Дж. АЛБЕРГ, Э. НИЛЬСОН, Дж. УОЛШ

ТЕОРИЯ СПЛАЙНОВ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Перевод с английского
Ю. Н. Субботина

под редакцией
С. Б. Стечкина

с добавлениями
С. Б. Стечкина и Ю. Н. Субботина

Издательство «Мир» Москва 1972

The Theory of Splines and Their Applications

J. H. Ahlberg

United Aircraft Research Laboratories
East Hartford, Connecticut

E. N. Nilson

Pratt & Whitney Aircraft Company
East Hartford, Connecticut

J. L. Walsh

University of Maryland
College Park, Maryland

1967

Academic Press New York and London

ДК 518.5

Монография посвящена изложению основ теории кусочно-полиномиальных приближений и некоторых ее применений. Это новое направление в теории приближений, которое в настоящее время усиленно развивается главным образом американскими математиками. Активное участие в его разработке принимают и авторы монографии, среди которых Дж. Уолш — видный американский ученый, известный советским читателям по переводу его монографии «Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области».

Кусочно-полиномиальные, или, как их теперь называют, сплайн-приближения, имеют ряд преимуществ перед обычными полиномиальными приближениями, в частности при решении задач на быстродействующих вычислительных машинах.

Книга представляет большой интерес для специалистов по теории приближений и по вычислительной математике, а также для инженеров и вычислителей, студентов и аспирантов университетов и институтов с отделениями прикладной математики.

Редакция литературы по математическим наукам

Инд.2-2-3
1-72

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Теория сплайнов и сплайн-аппроксимаций представляет собой весьма важный и интенсивно развивающийся раздел теории приближения функций. Во многих задачах сплайны являются более естественным аппаратом приближения, чем многочлены. К таким задачам относятся практически важные задачи интерполирования и сглаживания функций, численного дифференцирования, численного интегрирования функций, а также численного интегрирования дифференциальных уравнений. В теоретических исследованиях сплайны появляются как решение различного рода вариационных задач теории приближений (задачи о поперечниках). Безусловно, у сплайнов большое будущее.

В вычислительную математику и теорию приближений сплайны проникали постепенно, на протяжении длительного времени. Первой ласточкой здесь надо считать «метод ломаных Эйлера» интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. В теории приближений они появились по крайней мере с эпохи Лебега и Джексона как вспомогательные средства для доказательства теоремы Вейерштрасса и «прямых теорем» теории полиномиальных приближений. Приближения сплайнами естественно возникают также при исследовании квадратурных формул. С уклоном в задачи вычислительной математики сплайн-аппроксимации систематически исследовал и активно пропагандировал И. Шёнберг (США). Как промежуточное приближение они появились в глубоких исследованиях Н. П. Корнейчука о приближении дифференцируемых функций. Отметим еще работы В. М. Тихомирова по поперечникам функциональных классов и Ю. Н. Субботина по функциональной интерполяции, в которых с неизбежностью также появляются сплайны.

В настоящее время знакомство с основными свойствами и приложениями сплайнов необходимо как специалистам по теории приближений, так и прикладникам, использующим результаты и методы этой теории.

В предлагаемой читателю монографии Алберга, Нильсона, Уолша излагаются некоторые важные вопросы теории сплайнов. Изложение рассчитано на широкий круг математиков, инженеров и прикладников и поэтому является далеко не полным. В конце книги помещены добавления переводчика и редактора перевода, где освещается ряд задач, не затронутых в основном тексте. Отметим, однако, что общий характер книги не позволил нам рассмотреть с должным вниманием задачи о поперечниках.

Я надеюсь, что появление этой книги будет способствовать развитию теории сплайнов и ее более широкому использованию в прикладной математике.

С. Б. Стечкин

Глава I. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Что такое сплайн?

Целесообразно книгу по теории сплайнов начать с определения сплайна в его простейшей и наиболее употребительной форме и объяснить происхождение этого термина. В течение многих лет чертежники использовали длинные тонкие рейки из дерева или какого-либо другого материала в качестве лекал, проводя с их помощью плавные кривые через заданные точки. Эти рейки, или *сплайны*, закрепляют на месте, подвешивая к ним в некоторых точках свинцовые грузила. Изменяя положение точек, в которых подвешиваются грузила, а также положение сплайна и грузил, при достаточном числе грузил можно добиться, чтобы сплайн проходил через заданные точки.

Если рассматривать рейку (сплайн чертежника) как тонкую балку, то имеет место закон Бернулли — Эйлера

$$M(x) = EI\,[1/R(x)],$$

где $M(x)$ — изгибающий момент, E — модуль Юнга, I — геометрический момент инерции и $R(x)$ — радиус кривизны кривой, совпадающей с деформированной осью балки. При незначительных изгибах $R(x)$ можно заменить на $1/y''(x)$, где $y(x)$ — деформированная ось балки. Таким образом,

$$y''(x) = \frac{1}{EI} M(x).$$

Поскольку грузила по существу действуют как простые опоры, функция $M(x)$ между точками закрепления грузил изменяется линейно.

Математическим сплайном называют приближенное представление деформированной оси рейки кусками кубической параболы (обычно различными между каждой парой смежных грузил) с определенными разрывами производных, допускаемых в точках прикрепления грузил (где стыкуются два полинома).

Математический сплайн простейшего вида непрерывен и имеет непрерывные первую и вторую производные, а третья производная может претерпевать в точках соединения разрыв с конечным скачком. Это соответствует рейке, имеющей непрерывную кривизну, скорость изменения которой разрывна в точках прикрепления грузил. Для многих важных применений эта математическая модель сплайна чертежника достаточно близка к действительности.

На практике чертежник не помещает грузила в заданных точках, через которые должен проходить его сплайн. Более того, обычно между заданными

точками и грузилами нет взаимно однозначного соответствия. Если же используется математический аналог, то обычно в качестве заданных точек берут точки соединения, причем число заданных точек совпадает с числом точек соединения (включая концы).

В следующем разделе мы кратко изложим историю новейших исследований по математической теории сплайн-аппроксимаций. Из этой истории станут ясными некоторые свойства сплайнов, а также будет понятно расширение этого понятия по сравнению с аппроксимирующим инструмент чертежника.

1.2. Последние достижения в теории сплайнов

Аппроксимация сплайнами в ее современном виде впервые появилась в статье Шёнберга [1]. Как указано в разд. 1.1, существует очень тесная связь между теорией сплайнов и расчетом балок. В работе Сокольникова [1, стр. 1—4] дается краткий, но очень четкий обзор развития методов расчета балок. В нем предвосхищены некоторые из недавних достижений в теории сплайнов, в частности *свойство минимальной кривизны*. Как отметил Шёнберг [1], приближения, применяемые в страховом деле, также включают в себя понятия, тесно связывающие их со сплайнами.

После 1946 г. Шёнберг и некоторые его ученики продолжили изучение сплайнов и моносплайнов. В частности, Шёнберг и Уитни [1; 2] впервые получили признаки существования некоторых интерполяционных сплайнов. К вопросу существования сплайнов нечетной степени с интерполяцией в точках соединения возможен теперь более простой подход, разработанный Албергом, Нильсоном, Уолшем [2; 8]; при этом подходе используется основное интегральное соотношение, полученное Холлидеем [1] для кубического сплайна $S_\Delta(f; x)$, интерполирующего функцию $f(x)$ на сетке Δ:

$$\int_a^b |f''(x)|^2\,dx = \int_a^b |S''_\Delta(f; x)|^2\,dx + \int_a^b |f''(x) - S''_\Delta(f; x)|^2\,dx.$$

Мы будем называть это интегральное соотношение *первым интегральным соотношением*. Вывод его основан на следующей теореме Холлидея.

Теорема (Холлидей). *Пусть даны сетка* Δ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ *и действительные числа* $\{y_i\}$ $(i = 0, 1, \ldots, N)$. *Среди всех функций* $f(x)$, *имеющих на* $[a, b]$ *непрерывную вторую производную и таких, что* $f(x_i) = y_i$ $(i = 0, 1, \ldots, N)$, *сплайн* $S_\Delta(f; x)$ *с точками соединения в* x_i, *для которого* $S''_\Delta(f; a) = S''_\Delta(f; b) = 0$, *минимизирует интеграл*

$$\int_a^b |f''(x)|^2\,dx. \tag{1.2.1}$$

Эта теорема и метод ее доказательства послужили толчком для развития многих разделов современной теории сплайнов. Так как интеграл (1.2.1) часто

дает хорошее приближение для интеграла от квадрата кривизны кривой $y = f(x)$, то свойство, сформулированное в теореме Холлидея, часто называют *свойством минимальной кривизны*. Очевидна также тесная связь этой теоремы с минимизацией потенциальной энергии, затраченной на отклонение балки [1]).

Мы рассмотрим некоторые обобщения простого кубического сплайна. Для этих обобщений известны аналоги теоремы Холлидея, но, поскольку в новых условиях нет аналога кривизны, мы будем говорить о *свойстве минимальной нормы*. Это вполне обосновано, ибо в каждом случае можно указать соответствующее гильбертово пространство $\mathscr{H}$, в котором интеграл (1.2.1) или его аналог равен квадрату нормы функции $f(x)$.

Лишь в 1964 г. был развит подход к изучению сплайнов с точки зрения гильбертовых пространств. В этом году авторы (Алберг, Нильсон, Уолш [4—7]) ввели некоторые ортонормальные базисы пространства $\mathscr{H}$, состоявшие целиком из сплайнов или, выражаясь точнее, из эквивалентных классов сплайнов. Для любого ортонормального базиса пространства $\mathscr{H}$ функция $f(x)$ из $\mathscr{H}$ при любом целом положительном N имеет среди линейных комбинаций первых N элементов базиса элемент наилучшего приближения. Пусть $\|\cdot\|_{\mathscr{H}}$ — норма в $\mathscr{H}$, $U_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ — элементы базиса и

$$U(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i U_i(x). \tag{1.2.2}$$

Функция $\|f - U\|_{\mathscr{H}}$ принимает наименьшее значение, когда a_i совпадают с коэффициентами при $U_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ в разложении функции $f(x)$ по элементам полного базиса.

Желательно получить другую характеристику элемента наилучшего приближения, особенно если она сможет облегчить его определение. Такую характеристику действительно можно указать. Алберг, Нильсон, Уолш в работе [1] получили следующий результат: *если дана сетка* $\Delta: a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$, *то среди всех простых периодических кубических сплайнов на* Δ *сплайн, интерполирующий периодическую функцию в точках сетки, осуществляет наилучшее приближение в предыдущем смысле*. В дальнейшем этот результат был распространен на целый ряд других случаев: Алберг, Нильсон, Уолш [2, 4, 5, 7, 9], де Бур [3], Шёнберг [7], Гревиль [2], де Бур, Линч [1, 2].

В гл. III, V и VI настоящей книги изучаются с точки зрения гильбертова пространства соответственно кубические сплайны, полиномиальные сплайны нечетной степени и обобщенные сплайны. Пусть $\mathscr{H}$ обозначает функциональное пространство классов функций; мы покажем, что при соответствующем выборе нормы $\mathscr{H}$ будет гильбертовым пространством. Однако в дальнейшем вместо $\mathscr{H}$ мы будем употреблять другие обозначения.

Далее, различные авторы исследовали сходимость сплайнов и их производных $S_{\Delta}^{(\alpha)}(f; x)$ к $f^{(\alpha)}(x)$, когда норма сетки $\|\Delta\| = \max |x_{j+1} - x_j|$ стремится к нулю. Первые результаты в этом направлении получены в работе Албер-

---

[1]) Потенциальная энергия, затраченная на отклонение балки, пропорциональна интегралу от квадрата кривизны деформированной оси балки (Сокольников [1, стр. 2]).

га, Нильсона, Уолша [1] для кубических сплайнов; при этом использовалось первое интегральное соотношение. Если функция $f(x)$ принадлежит пространству $C^2[a, b]$ и сплайн $S_\Delta(f; x)$ интерполирует ее в узлах сетки, то $S_\Delta^{(\alpha)}(f; x)$ сходится равномерно относительно x к $f^{(\alpha)}(x)$ при $\alpha = 0, 1$. Более подробный анализ был проведен Албергом и Нильсоном [1—3]. В частности, было показано, что если $f(x)$ принадлежит $C^2[a, b]$, то $S_\Delta''(f; x)$ сходится равномерно к $f''(x)$ при условии, что распределение узлов сетки приближается к равномерному и $\|\Delta\| \to 0$. Это ограничение на сетку позднее было снято Шармой и Мейером [1, 2].

Биркгоф и де Бур [1, 2] показали, что если $f(x)$ принадлежит $C^4[a, b]$, то

$$|f^{(\alpha)}(x) - S_\Delta^{(\alpha)}(f; x)| < K\|\Delta\|^{4-\alpha} \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, 4) \tag{1.2.3}$$

при условии ограниченности величины $R_\Delta = \max_i \|\Delta\|/(x_i - x_{i-1})$. При более слабых требованиях, которым должна удовлетворять функция $f(x)$, например для $f(x) \in C[a, b]$ или $f(x) \in C^1[a, b]$, соответствующие свойства сходимости были получены Албергом, Нильсоном, Уолшем [12]. Кроме того, сходимость полиномиальных сплайнов нечетной степени изучалась Албергом, Нильсоном, Уолшем [2, 9], Шёнбергом [4] и Циглером [1], многомерных сплайнов — Албергом, Нильсоном, Уолшем [4, 7, 10], обобщенных сплайнов — Албергом, Нильсоном, Уолшем [5, 7, 10].

Многие из этих результатов о сходимости зависят от тонкой структуры системы линейных уравнений, определяющих сплайны. В гл. II и IV теория сплайнов излагается с этой точки зрения. В то же время некоторые результаты о сходимости можно получить, не прибегая к этим определяющим уравнениям. В частности, для полиномиальных сплайнов степени $2n - 1$ таким способом можно установить сходимость вплоть до производных $(n - 1)$-го порядка. Более того, с помощью интегрального соотношения

$$\int_a^b \{f^{(n)}(x) - S_\Delta^{(n)}(f; x)\}^2\, dx = \int_a^b \{f(x) - S_\Delta(f; x)\}\, f^{(2n)}(x)\, dx, \tag{1.2.4}$$

выведенного Албергом, Нильсоном, Уолшем [10], при различных ограничениях можно доказать сходимость вплоть до производных $(2n - 2)$-го порядка. Это было сделано для обобщенных сплайнов, частным случаем которых являются полиномиальные сплайны нечетной степени. Интегральное соотношение (1.2.4) называют *вторым интегральным соотношением*; для подходящего функционального пространства оно следует из теоремы Рисса о представлении линейных функционалов. Этот подход развивается в гл. III, V и VI. При условии ограниченности величины R_Δ основным здесь будет результат

$$|f^{(\alpha)}(x) - S_\Delta^{(\alpha)}(f; x)| \leqslant K\|\Delta\|^{2n-\alpha-1} \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, 2n-1). \tag{1.2.5}$$

Для кубических сплайнов этот результат слабее, чем (1.2.3). В общем случае вопрос о возможности замены $2n - \alpha - 1$ на $2n - \alpha$ остается открытым.

Теория сплайнов развивалась в нескольких направлениях. Особенно важны обобщения на многие переменные. Первый шаг был сделан Биркгофом

и Гарабедяном [1], но первое удачное обобщение получил де Бур [1, 2], доказавший как существование, так и единственность определенных бикубических интерполяционных сплайнов [1]). Позднее Алберг, Нильсон, Уолш [4, 11] распространили первое интегральное соотношение на сплайны нескольких переменных. В результате этого для целого ряда многомерных сплайнов были доказаны существование, единственность, свойство минимальной нормы и свойство наилучшего приближения. Вопросы сходимости были сведены к аналогичным вопросам для одномерных сплайнов, ответы на которые были известны. Многомерные сплайны рассматриваются в гл. VII и VIII.

Обобщение в другом направлении заключается в замене оператора D^{2n}, связанного с полиномиальным сплайном степени $2n-1$ (здесь $D \equiv d/dx$), оператором L^*L, где

$$L \equiv a_n(x) D^n + a_{n-1}(x) D^{n-1} + \ldots + a_0(x) \qquad (1.2.6)$$

и L^* — оператор, формально сопряженный с L. Теперь в каждом интервале сетки сплайн $S(x)$ должен удовлетворять уравнению $L^*LS = 0$ вместо $D^{2n}S = 0$. Сплайны, определенные таким образом, называются *обобщенными сплайнами*. Первый шаг в этом направлении сделал Шёнберг [7], рассмотревший «тригонометрические сплайны». Затем последовало полное обобщение: Гревиль [1], Алберг, Нильсон, Уолш [5, 7, 10], де Бур, Линч [1]. Более абстрактный подход к теории сплайнов развили Аттиа [1] и его коллеги из Гренобля.

Оператор $L \equiv D(D - \sigma)$ рассматривался Швайкертом [1]; он назвал получившиеся у него сплайны «сплайнами в напряженном состоянии». При надлежащем выборе σ эти сплайны по сравнению с кубическими имеют некоторые преимущества, а также и некоторые недостатки; в частности, с их помощью можно избежать появления лишних точек перегиба, но при этом кривизна будет концентрироваться вблизи точек соединения. Обобщенным сплайнам посвящены гл. VI и VIII.

Сард [1] уделил значительное внимание приближению линейного функционала $\mathscr{L}$ другим линейным функционалом $\hat{\mathscr{L}}$, таким, что остаток $\mathscr{R} \equiv \mathscr{L} - \hat{\mathscr{L}}$ аннулирует полиномы степени $n-1$. При естественных ограничениях выполняется равенство

$$\mathscr{R}f = \int_a^b \mathscr{K}(\mathscr{R}; t) f^{(n)}(t)\, dt; \qquad (1.2.7)$$

ядро $\mathscr{K}(\mathscr{R}; t)$ называется *ядром Пеано*. Сард [1] искал такой функционал $\hat{\mathscr{L}}$, чтобы интеграл

$$\int_a^b \mathscr{K}(\mathscr{R}; t)^2\, dt$$

---

[1]) В дальнейшем мы применяем следующую терминологию: $f(t, s)$ будет называться дважды *кубическим полиномом* (а не *бикубическим*), если $f(t, s)$ — кубический полином по t для каждого s и кубический полином по s для каждого t. *Дважды кубический сплайн* совпадает с дважды кубическим полиномом в каждом частичном прямоугольнике, определенном двумерной сеткой.

принимал наименьшее значение; для целого ряда функционалов $\mathscr{L}$ ему удалось найти такие $\hat{\mathscr{L}}$. В 1964 г. Шёнберг показал, что при слабых ограничениях на $\mathscr{L}$ среди функционалов $\hat{\mathscr{L}}$ вида

$$\hat{\mathscr{L}}f = a_0 f(x_0) + a_1 f(x_1) + \ldots + a_N f(x_N)$$

оптимальный функционал $\hat{\mathscr{L}}$ получается, когда $\hat{\mathscr{L}}f = \mathscr{L}S_\Delta(f; x)$, где $S_\Delta(f; x)$ — простой (см. ниже) полиномиальный сплайн (степени $2n-1$), интерполирующий функцию $f(x)$ на сетке Δ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$. Этот результат был обобщен (Алберг, Нильсон, Уолш [8], Алберг, Нильсон [6]) на функционалы $\hat{\mathscr{L}}$ вида

$$\hat{\mathscr{L}}f = \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{p} a_{ij} f^{(j)}(x_i), \tag{1.2.8}$$

где $p \leqslant n-2$ и некоторые коэффициенты a_{ij} с самого начала полагаются равными нулю. Для обобщенных сплайнов равенство (1.2.7) принимает вид

$$\mathscr{R}f = \int_a^b \mathscr{K}(\mathscr{R}; t)\, Lf(t)\, dt,$$

где ядро $\mathscr{K}(\mathscr{R}; t)$ зависит от L (см. также де Бур и Линч [2]). Эти вопросы изучаются в гл. III, V, VI и VIII.

При обобщении результатов Шёнберга о приближении функционалов потребовалось ввести сплайны несколько иного рода. Характер этих различий частично позволяет выявить следующую терминологию.

Сплайн порядка $2n$ называется *простым*, если его $(2n-1)$-я производная претерпевает разрыв только в узлах сетки. В большинстве случаев мы будем рассматривать простые сплайны. Если во внутреннем узле x_i сетки допускаются разрывы производных, начиная с $(2n-k-1)$-й, то говорят, что сплайн имеет *дефект* k в точке x_i. Если сплайн имеет *дефект* k во всех внутренних узлах сетки, то говорят, что он имеет *дефект* k. В дальнейшем мы будем считать, что $0 \leqslant k \leqslant n$. В этой терминологии решение уравнения $L^*Lf = 0$ имеет на $[a, b]$ дефект 0, а простой сплайн имеет дефект 1.

Требование, чтобы некоторые коэффициенты a_{ij} в (1.2.8) заранее были нулями, часто налагает на применяемые сплайны еще более сложные и нерегулярные условия непрерывности. Такие сплайны называются *гетерогенными*; их мы подробно рассмотрим в гл. VI и VIII. Они были введены Албергом, Нильсоном, Уолшем [8] при изучении аппроксимации линейных функционалов.

Работа Голомба и Вайнбергера [1] об «оптимальном» приближении линейных функционалов очень тесно связана с теорией сплайнов. Во многих случаях фигурирующие в их приближениях функции $\bar{u}(x)$ являются интерполяционными сплайнами. Но это не отмечается в упомянутой работе; исследование протекает в ином направлении, и функции $\bar{u}(x)$ появляются только как решение вариационной задачи. Теорема Холлидея, выясняющая связи этих исследований с теорией сплайнов, не упоминается. Позднее эту связь осознал Секрест [2].

Глава II. КУБИЧЕСКИЕ СПЛАЙНЫ

2.1. Введение

Естественно начинать изучение сплайнов с кубических сплайнов. Тесная связь последних со сплайнами чертежника, возникающая в результате их замены тонкими рейками, открывает многие их важнейшие свойства и объясняет значительную часть их приложений к задачам численного анализа.

Сплайны успешно применяются в элементарных процессах интерполяции и приближенного интегрирования. Однако наиболее важна их эффективность в численном дифференцировании. В значительной степени это объясняется присущей им быстротой сходимости. Кроме того, свойства наилучшего приближения и минимальной нормы, развитые в гл. III, также содействуют этой эффективности.

В этом вводном разделе наряду с основными уравнениями, определяющими сплайн, приводятся методы, необходимые для простых применений. Затем в разд. 2.2 и 2.3 излагаются вопросы существования и сходимости, представляющие наибольший интерес. В разд. 2.4 и 2.5 рассматриваются сплайны с равномерными узлами и даются специальные формулы численного дифференцирования и интегрирования для этого случая. В разд. 2.6 обсуждается применение сплайнов для вычерчивания кривых по точкам. В разд. 2.7 и 2.8 сплайны применяются для численного решения линейных дифференциальных уравнений и интегральных уравнений. В конце главы выводятся свойства сходимости и существования, требующие более тонких методов анализа.

При определении математического сплайна отрезок $a \leqslant x \leqslant b$ делится на части точками, соответствующими положениям грузил:

$$\Delta\colon\ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b.$$

Кроме того, задаются соответствующие ординаты:

$$Y\colon\ y_0,\ y_1,\ \ldots,\ y_N.$$

Ищется функция $S_\Delta(Y;\ x)$, которую мы будем обозначать $S_\Delta(x)$ или $S_{\Delta, Y}(x)$ (и $S_{\Delta, Y}$, если x нас не интересует), непрерывная на $[a,\ b]$ вместе со своими первой и второй производными, совпадающая с кубическим полиномом на каждом отрезке $x_{j-1} \leqslant x \leqslant x_j$ $(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ N)$ и удовлетворяющая условиям

$$S_\Delta(Y;\ x_j) = y_j \qquad (j = 0,\ 1,\ \ldots,\ N).$$

Функцию $S_\Delta(Y;\ x)$, или $S_\Delta(x)$, называют *сплайном относительно сетки* Δ или *сплайном на* Δ, интерполирующим значения y_j в узлах сетки. Сплайн называется *периодическим с периодом* $b - a$, если

$$S_\Delta^{(p)}(a+0) = S_\Delta^{(p)}(b-0) \qquad (p = 0,\ 1,\ 2).$$

По традиции обозначим через M_j «моменты» $S''_\Delta(x_j)$ $(j = 0, 1, \ldots, N)$, хотя они не являются истинными моментами балки в обычном смысле этого слова. В силу линейности второй производной на $[x_{j-1}, x_j]$

$$S''_\Delta(x) = M_{j-1}\frac{x_j - x}{h_j} + M_j\frac{x - x_{j-1}}{h_j}, \tag{2.1.1}$$

где $h_j = x_j - x_{j-1}$. Проинтегрируем дважды обе части равенства (2.1.1) и, вычислив константы интегрирования, получим

$$S_\Delta(x) = M_{j-1}\frac{(x_j - x)^3}{6h_j} + M_j\frac{(x - x_{j-1})^3}{6h_j} + \left(y_{j-1} - \frac{M_{j-1}h_j^2}{6}\right)\frac{x_j - x}{h_j} + \left(y_j - \frac{M_j h_j^2}{6}\right)\frac{x - x_{j-1}}{h_j}, \tag{2.1.2}$$

$$S'_\Delta(x) = -M_{j-1}\frac{(x_j - x)^2}{2h_j} + M_j\frac{(x - x_{j-1})^2}{2h_j} + \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j} - \frac{M_j - M_{j-1}}{6}h_j. \tag{2.1.3}$$

Из (2.1.3) находим односторонние пределы производной:

$$S'_\Delta(x_j - 0) = \frac{h_j}{6}M_{j-1} + \frac{h_j}{3}M_j + \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j},$$

$$S'_\Delta(x_j + 0) = -\frac{h_{j+1}}{3}M_j - \frac{h_{j+1}}{6}M_{j+1} + \frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}}. \tag{2.1.4}$$

Согласно (2.1.1) и (2.1.2), функции $S''_\Delta(x)$ и $S_\Delta(x)$ непрерывны на $[a, b]$. Из непрерывности функции $S'_\Delta(x)$ в точках x_j с учетом равенств (2.1.4) получаем

$$\frac{h_j}{6}M_{j-1} + \frac{h_j + h_{j+1}}{3}M_j + \frac{h_{j+1}}{6}M_{j+1} = \frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} - \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j}. \tag{2.1.5}$$

Для периодического сплайна равенства (2.1.5) $(j = 1, 2, \ldots, N-1)$ дают систему $N - 1$ уравнений относительно $M_1, M_2, \ldots, M_N$. Мы требуем в этом случае, чтобы уравнение (2.1.5) было также справедливо для $j = N$. Здесь в силу периодичности должны выполняться соотношения $y_N = y_0$, $M_N = M_0$, $y_{N+1} = y_1$, $M_{N+1} = M_1$, $h_{N+1} = h_1$.

Чтобы определить величины $M_0, M_1, \ldots, M_N$ для непериодического сплайна, надо задать два дополнительных условия, так называемые «краевые условия». Задание наклонов сплайна в точках a и b приводит к аналогу двойной консольной балки. Пусть $S'_\Delta(a) = y'_0$, $S'_\Delta(b) = y'_N$, тогда из (2.1.4) имеем

$$2M_0 + M_1 = \frac{6}{h_1}\left(\frac{y_1 - y_0}{h_1} - y'_0\right), \quad M_{N-1} + 2M_N = \frac{6}{h_N}\left(y'_N - \frac{y_N - y_{N-1}}{h_N}\right).$$

Выбор $M_0 = 0$, $M_N = 0$ соответствует расположению простых опор на концах. Условие

$$M_0 - \lambda M_1 = 0, \qquad 1 > \lambda > 0,$$

эквивалентно расположению простой опоры в точке $x_{-1} = (x_0 - \lambda x_1)/(1 - \lambda)$ и требованию, чтобы вся кривая на отрезке $x_{-1} \leqslant x \leqslant x_1$ совпадала с кубическим полиномом. Обычно берут $\lambda = 1/2$.

