(L\varphi,\ \psi)=(\varphi,\ L^*\psi),$$

$$(l[\varphi],\ \psi)=[\varphi,\ \psi]_0^a+(\varphi,\ l[\psi])$$

следует, что

$$[\varphi,\ \psi]_0^a=0,$$

откуда

$$[\varphi,\ \psi]_0=0,$$

а в силу произвольности значений $\psi^{[k-1]}(0)$ $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ 2n)$ это означает, что функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условию (1).

Переходим к вопросу о дефектных числах оператора L, которые одинаковы в силу вещественности коэффициентов операции l.

Теорема 2. *Дефектное число m дифференциального оператора $2n$-го порядка на интервале с одним сингулярным концом удовлетворяет неравенству*

$$n\leqslant m\leqslant 2n. \tag{3}$$

*) Хотя $\psi_0\,\overline{\in}\,L^2(0,\infty)$, запись (g,ψ_0) допустима, так как g — финитна.

Доказательство. Правая часть неравенства непосредственно следует из теоремы 1.

Для доказательства левой части неравенства воспользуемся первой формулой Неймана (n° 102)

$$\mathrm{D}_{L^*} = \mathrm{D}_L \oplus \mathfrak{N}_\lambda \oplus \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}.$$

Вследствие равенства размерностей подпространств $\mathfrak{N}_\lambda$ и $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$ достаточно установить, что

$$\dim \mathrm{D}_{L^*} \geqslant 2n \qquad (\mathrm{mod}\, \mathrm{D}_L).$$

С этой целью докажем существование $2n$ линейно независимых функций, принадлежащих D_{L^*}, никакая нетривиальная линейная комбинация которых не принадлежит D_L. Нетрудно видеть, что в качестве таких функций можно взять любые линейно независимые функции $\psi_1(t), \ldots, \psi_{2n}(t)$ из D_{L^*}, удовлетворяющие условию

$$\det\left(\psi_i^{[k-1]}(0)\right)_{i,k=1}^{2n} \neq 0,$$

ибо тогда из предположения

$$\psi = \sum_{i=1}^{2n} \alpha_i \psi_i \in \mathrm{D}_L$$

следуют (см. примечание к теореме 1) равенства

$$\psi(0) = \psi^{[1]}(0) = \ldots = \psi^{[2n-1]}(0) = 0,$$

откуда вытекает, что все $\alpha_i = 0$ $(i = 1, \ldots, 2n)$.

Из теорем 1 и 2 следует, что число решений уравнения

$$l[u] - \lambda u = 0 \qquad (\Im\lambda \neq 0),$$

принадлежащих $\mathrm{L}^2(0, \infty)$, не менее половины порядка операции l (и не зависит от λ).

Число m в неравенстве (3) может принимать любые значения между n и $2n$. Любопытно отметить, что при $l_1 = -i(1+t)D(1+t)$, $l_2 = D^2 - 1$ оператор $2n$-го порядка с минимальной областью определения, порожденный операцией

$$l = l_1^{m-n} l_2^{2n-m} l_1^{m-n} \qquad (n \leqslant m \leqslant 2n)$$

на интервале $(0, \infty)$, имеет индексы дефекта (m, m). Проверка этого факта предоставляется читателю *).

Рассмотрения, относящиеся к случаю интервала $(-\infty, \infty)$ с двумя сингулярными концами, аналогичны приведенным выше.

---

*) В связи с этим см. И. Глазман, Об индексе дефекта дифференциальных операторов, ДАН СССР, т. LXIV, № 2 (1949).

Оператор L с минимальной областью определения и в этом случае определяется как замыкание оператора $\mathring{L}$, но условие (1) следует опустить. Теорема 1, характеризующая оператор L^*, сохраняется. Теорему 2 заменяет следующая

Теорема 3. *Пусть $L^{(-)}$ и $L^{(+)}$ — сингулярные дифференциальные операторы с минимальными областями определения, порожденные операцией l в интервалах* $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$ *соответственно. При этих условиях дефектное число m оператора L определяется формулой*

$$m = m^{(-)} + m^{(+)} - 2n,$$

где $m^{(-)}$ и $m^{(+)}$ — дефектные числа операторов $L^{(-)}$ и $L^{(+)}$ соответственно.

Доказательство. Сузим область определения оператора $\mathring{L}$, подчинив функцию φ из $D_{\mathring{L}}$ дополнительному требованию

$$\varphi(0) = \varphi^{[1]}(0) = \ldots = \varphi^{[2n-1]}(0) = 0,$$

и обозначим полученное таким образом линейное многообразие через D_0, а оператор, совпадающий с оператором $\mathring{L}$ на D_0 и определенный лишь на D_0, обозначим через $\mathring{L}_0$. Пусть L_0 есть замыкание $\mathring{L}_0$. Очевидно,

$$\dim D_L = 2n \quad (\mathrm{mod}\, D_{L_0}).$$

Но в силу замечания n° 102 (стр. 359) $\dim D_L \;(\mathrm{mod}\, D_{L_0})$ равняется избытку дефектного числа оператора L_0 над дефектным числом оператора L. Следовательно, дефектное число оператора L_0 равно

$$m_0 = m + 2n.$$

С другой стороны, оператор L_0 приводится подпространствами $L^2(-\infty, 0)$ и $L^2(0, \infty)$ и при этом

$$L_0 = L^{(-)} \oplus L^{(+)},$$

так что

$$m_0 = m^{(-)} + m^{(+)}.$$

Таким образом,

$$m = m^{(-)} + m^{(+)} - 2n,$$

что и требовалось доказать.

127. Самосопряженные расширения сингулярного дифференциального оператора. Самосопряженные расширения сингулярного оператора, подобно самосопряженным расширениям регулярного оператора, можно характеризовать с помощью системы граничных условий, имеющих, однако, более сложную структуру, чем соответствующие условия п° 125. Займемся случаем, когда всего один конец интервала сингулярен.

Из общей теории расширений (см. п° 102) следует

Теорема 1. *Пусть индексы дефекта оператора* L *есть* (m, m) $(n \leqslant m \leqslant 2n)$ *и пусть функции*

$$u_k(t;\ \lambda) \in L^2(0,\ \infty) \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$$

образуют ортонормированную систему решений уравнения

$$l[u] - \lambda u = 0$$

при некотором фиксированном невещественном значении λ.

При этих условиях существует взаимно однозначное соответствие между классом всех самосопряженных расширений L_ϑ *оператора* L *и классом всех унитарных матриц* $\vartheta = (\vartheta_{ik})$ *m-го порядка. Это соответствие определяется формулой*

$$D_{L_\vartheta} = D_L \oplus \Gamma_\vartheta, \tag{1}$$

где Γ_ϑ *есть линейная оболочка функций*

$$w_i^{(\vartheta)}(t;\ \lambda) = u_i(t;\ \lambda) + \sum_{k=1}^{m} \vartheta_{ik}\overline{u_k(t;\ \lambda)}.$$

Доказательство. Достаточно заметить, что функции $\overline{u_k(t;\lambda)}$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$ образуют ортонормированную систему решений уравнения

$$L^*g - \bar{\lambda}g = 0.$$

Займемся выяснением тех граничных условий, которые характеризуют функции из D_{L_ϑ}.

Теорема 2. *Пусть* L_ϑ — *самосопряженное расширение оператора* L *с индексами дефекта* $(m,\ m)$, *определяемое в смысле теоремы* 1 *унитарной матрицей* ϑ. *Пусть, далее, функции* $w_i^{(\vartheta)}(t;\ \lambda)$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$ *имеют тот же смысл, что и в теореме* 1.

В таком случае область определения D_{L_ϑ} *оператора* L_ϑ *состоит из всех функций* $\varphi(t)$ *из* D_{L^*}, *которые удовлетворяют* m *условиям*

$$[\varphi,\ w_i^{(\vartheta)}]_0^\infty = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m). \tag{2}$$

Доказательство. Заметим сначала, что на основании формулы Лагранжа для принадлежности функции $\varphi(t)$ из D_{L^*} к D_{L_ϑ} необходимо и достаточно выполнение условия

$$[\varphi,\ \psi]_0^\infty = 0 \tag{3}$$

для всех $\psi(t)$ из D_{L_ϑ}. Теперь остается показать, что система условий (3), содержащая «произвольную» функцию $\psi(t)$, сводится (при $\varphi(t) \in D_{L^*}$) к системе m условий (2).

Согласно формуле (1) функция $\psi(t)$ допускает представление

$$\psi(t) = \varphi_0(t) + \sum_{i=1}^{m} c_i w_i^{(\vartheta)}(t;\ \lambda) \qquad (\varphi_0(t) \in D_L),$$

откуда

$$[\varphi,\ \psi]_0^\infty = [\varphi,\ \varphi_0]_0^\infty + \sum_{i=1}^{m} c_i [\varphi,\ w_i^{(\vartheta)}]_0^\infty.$$

Так как $\varphi_0(t) \in D_L$, то

$$[\varphi,\ \varphi_0]_0^\infty = 0$$

при $\varphi(t) \in D_{L^*}$, и в силу произвольности постоянных c_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) эквивалентность условий (3) и (2) установлена.

Мы сохраняем за равенствами (2), содержащими предельный переход, название граничных условий. Нижеследующая теорема указывает случай, когда граничные условия не содержат предельного перехода.

Теорема 3. *Если индексы дефекта оператора L есть (n, n), то системы граничных условий, определяющие самосопряженные расширения L_ϑ оператора L, имеют вид*

$$[\varphi,\ w_i^{(\vartheta)}]_0 = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{4}$$

Доказательство. Для доказательства достаточно установить, что при условиях теоремы любые две функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ из D_ϑ удовлетворяют соотношению

$$[\varphi,\ \psi]_\infty = 0.$$

С этой целью выберем в D_{L^*} функции

$$\psi_i(t)\ \ (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ 2n),\ \ \psi_i(t) = 0 \text{ при } t > a > 0,$$

так, чтобы

$$\det\left(\psi_i^{[k-1]}(0)\right)_{i,k=1}^{2n} \neq 0.$$

При таком выборе функций $\psi_i(t)$ их линейная оболочка не имеет с D_L общих элементов, отличных от нуля. С другой стороны, в силу предположения об индексах дефекта оператора L,

$$\dim D_{L^*} = 2n \qquad (\operatorname{mod} D_L)$$

и, следовательно, для любой функции $\varphi(t) \in \mathrm{D}_{L^*}$ существуют такие константы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n}$, что

$$\varphi(t) - \sum_{i=1}^{2n} \alpha_i \psi_i(t) = \varphi_0(t) \in \mathrm{D}_L,$$

откуда, используя равенство функций $\psi_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, 2n)$ нулю при $t > a$ и равенства $\varphi_0^{[k-1]}(0) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, 2n)$, получаем

$$[\varphi, \psi]_\infty = \left[\varphi_0 + \sum_{i=1}^{2n} \alpha_i \psi_i, \psi\right]_\infty = [\varphi_0, \psi]_\infty = 0.$$

Следует отметить, что в общем случае граничные условия (2) существенно зависят от функций

$$w_i^{(\vartheta)} \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

и, следовательно, не могут быть записаны, пока не задан оператор L. Однако если индексы дефекта оператора L есть (n, n), то граничные условия (4) могут быть по методу п° 125 освобождены от присутствия функций $w_i^{(\vartheta)}(t; \lambda)$ и, стало быть, не зависят от L.

В случае индексов дефекта $(2n, 2n)$ число граничных условий, определяющих самосопряженное расширение сингулярного оператора, равно $2n$, как и в случае регулярного оператора. В силу этого обстоятельства и некоторых других соображений (см. теорему 2 следующего п°) мы будем называть сингулярный оператор с индексами дефекта $(2n, 2n)$ *квазирегулярным*.

Для дифференциального оператора второго порядка возможны лишь случаи $m = 2$ или $m = 1$, что впервые было отмечено Г. Вейлем, назвавшим случай $m = 2$ случаем *предельного круга*, а случай $m = 1$ случаем *предельной точки*. Смысл этой терминологии мы поясним в п° 129.

Построение граничных условий для случая интервала с двумя сингулярными концами проводится без труда использованными в настоящем пункте приемами, и мы можем его опустить.

В заключение остановимся кратко на вопросе о самосопряженных расширениях L_ϑ, вещественных по отношению к оператору комплексного сопряжения в $\mathrm{L}^2(0, \infty)$ (см. п° 50).

Так как оператор L^* вследствие вещественности коэффициентов порождающей дифференциальной операции является вещественным по отношению к оператору комплексного сопряжения, то для вещественности L_ϑ необходимо и достаточно, чтобы многообразие D_{L_ϑ} вместе с функцией $\varphi(t)$ содержало всегда функцию $\overline{\varphi(t)}$.

Используя это обстоятельство и формулу (1), легко установить, что *для вещественности оператора L_ϑ необходимо и достаточно,* *чтобы унитарная матрица* $\vartheta = (\vartheta_{ik})$ *была симметричной относительно транспонирования, т. е. чтобы было*

$$\vartheta_{ik} = \vartheta_{ki} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, m)\,^{*}).$$

Впрочем, в n° 128 нам придется использовать лишь существование хотя бы одного вещественного расширения, а этот факт непосредственно вытекает из формулы (1), если в качестве ϑ взять единичную матрицу.

128. Резольвенты самосопряженных расширений. В настоящем n° мы покажем, что резольвенты самосопряженных расширений дифференциального оператора L являются интегральными операторами, и укажем классы, которым принадлежат ядра этих интегральных операторов при различных индексах дефекта оператора L. Начнем с двух вспомогательных предложений.

Лемма 1. *Пусть резольвента некоторого самосопряженного оператора, действующего в* $\mathrm{L}^2(0, \infty)$ *и вещественного по отношению к операции комплексного сопряжения, имеет на всех финитных функциях* $g(t) \in \mathrm{L}^2(0, \infty)$ вид

$$R_\lambda g = \int_0^\infty K(t, s; \lambda)\, g(s)\, ds,$$

где ядро $K(t, s; \lambda)$ *непрерывно по* s *и по* t *при*

$$t > 0, \quad s > 0 \quad (t \neq s).$$

В таком случае

$$K(t, s; \lambda) = K(s, t; \lambda).$$

Доказательство непосредственно следует из соотношения $R_\lambda^* = JR_\lambda J$ (см. n° 50) и произвольности в выборе функции $g(t)$.

Лемма 2. *Всякий однородный и аддитивный (но, вообще говоря, неограниченный) функционал* $\mathbf{L}$, *определенный на всех финитных функциях* $g(t)$ *из* $\mathrm{L}^2(0, \infty)$ *и ограниченный в* $\mathrm{L}^2(0, a)$ *при каждом конечном* $a > 0$, *допускает представление*

$$\mathbf{L}(g) = \int_0^\infty g(s)\, \overline{h(s)}\, ds, \tag{1}$$

где $h(t)$ — *функция, однозначно определяемая функционалом* $\mathbf{L}$ *и принадлежащая* $\mathrm{L}^2(0, a)$ *при любом конечном* $a > 0$.

*) Отсюда, между прочим, следует, что в случае индексов дефекта (1, 1) всякое самосопряженное расширение будет вещественным.

Доказательство следует из теоремы Рисса об общем виде линейного функционала (см. n° 19), согласно которой на функциях $g(t)$ из $L^2(0, a)$ имеет место представление

$$\mathbf{L}(g)=\int_0^a g(s)\overline{h_a(s)}\,ds \qquad (h_a(s)\in L^2(0,\ a)). \tag{2}$$

Входящая в это представление функция $h_a(t)$ при возрастании a «продолжается» в том смысле, что неравенство $a_1<a_2$ влечет равенство

$$h_{a_1}(t)=h_{a_2}(t)$$

при всех $t<a_1$ (за возможным исключением множества меры нуль), ибо для любой функции $g(t)$ из $L^2(0,\ a_1)$ одновременно имеют место два представления:

$$\mathbf{L}(g)=\int_0^{a_1} g(s)\overline{h_{a_1}(s)}\,ds,\qquad \mathbf{L}(g)=\int_0^{a_2} g(s)\overline{h_{a_2}(s)}\,ds=\int_0^{a_1} g(s)\overline{h_{a_2}(s)}\,ds,$$

откуда

$$\int_0^{a_1}[h_{a_2}(s)-h_{a_1}(s)]\overline{g(s)}\,ds=0.$$

Доказанное обстоятельство позволяет записать формулу (2) в виде (1).

Теорема 1. *Резольвента $\widetilde{R}_\lambda$ любого самосопряженного расширения $\widetilde{L}$ дифференциального оператора L с индексами дефекта $(m,\ m)$ в регулярных точках λ является интегральным оператором.*

Доказательство. Мы проведем сначала доказательство для какого-нибудь вещественного самосопряженного расширения, а затем покажем, что если теорема верна для одного из самосопряженных расширений, то она верна для всех самосопряженных расширений.

Пусть $\widetilde{L}_0$ — вещественное самосопряженное расширение оператора L и $\widetilde{R}^0_\lambda$ — соответствующая резольвента (λ — фиксированная регулярная точка оператора $\widetilde{L}$).

Прежде всего заметим, что элемент $\widetilde{R}^0_\lambda g$ ($g(t)\in L^2(0,\ \infty)$) следует искать в многообразии решений неоднородного уравнения

$$l[y]-\lambda y=g. \tag{3}$$

Выберем фундаментальную систему решений $u_i(t;\ \lambda)$ ($i=1,\ 2,\ \ldots,\ 2n$) соответствующего однородного уравнения

$$l[u]-\lambda u=0 \tag{4}$$

так, чтобы решения $u_1(t;\ \lambda),\ u_2(t;\ \lambda),\ \ldots,\ u_m(t;\ \lambda)$ принадлежали

$L^2(0, \infty)$ (тогда решения $u_{m+1}(t; \lambda), \ldots, u_{2n}(t; \lambda)$ вместе с их нетривиальными линейными комбинациями будут находиться вне $L^2(0, \infty)$; при этом мы не предполагаем, как в предыдущем п°, что решения $u_i(t; \lambda)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ ортонормированы).

Согласно п° 123 общее решение уравнения (3) имеет вид

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{2n} u_k(t; \lambda) \int_0^t v_k(s; \lambda) g(s)\, ds + \sum_{k=1}^{2n} c_k u_k(t; \lambda), \tag{5}$$

где $v_k(t; \lambda)$ $(k = 1, 2, \ldots, 2n)$ — сопряженная по отношению к $u_k(t; \lambda)$ $(k = 1, 2, \ldots, 2n)$ фундаментальная система решений уравнения (4). В формуле (5) постоянные c_k $(k = 1, 2, \ldots, 2n)$ однозначно определятся, если только потребовать, чтобы $\varphi(t) = \widetilde{R}_\lambda^0 g$. Займемся определением значений постоянных, при которых выполняется это условие в предположении, что $g(t)$ финитна.

Прежде всего нужно обеспечить принадлежность $\varphi(t)$ к $L^2(0, \infty)$. Но если $g(t) = 0$ при $t \geqslant a$, то при достаточно больших t

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{2n} u_k(t; \lambda) \int_0^a v_k(s; \lambda) g(s)\, ds + \sum_{k=1}^{2n} c_k u_k(t; \lambda),$$

и для принадлежности $\varphi(t)$ к $L^2(0, \infty)$ необходимо и достаточно выбрать $2n - m$ постоянных c_k $(k = m+1, m+2, \ldots, 2n)$ по формулам

$$c_k = -\int_0^a v_k(s; \lambda) g(s)\, ds = -\int_0^\infty v_k(s; \lambda) g(s)\, ds$$
$$(k = m+1, m+2, \ldots, 2n).$$

Выбирая таким образом эти постоянные, мы получаем для $\widetilde{R}_\lambda^0$ представление

$$\widetilde{R}_\lambda^0 g = \sum_{k=1}^{2n} u_k(t; \lambda) \int_0^t v_k(s; \lambda) g(s)\, ds +$$
$$+ \sum_{k=1}^{m} c_k u_k(t; \lambda) - \sum_{k=m+1}^{2n} u_k(t; \lambda) \int_0^\infty v_k(s; \lambda) g(s)\, ds =$$
$$= \sum_{k=1}^{m} u_k(t; \lambda) \int_0^t v_k(s; \lambda) g(s)\, ds -$$
$$- \sum_{k=m+1}^{2n} u_k(t; \lambda) \int_t^\infty v_k(s; \lambda) g(s)\, ds + \sum_{k=1}^{m} c_k u_k(t; \lambda),$$

или

$$\widetilde{R}^0_\lambda g = \int\limits_0^\infty K(t,\ s;\ \lambda)\, g(s)\, ds + \sum_{k=1}^m c_k u_k(t;\ \lambda), \qquad (6)$$

где

$$K(t,\ s;\ \lambda) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^m u_k(t;\ \lambda)\, v_k(s;\ \lambda) & (s \leqslant t), \\ -\sum\limits_{k=m+1}^{2n} u_k(t;\ \lambda)\, v_k(s;\ \lambda) & (s > t). \end{cases}$$

В представлении (6) $g(t)$ — любая равная нулю вне некоторого конечного интервала функция из $L^2(0,\ \infty)$ и c_k $(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$ — соответствующие ей постоянные. Из этого представления непосредственно следует, что постоянные c_k $(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$ являются однородными и аддитивными функционалами, определенными на всех таких функциях из $L^2(0,\ \infty)$. Покажем, что эти функционалы $c_k = c_k(g)$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$ удовлетворяют условиям леммы 2, т. е. являются ограниченными в $L^2(0,\ a)$ при каждом $a < \infty$. Применяя с этой целью к обеим частям равенства (6) оператор P_a проектирования на подпространство $L^2(0,\ a)$ и умножая их скалярно на $u_i(t;\ \lambda)$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$, получим

$$(P_a \widetilde{R}^0_\lambda g,\ u_i) = (K_a g,\ u_i) + \sum_{k=1}^m c_k (P_a u_k,\ u_i) \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m), \quad (7)$$

где

$$K_a g = P_a \int\limits_0^a K(t,\ s;\ \lambda)\, g(s)\, ds.$$

В системе m уравнений (7) с m неизвестными c_k $(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$ норма оператора $P_a \widetilde{R}^0_\lambda$ ограничена при всех положительных $a < \infty$ (числом, не зависящим от a), а норма интегрального оператора K_a в $L^2(0,\ a)$ с ядром Гильберта — Шмидта ограничена при каждом $a < \infty$ (числом, зависящим от a) и, наконец, определитель Грама

$$\det((P_a u_k,\ u_i))^m_{i,k=1}$$

отличен от нуля в силу линейной независимости решений $u_k(t;\ \lambda)$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$. Отсюда вытекает, что постоянные c_k $(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$ являются ограниченными в $L^2(0,\ a)$ при каждом $a < \infty$ функционалами и, следовательно, по лемме 2 они представимы в виде

$$c_k(g)=\int_0^\infty g(s)\psi_k(s;\ \lambda)\,ds \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

где функции $\psi_k(s;\ \lambda)$ $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$ принадлежат $L^2(0,\ a)$ при любом $a<\infty$. Теперь представление (6) приобретает вид

$$\widetilde{R}_\lambda^0 g=\int_0^\infty K(t,\ s;\ \lambda)g(s)\,ds+\sum_{k=1}^m u_k(t;\ \lambda)\int_0^\infty g(s)\psi_k(s;\ \lambda)\,ds,$$

или

$$\widetilde{R}_\lambda^0 g=\int_0^\infty K_0(t,\ s;\ \lambda)g(s)\,ds, \tag{8}$$

где

$$K_0(t,\ s;\ \lambda)=\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^m u_k(t;\ \lambda)\,[v_k(s;\ \lambda)+\psi_k(s;\ \lambda)] & (s\leqslant t),\\ \sum\limits_{k=1}^m u_k(t;\ \lambda)\psi_k(s;\ \lambda)-\sum\limits_{k=m+1}^{2n} u_k(t;\ \lambda)v_k(s;\ \lambda) & (s>t).\end{cases} \tag{9}$$

Формулой (8) установлено, что резольвента $\widetilde{R}_\lambda^0$ является интегральным оператором на всех финитных функциях $g(t)$ из $L^2(0,\ \infty)$.

Из одного этого обстоятельства еще не следует, что $\widetilde{R}_\lambda^0$ есть оператор интегральный. В силу ограниченности оператора $\widetilde{R}_\lambda^0$, из формулы (8) следует лишь, что для любой функции из $L^2(0,\ \infty)$

$$\widetilde{R}_\lambda^0 g=\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}\int_0^n K_0(t,\ s;\ \lambda)g(s)\,ds. \tag{10}$$

Чтобы получить из этого представления подлежащее доказательству представление резольвенты в виде

$$\widetilde{R}_\lambda^0 g=\int_0^\infty K_0(t,\ s;\ \lambda)g(s)\,ds \qquad (g(t)\in L^2(0,\ \infty)), \tag{11}$$

достаточно убедиться в существовании интеграла

$$\int_0^\infty K_0(t,\ s;\ \lambda)g(s)\,ds$$

при любой функции $g(t) \in L^2(0, \infty)$, а для этого в свою очередь достаточно существования интеграла

$$\int_0^\infty |K_0(t, s; \lambda)|^2 ds \qquad (0 \leqslant t < \infty), \tag{12}$$

т. е. принадлежность ядра $K_0(t, s; \lambda)$ к $L^2(0, \infty)$ как функции от s при каждом t.

Обращаясь к формулам (9), мы замечаем, что ядро $K_0(t, s; \lambda)$ принадлежит $L^2(0, \infty)$ как функция от t при каждом s (ибо $u_k(t; \lambda) \in L^2(0, \infty)$ при $k = 1, 2, \ldots, m$), но так как согласно лемме 1 функция $K_0(t, s; \lambda)$, соответствующая резольвенте вещественного самосопряженного расширения, симметрична относительно аргументов t и s, то существование интеграла (12) установлено и представление (11) доказано.

Аналогичным образом теорема доказывается для резольвенты $\widetilde{R}_\lambda$ любого самосопряженного (не обязательно вещественного) расширения $\widetilde{L}$ при любом вещественном регулярном значении λ, если вместо равенства $K_0(s, t; \lambda) = K_0(t, s; \lambda)$ воспользоваться соотношением $\widetilde{K}(s, t; \lambda) = \overline{\widetilde{K}(t, s; \lambda)}$, где $\widetilde{K}(s, t; \lambda)$ — ядро резольвенты $\widetilde{R}_\lambda$ *).

Для завершения доказательства теоремы остается получить представление для $\widetilde{R}_\lambda$ при $\Im\lambda \neq 0$.

Так как элемент $\widetilde{R}_\lambda g$ ($g(t) \in L^2(0, \infty)$) принадлежит многообразию решений уравнения (3), то он представим в виде

$$\widetilde{R}_\lambda g = \widetilde{R}_\lambda^0 g + \sum_{k=1}^{2n} c_k u_k, \tag{13}$$

где $\widetilde{R}_\lambda^0$ — резольвента какого-нибудь вещественного самосопряженного расширения. Из этого представления, в соответствии с выбором фундаментальной системы $u_k(t; \lambda)$ ($k = 1, 2, \ldots, 2n$), следует, что постоянные c_k при $k > m$ равны нулю, а при $k \leqslant m$ являются линейными (т. е. однородными, аддитивными и ограниченными)

*) Существенным в приведенных выше рассуждениях является то обстоятельство, что переход от (10) к (11) произведен на основании симметрии функции $K_0(t, s; \lambda)$, благодаря чему удалось обойти вопрос о поведении функций $v_k(s; \lambda)$ ($k = m+1, m+2, \ldots, 2n$) и $\psi_k(s; \lambda)$ ($k=1, 2, \ldots, m$) при $s = \infty$. Более того, симметрия ядра $K_0(t, s; \lambda)$ позволяет установить некоторые свойства этих функций на бесконечности (см. ниже теорему 3).

функционалами в $L^2(0, \infty)$ и, следовательно, допускают представление

$$c_k = c_k(g) = \int_0^\infty g(s)\chi_k(s;\ \lambda)\,ds \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m), \tag{14}$$

где функции $\chi_k(s;\ \lambda)$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$ принадлежат $L^2(0, \infty)$.

Вставляя (14) в (13) и вводя ядро $\widetilde{K}(t,\ s;\ \lambda)$ равенством

$$\widetilde{K}(t,\ s;\ \lambda) = K_0(t,\ s;\ \lambda) + \sum_{k=1}^{m} u_k(t;\ \lambda)\chi_k(s;\ \lambda), \tag{15}$$

получим, наконец, интегральное представление резольвенты в виде

$$\widetilde{R}_\lambda g = \int_0^\infty \widetilde{K}(t,\ s;\ \lambda)\,g(s)\,ds \qquad (g(t) \in L^2(0,\ \infty)).$$

Таким образом, теорема 1 полностью доказана *).

Теорема 2. *Ядро $\widetilde{K}(t,\ s;\ \lambda)$ резольвенты $\widetilde{R}_\lambda$ любого самосопряженного расширения $\widetilde{L}$ оператора L с индексами дефекта $(m,\ m)$ в регулярных точках удовлетворяет условиям*

$$\int_0^\infty |\widetilde{K}(t,\ s;\ \lambda)|^2\,ds < \infty, \qquad \int_0^\infty |\widetilde{K}(t,\ s;\ \lambda)|^2\,dt < \infty, \tag{16}$$

а в случае квазирегулярного оператора $(m = 2n)$ — условию

$$\int_0^\infty \int_0^\infty |\widetilde{K}(t,\ s;\ \lambda)|^2\,ds\,dt < \infty. \tag{17}$$

Доказательство. Свойство (16) непосредственно следует из принадлежности к $L^2(0, \infty)$ функции $K_0(t,\ s;\ \lambda)$ (по каждой из переменных) и функций $\chi_k(s;\ \lambda)$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$, а также формулы (15).

Переходя к доказательству свойства (17), установим сначала, что при любых индексах дефекта $(m,\ m)$ $(n \leqslant m \leqslant 2n)$ оператора L функции $\psi_k(t;\ \lambda)$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$ и $v_k(t;\ \lambda)$ $(k = m+1,\ \ldots$ $\ldots,\ 2n)$, фигурирующие в формуле (9) для $K_0(t,\ s;\ \lambda)$, принадлежат пространству $L^2(0, \infty)$. С этой целью снова воспользуемся свойством симметричности функции $K_0(t,\ s;\ \lambda)$. Это свойство

---

*) Обобщение этой теоремы на случай неортогональных резольвент было получено А. В. Штраусом в статье: Формула обобщенных резольвент дифференциального оператора четного порядка, ДАН СССР **111**, № 4 (1956).

означает, что при $s \leqslant t$

$$\sum_{k=1}^{m} u_k(s;\ \lambda)\,\psi_k(t;\ \lambda) - \sum_{k=m+1}^{2n} u_k(s;\ \lambda)\,v_k(t;\ \lambda) = \\ = \sum_{k=1}^{m} [v_k(s;\ \lambda) + \psi_k(s;\ \lambda)]\,u_k(t;\ \lambda). \quad (18)$$

Выберем числа $s_1, s_2, \ldots, s_{2n}$ так, чтобы

$$\det\,(u_k(s_i;\ \lambda))_{i,k=1}^{2n} \neq 0$$

(это возможно в силу линейной независимости функций $u_k(s;\ \lambda)$), и положим в равенстве (18) $s = s_i$ ($i = 1, 2, \ldots, 2n$).

Разрешая полученную систему $2n$ уравнений относительно $2n$ функций $\psi_k(t;\ \lambda)$ ($k = 1, 2, \ldots, m$) и $v_k(t;\ \lambda)$ ($k = m+1, \ldots, 2n$), получим, что каждая из этих функций является некоторой линейной комбинацией функций $u_1(t;\ \lambda), \ldots, u_m(t;\ \lambda)$ и, следовательно, принадлежит пространству $\mathrm{L}^2(0,\ \infty)$.

Перейдем к доказательству свойства (17). В случае квазирегулярного оператора ($m = 2n$) все слагаемые в правой части формулы (9) принадлежат пространству L^2 функций двух переменных в квадранте $t > 0$, $s > 0$ и, следовательно,

$$\int_0^\infty \int_0^\infty |K_0(t,\ s;\ \lambda)|^2\,ds\,dt < \infty. \quad (19)$$

Свойство (17) вытекает из (19) на основании (15).

Из доказанной теоремы следует, что в случае квазирегулярного оператора резольвента любого самосопряженного расширения $\widetilde{L}$ оператора L определяется ядром Гильберта — Шмидта и является поэтому вполне непрерывным оператором.

Из теоремы 2 следует, что ядра вещественной и мнимой части резольвенты любого самосопряженного расширения оператора являются в регулярных точках λ ядрами Карлемана.

Заметим еще, что из рассуждений, приведенных при доказательстве теоремы 2, следует

Теорема 3. *Пусть m означает максимальное число линейно независимых решений уравнения* (4), *принадлежащих* $\mathrm{L}^2(0,\ \infty)$. *Если первые m функций фундаментальной системы решений уравнения* (4) *принадлежат* $\mathrm{L}^2(0,\ \infty)$, *то последние $2n - m$ решений сопряженной фундаментальной системы этого уравнения также принадлежат* $\mathrm{L}^2(0,\ \infty)$.

Следующая теорема посвящена случаю, когда об индексах дефекта оператора L можно судить по числу решений уравнения (4), принадлежащих $\mathrm{L}^2(0,\ \infty)$ при вещественном λ.

Теорема 4. *Для того чтобы оператор L порядка $2n$ имел индексы дефекта $(2n, 2n)$, необходимо, чтобы уравнение*

$$l[u]-\lambda u=0$$

при любом вещественном значении λ имело $2n$ решений из $L^2(0, \infty)$, *и достаточно, чтобы это уравнение имело $2n$ решений из* $L^2(0, \infty)$ *хотя бы при одном вещественном значении λ.*

Доказательство. Для доказательства необходимости сформулированного в теореме условия вспомним, что в случае квазирегулярного оператора резольвента его самосопряженного расширения $\widetilde{L}$ является вполне непрерывным оператором и, следовательно, спектр оператора $\widetilde{L}$ состоит лишь из собственных значений λ_r $(r = 1, 2, 3, \ldots)$ с единственной предельной точкой $\lambda = \infty$. Отсюда следует, что для оператора L все точки плоскости за возможным исключением точек λ_r $(r = 1, 2, 3, \ldots)$ суть точки регулярного типа. На самом деле точка λ_r $(r = 1, 2, 3, \ldots)$ также является точкой регулярного типа, ибо в противном случае λ_r было бы собственным значением оператора L, а уравнение

$$L\varphi-\lambda_r\varphi=0,$$

эквивалентное уравнению

$$l[\varphi]-\lambda_r\varphi=0$$

при условиях

$$\varphi(0)=\varphi^{[1]}(0)=\ldots=\varphi^{[2n-1]}(0)=0,$$

в силу теоремы существования и единственности n° 123, имеет лишь решение $\varphi(t)\equiv 0$.