Мы будем также рассматривать более общие краевые условия

$$2M_0 + \lambda_0 M_1 = d_0, \qquad \mu_N M_{N-1} + 2M_N = d_N. \tag{2.1.6}$$

Введем обозначения

$$\lambda_j = \frac{h_{j+1}}{h_j + h_{j+1}}, \quad \mu_j = 1 - \lambda_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, N-1).$$

Тогда условия непрерывности (2.1.5) принимают вид

$$\mu_j M_{j-1} + 2M_j + \lambda_j M_{j+1} = 6\,\frac{(y_{j+1}-y_j)/h_{j+1} - (y_j - y_{j-1})/h_j}{h_j + h_{j+1}}. \tag{2.1.7}$$

Уравнения (2.1.6) и (2.1.7), определяющие непериодический сплайн, можно записать теперь в матричной форме

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 2 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 & \lambda_{N-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \mu_{N-1} & 2 & \lambda_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \mu_N & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ M_{N-2} \\ M_{N-1} \\ M_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d_{N-2} \\ d_{N-1} \\ d_N \end{bmatrix}, \tag{2.1.8}$$

где d_j — правая часть равенства (2.1.7). Определяющие уравнения для периодического сплайна имеют вид

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \mu_1 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_3 & 2 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 & \lambda_{N-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \mu_{N-1} & 2 & \lambda_{N-1} \\ \lambda_N & 0 & 0 & \ldots & 0 & \mu_N & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ M_{N-2} \\ M_{N-1} \\ M_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d_{N-2} \\ d_{N-1} \\ d_N \end{bmatrix}, \tag{2.1.9}$$

где $M_0 = M_N$, $\lambda_N = h_1/(h_N + h_1)$, $\mu_N = 1 - \lambda_N$.

Во многих случаях более удобно работать с наклонами $m_j = S'_\Delta(x_j)$, а не с моментами M_j. Тогда на отрезке $[x_{j-1}, x_j]$ справедливы равенства

$$S_\Delta(x) = m_{j-1}\frac{(x_j - x)^2 (x - x_{j-1})}{h_j^2} - m_j \frac{(x - x_{j-1})^2 (x_j - x)}{h_j^2} +$$

$$+ y_{j-1}\frac{(x_j - x)^2 [2(x - x_{j-1}) + h_j]}{h_j^3} + y_j \frac{(x - x_{j-1})^2 [2(x_j - x) + h_j]}{h_j^3}, \tag{2.1.10}$$

$$S'_\Delta(x) = m_{j-1}\frac{(x_j-x)(2x_{j-1}+x_j-3x)}{h_j^2} - m_j\frac{(x-x_{j-1})(2x_j+x_{j-1}-3x)}{h_j^2} + \\ + \frac{y_j-y_{j-1}}{h_j^3}\,6\,(x_j-x)(x-x_{j-1}). \qquad (2.1.11)$$

Отсюда находим

$$S''_\Delta(x) = -2m_{j-1}\frac{2x_j+x_{j-1}-3x}{h_j^2} - 2m_j\frac{2x_{j-1}+x_j-3x}{h_j^2} + \\ + 6\frac{y_j-y_{j-1}}{h_j^3}(x_j+x_{j-1}-2x) \qquad (2.1.12)$$

и

$$S''_\Delta(x_j-0) = \frac{2m_{j-1}}{h_j} + \frac{4m_j}{h_j} - 6\frac{y_j-y_{j-1}}{h_j^2},$$

$$S''_\Delta(x_j+0) = -\frac{4m_j}{h_{j+1}} - \frac{2m_{j+1}}{h_{j+1}} + 6\frac{y_{j+1}-y_j}{h_{j+1}^2}. \qquad (2.1.13)$$

Из требований непрерывности второй производной $S''_\Delta(x)$ в точках x_j $(j=1, 2, \ldots, N-1)$ находим

$$\frac{1}{h_j}m_{j-1} + 2\left(\frac{1}{h_j}+\frac{1}{h_{j+1}}\right)m_j + \frac{1}{h_{j+1}}m_{j+1} = 3\frac{y_j-y_{j-1}}{h_j^2} + 3\frac{y_{j+1}-y_j}{h_{j+1}^2}, \qquad (2.1.14)$$

или, в более удобной форме,

$$\lambda_j m_{j-1} + 2m_j + \mu_j m_{j+1} = 3\lambda_j\frac{y_j-y_{j-1}}{h_j} + 3\mu_j\frac{y_{j+1}-y_j}{h_{j+1}}. \qquad (1.1.15)$$

В непериодическом случае при общих краевых условиях $2m_0+\mu_0 m_1 = c_0$, $\lambda_N m_{N-1} + 2m_N = c_N$ система уравнений принимает вид

$$\begin{bmatrix} 2 & \mu_0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 2 & \mu_1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 2 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 & \mu_{N-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_{N-1} & 2 & \mu_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_N & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ m_{N-2} \\ m_{N-1} \\ m_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{N-2} \\ c_{N-1} \\ c_N \end{bmatrix}, \qquad (2.1.16)$$

где c_j — правая часть равенства (2.1.15).

В периодическом случае получаем

$$\begin{bmatrix} 2 & \mu_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & 2 & \mu_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & \mu_{N-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{N-1} & 2 & \mu_{N-1} \\ \mu_N & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_N & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ \vdots \\ m_{N-2} \\ m_{N-1} \\ m_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_{N-2} \\ c_{N-1} \\ c_N \end{bmatrix}, \quad (2.1.17)$$

Краевые условия в терминах величин M_j классифицируются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &\text{при } x=a: \\ &\text{(i)}\ 2M_0+M_1=\frac{6}{h_1}\left(\frac{y_1-y_0}{h_1}-y_0'\right), \\ &\text{(ii)}\ 2M_0=2y_0'', \\ &\text{(iii)}\ 2M_0+\lambda_0 M_1=d_0; \\ &\text{при } x=b: \\ &\text{(i)}\ M_{N-1}+2M_N=\frac{6}{h_N}\left(y_N'-\frac{y_N-y_{N-1}}{h_N}\right), \\ &\text{(ii)}\ 2M_N=2y_N'', \\ &\text{(iii)}\ \mu_N M_{N-1}+2M_N=d_N; \end{aligned}\right\} \quad (2.1.18)$$

и в терминах величин m_j

$$\left.\begin{aligned} &\text{при } x=a: \\ &\text{(i)}\ 2m_0=2y_0', \\ &\text{(ii)}\ 2m_0+m_1=3\,\frac{y_1-y_0}{h_1}-\frac{h_1}{2}\,y_0'', \\ &\text{(iii)}\ 2m_0+\mu_0 m_1=c_0; \\ &\text{при } x=b: \\ &\text{(i)}\ 2m_N=2y_N', \\ &\text{(ii)}\ m_{N-1}+2m_N=3\,\frac{y_N-y_{N-1}}{h_N}+\frac{h_N}{2}\,y_N'', \\ &\text{(iii)}\ \lambda_N m_{N-1}+2m_N=c_N. \end{aligned}\right\} \quad (2.1.19)$$

Здесь y''_0 и y''_N — заданные значения второй производной сплайна на концах отрезка. Эти два множества краевых условий равносильны, если

$$\mu_0=\frac{4(1-\lambda_0)}{4-\lambda_0},\quad \lambda_N=\frac{4(1-\mu_N)}{4-\mu_N},$$

$$c_0=-\frac{d_0h_1}{4-\lambda_0}+6\frac{2-\lambda_0}{4-\lambda_0}\frac{y_1-y_0}{h_1},\quad c_N=\frac{d_Nh_N}{4-\mu_N}+6\frac{2-\mu_N}{4-\mu_N}\frac{y_N-y_{N-1}}{h_N}.$$

Нетрудно проверить, что правые части равенств (2.1.7) и (2.1.15) равны утроенным значениям в точке x_j соответственно второй и первой производных параболы, проходящей через точки (x_{j-1}, y_{j-1}), (x_j, y_j) и (x_{j+1}, y_{j+1}) и имеющей вертикальную ось. Этот факт особенно важен в связи с задачей вычерчивания кривой по точкам с помощью сплайнов более высокого порядка; он исследован подробно в гл. IV.

Для решения системы уравнений (2.1.8) или (2.1.16) имеется очень эффективный алгоритм. Рассмотрим уравнения

$$\begin{aligned}
b_1x_1 + c_1x_2 &= d_1,\\
a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 &= d_2,\\
a_3x_2 + b_3x_3 + c_3x_4 &= d_3,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots&\dots\\
a_{n-1}x_{n-2} + b_{n-1}x_{n-1} + c_{n-1}x_n &= d_{n-1},\\
a_nx_{n-1} + b_nx_n &= d_n
\end{aligned}$$

и образуем вспомогательные величины $(k=1, 2, \ldots, n)$

$$\begin{aligned}
p_k&=a_kq_{k-1}+b_k \qquad (q_0=0),\\
q_k&=\frac{-c_k}{p_k},\\
u_k&=\frac{d_k-a_ku_{k-1}}{p_k} \qquad (u_0=0).
\end{aligned} \tag{2.1.20}$$

Последовательно исключая $x_1, \ldots, x_{n-1}$ из 2-го, ..., n-го уравнений, получаем эквивалентную систему

$$\begin{aligned}
x_k &= q_kx_{k+1} + u_k \qquad (k = 1, \ldots, n-1),\\
x_n &= u_n,
\end{aligned}$$

откуда последовательно определяем $x_n, \ldots, x_1$.

Для матриц с доминирующей главной диагональю, с которыми мы главным образом имеем дело, эта процедура устойчива в том смысле, что ошибки быстро затухают $(0<c_k/p_k<1)$. Заметим также, что величины p_k и q_k зависят от сетки Δ и не зависят от значений ординат в узлах сетки. Это позволяет для фиксированной сетки Δ один раз вычислить значения $\{p_k\}$ и $\{q_k\}$ и использовать их при построении сплайнов с различными ординатами в узлах сетки.

Этот метод распространяется на периодические сплайны. Рассмотрим первые $n-1$ уравнений системы

$$\begin{aligned} b_1x_1 + c_1x_2 + a_1x_n &= d_1, \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 &= d_2, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n-1}x_{n-2} + b_{n-1}x_{n-1} + c_{n-1}x_n &= d_{n-1}, \\ c_nx_1 + a_nx_{n-1} + b_nx_n &= d_n; \end{aligned} \tag{2.1.21}$$

из них выразим $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ через x_n и найдем x_n из последнего уравнения. В дополнение к уже определенным величинам p_k, q_k, u_k вычислим для $k = 1, 2, \dots, n$ величины

$$s_k = -\frac{a_k s_{k-1}}{p_k} \qquad (s_0 = 1). \tag{2.1.22}$$

Тогда первые $n-1$ уравнений системы (2.1.21) запишутся в виде

$$x_k = q_k x_{k+1} + s_k x_n + u_k \qquad (k = 1, \dots, n-1).$$

Положим

$$x_k = t_k x_n + v_k \qquad (k = 1, 2, \dots, n-1); \tag{2.1.23}$$

тогда

$$\begin{aligned} t_k &= q_k t_{k+1} + s_k \qquad (t_n = 1), \\ v_k &= q_k v_{k+1} + u_k \qquad (v_n = 0). \end{aligned}$$

Отсюда находим $t_{n-1}, \dots, t_1$, $v_{n-1}, \dots, v_1$, определяем x_n из уравнения

$$c_n(t_1x_n + v_1) + a_n(t_{n-1}x_n + v_{n-1}) + b_nx_n = d_n,$$

а затем вычисляем $x_{n-1}, \dots, x_1$ по формуле (2.1.23).

Заметим, что если все коэффициенты a_k, b_k и c_k постоянны, то величины p_k и q_k можно найти, решив разностное уравнение второго порядка. Действительно, положим $p_k = h_k/h_{k-1}$ $(h_0 = 1)$, $a_k = a$, $b_k = b$ и $c_k = c$ для всех k; тогда из равенств (2.1.20) получим соотношения

$$p_k = aq_{k-1} + b, \qquad q_k = -\frac{c}{p_k},$$

равносильные разностному уравнению

$$h_k - bh_{k-1} + ach_{k-2} = 0.$$

Аналогичным свойством обладают и периодические сплайны.

2.2. Существование, единственность и наилучшее приближение

Для большинства представляющих интерес случаев доказательство существования сплайна требует применения теоремы Гершгорина (см. Тодд 1, стр. 227]), в которой утверждается, что собственные значения матрицы (a_{ij})

($i, j = 1, 2, \ldots, n$) лежат в объединении кругов

$$|z - a_{ii}| = \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \qquad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

комплексной плоскости. Матрица с доминирующей главной диагональю ($|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$) невырожденна. В матрицах, фигурирующих в уравнениях (2.1.9) и (2.1.17), сумма $\sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ всегда равна 1, в то время как $a_{ii} = 2$. В (2.1.8) и (2.1.16) главная диагональ будет доминирующей, если λ_0, μ_N, μ_0, λ_N меньше 2 по абсолютной величине.

Таким образом, периодический кубический сплайн с заданными ординатами в узлах сетки всегда существует и единствен; он задается формулой (2.1.2), где величины M_j однозначно определяются из (2.1.9). То же верно, в частности, для непериодического сплайна, имеющего консольные концы (m_0 и m_N заданы), или простые краевые опоры ($M_0 = M_N = 0$), или заданные краевые моменты, или простые опоры в точках за пределами концов сетки (например, $M_0 = \lambda M_1$, $M_N = \mu M_{N-1}$, $0 < \lambda < 1$, $0 < \mu < 1$).

Общая теорема существования, охватывающая более широкий класс непериодических кубических сплайнов, доказывается в разд. 2.9. Там нам понадобятся специальные свойства матрицы коэффициентов.

Заметим, что множеству величин M_j может соответствовать более чем один сплайн, так как при замене y_j на $y_j + mx_j + C$ при постоянных m и C правая часть равенства (2.1.7) не изменяется; это же относится и к краевым условиям (2.1.18). Таким образом, $S_\Delta(Y; x) + mx + C = S_\Delta(\widetilde{Y}; x)$, где $\widetilde{y}_j = y_j + mx_j + C$. В периодическом случае можно лишь утверждать, что $S_\Delta(Y; x) + C = S_\Delta(\widetilde{Y}; x)$ при $\widetilde{y}_j = y_j + C$. (Единственной периодической линейной функцией является константа.)

Можно также поставить вопрос о произвольности величин M_j и m_j. Всегда ли существует сплайн, связанный с произвольно заданным множеством величин M_j или m_j? Просуммировав соответствующие числа из (2.1.5) при $j = 1, 2, \ldots, N$, получим необходимое условие для периодического сплайна:

$$\sum_{j=1}^{N} (h_j + h_{j+1}) M_j = 0.$$

Можно показать, что допустимо любое множество значений M_j, удовлетворяющих этому соотношению. Обозначим левую часть равенства (2.1.5) через φ_j; тогда предыдущее уравнение дает $\sum_{j=1}^{N} \varphi_j = 0$. Положим $(y_1 - y_N)/h_1 = c$; тогда

$$\frac{y_j - y_{j-1}}{h_j} = c + \varphi_1 + \ldots + \varphi_{j-1} \qquad (j = 2, \ldots, N).$$

Из равенств (2.1.5) получаем

$$\frac{y_1 - y_N}{h_1} = c + \varphi_1 + \ldots \varphi_N = c.$$

Итак,

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_N + h_1 c,\\
y_2 &= y_1 + h_2 (c + \varphi_1),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
y_N &= y_{N-1} + h_N (c + \varphi_1 + \dots + \varphi_{N-1}).
\end{aligned}$$

Эта система уравнений имеет однопараметрическое семейство решений (параметр y_N) тогда и только тогда, когда $c = [\sum_{j=2}^{N} h_j (\varphi_1 + \dots + \varphi_{j-1})]/(a-b)$, т. е. когда c — известная функция от заданных значений M_j. Нетрудно заметить, что для непериодических сплайнов на величины M_j нет ограничений.

Соответствующая задача для наклонов m_j несколько сложнее. Обозначим левую часть равенства (2.1.14) через $3\psi_j$ и положим $(y_1 - y_N)/h_1^2 = c$; тогда из (2.1.14) при $j = 1, \dots, N$ получим

$$\begin{aligned}
\frac{y_2 - y_1}{h_2^2} &= \psi_1 - c,\\
\frac{y_3 - y_2}{h_3^2} &= \psi_2 - \psi_1 + c,\\
&\dots\dots\dots\dots\\
\frac{y_N - y_{N-1}}{h_N^2} &= \psi_{N-1} - \psi_{N-2} + \dots + (-1)^{N-2}\psi_1 + (-1)^{N-1} c,\\
\frac{y_1 - y_N}{h_1^2} &= \psi_N - \psi_{N-1} + \dots + (-1)^{N-1}\psi_1 + (-1)^N c.
\end{aligned}$$

Эти уравнения совместны тогда и только тогда, когда $\psi_N - \psi_{N-1} + \dots + (-1)^{N-1}\psi_1 + (-1)^N c = c$, что равносильно условию

$$\sum_{j=1}^{N} (-1)^j \left(\frac{1}{h_j} + \frac{1}{h_{j+1}}\right) m_j - \frac{m_1 + m_N}{h_1} [1 - (-1)^N] = c\,[1 - (-1)^N].$$

Получившаяся система уравнений имеет однопараметрическое семейство решений $(y_1, \dots, y_N)$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned}
c\,[h_1^2 - h_2^2 + \dots + (-1)^{N-1} h_N^2] &=\\
= -[h_2^2\psi_1 + h_3^2 (\psi_2 - \psi_1) + \dots + h_N^2 (\psi_{N-1} - \psi_{N-2} + \dots + (-1)^{N-2}\psi_1)].&
\end{aligned}$$

Ограничимся здесь случаем, когда сетка равномерна. Если N нечетно, то эти требования равносильны условиям $\psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_N = 0$ и $c = \psi_1 + \psi_3 + \dots + \psi_N$. Если N четно, то двупараметрическое семейство решений $y_{2j} = y_N + h^2 (\psi_1 + \dots + \psi_{2j-1})$, $y_{2j+1} = y_N + h^2 c + h^2 (\psi_2 + \dots + \psi_{2j})$ (параметры y_N и c) существует тогда и только тогда, когда

$$\psi_1 + \psi_3 + \dots + \psi_{N-1} = \psi_2 + \psi_4 + \dots + \psi_N = 0,$$

т. е.

$$m_1 + m_3 + \ldots + m_{N-1} = m_2 + m_4 + \ldots + m_N = 0.$$

Рассмотрим экстремальную задачу, из которой станет ясна роль уравнений (2.1.7) и (2.1.14). Пусть функция $f''(x)$ непрерывна. Для данной сетки Δ положим $f_j = f(x_j)$ и обозначим через $S_\Delta(f; x)$ периодический сплайн, интерполирующий $f(x)$, или непериодический сплайн, удовлетворяющий краевым условиям (2.1.18i). Таким образом, $S_\Delta(f; x_j) = f_j$.

Пусть $S_\Delta(x)$ — любой кубический сплайн на Δ. Образуем интеграл

$$E = \int_a^b [f''(x) - S''_\Delta(x)]^2\, dx.$$

Величина E — это мера приближения функции $f''(x)$ функцией $S''_\Delta(x)$ на отрезке $[a, b]$. Пусть $M_j = S''_\Delta(x_j)$. Раскрывая скобки и интегрируя по частям, получаем

$$E = \int_a^b [f''(x)]^2\, dx - 2\sum_{j=1}^{N} (f'_j M_j - f'_{j-1} M_{j-1}) + 2\sum_{j=1}^{N} (f_j - f_{j-1})\frac{M_j - M_{j-1}}{h_j} + \\ + \sum_{j=1}^{N} \frac{h_j}{3}(M_{j-1}^2 + M_{j-1}M_j + M_j^2), \qquad (2.2.1)$$

где $f'_0 = f'_N$, $f_0 = f_N$, $M_0 = M_N$, если $f(x)$ и $S_\Delta(x)$ имеют период $b-a$. В стационарной точке функции E

$$\frac{\partial E}{\partial M_0} = \frac{h_1}{3}\left\{2M_0 + M_1 - \frac{6}{h_1}\left(\frac{f_1 - f_0}{h_1} - f'_0\right)\right\} = 0,$$

$$\frac{\partial E}{\partial M_j} = 2\left\{\frac{h_j}{6}M_{j-1} + \frac{h_j - h_{j+1}}{3}M_j + \frac{h_{j+1}}{6}M_{j+1} - \right. \\ \left. - \left(\frac{f_{j+1} - f_j}{h_{j+1}} - \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j}\right)\right\} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, N-1), \qquad (2.2.2)$$

$$\frac{\partial E}{\partial M_N} = \frac{h_N}{3}\left\{M_{N-1} + 2M_N - \frac{6}{h_N}\left(f'_N - \frac{f_N - f_{N-1}}{h_N}\right)\right\} = 0.$$

В периодическом случае стационарная точка существует, если для $j = 1, 2, \ldots, N$ выполняется второе соотношение. Соотношения (2.2.2) эквивалентны уравнениям (2.1.8) при краевых условиях (2.1.18i) или уравнениям (2.1.9). Следовательно, функция E имеет стационарную точку тогда и только тогда, когда $S_\Delta(x) \equiv S_\Delta(f; x)$.

Покажем, что эта стационарная точка в действительности является точкой минимума. Обозначим через $(\overline{M}_0, \overline{M}_1, \ldots, \overline{M}_N)$ и $(\overline{M}_1, \ldots, \overline{M}_N)$ решения системы уравнений (2.2.2) для непериодического и периодического случаев соответственно, т. е. $\overline{M}_j = S''_\Delta(f; x_j)$. Преобразуем выражение для E следующим образом: заменим M_j в (2.2.2) на $\overline{M}_j$ и умножим полученные уравнения

на $-M_0, -M_1, \ldots, -M_N$ соответственно, а затем прибавим их к правой части равенства (2.2.1):

$$E = \int_a^b [f''(x)]^2\,dx + \sum_{j=1}^{N} \frac{h_j}{3}\,[M_{j-1}^2 + M_{j-1}M_j + M_j^2 - 2M_{j-1}\overline{M}_{j-1} - M_{j-1}\overline{M}_j - M_j\overline{M}_{j-1} - 2M_j\overline{M}_j] =$$

$$= \int_a^b [f''(x)]^2\,dx + \sum_{j=1}^{N} \frac{h_j}{3}\,[(M_{j-1} - \overline{M}_{j-1})^2 + (M_{j-1} - \overline{M}_{j-1})(M_j - \overline{M}_j) + (M_j - \overline{M}_j)^2] - \sum_{j=1}^{N} \frac{h_j}{3}\,[\overline{M}_{j-1}^2 + \overline{M}_{j-1}\overline{M}_j + \overline{M}_j^2] =$$

$$= \int_a^b [f''(x)]^2\,dx + \int_a^b [S''_\Delta(x) - S''_\Delta(f; x)]^2\,dx - \int_a^b [S''_\Delta(f; x)]^2\,dx.$$

Заметим, что первый и третий интегралы правой части не зависят от выбора M_j. Поэтому ясно, что E принимает наименьшее значение при $S''_\Delta(x) = S''_\Delta(f; x)$. Это свойство называют *свойством наилучшего приближения* интерполяционного сплайна. В гл. III это и другие аналогичные экстремальные свойства исследуются более тонкими и сильными средствами.

2.3. Сходимость

Эффективность сплайнов при аппроксимации можно объяснить в значительной степени их замечательными свойствами сходимости. Если функция $f^{(q)}(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ $(q = 0, 1, 2, 3, 4)$, то сплайны $S_\Delta(f; x)$ сходятся к функции $f(x)$ на последовательности сеток Δ по крайней мере со скоростью $\|\Delta\|^q$, где $\|\Delta\| = \max_j h_j$. (Для сравнения со степенью сходимости более общих аппроксимативных последовательностей см. Дэвис [1, гл. XIII].) Аналогично производные $S_\Delta^{(p)}(f; x)$ сходятся к $f^{(p)}(x)$ $(0 \leqslant p \leqslant q)$ по крайней мере со скоростью $\|\Delta\|^{q-p}$. При этом в некоторых случаях требуется, чтобы в соответствующих сетках отношение максимума длины интервала к минимуму длины интервала было ограничено, но во многих представляющих интерес случаях достаточно, чтобы предел норм сеток был равен нулю. Более того, эти скорости оптимальны.

Для установления сходимости необходимо знать некоторые свойства матриц, обратных к матрицам коэффициентов в (2.1.8), (2.1.9), (2.1.16) и (2.1.17). Если λ_0, μ_N или λ_N, μ_0 по абсолютной величине меньше 2, доказательство сходимости относительно просто. В этом разделе мы будем рассматривать именно такой случай. Изучение более специфических свойств обратной матрицы, необходимых для общего случая, мы отложим до разд. 2.9.

Пусть B — квадратная матрица порядка n, и пусть норма элемента $x = (x_1, \ldots, x_n)$ в n-мерном пространстве определяется равенством

$$\| x \| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} | x_i |.$$

Для нахождения индуцированной нормы матрицы B запишем линейное преобразование, задаваемое этой матрицей, в виде

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j \qquad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

Тогда

$$\| y \| = \max_i | y_i | \leqslant \| x \| \max_i \sum_{j=1}^{n} | b_{ij} |,$$

так что индуцированная норма матрицы B удовлетворяет неравенству

$$\| B \| = \sup_{x \neq 0} \frac{\| Bx \|}{\| x \|} \leqslant \max_i \sum_{j=1}^{n} | b_{ij} |.$$

Обозначим через i^* индекс строки, дающей максимальное значение для $\sum_{j=1}^{n} | b_{ij} |$, и положим

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{если } b_{i^*j} \geqslant 0, \\ -1, & \text{если } b_{i^*j} < 0. \end{cases}$$

Тогда

$$\| y \| = \sum_{j=1}^{n} b_{i^*j} x_j = \sum_{j=1}^{n} | b_{i^*j} | = \| x \| \max_i \sum_{j=1}^{n} | b_{ij} |,$$

откуда

$$\| B \| = \max_i \sum_j | b_{ij} |.$$

Предположим, что главная диагональ матрицы B является доминирующей. Для данного x выберем k так, что $\| x \| = | x_k |$. Тогда

$$\| y \| = \| Bx \| = \max_i \Big| \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j \Big| \geqslant$$

$$\geqslant \Big| \sum_{j=1}^{n} b_{kj} x_j \Big| \geqslant \Big(| b_{kk} | - \sum_{j \neq k} | b_{kj} | \Big) \| x \| \geqslant$$

$$\geqslant \min_i \Big(| b_{ii} | - \sum_{j \neq i} | b_{ij} | \Big) \| x \|.$$

Так как B^{-1} существует и $x = B^{-1}y$, то для нормы матрицы B^{-1} мы получаем оценку

$$\| B^{-1} \| = \sup_{y \neq 0} \frac{\| B^{-1}y \|}{\| y \|} \leqslant \left\{ \min_i \left(| b_{ii} | - \sum_{j \neq i} | b_{ij} | \right) \right\}^{-1}.$$

Обозначим через A и $\widetilde{A}$ матрицы коэффициентов в (2.1.8) и (2.1.9) соответственно. Если в (2.1.8) λ_0 и μ_N по абсолютной величине меньше 2, то в непериодическом случае

$$\| A^{-1} \| \leqslant \max [(2 - \lambda_0)^{-1}, (2 - \mu_N)^{-1}, 1], \tag{2.3.1}$$

а в периодическом

$$\| \widetilde{A}^{-1} \| \leqslant 1. \tag{2.3.2}$$

Пусть B и $\widetilde{B}$ обозначают матрицы коэффициентов в (2.1.16) и (2.1.17), причем в первой из них $| \mu_0 | < 2$ и $| \lambda_N | < 2$. Тогда

$$\| B^{-1} \| \leqslant \max [(2 - \mu_0)^{-1}, (2 - \lambda_N)^{-1}, 1], \tag{2.3.3}$$

$$\| \widetilde{B}^{-1} \| \leqslant 1. \tag{2.3.4}$$

Зададим теперь на отрезке $[a, b]$ последовательность сеток

$$\Delta_k: \ a = x_{k0} < x_{k1} < \ldots < x_{kN_k} = b, \tag{2.3.5}$$

положим

$$h_{kj} = x_{kj} - x_{kj-1} \tag{2.3.6}$$

и определим норму сетки Δ_k:

$$\| \Delta_k \| = \max_{1 \leqslant j \leqslant N_k} (h_{kj}).$$

Нас будут интересовать последовательности $\{\Delta_k\}$, для которых $\| \Delta_k \| \to 0$ при $k \to \infty$. Иногда мы будем предполагать выполненным также дополнительное ограничение на сетки Δ_k:

$$R_{\Delta_k} \equiv \max_{1 \leqslant j \leqslant N_k} \frac{\| \Delta_k \|}{h_{kj}} \leqslant \beta < \infty. \tag{2.3.7}$$

В частности, это ограничение предполагается выполненным в первой теореме сходимости.