Таким образом, в случае индексов дефекта $(2n, 2n)$, вся λ-плоскость является полем регулярности оператора L, и по теореме об инвариантности индекса дефекта (n° 100) все решения уравнения (4) при любом значении λ (невещественном или вещественном) принадлежат $L^2(0, \infty)$.

Достаточность сформулированного в теореме условия непосредственно следует из теоремы 4 n° 105.

Нетрудно перенести результаты, полученные в настоящем n°, на случай интервала с двумя сингулярными концами. Наметим доказательство основной теоремы 1 для этого случая. При этом, как и в случае одного сингулярного конца, достаточно рассмотреть резольвенту какого-нибудь вещественного самосопряженного расширения. Пусть (см. доказательство теоремы 3 n° 126) дефектные числа операторов L, $L^{(-)}$, $L^{(+)}$ суть m, $m^{(-)}$, $m^{(+)}$ соответственно. На основании теоремы 3 n° 126

$$\left.\begin{aligned} m^{(-)}&=n+p,\\ m^{(+)}&=n+m-p\end{aligned}\right\}\quad (0\leqslant p\leqslant n).$$

Выберем фундаментальную систему решений уравнения (4) так, чтобы первые m решений $u_k(t;\lambda)$ принадлежали $L^2(-\infty,\infty)$. В $(2n-m)$-мерной линейной оболочке остальных решений этой системы существует $n+p-m$ линейно независимых решений из $L^2(-\infty, 0)$ (обозначим их $u_{m+1}(t;\lambda), \ldots, u_{n+p}(t;\lambda)$) и $n-p$ линейно независимых решений из $L^2(0,\infty)$ (обозначим их $u_{n+p+1}(t;\lambda), \ldots, u_{2n}(t;\lambda)$). Заметим, что функции

$$u_{m+1}(t;\lambda), \ldots, u_{n+p}(t;\lambda), u_{n+p+1}(t;\lambda), \ldots, u_{2n}(t;\lambda)$$

линейно независимы, ибо в противном случае некоторая их линейная комбинация принадлежала бы $L^2(-\infty,\infty)$, откуда следовало бы, что, вопреки предположению, дефектное число оператора L больше m. С помощью выбранной фундаментальной системы $u_k(t;\lambda)$ $(k=1, 2, \ldots, 2n)$ любое решение уравнения

$$l[y]-\lambda y = g,$$

где $g(t)$ — финитная функция, представимо в виде

$$\varphi(t)=\sum_{k=1}^{2n} u_k(t;\lambda)\int_{-\infty}^{t} v_k(s;\lambda)\,g(s)\,ds+\sum_{k=1}^{2n} c_k u_k(t;\lambda),$$

и при надлежащем выборе постоянных c_k эта функция совпадает с $\widetilde{R}_\lambda^0 g$.

Проводя, далее, рассуждения, аналогичные приведенным для случая одного сингулярного конца, получим полное доказательство теорем 1 и 2 для случая двух сингулярных концов.

Приведем теперь одно простое предложение, которое иногда дает возможность определить индексы дефекта оператора, порожденного выражением

$$-y''+q(x)\,y. \tag{20}$$

Теорема 5. *Если* $q(x)\geqslant q_0>-\infty$, *то индексы дефекта минимального оператора с одним сингулярным концом, порожденного выражением* (20) в $L^2(0,\infty)$, равны (1, 1), *а минимальный оператор, порожденный тем же выражением в* $L^2(-\infty,\infty)$, *имеет индексы дефекта* (0, 0), *т. е. оказывается самосопряженным.*

Доказательство. Будем считать $q(x)\geqslant 0$. Тогда применение метода последовательных приближений к уравнению

$$u''=q(t)\,u \qquad (0\leqslant t<\infty)$$

показывает, что решение $u(t)$, обращающееся в единицу при $t=0$, удовлетворяет при всех $t\geqslant 0$ неравенству

$$u(t)\geqslant 1$$

и, следовательно, не принадлежитт $L^2(0,\infty)$.

Таким образом, уравнение

$$-u''+q(t)\,u-\lambda u=0$$

при $\lambda = 0$ имеет решение, не принадлежащее $L^2(0, \infty)$, и, согласно теореме 4 настоящего пункта, оператор с минимальной областью определения, порожденный операцией (20) на полуоси $(0, \infty)$, имеет индексы дефекта (1, 1). Такие же индексы дефекта имеет, очевидно, оператор с минимальной областью определения, порожденный операцией (20) на отрицательной полуоси. Применяя теорему 3 n° 126, мы получаем, что индексы дефекта оператора с минимальной областью определения, порожденного операцией (20) на всей оси, равны (0, 0).

Очевидно, мы пришли бы к этому же результату, если бы заменили требование неотрицательности функции $q(t)$ требованием ее полуограниченности снизу.

129. Формулы обращения, связанные с дифференциальными операторами второго порядка. В n° 83 было показано, что каждый самосопряженный оператор A с простым спектром порождает изометрическое отображение V пространства H на некоторое пространство L^2_σ. При этом отображении оператор A переходит в оператор умножения на независимую переменную.

Если E_λ — разложение единицы, а g — какой-нибудь порождающий элемент оператора A, то $\sigma(\lambda) = (E_\lambda g, g)$, и указанное изометрическое соответствие определяется формулами

$$\Phi(\lambda) = Vf, \tag{1}$$

$$f = V^{-1}\Phi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\lambda)\, dE_\lambda g, \tag{2}$$

где элемент f и функция $\Phi(\lambda)$ пробегают пространства H и L^2_σ соответственно. Если при этом $f \in D_A$, то вместе с формулой (2) имеет место равенство

$$Af = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\Phi(\lambda)\, dE_\lambda g.$$

Формулы (1) и (2) мы будем называть *формулами обращения*, связанными с самосопряженным оператором A.

В пункте C n° 89 мы получили в качестве формул обращения, связанных с оператором дифференцирования на оси, взаимно обратные преобразования Фурье — Планшереля пространства $L^2(-\infty, \infty)$ на себя:

$$\Phi(\lambda) = \underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} f(t)\, e^{i\lambda t}\, dt,$$

$$f(t) = \underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} \Phi(\lambda)\, e^{-i\lambda t}\, d\lambda.$$

При этом в качестве порождающего был взят некоторый несобственный элемент.

Операторы с кратным спектром также порождают формулы обращения, аналогичные формулам (1) и (2).

Задачу настоящего и следующего пунктов составляет получение формул обращения, связанных с сингулярными дифференциальными операторами на полуоси. Эта задача для операторов второго порядка была решена впервые Г. Вейлем *). Мы также начнем с рассмотрения операторов второго порядка, но будем пользоваться методом направляющих функционалов М. Г. Крейна **). Этот метод позволяет, в частности, получить формулы обращения для дифференциальных операторов любого порядка (см. n° 130).

Итак, пусть L есть дифференциальный оператор с минимальной областью определения, порожденный операцией

$$l = -\frac{d}{dt} p \frac{d}{dt} + q$$

на интервале $(0, \infty)$ с одним сингулярным концом.

Мы будем предполагать, что индексы дефекта оператора L равны (1, 1). Мы увидим, что в этом случае спектр каждого из самосопряженных расширений этого оператора прост ***).

---

*) H. Weyl, Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten..., Math. Annalen, 68, 1910, стр. 220—269. Другим методом результаты Вейля недавно получил Б. М. Левитан; см. его книгу «Разложение по собственным функциям», Гостехиздат, 1950 г.

**) См. М. Г. Крейн, Об одном общем методе разложения положительно определенных ядер на элементарные произведения, ДАН, 1946, т. LIII, № 1 и М. Г. Крейн, Про ермітові оператори з напрямними функціоналами, Збірник праць Інституту математики АН УРСР, № 10. По этому поводу см. также М. С. Лившиц, Об одном применении теории эрмитовых операторов к обобщенной проблеме моментов, ДАН, т. XLIV, № 1 (1944) и А. Я. Повзнер, О методе направляющих функционалов М. Г. Крейна, Зап. Научно-исследовательского ин-та матем. и мех. и Харьковского матем. о-ва, сер. 4, том XX (1950).

О методе направляющих функционалов применительно к операторам с бесконечнократным спектром см. Ю. М. Березанский, Разложение по собственным функциям уравнений в частных разностях второго порядка. Тр. Моск. матем. о-ва 5 (1956), 203—268, а также Ф. С. Рофе-Бекетов, Разложение по собственным функциям бесконечных систем дифференциальных уравнений, Функциональный анализ и его применение. Тр. V Всесоюзн. конф. по функц. анал. и его применению, Баку, 1961, 230—237.

***) Если индексы дефекта оператора L равны (2, 2), то всякое самосопряженное расширение этого оператора имеет дискретный спектр. В этом случае вопрос о структуре формул обращения не возникает, так как роль формулы (2) будет играть разложение функции в ортогональный ряд по собственным функциям, а роль формулы (1) — выражение для коэффициентов Фурье разлагаемой функции.

Пусть $\widetilde{L}$ есть самосопряженное расширение оператора L, определенное граничным условием *)

$$p(t)\varphi'(t)\,|_{t=0}=\theta\varphi(0) \qquad (\Im\theta=0),$$

а $u_1(t;\ \lambda)$ и $u_2(t;\ \lambda)$ — решения уравнения

$$l[u]-\lambda u=0 \qquad (\Im\lambda=0),$$

удовлетворяющие начальным условиям

$$u_1(0;\ \lambda)=1, \qquad p(t)\,u_1'(t;\ \lambda)\,|_{t=0}=0,$$
$$u_2(0;\ \lambda)=0, \qquad p(t)\,u_2'(t;\ \lambda)\,|_{t=0}=1.$$

Обозначим множество всех финитных функций $f(t)$ из $L^2(0, \infty)$ через $\mathfrak{D}$ и определим в $\mathfrak{D}$ однородный и аддитивный функционал

$$\Phi(f;\ \lambda)=\int_0^\infty f(t)\,u(t;\ \lambda)\,dt,$$

где

$$u(t;\ \lambda)=u_1(t;\ \lambda)+\theta u_2(t;\ \lambda).$$

Следуя М. Г. Крейну, будем называть функционал $\Phi(f;\ \lambda)$ *направляющим функционалом*.

Направляющий функционал $\Phi(f;\lambda)$ обладает следующими тремя свойствами, которые существенны для дальнейшего.

1°. $\Phi(f;\ \lambda)$ есть аналитическая функция от λ $(-\infty<\lambda<\infty)$ при любой функции $f\in\mathfrak{D}$.

2°. Если для некоторой функции $f\in\mathfrak{D}$ и некоторого вещественного значения λ имеет место равенство

$$\Phi(f;\ \lambda)=0,$$

то уравнение

$$(\widetilde{L}-\lambda I)\,\varphi=f$$

имеет решение в классе финитных функций.

3°. Если f — финитная функция из $D_{\widetilde{L}}$, то при любом вещественном λ

$$\Phi(\widetilde{L}f;\ \lambda)=\lambda\Phi(f;\ \lambda).$$

Подлежат доказательству лишь свойства 2° и 3°.

Установим сначала свойство 2°. Пусть $f(t)=0$ при $t>a$ и

$$\Phi(f;\ \lambda_0)=0. \tag{3}$$

*) Таким образом, остается в стороне лишь одно расширение, а именно определяемое условием $\varphi(0)=0$, которое отвечает $\theta=\infty$. Устанавливаемые ниже формулы обращения переносятся и на этот случай с помощью предельного перехода.

Обозначим через $\varphi(t)$ $(0 \leqslant t < \infty)$ решение уравнения

$$l[\varphi] - \lambda_0 \varphi = f,$$

удовлетворяющее условию

$$\varphi(a) = p(a)\varphi'(a) = 0$$

(при этом в силу теоремы единственности $\varphi(t) = 0$ для $t \geqslant a$).

Пользуясь тождеством Лагранжа, получаем

$$\Phi(f; \lambda_0) = \int_0^\infty \{l[\varphi] - \lambda_0\varphi\} u(t; \lambda)\, dt = [\varphi, u]_0^\infty = -[\varphi, u]_0 =$$

$$= \left[p\left(u\frac{d\varphi}{dt} - \varphi\frac{du}{dt}\right)\right]_{t=0} = [p(t)\varphi'(t) - \theta\varphi(t)]_{t=0},$$

что в сочетании с (3) дает

$$p(t)\varphi'(t)|_{t=0} = \theta\varphi(0),$$

так что $\varphi(t) \in D_{\widetilde{L}}$, и свойство 2° установлено.

Справедливость утверждения 3° следует из равенств

$$\Phi(\widetilde{L}f; \lambda) = \int_0^\infty l[f] u(t; \lambda)\, dt = [f, u]_0^\infty + \lambda \int_0^\infty f(t) u(t; \lambda)\, dt = \lambda\Phi(f; \lambda).$$

Направляющий функционал $\Phi(f; \lambda)$ порождает отображение линейного многообразия $\mathfrak{D}$ функций $f(t)$ на некоторое линейное многообразие $\mathfrak{D}'$ функций $\Phi(\lambda) = \Phi(f; \lambda)$. Если при этом функция $f(t)$ принадлежит D_L, то, согласно свойству 3°, функции $\widetilde{L}f$ в указанном отображении соответствует функция $\lambda\Phi(\lambda)$. Это обстоятельство позволяет предположить, что спектр оператора $\widetilde{L}$ прост и что при надлежащем выборе порождающей функции $g = g(t)$ отображение, осуществляемое оператором V формулы (1), является расширением отображения, осуществляемого функционалом $\Phi(f; \lambda)$. Это предположение означает, что при надлежащем выборе порождающей функции первая из формул обращения, связанных с оператором $\widetilde{L}$, будет (при $f(t) \in \mathfrak{D}$) иметь вид

$$\Phi(\lambda) = \int_0^\infty f(t) u(t; \lambda)\, dt.$$

Эта формула аналогична формуле Фурье — Планшереля.

Оставим теперь в стороне наводящие соображения и приступим к решению поставленной задачи. При этом нам будут необходимы два предложения М. Г. Крейна *).

*) См. вторую из работ М. Г. Крейна, цитированных на стр. 500.

Лемма. *Для любого конечного интервала Δ_0 оси λ существует функция $\psi(t) \in \mathfrak{D}$ такая, что функция $\Phi(\lambda) = \Phi(\psi; \lambda)$ не обращается в нуль в интервале Δ_0.*

Доказательство. Пусть λ_0 — фиксированная точка интервала Δ_0 и $\chi_0(t)$ — такая функция из $\mathfrak{D}$, что

$$\Phi(\chi_0; \lambda_0) \neq 0.$$

Если во всем интервале $\Phi(\chi_0; \lambda) \neq 0$, то для доказательства леммы достаточно принять $\psi = \chi_0$. Если же в некоторой точке $\lambda_1 \in \Delta_0$

$$\Phi(\chi_0; \lambda_1) = 0,$$

то, на основании свойства 2°, существует финитная функция $\chi_1 \in \in D_{\widetilde{L}}$ такая, что

$$\widetilde{L}\chi_1 - \lambda_1\chi_1 = \chi_0.$$

Применяя к обеим частям этого равенства направляющий функционал и пользуясь свойством 3°, получаем

$$\lambda\Phi(\chi_1; \lambda) - \lambda_1\Phi(\chi_1; \lambda) = \Phi(\chi_0; \lambda),$$

откуда

$$\Phi(\chi_1; \lambda) = \frac{\Phi(\chi_0; \lambda)}{\lambda - \lambda_1}.$$

Таким образом, заменяя функцию χ_0 функцией χ_1, мы видим, что функция $\Phi(\chi_1; \lambda)$ не обращается в нуль при $\lambda = \lambda_0$, а при $\lambda = \lambda_1$ имеет корень кратности на единицу меньшей, чем функция $\Phi(\chi_0; \lambda)$. Так как аналитическая функция $\Phi(\chi_0; \lambda)$ в конечном интервале Δ_0 имеет лишь конечное число нулей, каждый — конечной кратности, то, продолжая в случае надобности указанный процесс, придем к функции $\psi \in \mathfrak{D}$, для которой функционал $\Phi(\psi; \lambda)$ не обращается в нуль при $\lambda \in \Delta_0$.

Теорема 1. *Пусть Δ_0 — конечный замкнутый интервал и $\psi \in \mathfrak{D}$ — такая функция, что*

$$\Phi(\psi; \lambda) \neq 0,$$

при $\lambda \in \Delta_0$. Пусть, далее, E_λ — разложение единицы оператора $\widetilde{L}$ и

$$g(t) = \int_{\Delta_0} \frac{1}{\Phi(\psi; \lambda)} dE_\lambda\psi.$$

При этих условиях для любой функции $f \in \mathfrak{D}$ и любого интервала $\Delta \subseteq \Delta_0$ справедлива формула

$$E(\Delta) f = \int_{\Delta} \Phi(f; \lambda) \, dE_\lambda g. \tag{4}$$

Доказательство. Если ввести вместо направляющего функционала $\Phi(f;\ \lambda)$ функционал $F(f;\ \lambda)$ соотношением

$$F(f;\ \lambda)=\frac{\Phi(f;\ \lambda)}{\Phi(\psi;\ \lambda)},$$

то подлежащая доказательству формула эквивалентна равенству

$$E(\Delta)f=\int_{\Delta} F(f;\ \lambda)\,dE_\lambda\psi. \tag{5}$$

Приступим к доказательству этого равенства. Предположим, что левые концы интервалов Δ_0 и Δ совпадают, и пусть точка α есть общий левый конец этих интервалов. Будем рассматривать элемент $w_\mu = w_\mu(t)$ пространства $L^2(0,\ \infty)$, определенный равенством

$$w_\mu=\int_\alpha^\mu dE_\lambda f-\int_\alpha^\mu F(f;\ \lambda)\,dE_\lambda\psi,$$

как функцию параметра μ в интервале Δ_0.

Для доказательства равенства (5) следует установить, что $w_\mu = 0$ при $\mu\in\Delta_0$, а для этого достаточно, очевидно, показать, что в интервале Δ_0 элемент w_μ есть непрерывная функция от μ и затем, что

$$\frac{d}{d\mu}w_\mu=0 \tag{6}$$

всюду в Δ_0. Последнее равенство следует понимать в смысле сильной сходимости в $L^2(0,\ \infty)$, т. е. в том смысле, что

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta^2}\|w_{\mu+\delta}-w_\mu\|^2=\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta^2}\int_0^\infty |w_{\mu+\delta}(t)-w_\mu(t)|^2\,dt=0.$$

В силу непрерывности E_λ слева, вектор-функция w_μ тоже непрерывна слева. Для доказательства непрерывности функции w_μ справа воспользуемся вытекающим из определения функционала $F(f;\ \mu)$ тождеством

$$\Phi(f-F(f;\ \mu)\psi;\ \mu)=\Phi(f;\ \mu)-F(f;\ \mu)\,\Phi(\psi;\ \mu)=0.$$

Отсюда согласно 2° следует возможность представления элемента $f - F(f;\ \mu)\,\psi$ в виде

$$f-F(f;\ \mu)\,\psi=\tilde{L}\varphi-\mu\varphi. \tag{7}$$

Введем теперь проектирующий оператор

$$E(\Delta_\mu,\delta)=E_{\mu+\delta}-E_\mu \qquad (\delta\geqslant 0).$$

Величина $E(\Delta_{\mu,0})\varphi$ есть либо 0, либо собственный вектор оператора $\widetilde{L}$, соответствующий собственному значению μ. В обоих случаях

$$E(\Delta_{\mu,0})(\widetilde{L}\varphi-\mu\varphi)=\widetilde{L}E(\Delta_{\mu,0})\varphi-\mu E(\Delta_{\mu,0})\varphi=0$$

и, следовательно,

$$E(\Delta_{\mu,0})f-F(f;\ \mu)E(\Delta_{\mu,0})\psi=0.$$

Из полученного равенства следует непрерывность w_μ в интервале Δ_0.

Для доказательства равенства (6) оценим $\| w_{\mu+\delta}-w_\mu \|$. Пусть, например, $\delta>0$. (Случай $\delta<0$ рассматривается аналогично.) В силу доказанной непрерывности w_μ имеем $w_{\mu+0}=w_\mu$. Поэтому

$$\begin{aligned}\|w_{\mu+\delta}-w_\mu\|=\|w_{\mu+\delta}-w_{\mu+0}\|=\|E(\Delta_{\mu+0,\delta})f-\int\limits_{\mu+0}^{\mu+\delta}F(f;\lambda)\,dE_\lambda\psi\|\leqslant\\ \leqslant\|E(\Delta_{\mu+0,\delta})[f-F(f;\ \mu)\psi]\|+\\ +\|E(\Delta_{\mu+0,\delta})F(f;\mu)\psi-\int\limits_{\mu+0}^{\mu+\delta}F(f;\lambda)\,dE_\lambda\psi\|. \qquad (8)\end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно сначала первое, а затем второе слагаемое в правой части этого неравенства. Для первого слагаемого следует из (7) оценка:

$$\begin{aligned}\|E(\Delta_{\mu+0,\delta})[f-F(f;\mu)\psi]\|^2=\|E(\Delta_{\mu+0,\delta})[\widetilde{L}\varphi-\mu\varphi]\|^2=\\ =\int\limits_{\mu+0}^{\mu+\delta}|\lambda-\mu|^2\,d(E_\lambda\varphi,\varphi)\leqslant\delta^2\|E(\Delta_{\mu+0,\delta})\varphi\|^2.\end{aligned}$$

Поэтому

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\frac{1}{\delta}\|E(\Delta_{\mu+0,\delta})[f-F(f;\mu)\psi]\|=0. \qquad (9)$$

Обращаясь теперь ко второму слагаемому правой части неравенства (8), получаем

$$\begin{aligned}\|E(\Delta_{\mu+0,\delta})F(f;\mu)\psi-\int\limits_{\mu+0}^{\mu+\delta}F(f;\lambda)\,dE_\lambda\psi\|^2=\\ =\|\int\limits_{\mu+0}^{\mu+\delta}[F(f;\ \mu)-F(f;\ \lambda)]\,dE_\lambda\psi\|^2\leqslant\\ \leqslant\int\limits_{\mu+0}^{\mu+\delta}|F(f;\mu)-F(f;\lambda)|^2\,d(E_\lambda\psi,\psi)\leqslant M^2\delta^2(E(\Delta_{\mu+0,\delta})\psi,\psi), \qquad (10)\end{aligned}$$

где M означает максимум модуля производной $\frac{\partial F(f;\lambda)}{\partial\lambda}$ в интервале Δ_0.

Из неравенства (10) следует, что

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\frac{1}{\delta}\left\| E(\Delta_{\mu+0,\delta})F(f;\mu)\psi-\int_{\mu+0}^{\mu+\delta}F(f;\lambda)\,dE_\lambda\psi\right\|=0. \qquad (11)$$

Из (9) и (11) на основании (8) заключаем о справедливости равенства (6). Значит, $w_\mu=0$, а отсюда следует равенство (5), что и требовалось доказать.

Теперь можно перейти к основной теореме настоящего пункта.

Теорема 2. *Если L, $\widetilde{L}$ и $u(t;\lambda)$ имеют указанный в начале настоящего пункта смысл, то формулы обращения, связанные с оператором $\widetilde{L}$, имеют вид*

$$\Phi(\lambda)=\int_0^\infty f(t)\,u(t;\lambda)\,dt, \qquad (12)$$

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\lambda)\,u(t;\lambda)\,d\sigma(\lambda). \qquad (13)$$

Здесь $\sigma(\lambda)$ — некоторая неубывающая функция, определяемая оператором $\widetilde{L}$ (и называемая *спектральной функцией* этого оператора), *а $\Phi(\lambda)$ и $f(t)$ пробегают пространства $L^2_\sigma(-\infty,\infty)$ и соответственно $L^2(0,\infty)$. При этом если одна из функций $\Phi(\lambda)$, $f(t)$ равна нулю вне конечного интервала, то интеграл в правой части соответствующей формулы следует понимать в обычном смысле, а в случае произвольных функций $\Phi(\lambda)$, $f(t)$ интегралы следует понимать как пределы в метрике L^2_σ и соответственно $L^2(0,\infty)$ собственных интегралов*

$$\int_0^C f(t)\,u(t;\lambda)\,dt,$$

$$\int_A^B \Phi(\lambda)\,u(t;\lambda)\,d\sigma(\lambda).$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что в формуле (4) вместо элемента g, очевидно, можно взять элемент $g_0 = E(\Delta_0)\,g$.

Разобьем теперь λ-ось на конечные интервалы Δ_k ($\pm k = 0, 1, 2, \ldots$) и выберем для каждого интервала Δ_k элемент g_k, так же, как мы выбрали для интервала Δ_0 элемент g_0.

Положим

$$g = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k$$

и в случае расходимости ортогонального ряда в правой части будем под g понимать несобственный элемент *) (см. п° 89), удовлетворяющий при любом конечном интервале Δ условию

$$E(\Delta) g = \sum_k E(\Delta) g_k,$$

где ряд справа содержит уже конечное число слагаемых.

Если f — произвольная функция из $\mathfrak{D}$, а Δ — произвольный конечный интервал λ-оси, то

$$\Delta = \Delta_m^* + \sum_{k=m+1}^{n-1} \Delta_k + \Delta_n^* \qquad (\Delta_m^* \subseteq \Delta_m; \ \Delta_n^* \subseteq \Delta_n)$$

и

$$E(\Delta) f = E(\Delta_m^*) f + \sum_{k=m+1}^{n-1} E(\Delta_k) f + E(\Delta_n^*) f.$$

Поэтому для любого конечного интервала Δ λ-оси имеет место формула

$$E(\Delta) f = \int_\Delta \Phi(f; \lambda)\, dE_\lambda g,$$

откуда при $\Delta \to [-\infty, \infty]$ получаем равенство

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(f; \lambda)\, dE_\lambda g. \tag{14}$$

Так как многообразие $\mathfrak{D}$ плотно в $L^2(0, \infty)$, то из этой формулы следует, что оператор $\widetilde{L}$ имеет простой спектр и функция $g = g(t)$ есть порождающий элемент.

Из теоремы п° 83 о каноническом представлении самосопряженного оператора с простым спектром следует, что существует изометрическое отображение

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\lambda)\, dE_\lambda g$$

пространства L_σ^2, где $\sigma(\lambda) = (E_\lambda g, g)$ на пространство $L^2(0, \infty)$.

---

*) В действительности элемент g всегда оказывается несобственным, а именно δ-функцией Дирака. Это можно усмотреть из формулы (14), полагая в ней $f = \delta(t)$ и замечая, что $\Phi(\delta, \lambda) \equiv 1$.

При этом изометрическом соответствии функциям $f(t)$ из $\mathfrak{D}$ отвечают направляющие функционалы $\Phi(f;\ \lambda)=\Phi(\lambda)$. Оператор L, таким образом, изоморфен оператору умножения на λ в пространстве L^2_σ, так что при $f(t)\in D_{\widetilde{L}}$

$$\widetilde{L}f=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\Phi(\lambda)\,dE_\lambda g.$$

Займемся теперь выводом формул (12) и (13). Если $f(t)$ — произвольная функция из $L^2(0,\ \infty)$ и

$$f_n(t)=\begin{cases} f(t) & (t<n),\\ 0 & (t\geqslant n),\end{cases}$$

то согласно (14)

$$f_n(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(f_n;\ \lambda)\,dE_\lambda g. \tag{15}$$

Положим

$$\Phi_n(\lambda)=\Phi(f_n;\ \lambda)=\int_0^n f(t)\,u(t;\ \lambda)\,dt. \tag{16}$$

Так как последовательность функций $\{f_n(t)\}$ сходится в метрике $L^2(0,\ \infty)$ к функции $f(t)$, то в силу изометрического соответствия между пространствами $L^2(0,\ \infty)$ и L^2_σ последовательность $\Phi_n(\lambda)$ сходится в метрике L^2_σ к некоторой функции $\Phi(\lambda)$. Перейдя к пределу по указанным метрикам в равенствах (15) и (16), получаем формулы

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\lambda)\,dE_\lambda g, \tag{17}$$

$$\Phi(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,u(t;\ \lambda)\,dt.$$

Вторая из этих формул совпадает с (12), и поэтому остается доказать формулу (13).

Очевидно, достаточно доказать, что формула (13) является обращением формулы (12), если $\Phi(\lambda)$ пробегает многообразие $\mathfrak{M}$ финитных функций из L^2_σ.

Итак, пусть функция $\Phi(\lambda)$ принадлежит $\mathfrak{M}$, а $f(t)$ есть соответствующая ей функция из $L^2(0,\ \infty)$, определяемая формулой (17).

Введем функцию

$$\eta_t(s)=\begin{cases}1 & (s\leqslant t),\\ 0 & (s>t).\end{cases}$$

Тогда в силу изометричности соответствия между $L^2(0, \infty)$ и L^2_σ, имеет место равенство

$$\int_0^\infty f(s)\,\eta_t(s)\,ds=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\lambda)\,\Phi(\eta_t;\ \lambda)\,d\sigma(\lambda),$$

или

$$\int_0^t f(s)\,ds=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\lambda)\left\{\int_0^t u(s;\ \lambda)\,ds\right\}d\sigma(\lambda).$$

Левая часть имеет почти всюду производную $f(t)$, а справа интеграл по λ берется в конечных пределах, так как $\Phi(\lambda)\in\mathfrak{M}$. Поэтому производная по t от правой части равна

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\lambda)\,u(t;\ \lambda)\,d\sigma(\lambda),$$

и доказательство закончено.

Покажем теперь, как фактически находится спектральная функция $\sigma(\lambda)$. С этой целью обозначим через $u(t;\ \lambda)$ то решение уравнения

$$l[y]-\lambda y=0,$$

которое при $t=0$ удовлетворяет граничному условию, характеризующему рассматриваемое расширение $\widetilde{L}$ оператора L. Как было указано выше, это условие имеет вид

$$p(t)\,\varphi'(t)\,|_{t=0}=\theta\varphi(0).$$

Вещественный параметр θ будем считать конечным, так что $u(0;\ \lambda)\neq 0$, и мы можем, следовательно, принять, что

$$u(0;\ \lambda)=1.$$

Далее обозначим через $v(t;\ \lambda)$ второе решение однородного уравнения, которое нормировано с помощью равенств

$$v(0;\ \lambda)=0,\quad p(t)\,v'(t;\ \lambda)\,|_{t=0}=-1.$$

При этом ядро $K(t,\ s;\ \lambda)$ интегрального оператора, являющегося резольвентой оператора $\widetilde{L}$, т. е. функция Грина, будет иметь вид

$$K(t,\ s;\ z)=\begin{cases}u(s;\ z)\,[v(t;\ z)+m(z)\,u(t;\ z)] & (s\leqslant t),\\ u(t;\ z)\,[v(s;\ z)+m(z)\,u(s;\ z)] & (s>t)\,(\Im z>0),\end{cases}\quad (18)$$

где функция $m(z)$ однозначно определяется тем, что

$$v(t;\, z)+m(z)\,u(t;\, z)\in L^2(0,\, \infty).$$

Заставим теперь функцию $\varphi(t)$ пробегать множество всех финитных функций из $D_{\widetilde{L}}$ и положим

$$(\widetilde{L}-zI)\,\varphi=f,$$

причем z ($\mathfrak{J}z>0$) фиксировано. Множество $\mathfrak{N}$, пробегаемое функцией $f(t)$, плотно в $L^2(0, \infty)$, так как индексы дефекта минимального оператора L, по условию, равны (1, 1). Если $g(t)$ — произвольная функция из $\mathfrak{D}$, то

$$\int_0^\infty \varphi(t)\,\overline{g(t)}\,dt=\int_{-\infty}^\infty \Phi(\varphi;\ \lambda)\,\overline{\Phi(g;\ \lambda)}\,d\sigma(\lambda).$$

А так как

$$\varphi(t)=\int_0^\infty K(t,\, s;\, z)\,f(s)\,ds$$

и, по свойству 3° направляющих функционалов,

$$\Phi(\varphi;\ \lambda)=\frac{\Phi(f;\ \lambda)}{\lambda-z},$$

то

$$\int_0^\infty\int_0^\infty K(t,\, s;\, z)\,f(s)\,\overline{g(t)}\,ds\,dt=\int_{-\infty}^\infty \frac{\Phi(f;\ \lambda)\,\overline{\Phi(g;\ \lambda)}}{\lambda-z}\,d\sigma(\lambda).$$

Это равенство справедливо при произвольных $f,\, g\in\mathfrak{D}$, так как $\mathfrak{N}$ плотно в $L^2(0, \infty)$. Положим

$$f(t)=g(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\delta} & \text{при}\quad 0\leqslant t\leqslant\delta,\\ 0 & \text{при}\quad t>\delta.\end{cases}$$

Тогда наше равенство запишется в виде

$$\frac{1}{\delta^2}\int_0^\delta\int_0^\delta K(t,\, s;\, z)\,dt\,ds=\int_{-\infty}^\infty \omega_\delta(\lambda)\,\frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda-z}, \tag{19}$$

где

$$\omega_\delta(\lambda)=\left[\frac{1}{\delta}\int_0^\delta u(t;\, \lambda)\,dt\right]^2.$$

Левая часть (19) имеет при $\delta \to 0$ предел

$$K(0, 0; z) = m(z).$$

Поэтому

$$\lim_{\delta\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_\delta(\lambda) \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda - z} = m(z),$$

и, значит,

$$\lim_{\delta\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_\delta(\lambda) \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda^2 + 1} = \Im m(i).$$

Отсюда легко заключить, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda^2+1}$$

существует и равен $\Im m(i)$. Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda - z} - \frac{1}{\lambda - i} \right) d\sigma(\lambda) = m(z) - m(i),$$

откуда

$$m(z) = \Re m(i) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+\lambda z}{\lambda - z} \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda^2+1}. \tag{20}$$

Применяя формулу обращения Стилтьеса — Перрона (см. n° 69), получаем

$$\frac{\sigma(\lambda - 0) + \sigma(\lambda + 0)}{2} = \text{const} + \lim_{y\to 0} \frac{1}{\pi} \int_0^{\lambda} \Im m(x+iy)\, dx.$$

Можно показать, что эта формула справедлива и в том случае, когда граничное условие имеет вид $\varphi(0) = 0$.

Сделаем теперь ряд замечаний, относящихся к случаю, когда индексы дефекта оператора L есть $(2, 2)$. Речь будет идти об одном классе самосопряженных расширений такого оператора, впервые изученном Г. Вейлем в статье, цитированной на стр. 500.