Т е о р е м а 2.3.1. *Пусть на отрезке* $[a, b]$ *заданы непрерывная периодическая функция* $f(x)$ *и последовательность сеток* Δ_k, *удовлетворяющая условию* (2.3.7) *и такая, что* $\lim_{k \to \infty} \| \Delta_k \| = 0$. *Если периодический сплайн* $S_{\Delta_k}(x)$ *интерполирует функцию* $f(x)$ *в узлах сетки* Δ_k, *то*

$$f(x) - S_{\Delta_k}(x) = o(\| 1 \|) \tag{2.3.8}$$

равномерно относительно x на $[a, b]$. Если, кроме того, функция $f(x)$ удовлетворяет на $[a, b]$ условию Липшица порядка α $(0 < \alpha \leqslant 1)$, то

$$f(x) - S_{\Delta_k}(x) = O(\| \Delta_k \|^{\alpha}) \tag{2.3.9}$$

равномерно относительно x на $[a, b]$. В непериодическом случае равенство (2.3.8) справедливо, если интерполяционный сплайн удовлетворяет краевым условиям (2.1.18iii), $\sup\limits_k \max(|\lambda_{k0}|, |\mu_{kN_k}|) < 2$ *и* $\|\Delta_k\|^2 (|d_{k0}| + |d_{kN_k}|) \to 0$ *при* $k \to \infty$. *Если, кроме того, $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица порядка α $(0 < \alpha \leqslant 1)$, то* (2.3.9) *справедливо при условии ограниченности последовательности* $\| \Delta_k \|^{2-\alpha} (|d_{k0}| + |d_{kN_k}|)$.

Доказательство. Из формулы (2.1.2) получаем для $x_{j-1} \leqslant x \leqslant x_j$

$$S_\Delta(x) - f(x) = M_{j-1} \frac{(x_j - x)[(x_j - x)^2 - h_j^2]}{6h_j} + M_j \frac{(x - x_{j-1})[(x - x_{j-1})^2 - h_j^2]}{6h_j} + \\ + \left(\frac{f_j + f_{j-1}}{2} - f(x)\right) - (f_j - f_{j-1}) \frac{x_j + x_{j-1} - 2x}{2h_j}, \tag{2.3.10}$$

где ради сокращения записи опущен индекс сетки k.

Обозначим через A_{ij}^{-1} элементы матрицы, обратной к матрице коэффициентов в (2.1.8). Тогда

$$M_j = 6 \sum_{i=1}^{N-1} A_{ji}^{-1} \frac{[(f_{i+1} - f_i)/h_{i+1}] - [(f_i - f_{i-1})/h_i]}{h_i + h_{i+1}} + A_{j0}^{-1} d_0 + A_{jN}^{-1} d_N.$$

Пусть $\omega(\delta, f)$ — модуль непрерывности функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Заметим, что коэффициенты при M_{j-1} и M_j в равенстве (2.3.10) не превосходят по величине $h_j^2/3^{5/2}$. В силу условия (2.3.7)

$$h_j^2 \left| \frac{[(f_{i+1} - f_i)/h_{i+1}] - [(f_i - f_{i-1})/h_i]}{h_i + h_{i+1}} \right| \leqslant \beta^2 \omega(\| \Delta \|, f), \tag{2.3.11}$$

откуда

$$h_j^2 (|M_{j-1}| + |M_j|) \leqslant 2 \| A^{-1} \| \{6\beta^2 \omega(\| \Delta \|, f) + \| \Delta^2 \| (|d_0| + |d_N|)\}. \tag{2.3.12}$$

В периодическом случае с учетом неравенства (2.3.2) получаем

$$h_j^2 (|M_{j-1}| + |M_j|) \leqslant 2 \| \widetilde{A}^{-1} \| 6\beta^2 \omega(\| \Delta \|, f) \leqslant 12\beta^2 \omega(\| \Delta \|, f).$$

В непериодическом случае из (2.3.10) и (2.3.12) имеем

$$|S_\Delta(x) - f(x)| \leqslant \frac{3}{2} \omega(\| \Delta \|, f) + \frac{2}{3^{5/2}} \| A^{-1} \| \{6\beta^2 \omega(\| \Delta \|, f) + \| \Delta^2 \| (|d_0| + |d_N|)\}.$$

Ясно, что соответствующее неравенство справедливо также для периодического случая. Таким образом, (2.3.8) доказано.

Если функция $f(x)$ удовлетворяет на отрезке $[a, b]$ условию Липшица порядка α $(0 < \alpha \leqslant 1)$, т. е. если существует такая константа K, что для любых x и x' из $[a, b]$

$$|f(x) - f(x')| \leqslant K |x - x'|^{\alpha},$$

то правую часть неравенства (2.3.11) можно заменить на $\beta^2 K \|\Delta\|^{\alpha}$; тогда

$$|S_{\Delta}(x) - f(x)| \leqslant \left\{\frac{2}{3^{5/2}} \|A^{-1}\| [6K\beta^2 + \|\Delta\|^{2-\alpha}(|d_0| + |d_N|)] + \frac{3}{2}K\right\} \|\Delta\|^{\alpha}.$$

Для периодических функций

$$|S_{\Delta}(x) - f(x)| \leqslant \left\{\frac{12}{3^{5/2}} \|\widetilde{A}^{-1}\| K\beta^2 + \frac{3}{2}K\right\} \|\Delta\|^{\alpha}.$$

Теорема доказана.

Очевидно, что для краевых условий (2.1.19iii) можно доказать соответствующую теорему; при этом мы требуем, чтобы выполнялось неравенство $\sup_k \max(|\mu_{k0}|, |\lambda_{kN_k}|) < 2$. Кроме того, для справедливости соотношения (2.3.8) мы требуем, чтобы $\|\Delta_k\|(|c_{k0}| + |c_{kN_k}|) \to 0$ при $k \to \infty$, а для справедливости соотношения (2.3.9) — чтобы величины $\|\Delta_k\|^{1-\alpha}(|c_{k0}| + |c_{kN_k}|)$ были равномерно ограничены относительно k.

Здесь целесообразно отметить, что некоторые свойства сплайнов аналогичны свойствам полиномов, исследованных Фейером. Фейер [2] доказал, что если полином $g(x)$ степени $2n - 1$ в узлах Чебышева $\xi_k^{(n)} \in [-1, 1]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ удовлетворяет неравенствам $|g(\xi_k^{(n)})| \leqslant A$ и $|g'(\xi_k^{(n)})| \leqslant B$, то $|g(x)| \leqslant A + \lambda_n B$ на $[-1, 1]$, причем числа λ_n не зависят от полинома $g(x)$ и $\lambda_n \to 0$ при $n \to \infty$. Еще раньше (в работе [1]) он доказал, что если полином $X_n(x)$ степени $2n - 1$ интерполирует в узлах Чебышева функцию $f(x)$, непрерывную на отрезке $[-1, 1]$, и $X_n'(\xi_k^{(n)}) = 0$, то $X_n(x)$ сходится равномерно на $[-1, 1]$ к $f(x)$.

Рассмотрим для сплайна $S_{\Delta}(x)$ представление (2.1.10), справедливое, даже если $S_{\Delta}(x)$ не принадлежит классу $C^2[a, b]$. Положим $\sigma = (x - x_{j-1})/h_j$ на $[x_{j-1}, x_j]$; тогда

$$S_{\Delta}(x) = m_{j-1}h_j(1 - \sigma)^2\sigma - m_j h_j \sigma^2(1 - \sigma) + y_{j-1}(1 - \sigma)^2(2\sigma + 1) + y_j\sigma^2[2(1 - \sigma) + 1].$$

Следовательно, если $|y_k| \leqslant A$ и $|m_k| \leqslant B$, $k = 0, 1, \ldots, N$, то для x из отрезка $[x_{j-1}, x_j]$

$$|S_{\Delta}(x)| \leqslant A + \frac{h_j}{4}B.$$

Таким образом, доказана

Лемма 2.3.1. *Если кубический сплайн $S_{\Delta}(x)$ во всех узлах произвольной сетки Δ из $[a, b]$ удовлетворяет неравенствам*

$$|S_{\Delta}(x_k)| \leqslant A, \qquad |S_{\Delta}'(x_k)| \leqslant B,$$

то для всех $x \in [a, b]$

$$|S_\Delta(x)| \leqslant A + \frac{\|\Delta\|}{4} B.$$

Важно отметить, что в этой лемме $S_\Delta(x)$ — кусочно кубический полином с непрерывной первой производной. Относительно второй производной не было сделано никаких предположений. Пользуясь терминологией, которую мы подробнее объясним в следующих главах, будем называть такой сплайн *сплайном дефекта* 2. Сплайны с непрерывной второй производной будем называть *сплайнами дефекта* 1. Сплайн, на всем отрезке $[a, b]$ совпадающий с кубическим полиномом, будем называть *сплайном дефекта* 0.

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана сетка Δ, и пусть сплайн $S_\Delta(x)$ дефекта 2 интерполирует непрерывную функцию $f(x)$ в узлах сетки Δ и его производная в этих узлах равна нулю. Тогда справедлив следующий аналог теоремы Фейера [1]:

Лемма 2.3.2. *Пусть на отрезке* $[a, b]$ *заданы непрерывная функция* $f(x)$ *и такая последовательность сеток* Δ_k, *что* $\|\Delta_k\| \to 0$ *при* $k \to \infty$. *Если сплайн* $\hat{S}_{\Delta_k}(x)$ *дефекта* 2 *интерполирует функцию* $f(x)$ *в узлах сетки* Δ_k *и его производная в этих узлах равна нулю, то последовательность* $\{\hat{S}_{\Delta_k}(x)\}$ *сходится к* $f(x)$ *равномерно на* $[a, b]$. *Точнее,*

$$|f(x) - \hat{S}_{\Delta_k}(x)| \leqslant 2\omega\left(\frac{\|\Delta\|}{2}, f\right).$$

Доказательство. Так как на концах каждого отрезка $[x_{kj-1}, x_{kj}]$ заданы значения кубического полинома и его первой производной, то существование таких сплайнов очевидно. Далее, сплайн $\hat{S}_{\Delta_k}(x)$ изменяется монотонно на каждом отрезке $[x_{kj-1}, x_{kj}]$. Пусть $x \in [x_{kj-1}, x_{kj}]$; тогда

$$|f(x) - \hat{S}_{\Delta_k}(x)| \leqslant |f(x) - f(y)| + |\hat{S}_\Delta(y) - \hat{S}_{\Delta_k}(x)| \leqslant 2\omega\left(\frac{h_{kj}}{2}, f\right),$$

где y — ближайший к x конец указанного отрезка.

В следующей лемме на рассматриваемые сплайны налагаются более слабые ограничения. Ее доказательство очевидно.

Лемма 2.3.3. *Пусть на отрезке* $[a, b]$ *заданы последовательность сеток* Δ_k *и два сплайна* $\hat{S}_{\Delta_k}$ *и* $\hat{T}_{\Delta_k}$, *совпадающие в узлах сетки. Если* $\|\Delta_k\| \to 0$,

$$\max_j |\hat{S}'_{\Delta_k}(x_{kj})| \, \|\Delta_k\| \to 0 \quad \text{и} \quad \max_j |\hat{T}'_{\Delta_k}(x_{kj})| \, \|\Delta_k\| \to 0$$

при $k \to \infty$, *то*

$$\hat{S}_{\Delta_k}(x) - \hat{T}_{\Delta_k}(x) = o(1)$$

равномерно относительно x *на* $[a, b]$.

Вернемся к теореме 2.3.1. Сплайны $\hat{S}_{\Delta_k}(x)$ дефекта 2 из леммы 2.3.2 без дополнительных ограничений на сетки Δ_k сходятся к $f(x)$ равномерно на $[a, b]$. Если же выполнено условие (2.3.7) и величины $\| A^{-1} \|$ и $\| \tilde{A}^{-1} \|$ в (2.1.16) и (2.1.17) равномерно ограничены относительно k, то сплайны $S_{\Delta_k}(x)$ из теоремы 2.3.1 удовлетворяют соотношению

$$\max_j | S_h'(x_{kj}) | \| \Delta_k \| \to 0.$$

Отсюда в силу леммы 2.3.3 $S_{\Delta_k}(x) - \hat{S}_{\Delta_k}(x) \to 0$ равномерно относительно x на $[a, b]$, а в силу леммы 2.3.2 $S_{\Delta_k}(x) \to f(x)$ равномерно относительно x на $[a, b]$. Этот вариант доказательства теоремы 2.3.1 более ясно указывает на роль условия (2.3.7).

Если предположить, что производная $f'(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то интерполяционный сплайн и его производная сходятся соответственно к $f(x)$ и $f'(x)$. В этом случае нет необходимости налагать на последовательность сеток дополнительное ограничение (2.3.7).

Т е о р е м а 2.3.2. *Пусть на отрезке* $[a, b]$ *заданы последовательность сеток* Δ_k, $\| \Delta_k \| \to 0$ *при* $k \to 0$, *и функция* $f(x) \in C^1[a, b]$. *Если интерполяционный сплайн* $S_{\Delta_k}(x)$ *удовлетворяет краевым условиям* (2.1.19i) *или является периодическим вместе с функцией* $f(x)$, *то*

$$f^{(p)}(x) - S_{\Delta_k}^{(p)}(x) = o(\| \Delta_k \|^{1-p}) \qquad (p = 0, 1) \tag{2.3.13}$$

равномерно относительно x *на* $[a, b]$. *Если* $f'(x)$ *удовлетворяет на* $[a, b]$ *условию Липшица порядка* α $(0 < \alpha \leqslant 1)$, *то*

$$f^{(p)}(x) - S_{\Delta_k}^{(p)}(x) = O(\| \Delta_k \|^{1+\alpha-p}) \qquad (p = 0, 1) \tag{2.3.14}$$

равномерно относительно x *на* $[a, b]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим в непериодическом случае $m_k = (m_{k0}, m_{k1}, \ldots, m_{kN_k})^T$, $c_k = (c_{k0}, c_{k1}, \ldots, c_{kN_k})^T$, $f_k = (f_{k0}, f_{k1}, \ldots, f_{kN_k})^T$, а в периодическом внесем соответствующие изменения. Для данной сетки Δ_k обозначим через B_k матрицу коэффициентов в (2.1.17) или (2.1.16) при краевых условиях (i) и с уравнениями $3m_{k0} = 3f'(a) \equiv c_{k0}$, $3m_{kN_k} = 3f'(b) \equiv c_{kN_k}$ вместо первого и последнего уравнений системы (2.1.16). Тогда

$$B_k \left(m_k - \frac{1}{3} c_k \right) = \left(I_k - \frac{1}{3} B_k \right) c_k,$$

где I_k — единичная матрица порядка N_k+1 или N_k. Правая часть в непериодическом случае равна

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_1(c_{k1}-c_{k0})-\mu_1(c_{k2}-c_{k1}) \\ \vdots \\ \lambda_{N_k-1}(c_{kN_k-1}-c_{kN_k-2})-\mu_{N_k-1}(c_{kN_k}-c_{kN_k-1}) \\ 0 \end{bmatrix},$$

а в периодическом

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} \lambda_1(c_{k1}-c_{kN_k})-\mu_1(c_{k2}-c_{k1}) \\ \lambda_2(c_{k2}-c_{k1})-\mu_2(c_{k3}-c_{k2}) \\ \vdots \\ \lambda_{N_k}(c_{kN_k}-c_{kN_k-1})-\mu_{N_k}(c_{k1}-c_{kN_k}) \end{bmatrix}.$$

Норма каждого из этих векторов не превосходит $\omega(3\|\Delta_k\|, f')\leqslant 3\omega(\|\Delta_k\|, f')$, и, следовательно, $\|m_k - {}^1/_3 c_k\|\leqslant\|B_k^{-1}\|\cdot 3\omega(\|\Delta_k\|, f')\leqslant 3\omega(\|\Delta_k\|, f')$. Далее, в периодическом случае существует такая точка $\xi_{kj}\in[x_{kj-1}, x_{kj}]$, что ${}^1/_3 c_{kj} = f'(\xi_{kj})$. То же верно для $1\leqslant j\leqslant N_k-1$ в непериодическом случае, причем здесь $c_{k0}=3f'(a)$, $c_{kN_k}=3f'(b)$. Итак, $\|m_k - f'_k\|\leqslant 4\omega(\|\Delta_k\|, f')$.

Отсюда и из (2.1.11) для $x\in[x_{kj-1}, x_{kj}]$ получаем (опуская индекс сетки k)

$$\left|S'_\Delta(x)-\frac{f_j-f_{j-1}}{h_j}\right| = \left|\left[\frac{3}{h_j^2}\left(x-\frac{x_{j-1}+x_j}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right]\times\right.$$

$$\times\left[(m_{j-1}-f'_{j-1})+(m_j-f'_j)+\left(f'_{j-1}+f'_j-2\frac{f_j-f_{j-1}}{h_j}\right)\right]+$$

$$\left.+\frac{1}{h_j}\left(x-\frac{x_j+x_{j-1}}{2}\right)[(m_j-f'_j)-(m_{j-1}-f'_{j-1})+(f'_j-f'_{j-1})]\right|\leqslant\frac{19}{2}\omega(\|\Delta\|, f').$$

Так как $|f'(x)-(f_j-f_{j-1})/h_j|\leqslant\omega(h_j, f')$, то

$$|f'(x)-S'_\Delta(x)|\leqslant\frac{21}{2}\omega(\|\Delta\|, f').$$

В частности, для функции, удовлетворяющей условию Липшица порядка α,

$$|f'(x)-S'_\Delta(x)|\leqslant\frac{21}{2}\|\Delta\|^\alpha.$$

Так как сплайн $S_\Delta(x)$ интерполирует функцию $f(x)$ в узлах сетки Δ, то на $[x_{j-1}, x_j]$

$$|f(x)-S_\Delta(x)| = \left|\int_y^x [f'(x)-S'_\Delta(x)]\,dx\right|\leqslant\frac{21}{4}\|\Delta\|\,\omega(\|\Delta\|, f'),$$

где y — ближайший к x конец отрезка $[x_{j-1}, x_j]$. Теорема доказана.

Случай общих краевых условий (2.1.19iii) мы рассмотрим в разд. 2.9. По существу тот же метод доказательства применяется, когда функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ непрерывную вторую производную. В следующей теореме результаты Шармы и Мейера [1, 2] несколько обобщаются, ибо на функцию $f(x)$ налагаются более общие условия.

Теорема 2.3.3. *Пусть* $f(x) \in C^2[a, b]$ *и на отрезке* $[a, b]$ *задана такая последовательность сеток* $\{\Delta_k\}$, *что* $\|\Delta_k\| \to 0$ *при* $k \to \infty$. *Если сплайн* $S_{\Delta_k}(x)$ *интерполирует функцию* $f(x)$ *на сетке* Δ_k *и удовлетворяет краевым условиям* (2.1.18i) *или* (2.1.18ii), *или если функции* $S_{\Delta_k}(x)$ *и* $f(x)$ *периодические, то*

$$f^{(p)}(x) - S^{(p)}_{\Delta_k}(x) = o(\|\Delta_k\|^{2-p}) \qquad (p = 0, 1, 2) \tag{2.3.15}$$

равномерно относительно x *на* $[a, b]$. *Если* $f''(x)$ *удовлетворяет на* $[a, b]$ *условию Липшица порядка* α $(0 < \alpha \leqslant 1)$, *то*

$$f^{(p)}(x) - S^{(p)}_{\Delta_k}(x) = O(\|\Delta_k\|^{2+\alpha-p}) \qquad (p = 0, 1, 2) \tag{2.3.16}$$

равномерно относительно x *на* $[a, b]$.

Доказательство. Положим $M_k = (M_{k0}, M_{k1}, \ldots, M_{kN_k})^{\mathrm{T}}$, $d_k = (d_{k0}, d_{k1}, \ldots, d_{kN_k})^{\mathrm{T}}$ в непериодическом случае и $M_k = (M_{k1}, \ldots, M_{kN_k})^{\mathrm{T}}$, $d_k = (d_{k1}, \ldots, d_{kN_k})^{\mathrm{T}}$ в периодическом. Пусть A_k обозначает матрицу коэффициентов системы (2.1.8) или (2.1.9), соответствующую сетке Δ_k. Тогда (2.1.8) (при краевых условиях (i)) и (2.1.9) можно записать в виде

$$A_k\left(M_k - \frac{1}{3}d_k\right) = \left(I_k - \frac{1}{3}A_k\right)d_k, \tag{2.3.17}$$

где I_k — единичная матрица. Правые части равны (опущен индекс сетки k)

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} d_0 - d_1 \\ \mu_1(d_1 - d_0) - \lambda_1(d_2 - d_1) \\ \vdots \\ \mu_{N_k-1}(d_{N_k-1} - d_{N_k-2}) - \lambda_{N_k-1}(d_{N_k} - d_{N_k-1}) \\ d_{N_k} - d_{N_k-1} \end{bmatrix},$$

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} \mu_1(d_1 - d_{N_k}) - \lambda_1(d_2 - d_1) \\ \mu_2(d_2 - d_1) - \lambda_2(d_3 - d_2) \\ \vdots \\ \mu_{N_k-1}(d_{N_k-1} - d_{N_k-2}) - \lambda_{N_k-1}(d_{N_k} - d_{N_k-1}) \\ \mu_{N_k}(d_{N_k} - d_{N_k-1}) - \lambda_{N_k}(d_1 - d_{N_k}) \end{bmatrix}.$$

Заметим, что в периодическом случае величина $d_j/6$ равна разделенной разности $f[x_{j-1}, x_j, x_{j+1}]$ (Гильдебранд [1, стр. 38]). То же верно для $j \neq 0$ и $j \neq N$ в непериодическом случае:

$$\frac{d_j}{6} = \frac{(f_{j+1}-f_j)/h_{j+1}-(f_j-f_{j-1})/h_j}{h_j+h_{j+1}} = f[x_{j-1}, x_j, x_{j+1}].$$

Отсюда $\frac{1}{6}d_j = \frac{1}{2}f''(\xi_j)$ для некоторой точки ξ_j из интервала (x_{j-1}, x_{j+1}). Из формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа следует, что для некоторой точки ξ_0, $x_0 < \xi_0 < x_1$,

$$\frac{1}{6}d_0 = \frac{(f_1-f_0)/h_1-f_0'}{h_1} = \frac{1}{2}f''(\xi_0).$$

Аналогичное утверждение справедливо для d_N.

Таким образом, $\left\| \left(I_k - \frac{1}{3}A_k\right) d_k \right\| \leqslant \omega(3\|\Delta_k\|, f'') \leqslant 3\omega(\|\Delta_k\|, f'')$, а поскольку $\|A_k^{-1}\| \leqslant 1$, из (2.3.17) получаем

$$\left\| M_k - \frac{1}{3}d_k \right\| \leqslant \|A_k^{-1}\| \cdot \left\| \left(I_k - \frac{1}{3}A_k\right) d_k \right\| \leqslant 3\omega(\|\Delta_k\|, f'').$$

Ясно, что $\left\| f_k'' - \frac{1}{3}d_k \right\| \leqslant \omega(\|\Delta_k\|, f'')$ и, следовательно, $\|M_k - f_k''\| \leqslant 4\omega(\|\Delta_k\|, f'')$. Так как функция $S''_{\Delta_k}(x)$ кусочно линейна, то

$$|f''(x) - S''_{\Delta_k}(x)| \leqslant 5\omega(\|\Delta_k\|, f'').$$

В частности, если $f''(x) \in K \operatorname{Lip}\alpha$, т. е. $f''(x)$ удовлетворяет условию Липшица порядка α с константой K, то из предыдущего неравенства получаем

$$|f''(x) - S''_{\Delta_k}(x)| \leqslant 5K\|\Delta_k\|^{\alpha}.$$

Так как $S_{\Delta_k}(x_{kj}) = f(x_{kj})$, то по теореме Ролля на каждом интервале (x_{kj-1}, x_{kj}) существует точка ξ_{kj}, для которой $f'(\xi_{kj}) = S'_{\Delta_k}(\xi_{kj})$. Таким образом, на этом интервале

$$|f'(x) - S'_{\Delta_k}(x)| = \left| \int_{\xi_{kj}}^{x} [f''(x) - S''_{\Delta_k}(x)]\, dx \right| \leqslant 5\|\Delta_k\|\omega(\|\Delta_k\|, f'').$$

С помощью повторного интегрирования находим, что

$$|f(x) - S_{\Delta_k}(x)| \leqslant \frac{5}{2}\|\Delta_k\|^2 \omega(\|\Delta_k\|, f'').$$

Результат справедлив и для краевых условий (2.1.18ii), если первое и последнее уравнения системы (2.1.8) записать в виде $3M_{k0} = 3f''(a) \equiv d_{k0}$ и $3M_{kN_k} = 3f''(b) \equiv d_{kN_k}$ соответственно. В этом случае по-прежнему $\|A_k^{-1}\| \leqslant 1$.

Отметим, что увеличение гладкости функции $f(x)$ улучшает сходимость интерполяционных сплайнов. Биркгоф и де Бур [1] доказали, что если последовательность интерполяционных сплайнов $S_{\Delta_k}(x)$ удовлетворяет краевым условиям (i), выполняется (2.3.7) и $f'''(x)$ абсолютно непрерывна на $[a, b]$, то $S'''_{\Delta_k}(x)$ сходится к $f'''(x)$ равномерно. Далее, если функция $f(x)$ имеет на $[a, b]$ непрерывную четвертую производную, то $f^{(r)}(x) - S^{(p)}_{\Delta_k}(x) = O(\|\Delta_k\|^{4-p})$ $(p = 0, 1, \ldots, 4)$ равномерно относительно x на $[a, b]$. Приведем простое доказательство более сильного результата.

Теорема 2.3.4. *Пусть на отрезке* $[a, b]$ *заданы функция* $f(x) \in C^3[a, b]$ *и последовательность сеток* $\{\Delta_k\}$, *для которой выполнено условие* (2.3.7) *и* $\|\Delta_k\| \to 0$ *при* $k \to \infty$. *Тогда для интерполяционного сплайна* $S_{\Delta_k}(x)$, *удовлетворяющего краевым условиям* (2.1.18i) *или* (2.1.18ii), *а также для периодического сплайна, если функция* $f(x)$ *периодическая,*

$$f^{(p)}(x) - S^{(p)}_{\Delta_k}(x) = o(\|\Delta_k\|^{3-p}) \qquad (p = 0, 1, 2, 3) \tag{2.3.18}$$

равномерно относительно x *на* $[a, b]$. *Если* $f'''(x)$ *удовлетворяет на* $[a, b]$ *условию Липшица порядка* α $(0 < \alpha \leqslant 1)$, *то*

$$f^{(p)}(x) - S^{(p)}_{\Delta_k}(x) = O(\|\Delta_k\|^{3+\alpha-p}) \qquad (p = 0, 1, 2, 3) \tag{2.3.19}$$

равномерно относительно x *на* $[a, b]$.