Пусть L_θ означает расширение оператора L (с индексами дефекта $(1, 1)$ или $(2, 2)$), определенное граничным условием

$$p(t)\varphi'(t)|_{t=0} = \theta\varphi(0), \tag{21}$$

так что D_{L_θ} состоит из всех тех функций $\varphi(t) \in D_{L^*}$, которые удовлетворяют условию (21). Очевидно, L_θ есть симметрическое расширение оператора L. Если индексы дефекта оператора L

равны (1, 1), то оператор L_θ окажется самосопряженным и, меняя θ в пределах от $-\infty$ до ∞, мы получим все самосопряженные расширения оператора L. Если же индексы дефекта оператора L равны (2, 2), то индексы дефекта оператора L_θ будут (1, 1). Любое самосопряженное расширение $\widetilde{L}_\theta$ оператора L_θ является некоторым расширением оператора L. Меняя θ в интервале $(-\infty, \infty)$ и беря при каждом значении θ всевозможные расширения $\widetilde{L}_\theta$, мы получим некоторый класс самосопряженных расширений оператора L. Этот класс характеризуется тем, что одно из двух граничных условий (2) n° 127, определяющих самосопряженное расширение, имеет вид (21); при этом, очевидно, второе из этих условий будет относиться лишь к сингулярному концу $t=\infty$. Таким образом, полученный класс самосопряженных расширений характеризуется *распадающимися условиями.*

Принятое вначале настоящего пункта предположение о том, что индексы дефекта оператора L равны (1, 1), было использовано лишь один раз, а именно при доказательстве свойства 2° направляющего функционала. Однако легко видеть, что это свойство 2° сохраняется и в случае индексов дефекта (2, 2), если только в качестве самосопряженных расширений $\widetilde{L}$ брать расширения, характеризующиеся распадающимися условиями. Расширения такого рода будем обозначать через $\widetilde{L}_0$.

Таким образом, все установленные выше предложения остаются справедливыми для расширений $\widetilde{L}_\theta$ оператора L с индексами дефекта (2, 2). В частности, из теоремы 2 следует, что самосопряженные расширения $\widetilde{L}_\theta$ имеют простой спектр.

Нетрудно видеть, что, как и в случае индексов дефекта (1,1), ядро резольвенты $\widetilde{R}_z$ оператора $\widetilde{L}_\theta$ (при $\theta \neq \infty$) определяется формулами (18), где функция $m(z)$ однозначно определяется выбором самосопряженного расширения $\widetilde{L}_\theta$ оператора L_θ. В частности, $K(0, 0; z) = m(z)$. Рассуждая, далее, как в случае индексов дефекта (1, 1), придем к формуле (20). Так как оператор $\widetilde{L}_\theta$ согласно теореме 2 n° 128, имеет чисто точечный спектр с единственной пр дельной точкой в бесконечности, то функция $\sigma(\lambda)$ является кусочно-постоянной, и формула (20) показывает, что $m(z)$ есть мероморфная функция от z.

В соответствии с результатами n° 113 скалярное произведение $(\widetilde{R}_z f, f)$ при фиксированных

$$f(t) \in L^2(0, \infty) \quad \text{и} \quad z \quad (\Im z > 0)$$

пробегает некоторую окружность $C(f; z)$, когда $\widetilde{R}_z$ пробегает совокупность всех ортогональных резольвент оператора L_θ. Но из формул (18) следует, что скалярное произведение $(\widetilde{R}_z f, f)$

имеет вид $\alpha+\beta m(z)$, где постоянные α, β не зависят от выбора резольвенты. Поэтому когда точка $(\widetilde{R}_z f, f)$ пробегает окружность $C(f; z)$, то точка $w=m(z)$ также пробегает некоторую окружность, которая называется *предельной окружностью Вейля*. В случае индексов дефекта (1, 1) (и только в этом случае) предельная окружность Вейля вырождается в точку. Теперь становится ясным смысл терминов *«предельный круг»* и *«предельная точка»* упомянутых в конце n° 127. На изложении метода, с помощью котого Г. Вейль пришел к предельной окружности, мы здесь не остановимся.

Заметим, что хотя окружность $C(f; z)$ зависит от выбора f и z, соответствующая предельная окружность C зависит лишь от z, но не зависит от f, так как не зависит от f функция $m(z)$. Найдем уравнение предельной окружности. С этой целью, следуя М. Г. Крейну, используем функциональное соотношение Гильберта для резольвенты оператора $\widetilde{L}_\theta$, из которого без труда получаем:

$$K(t, s; z)-K(t, s; \bar{z})=(z-\bar{z})\int_0^\infty K(t, \xi; z)K(\xi, s; \bar{z})\,d\xi.$$

Полагая здесь $t=s=0$ и пользуясь формулой (16), получим

$$m(z)-\overline{m(z)}=(z-\bar{z})\int_0^\infty |v(\xi; z)+m(z)u(\xi; z)|^2\,d\xi,$$

так что уравнение предельной окружности в комплексной w-плоскости имеет вид

$$\int_0^\infty |v(\xi; z)+wu(\xi; z)|^2\,d\xi=\frac{w-\bar{w}}{z-\bar{z}}.$$

В случае $\theta=\infty$ некоторая модификация приведенных рассуждений приводит к аналогичному результату, на чем мы не остановимся.

В заключение коснемся так называемой обратной задачи спектрального анализа.

Как установлено теоремой 2, каждому самосопряженному оператору, порожденному выражением

$$-y''+q(x)y$$

в $L^2(0, \infty)$, отвечает спектральная функция $\sigma(\lambda)$, порождающая формулы обращения и равенство Парсеваля. Весьма замечательным оказывается тот факт, что, и обратно, дифференциальный оператор вида $-y''+q(x)y$ вместе с граничным условием однозначно восстанавливается по своей спектральной функции $\sigma(\lambda)$.

Проблема восстановления дифференциального оператора по его спектральной функции и связанные с нею вопросы получили название обратной задачи спектрального анализа. Полное решение обратной задачи было получено в работах И. М. Гельфанда и Б. М. Левитана, М. Г. Крейна, В. А. Марченко *).

130. Обобщение на дифференциальные операторы любого порядка. В n° 86 мы видели, что каждый самосопряженный оператор A со спектром кратности $r < \infty$ порождает изометрические отображения H на пространства вектор-функций L_S^2. При этих отображениях оператор A переходит в оператор умножения на независимую переменную. Напомним, что матричная функция распределения $S(\lambda)$ определяется разложением единицы E_λ оператора A, если выбрать какой-нибудь порождающий базис $g_1, g_2, \ldots, g_p$ $(r \leqslant p < \infty)$ этого оператора и положить

$$S(\lambda) = ((E_\lambda g_j, g_k))_{j,\,k=1}^{p}.$$

При этом указанное изометрическое отображение определяется формулами

$$\vec{\Phi}(\lambda) = Vf, \tag{1}$$

$$f = V^{-1}\vec{\Phi}(\lambda) = \text{l.i.m.} \int_{-M}^{N} \sum_{k=1}^{p} \Phi_k(\lambda)\, dE_\lambda g_k, \tag{2}$$

где элемент f и вектор-функция $\vec{\Phi}(\lambda)$ $\{\Phi_1(\lambda), \ldots, \Phi_p(\lambda)\}$ пробегают пространства H и L_S^2 соответственно.

Формулы (1) и (2) мы будем называть *формулами обращения*, связанными с самосопряженным оператором A.

Заметим, что это определение шире данного в n° 129 определения для случая операторов с простым спектром, так как оно не требует, чтобы базис, порождающий функцию распределения $S(\lambda)$, был минимальным. В частности, в силу определения настоящего пункта, с операторами, обладающими простым спектром, связываются формулы обращения, осуществляющие изометрическое соответствие между H и L_S^2, где порядок матрицы $S(\lambda)$ больше единицы.

Наметим теперь вывод формул обращения, связанных с дифференциальными операторами любого порядка.

---

*) Изложение решения обратной задачи, принадлежащего названным авторам, вместе с подробными литературными указаниями читатель найдет в недавней статье Б. М. Левитана и М. Г. Гасымова, Определение дифференциального уравнения по двум спектрам, УМН 19, № 2 (1964), 3—63.

Пусть L — дифференциальный оператор с минимальной областью определения, порожденный операцией l $2n$-го порядка на интервале $(0, \infty)$ с одним сингулярным концом, а $\widetilde{L}$ — произвольное самосопряженное расширение оператора L.

Мы не будем теперь делать какого-либо предположения об индексах дефекта оператора L.

Введем на многообразии $\mathfrak{D}$ финитных функций пространства $\mathrm{L}^2(0, \infty)$ $2n$ направляющих функционалов

$$\Phi_j(f; \lambda) = \int_0^\infty f(t)\, u_j(t; \lambda)\, dt \qquad (j = 1, 2, \ldots, 2n), \tag{3}$$

где $\{u_j(t; \lambda)\}_{j=1}^{2n}$ — фундаментальная система решений уравнения

$$l[u] - \lambda u = 0,$$

удовлетворяющая начальным условиям

$$u_j^{[k-1]}(0; \lambda) = \begin{cases} 1 & (j = k), \\ 0 & (j \neq k) \end{cases} \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, 2n).$$

Легко проверить, что каждый из функционалов $\Phi_j(f; \lambda)$ обладает свойствами 1°, 3° n° 129. Что же касается свойства 2°, то оно теперь формулируется следующим образом:

2°. Если для некоторой функции $f \in \mathfrak{D}$ и некоторого вещественного значения λ имеют место $2n$ равенств

$$\Phi_j(f; \lambda) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, 2n),$$

то уравнение

$$(\widetilde{L} - \lambda I)\varphi = f$$

имеет решение в классе финитных функций.

Лемма 1 *). *Для любого конечного интервала Δ_0 оси λ существует такая система функций $\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots, \psi_{2n}(t)$ из $\mathfrak{D}$, что определитель*

$$D(\lambda) = \det(\Phi_j(\psi_k; \lambda))_{j, k=1}^{2n}$$

не обращается в нуль в интервале Δ_0.

Доказательство этой леммы легко провести по образцу доказательства соответствующей леммы n° 129, опираясь на аналитичность определителя $D(\lambda)$.

Теорема 1. *Пусть Δ_0 — конечный интервал, и система функций $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{2n}$* из $\mathfrak{D}$ такова, что

$$\det(\Phi_j(\psi_k; \lambda))_{j, k=1}^{2n} \neq 0 \qquad (\lambda \in \Delta_0).$$

*) Это и следующее предложения принадлежат М. Г. Крейну (см. работу, цитированную в начале n° 129).

Пусть, далее, E_λ — разложение единицы оператора $\widetilde{L}$ и $g_1, g_2, \ldots$ $\ldots, g_{2n}$ — система функций, определенная равенствами

$$g_i(t) = \int\limits_{\Delta_0} \sum_{k=1}^{2n} \Omega_{ik}(\lambda)\, dE_\lambda \psi_k,$$

где $\Omega_{ik}(\lambda)$ — элементы матрицы, обратной по отношению к

$$(\Phi_j(\psi_k;\ \lambda))_{j,\,k=1}^{2n}.$$

При этих условиях для любой функции $f \in \mathfrak{D}$ и любого интервала $\Delta \subseteq \Delta_0$ справедлива формула

$$E(\Delta) f = \int\limits_{\Delta} \sum_{j=1}^{2n} \Phi_j(f;\ \lambda)\, dE_\lambda g_j. \tag{4}$$

Доказательство этой теоремы совершенно аналогично доказательству теоремы 1 n° 129. Так же, как и там, мы заменяем подлежащее доказательству равенство (4) равенством

$$E(\Delta) f = \int\limits_{\Delta} \sum_{j=1}^{2n} F_j(f;\ \lambda)\, dE_\lambda \psi_j,$$

где

$$F_j(f;\ \lambda) = \sum_{k=1}^{2n} \Omega_{kj}(\lambda)\, \Phi_k(f;\ \lambda),$$

и вводим элемент

$$w_\mu = \int\limits_a^\mu dE_\lambda f - \int\limits_a^\mu \sum_{j=1}^{2n} F_j(f;\ \lambda)\, dE_\lambda \psi_j,$$

который оказывается непрерывно зависящим от μ. Неравенство (8) n° 129 будет теперь иметь вид (при $\delta \geqslant 0$):

$$\|w_{\mu+\delta} - w_\mu\| \leqslant \left\| E(\Delta_{\mu+0,\,\delta}) \left[f - \sum_{j=1}^{2n} F_j(f;\ \mu)\, \psi_j\right]\right\| +$$

$$+ \left\| E(\Delta_{\mu+0,\,\delta}) \sum_{j=1}^{2n} F_j(f;\ \mu)\, \psi_j - \int\limits_{\mu+0}^{\mu+\delta} \sum_{j=1}^{2n} F_j(f;\ \lambda)\, dE_\lambda \psi_j \right\|.$$

Слагаемые в правой части этого неравенства оцениваются так же, как и в n° 129, откуда и следует справедливость теоремы.

Теорема 2. *Если L, $\widetilde{L}$ и $u_j(t;\ \lambda)$ $(j = 1, 2, \ldots, 2n)$ имеют указанный в начале настоящего пункта смысл, то существует матричная функция распределения $S(\lambda) = (\sigma_{ik}(\lambda))_{i,\,k=1}^{n}$* (называемая *спектральной матрицей), при которой формулы*

$$\Phi_j(\lambda) = \mathrm{l.\,i.\,m.} \int_{-M}^{N} f(t)\, u_j(t;\lambda)\, dt \qquad (j = 1, 2, \ldots, 2n),$$

$$f(t) = \mathrm{l.\,i.\,m.} \int_{-M}^{N} \sum_{i,\,k=1}^{2n} \Phi_i(\lambda)\, u_k(t;\lambda)\, d\sigma_{ik}(\lambda)$$

устанавливают изометрическое отображение пространства $L^2(0, \infty)$ *на пространство вектор-функций* L^2_S.

Доказательство. Положим в формуле (4) $\Delta = \Delta_0$ и заменим систему элементов $\{g_j\}_{j=1}^{2n}$ системой $g_j^{(0)} = E(\Delta_0)\, g_j$ $(j = 1, 2, \ldots, 2n)$, а затем разобьем λ-ось на конечные интервалы Δ_k $(\pm k = 0, 1, 2, \ldots)$ и выберем для каждого из них систему элементов $\{g_j^{(k)}\}_{j=1}^{2n}$ так же, как была выбрана для интервала Δ_0 система $\{g_j^{(0)}\}_{j=1}^{2n}$.

Полагая

$$g_i = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_i^{(k)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2n),$$

получим, как и в n° 129, систему элементов (несобственных) $g_1, g_2, \ldots, g_{2n}$, удовлетворяющих при любом конечном интервале Δ условию

$$E(\Delta)\, g_i = \sum_k E(\Delta)\, g_i^{(k)}$$

(где ряд справа содержит лишь конечное число слагаемых).

Далее для любого конечного интервала Δ λ-оси получаем формулу

$$E(\Delta) f = \int_{\Delta} \sum_{j=1}^{2n} \Phi_j(f;\lambda)\, dE_\lambda g_j$$

и при $\Delta = [-\infty, \infty]$

$$f = \mathrm{l.\,i.\,m.} \int_{-M}^{N} \sum_{j=1}^{2n} \Phi_j(f;\lambda)\, dE_\lambda g_j.$$

Так как многообразие $\mathfrak{D}$ плотно в $L^2(0, \infty)$, то из последней формулы следует, что кратность спектра оператора $\widetilde{L}$ не превосходит $2n$ и что $g_1, g_2, \ldots, g_{2n}$ есть порождающий базис.

Уравнение замкнутости имеет при $f \in \mathfrak{D}$ вид

$$\int_0^\infty |f(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i,k=1}^{2n} \Phi_j(f;\lambda)\,\overline{\Phi_k(f;\lambda)}\,d\sigma_{ik}(\lambda).$$

Все дальнейшие выкладки, приведенные в конце n° 129, без труда переносятся на рассматриваемый теперь случай, чем и устанавливается справедливость теоремы 2.

Заметим, что в случае распадающихся граничных условий (в частности, при индексах дефекта минимального оператора (n, n) всегда, так как в этом случае все граничные условия сосредоточены в нуле) можно построить формулы обращения с помощью спектральной матрицы порядка n (а не $2n$). Для этого следует вместо $2n$ функций $u_j(t, \lambda)$ взять n их линейных комбинаций $\tilde{u}_k(t, \lambda)$, линейно независимых между собою и удовлетворяющих n краевым условиям в нуле, и рассмотреть систему из n направляющих функционалов

$$\tilde{\Phi}_k(f;\lambda) = \int_0^\infty f(t)\,\tilde{u}_k(t,\lambda)\,dt, \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

131. Исследование характера спектра дифференциальных операторов методом расщепления. В тех случаях, когда удается эффективно построить формулы обращения, установленные в n°n° 129 и 130, спектр дифференциального оператора $\tilde{L}$ находится, как множество точек роста спектральной функции $\sigma(\lambda)$, из n° 129 (или матричной спектральной функции $\mathcal{S}(\lambda)$ из n° 130). Однако подобные случаи (примеры которых будут приведены в n° 132) встречаются редко. Поэтому представляет интерес исследование различных свойств спектра $\mathcal{S}(\tilde{L})$, основанное на заданной информации о поведении коэффициентов дифференциальной операции l, но не требующее знания спектральной функции и формул обращения. Относящийся сюда круг вопросов составляет предмет так называемого качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов.

В настоящем пункте, пользуясь методом расщепления *), мы рассмотрим некоторые примеры задач качественного спектрального анализа. При этом мы для краткости ограничимся простейшей

*) Краткое сообщение об этом методе дано в статье И. М. Глазмана, цитированной на стр. 482. Систематическому исследованию характера спектра одномерных и многомерных дифференциальных операторов с помощью метода расщепления посвящена монография, указанная в подстрочном примечании на стр. 321. Теоремы, приводимые здесь без доказательства, излагаются подробно в этой монографии.

дифференциальной операцией

$$l[y] = -y'' + q(x)\,y \tag{1}$$

на полуоси $x > 0$ с одним сингулярным концом $x = \infty$. Операция (1) называется *операцией Шредингера*, а коэффициент $q(x)$ — *потенциалом*.

Спектры различных самосопряженных расширений $\widetilde{L}$ оператора L с минимальной областью определения, порождаемого операцией (1), различны, но те их свойства, которые мы будем здесь рассматривать, не зависят от выбора расширения. К таким свойствам относятся: 1°) принадлежность данной точки λ к $\mathscr{C}(\widetilde{L})$, 2°) существование бесконечного множества точек спектра в сколь угодно малой односторонней окрестности точки λ и 3°) сгущение спектра $\mathscr{S}(\widetilde{L})$ к точке $\lambda = -\infty$. Независимость перечисленных свойств от выбора расширения следует из теорем 1 n° 105, 1 n° 82 и 2 n° 107. Указанные свойства спектра $\mathscr{S}(\widetilde{L})$ будем называть *сингулярными*, поскольку ими заведомо не может обладать спектр регулярного дифференциального оператора.

Переходя к описанию метода расщепления, обозначим через L_0 оператор, определяемый равенством

$$L_0\varphi = \widetilde{L}\varphi$$

на всех тех функциях $\varphi \in \mathrm{D}_{\widetilde{L}}$, которые в заданной точке $\gamma > 0$ (называемой *точкой расщепления*) удовлетворяют условию

$$\varphi(\gamma) = \varphi'(\gamma) = 0.$$

Очевидно, оператор L_0 распадается в ортогональную сумму

$$L_0 = L_r \oplus L_\gamma$$

операторов L_r и L_γ, порожденных той же операцией (1) в $\mathrm{L}^2(0, \gamma)$ и $\mathrm{L}^2(\gamma, \infty)$ соответственно. Расширяя эти операторы до самосопряженных $\widetilde{L}_r$ и $\widetilde{L}_\gamma$, построим оператор

$$M = \widetilde{L}_r \oplus \widetilde{L}_\gamma.$$

Теперь данный оператор $\widetilde{L}$ и построенный оператор M оказываются различными самосопряженными расширениями одного и того же «расщепленного» оператора L_0. Так как, очевидно, оператор L_0 в $\mathrm{L}^2(0, \infty)$ имеет конечные индексы дефекта, а оператор $\widetilde{L}_r$ регулярен, то естественно ожидать, что сингулярные свойства спектров операторов $\widetilde{L}$ и $\widetilde{L}_\gamma$ одинаковы. Доказательство основано на следующей лемме, в условии которой $n(\alpha, \beta; A)$ означает количество точек спектра самосопряженного оператора A, лежащих в интервале (α, β).

Лемма. *При любых α и β $(-\infty \leqslant \alpha < \beta < \infty)$ величины $n(\alpha, \beta; \widetilde{L})$ и $n(\alpha, \beta, \widetilde{L}_\gamma)$ одновременно конечны или бесконечны.*

Доказательство. Если $n(\alpha, \beta; \widetilde{L}) < \infty$ (или $= \infty$), то по теореме 1 n° 82 будет $n(\alpha, \beta; M) < \infty$ или, соответственно, $= \infty$ (если $\alpha = -\infty$, то вместо теоремы 1 n° 82 следует использовать теорему 2 n° 82). Далее имеем

$$\mathcal{S}(M) = \mathcal{S}(\widetilde{L}_r) \cup \mathcal{S}(\widetilde{L}_\gamma),$$

где число точек множества $\mathcal{S}(\widetilde{L}_r)$, лежащих в интервале (α, β), всегда конечно, так как спектр регулярного оператора дискретен (см. n° 125) и ограничен снизу *). Поэтому если $n(\alpha, \beta; M) < \infty$ (либо $= \infty$), то и $n(\alpha, \beta; \widetilde{L}_\gamma) < \infty$ (соответственно, $= \infty$). Лемма доказана.

Теорема 1. *Сингулярные свойства спектров $\mathcal{S}(\widetilde{L})$ и $\mathcal{S}(\widetilde{L}_\gamma)$ одинаковы.*

Доказательство непосредственно следует из леммы. Действительно, если $\lambda \in \mathscr{C}(\widetilde{L})$, то при любом $\varepsilon > 0$ будет $n(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon, \widetilde{L}) = \infty$, но тогда также $n(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon; \widetilde{L}_\gamma) = \infty$, откуда при $\varepsilon \to 0$ получим $\lambda \in \mathscr{C}(\widetilde{L}_\gamma)$. Аналогично из соотношения $\lambda \in \mathscr{C}(\widetilde{L}_\gamma)$ выводим $\lambda \in \mathscr{C}(\widetilde{L})$. Таким образом,

$$\mathscr{C}(\widetilde{L}) = \mathscr{C}(\widetilde{L}_\gamma).$$

Сингулярные свойства 2° и 3° также вытекают из леммы, если положить соответственно $\alpha = \lambda - \varepsilon$, $\beta = \lambda$ $(\varepsilon \downarrow 0)$ и $\alpha = -\infty$, $\beta < 0$ $(|\beta| \to \infty)$.

Метод расщепления опирается на доказанную теорему 1, а также на теоремы 1 и 2 n° 82, теорему 4 n° 93 и лемму 2 n° 94. При использовании теорем из n° 82 линейное многообразие G образуется как линейная оболочка последовательности финитных функций с непересекающимися носителями **).

---

*) Последнее достаточно проверить в случае граничных условий $y(0) = y(\gamma) = 0$. Пусть $Q(x) = \int\limits_0^x q(t)\,dt$ и $|Q(x)| \leqslant \mathcal{M}$. Тогда

$$(\widetilde{L}_r y, y) = \int\limits_0^\gamma (|y'|^2 + q(x)|y|^2)\,dx =$$

$$= \|y'\|^2 - \int\limits_0^\gamma Q(x)\frac{d}{dx}|y|^2\,dx \geqslant \|y'\|^2 - 2\mathcal{M}\|y'\|\cdot\|y\| \geqslant -\mathcal{M}\|y\|^2,$$

а это и означает полуограниченность снизу оператора $\widetilde{L}_r$.

**) *Носителем* функции называется замыкание множества точек, где функция $\neq 0$.

Если $\lambda \in \mathscr{C}(\widetilde{L})$, то либо точка λ является двусторонней предельной точкой множества $\mathscr{C}(\widetilde{L})$, либо односторонней левой (правой) предельной точкой этого множества. В зависимости от того, какой случай имеет место, условимся относить точку $\lambda \in \mathscr{C}(\widetilde{L})$ к одному из трех возможных *типов*.

Из теоремы 1 непосредственно вытекает следующее предложение, которое без труда обобщается на любую операцию вида (1) n° 123.

Теорема 2. *Непрерывная часть спектра $\mathscr{C}(\widetilde{L})$, тип каждой точки из $\mathscr{C}(\widetilde{L})$, а также ограниченность (или неограниченность) спектра $\mathscr{S}(L)$ снизу не зависят от поведения потенциала $q(x)$ на конечном расстоянии.*

Таким образом, все сингулярные свойства спектра оператора $\widetilde{L}$ определяются поведением потенциала $q(x)$ в бесконечности. В терминах возмущений теорема 2 означает, что любое финитное возмущение $\eta(x)$ потенциала $q(x)$ не меняет сингулярных свойств спектра *). Если возмущение $\eta(x)$ не финитно, но $\eta(x) \to 0$ при $x \to \infty$, то тип точек из $\mathscr{C}(\widetilde{L})$ может меняться (см. далее теорему 5), но, как легко видеть, свойство 3° сохраняется. Следующая теорема показывает, что и свойство 1° сохраняется.

Теорема 3. *Если $\widetilde{L}'$ есть самосопряженный дифференциальный операт ор, порождаемый в* $L^2(0, \infty)$ *операцией*

$$-y'' + q(x)\,y + \eta(x)\,y,$$

и

$$\lim_{x \to \infty} \eta(x) = 0, \tag{2}$$

то

$$\mathscr{C}(\widetilde{L}') = \mathscr{C}(\widetilde{L}). \tag{3}$$

Доказательство. Расщепляя операторы $\widetilde{L}'$ и $\widetilde{L}$ в некоторой точке γ, получаем

$$\mathscr{C}(\widetilde{L}) = \mathscr{C}(\widetilde{L}_\gamma) \quad \text{и} \quad \mathscr{C}(\widetilde{L}') = \mathscr{C}(\widetilde{L}'_\gamma). \tag{4}$$

Выбирая γ так, чтобы при $x > \gamma$ было $|\eta(x)| < \delta$ и пользуясь леммой 2 n° 94, заключаем, что в δ-окрестности каждой точки $\lambda \in \mathscr{C}(\widetilde{L}_\gamma)$ содержатся точки из $\mathscr{C}(\widetilde{L}'_\gamma)$ и, обратно, в δ-окрестности каждой точки $\lambda \in \mathscr{C}(\widetilde{L}'_\gamma)$ содержатся точки из $\mathscr{C}(\widetilde{L}_\gamma)$. Так как число $\delta > 0$ может быть выбрано произвольно малым, то из (4) следует (3).

*) Возмущение $\eta(x)$ здесь и далее предполагается абсолютно интегрируемым на любом конечном интервале, как и потенциал $q(x)$.

В случае $q(x) \geqslant q_0 > 0$ теорема 3 обобщается на относительно малые возмущения, когда вместо (2) требуется лишь $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\eta(x)}{q(x)} = 0$. Этот результат принадлежит М. Ш. Бирману.

Как частный случай, при $q(x) = 0$ из теоремы 3 и результатов n° 89, следует

Теорема 4. *Если* $\lim\limits_{x\to\infty} q(x) = 0$, *то* $\mathscr{C}(\widetilde{L}) = [0, \infty)$.

Из более общих признаков, обеспечивающих соотношение $\mathscr{C}(\widetilde{L}) = [0, \infty)$, отметим условие

$$\lim_{x\to\infty} \int\limits_x^{x+\omega} |q(t)|\, dt = 0$$

при некотором (а следовательно, и при любом) $\omega > 0$. Это условие выполняется, в частности, для потенциалов $q(x) \in L_1(0, \infty)$.

Займемся теперь исследованием типа точки $\lambda = 0$ в условиях теоремы 4. Если $q(x) \geqslant 0$ при больших x, то из леммы этого пункта следует, что отрицательная часть спектра $\mathscr{S}(\widetilde{L})$ исчерпывается конечным числом собственных значений, а значит, точка $\lambda = 0$ не является правой предельной точкой спектра $\mathscr{S}(\widetilde{L})$. С другой стороны, если бы при больших x потенциал был постоянным: $q(x) \equiv -\varepsilon$, то было бы $\mathscr{C}(\widetilde{L}) = [-\varepsilon, \infty)$ и, следовательно, при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ точка $\lambda = 0$ была бы правой предельной для $\mathscr{S}(\widetilde{L})$. Поэтому естественно ожидать, что в условиях теоремы 4 тип точки $\lambda = 0$ зависит от «степени отрицательности» потенциала $q(x)$ при $x \to \infty$. «Граница» между потенциалами, определяющими два различных типа точки $\lambda = 0$, устанавливается следующей теоремой. В условии этой теоремы существование $\lim\limits_{x\to\infty} q(x)$ не предполагается.

Теорема 5. *Если при больших* x

$$q(x) \geqslant -\frac{1}{4x^2}, \tag{5}$$

то отрицательная часть $\mathscr{S}(\widetilde{L})$ *исчерпывается конечным числом собственных значений. Если же для некоторого* $\delta > 0$ *при больших* x

$$q(x) < -\frac{1+\delta}{4x^2}, \tag{6}$$

то отрицательная полуось содержит бесконечное количество точек спектра $\mathscr{S}(\widetilde{L})$.

Доказательство. Если (5) имеет место при $x \geqslant \gamma$, то для любой финитной функции $y \in D_{\widetilde{L}}$, носитель которой расположен правее точки γ, будет

$$(\widetilde{L}y,\ y)=\int_{\gamma}^{\infty}(|y'|^2+q(x)|y|^2)\,dx\geqslant\int_{\gamma}^{\infty}\left(|y'|^2-\frac{1}{4x^2}|y|^2\right)dx=$$

$$=\int_{\gamma}^{\infty}\left|y'-\frac{1}{2x}y\right|^2dx\geqslant 0.$$

Расщепляя оператор $\widetilde{L}$ в точке γ и пользуясь теоремой 1 n° 107, легко получаем доказательство первой части теоремы.

Для доказательства второй части теоремы при условии (6) построим бесконечную последовательность финитных функций $y\in D_{\widetilde{L}}$ с непересекающимися носителями, для которых будет $(\widetilde{L}y,\ y)<0$. Так как это же неравенство будет, очевидно, выполняться и для любого элемента из бесконечномерного подпространства G, натянутого на построенную последовательность, то отсюда на основании теоремы 2 n° 82 будет следовать, что отрицательная полуось содержит бесконечное количество точек спектра $\mathscr{S}(\widetilde{L})$, что и требуется.

Итак, пусть условие (6) выполняется при $x\geqslant\gamma$ и пусть $y\in D_{\widetilde{L}}$ — произвольная финитная функция с носителем, расположенным правее точки γ. Полагая

$$x=e^s,\quad \frac{y(x)}{\sqrt{x}}=z(s)\quad \text{и}\quad \alpha=\ln\gamma,$$

имеем

$$(\widetilde{L}y,\ y)\leqslant\int_{\gamma}^{\infty}\left\{\left|y'-\frac{1}{2x}y\right|^2-\frac{\delta}{4x^2}|y|^2\right\}dx=$$

$$=\int_{\alpha}^{\infty}\left(|z'|^2-\frac{1}{4}\delta|z|^2\right)ds. \qquad (7)$$

Отсюда видно, что если положить

$$z(s)=\varphi_N(s-a),$$

где

$$\varphi_N(s)=\begin{cases}\sin^2 s & \text{при}\quad 0\leqslant s\leqslant\frac{\pi}{2},\\ 1 & \text{при}\quad \frac{\pi}{2}\leqslant s\leqslant\frac{\pi}{2}+N,\\ \sin^2(s-N) & \text{при}\quad \frac{\pi}{2}+N\leqslant s\leqslant\pi+N,\\ 0 & \text{при}\quad s<0 \text{ или } s>\pi+N\end{cases}$$

и $a > \alpha$ — любое, то для соответствующей функции $y(x)$ при достаточно большом N (не зависящем от a) будет $(\widetilde{L}y, y) < 0$. Выбрав такое N и придавая a последовательно значения

$$a_k = \alpha + (N + 2\pi) k, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

получим последовательность функций

$$z_k(s) = \varphi_N(s - a_k),$$

которым отвечает искомая последовательность $y_k(x)$. Теорема доказана.

Неравенства (5) и (6) совпадают с классическими условиями Кнезера неосцилляционности и осцилляционности решений дифференциального уравнения

$$y'' - q(x) y = 0. \tag{8}$$

Мы будем называть операцию (1) *осцилляторной*, если решение уравнения (8) имеет бесконечное число нулей на полуоси $x > 0$ и *неосцилляторной* — в противном случае. Напомним, что нули любых двух линейно независимых решений уравнения (8) перемежаются и поэтому, если одно из решений имеет бесконечное число нулей, то и любое другое решение также имеет бесконечное число нулей.

Следующее общее предложение устанавливает связь между отрицательной частью спектра $\mathcal{S}(\widetilde{L})$ и осцилляторностью операции (1).

Теорема 6. *Для того чтобы операция* (1) *была осцилляторной, необходимо и достаточно, чтобы отрицательная часть спектра оператора* $\widetilde{L}$ *была бесконечным множеством.*

Доказательство. Пусть решение $y(x)$ уравнения (8) имеет бесконечное число нулей $\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \ldots$, так что

$$y(\alpha_k) = y(\beta_k) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{9}$$

В интервале (α_k, β_k) функцию $y(x)$ можно рассматривать как собственную функцию задачи $l[y] = \lambda y$ с краевым условием (9), отвечающую собственному значению $\lambda = 0$. Из вариационных принципов следует, что задача $l[y] = \lambda y$ с краевым условием

$$y(\alpha_k) = y(\beta'_k) = 0,$$

где $\beta'_k > \beta_k$, должна иметь отрицательное собственное значение λ_k. Соответствующую собственную функцию обозначим через $\varphi_k(x)$, так что

$$\int_{\alpha_k}^{\beta'_k} l[\varphi_k] \overline{\varphi}_k \, dx = \lambda_k \int_{\alpha_k}^{\beta'_k} |\varphi_k|^2 \, dx < 0,$$

т. е.

$$\int_{\alpha_k}^{\beta'_k} (|\varphi'_k|^2 + q(x)|\varphi_k|^2)\,dx < 0. \tag{10}$$

Продолжим теперь $\varphi_k(x)$ на всю полуось $x > 0$ тождественным нулем и сгладим ее в окрестности концов α_k и β'_k так, чтобы полученная функция $\tilde{\varphi}_k(x)$ вошла в $D_{\tilde{L}}$. Это сглаживание легко провести с сохранением интервала $[\alpha_k, \beta'_k]$ в качестве носителя финитной функции $\tilde{\varphi}_k(x)$ и с сохранением неравенства (10), которое теперь можно представить в виде

$$(\tilde{L}\tilde{\varphi}_k, \tilde{\varphi}_k) < 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Так как носители построенных функций не пересекаются, то для любой функции $\varphi(x)$ из бесконечномерной линейной оболочки G функций $\tilde{\varphi}_k$ ($k = 1, 2, \ldots$) также будет $(\tilde{L}\varphi, \varphi) < 0$, откуда в силу теоремы 2 n° 82 следует бесконечность множества точек отрицательной части спектра оператора $\tilde{L}$.