Доказательство. Рассмотрим сначала систему (2.1.8). Положим $\lambda_0 = \mu_N = 1$ и через

$$\sigma_j = \frac{M_j - M_{j-1}}{h_j}$$

обозначим третью производную сплайна на отрезке $[x_{j-1}, x_j]$. Вычтем из каждого уравнения системы (2.1.8) предыдущее:

$$\begin{aligned}
(1 + \lambda_1) h_1\sigma_1 + \lambda_1 h_2\sigma_2 &= d_1 - d_0,\\
\mu_1 h_1\sigma_1 + (1 + \mu_1 + \lambda_2) h_2\sigma_2 + \lambda_2 h_3\sigma_3 &= d_2 - d_1,\\
\mu_2 h_2\sigma_2 + (1 + \mu_2 + \lambda_3) h_3\sigma_3 + \lambda_3 h_4\sigma_4 &= d_3 - d_2,\\
&\ldots\\
\mu_{N-2} h_{N-2}\sigma_{N-2} (1 + \mu_{N-2} + \lambda_{N-1}) h_{N-1}\sigma_{N-1} + \lambda_{N-1} h_N\sigma_N &= d_{N-1} - d_{N-2},\\
\mu_{N-1} h_{N-1}\sigma_{N-1} + (1 + \mu_{N-1}) h_N\sigma_N &= d_N - d_{N-1}.
\end{aligned} \tag{2.3.20}$$

Разделим уравнения (2.3.20) последовательно на $(h_1 + h_2)$, $(h_1 + h_2 + h_3)$, $(h_2 + h_3 + h_4)$, $\ldots$, $(h_{N-2} + h_{N-1} + h_N)$, $(h_{N-1} + h_N)$. Обозначим через $r = (r_1, r_2, \ldots, r_N)^T$ вектор-столбец получившихся правых частей, т. е.

$$\begin{aligned}
r_1 &= 6\,\frac{[f_0, f_1, f_2] - ([f_0, f_1] - f'_0)/h_1}{h_1 + h_2},\\
r_N &= 6\,\frac{(f'_N - [f_{N-1}, f_N])/h_N - [f_{N-2}, f_{N-1}, f_N]}{h_{N-1} + h_N},\\
r_j &= 6\,[f_{j-2}, f_{j-1}, f_j, f_{j+1}] \qquad (j = 2, \ldots, N-1).
\end{aligned}$$

Здесь $[f_j, f_{j+1}, \ldots, f_{j+k}] = f[x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{j+k}]$ есть k-я разделенная разность функции $f(x)$ в точках $x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{j+k}$. Заметим, что

$$\frac{1-\mu_{j-1}\lambda_j}{h_{j-1}+h_j+h_{j+1}} = \frac{\mu_{j-1}\mu_j}{h_{j-1}} = \frac{\lambda_{j-1}\mu_j}{h_j} = \frac{\lambda_{j-1}\lambda_j}{h_{j+1}}, \qquad \frac{h_j}{h_{j+1}} = \frac{\mu_j}{\lambda_j}.$$

Таким образом, из (2.3.20) находим

$$\begin{gathered}
(1+\lambda_1)\,\mu_1\sigma_1 + \lambda_1^2\sigma_2 = r_1,\\
\frac{\mu_1^2\mu_2}{1-\mu_1\lambda_2}\sigma_1 + \frac{(1+\mu_1+\lambda_2)\,\lambda_1\mu_2}{1-\mu_1\lambda_2}\sigma_2 + \frac{\lambda_1\lambda_2^2}{1-\mu_1\lambda_2}\sigma_3 = r_2,\\
\cdots\\
\frac{\mu_{N-2}^2\mu_{N-1}}{1-\mu_{N-2}\lambda_{N-1}}\sigma_{N-2} + \frac{(1+\mu_{N-2}+\lambda_{N-1})\,\lambda_{N-2}\mu_{N-1}}{1-\mu_{N-2}\lambda_{N-1}}\sigma_{N-1} + \frac{\lambda_{N-2}\lambda_{N-1}^2}{1-\mu_{N-2}\lambda_{N-1}}\sigma_N = r_{N-1},\\
\mu_{N-1}^2\sigma_{N-1} + (1+\mu_{N-1})\,\lambda_{N-1}\sigma_N = r_N.
\end{gathered} \tag{2.3.21}$$

Матрица коэффициентов этой системы при $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{N-1} = \frac{1}{2}$ имеет доминирующую главную диагональ, но в общем случае главная диагональ не будет доминирующей. Однако матрицу C системы (2.3.21) можно представить в виде произведения матрицы с доминирующей главной диагональю на две диагональные матрицы:

$$C = EDF,$$

где

$$E = \begin{bmatrix}
\mu_1 & & & & & 0\\
\frac{\mu_1\mu_2}{1-\mu_1\lambda_2} & & & & & \\
& \frac{\mu_1\mu_2\mu_3}{(1-\mu_2\lambda_3)\,\lambda_1} & & & & \\
& & \cdots & & & \\
& & & \frac{\mu_1\mu_2\ldots\mu_{N-2}}{(1-\mu_{N-3}\lambda_{N-2})\,\lambda_1\ldots\lambda_{N-4}} & & \\
& & & & \frac{\mu_1\mu_2\ldots\mu_{N-1}}{(1-\mu_{N-2}\lambda_{N-1})\,\lambda_1\ldots\lambda_{N-3}} & \\
0 & & & & & \frac{\mu_1\mu_2\ldots\mu_{N-1}}{\lambda_1\ldots\lambda_{N-2}}
\end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix}
1 & & & 0\\
& \frac{\lambda_1}{\mu_1} & & \\
& & \cdots & \\
& & \frac{\lambda_1\ldots\lambda_{N-2}}{\mu_1\ldots\mu_{N-2}} & \\
0 & & & \frac{\lambda_1\ldots\lambda_{N-1}}{\mu_1\ldots\mu_{N-1}}
\end{bmatrix},$$

$$D=\begin{bmatrix} 1+\lambda_1 & \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mu_1 & 1+\mu_1+\lambda_2 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & 1+\mu_2+\lambda_3 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ & & \dots & & & \\ 0 & \dots & 0 & \mu_{N-2} & 1+\mu_{N-2}+\lambda_{N-1} & \lambda_{N-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \mu_{N-1} & 1+\mu_{N-1} \end{bmatrix}.$$

Ясно, что $\| D^{-1} \| \leqslant 1$.

Если для всех i, j интервалы сетки удовлетворяют соотношению

$$\frac{h_i}{h_j} \leqslant \beta < \infty,$$

то

$$\frac{1}{\beta} \leqslant \frac{\lambda_i \lambda_{i+1} \dots \lambda_{i+p-1}}{\mu_i \mu_{i+1} \dots \mu_{i+p-1}} = \frac{h_{i+p}}{h_i} \leqslant \beta.$$

Кроме того,

$$\frac{1}{1+2\beta} \leqslant \frac{\mu_j \mu_{j+1}}{1-\mu_j \lambda_{j+1}} = \frac{1}{1+h_{j+1}/h_j + h_{j+2}/h_j} \leqslant 1,$$

$$\frac{1}{1+\beta} \leqslant \mu_j \leqslant \frac{\beta}{1+\beta} < 1 \qquad (1 \leqslant j \leqslant N-1).$$

Отсюда следует, что

$$\| C^{-1} \| \leqslant (1+2\beta)\beta^2.$$

Пусть $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_N)^T$; тогда из уравнения $C\sigma = r$ получаем

$$C(\sigma - r) = (I - C) r =$$

$$= \begin{bmatrix} 1-\mu_1(1+\lambda_1) & -\lambda_1^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{-\mu_1^2\mu_2}{1-\mu_1\lambda_2)} & 1-\frac{(1+\mu_1+\lambda_2)\lambda_1\mu_2}{1-\mu_1\lambda_2} & \frac{-\lambda_1\lambda_2^2}{1-\mu_1\lambda_2} & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\mu_{N-1}^2 & 1-\lambda_{N-1}(1+\mu_{N-1}) \end{bmatrix} r.$$

Так как сумма элементов каждой строки матрицы $I - C$ равна нулю, то правая часть последнего равенства имеет вид

$$\begin{bmatrix} -\lambda_1^2(r_2 - r_1) \\ -\frac{\lambda_1\lambda_2^2}{1-\mu_1\lambda_2}(r_3 - r_2) + \frac{\mu_1^2\mu_2}{1-\mu_1\lambda_2}(r_2 - r_1) \\ \dots \\ -\frac{\lambda_{N-2}\lambda_{N-1}^2}{1-\mu_{N-2}\lambda_{N-1}}(r_N - r_{N-1}) + \frac{\mu_{N-2}^2\mu_{N-1}}{1-\mu_{N-2}\lambda_{N-1}}(r_{N-1} - r_{N-2}) \\ \mu_{N-1}^2(r_N - r_{N-1}) \end{bmatrix}.$$

Если производная $f'''(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то величину $|r_{j+1} - r_j|$ можно сделать сколь угодно малой. Так как $(1 - \mu_j\lambda_{j+1})^{-1} \leqslant 1 + \beta$, то при достаточно малом значении нормы $\|\Delta\|$ ступенчатая функция $S'''_\Delta(x)$ будет равномерно близка к $f'''(x)$. В самом деле, $|r_{j+1} - r_j| \leqslant \omega(4\|\Delta\|, f''') \leqslant 4\omega(\|\Delta\|, f''')$ и

$$\|\sigma - r\| \leqslant \|C^{-1}\| \|(I - C) r\| \leqslant K_2\omega(\|\Delta\|, f'''),$$

где $K_2 = 8(1 + 2\beta)(1 + \beta)\beta^2$. Так как $\|f'''(x) - r_j\| \leqslant \omega(3\|\Delta\|, f''')$ на отрезке $[x_{j-1}, x_j]$, то в результате получаем

$$|f'''(x) - S'''_\Delta(x)| \leqslant (3 + K_2)\,\omega(\|\Delta\|, f'''). \tag{2.3.22}$$

Если $f'''(x)$ удовлетворяет на $[a, b]$ условию Липшица порядка α, $0 < \alpha \leqslant 1$, то

$$|f'''(x) - S'''_\Delta(x)| = O(\|\Delta\|^\alpha)$$

равномерно относительно x на $[a, b]$. В частности, если $f^{(4)}(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то

$$|f'''(x) - S'''_\Delta(x)| \leqslant (3 + K_2) \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f^{(4)}(x)| \cdot \|\Delta\|.$$

При доказательстве теоремы для краевых условий (2.1.18ii) требуются лишь незначительные изменения: первое и последнее уравнения системы (2.1.8) следует записать в виде $3M_0 = d_0 = 3f''(a)$ и $3M_N = d_N = 3f''(b)$, величины $1 + \lambda_1$ и $1 + \mu_{N-1}$ в первой и последней строках равенств (2.3.20), (2.3.21) и в матрице D следует заменить соответственно на $2 + \lambda_1$ и $2 + \mu_{N-1}$.

В периодическом случае также необходимо несколько изменить матрицу коэффициентов. В этом случае $C = EDF$, где

$$E = \begin{bmatrix} \frac{\mu_1\lambda_N}{1-\mu_N\lambda_1} & & & & 0 \\ & \frac{\mu_1\mu_2}{1-\mu_1\lambda_2} & & & \\ & & \frac{\mu_1\mu_2\mu_3}{(1-\mu_2\lambda_3)\lambda_1} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \frac{\mu_1\mu_2\ldots\mu_N}{(1-\mu_{N-1}\lambda_N)\lambda_1\ldots\lambda_{N-2}} \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \frac{\lambda_1}{\mu_1} & & & \\ & & \frac{\lambda_1\lambda_2}{\mu_1\mu_2} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \frac{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{N-1}}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_{N-1}} \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1+\mu_N+\lambda_1 & \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \mu_N \\ \mu_1 & 1+\mu_1+\lambda_2 & \lambda_2 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 1+\mu_2+\lambda_3 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \mu_{N-2} & 1+\mu_{N-2}+\lambda_{N-1} & \lambda_{N-1} \\ \lambda_N & 0 & 0 & \ldots & 0 & \mu_{N-1} & 1+\mu_{N-1}+\lambda_N \end{bmatrix}.$$

При этом учитывается, что в периодическом случае $\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_N = \mu_1\mu_2 \ldots \mu_N$. Ограниченность величины $\| C^{-1} \|$ доказывается так же, как раньше, и мы опять получаем неравенство (2.3.22).

Так как третья производная $S'''_\Delta(x)$ претерпевает в узлах сетки разрывы с конечным скачком, то нельзя установить неравенство для вторых производных простым интегрированием. Для изучения второй производной исследуем вторую разделенную разность:

$$\frac{(f_{j+1}-f_j)/h_{j+1}-(f_j-f_{j-1})/h_j}{h_j+h_{j+1}} =$$

$$= \frac{f''_j}{2} + \frac{\frac{1}{h_{j+1}}\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} (x_{j+1}-t)^2 f'''(t)\,dt - \frac{1}{h_j}\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} (x_{j-1}-t)^2 f'''(t)\,dt}{2(h_j+h_{j+1})}.$$

В силу равенства (2.1.5) и интерполяционного свойства сплайна $S_\Delta(x)$

$$f''_j - M_j = \frac{\frac{1}{h_{j+1}}\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} (x_{j+1}-t)^2 [f'''(t)-\sigma_{j+1}]\,dt - \frac{1}{h_j}\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} (x_{j-1}-t)^2 [f'''(t)-\sigma_j]\,dt}{h_j+h_{j+1}}.$$

Очевидно, что для $x \in [x_{j-1}, x_j]$

$$f''(x) - S''_\Delta(x) = f''_j - M_j + \int\limits_{x_j}^{x} [f'''(t)-\sigma_{j+1}]\,dt.$$

Из этого соотношения и из неравенства (2.3.22) имеем

$$|f''(x)-S''_\Delta(x)| \leqslant \max_j \left(\frac{1}{3}\frac{h_j^2+h_{j+1}^2}{h_j+h_{j+1}} + h_j\right) \max_{x_{j-1}\leqslant x\leqslant x_j} |f'''(x)-S'''_\Delta(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{5}{6}\|\Delta\|(3+K_2)\,\omega(\|\Delta\|, f''').$$

Применив теорему Ролля и проинтегрировав, получим, как и раньше, требуемые неравенства для $|f'(x) - S'_\Delta(x)|$ и $|f(x) - S_\Delta(x)|$. Теорема доказана.

Следующие два свойства дополняют эти первоначальные сведения о сходимости сплайнов. Здесь мы лишь сформулируем эти свойства, а доказательство приведем в разд. 2.9 и 3.12.

Если $f(x)$ имеет на $[a, b]$ непрерывную четвертую производную и сетки Δ_k удовлетворяют условиям $\|\Delta_k\| \to 0$ при $k \to \infty$, $\|\Delta_k\|/\min\limits_j h_{kj} \leqslant \beta < \infty$, и $\max\limits_j |\lambda_{kj} - 1/2| \to 0$ при $k \to \infty$, то

$$\lim_{k\to\infty} \max_j \left| \frac{S'''_{\Delta_k}(x_{kj}+0) - S'''_{\Delta_k}(x_{kj}-0)}{\|\Delta_k\|} - f^{(4)}(x_{kj}) \right| = 0.$$

Таким образом, скачки третьей производной сплайна непосредственно связаны с четвертой производной аппроксимируемой функции.

Подводя итог, можно сказать, что скорость равномерной сходимости разности $f^{(p)}(x) - S_{\Delta_h}^{(p)}(x)$ к нулю равна $o(\|\Delta_h\|^{\gamma-p})$, если $f(x)$ принадлежит классу $C^\gamma[a, b]$ ($\gamma = 0, 1, \ldots, 4$; $0 \leqslant p \leqslant \gamma$), и равна $O(\|\Delta_h\|^{4-p})$, если $f(x)$ принадлежит классу $C^4[a, b]$ ($0 \leqslant p \leqslant 3$). В разд. 3.12 будет показано, что если функция $f(x)$ не совпадает с кубическим полиномом, то скорость сходимости не может быть выше $O(\|\Delta_h\|^{4-p})$.

2.4. Равные интервалы

Если сетка Δ, заданная на отрезке $[a, b]$, является равномерной, то обратные матрицы для матриц коэффициентов систем (2.1.8), (2.1.9), (2.1.16) и (2.1.17) принимают относительно простую форму. Это позволяет непосредственно применять сплайны к стандартным задачам численного анализа.

Введем определитель порядка n

$$D_n(\lambda) = \begin{vmatrix} 2 & \lambda & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 1-\lambda & 2 & \lambda & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ & & & \ldots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1-\lambda & 2 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1-\lambda & 2 \end{vmatrix} \tag{2.4.1}$$

и положим $D_{-1}(\lambda) = 0$, $D_0(\lambda) = 1$ и $D_1(\lambda) = 2$. Тогда $D_n(\lambda)$ удовлетворяет разностному уравнению

$$D_n(\lambda) - 2D_{n-1}(\lambda) + \lambda(1-\lambda) D_{n-2}(\lambda) = 0,$$

так что

$$D_n(\lambda) = \frac{[1+(1-\lambda+\lambda^2)^{1/2}]^{n+1} - [1-(1-\lambda+\lambda^2)^{1/2}]^{n+1}}{2(1-\lambda+\lambda^2)^{1/2}}. \tag{2.4.2}$$

Пусть $D_n = D_n(1/2)$, $D_0 = 1$, $D_{-1} = 0$; тогда

$$D_n = \frac{(1+\sqrt{3/2})^{n+1} - (1-\sqrt{3/2})^{n+1}}{\sqrt{3}}. \tag{2.4.3}$$

Рассмотрим определитель порядка n

$$Q_n(\alpha) = \begin{vmatrix} 2 & \alpha & & & & \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & & & \\ & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & & \\ & & \ldots & & & \\ & & & & \frac{1}{2} & 2 \end{vmatrix}.$$

Здесь $Q_1^*(\alpha)=2$. Положим $Q_0(\alpha)=1$, $Q_{-1}(\alpha)=0$; тогда для $n\geqslant 1$

$$Q_n^*(\alpha)=2D_{n-1}-\frac{\alpha}{2}D_{n-2}, \tag{2.4.4}$$

и $Q_n(\alpha)$ удовлетворяет тому же самому разностному уравнению, что и D_n. Для определителя $|A|$ матрицы коэффициентов системы (2.1.8) справедливы равенства

$$|A|=2Q_N(\mu_N)-\frac{1}{2}\lambda_0 Q_{N-1}(\mu_N)=2Q_N(\lambda_0)-\frac{1}{2}\mu_N Q_{N-1}(\lambda_0). \tag{2.4.5}$$

Элементы матрицы A^{-1}, обратной к матрице коэффициентов системы (2.1.8), в случае равномерной сетки можно найти из алгебраических дополнений транспонированной матрицы:

$$\begin{aligned}
A_{ij}^{-1}&=\frac{(-1)^{i+j}Q_i(\lambda_0)\,Q_{N-j}(\mu_N)}{2^{j-i}|A|} && (0<i\leqslant j\leqslant N),\\
A_{ij}^{-1}&=\frac{(-1)^{i+j}Q_j(\lambda_0)\,Q_{N-i}(\mu_N)}{2^{i-j}|A|} && (0\leqslant j\leqslant i<N),\\
A_{0j}^{-1}&=\frac{(-1)^j\lambda_0 Q_{N-j}(\mu_N)}{2^{j-1}|A|} && (0<j\leqslant N),\\
A_{Nj}^{-1}&=\frac{(-1)^{N+j}\mu_N Q_j(\lambda_0)}{2^{N-j-1}|A|} && (0\leqslant j<N).
\end{aligned} \tag{2.4.6}$$

Для равномерной сетки обратная матрица $\widetilde{A}^{-1}$ в периодическом случае имеет особенно интересный вид. Она является циркулянтом (Мюир [1]). Каждая строка получается сдвигом предыдущей на один элемент вправо. Свойства таких матриц играют важную роль при изучении полиномиальных сплайнов; мы подробно рассмотрим эти свойства в гл. IV.

Если сетка равномерна, то в периодическом случае для определителя $|\widetilde{A}|$ матрицы коэффициентов в (2.1.9) выполняется соотношение

$$|\widetilde{A}|=2D_{N-1}-\frac{1}{2}D_{N-2}+(-2)^{1-N}. \tag{2.4.7}$$

Пусть $d_0^{(N)}$, $d_1^{(N)}$, ..., $d_{N-1}^{(N)}$ — элементы первой строки матрицы $\widetilde{A}^{-1}$. Положим $d_{N+j}^{(N)}=d_j^{(N)}=d_{-j}^{(N)}$; тогда

$$\widetilde{A}_{ij}^{-1}=d_{j-i}^{(N)}, \tag{2.4.8}$$

Элементы $d_k^{(N)}$ можно найти непосредственно из алгебраических дополнений матрицы коэффициентов (эта матрица симметрическая):

$$d_k^{(N)}=\frac{(-2)^{-N+k}D_{k-1}+(-2)^{-k}D_{N-k-1}}{|A|} \qquad (0\leqslant k\leqslant N-1). \tag{2.4.9}$$

Для определителя $|B|$ матрицы коэффициентов системы (2.1.16) справедливы равенства

$$|B|=2Q_N(\mu_0)-\frac{1}{2}\lambda_N Q_{N-1}(\mu_0)=2Q_N(\lambda_N)-\frac{1}{2}\mu_0 Q_{N-1}(\lambda_N); \tag{2.4.10}$$

так как для системы (2.1.17) $\widetilde{B}=\widetilde{A}$, то

$$|\widetilde{B}|=|\widetilde{A}|.$$

В непериодическом случае легко заметить, что момент

$$M_i=\sum_{j=0}^{N} A_{ij}^{-1}\,d_j$$

вычисляется по формуле

$$M_i=A_{i0}^{-1}\,d_0+\frac{3}{h^2}\Big\{A_{i1}^{-1}f_0+(A_{i2}^{-1}-2A_{i1}^{-1})\,f_1+ \\ +\sum_{j=2}^{N-2}(A_{ij-1}^{-1}-2A_{ij}^{-1}+A_{ij+1}^{-1})\,f_j+(A_{iN-2}^{-1}-2A_{iN-1}^{-1})\,f_{N-1}+ \\ +A_{iN-1}^{-1}f_N\Big\}+A_{iN}^{-1}\,d_N$$

при условии, что сплайн принимает значение f_j в точке $x_j=a+jh$. Далее,

$$A_{ij-1}^{-1}-2A_{ij}^{-1}+A_{ij+1}^{-1}=-6A_{ij}^{-1} \qquad (j\neq i,\ 1<j<N-1),$$

$$A_{i0}^{-1}-2A_{i1}^{-1}+A_{i2}^{-1}=-6A_{i1}^{-1}+(1-2\lambda_0)\,A_{i0}^{-1} \qquad (i\neq 1),$$

$$A_{iN-2}^{-1}-2A_{iN-1}^{-1}+A_{iN}^{-1}=-6A_{iN-1}^{-1}+(1-2\mu_N)\,A_{iN}^{-1} \qquad (i\neq N-1),$$

$$4A_{i0}^{-1}+A_{i1}^{-1}=\delta_{i0},\quad A_{iN-1}^{-1}+4A_{iN}^{-1}=\delta_{iN},$$

$$A_{ii-1}^{-1}-2A_{ii}^{-1}+A_{ii+1}^{-1}=2-6A_{ii}^{-1} \qquad (1<i<N-1),$$

$$A_{10}^{-1}-2A_{11}^{-1}+A_{12}^{-1}=2-6A_{11}^{-1}+A_{10}^{-1}(1-2\lambda_0),$$

$$A_{N-1N-2}^{-1}-2A_{N-1N-1}^{-1}+A_{N-1N}^{-1}=2-6A_{N-1N-1}^{-1}+A_{N-10}^{-1}(1-2\mu_N).$$

Таким образом, мы получаем следующее представление для моментов:

$$M_i=A_{i0}^{-1}\Big[d_0+\frac{6}{h^2}(f_0-\lambda_0 f_1)\Big]-\frac{18}{h^2}\sum_{j=0}^{N}A_{ij}^{-1}f_j+ \\ +\frac{6}{h^2}f_i+A_{iN}^{-1}\Big[d_N+\frac{6}{h^2}(f_N-\mu_N f_{N-1})\Big]. \qquad (2.4.11)$$

В периодическом случае

$$M_i=\frac{18}{h^2}\sum_{j=1}^{N}\widetilde{A}_{ij}^{-1}f_j+\frac{6}{h^2}f_i. \qquad (2.4.12)$$

Величины A_{ij}^{-1} и $\widetilde{A}_{ij}^{-1}$ быстро убывают с ростом $|\,i-j\,|$, так что при вычислении M_j необходимо сохранять только несколько членов, центрированных относительно x_j. Кроме того, часто можно использовать предельные значения

коэффициентов при $N \to \infty$ в (2.4.11) и (2.4.12); это дает значительное упрощение при применении сплайнов.

Положим

$$r = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad s = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sigma = -\frac{1}{2r} = -2s = -\left(\frac{s}{r}\right)^{1/2}.$$

Тогда непосредственно из равенства (2.4.3) находим, что

$$D_n = \frac{r^{n+1} - s^{n+1}}{r - s}, \qquad \frac{D_{n-1}}{r^n} = \frac{1 - \sigma^{2n}}{2 + \sigma}.$$

Учитывая, что $2 + \sigma = -(2 + 1/\sigma) = \sqrt{3}$, получаем

$$\tilde{A}_{ij}^{-1} = d_{|j-i|}^{(N)} = \frac{\sigma^{N-|j-i|} + \sigma^{|j-i|}}{(2+\sigma)(1-\sigma^N)}. \tag{2.4.13}$$

Для непериодических сплайнов особый интерес представляют случаи, в которых $\lambda_0 = \mu_N = \alpha$. Случай $\alpha = 1$ связан с краевыми условиями (2.1.18i); $\alpha = 0$ — с краевыми условиями (2.1.18ii); $\alpha = -2$ приводит к параболическому выходу. Последний случай связан с условиями $M_0 = M_1$, $M_{N-1} = M_N$, имеющими особое значение, когда не известны ни краевые моменты, ни краевые наклоны. Свойства существования и сходимости таких сплайнов мы рассмотрим в разд. 2.9.

Нетрудно заметить, что для $n \geqslant 1$

$$\begin{aligned} \frac{Q_n(\alpha)}{r^n} &= \frac{2(1-\sigma^{2n}) + \alpha\sigma(1-\sigma^{2n-2})}{2+\sigma}, \\ \frac{|A|}{r^n} &= \frac{(2+\alpha\sigma)^2 - \sigma^{2n}(2+\alpha\sigma^{-1})^2}{2+\sigma}. \end{aligned} \tag{2.4.14}$$

Таким образом, для $0 < i \leqslant j \leqslant N$ и для $i = j = 0$

$$A_{ij}^{-1} = \frac{\sigma^{j-i}[Q_i(\alpha)/r^i][Q_{N-j}(\alpha)/r^{N-j}]}{|A|/r^N},$$

так что

$$A_{iN}^{-1} = \frac{\sigma^{j-i}[2+\alpha\sigma-\sigma^{2i-1}(2\sigma+\alpha)][2+\alpha\sigma-\sigma^{2N-2j-1}(2\sigma+\alpha)]}{(2+\sigma)[(2+\alpha\sigma)^2-\sigma^{2N-2}(2\sigma+\alpha)^2]} \qquad (0 < i \leqslant j < N) \tag{2.4.15a}$$

и

$$A_{iN}^{-1} = \frac{\sigma^{N-i}[2+\alpha\sigma-\sigma^{2i-1}(2\sigma+\alpha)]}{(2+\alpha\sigma)^2-\sigma^{2N-2}(2\sigma+\alpha)^2} \qquad (0 < i \leqslant N). \tag{2.4.15b}$$

Для $0 < j \leqslant N$

$$A_{0j}^{-1} = \frac{\sigma^j \cdot 2\alpha Q_{N-j}(\alpha)/r^{N-j}}{|A|/r^N},$$

так что

$$A_{0j}^{-1} = \frac{\sigma^j \cdot 2\alpha\,[2+\alpha\sigma-\sigma^{2N-2j-1}\,(2\sigma+\alpha)]}{(2+\alpha\sigma)^2-\sigma^{2N-2}\,(2\sigma+\sigma)^2} \quad \cdot\ (0<j<N) \qquad (2.4.15c)$$

и

$$A_{0N}^{-1} = \frac{\sigma^N 2\alpha\,(2+\sigma)}{(2+\alpha\sigma)^2-\sigma^{2N-2}\,(2\sigma+\alpha)^2}. \qquad (2.4.15d)$$

Чтобы завершить вычисление A_{ij}^{-1}, заметим, что в силу равенств (2.4.6) $A_{ij}^{-1} = A_{ji}^{-1}$ для $0<i<N$, $0<j<N$ и $A_{ij}^{-1} = A_{N-iN-j}^{-1}$ для остальных значений i, j.