Пусть, обратно, множество $\mathscr{S}(\tilde{L}) \cap (-\infty, 0)$ бесконечно и пусть $y(x)$ есть некоторое решение уравнения (8), а N — произвольно заданное положительное число. Требуется доказать, что функция $y(x)$ имеет корень, больший N.

Из бесконечности множества $\mathscr{S}(\tilde{L}) \cap (-\infty, 0)$ по лемме заключаем о бесконечности множества $\mathscr{S}(\tilde{L}_\gamma) \cap (-\infty, 0)$ при любом γ.

По теореме 2 n° 82 существует бесконечномерное многообразие функций $\varphi(x)$ из $D_{\tilde{L}}$, для которых $(\tilde{L}_\gamma\varphi, \varphi) < 0$. Так как $\tilde{L}_\gamma$ есть конечномерное расширение дифференциального оператора L_γ с минимальной областью определения, то и многообразие функций $\varphi \in D_{L_\gamma}$, для которых $(L\varphi, \varphi) < 0$, тоже бесконечномерно (для нас важно лишь, что оно непусто ни при каком $\gamma > 0$).

Пусть $\varphi(x)$ — одна из таких функций. Так как оператор L_γ есть замыкание оператора $\mathring{L}_\gamma$, совпадающего с L_γ на финитных функциях из D_{L_γ}, то найдется финитная функция $\mathring{\varphi}(x) \in D_{L_\gamma}$, для которой также будет

$$(L_\gamma\mathring{\varphi}, \mathring{\varphi}) < 0. \tag{11}$$

Пусть финитная функция $\mathring{\varphi}(x)$ равна нулю вне интервала (a, b). Тогда из неравенства (11) вытекает, что регулярный дифференциальный оператор, порождаемый операцией (1) с краевыми условиями $y(a) = y(b) = 0$, имеет по крайней мере одно отрицательное собственное значение λ. При непрерывном убывании b это собственное значение $\lambda = \lambda(b)$, изменяясь непрерывно, при $b \to a$ неограниченно возрастает. Поэтому существует такое значение b^* ($a < b^* < b$), при котором $\lambda(b^*) = 0$. Соответствующая собственная функция $\varphi^*(x)$ удовлетворяет уравнению (11) и условиям

$$\varphi^*(a) = \varphi^*(b^*) = 0.$$

Но тогда любое решение $y(x)$ должно иметь корень в интервале $[a, b]$. Так как можно взять $\gamma > N$, а $a \geqslant \gamma$, то теорема доказана.

Из других признаков неосцилляторности и осцилляторности отметим следующую теорему, в условии которой потенциал $q(x)$ при больших x предполагается неположительным.

Если

$$\limsup_{x\to\infty} x \int_x^\infty |q(t)|\, dt < \frac{1}{4},$$

то операция (1) неосцилляторна, а если

$$\limsup_{x\to\infty} x \int_x^\infty |q(t)|\, dt > 1,$$

то она осцилляторна.

Остановимся теперь на признаках полуограниченности и дискретности всего спектра $\mathscr{S}(\widetilde{L})$.

Т е о р е м а 7. *Если* $\lim\limits_{x\to\infty} q(x) = +\infty$, *то спектр оператора* $\widetilde{L}$ *ограничен снизу и дискретен.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ограниченность снизу оператора $\widetilde{L}$, а следовательно, и его спектра, очевидна. Для доказательства дискретности $\mathscr{S}(\widetilde{L})$ по заданному $N > 0$ выберем точку расщепления γ так, чтобы при $x \geqslant \gamma$ было $q(x) > N$. Тогда для любой финитной функции $y \in D_{\widetilde{L}_\gamma}$

$$(\widetilde{L}_\gamma y, y) = \int_\gamma^\infty (|y'|^2 + q(x)|y|^2)\, dx > N \int_\gamma^\infty |y|^2\, dx,$$

так что пересечение $\mathscr{C}(\widetilde{L}_\gamma) \cap (-\infty, N)$ пусто и, следовательно, пусто пересечение $\mathscr{C}(\widetilde{L}) \cap (-\infty, N)$. Отсюда в силу произвольности N следует, что множество $\mathscr{C}(\widetilde{L})$ пусто.

Более общий признак, принадлежащий А. М. Молчанову, состоит в следующем. Если потенциал $q(x)$ ограничен снизу, то для дискретности спектра оператора L необходимо и достаточно, чтобы стремилось к бесконечности среднее значение потенциала по любому конечному интервалу, т. е. предельное соотношение

$$\lim_{x\to\infty}\int_{x}^{x+\omega} q(t)\,dt=+\infty$$

при любом $\omega > 0$.

Согласно теореме 3, в тех случаях, когда существует конечный предел $\lim\limits_{x\to\infty} q(x) = q_\infty$, т. е. равно нулю колебание потенциала на бесконечности

$$\omega=\lim_{x\to\infty}\sup q(x)-\lim_{x\to\infty}\inf q(x),$$

непрерывный спектр оператора $\widetilde{L}$ совпадает с полуосью $[q_\infty, \infty)$. В связи с этим возникает вопрос о том, как будет сказываться на непрерывном спектре влияние конечного предельного колебания $\omega \neq 0$ потенциала. Естественно ожидать, что это влияние как-то должно регламентироваться величиной ω. Действительно, имеет место следующее предложение.

Теорема 8. *Длина лакун в непрерывной части спектра оператора $\widetilde{L}$ не превосходит величины ω.*

Доказательство. Положим

$$\sigma=\lim_{x\to\infty}\inf q(x),\qquad \varrho=\lim_{x\to\infty}\sup q(x)$$

и введем операцию

$$l[y]=-y''+Q(x)\,y \tag{12}$$

с потенциалом

$$Q(x)=q(x)-\frac{1}{2}(\sigma+\varrho).$$

Тогда

$$\lim_{x\to\infty}\sup|Q(x)|=\mathscr{M},$$

где $\mathscr{M} = \dfrac{\omega}{2} = \dfrac{1}{2}(\varrho - \sigma)$, и, достаточно установить, что длина лакун в непрерывной части спектра оператора $\widetilde{L}$, порождаемого операцией (12), не превосходит $2\mathscr{M}$.

Очевидно, левее точки $-\mathscr{M}$ не существует точек непрерывной части спектра оператора $\widetilde{L}$. Пусть теперь $\lambda_0 > 0$ и $\delta > \mathscr{M}$, но интервал $(\lambda_0 - \delta,\ \lambda_0 + \delta)$ не содержит точек из $\mathscr{C}(\widetilde{L})$. Покажем, что это предположение приводит к противоречию.

Так как $\mathscr{C}(\widetilde{L}) = \mathscr{C}(\widetilde{L}_\gamma)$, то в силу сделанного предположения при любом γ пересечение $\mathscr{C}(\widetilde{L}_\gamma) \cap (\lambda_0 - \delta,\ \lambda_0 + \delta)$ должно быть пустым. Если теперь выбрать точку расщепления γ так, чтобы при $x > \gamma$ было $|Q(x)| \leqslant \delta_0 < \delta$, то, пользуясь леммой 2 n° 94, заключаем, что точка λ_0 не принадлежит непрерывной части спектра оператора дифференцирования второго порядка $\mathcal{P}^2$ в $L^2(\gamma, \infty)$, что абсурдно, так как последняя покрывает сплошь полуось $\lambda \geqslant 0$.

При некоторых дополнительных ограничениях теорема 8 допускает существенное развитие. Так, например, если функция $q(x)$ ограничена и равномерно непрерывна на полуоси $x > 0$, то длина лакун в $\mathscr{C}(L)$, расположенных правее точки λ, по теореме Хартмана — Патнама стремится к нулю. Это же имеет место для любых локально суммируемых периодических потенциалов.

Возмущение потенциала, обладающего конечным колебанием в бесконечности, слагаемым $\eta(x)$, стремящимся к нулю при $x \to \infty$, не изменяет $\mathscr{C}(\tilde{L})$, но может внести дискретный спектр в лакуны спектра $\mathscr{C}(\tilde{L})$. Число точек дискретного спектра, вносимого таким образом в лакуну, может быть конечным или бесконечным. Вопрос о том, какой из этих двух случаев имеет место, напоминает задачу об условиях неосцилляторности и осцилляторности. Однако в действительности этот вопрос существенно сложнее и до сих пор остается неисследованным.

Единственным относящимся сюда результатом является теорема Ф. С. Рофе-Бекетова *) об операторе Шредингера L с периодическим потенциалом $q(x)$. Эта теорема состоит в следующем: если

$$\int_0^\infty x|\eta(x)|\,dx < \infty,$$

то дискретный спектр, вносимый в каждую лакуну спектра $\mathscr{C}(\tilde{L})$ возмущением $\eta(x)$, конечен (и при этом достаточно далекие лакуны содержат не более одного собственного значения каждая).

132. Примеры. I. Тригонометрические функции. Дифференциальная операция:

$$l = -\frac{d^2}{dt^2} \qquad (0 \leqslant t < \infty).$$

Индексы дефекта оператора L равны (1, 1). Граничное условие, характеризующее самосопряженное расширение оператора:

$$y'(0) = \theta y(0).$$

*) Ф. С. Рофе-Бекетов, Признак конечности числа дискретных уровней, вносимых в лакуны непрерывного спектра возмущениями периодического потенциала, ДАН СССР **156**, № 3 (1964).

Фундаментальная система решений:

$$u(t;\ \lambda)=\cos\left(\sqrt{\lambda}t\right)+\frac{\theta}{\sqrt{\lambda}}\sin\left(\sqrt{\lambda}t\right),$$

$$v(t;\ \lambda)=-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sin\left(\sqrt{\lambda}t\right).$$

Определение функции $m(z)$ $(\Im z>0)$:

$$v(t;\ z)+m(z)\,u(t;\ z)=$$

$$=m(z)\left\{\cos\left(\sqrt{z}t\right)+\frac{\theta}{\sqrt{z}}\sin\left(\sqrt{z}t\right)\right\}-\frac{1}{\sqrt{z}}\sin\left(\sqrt{z}t\right)=$$

$$=\left\{m(z)\left[\frac{1}{2}-\frac{\theta}{2i\sqrt{z}}\right]+\frac{1}{2i\sqrt{z}}\right\}e^{-i\sqrt{z}t}+$$

$$+\left\{m(z)\left[\frac{1}{2}+\frac{\theta}{2i\sqrt{z}}\right]-\frac{1}{2i\sqrt{z}}\right\}e^{i\sqrt{z}t};$$

условие принадлежности к $L^2(0,\ \infty)$ дает:

$$m(z)\left[\frac{1}{2}-\frac{\theta}{2i\sqrt{z}}\right]+\frac{1}{2i\sqrt{z}}=0,$$

откуда

$$m(z)=\frac{1}{\theta-i\sqrt{z}}\,.$$

Определение $\sigma(\lambda)$:

$$\sigma(\lambda)=\text{const}+\lim_{y\to 0}\frac{1}{\pi}\int_0^\lambda \Im\frac{1}{\theta-i\sqrt{x+iy}}\,dx;$$

если $\theta\geqslant 0$, то

$$\sigma'(\lambda)=\frac{\sqrt{\lambda}}{\pi(\lambda+\theta^2)}\qquad(\lambda\geqslant 0),$$

$$\sigma(\lambda)=0\qquad(\lambda<0);$$

если $\theta<0$, то

$$\sigma'(\lambda)=\frac{\sqrt{\lambda}}{\pi(\lambda+\theta^2)}\qquad(\lambda\geqslant 0),$$

и в точке

$$\lambda_0=-\theta^2$$

скачок

$$\sigma(\lambda_0+0)-\sigma(\lambda_0)=-2\theta.$$

Формулы обращения:

a) $\theta \geqslant 0$

$$\Phi(\lambda)=\int_0^\infty f(t)\left\{\cos\left(\sqrt{\lambda}t\right)+\frac{\theta}{\sqrt{\lambda}}\sin\left(\sqrt{\lambda}t\right)\right\}dt \qquad (\lambda \geqslant 0),$$

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \Phi(\lambda)\left\{\cos\left(\sqrt{\lambda}t\right)+\frac{\theta}{\sqrt{\lambda}}\sin\left(\sqrt{\lambda}t\right)\right\}\frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda+\theta^2}d\lambda.$$

b) $\theta < 0$

$$\Phi(\lambda)=\begin{cases}\int_0^\infty f(t)\left\{\cos\left(\sqrt{\lambda}t\right)+\frac{\theta}{\sqrt{\lambda}}\sin\left(\sqrt{\lambda}t\right)\right\}dt & (\lambda \geqslant 0),\\ \int_0^\infty f(t)e^{\theta t}dt & (\lambda=-\theta^2),\\ 0 & (\lambda\neq-\theta^2, \quad \lambda<0),\end{cases}$$

$$f(t)=-2\theta\Phi(-\theta^2)e^{\theta t}+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \Phi(\lambda)\left\{\cos\left(\sqrt{\lambda}t\right)+\frac{\theta}{\sqrt{\lambda}}\sin\left(\sqrt{\lambda}t\right)\right\}\frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda+\theta^2}d\lambda.$$

Если граничное условие имеет вид

$$y(0)=0,$$

то формулы обращения получаются заменой $\Phi(\lambda)$ на $\theta\Phi(\lambda)$ и предельным переходом $\theta\to\infty$:

$$\Phi(\lambda)=\int_0^\infty f(t)\frac{\sin\left(\sqrt{\lambda}t\right)}{\sqrt{\lambda}}dt,$$

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \Phi(\lambda)\sin\left(\sqrt{\lambda}t\right)d\lambda.$$

В этом случае, как и при $\theta=0$, мы получаем обычное преобразование Фурье — Планшереля для полуоси.

II. Функции Лежандра. Дифференциальная операция:

$$l=-\frac{d}{dt}(1-t^2)\frac{d}{dt} \qquad (-1<t<1).$$

Оба конца интервала сингулярны.

Ортонормированная система решений уравнения

$$(L^*-\lambda I)\,u=0$$

при невещественном λ имеет вид

$$\begin{aligned} u_1(t;\lambda)&=A_\mu\{P_\mu(t)+P_\mu(-t)\} \\ u_2(t;\lambda)&=B_\mu\{P_\mu(t)-P_\mu(-t)\}, \end{aligned}\qquad (A_\mu,\ B_\mu>0),$$

где μ — какой-нибудь корень уравнения

$$\mu(\mu+1)=\lambda,$$

а $P_\mu(t)$ — функция Лежандра первого рода, которая может быть определена с помощью следующего ряда *):

$$P_\mu(t)=$$

$$=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+k)(-\mu)(-\mu+1)\ldots(-\mu+k-1)}{k!^2}\left(\frac{1}{2}-\frac{t}{2}\right)^k,$$

сходящегося в круге $|t-1|<2$. Этот ряд есть гипергеометрическая функция

$$F\left(\mu+1,\ -\mu,\ 1;\ \frac{1-t}{2}\right).$$

Равным образом,

$$P'_\mu(t)=\frac{\mu(\mu+1)}{2}F\left(\mu+2,\ -\mu+1,\ 2;\ \frac{1-t}{2}\right).$$

Поэтому при $t\to-1+0$

$$\frac{P_\mu(t)}{\ln\frac{1-t}{1+t}}\to-\frac{\sin\pi\mu}{\pi},$$

$$(1-t^2)\,P'_\mu(t)\to\frac{2\sin\pi\mu}{\pi},$$

откуда следует, что оба решения принадлежат $L^2(-1,\ 1)$, т. е. индексы дефекта оператора L равны (2,2).

Полагая

$$\omega^*(t)=\omega(t)-\frac{1}{2}\,\omega^{[1]}(t)\ln\frac{1+t}{1-t},$$

где квазипроизводная $\omega^{[1]}(t)$ равна

$$(1-t^2)\,\omega'(t),$$

*) Э. Т. Уиттекер и Дж. Н. Ватсон, Курс современного анализа, т. II, Физматгиз, 1963.

можем переписать билинейную форму Лагранжа в виде

$$[\varphi, \psi]_t = \varphi^{[1]}(t)\overline{\psi^*(t)} - \varphi^*(t)\overline{\psi^{[1]}(t)}.$$

Для всякой функции $\varphi(t) \in D_{L^*}$ существуют и конечны пределы

$$\lim_{t\to\pm 1} \varphi^{[1]}(t), \qquad \lim_{t\to\pm 1} \varphi^*(t).$$

Многообразие D_L есть совокупность всех тех функций $\varphi(t) \in D_{L^*}$, для которых эти четыре предела равны нулю.

Эти два факта следуют из того, что при любой функции $f(t) \in L^2(-1, 1)$ общий интеграл уравнения

$$l[y] = f(t)$$

имеет вид

$$y(t) = \left\{C_1 + \frac{1}{2}\int_{-1}^{t} f(s)\ln\frac{1+s}{1-s}\,ds\right\} + \left\{C_2 - \frac{1}{2}\int_{-1}^{t} f(s)\,ds\right\}\ln\frac{1+t}{1-t}.$$

Чтобы получить самосопряженное расширение оператора L, нужно, согласно общей теории, зафиксировать какое-нибудь λ из верхней полуплоскости (мы возьмем $\lambda = \mu(\mu+1)$, где μ — число чисто мнимое) и, выбрав унитарную матрицу $(\vartheta_{ik})_{i,k=1}^2$, положить

$$w_1(t;\lambda) = u_1(t;\lambda) + \vartheta_{11}\overline{u_1(t;\lambda)} + \vartheta_{12}\overline{u_2(t;\lambda)},$$
$$w_2(t;\lambda) = u_2(t;\lambda) + \vartheta_{21}\overline{u_1(t;\lambda)} + \vartheta_{22}\overline{u_2(t;\lambda)}.$$

Далее следует найти значения

$$w_k^{[1]}(\pm 1;\lambda), \quad w_k^*(\pm 1;\lambda) \qquad (k=1, 2)$$

и с их помощью составить краевые условия

$$[\varphi, w_k]_{-1}^{1} = 0 \qquad (k=1, 2),$$

выделяющие из области D_{L^*} область D_{L_ϑ}.

Используя приведенные формулы, нетрудно составить следующую таблицу:

$$w_1^{[1]}(\pm 1) = \frac{2\sin\pi\mu}{\pi}\{\mp A_\mu(1-\vartheta_{11}) - B_\mu\vartheta_{12}\},$$

$$w_2^{[1]}(\pm 1) = \frac{2\sin\pi\mu}{\pi}\{\pm A_\mu\vartheta_{21} + B_\mu(1-\vartheta_{22})\},$$

$$w_1^*(\pm 1) = A_\mu\{[1+\gamma(\mu)] + \vartheta_{11}[1+\overline{\gamma(\mu)}]\} \pm \vartheta_{12}B_\mu[1-\overline{\gamma(\mu)}],$$

$$w_2^*(\pm 1) = \vartheta_{21}A_\mu[1+\overline{\gamma(\mu)}] \pm B_\mu\{[1-\gamma(\mu)] + \vartheta_{22}[1-\overline{\gamma(\mu)}]\}.$$

На вычислении величины $\gamma(\mu)$ мы не остановимся, но из дальнейшего будет ясно, что $\gamma(\mu) \neq \pm 1$.

Простейшее и наиболее важное самосопряженное расширение мы получим, полагая

$$\vartheta_{11} = \vartheta_{22} = 1, \quad \vartheta_{12} = \vartheta_{21} = 0.$$

В этом случае

$$w_1^{[1]}(\pm 1) = 0, \quad w_2^{[1]}(\pm 1) = 0$$

и

$$w_1^*(\pm 1) = A_\mu [2 + \gamma(\mu) + \overline{\gamma(\mu)}],$$
$$w_2^*(\pm 1) = \pm B_\mu [2 - \gamma(\mu) - \overline{\gamma(\mu)}].$$

Так как ни $w_1(t)$, ни $w_2(t)$ не принадлежат D_L, то последние выражения отличны от нуля, и, значит, $\gamma(\mu) \neq \pm 1$.

Краевые условия, характеризующие рассматриваемое расширение, имеют вид

$$\varphi^{[1]}(1) = \varphi^{[1]}(-1) = 0. \tag{1}$$

Им можно придать и другую форму. Во-первых, они эквивалентны условию:

$$\varphi^{[1]}(t) \in L^2(-1, 1). \tag{2}$$

Во-вторых, они эквивалентны следующему требованию:

$$\varphi(t) \text{ стремится к конечным пределам при } t \to \pm 1. \tag{3}$$

Докажем эквивалентность этих условий. При этом достаточно рассмотреть случай вещественных функций.

В этом случае мы можем написать тождество

$$-\int_\alpha^\beta \varphi(t)\,[(1-t^2)\,\varphi'(t)]'\,dt =$$
$$= -(1-t^2)\,\varphi'(t)\,\varphi(t)\Big|_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta (1-t^2)\,\varphi'^2(t)\,dt \tag{4}$$
$$(-1 < \alpha < \beta < 1),$$

левая часть которого имеет конечный предел при $\alpha \to -1$, $\beta \to 1$, какова бы ни была функция $\varphi(t) \in D_{L^*}$. С другой стороны,

$$\varphi^{[1]}(t) = \varphi^{[1]}(-1) - \int_{-1}^{t} l[\varphi(s)]\,ds = \varphi^{[1]}(1) + \int_t^1 l[\varphi(s)]ds.$$

Поэтому если выполнено условие (1), то

$$|\varphi^{[1]}(t)| \leqslant \sqrt{1 \pm t}\, \| L^*\varphi \|$$

и, значит,

$$\lim_{t \to \pm 1} \varphi^{[1]}(t) \ln \frac{1+t}{1-t} = 0,$$

откуда следует, что $\varphi(t)$ стремится к конечным пределам при $t \to \pm 1$, т. е. выполняется условие (3), а из тождества (4) вытекает и существование интеграла *)

$$I(\varphi) = \int_{-1}^{1} (1 - t^2)\, \varphi'^2(t)\, dt, \tag{5}$$

т. е. условие (2). Итак, (1) $\to$ (3) и (1) $\to$ (2), и остается доказать, что (2) $\to$ (1). Но если интеграл (5) существует, то $\varphi^{[1]}(1)$ не может быть отличным от нуля, так как в противном случае из конечности $\varphi^*(1)$ следовало бы, что $\varphi(t)$ имеет бесконечный предел при $t \to 1$, что приводит к противоречию в силу тождества (4).

Самосопряженное расширение, характеризуемое одним из условий (1) — (3), приводит к классическим разложениям по многочленам Лежандра. Так как граничные условия (1) распадаются, то спектр расширения прост. При этом спектр является чисто точечным, без конечных точек сгущения, а обратный оператор вполне непрерывен. Многочлены Лежандра

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (t^2 - 1)^n}{dt^n} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

удовлетворяют уравнению

$$-\frac{d}{dt}(1 - t^2)\frac{du}{dt} - n(n+1)u = 0,$$

и, кроме того, удовлетворяют условию (3). А так как совокупность всех многочленов $P_n(t)$ образует полную ортогональную систему в $L^2(-1, 1)$, то спектр рассматриваемого расширения состоит из точек

$$n(n+1) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

и соответствующие этому случаю формулы обращения следуют из разложения в ряд по многочленам Лежандра.

---

*) Заметим, что уравнение $l[\varphi] = 0$ совпадает с уравнением Эйлера — Лагранжа для интеграла $I(\varphi)$. В связи с этим см. Friedrichs, Über die ausgezeichnete Randbedingung..., Math. Ann., 112, стр. 1—23 (1935).

III. Функции Чебышева — Эрмита связаны с дифференциальной операцией

$$l=-\frac{d^2}{dt^2}+t^2 \qquad (-\infty<t<\infty), \tag{6}$$

которая, в частности, имеет большое значение в теории так называемого линейного осциллятора в квантовой механике.

Оператор L, порожденный операцией (6), является самосопряженным оператором в силу теоремы 5 п° 128. Легко проверить, что уравнению

$$-u''+(t^2-\lambda)u=0$$

при

$$\lambda=2n+1 \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

удовлетворяют последовательные функции Чебышева — Эрмита (см. п° 12), образующие полную систему в $L^2(-\infty,\ \infty)$. Поэтому оператор L имеет чисто дискретный спектр с единственной предельной точкой в бесконечности. Таким образом, формулы обращения, связанные с оператором L, сводятся к разложению по функциям Чебышева — Эрмита.

Рассмотренный пример является в некотором отношении поучительным. Он показывает, что свойство резольвенты быть вполне непрерывным оператором, которое, согласно теореме 2 п° 128, всегда имеет место в квазирегулярном случае, может иметь место и в других случаях (и даже в случае минимальных индексов дефекта, как в приведенном примере).

IV. Функции Бесселя. Среди различных дифференциальных операций, приводящих к функциям Бесселя, важнейшая имеет вид

$$l=-\frac{d^2}{dt^2}+\frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{t^2}; \tag{7}$$

эту операцию мы и рассмотрим при параметре $\nu\geqslant 0$. Что касается интервала, то естественно изучить следующие три случая:

α) $0<t\leqslant 1$ — один сингулярный конец;

β) $1\leqslant t<\infty$ — один сингулярный конец;

γ) $0<t<\infty$ — два сингулярных конца.

Общий интеграл уравнения

$$l[u]-\lambda u=0 \tag{8}$$

при $\lambda\neq 0$ имеет вид

$$u(t;\lambda)=At^{\frac{1}{2}}J_\nu(t\sqrt{\lambda})+Bt^{\frac{1}{2}}Y_\nu(t\sqrt{\lambda}), \tag{9}$$

где A, B — произвольные константы, а $J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$ — цилиндрические функции 1-го и, соответственно, 2-го рода, которые определяются формулами

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)},$$

$$Y_\nu(z) = \frac{J_\nu(z)\cos\pi\nu - J_{-\nu}(z)}{\sin\pi\nu}.$$

Мы будем предполагать, что $\Im\lambda > 0$ и $t > 0$; таким образом, величина $z = t\sqrt{\lambda}$ будет удовлетворять неравенству

$$0 < \arg z < \frac{\pi}{2}.$$

Но при $|\arg z| < \pi - \varepsilon$ и $|z| \to \infty$ имеют место асимптотические формулы

$$J_\nu(z) + iY_\nu(z) = H_\nu^{(1)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{i\left(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right)},$$

$$J_\nu(z) - iY_\nu(z) = H_\nu^{(2)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{-i\left(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

С помощью формулы (9) найдем, что уравнение (8) не имеет двух линейно независимых решений, принадлежащих $L^2(1, \infty)$. Но одно такое решение существует обязательно. Этим решением является функция

$$u_1(t;\, \lambda) = AH_\nu^{(1)}(t\sqrt{\lambda}).$$

Индексы дефекта оператора L в случае β) равны, таким образом, (1, 1).

Найдем индексы дефекта оператора L в случае α). Так как при $z \to 0$

$$z^{\frac{1}{2}} J_\nu(z) \sim \frac{z^{\nu+\frac{1}{2}}}{2^\nu \Gamma(\nu+1)},$$

а, с другой стороны, $z^{\frac{1}{2}} Y_\nu(z)$ не принадлежит $L^2(0, 1)$, если $\nu \geqslant 1$, и принадлежит $L^2(0, 1)$, если $0 \leqslant \nu < 1$, то в случае α) индексы дефекта оператора L равны

$$(2,\ 2) \quad \text{при } 0 \leqslant \nu < 1,$$

$$(1,\ 1) \quad \text{при } \nu \geqslant 1.$$

Поэтому в случае γ) индексы дефекта оператора L равны

$$(1, 1) \quad \text{при} \quad 0 \leqslant \nu < 1,$$
$$(0, 0) \quad \text{при} \quad \nu \geqslant 1.$$

В каждом из перечисленных случаев дифференциальная операция (7) порождает некоторые формулы обращения.

Единственную пару формул мы получим для интервала $(0, \infty)$ при $\nu \geqslant 1$. Эта пара формул имеет вид

$$g(\lambda) = \int_0^\infty \sqrt{\lambda t}\, J_\nu(\lambda t) f(t)\, dt,$$
$$f(t) = \int_0^\infty \sqrt{\lambda t}\, J_\nu(\lambda t)\, g(\lambda)\, d\lambda. \tag{10}$$

Мы имеем здесь не только унитарный, но и самосопряженный оператор в $L^2(0, \infty)$, который носит название *преобразования Ганкеля*. Убедиться в справедливости формул обращения (10) проще всего непосредственно, применяя один из указанных нами приемов для получения формул обращения Фурье — Планшереля. При этом оказывается, что формулы (10) справедливы также для $\nu \geqslant 0$, но для $0 \leqslant \nu < 1$ они не являются уже единственными формулами обращения на полуоси *), порожденными операцией (7).

Рассмотрим случай интервала $(0, 1)$ при $\nu \geqslant 1$ и примем, что краевое условие на регулярном конце имеет вид

$$\varphi(1) = 0.$$

Следовательно, мы можем положить

$$u(t; \lambda) = \frac{\pi}{2} \sqrt{t}\, \{J_\nu(t\sqrt{\lambda})\, Y_\nu(\sqrt{\lambda}) - Y_\nu(t\sqrt{\lambda})\, J_\nu(\sqrt{\lambda})\}.$$

Пусть, далее,

$$v(t; \lambda) = \frac{\pi}{2} \sqrt{t\lambda}\, \{J_\nu(t\sqrt{\lambda})\, Y'_\nu(\sqrt{\lambda}) - Y_\nu(t\sqrt{\lambda})\, J'_\nu(\sqrt{\lambda})\}.$$

Тогда

$$K(t, s; z) = \begin{cases} u(t; z)\,[v(s; z) + m(z)\, u(s; z)] & (t \geqslant s), \\ u(s; z)\,[v(t; z) + m(z)\, u(t; z)] & (t < s). \end{cases}$$

*) Формулы (10) справедливы даже при $\nu \geqslant -1$. См. Н. И. Ахиезер, Лекции по теории аппроксимации, изд. 2-е, «Наука», 1965, стр. 135.

Функция $m(z)$ определяется из условия принадлежности решения

$$v(t;\ z)+m(z)\,u(t;\ z)$$

пространству $L^2(0,\ 1)$. Это значит, что функция

$$\frac{\pi}{2}\sqrt{t}\,J_\nu\left(t\sqrt{z}\right)\left[\sqrt{z}\,Y'_\nu\left(\sqrt{z}\right)+m(z)\,Y_\nu\left(\sqrt{z}\right)\right]-$$
$$-\frac{\pi}{2}\sqrt{t}\,Y_\nu\left(t\sqrt{z}\right)\left[\sqrt{z}\,J'_\nu\left(\sqrt{z}\right)+m(z)\,J_\nu\left(\sqrt{z}\right)\right]$$

должна сводиться к первому члену. Итак,

$$m(z)=-\sqrt{z}\,\frac{J'_\nu(\sqrt{z})}{J_\nu(\sqrt{z})}\,.$$

Эта функция представима в виде

$$m(z)=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n}{z-\lambda_n}\,,$$

где λ_n — отличные от нуля корни функции $J_\nu(\sqrt{z})$, откуда следует, что $\sigma(\lambda)$ есть кусочно-постоянная функция и последовательность $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \ldots$ образует спектр. Собственные функции суть

$$u_n(t)=u(t;\ \lambda_n)=\frac{\pi}{2}\sqrt{t}\,Y_\nu\left(\sqrt{\lambda_n}\right)J_\nu\left(t\sqrt{\lambda_n}\right)=-\frac{\sqrt{t}\,J_\nu(t\sqrt{\lambda_n})}{\sqrt{\lambda_n}\,J'_\nu(\sqrt{\lambda_n})}\,.$$

Формулы обращения сводятся к формуле разложения

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sqrt{t}\,J_\nu(t\sqrt{\lambda_n})}{J'^2_\nu(\sqrt{\lambda_n})}\int_0^1\sqrt{s}\,J_\nu\left(s\sqrt{\lambda_n}\right)f(s)\,ds,$$

известной под названием *формулы Фурье — Бесселя.*

Если бы на регулярном конце было взято общее условие

$$\varphi'(1)=-\theta\varphi(1),$$

то мы пришли бы к так называемым *рядам Фурье — Дини.*

На случае интервала $(0,\ 1)$ при $0\leqslant\nu<1$ мы не остановимся. Заметим лишь, что на этот случай переносится прием, которым мы воспользовались при рассмотрении операции Лежандра.

Равным образом мы можем предоставить читателю рассмотрение случая, когда интервалом является $(1,\ \infty)$, а индексы дефекта равны $(1,\ 1)$. Если принять на регулярном конце условие

$$\varphi(1)=0,$$

то, применив неоднократно использованный прием, найдем:

$$m(z) = -\sqrt{z}\,\frac{J'_\nu(\sqrt{z}) + iY'_\nu(\sqrt{z})}{J_\nu(\sqrt{z}) + iY_\nu(\sqrt{z})},$$

и получим *формулы обращения Вебера:*

$$\Phi(\lambda) = \int_1^\infty \sqrt{t}\,\{J_\nu(t\sqrt{\lambda})\,Y_\nu(\sqrt{\lambda}) - Y_\nu(t\sqrt{\lambda})\,J_\nu(\sqrt{\lambda})\}\,f(t)\,dt,$$

$$f(t) = \int_0^\infty \sqrt{t}\,\frac{J_\nu(t\sqrt{\lambda})\,Y_\nu(\sqrt{\lambda}) - Y_\nu(t\sqrt{\lambda})\,J_\nu(\sqrt{\lambda})}{2\{J_\nu^2(\sqrt{\lambda}) + Y_\nu^2(\sqrt{\lambda})\}}\,\Phi(\lambda)\,d\lambda.$$

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Наум Ильич Ахиезер
Израиль Маркович Глазман

ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ
В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

М., 1966 г., 544 стр.

Редактор *Ф. С. Рофе-Бекетов*
Художник *Ю. И. Соколов*
Техн. редактор *С. Я. Шкляр*
Корректор *Е. А. Белицкая*

Сдано в набор 9/IV 1966 г.
Подписано к печати 5/VII 1966 г.
Бумага $60\times90^1/_{16}$. Физ. печ. л. 34.
Условн. печ. л. 34. Уч.-изд. л. 33,88.
Тираж 10000 экз. Т-08281.
Цена книги 2 р. 39 к. Зак. № 199

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
Москва, В-71,
Ленинский проспект, 15

Московская типография № 16
Главполиграфпрома
Комитета по печати
при Совете Министров СССР
Москва, Трехпрудный пер., 9