Для упомянутых ранее трех случаев имеем:

Краевое условие (i) ($\alpha=1$)

$$A_{ij}^{-1} = \frac{\sigma^{j-i}\,(1+\sigma^{2i})\,(1+\sigma^{2N-2j})}{(2+\sigma)\,(1-\sigma^{2N})} \qquad (0<i\leqslant j<N),$$

$$A_{iN}^{-1} = \frac{\sigma^{N-i}\,(1+\sigma^{2i})}{(2+\sigma)\,(1-\sigma^{2N})} \qquad (0<i\leqslant N),$$

$$A_{0j}^{-1} = \frac{2\sigma^j\,(1+\sigma^{2N-2j})}{(2+\sigma)\,(1-\sigma^{2N})} \qquad (0<j<N),$$

$$A_{0N}^{-1} = \frac{2\sigma^N}{(2+\sigma)\,(1-\sigma)^{2N}}.$$

Краевое условие (ii) ($\alpha=0$)

$$A_{ij}^{-1} = \frac{\sigma^{j-i}\,(1-\sigma^{2i})\,(1-\sigma^{2N-2j})}{(2+\sigma)\,(1-\sigma^{2N})} \qquad (0<i\leqslant j<N),$$

$$A_{iN}^{-1} = \frac{\sigma^{N-i}\,(1-\sigma^{2i})}{2\,(1-\sigma^{2N})} \qquad (0<i\leqslant N),$$

$$A_{0j}^{-1} = 0 \qquad (0<j\leqslant N).$$

Параболический выход ($\alpha=-2$)

$$A_{ij}^{-1} = \frac{\sigma^{j-i}\,(1+\sigma^{2i-1})\,(1+\sigma^{2N-2j-1})}{(2+\sigma)\,(1-\sigma^{2N-2})} \qquad (0<i\leqslant j<N),$$

$$A_{iN}^{-1} = \frac{\sigma^{N-i}\,(1+\sigma^{2i-1})}{2\,(1-\sigma)\,(1-\sigma^{2N-2})} \qquad (0<i\leqslant N),$$

$$A_{0j}^{-1} = \frac{-2\sigma^j\,(1+\sigma^{2N-2j-1})}{(1-\sigma)^2\,(1-\sigma^{2N-2})} \qquad (0<j<N),$$

$$A_{0N}^{-1} = -\frac{\sigma^N\,(2+\sigma)}{(1-\sigma)^2\,(1-\sigma^{2N-2})}.$$

Чтобы найти элементы B_{ij}^{-1} для равномерной сетки, в равенствах (2.4.6) надо заменить λ_0, μ_N на μ_0, λ_N. В периодическом случае $\widetilde{B}_{ij}^{-1} = \widetilde{A}_{ij}^{-1}$. Для наклона m_i имеем следующий аналог соотношения (2.4.11):

$$m_i = \sum_{j=0}^{N} B_{ij}^{-1} c_j = B_{i0}^{-1} c_0 + \sum_{j=1}^{N-1} B_{ij}^{-1} \frac{3}{2h} (f_{j+1} - f_{j-1}) + B_{iN}^{-1} c_N =$$

$$= B_{i0}^{-1} \left(c_0 - \frac{3}{2h} f_1\right) - \frac{3}{2h} B_{i1}^{-1} f_0 + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{3}{2h} (B_{ij-1}^{-1} - B_{ij+1}^{-1}) f_j +$$

$$+ \frac{3}{2h} B_{iN-1}^{-1} f_N + B_{iN}^{-1} \left(\frac{3}{2h} f_{N-1} + c_N\right). \qquad (2.4.16)$$

Из рассуждения, следующего за (2.1.9), видно, что для определения значений B_{ij}^{-1} из формул (2.4.15a) — (2.4.15d) величину α в рассматриваемых трех случаях надо взять равной 0, 1, 2 соответственно. Поэтому в первых двух случаях из предыдущего вытекает, что B_{ij}^{-1} совпадают с A_{ij}^{-1}, а $\alpha = 2$ дает параболический выход.

Параболический выход ($\alpha = 2$)

$$B_{ij}^{-1} = \frac{\sigma^{j-i}(1-\sigma^{2i-1})(1-\sigma^{2N-2j-1})}{(2+\sigma)(1-\sigma^{2N-2})} \qquad (0 < i \leqslant j < N),$$

$$B_{iN}^{-1} = \frac{\sigma^{N-i}(1-\sigma^{2i-1})}{2(1+\sigma)(1-\sigma^{2N-2})} \qquad (0 < i \leqslant N),$$

$$B_{0j}^{-1} = \frac{2\sigma^{j}(1-\sigma^{2N-2j-1})}{(1+\sigma)(1-\sigma^{2N-2})} \qquad (0 < j < N),$$

$$B_{0N}^{-1} = \frac{(2+\sigma)\sigma^{N}}{(1+\sigma)^2(1-\sigma^{2N-2})}.$$

Для периодического сплайна вместо (2.4.16) имеем

$$m_i = \frac{3}{2h} \sum_{j=1}^{N} (\widetilde{B}_{ij-1}^{-1} - \widetilde{B}_{ij+1}^{-1}) f_i = \frac{3}{h} \sum_{j=1}^{[(N-1)/2]} \frac{\sigma^{N-j} - \sigma^{j}}{1-\sigma^{N}} (f_{i+j} - f_{i-j}), \qquad (2.4.17)$$

где квадратные скобки обозначают целую часть.

Предельные значения при $N \to \infty$ величин $\widetilde{A}_{ij}^{-1}$ весьма полезны. В самом деле,

$$d_{j-i}^{(\infty)} = \lim_{N\to\infty} d_{j-i}^{(N)} = \lim_{N\to\infty} A_{ij}^{-1} = \frac{\sigma^{|j-i|}}{2+\sigma};$$

при этом ошибка аппроксимации равна

$$\widetilde{A}_{ij}^{-1} - d_{j-i}^{(\infty)} = \frac{\sigma^{N-|j-i|} + \sigma^{N+|j-i|}}{(2+\sigma)(1-\sigma^N)}.$$

Даже в непериодическом случае, учитывая, что $\sigma \approx -0{,}268$, получаем хорошее приближение (за исключением интервалов вблизи концов). Значения $d_k^{(\infty)}$ для $k \leqslant 7$ равны

$k=$	0	1	2	3	4	5	6	7
$d_k^{(\infty)}=$	0,57735	−0,15470	0,04145	−0,01111	0,00298	−0,00080	0,00021	−0,00006

В табл. 2.4.1 приведены значения элементов матрицы $\widetilde{A}^{-1}$ ($\widetilde{A}_{ij}^{-1} = d_{j-i}^{(N)}$).

Таблица 2.4.1

Значения $d_{(k)}^{(N)}$, $N = 2, \ldots, 17$

k	$N=2$	$N=3$	$N=4$	$N=5$	$N=6$	$N=7$	$N=8$	$N=9$
0	0,66667	0,55556	0,58333	0,57576	0,57778	0,57724	0,57738	0,57734
1	−0,33333	−0,11111	−0,16667	−0,15152	−0,15556	−0,15447	−0,15476	−0,15468
2	—	—	0,08333	0,03030	0,04444	0,04065	0,04167	0,04139
3	—	—	—	—	−0,02222	−0,00813	−0,01190	−0,01089
4	—	—	—	—	—	—	0,00595	0,00218

k	$N=10$	$N=11$	$N=12$	$N=13$	$N=14$	$N=15$	$N=16$	$N=17$
0	0,57735	0,57735	0,57735	0,57735	0,57735	0,57735	0,57735	0,57735
1	−0,15470	−0,15470	−0,15470	−0,15470	−0,15470	−0,15470	−0,15470	−0,15470
2	0,04147	0,04145	0,04145	0,04145	0,04145	0,04145	0,04145	0,04145
3	−0,01116	−0,01109	−0,01111	−0,01111	−0,01111	−0,01111	−0,01111	−0,01111
4	0,00319	0,00292	0,00299	0,00297	0,00298	0,00298	0,00298	0,00298
5	−0,00159	−0,00058	−0,00085	−0,00078	−0,00080	−0,00080	−0,00080	−0,00080
6	—	—	0,00043	0,00016	0,00023	0,00021	0,00021	0,00021
7	—	—	—	—	−0,00011	−0,00004	−0,00006	−0,00006
8	—	—	—	—	—	—	0,00003	0,00001

Соответствующие элементы обратной матрицы для непериодического сплайна для случаев, рассмотренных в табл. 2.4.1, можно определить из следующих тождеств, которые легко проверяются. Для $\alpha = 1$

$$A_{ij}^{-1} = d_{j-i}^{(2N)} + d_{j+i}^{(2N)} \quad (0 < i \leqslant j < N), \qquad A_{0j}^{-1} = 2d_j^{(2N)} \quad (0 < j < N),$$

$$A_{iN}^{-1} = \frac{1}{2}\left[d_{N-i}^{(2N)} + d_{N+i}^{(2N)}\right] \quad (0 < i \leqslant N), \qquad A_{0N}^{-1} = d_N^{(2N)}.$$

Для $\alpha=0$

$$A_{ij}^{-1}=d_{j-i}^{(2N)}-d_{j+i}^{(2N)} \qquad (0<i\leqslant j<N), \qquad A_{0j}^{-1}=0 \quad (0<j\leqslant N),$$
$$A_{iN}^{-1}=\frac{1}{2}(2+\sigma)^2[d_0^{(2N)}d_{N+i}^{(2N)}-d_N^{(2N)}d_i^{(2N)}] \qquad (0<i\leqslant N).$$

Для $\alpha=-2$

$$A_{ij}^{-1}=d_{j-i}^{(2N-2)}+d_{j+i-1}^{(2N-2)} \qquad (0<i\leqslant j<N),$$
$$A_{0j}^{-1}=d_j^{(2N-2)}+d_{j-1}^{(2N-2)} \qquad (0<j<N),$$
$$A_{iN}^{-1}=-\frac{1}{4}[d_{N-i}^{(2N-2)}+d_{N+i-1}^{(2N-2)}] \qquad (0<i\leqslant N),$$
$$A_{0N}^{-1}=-\frac{1}{4}[d_N^{(2N-2)}+d_{N-1}^{(2N-2)}].$$

Элементы B_{ij}^{-1} для $\alpha=2$ находим из соотношений

$$B_{ij}^{-1}=d_{j-i}^{(2N-2)}-d_{j+i-1}^{(2N-2)} \qquad (0<i\leqslant j<N),$$
$$B_{0j}^{-1}=d_j^{(2N-2)}-d_{j-1}^{(2N-2)} \qquad (0<j<N),$$
$$B_{iN}^{-1}=\frac{1}{4}[d_{N-i}^{(2N-2)}-d_{N+i-1}^{(2N-2)}] \qquad (0<i\leqslant N),$$
$$B_{0N}^{-1}=\frac{1}{4}[d_N^{(2N-2)}-d_{N-1}^{(2N-2)}].$$

2.5. Приближенное дифференцирование и интегрирование

К наиболее важным приложениям сплайнов в численном анализе и областях, где их подвижность и гибкость особенно очевидны, относится их применение в численном дифференцировании и интегрировании. Из теоремы 2.3.4 ясно, что при приближенном интегрировании даже для неравных промежутков процесс имеет четвертый порядок точности. При приближенном дифференцировании ошибка равна $O(h^3)$, но к этому можно кое-что добавить. Получающиеся производные непрерывны в узлах сетки. Это явление частично объясняется свойством наилучшего приближения, приведенным в разд. 2.2, и частично свойством минимальной кривизны, которое изучается в гл. III.

Для периодического сплайна из равенств (2.1.15) следует, что

$$m_i=3\sum_{j=1}^{N}\tilde{B}_{ij}^{-1}\left[\lambda_j\frac{f_j-f_{j-1}}{h_j}+\mu_j\frac{f_{j+1}-f_j}{h_{j+1}}\right], \tag{2.5.1}$$

а для непериодического сплайна —

$$m_i=B_{i0}^{-1}c_0+3\sum_{j=1}^{N-1}B_{ij}^{-1}\left[\lambda_j\frac{f_j-f_{j-1}}{h_j}+\mu_j\frac{f_{j+1}-f_j}{h_{j+1}}\right]+B_{iN}^{-1}c_N. \tag{2.5.2}$$

В случае равномерной сетки выполняются соотношения (2.4.16) и (2.4.17). Для неравномерной сетки величины B_{ij}^{-1} обычно вычислять нецелесообразно. Для вычисления наклонов m_j следует непосредственно использовать алгоритм, указанный в конце разд. 2.1, либо вначале применить его для вычисления моментов M_j, а затем найти наклоны из соотношений (2.1.4):

$$\begin{aligned} m_i &= \frac{h_i}{6} M_{i-1} + \frac{h_i}{3} M_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} \qquad (0 < i \leqslant N), \\ m_i &= -\frac{h_{i+1}}{3} M_i - \frac{h_{i+1}}{6} M_{i+1} + \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} \qquad (0 \leqslant i < N). \end{aligned} \tag{2.5.3}$$

Небольшая перегруппировка членов в равенствах (2.5.1) и (2.5.2) приводит к важному свойству наклонов m_i: из равенства (2.5.1) получаем

$$m_i = 3 \sum_{j=1}^{N} \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j} [\lambda_j \tilde{B}_{ij}^{-1} + \mu_{j-1} \tilde{B}_{ij-1}^{-1}], \tag{2.5.4}$$

а из равенства (2.5.2) —

$$\begin{aligned} m_i = B_{i0}^{-1} c_0 + 3\lambda_1 B_{i1}^{-1} \frac{f_1 - f_0}{h_1} + 3 \sum_{j=2}^{N-2} \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j} [\lambda_j B_{ij}^{-1} + \mu_{j-1} B_{ij-1}^{-1}] + \\ + 3\mu_{N-1} B_{iN-1}^{-1} \frac{f_N - f_{N-1}}{h_N} + B_{iN}^{-1} c_N. \end{aligned} \tag{2.5.5}$$

Можно показать, что для равномерной сетки сумма

$$3 \sum_{j=1}^{N} \tilde{B}_{ij}^{-1} \frac{f_j - f_{j-1}}{h} = 3 \sum_{j=1}^{N} \frac{\sigma^{N-|j-i|} + \sigma^{|j-i|}}{(2+\sigma)(1+\sigma^N)} \cdot \frac{f_j - f_{j-1}}{h}$$

является *сглаживанием* величин $(f_j - f_{j-1})/h_j$ в смысле Шёнберга [1], а вычисление m_j включает дополнительное усреднение таких сумм. Аналогичные выводы можно сделать относительно соотношения (2.5.5).

Однако здесь нужно снова отметить, что правая часть равенства (2.1.15) равна наклону в точке x_j параболы, проходящей через точки (x_{j-1}, y_{j-1}), (x_j, y_j), (x_{j+1}, y_{j+1}), следовательно, эти наклоны парабол представляют сглаживание величин m_j.

Тот факт, что m_j представляет сглаживание величин $(f_j - f_{j-1})/h$, заметно отличает поведение m_j от поведения M_j. Из (2.1.7) видно, что вторые разделенные разности $f[x_{j-1}, x_j, x_{j+1}]$ в свою очередь представляют сглаживание величин M_j.

Эти характеристики важно принимать во внимание, когда сплайны применяются к задачам, в которых требуется гладкость вторых производных. К задачам такого типа относится определение картины линий тока для течения сжимаемого газа. В этом случае для устойчивости численного процесса надо найти значения кривизн линий тока с максимально возможной точностью. Оказывается, что сплайн можно эффективно применить для определения вторых производных с помощью следующего приема: сначала обычным методом находим

наклоны линий тока, затем строим сплайн, интерполирующий найденные наклоны, и берем в качестве требуемой второй производной производную от сплайна.

Пример 2.5.1 позволяет пояснить действие этого приема при расчете типичной линии тока внутри сопла. Здесь M_j — вторая производная обычного

ПРИМЕР 2.5.1

Определение наклонов и вторых производных для контура сопла (наклоны на концах заданы)

x	y	y'	M	y'' (сплайн от сплайна) ($\lambda_0 = \mu_N = 1$)
0	5,160	—0,04400	—0,00490	—0,00145
1	5,110	—0,04450	0,00380	—0,00255
2	5,070	—0,04780	—0,01031	—0,00266
3	5,020	—0,04924	0,00743	—0,00087
4	4,972	—0,04923	—0,00741	0,00186
5	4,921	—0,05083	0,00420	—0,01135
6	4,860	—0,08343	—0,06941	—0,05907
7	4,738	—0,16442	—0,09257	—0,09313
8	4,528	—0,25486	—0,08830	—0,08270
9	4,228	—0,36231	—0,09423	—0,12118
10	3,829	—0,45763	—0,12878	—0,04087
11	3,373	—0,38834	0,26736	0,15803
12	3,094	—0,19400	0,12135	0,19970
13	2,985	0,00043	0,26724	0,20913
14	3,100	0,21077	0,15369	0,17807
15	3,375	0,32662	0,07801	0,05750
16	3,720	0,34276	—0,04571	—0,01209
17	4,050	0,32733	0,01483	—0,00700
18	4,380	0,32793	—0,01362	—0,00440
19	4,700	0,31094	—0,02037	—0,01245
20	5,000	0,28830	—0,02492	—0,01635
21	5,280	0,27586	0,00004	—0,01530
22	5,550	0,25826	—0,03524	—0,01258
23	5,580	0,25110	0,02093	—0,00867
24	6,050	0,23733	—0,04848	—0,01557
25	6,275	0,22458	0,02299	—0,00891
26	6,500	0,21433	—0,04349	—0,01754
27	6,700	0,19308	0,00099	—0,01646
28	6,890	0,18334	—0,02046	—0,00577
29	7,070	0,18354	0,02082	—0,00331
30	7,250	0,16250	—0,06292	—0,00960

сплайна, y''_j — вторая производная сплайна от сплайна. В обоих случаях использовались краевые условия $M_0 = M_1$, $M_{N-1} = M_N$.

Интеграл от сплайна по отрезку $[a, b]$ получаем непосредственно из соотношения (2.1.2). Имеем

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} S_\Delta(x)\,dx = \frac{f_{j-1}+f_j}{2}\,h_j - \frac{M_{j-1}+M_j}{24}\,h_j^3 \qquad (2.5.6)$$

и, следовательно,

$$\int_a^b S_\Delta(x)\,dx = \sum_{j=1}^{N} \frac{f_{j-1}+f_j}{2} h_j - \sum_{j=1}^{N} \frac{M_{j-1}+M_j}{24} h_j^3. \tag{2.5.7}$$

Как и в случае численного дифференцирования, для неравных интервалов предпочтительнее вычислить вначале моменты M_j с помощью алгоритма, указанного в конце разд. 2.1, а затем найти значение интеграла (2.5.7). Для равномерной сетки

$$\int_a^b S_\Delta(x)\,dx = h \sum_{j=1}^{N} \frac{f_{j-1}+f_j}{2} - \frac{h^3}{12} \sum_{j=1}^{N} \frac{M_{j-1}+M_j}{2}.$$

В периодическом случае получается просто правило трапеций, поскольку здесь $M_1 + \ldots + M_N = 0$.

Суммирование левых частей равенств (2.1.5) для непериодического сплайна дает

$$\frac{h_1}{6} M_0 + \left(\frac{h_1}{3} + \frac{h_2}{2}\right) M_1 + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{N-2} (h_j + h_{j+1}) M_j +$$

$$+ \left(\frac{h_{N-1}}{2} + \frac{h_N}{3}\right) M_{N-1} + \frac{h_N}{6} M_N = \frac{f_N - f_{N-1}}{h_N} - \frac{f_1 - f_0}{h_1}. \tag{2.5.8}$$

Таким образом, равенство (2.5.7) для равномерной сетки принимает вид

$$\int_a^b S_\Delta(x)\,dx = h\left(\frac{5}{12} f_0 + \frac{13}{12} f_1 + f_2 + \ldots + f_{N-2} + \frac{13}{12} f_{N-1} + \frac{5}{12} f_N\right) -$$

$$- \frac{h^3}{12} (2M_0 + M_1 + M_{N-1} + 2M_N). \tag{2.5.9}$$

Для краевых условий, в которых $\lambda_0 = \mu_N = \alpha$ и с которыми мы в основном имеем дело, справедливо равенство $A_{ij}^{-1} = A_{N-iN-j}^{-1}$. Положим

$$E_j \equiv E_j(\alpha) = 2A_{0j}^{-1} + A_{1j}^{-1} + A_{N-1j}^{-1} + 2A_{Nj}^{-1},$$

тогда в силу (2.4.11)

$$(2M_0 + M_1 + M_{N-1} + 2M_N) = E_0\left[d_0 + d_N + \frac{6}{h^2}(f_0 + f_N - \alpha f_1 - \alpha f_{N-1})\right] +$$

$$+ \frac{6}{h^2}(2f_0 + f_1 + f_{N-1} + 2f_N) - \frac{18}{h^2} \sum_{j=0}^{N} E_j f_j.$$

Из (2.4.6) получаем

$$E_0 = \left[2Q_N(\alpha) - \frac{1}{2} Q_{N-1}(\alpha) + (-2)^{1-N} Q_1(\alpha) + (-2)^{2-N}\alpha\right] \Big/ |A|,$$

а учитывая (2.4.14), имеем

$$E_0 = \frac{[(2+\alpha\sigma)-\sigma^N(2+\alpha\sigma^{-1})](1-\sigma^N)(2+\sigma)}{(2+\alpha\sigma)^2-\sigma^{2N}(2+\alpha\sigma^{-1})^2} = \frac{(1-\sigma^N)(2+\sigma)}{2+\alpha\sigma+\sigma^N(2+\alpha\sigma^{-1})}.$$

Аналогичное равенство выполняется для $0<j<N$:

$$E_j = -4(1-\alpha)\frac{\sigma^{N-j}+\sigma^j}{2+\alpha\sigma+\sigma^N(2+\alpha\sigma^{-1})}. \qquad (2.5.10)$$

Заметим, что $E_0 = 1 - {}^1/_4 E_1$. Таким образом, равенство (2.5.9) принимает вид

$$\int_a^b S_\Delta(x)\,dx = -\frac{h^3}{72}E_0(d_0+d_N) + \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}E_0\right)h(f_0+f_N) +$$

$$+\left[2-\left(1-\frac{\alpha}{12}\right)E_0\right]h(f_1+f_{N-1}) + h\sum_{j=2}^{N-2}\left(1+\frac{1}{4}E_j\right)f_j. \qquad (2.5.11)$$

Приведем алгоритм, с помощью которого можно для произвольного α быстро вычислить коэффициенты в (2.5.11). Положим $G_n = (-2)^n D_n$; тогда

$$G_{n+2} + 4C_{n+1} + G_n = 0.$$

Далее, пусть

$$F_{2n} = \frac{2G_{n-2}+G_{n-3}}{2G_{n-1}+G_{n-2}}, \qquad F_{2n+1} = \frac{5G_{n-2}+G_{n-3}}{5G_{n-1}+G_{n-2}}.$$

Легко проверить непосредственно, что

$$F_{2n} = \frac{\sigma+\sigma^{2n-1}}{1+\sigma^{2n}}, \qquad F_{2n+1} = \frac{\sigma+\sigma^{2n}}{1+\sigma^{2n+1}}$$

и для $0 \leqslant j \leqslant N$

$$\frac{\sigma^j+\sigma^{N-j}}{1+\sigma^N} = G_{j-1}F_N - G_{j-2}.$$

Следовательно,

$$E_0(\alpha) = \frac{2+F_N}{2+\alpha F_N}, \qquad E_j(\alpha) = -4(1-\alpha)\frac{G_{j-1}F_N - G_{j-2}}{2+F_N}.$$

Значения этих величин для малых n приведены в табл. 2.5.1.

Коэффициенты для случая $d_0 = d_N = 0$, $\alpha = 0$ даны в табл. 2.5.2, а для случая $d_0 = d_N = 0$, $\alpha = -2$ в табл. 2.5.3. Первую из этих таблиц можно найти в работе Холлидея [1]; здесь она приведена для удобства. В таблицах представлены только числители, а знаменатели указаны лишь в левой части каждой строки.

Любопытно отметить, что для 1, 2 и 3 интервалов получаются соответственно правило трапеций, правило Симпсона и правило трех восьмых. В гл. V и VI будут детально исследованы основные соотношения между сплайнами

Таблица 2.5.1

n	G_n	$2G_n + G_{n-1}$	$5G_n + G_{n-1}$	F_n
−3	4	—	—	—
−2	−1	2	−1	—
−1	0	−1	−1	—
0	1	2	5	−2
1	−4	−7	−19	1
2	15	26	71	$-1/2$
3	−56	−97	−265	$-1/5$
4	209	362	989	$-2/7$
5	−780	−1351	−3691	$-5/19$
6	2911	5042	13775	$-7/26$
7	−10864	−18817	−51409	$-19/71$
8	40545	70226	191861	$-26/97$
9	−151316	−262087	−716035	$-71/265$
10	564719	978122	2672279	$-97/362$

Таблица 2.5.2

				$1/2$	1	1						
			$1/8$	3	10	3						
		$1/10$	4	11	11	4						
	$1/28$	11	32	26	32	11						
$1/38$	15	43	37	37	43	15						
$1/104$	41	118	100	106	100	118	41					
$1/142$	56	161	137	143	143	137	161	56				
$1/388$	153	440	374	392	386	392	374	440	153			
$1/530$	209	601	511	535	529	529	535	511	601	209		

Таблица 2.5.3

				$1/2$	1	1						
			$1/3$	1	4	1						
		$1/8$	3	9	9	3						
	$1/36$	13	44	30	44	13						
$1/96$	35	115	90	90	115	35						
$1/44$	16	53	40	46	40	53	16					
$1/360$	131	433	330	366	366	330	433	131				
$1/492$	179	592	450	504	486	504	450	592	179			
$1/448$	163	539	410	458	446	446	458	410	539	163		

ПРИМЕР 2.5.2
ВЫЧЕРЧИВАНИЕ КРИВОЙ sin x ПО ТОЧКАМ

Длина интервалов π/18; случаи a, b

$\frac{18x}{\pi}$	sin x	$M_0 = M_N = 0$		$M_0 = M_1,\ M_{N-1} = M_N$		Случай b y'' (сплайн от сплайна)
		y'	y''	y'	y''	
0	0,0000	1,00005	—0,00000	1,00700	—0,13797	—0,09541
1	0,17365	0,98478	—0,17494	0,98292	—0,13797	—0,18053
2	0,34202	0,93966	—0,34212	0,94015	—0,35203	—0,33132
3	0,5000	0,86606	—0,50119	0,86593	—0,49854	—0,50507
4	0,64279	0,76603	—0,64516	0,76606	—0,64587	—0,64101
5	0,76604	0,64279	—0,76706	0,64278	—0,76687	—0,76661
6	0,86603	0,49999	—0,86924	0,49999	—0,86929	—0,86588
7	0,93969	0,34201	—0,94107	0,34201	—0,94106	—0,93968
8	0,98481	0,17366	—0,98814	0,17366	—0,98814	—0,98471
9	1,00000	0,00000	—1,00184	0,0000	—1,00184	—1,00018
10	0,98481	—0,17367	—0,98825	—0,17367	—0,98825	—0,98467
11	0,93969	—0,34199	—0,94061	—0,34199	—0,94061	—0,93954
12	0,86603	—0,50000	—0,86997	—0,50000	—0,86997	—0,86628
13	0,76604	—0,64281	—0,76654	—0,64281	—0,76654	—0,76594
14	0,64279	—0,76603	—0,64551	—0,76603	—0,64551	—0,64272
15	0,50000	—0,86602	—0,50030	—0,86602	—0,50030	—0,49993
16	0,34202	—0,93966	—0,34348	—0,93966	—0,34348	—0,34202
17	0,17365	—0,98482	—0,17408	—0,98482	—0,17408	—0.17396
18	0,00000	—1,00003	—0,00023	—1,00003	—0,00023	+0,00018

Длина интервалов π/18; случаи c, d

$\frac{18x}{\pi}$	$y'_0 = y'_N = 1$		Периодический сплайн		
	y'	y''	y'	y''	y'' (сплайн от сплайна)
0	1,00000	—0,00093	1,00005	0,00000	—0,00000
1	0,98479	—0,17519	0,98478	—0,17494	—0,17375
2	0,93965	—0,34205	0,93965	—0,34212	—0,34196
3	0,86606	—0,50121	0,86606	—0,50019	—0,50002
4	0,76603	—0,64516	0,76603	—0,64516	—0,64280
5	0,64279	—0,76706	0,64279	—0,76706	—0,76600
6	0,49999	—0,86924	0,49999	—0,86924	—0,86594
7	0,34201	—0,94107	0,34201	—0,94107	—0,93970
8	0,17366	—0,98814	0,17366	—0,98814	—0,98479
9	0,00000	—1,00184	0,00000	—1,00184	—0,99996
10	—0,17367	—0,98825	—0,17367	—0,98825	—0,98479
11	—0,34199	0,94061	—0,34199	—0,94061	—0,93970
12	—0,50000	—0,86997	—0,50000	—0,86997	—0,86594
13	—0,64281	—0,76654	—0,64281	—0,76654	—0,76600
14	—0,76603	—0,64551	—0,76603	—0,64551	—0,64280
15	—0,86602	—0,50030	—0,86602	—0,50030	—0,50002
16	—0,93966	—0,34348	—0,93966	—0,34348	—0,34196
17	—0,98482	—0,17408	—0,98482	—0,17408	—0,17375
18	—1,00003	—0,00023	—1,00003	—0,00023	—0,00000

Длина интервалов $\pi/9$; случаи a, b

$\frac{18x}{\pi}$	$\sin x$	$M_0 = M_N = 0$		$M_0 = M_1,\ M_{N-1} = M_N$		Случай b y'' (сплайн от сплайна)
		y'	y''	y'	y''	
0	0,00000	0,99989	—0,0	1,02734	—0,27235	—0,19056
2	0,34202	0,93962	—0,34533	0,93227	—0,27235	—0,35391
4	0,64279	0,76600	—0,64950	0,76797	—0,66905	—0,62260
6	0,86603	0,49995	—0,87481	0,49942	—0,86957	—0,87575
8	0,98481	0,17363	—0,99489	0,17377	—0,99629	—0,98078
10	0,98481	—0,17362	—0,99472	—0,17366	—0,99435	—0,98612
12	0,86603	—0,49996	—0,87505	—0,49995	—0,87515	—0,86531
14	0,64279	—0,76599	—0,64916	—0,76599	—0,64917	—0,64285
16	0,34202	—0,93962	0,34569	—0,93962	—0,34569	—0,34200
18	0,00000	—0,999992	0,00022	—0,99992	+0,00022	—0,00011

Длина интервалов $\pi/9$; случаи c, d

$\frac{18x}{\pi}$	$y'_0 = y'_N = 1$		Периодический сплайн		
	y'	y''	y'	y''	y'' (сплайн от сплайна)
0	1,00000	—0,00105	0,99989	0,00000	0,00000
2	0,93959	—0,34504	0,93962	0,34533	—0,34198
4	0,76600	—0,64957	0,76600	0,64950	—0,64279
6	0,49945	—0,87479	0,49995	0,87481	—0,86589
8	0,17363	—0,99489	0,17363	—0,99489	—0,98469
10	—0,17362	—0,99472	—0,17362	—0,99472	—0,98469
12	—0,49996	—0,87505	—0,49996	—0,87505	—0,86589
14	—0,76599	—0,64916	—0,76599	—0,64916	—0,64279
16	—0,93962	—0,34569	—0,93962	—0,34569	—0,34198
18	—0,99992	—0,00022	—0,99992	—0,00022	0,00000

и формулами численного интегрирования, а также связь сплайнов с приближением линейных непрерывных функционалов.

В примере 2.5.2 приближение сплайнами применяется для вычисления первой и второй производных функции $\sin x$ на отрезке $[0, 2\pi]$. При этом берутся интервалы длины $\pi/9$ и $\pi/18$. В таблице указаны значения вторых производных, при вычислении которых использовались моменты M_j, а также вторые производные сплайна от сплайна. Применение различных краевых условий позволяет оценить степень их влияния на приближение. Мы рассматриваем 4 случая: a) $M_0 = M_N = 0$; b) $M_0 = M_1$, $M_{N-1} = M_N$; c) заданы точные значения y'_0 и y'_N; d) сплайн периодический. Ввиду симметрии значения приведены лишь на отрезке $[0, \pi]$.

Вычисление y'' с помощью сплайна от сплайна показано для случаев b) и d), в которых применен тот же тип сплайнов, что и в основном вычерчивании по точкам. При сравнении со значениями $\sin x$ становится очевидным улучше-

ние приближения y'', вычисленное таким способом. Заслуживает внимания качество периодического приближения y' и периодического сплайна от сплайна приближения y'' как для интервала длины $\pi/18$, так и для интервала длины $\pi/9$.

Превосходное качество приближения второй производной с помощью периодического сплайна от сплайна получается при учете 6 десятичных знаков в данных и в аппроксимации

$$y_i'' = \sum_j 9/4h^2 \left[d_j^{(\infty)} \left(i + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \frac{1}{\sqrt{3}}\right] [f_{i+j+2} - 2f_{i+j} + f_{i+j-2}],$$

справедливой для больших N.

2.6. Вычерчивание кривой по точкам

Конкретная цель большей части исследований, посвященных одномерным сплайнам, состоит в вычерчивании кривой по точкам. Тем не менее такое вычерчивание остается искусством, и необходимо указать некоторые технические приемы, используемые при применении сплайнов в этом искусстве.

Обычно желательно применять более или менее равномерные распределения точек сетки. Если длинный и короткий интервалы расположены рядом, то часто возникают колебания, вовсе не свойственные исходным данным.

Влияние краевого условия, выбранного для данной дуги, если этот выбор сделан неудачно, быстро затухает по мере удаления от крайних точек дуги. При вычерчивании кривой по точкам часто бывает необходимо более или менее точно определить наклон в конце дуги. Выбор краевого условия действительно оказывает некоторое влияние на величину этого наклона. Если крайние точки являются точками перегиба, то можно использовать условие $M_0 = M_N = 0$. При отсутствии оснований для другого выбора можно полагать $M_0 = M_1$, $M_{N-1} = M_N$. Однако построенная кривая может оказывать резкое воздействие на поведение величин M_j вблизи концов, которому данное краевое условие, по-видимому, противоречит. В этой ситуации часто применяются более общие краевые условия: $M_0 = \lambda_0 M_1$, $M_N = \mu_N M_{N-1}$, где λ_0 и μ_N подбираются в соответствии с этим поведением.

Аналогичная задача возникает при вычерчивании по точкам вблизи конца, в котором наклон и кривизна уменьшаются по величине, например при вычерчивании кривой $y = \sqrt{x}$, $0 \leqslant x \leqslant 10$, вблизи конца $x = 10$. Поведение этой кривой не соответствует естественному ходу кубического полинома и вычерчивание по точкам не даст хорошего результата, если существенно не увеличивать промежутки сетки при приближении к концу $x = 10$. Вблизи конца $x = 0$ хорошему вычерчиванию этой кривой по точкам с помощью сплайна мешает также наличие здесь вертикальной касательной.

Некоторые трудности, возникающие при вычерчивании кривой по точкам, можно исключить подходящей заменой координат. Однако во многих задачах появляются трудности по существу, и необходима техника применения сплайнов, позволяющая их обходить. Очень эффективным оказывается параметрическое представление. Пусть на дуге C последовательно расположе-

ны $N + 1$ точек $P_j\ (x_j,\ y_j)$ $(j = 0, 1, \ldots, N)$, и пусть s_j обозначает суммарную длину хорд

$$s_j = \sum_{i=1}^{j} \overline{P_{i-1}P_i}.$$

Мы строим сплайны, зависящие от s и проходящие через точки $(x_j,\ s_j)$ и $(y_j,\ s_j)$ соответственно. Можно приближенно вычислить длины отрезков получившейся кривой $x = x(s)$, $y = y(s)$ и построить новые сплайны для x и y в зависимости от суммарных длин хорд, но этот шаг обычно не приводит к заметному изменению самой кривой.

Весьма поучительный пример дает приближенное представление абсциссы x и ординаты y единичной окружности с помощью периодического сплайна, зависящего от суммарных длин хорд. При использовании 8 точек (на расстоянии 45° друг от друга) максимальная ошибка не превосходит 0,00112 радиуса. Для 12 точек (на расстоянии 30° друг от друга) максимальная ошибка равна 0,000165 радиуса. Интересно отметить, что даже для 4 точек ошибка составляет менее 1%. Заметим, что таким путем удается с помощью сплайна эффективно выполнить параметрическое представление.

Преимуществ при таком представлении много. Геометрическая конфигурация дуги в этом случае имеет гораздо меньшее значение, чем для обычных сплайнов. Вычерчивание с помощью сплайна простой замкнутой кривой, заданной полярными координатами r и θ с полюсом внутри кривой, будет эффективным, если любой луч, исходящий из полюса, пересечет кривую не более одного раза и не совпадет с касательной к кривой. При использовании суммарных длин дуг таких ограничений не требовалось. Можно даже строить по точкам пространственные кривые, образуя сплайны для x, y и z в зависимости от длин хорд или длин дуг.

Нужно, разумеется, позаботиться, чтобы кривые, проходящие через точки, действительно обладали требуемыми свойствами непрерывности. Применение единого сплайна для вычерчивания кривой, состоящей из дуги окружности и касательной в ее конце, приводит к колебаниям вблизи соединений, обусловленным разрывом кривизны. Если кривая (в двумерном случае, когда y зависит от x) имеет в некоторых точках разрывы наклонов и кривизны, то для ее приближения сплайном следует или выбирать именно эти точки в качестве узлов, или располагать узлы соответствующим образом вблизи точек разрыва кривизны. Во втором случае сама точка не должна выбираться в качестве узла сетки. При параметрическом вычерчивании по точкам, когда в качестве параметра берется суммарная длина хорд, положение лучше. Соответствующее расположение интервалов оказывается удовлетворительным, даже если точка разрыва кривизны берется в качестве узла сетки.

2.7. Приближенное решение дифференциальных уравнений

Сплайны часто с успехом применяются при решении задачи Коши и краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Предлагаемый метод пригоден в общем случае, но мы ограничимся сейчас двухточечной крае-

вой задачей для уравнения второго порядка:

$$\begin{gathered} Ly = y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = r(x) \qquad (a \leqslant x \leqslant b), \\ a_1 y(a) + a_2 y'(a) = a_0, \qquad b_1 y(b) + b_2 y'(b) = b_0. \end{gathered} \tag{2.7.1}$$

Введем *фундаментальные сплайны*, связанные с краевым условием (2.1.18i): так будем называть $N+3$ независимых сплайнов $A_{\Delta,k}(x)$ $(k = 0, 1, \ldots, N)$ и $B_{\Delta,k}(x)$ $(k = 0, N)$, образующих базис для всех кубических сплайнов, определенных на сетке Δ: $a = x_0 < x_1 \ldots < x_N = b$. Зададим эти фундаментальные кубические сплайны условиями

$$\begin{aligned} &A_{\Delta,k}(x_j) = \delta_{kj} && (j = 0, 1, \ldots, N), \\ &A'_{\Delta,k}(x_i) = 0 && (i = 0, N), \quad k = 0, 1, \ldots, N, \\ &B_{\Delta,k}(x_j) = 0 && (j = 0, 1, \ldots, N), \\ &B'_{\Delta,k}(x_i) = \delta_{ki} && (i = 0, N), \quad k = 0, N, \end{aligned} \tag{2.7.2}$$

где δ_{kj} — символ Кронекера.

Кубический сплайн, интерполирующий решение дифференциального уравнения и удовлетворяющий краевым условиям (2.1.18i), можно представить в виде

$$S_\Delta(y; x) = \sum_{j=0}^{N} A_{\Delta,j}(x)\,y(x_j) + y'(a)\,B_{\Delta,0}(x) + y'(b)\,B_{\Delta,N}(x). \tag{2.7.3}$$

Обозначим

$$E_\Delta(y; x) = y(x) - S_\Delta(y; x). \tag{2.7.4}$$

Если существует единственное решение $y(x)$ задачи (2.7.1), принадлежащее классу $C^2[a, b]$, то $E_\Delta^{(\alpha)}(y; x) = o(\|\Delta\|^{2-\alpha})$ $(\alpha = 0, 1, 2)$ равномерно относительно x на $[a, b]$. Если функция $y(x)$ имеет производные более высокого порядка, то в соответствии с результатами разд. 2.3 порядок стремления функции $E_\Delta^{(\alpha)}(y; x)$ к нулю также более высокий.

Принимая во внимание равенство (2.7.4), запишем

$$LS_\Delta(y; x) - r(x) = S''_\Delta(y; x) + p(x)\,S'_\Delta(y; x) + q(x)\,S_\Delta(y; x) - r(x) = G_\Delta(y; x),$$

где $G_\Delta(y; x) = -E''_\Delta(y; x) - p(x)\,E'_\Delta(y; x) - q(x)\,E_\Delta(y; x)$, так что $G_\Delta(y; x) = o(\|1\|)$. Подставляя (2.7.3) в (2.7.1), получаем

$$\sum_{j=0}^{N} y(x_j)\,LA_{\Delta,j}(x) + y'(a)\,LB_{\Delta,0}(x) + y'(b)\,LB_{\Delta,N}(x) - r(x) = G_\Delta(y; x). \tag{2.7.5}$$

Таким образом, ординаты $y_j = y(x_j)$ $(j = 0, 1, \ldots, N)$ и наклоны $y'_0 = y'(a)$, $y'_N = y'(b)$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{gathered} \sum_{j=0}^{N} y_j LA_{\Delta,j}(x_i) + y'_0 LB_{\Delta,0}(x_i) + y'_N LB_{\Delta,N}(x_i) = r(x_i) + G_\Delta(y; x_i) \\ (i = 0, 1, \ldots, N), \\ a_1 y_0 + a_2 y'_0 = a_0, \quad b_1 y_N + b_2 y'_N = b_0. \end{gathered} \tag{2.7.6}$$

Введем обозначения:

$$Y_\Delta = (y'_0,\ y_0,\ y_1,\ \ldots,\ y_N,\ y'_N)^{\mathrm{T}},$$
$$G_\Delta = (0,\ G_\Delta(y; x_0),\ \ldots,\ G_\Delta(y; x_N),\ 0)^{\mathrm{T}},$$
$$R_\Delta = (a_0,\ r(x_0),\ \ldots,\ r(x_N),\ b_0)^{\mathrm{T}},$$

и пусть матрица H_Δ имеет вид

$$H_\Delta = \begin{bmatrix} a_2 & a_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ LB_{\Delta,0}(x_0) & LA_{\Delta,0}(x_0) & LA_{\Delta,1}(x_1) & \ldots & LA_{\Delta,N}(x_0) & LB_{\Delta,N}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ LB_{\Delta,0}(x_N) & LA_{\Delta,0}(x_N) & LA_{\Delta,1}(x_N) & \ldots & LA_{\Delta,N}(x_N) & LB_{\Delta,N}(x_N) \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & b_1 & b_2 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$H_\Delta Y_\Delta = R_\Delta + G_\Delta.$$

Величины $G_\Delta(y; x_i)$, конечно, не известны. В предлагаемом методе G_Δ заменяют нулем и находят приближенное значение Y^*_Δ из уравнения $H_\Delta Y^*_\Delta = R_\Delta$. Если матрица H^{-1}_Δ существует и $\|H^{-1}_\Delta G_\Delta\| \to 0$ при $\|\Delta\| \to 0$, то решения уравнения

$$H_\Delta Y^*_\Delta = R_\Delta \tag{2.7.7}$$

определяют сплайны, равномерно сходящиеся на $[a, b]$ к $y(x)$. В частности, эти условия выполняются, если нормы $\|H^{-1}_\Delta\|$ равномерно ограничены.

Для иллюстрации рассмотрим краевую задачу

$$y'' - \alpha^2 y = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{2.7.8}$$
$$y'(0) = y(1) = 1.$$

Здесь матрица H_Δ имеет вид

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ B''_{\Delta,0}(x_0) & A''_{\Delta,0}(x_0) - \alpha^2 & A''_{\Delta,1}(x_0) & \ldots & A''_{\Delta,N}(x_0) & B''_{\Delta,N}(x_0) \\ B''_{\Delta,0}(x_1) & A''_{\Delta,0}(x_1) & A''_{\Delta,1}(x_1) - \alpha^2 & \ldots & A''_{\Delta,N}(x_1) & B''_{\Delta,N}(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ B''_{\Delta,0}(x_N) & A''_{\Delta,0}(x_N) & A''_{\Delta,1}(x_N) & \ldots & A''_{\Delta,N}(x_N) - \alpha^2 & B''_{\Delta,N}(x_N) \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Умножим уравнение (2.7.7) на квадратную матрицу порядка $N+3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & & & & 0 \\ \vdots & & A & & \vdots \\ 0 & & & & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{2.7.9}$$

где A — матрица коэффициентов системы (2.1.8) при $\lambda_0 = \mu_N = 1$. Тогда уравнение (2.7.7) примет вид

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ -\frac{6}{h_1} & -\frac{6}{h_1^2} - 2\alpha^2 & \frac{6}{h_1^2} - \lambda_0\alpha^2 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{6}{h_1(h_1+h_3)} - \mu_1\alpha^2 & -\frac{6}{h_1h_2} - 2\alpha^2 & \frac{6}{h_2(h_1+h_2)} - \lambda_1\alpha^2 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{6}{h_2(h_2+h_3)} - \mu_2\alpha^2 & -\frac{6}{h_2h_3} - 2\alpha^2 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6}{h_3(h_3+h_4)} - \mu_3\alpha^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & \vdots & \\ \dots & \frac{6}{h_N^2} - \mu_N\alpha^2 & -\frac{6}{h_N^2} - 2\alpha^2 & \frac{6}{h_N} \\ \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_0' \\ y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_N \\ y_N' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \qquad (2.7.10)$$

Заменим здесь $-y_0' + (y_1 - y_0)/h_1$ на u_0 и $y_N' - (y_N - y_{N-1})/h_N$ на u_N. Затем поменяем местами первое и второе, последнее и предпоследнее уравнения этой системы. В результате получим

$$\begin{bmatrix} \frac{6}{h_1} & -2\alpha^2 & -\lambda_0\alpha^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{h_1(h_1+h_2)} - \mu_1\alpha^2 & -\frac{6}{h_1h_2} - 2\alpha^2 & \frac{6}{h_2(h_1+h_2)} - \lambda_1\alpha^2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\mu_N\alpha^2 & -2\alpha^2 & \frac{6}{h_N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_N \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ясно, что если число $\| \Delta \|$ достаточно мало, то матрица коэффициентов имеет доминирующую главную диагональ и норма обратной матрицы равномерно ограничена.

В этом процессе вектор ошибки G_Δ умножается на матрицу (2.7.9), норма которой ограничена, и на матрицу, обратную матрице коэффициентов системы (2.7.10), норма которой также ограничена. Отсюда следует сходимость сплайнов к функции $y(x)$. В самом деле, при $\| \Delta \| \to 0$

$$\| [y'(x_0) - y_0'^*,\ y(x_0) - y_0^*,\ \ldots,\ y(x_N) - y_N^*,\ y^*(x_N) - y_N'^*] \| \to 0.$$

В табл. 2.7.1 приведено точное решение (с 5 десятичными знаками) краевой задачи $y'' - 100y = 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $y(0) = y(1) = 1$, а также ее приближенные решения, построенные с помощью сплайнов, определенных на сетках

Таблица 2.7.1

x	Точное значение y	y ($N = 10$)	y ($N = 20$)	Точное значение y'	y' ($N = 10$)	y' ($N = 20$)
0,00	1,00000	1,000000	1,00000	—9,9991	—10,1152	—10,1028
0,05	0,60657	—	0,60333	—	—	—
0,10	0,36799	0,35107	0,36406	—	—	—
0,15	0,22332	—	0,21975	—	—	—
0,20	0,13566	0,12343	0,13277	—	—	—
0,25	0,08263	—	0,08042	—	—	—
0,30	0,05070	0,04390	0,04906	—	—	—
0,35	0,03170	—	0,03049	—	—	—
0,40	0,02079	0,01075	0,01987	—	—	—
0,45	0,01520	—	0,01444	—	—	—
0,50	0,01348	0,01065	0,01277	—	—	—

с 11 и 21 узлами. Решение этой задачи имеет вид $y = \operatorname{ch} 10\,(x - 0{,}5)/\operatorname{ch} 5$. Ввиду симметрии в таблице представлены значения лишь для половины отрезка $[0, 1]$.

Необходимо отметить, что с помощью формулы (2.7.3) можно получить приближенное решение на всем отрезке. Это особенно важно, когда для дальнейших вычислений требуется знать решение краевой задачи в различных точках отрезка $[a, b]$. Важный пример дает координатный самописец, для которого часто бывает нужна интерполяция в большом количестве промежуточных точек.

Нелинейные дифференциальные уравнения эффективно решаются с помощью сплайнов, когда последние применяются в сочетании с методом квазилинеаризации, развитым Беллманом и Калабой [1]. Здесь задача

$$y'' = f(x, y, y'), \qquad a \leqslant x \leqslant b;$$

$$A[y(a), y'(a)] = 0, \qquad B[y(b), y'(b)] = 0$$

решается итерационным методом

$$y''_{n+1} = f'_y(x, y_n, y'_n)(y_{n+1} - y_n) + f'_{y'}(x, y_n, y'_n)(y'_{n+1} - y'_n)$$

с линеаризованными краевыми условиями

$$A'_y[y_n(a), y'_n(a)][y_{n+1}(a) - y_n(a)] + A'_{y'}[y_n(a), y'_n(a)][y'_{n+1}(a) - y'_n(a)] = 0,$$
$$B'_y[y_n(b), y'_n(b)][y_{n+1}(b) - y_n(b)] + B'_{y'}[y_n(b), y'_n(b)][y'_{n+1}(b) - y'_n(b)] = 0.$$

В случае равномерной сетки моменты для ранее введенных фундаментальных сплайнов можно найти непосредственно с помощью результатов разд. 2.4. Краевые условия имеют вид (2.1.18i), так что в матрице коэффициентов A системы (2.1.8) $\lambda_0 = \mu_N = 1$.

Таким образом,

$$\begin{bmatrix} B''_{\Delta,0}(x_0) & A''_{\Delta,0}(x_0) & A''_{\Delta,1}(x_0) & \dots & A''_{\Delta,N}(x_0) & B''_{\Delta,N}(x_0) \\ B''_{\Delta,0}(x_1) & A''_{\Delta,0}(x_1) & A''_{\Delta,1}(x_1) & \dots & A''_{\Delta,N}(x_1) & B''_{\Delta,N}(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ B''_{\Delta,0}(x_N) & A''_{\Delta,0}(x_N) & A''_{\Delta,1}(x_N) & \dots & A''_{\Delta,N}(x_N) & B''_{\Delta,N}(x_N) \end{bmatrix} =$$

$$= A^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{6}{h} & -\frac{6}{h} & \frac{6}{h} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 3/h^2 & -6/h^2 & 3/h^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/h^2 & -6/h^2 & -3/h^2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/h^2 & -6/h^2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & \dots & -6/h^2 & 3/h^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & \dots & 3/h^2 & -6/h^2 & 3/h^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & \dots & 0 & 3/h^2 & -6/h^2 & 3/h^2 & 0 \\ 0 & 0 & & \dots & 0 & 0 & 6/h & -6/h & 6/h \end{bmatrix}.$$

Формулы для элементов обратной матрицы A^{-1} приведены в разд. 2.4. Фактически мы имеем

$$A^{-1}_{ij} = \frac{(\sigma^{-i} + \sigma^i)(\sigma^{j-N} + \sigma^{N-j})}{(2+\sigma)(\sigma^{-N} - \sigma^N)} \qquad (0 < i \leqslant j < N),$$

$$A^{-1}_{iN} = \frac{(\sigma^{-i} + \sigma^i)}{(2+\sigma)(\sigma^{-N} - \sigma^N)} \qquad (0 < i \leqslant N),$$

$$A^{-1}_{0j} = \frac{2(\sigma^{N-j} + \sigma^{j-N})}{(2+\sigma)(\sigma^{-N} - \sigma^N)} \qquad (0 < j < N),$$

$$A^{-1}_{00} = \frac{2}{(2+\sigma)(\sigma^N - \sigma^{-N})},$$

где $A_{ij}^{-1} = A_{ji}^{-1}$ $(0 < i < N,\ 0 < j < N)$ и $A_{ij}^{-1} = A_{N-jN-i}^{-1}$ для всех i и j. Эти величины можно найти, применяя методы разд. 2.4, или их можно вычислить непосредственно, принимая во внимание, что $\sigma^k + \sigma^{-k}$ и $\sigma^{-k} - \sigma^k$ являются решениями разностного уравнения $u_{n+2} + 4u_{n+1} + u_n = 0$.

2.8. Приближенное решение интегральных уравнений

Рассмотрим линейное интегральное уравнение

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) y(t)\, dt, \tag{2.8.1}$$

где $f(x)$ и $K(x, t)$ непрерывны, $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant t \leqslant b$. Введем $N+1$ фундаментальных сплайнов $A_{\Delta, j}(x)$ $(j = 0, 1, \ldots, N)$, удовлетворяющих краевым условиям $M_0 = M_1$, $M_{N-1} = M_N$. Таким образом,

$$A''_{\Delta, j}(x_0) = A''_{\Delta, j}(x_1), \qquad A''_{\Delta, j}(x_{N-1}) = A''_{\Delta, j}(x_N),$$

$$A_{\Delta, j}(x_i) = \delta_{ij} \qquad (i, j = 0, 1, \ldots, N).$$

Интерполяционные сплайны этого типа имеют вид

$$S_\Delta(x) = \sum_{j=0}^{N} y_j A_{\Delta, j}(x),$$

где $y_j = y(x_j)$. Если $E_\Delta(x) = y(x) - S_\Delta(x)$, то

$$S_\Delta(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) S_\Delta(t)\, dt + G_\Delta(x),$$

$$G_\Delta(x) = \lambda \int_a^b K(x, t) E_\Delta(t)\, dt - E_\Delta(x).$$

Если функции $f(x)$ и $K(x, t)$ принадлежат классу $C^\alpha[a, b]$ $(\alpha = 0, 1, 2, 3)$, то

$$E_\Delta(x) = o(\|\Delta\|^\alpha).$$

Дальше мы делаем почти то же, что в предыдущем разделе в случае линейного дифференциального уравнения: полагаем $G_\Delta(x_j) = 0$ $(j = 0, 1, \ldots, N)$ и находим $y_0, y_1, \ldots, y_N$ из уравнений

$$\sum_{i=0}^{N} y_i A_{\Delta, i}(x_j) = f(x_j) + \lambda \int_a^b K(x_j, t) \sum_{i=0}^{N} y_i A_{\Delta, i}(t)\, dt \qquad (j = 0, 1, \ldots, N).$$

Интегралы

$$I_{ji} = \lambda \int_a^b K(x_j, t) A_{\Delta, i}(t)\, dt$$

определяем точно, если это возможно (заметим, что $A_{\Delta,i}$ — кусочно кубический полином), или же вычисляем приближенно. В последнем случае можно, например, каждую функцию $K(x_j, t)$ заменить интерполяционным сплайном, и тогда, поскольку фундаментальные сплайны $A_{\Delta,i}(t)$ известны, для вычисления этих интегралов потребуется лишь небольшая дополнительная работа.

Итак, нам необходимо решить следующую систему уравнений:

$$\begin{bmatrix} I_{00}-1 & I_{01} & I_{02} & \dots & I_{0N} \\ I_{10} & I_{11}-1 & I_{12} & \dots & I_1 \\ I_{20} & I_{21} & I_{22}-1 & \dots & I_{2N} \\ \vdots & & & \dots & \\ I_{N0} & I_{N1} & I_{N2} & \dots & I_{NN}-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_0 \\ -f_1 \\ -f_2 \\ \vdots \\ -f_N \end{bmatrix}.$$

Если 1 не является собственным значением однородного интегрального уравнения, то доказательство сходимости найденных так сплайнов к точному решению при $\| \Delta \| \to 0$ опирается на соответствующее доказательство для случая, в котором для приближенного интегрирования применяется правило трапеций (см. Гурса и Бергман [1]).

С алгебраической точки зрения при применении к интегральным уравнениям сплайны обычно проще брать в стандартной форме (2.1.2). В качестве примера рассмотрим интегральное уравнение, связанное с двухточечной краевой задачей (2.7.8):

$$y(x) = 1 + \int_0^1 K(x, t)\, y(t)\, dt, \tag{2.8.2}$$

где

$$K(x, t) = \begin{cases} \alpha^2 (x-1)\, t & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant x, \\ \alpha^2 x\, (t-1) & \text{при } x \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Заменим $y(x)$ сплайном $S_\Delta(x)$, определяемым из соотношений

$$y_i = 1 + \alpha^2 (x_i - 1) \int_0^{x_i} tS_\Delta(t)\, dt + \alpha^2 x_i \int_{x_i}^1 (t-1)\, S_\Delta(t)\, dt$$

$$(i = 0, 1, \dots, N).$$

Так как $y_0 = y_N = 1$, то число уравнений можно уменьшить на 2. Для $0 < i < N$ имеем

$$y_i = 1 + \alpha^2 (x_i - 1) \sum_{j=1}^{i} \left\{ M_{j-1} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{(x_j - t)^3\, t\, dt}{6h_j} + M_j \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{(t - x_{j-1})^3\, t\, dt}{6h_j} + \right.$$

$$+ \left(y_{j-1} - M_{j-1}\frac{h_j^2}{6}\right) \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{t(x_j - t)}{h_j}\, dt + \left(y_j - M_j \frac{h_j^2}{6}\right) \left. \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{t(t - x_{j-1})}{h_j}\, dt \right\} +$$

$$+\alpha^2 x_i \sum_{j=i+1}^{N} \left\{ M_{j-1} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (t-1)\frac{(x_j-t)^3}{6h_j}\,dt + M_j \int_{x_{j-1}}^{x_j} (t-1)\frac{(t-x_{j-1})^3}{6h_j}\,dt + \right.$$

$$+\left(y_{j-1} - M_{j-1}\frac{h_j^2}{6}\right) \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{(t-1)(x_j-t)}{h_j}\,dt +$$

$$\left. +\left(y_j - M_{j-1}\frac{h_j^2}{6}\right) \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{(t-1)(t-x_{j-1})}{h_j}\,dt \right\}.$$

После вычисления интегралов получаем для равномерной сетки ($h_j = h$, $j = 1, \ldots, N$; $Nh = 1$)

$$y_i = 1 - \alpha^2 (N-1) \left\{ h^5 \left[-\frac{1}{12} \sum_{j=1}^{i=1} jM_j - \frac{1}{24} iM_i - \frac{7}{360}(M_0 - M_i) \right] + \right.$$

$$\left. + h^3 \left[\sum_{j=1}^{i-1} jy_j + \frac{1}{2} iy_i + \frac{1}{6}(y_0 - y_i) \right] \right\} -$$

$$-\alpha^2 i \left\{ h^5 \left[-\frac{1}{12} \sum_{j=i+1}^{N-1} (N-j) M_j - \frac{1}{24}(N-i) M_i - \frac{7}{360}(M_N - M_i) \right] + \right.$$

$$\left. + h^3 \left[\sum_{j=i+1}^{N-1} (N-j) y_j + \frac{N-i}{2} y_i + \frac{1}{6}(y_N - y_i) \right] \right\}.$$

Умножая соответствующие члены 2, 3, ..., i-го уравнений системы (2.1.8) на 1, 2, ..., $(i-1)$ и складывая их, находим:

$$\sum_{j=1}^{i-1} jM_j = \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{2} M_0 + \frac{1}{2} iM_{i-1} - \frac{1}{2}(i-1) M_i \right] + \frac{1}{h^2}[y_0 - iy_{i-1} + (i-1) y_i].$$

Аналогично

$$\sum_{j=i+1}^{N-1} (N-j) M_j = \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{2} M_N + \frac{1}{2}(N-i) M_{i+1} - \frac{1}{2}(N-i-1) M_i \right] +$$

$$+ \frac{1}{h^2}[y_N - (N-i) y_{i+1} + (N-i-1) y_i].$$

Применяя соотношения (2.1.5), связывающие M_{i-1}, M_i, M_{i+1}, получаем

$$\frac{(N-i)\,i}{72} M_{i-1} + \left[\frac{(N-i)\,i}{18} - \frac{N}{180} \right] M_i + \frac{(N-i)\,i}{72} M_{i+1} =$$

$$= -\frac{N}{180} M_i + \frac{(N-i)\,i}{12} \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

Заметим, что $M_0=\alpha^2 y_0=\alpha^2=y''(0)$, $M_N=\alpha^2 y_N=\alpha^2=y''(1)$ и, следовательно, выполняются краевые условия (2.1.18ii).

Величина M_i выражается через $y_1, \ldots, y_{N-1}$ с помощью равенства (2.4.11), в котором A_{ij}^{-1} определяются (разд. 2.4) для краевых условий (ii):

$$M_i=A_{i0}^{-1}\left(\alpha^2+\frac{6}{h^2}\right)-\frac{18}{h^2}\sum_{j=0}^{N}A_{ij}^{-1}y_j+\frac{6}{h^2}y_i+A_{iN}^{-1}\left(\alpha^2+\frac{6}{h^2}\right).$$

При четном N получаем для y_i $(i=1, 2, \ldots, N/2)$ следующую систему уравнений:

$$y_i=1+\frac{\alpha^4h^4}{180}\left(1-\frac{\theta_i}{2}\right)+\frac{\alpha^2h^2}{30}\left(\theta_i-\frac{5}{2}\right)+\frac{\alpha^2h^2}{20}y_i+$$

$$+\frac{\alpha^2h^2}{10}\left\{\sum_{j=1}^{i}(\varphi_j\theta_i-10j)\,y_j+\sum_{j=i+1}^{N/2-1}(\varphi_i\theta_j-10i)\,y_j+\frac{1}{2}(\varphi_i\theta_{N/2}-10i)\,y_{N/2}\right\},$$

где

$$\theta_i=\frac{\sigma^{N/2-i}+\sigma^{i-N/2}}{\sigma^{N/2}+\sigma^{-N/2}},\qquad \varphi_i=\frac{\sigma^{-i}-\sigma^{i}}{2+\sigma}.$$

В табл. 2.8.1 приведено для сравнения точное решение (см. разд. 2.7) при $N=20$.

Таблица 2.8.1

x	Точное значение y	Приближенное решение, построенное с помощью сплайнов
0,00	1,00000	1,00000
0,05	0,60657	0,60656
0,10	0,36799	0,36802
0,15	0,22332	0,22334
0,20	0,13566	0,13568
0,25	0,08263	0,08264
0,30	0,05070	0,05070
0,35	0,03170	0,03170
0,40	0,02079	0,02080
0,45	0,01520	0,01520
0 50	0,01348	0,01348

Из равенства (2.8.2) видно, что в рассмотренном примере $y''(x)-\alpha^2y(x)=0$. В общем случае краевые условия для сплайна можно найти, продифференцировав интегральное уравнение и получив тем самым ограничения на M_0 и M_N.

Рассмотренный пример охватывает значительную часть схемы, применяемой в общем случае, когда для приближенного вычисления требуемых интегралов само ядро $K(x, t)$ при каждом фиксированном x_i заменяется интерполяционным сплайном.

2.9. Дополнительные теоремы существования и сходимости

Существование интерполяционного сплайна доказано в разд. 2.2 в предположении, что в системе (2.1.8) $|\lambda_0| < 2$ и $|\mu_N| < 2$, или при аналогичных ограничениях на систему (2.1.16). Чтобы расширить эти результаты, необходимо детальнее исследовать свойства матрицы коэффициентов систем (2.1.8) и (2.1.16). Сейчас мы закончим доказательство общей теоремы существования.

Теорема 2.9.1. *Периодический сплайн $S_\Delta(x)$ с заданными ординатами $y_0, y_1, \ldots, y_N = y_0$ в узлах сетки Δ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ всегда существует. Непериодический сплайн, удовлетворяющий краевым условиям* (2.1.18iii) [*или* (2.1.19iii)], *существует, если* $\lambda_0 < 4$ *и* $\mu_N < 4$ (*или* $\mu_0 < 4$ *и* $\lambda_N < 4$).

Чтобы завершить доказательство, остается рассмотреть непериодический случай, в котором $\lambda_0 < 4$ и $\mu_N < 4$. (Случай $\mu_0 < 4$ и $\lambda_N < 4$ эквивалентен рассматриваемому.) Для $k > j$ положим

$$D(\lambda_j, \ldots, \lambda_k) = \begin{vmatrix} 2 & \lambda_j & & & & \\ 1-\lambda_{j+1} & 2 & \lambda_{j+1} & & & \\ & \ldots & & & & \\ & & 1-\lambda_{k-1} & 2 & \lambda_{k-1} & \\ & & & 1-\lambda_k & 2 & \end{vmatrix} \tag{2.9.1}$$

и условимся, что этот определитель равен 2, 1, 0 при $k = j$, $k = j-1$, $k = j-2$ соответственно. Разложим определитель (2.9.1) по правилу Лапласа ($k \geqslant j+1$):

$$D(\lambda_j, \ldots, \lambda_k) = D(\lambda_j, \lambda_{j+1})\, D(\lambda_{j+2}, \ldots, \lambda_k) - 2\lambda_{j+1}(1-\lambda_{j+2})\, D(\lambda_{j+3}, \ldots, \lambda_k), \tag{2.9.2}$$

или, в терминах непрерывных дробей,

$$\frac{D(\lambda_{j+2}, \ldots, \lambda_k)}{D(\lambda_j, \ldots, \lambda_k)} = \left\{ D(\lambda_j, \lambda_{j+1}) - \frac{2\lambda_{j+1}(1-\lambda_{j+2})\, D(\lambda_{j+3}, \ldots, \lambda_k)}{D(\lambda_{j+2}, \ldots, \lambda_k)} \right\}^{-1} = \frac{1}{D(\lambda_j, \lambda_{j+1})} \frac{2\lambda_{j+1}(1-\lambda_{j+2})}{2 -} \frac{\lambda_{j+2}(1-\lambda_{j+3})}{2 -} \cdots \frac{\lambda_{k-1}(1-\lambda_k)}{2}. \tag{2.9.3}$$

Это соотношение между трехдиагональными матрицами (континуальными матрицами) и непрерывными дробями указано Эйткеном [1, стр. 126].

В гиперкубе $0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1$ ($j \leqslant i \leqslant k$) левая часть равенства (2.9.3) представляет собой дробно линейную функцию каждого из своих аргументов. По теореме Гершгорина в этом гиперкубе ее знаменатель отличен от нуля. Если $\lambda_j = \ldots = \lambda_k = 0$, то $D(\lambda_j, \ldots, \lambda_k) = 2^{k-j+1}$ ($k \geqslant j-1$). Таким

образом, функция $D(\lambda_j, \ldots, \lambda_k)$ положительна в гиперкубе и принимает там свое наибольшее и наименьшее значения в точках, в которых λ_i равно 0 или 1 для всех i.

Если $\lambda_{j+1} = 0$, то левая часть равенства (2.9.3) равна $1/(4 - \lambda_j)$. Если $\lambda_{j+1} = 1$, то она равна 1/3 или 1/4 в зависимости от того, 0 или 1 равно λ_{j+2}. Следовательно, если $0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1$ $(j \leqslant i \leqslant k)$, то

$$\frac{1}{4} \leqslant \frac{D(\lambda_{j+2}, \ldots, \lambda_k)}{D(\lambda_j, \ldots, \lambda_k)} \leqslant \frac{1}{3}. \tag{2.9.4}$$

Заметим, что

$$3 \leqslant D(\lambda_j, \lambda_{j+1}) \leqslant 4,$$
$$6 \leqslant D(\lambda_j, \lambda_{j+1}, \lambda_{j+2}) \leqslant 8,$$

и по индукции докажем следующую лемму.

Л е м м а 2.9.1. *Если* $0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1$ $(j \leqslant i \leqslant k)$ *и* $k > j$, *то*

$$\left.\begin{array}{l} 3^{(k-j+1)/2}, \quad k-j \text{ нечетно}, \\ 2 \cdot 3^{(k-j)/2}, \quad k-j \text{ четно}, \end{array}\right\} \leqslant D(\lambda_j, \ldots, \lambda_k) \leqslant 2^{k-j+1}. \tag{2.9.5}$$

Разложим определитель $D = D(\lambda_0, \ldots, \lambda_N)$ матрицы коэффициентов системы (2.1.8) сначала по элементам первой строки, а затем по элементам последней строки:

$$D = 4D(\lambda_1, \ldots, \lambda_{N-1}) - 2\lambda_0(1-\lambda_1) D(\lambda_2, \ldots, \lambda_{N-1}) -$$
$$- \mu_N \lambda_{N-1} D(\lambda_1, \ldots, \lambda_{N-2}) + \lambda_0(1-\lambda_1)\lambda_{N-1}\mu_N D(\lambda_2, \ldots, \lambda_{N-2}). \tag{2.9.6}$$

Отсюда найдем:

$$D = \begin{cases} (4-\lambda_0)(4-\lambda_N) D(\lambda_2, \ldots, \lambda_{N-2}) & \text{для } \lambda_1 = 0,\ \lambda_{N-1} = 1, \\ 2(4-\lambda_0) D(\lambda_2, \ldots, \lambda_{N-2}, 0) & \text{для } \lambda_1 = 0,\ \lambda_{N-1} = 0, \\ 2(4-\lambda_N) D(1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{N-2}) & \text{для } \lambda_1 = 1,\ \lambda_{N-1} = 1, \\ 4D(1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{N-2}, 0) & \text{для } \lambda_1 = 1,\ \lambda_{N-1} = 0. \end{cases}$$

Из неравенства (2.9.5) для $\lambda_0 < 4$ и $\mu_N < 4$ следует, что определитель D матрицы коэффициентов системы (2.1.8) удовлетворяет неравенству

$$D \geqslant [\min(3, 4-\lambda_0)] \cdot [\min(3, 4-\mu_N)] \cdot \left\{\begin{array}{l} 3^{(N-3)/2}, \quad N \text{ нечетно}, \\ 2 \cdot 3^{(N-4)/2}, \quad N \text{ четно}, \end{array}\right\} > 0. \tag{2.9.7}$$

Теорема полностью доказана.

Распространим теперь теоремы 2.3.2 и 2.3.3 на более общие краевые условия. Для этой цели надо использовать свойства элементов обратной матрицы, которые и сами по себе представляют значительный интерес. Эти свойства связаны со скоростью убывания величины элементов обратной матрицы по мере их удаления от главной диагонали.

Элементы матрицы A^{-1}, обратной к матрице коэффициентов системы (2.1.8), можно найти непосредственно из алгебраических дополнений матрицы A. Таким образом,

$$A^{-1}_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{D(\lambda_0, \ldots, \lambda_{i-1})\lambda_i\lambda_{i+1} \ldots \lambda_{j-1} D(\lambda_{j+1}, \ldots, \lambda_N)}{D} \qquad (0 \leqslant i \leqslant j \leqslant N),$$

$$A^{-1}_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{D(\lambda_0, \ldots, \lambda_{j-1})(1-\lambda_{j+1}) \ldots (1-\lambda_i) D(\lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_N)}{D} \qquad (0 \leqslant j \leqslant i \leqslant N), \tag{2.9.8}$$

где $\lambda_N = 1 - \mu_N$ и D — определитель матрицы коэффициентов.

Нам нужны две леммы о свойствах этих элементов. Разложим определитель $D(\lambda_j, \ldots, \lambda_k)$ для $j < k$ по минорам первой строки:

$$D(\lambda_j, \ldots, \lambda_k) = 2D(\lambda_{j+1}, \ldots, \lambda_k) - (1 - \lambda_j)\lambda_{j+1} D(\lambda_{j+2}, \ldots, \lambda_k).$$

При $D(\lambda_j, \ldots, \lambda_k) \neq 0$ имеем

$$\frac{D(\lambda_{j+1}, \ldots, \lambda_k)}{D(\lambda_j, \ldots, \lambda_k)} = \left\{2 - \frac{\lambda_j(1-\lambda_{j+1}) D(\lambda_{j+2}, \ldots, \lambda_k)}{D(\lambda_{j+1}, \ldots, \lambda_k)}\right\}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\lambda_j(1-\lambda_{j+1})}{2-} \frac{\lambda_{j+1}(1-\lambda_{j+2})}{2-} \ldots \frac{\lambda_{k-1}(1-\lambda_k)}{2}.$$

Это отношение равно $1/2$, если $\lambda_{j+1} = 1$, и $2/(4 - \lambda_j)$, если $\lambda_{j+1} = 0$. Кроме того, оно является билинейной функцией каждого из своих аргументов. Если $0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1$ для $j < i < k$ и $\lambda_j < 4$, $\mu_k < 4$, то знаменатель положителен. Тогда можно показать, что

$$\min\left[\frac{1}{2}, \frac{2}{4-\lambda_j}\right] \leqslant \frac{D(\lambda_{j+1}, \ldots, \lambda_k)}{D(\lambda_j, \ldots, \lambda_k)} \leqslant \max\left[\frac{1}{2}, \frac{2}{4-\lambda_j}\right]. \tag{2.9.9}$$

Разложив определитель $D(\lambda_j, \ldots, \lambda_k)$ по минорам последней строки, получим для $0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1$ $(j < i < k)$ и $\lambda_j < 4$, $\mu_k < 4$ неравенство

$$\min\left[\frac{1}{2}, \frac{2}{4-\mu_k}\right] \leqslant \frac{D(\lambda_j, \ldots, \lambda_{k-1})}{D(\lambda_j, \ldots, \lambda_k)} \leqslant \min\left[\frac{1}{2}, \frac{2}{4-\mu_k}\right]. \tag{2.9.10}$$

Анализируя доказательство неравенства (2.9.4), нетрудно заметить, что при $0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1$ $(j < i < k)$ и $\lambda_j < 4$, $\mu_k < 4$

$$\min\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{4-\lambda_j}\right] \leqslant \frac{D(\lambda_{j+2}, \ldots, \lambda_k)}{D(\lambda_j, \ldots, \lambda_k)} \leqslant \max\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{4-\lambda_j}\right]. \tag{2.9.11}$$

При тех же самых условиях аналогичным образом выводим неравенство

$$\min\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{4-\mu_k}\right] \leqslant \frac{D(\lambda_j, \ldots, \lambda_{k-2})}{D(\lambda_j, \ldots, \lambda_k)} \leqslant \max\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{4-\mu_k}\right]. \tag{2.9.12}$$

Сформулируем первую из нужных нам лемм.

Лемма 2.9.2. *Для* $\lambda_0 < 4$, $0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1\ (0 < i < N)$, $\mu_N < 4$ *и любого целого* p, $0 < p < N$,

$$2^{-p} \min\left[1, \frac{4}{4-\lambda_0}\right] \leqslant \frac{D(\lambda_p, \ldots, \lambda_N)}{D(\lambda_0, \ldots, \lambda_N)} \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} \max\left[\frac{1}{2}, \frac{2}{4-\lambda_0}\right] 3^{-(p-1)/2}, & p \text{ нечетно}, \\ \max\left[1, \frac{3}{4-\lambda_0}\right] 3^{-p/2}, & p \text{ четно}, \end{cases} \tag{2.9.13}$$

$$2^{-(N-p)} \min\left[1, \frac{4}{4-\mu_N}\right] \leqslant \frac{D(\lambda_0, \ldots, \lambda_p)}{D(\lambda_0, \ldots, \lambda_N)} \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} \max\left[\frac{1}{2}, \frac{2}{4-\mu_N}\right] 3^{-(N-p-1)/2}, & N-p \text{ нечетно}, \\ \max\left[1, \frac{3}{4-\mu_N}\right] 3^{-(N-p)/2}, & N-p \text{ четно}, \end{cases} \tag{2.9.14}$$

где $\mu_N = 1 - \lambda_N$.

Доказательство. Для нечетного p

$$\frac{D(\lambda_p, \ldots, \lambda_N)}{D(\lambda_0, \ldots, \lambda_N)} = \frac{D(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)}{D(\lambda_0, \ldots, \lambda_N)} \prod_{j=1}^{(p-1)/2} \frac{D(\lambda_{2j+1}, \ldots, \lambda_N)}{D(\lambda_{2j-1}, \ldots, \lambda_N)}.$$

В силу неравенств (2.9.9) и (2.9.11) это отношение заключено между величинами

$$\min\left[\frac{1}{2}, \frac{2}{4-\lambda_0}\right]\left(\frac{1}{4}\right)^{(p-1)/2}, \quad \max\left[\frac{1}{2}, \frac{2}{4-\lambda_0}\right]\left(\frac{1}{3}\right)^{(p-1)/2}.$$

Для четного p

$$\frac{D(\lambda_p, \ldots, \lambda_N)}{D(\lambda_0, \ldots, \lambda_N)} = \prod_{j=1}^{p/2} \frac{D(\lambda_{2j}, \ldots, \lambda_N)}{D(\lambda_{2j-2}, \ldots, \lambda_N)},$$

и в силу неравенства (2.9.11) это отношение заключено между величинами

$$\min\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{4-\lambda_0}\right]\left(\frac{1}{4}\right)^{p/2-1}, \quad \max\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{4-\lambda_0}\right]\left(\frac{1}{3}\right)^{p/2-1}.$$

Неравенство (2.9.13) доказано. Из (2.9.10) и (2.9.12) аналогично выводится неравенство (2.9.14).

Следует отметить, что неравенства (2.9.13) и (2.9.14) точные, так как при подходящих значениях λ_i они обращаются в равенства.

Лемма 2.9.3. *Для* $\lambda_0 < 4$, $0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1$ $(0 < i < N)$, $\mu_N < 4$ *и целых* p, q, $0 < p < q < N$,

$$2^{-(q-p-1)} \leqslant \frac{D(\lambda_0, \ldots, \lambda_p)\, D(\lambda_q, \ldots, \lambda_N)}{D(\lambda_0, \ldots, \lambda_N)} \leqslant \begin{cases} 4 \cdot 3^{(q-p+1)/2}, & q-p \text{ нечетно}, \\ 2 \cdot 3^{-(q-p)/2}, & q-p \text{ четно}. \end{cases} \tag{2.9.15}$$

Доказательство. Разложим определитель $D(\lambda_0, \ldots, \lambda_N)$ по правилу Лапласа:

$$D(\lambda_0, \ldots, \lambda_N) = D(\lambda_0, \ldots, \lambda_p)\, D(\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_N) - \\ - D(\lambda_0, \ldots, \lambda_{p-1})\, \lambda_p (1 - \lambda_{p+1})\, D(\lambda_{p+2}, \ldots, \lambda_N). \qquad (2.9.16)$$

Если $0 \leqslant p \leqslant q - 2$ и $q \leqslant N$, то это разложение можно записать в виде

$$D(\lambda_0, \ldots, \lambda_N) = D(\lambda_0, \ldots, \lambda_p)\, D(\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_{q-1})\, D(\lambda_q, \ldots, \lambda_N) - \\ - D(\lambda_0, \ldots, \lambda_p)\, D(\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_{q-2})\, \lambda_{q-1}(1 - \lambda_q)\, D(\lambda_{q+1}, \ldots, \lambda_N) - \\ - D(\lambda_0, \ldots, \lambda_{p-1})\, \lambda_p (1 - \lambda_{p+1})\, D(\lambda_{p+2}, \ldots, \lambda_{q-1})\, D(\lambda_q, \ldots, \lambda_N) + \\ + D(\lambda_0, \ldots, \lambda_{p-1})\, \lambda_p (1 - \lambda_{p+1})\, D(\lambda_{p+2}, \ldots, \lambda_{q-2})\, \lambda_{q-1}(1 - \\ - \lambda_q)\, D(\lambda_{q+1}, \ldots, \lambda_N), \qquad (2.9.17)$$

при этом мы считаем, что $D(\lambda_i, \ldots, \lambda_j) = 0$, если $j = i - 2$. Средний член неравенства (2.9.15) при $0 < p < q - 2$ и $q < N$ равен

$$\{D(\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_{q-1})\}^{-1} \qquad \text{для } \lambda_p = 0 \text{ и } \lambda_q = 1,$$

$$\left\{D(\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_{q-1}) - \frac{1}{2}\lambda_{q-1} D(\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_{q-2})\right\}^{-1} \qquad \text{для } \lambda_p = 0 \text{ и } \lambda_q = 0,$$

$$\left\{D(\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_{q-1}) - \frac{1}{2}(1 - \lambda_{p+1})\, D(\lambda_{p+2}, \ldots, \lambda_{q-1})\right\}^{-1} \qquad \text{для } \lambda_p = 1 \text{ и } \lambda_q = 1,$$

$$\left\{D(\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_{q-1}) - \frac{1}{2}\lambda_{q-1} D(\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_{q-2}) - \frac{1}{2}(1 - \lambda_{p+1})\, D(\lambda_{p+2}, \ldots, \lambda_{q-1}) + \right. \\ \left. + \frac{1}{4}\lambda_{q-1}(1 - \lambda_{p+1})\, D(\lambda_{p+2}, \ldots, \lambda_{q-2})\right\}^{-1} \qquad \text{для } \lambda_p = 1 \text{ и } \lambda_q = 0.$$

Здесь использованы соотношения $D(0, \lambda_{j+1}, \ldots, \lambda_k) = 2D(\lambda_{j+1}, \ldots, \lambda_k)$, $D(\lambda_j, \ldots, \lambda_{k-1}, 1) = 2D(\lambda_j, \ldots, \lambda_{k-1})$. Рассматривая случаи $\lambda_{p+1} = 0$, $\lambda_{p+1} = 1$, $\lambda_{q-1} = 0$, $\lambda_{q-1} = 1$ и учитывая неравенства (2.9.9) и (2.9.10), получаем

$$\{D(\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_{q-1})\}^{-1} \leqslant \frac{D(\lambda_0, \ldots, \lambda_p)\, D(\lambda_q, \ldots, \lambda_N)}{D(\lambda_0, \ldots, \lambda_N)} \leqslant \frac{4}{9}\{D(\lambda_{p+2}, \ldots, \lambda_{q-2})\}^{-1}.$$

Для завершения доказательства осталось применить лемму 2.9.1.

Распространим теперь теоремы 2.3.2 и 2.3.3 на более общие краевые условия:

Теорема 2.9.2. *Пусть на отрезке* $[a, b]$ *заданы функция* $f(x)$ *из класса* $C^1[a, b]$ *и последовательность сеток* $\{\Delta_k\}$, $\|\Delta_k\| \to 0$ *при* $k \to \infty$. *Пусть сплайн* $S_{\Delta_k}(x)$ *интерполирует функцию* $f(x)$ *в узлах сетки* Δ_k *и удовлетворяет краевым условиям* (2.1.19iii), *и пусть* $\inf\limits_k (4 - \mu_{k0}) > 0$, $\inf\limits_k (4 - \lambda_{kN_k}) > 0$ *и последовательности* $\{\mu_{k0}\}$ *и* $\{\lambda_{kN_k}\}$ *ограничены при* $k \to \infty$.

а) *Если* $\varepsilon'_k = c_{k0} - (2+\mu_{k0}) f'(a) \to 0$ *и* $\varepsilon''_k = c_{kN_k} - (2+\lambda_{kN_k}) f'(b) \to 0$ *при* $k \to \infty$, *то* $S'_{\Delta_k}(x)$ *сходится к* $f'(x)$ *равномерно относительно* x *на* $[a, b]$ *и*

$$f^{(p)}(x) - S^{(p)}_{\Delta_k}(x) = o(\|\Delta_k\|)^{1-p} \qquad (p = 0, 1) \tag{2.9.18}$$

равномерно относительно x *на* $[a, b]$.

b) *Если последовательности* $\{c_{k0}\}$ *и* $\{c_{kN_k}\}$ *ограничены при* $k \to \infty$, *то равенство* (2.9.18) *справедливо на любом замкнутом отрезке, принадлежащем интервалу* (a, b), *и* $S_{\Delta_k}(x) \to f(x)$ *равномерно относительно* x *на* $[a, b]$.

Доказательство. а) Введем в рассмотрение квадратную матрицу G_k порядка $N_k + 1$

$$G_k = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{9}(1-\mu_{k0}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \dots & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & \dots & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{9}(1-\lambda_{kN_k}) & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

и запишем систему (2.1.16) в виде

$$B_k m_k - B_k G_k c_k = (I_k - B_k G_k) c_k, \tag{2.9.19}$$

где I_k — единичная матрица порядка $N_k + 1$ и B_k — матрица коэффициентов системы (2.1.16), соответствующей сетке Δ_k. Правая часть равенства (2.9.19) представляет собой вектор

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3}\left(c_{k0} - \frac{2+\mu_{k0}}{3} c_{k1}\right) \\ -\frac{\lambda_{k1}}{3}\left(c_{k0} - \frac{2+\mu_{k0}}{3} c_{k1}\right) + \frac{\mu_{k1}}{3}(c_{k1} - c_{k2}) \\ -\frac{\lambda_{k2}}{3}(c_{k1} - c_{k2}) + \frac{\mu_{k2}}{3}(c_{k2} - c_{k3}) \\ \vdots \\ -\frac{\lambda_{kN_k-1}}{3}(c_{kN_k-2} - c_{kN_k-1}) - \frac{\mu_{kN_k-1}}{3}\left(c_{kN_k} - \frac{2+\lambda_{kN_k}}{3} c_{kN_k-1}\right) \\ \frac{1}{3}\left(c_{kN_k} - \frac{2+\lambda_{kN_k}}{3} c_{kN_k-1}\right) \end{bmatrix}. \tag{2.9.20}$$

Заметим, что величина $^1/_3 c_{ki}$ $(0<i<N)$ равна значению производной $f'(\xi)$ в некоторой точке ξ из интервала (x_{i-1}, x_{i+1}). Таким образом, норма вектора (2.9.20) не превосходит большей из двух величин

$$\frac{1}{3}|\varepsilon_k'| + \frac{2+\mu_{k0}}{3} 2\omega(\|\Delta_k\|, f') + 3\omega(\|\Delta_k\|, f'),$$

$$\frac{1}{3}|\varepsilon_k''| + \frac{2+\lambda_{kN_k}}{3} 2\omega(\|\Delta_k\|, f') + 3\omega(\|\Delta_k\|, f').$$

Из равенств (2.9.8) и леммы 2.9.3 вытекает, что нормы $\|B_k^{-1}\|$ ограничены относительно k. Таким образом, в силу (2.9.19)

$$\|m_k - G_k c_k\| \to 0$$

при $k \to \infty$. Следовательно, $\|G_k c_k - [f'(x_{k0}), f'(x_{k1}), \ldots, f'(x_{kN_k})]\| \to 0$, поскольку

$$\frac{1}{3} c_{k0} + \frac{1-\mu_{k0}}{9} c_{k1} - f'(a) = \frac{1}{3}\varepsilon_k' + \frac{1-\mu_{k0}}{3}\left[\frac{1}{3} c_{k1} - f'(a)\right],$$

$$\frac{1}{3} c_{kN_k} + \frac{1-\lambda_{kN_k}}{9} c_{kN_k-1} - f'(b) = \frac{1}{3}\varepsilon_k'' + \frac{1-\lambda_{kN_k}}{3}\left[\frac{1}{3} c_{kN_k-1} - f'(b)\right].$$

Заключительная часть доказательства проводится точно по схеме доказательства теоремы 2.3.2.

b) Пусть выполнены условия второй части теоремы. Для отрезка $[a', b'] \subset (a, b)$ по крайней мере $n_k' = 1 + (a' - a)/\|\Delta_k\|$ точек сетки Δ_k лежат слева от точки a' и по крайней мере $n_k'' = 1 + (b - b')/\|\Delta_k\|$ точек сетки Δ_k лежат справа от точки b' (учитываются также и точки, совпадающие с a' и b'). При образовании сумм, которые представляют компоненты вектора $m_k - G_k c_k$ из равенства (2.9.19), связанные с узлами сетки из отрезка $[a', b']$, мы видим, что первая, вторая, предпоследняя и последняя компоненты вектора (2.9.20) умножаются на величины, не превосходящие соответственно

$$(1-\lambda_{k1})\ldots(1-\lambda_{kn_k'}) \max\left\{1, \frac{4}{4-\mu_{k0}}\right\} \cdot 3^{-(n_k'+1)/2},$$

$$2(1-\lambda_{k2})\ldots(1-\lambda_{kn_k'}) \max\left\{1, \frac{4}{4-\mu_{k0}}\right\} \cdot 3^{-n_k'/2},$$

$$2\lambda_{kN_k-n_k''}\ldots\lambda_{kN_k-2} \max\left\{1, \frac{4}{4-\lambda_{kN_k}}\right\} \cdot 3^{-n_k''/2},$$

$$\lambda_{kN_k-n_k''}\ldots\lambda_{kN_k-1} \max\left\{1, \frac{4}{4-\lambda_{kN_k}}\right\} \cdot 3^{-(n_k''+1)/2}$$

(см. равенства (2.9.8) и лемму 2.9.2). Так как n_k' и n_k'' неограниченно возрастают при $k \to \infty$, то

$$\lim_{k\to\infty}\left\{\max_{a'\leqslant x_{kj}\leqslant b'} |m_{kj} - f'(x_{kj})|\right\} = 0.$$

Равномерная сходимость на отрезке $[a', b']$ последовательностей $\{S_{\Delta_k}(x)\}$ и $\{S'_{\Delta_k}(x)\}$ соответственно к функциям $f(x)$ и $f'(x)$ устанавливается обычным образом.

Чтобы установить равномерную сходимость на отрезке $[a, b]$ последовательности $\{S_{\Delta_k}(x)\}$ к функции $f(x)$, заметим, что при выполнении условия b) из метода доказательства случая a) следует, что величины m_{kj} равномерно ограничены относительно k. Отсюда равномерная сходимость последовательности $\{S_{\Delta_k}(x)\}$ к функции $f(x)$ вытекает непосредственно из (2.1.10). Отметим, что член, содержащий y_{kj-1} и y_{kj}, является кубическим полиномом с экстремумами в точках x_{kj-1} и x_{kj} и, следовательно, изменяется монотонно между этими точками.

Справедливость следующих утверждений очевидна.

Следствие 2.9.2.1. *Пусть выполняются условия теоремы* 2.9.2. *Если* $f'(x)$ *удовлетворяет на* $[a, b]$ *условию Липшица порядка* α $(0 < \alpha \leqslant 1)$ *и* $\varepsilon'_k = O(\|\Delta_k\|^{\alpha})$, *то правую часть равенства* (2.9.18) *можно заменить на* $O(\|\Delta_k\|^{1+\alpha-p})$ $(p = 0, 1)$.

Следствие 2.9.2.2. *Если производная* $f'(x)$ *существует, ограничена для всех* $x \in [a, b]$ *и непрерывна на отрезке* $[a', b'] \subset (a, b)$, *то* $S'_{\Delta_k}(x) \to f'(x)$ *равномерно на* $[a', b']$ *и* $S_{\Delta_k}(x) \to f(x)$ *равномерно на* $[a, b]$.

Теорема 2.9.3 доказывается точно так же, как теорема 2.9.2. Мы ограничимся здесь лишь ее формулировкой.

Теорема 2.9.3. *Пусть на отрезке* $[a, b]$ *заданы функция* $f(x)$ *из класса* $C^2[a, b]$ *и последовательность сеток* $\{\Delta_k\}$, $\|\Delta_k\| \to 0$ *при* $k \to \infty$. *Пусть сплайн* $S_{\Delta_k}(x)$ *интерполирует функцию* $f(x)$ *в узлах сетки* Δ_k *и удовлетворяет краевым условиям* (2.1.18iii), *и пусть* $\inf\limits_k (4 - \lambda_{k0}) > 0$, $\inf\limits_k (4 - \mu_{kN_k}) > 0$ *и последовательности* $\{\lambda_{k0}\}$ *и* $\{\mu_{kN_k}\}$ *ограничены относительно* k.

a) *Если* $\varepsilon'_k = d_{k0} - (2 + \lambda_{k0}) f''(a) \to 0$ *и* $\varepsilon''_k = d_{kN_k} - (2 + \mu_{kN_k}) f''(b) \to 0$ *при* $k \to \infty$, *то* $S''_{\Delta_k}(x)$ *сходится равномерно на* $[a, b]$ *к* $f''(x)$ *и*

$$|f^{(p)}(x) - S^{(p)}_{\Delta_k}(x)| = o(\|\Delta_k\|^{2-p}) \qquad (p = 0, 1, 2) \tag{2.9.21}$$

равномерно относительно x *на* $[a, b]$.

b) *Если последовательности* $\{d_{k0}\}$ *и* $\{d_{kN_k}\}$ *ограничены относительно* k, *то равенство* (2.9.21) *справедливо на любом отрезке* $[a', b'] \subset (a, b)$. *Более того, последовательности* $\{S'_{\Delta_k}(x)\}$ *и* $\{S_{\Delta_k}(x)\}$ *сходятся равномерно на* $[a, b]$ *к функциям* $f'(x)$ *и* $f(x)$ *соответственно.*

Справедливы также аналоги двух предыдущих следствий.

Следствие 2.9.3.1. *Пусть выполняются условия теоремы* 2.9.3. *Если* $f''(x)$ *удовлетворяет на отрезке* $[a, b]$ *условию Липшица порядка* α $(0 < \alpha \leqslant 1)$ *и* $\varepsilon'_k = O(\|\Delta_k\|^{\alpha})$, $\varepsilon''_k = O(\|\Delta_k\|^{\alpha})$, *то правую часть равенства* (2.9.21) *можно заменить на* $O(\|\Delta_k\|^{2+\alpha-p})$ $(p = 0, 1, 2)$.

Следствие 2.9.3.2. *Если вторая производная* $f''(x)$ *существует, ограничена для всех* $x \in [a, b]$ *и непрерывна на* $[a', b'] \subset (a, b)$, *то* $S''_{\Delta_k}(x) \to f''(x)$ *равномерно на* $[a', b']$ *и* $S^{(p)}_{\Delta_k}(x) \to f^{(p)}(x)$ *равномерно на* $[a, b]$ *для* $p = 0, 1$.

Очевидно, что можно установить ряд других аналогичных результатов. Например, существование второй производной $f''(x)$ можно заменить равномерной ограниченностью разностных отношений. Можно доказать сходимость в единственной точке, если известно, что в этой точке существует вторая производная (Алберг, Нильсон [3]).

Займемся теперь третьей и четвертой производными.

Теорема 2.9.4. *Пусть на отрезке* $[a, b]$ *заданы функция* $f(x)$ *из класса* $C^3(a, b]$ *и последовательность сеток* $\{\Delta_k\}$, *удовлетворяющая условиям*

$$\lim_{k\to\infty} \|\Delta_k\| = 0, \qquad \sup_k \frac{\|\Delta_k\|}{\min\limits_j (x_{kj} - x_{kj-1})} = \beta < \infty.$$

Пусть сплайн $S_{\Delta_k}(x)$ *интерполирует функцию* $f(x)$ *в узлах сетки* Δ_k *и удовлетворяет краевым условиям* (2.1.18iii), *и пусть* $\inf\limits_k (4 - \lambda_{k0}) > 0$, $\inf\limits_k (4 - \mu_{kN_k}) > 0$. *и последовательности* $\{\lambda_{k0}\}$ *и* $\{\mu_{kN_k}\}$ *ограничены относительно* k. *Если величины*

$$\varepsilon'_k = \frac{(2-\lambda_{k0})\, d_{k1} - 3d_{k0}}{h_{k1} + h_{k2}} - [(4 - \lambda_{k0})\, \mu_{k1} + (2 + \lambda_{k0})\, \lambda_{k1}]\, f'''(a),$$

$$\varepsilon''_k = \frac{3d_{kN_k} - (2 + \mu_{kN_k})\, d_{kN_k-1}}{h_{kN-1} + h_{kN}} -$$

$$- [(4 - \mu_{kN_k})\, \lambda_{kN_k-1} + (2 + \mu_{kN_k})\, \lambda_{kN_k-1}]\, f'''(b)$$

стремятся к нулю при $k \to \infty$, *то для* $x \in [a, b]$

$$|f^{(p)}(x) - S^{(p)}_{\Delta_k}(x)| = o(\|\Delta_k\|^{3-p}) \qquad (p = 0, 1, 2, 3).$$

Если, кроме того, $f'''(x)$ *удовлетворяет условию Липшица порядка* α $(0 < \alpha \leqslant 1)$ *и обе величины* ε'_k *и* ε''_k *равны* $O(\|\Delta_k\|^{\alpha})$, *то на отрезке* $[a, b]$

$$|f^{(p)}(x) - S^{(p)}_{\Delta_k}(x)| = O(\|\Delta_k\|^{3+\alpha-p}) \qquad (p = 0, 1, 2, 3).$$

Доказательство. Заменим первое и последнее уравнения системы (2.3.21) уравнениями (опущен индекс сетки k):

$$[6 - (2 + \lambda_0)\, \mu_1]\, \mu_1\sigma_1 + (2 + \lambda_0)\, \lambda_1^2\sigma_2 = \frac{(2+\lambda_0)\, d_1 - 3d_0}{h_1 + h_2},$$

$$(2 + \mu_N)\, \mu_{N-1}^2\sigma_{N-1} + [6 - (2 + \mu_N)\, \lambda_{N-1}]\, \lambda_{N-1}\sigma_N = \frac{3d_N - (2+\mu_N)\, d_{N-1}}{h_{N-1} + h_N}.$$

Если матрицу коэффициентов новой системы разложить аналогично матрице C системы (2.3.21), то будет снова EDF. При этом матрица D будет иметь вид

$$\begin{bmatrix} 6-(2+\lambda_0)\mu_1 & (2+\lambda_0)\lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mu_1 & 1+\mu_1+\lambda_2 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_{N-2} & 1+\mu_{N-2}+\lambda_{N-1} & \lambda_{N-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & (2+\mu_N)\mu_{N-1} & 6-(2+\mu_N)\lambda_{N-1} \end{bmatrix}.$$

У этой матрицы главная диагональ доминирует; обратная к ней матрица равномерно ограничена, если $\inf\limits_k (4-\lambda_{k0}) > 0$ и $\inf\limits_k (4-\mu_{kN_k}) > 0$. Итак, величина $\| C^{-1} \|$ равномерно ограничена.

Образуем матрицу H порядка N_k:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1-[(4-\lambda_0)\mu_1+(2+\lambda_0)\lambda_1] & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1-[(4-\mu_N)\lambda_{N-1}+(2+\mu_N)\mu_{N-1}] & 1 \end{bmatrix}.$$

Обозначим вектор

$$\begin{bmatrix} \dfrac{(2-\lambda_0)d_1-3d_0}{h_1+h_2} \\ \dfrac{d_2-d_1}{h_1+h_2+h_3} \\ \vdots \\ \dfrac{d_{N-1}-d_{N-2}}{h_{N-2}+h_{N-1}+h_N} \\ \dfrac{3d_N-(2+\mu_N)d_{N-1}}{h_{N-1}+h_N} \end{bmatrix}$$

через r; тогда

$$C(\sigma - Hr) = (I - CH)r;$$

правая часть представляет собой вектор

$$\begin{bmatrix} [1-6\mu_1+(2+\lambda_0)\mu_1^2]\{r_1-[(4-\lambda_0)\mu_1+(2+\lambda_0)\lambda_1]r_2\} \\ -\frac{\mu_1^2\mu_2}{1-\mu_1\lambda_2}\{r_1-[(4-\lambda_0)\mu_1+(2+\lambda_0)\lambda_1]r_2\}-\frac{\lambda_1\lambda_2^2}{1-\mu_1\lambda_2}(r_3-r_2) \\ \frac{\mu_2^2\mu_3}{1-\mu_2\lambda_3}(r_3-r_2)-\frac{\lambda_2\lambda_3^2}{1-\mu_2\lambda_3}(r_4-r_3) \\ \vdots \\ \frac{\mu_{N-2}^2\mu_{N-1}}{1-\mu_{N-2}\lambda_{N-1}}(r_{N-1}-r_{N-2})+\frac{\lambda_{N-2}\lambda_{N-1}^2}{1-\mu_{N-2}\lambda_{N-1}}\{r_N-[(4-\mu_N)\lambda_{N-1}+(2+\mu_N)\mu_{N-1}]r_{N-1}\} \\ [1-6\lambda_{N-2}+(2+\mu_N)\lambda_{N-1}^2]\{r_N-[(4-\mu_N)\lambda_{N-1}+(2+\mu_N)\mu_{N-1}]r_{N-1}\} \end{bmatrix}.$$

Скорость, с которой величина $\| (I - CH) r \|$ стремится к нулю, теперь очевидна, и утверждения теоремы следуют из ограниченности $\| C^{-1} \|$.

В заключение приведем довольно любопытное свойство сходимости к $f^{(4)}(x)$. Ради простоты рассмотрим лишь случаи периодических кубических сплайнов, хотя соответствующие рассуждения проходят и для непериодического сплайна.

Рассмотрим скачок третьей производной сплайна в точке x_j и положим

$$\delta_j := \frac{\sigma_{j+1}-\sigma_j}{h_j+h_{j+1}}.$$

Величины σ_j удовлетворяют уравнениям

$$\begin{bmatrix} \frac{(1+\mu_N+\lambda_1)\lambda_N\mu_1}{1-\mu_N\lambda_1} & \frac{\lambda_N\lambda_1^2}{1-\mu_N\lambda_1} & 0 & \dots & \frac{\mu_N^2\mu_1}{1-\mu_N\lambda_1} \\ \frac{\mu_1^2\mu_2}{1-\mu_1\lambda_2} & \frac{(1+\mu_1+\lambda_2)\lambda_1\mu_2}{1-\mu_1\lambda_2} & \frac{\lambda_1\lambda_2^2}{1-\mu_1\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \frac{\lambda_{N-1}\lambda_N^2}{1-\mu_{N-1}\lambda_N} & \dots & 0 & \frac{\mu_{N-1}^2\mu_N}{1-\mu_{N-1}\lambda_N} & \frac{(1+\mu_{N-1}+\lambda_N)\lambda_{N-1}\mu_N}{1-\mu_{N-1}\lambda_N} \end{bmatrix}$$

$$\cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_N \end{bmatrix}.$$

Вычтем из $(j+1)$-го уравнения j-е и новое уравнение разделим на $h_{j-1} + h_j + h_{j+1} + h_{j+2}$: имеем

$$D\delta = g, \tag{2.9.22}$$

где $g_k/6$ есть четвертая разделенная разность $f[x_{j-2}, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, x_{j+2}]$, $D=$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\lambda_N\lambda_1\mu_1\mu_2(\theta_1+\theta_2)}{\lambda_N\lambda_1+\mu_1\mu_2} & \frac{\lambda_N\lambda_1^2\lambda_2^2\theta_2}{\lambda_N\lambda_1+\mu_1\mu_2} & 0 & \dots & \frac{\mu_N^2\mu_1^2\mu_2\theta_1}{\lambda_N\lambda_1+\mu_1\mu_2} \\ \frac{\mu_1^2\mu_2^2\mu_3\theta_2}{\lambda_1\lambda_2+\mu_2\mu_3} & \frac{\lambda_1\lambda_2\mu_2\mu_3(\theta_2+\theta_3)}{\lambda_1\lambda_2+\mu_2\mu_3} & \frac{\lambda_1\lambda_2^2\lambda_3^2\theta_3}{\lambda_1\lambda_2+\mu_2\mu_3} & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \frac{\lambda_{N-1}\lambda_N^2\lambda_1^2\theta_1}{\lambda_{N-1}\lambda_N+\mu_N\mu_1} & \dots & 0 & \frac{\mu_{N-1}^2\mu_N^2\mu_1\theta_N}{\lambda_{N-1}\lambda_N+\mu_N\mu_1} & \frac{\lambda_{N-1}\lambda_N\mu_N\mu_1(\theta_N+\theta_1)}{\lambda_{N-1}\lambda_N+\mu_N\mu_1} \end{bmatrix}.$$

и $\theta_j=(1-\mu_{j-1}\lambda_j)^{-1}$. Умножим строки матрицы D на

$$\frac{\lambda_N\lambda_1+\mu_1\mu_2}{\mu_1^2\mu_2}, \frac{(\lambda_1\lambda_2+\mu_2\mu_3)\lambda_N^2\lambda_1}{(\mu_1\mu_2)^2\mu_3}, \dots, \frac{(\lambda_{N-2}\lambda_{N-1}+\mu_{N-1}\mu_N)(\lambda_N\lambda_1\dots\lambda_{N-3})^2\lambda_{N-2}}{(\mu_1\dots\mu_{N-1})^2\mu_N} =$$
$$= \frac{(\lambda_{N-2}\lambda_{N-1}+\mu_{N-1}\mu_N)\mu_N}{\lambda_{N-1}^2\lambda_{N-2}}, \frac{\lambda_{N-1}\lambda_N+\mu_N\mu_1}{\lambda_{N-1}\mu_1},$$

а столбцы — на

$$\frac{\mu_1}{\lambda_N^2\lambda_1}, \frac{\mu_1^2\mu_2}{(\lambda_N\lambda_1)^2\lambda_2}, \dots, \frac{(\mu_1\dots\mu_{N-2})^2\mu_{N-1}}{(\lambda_N\lambda_1\dots\lambda_{N-2})^2\lambda_{N-1}} = \frac{\lambda_{N-1}}{\mu_{N-1}\mu_N^2}, \frac{1}{\lambda_N\mu_N}.$$

Напомним, что в периодическом случае $\lambda_1\dots\lambda_N=\mu_1\dots\mu_N$. В результате получим матрицу

$$\begin{bmatrix} \theta_1+\theta_2 & \lambda_2\theta_2 & 0 & \dots & 0 & \mu_N\theta_1 \\ \mu_1\theta_2 & \theta_2+\theta_3 & \lambda_3\theta_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_{N-2}\theta_{N-1} & \theta_{N-1}+\theta_N & \lambda_N\theta_N \\ \lambda_1\theta_1 & 0 & \dots & 0 & \mu_{N-1}\theta_N & \theta_N+\theta_1 \end{bmatrix}.$$

Если для рассматриваемых сеток Δ_k выполняется неравенство $\| \Delta_k \|/\min_j h_j \leqslant \beta < \infty$, то норма обратной матрицы $\| D^{-1} \|$ равномерно ограничена относительно k. Обозначим через G_j сумму элементов j-й строки матрицы D:

$$G_j = \frac{\mu_{j-1}^2\mu_j^2\mu_{j+1}\theta_j+\lambda_{j-1}\mu_j\mu_{j+1}(\theta_j+\theta_{j+1})+\lambda_{j-1}\lambda_j^2\lambda_{j+1}^2\theta_{j+1}}{\lambda_{j-1}\lambda_j+\mu_j\mu_{j+1}} =$$
$$= \frac{(\mu_{j-1}^2\mu_j/\lambda_{j-1}\lambda_j)\theta_j+\theta_j+\theta_{j+1}+(\lambda_j\lambda_{j+1}^2/\mu_j\mu_{j+1})\theta_{j+1}}{(1/\mu_j\mu_{j+1})+(1/\lambda_{j-1}\lambda_j)}.$$

Если сетки Δ_k при $k\to\infty$ стремятся к асимптотически равномерным, т. е.

$$\max_j \left| \lambda_j - \frac{1}{2} \right| \to 0,$$

то

$$\max_j \left| G_j - \frac{1}{2} \right| \to 0.$$

Вообще пусть G — диагональная матрица с диагональным элементом G_j на j-й строке. Тогда у матрицы $G^{-1}D - I$ сумма элементов каждой строки равна нулю.

Запишем уравнение (2.9.22) в виде

$$D\delta - G^{-1}Dg = (I - G^{-1}D)\, g.$$

Пусть четвертая производная $f^{(4)}(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Величина $4g_j$ отличается от $f^{(4)}(x_j)$ на $O(\| \Delta \|)$. Таким образом, $\| (I - G^{-1}D)\, g \| \to 0$ при $\| \Delta \| \to 0$. Так как норма обратной матрицы $\| D^{-1} \|$ равномерно ограничена, то очевидно, что $\| \delta - D^{-1}G^{-1}Dg \| \to 0$. Если при $\| \Delta \| \to 0$ сетки стремятся к асимптотически равномерным, то $\| \delta - 2g \| \to 0$. Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема 2.9.5. *Пусть на отрезке* $[a, b]$ *заданы функция* $f(x)$ *из класса* $C^4[a, b]$ *и последовательность сеток* $\{\Delta_k\}$, *удовлетворяющая условиям* $\lim\limits_{k\to\infty} \| \Delta_k \| = 0$ *и* $\sup\limits_k \| \Delta_k \| / \min\limits_j h_{kj} = \beta < \infty$. *Если эти сетки при* $k \to \infty$ *стремятся к асимптотически равномерным, то*

$$\lim_{k\to\infty} \left[\max_j \left| \frac{S'''_{\Delta_k}(x_{kj}+0) - S'''_{\Delta_k}(x_{kj}-0)}{\| \Delta_k \|} - f^{(4)}(x_{kj}) \right| \right] = 0.$$

Глава III. ВНУТРЕННИЕ СВОЙСТВА КУБИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ

3.1. Свойство минимальной нормы

Изложение теории кубических сплайнов в гл. II не выясняет их внутренней структуры. Исторически эта внутренняя структура сплайнов оказалась хорошо скрытой; прошло более десятилетия после введения сплайнов Шёнбергом [1], прежде чем было открыто первое из их внутренних свойств. Это свойство, называемое *свойством минимальной нормы*, было установлено Холлидеем [1]. Прежде чем сформулировать и доказать теорему Холлидея, мы введем некоторые понятия и обозначения.

Через $\mathcal{K}^n(a, b)$ будем обозначать класс функций $f(x)$, определенных на отрезке $[a, b]$, имеющих абсолютно непрерывную $(n-1)$-ю производную и n-ю производную, принадлежащую пространству $L^2(a, b)$. Через $\mathcal{K}_p^n(a, b)$ обозначим подкласс функций из $\mathcal{K}^n(a, b)$, которые вместе со своими $n-1$ первыми производными имеют непрерывное периодическое продолжение с периодом $b-a$ на числовую прямую $(-\infty, \infty)$.

Функция $f(x)$ принадлежит типу I′, если ее первая производная обращается в нуль при $x = a$ и $x = b$. Две функции принадлежат одному и тому же классу эквивалентности типа I, если их разность принадлежит типу I′. Сплайн $S(x)$ можно различными способами представить с помощью конечного числа параметров. Если в качестве двух таких параметров в представлении сплайна приняты $S'(a)$ и $S'(b)$, то говорят, что представление имеет тип I и сплайн $S(x)$ принадлежит типу I. Аналогично говорят, что функция $f(x)$ принадлежит типу II′, если ее вторая производная обращается в нуль при $x = a$ и $x = b$. Две функции принадлежат одному и тому же классу эквивалентности типа II, если их разность принадлежит типу II′. Представлением типа II для сплайна $S(x)$ называется представление, в которое явно входят $S''(a)$ и $S''(b)$. Говорят, что сплайн $S(x)$ принадлежит типу II, если он представлен таким способом. Понятие типа облегчает дальнейшее исследование кубических сплайнов; позднее при рассмотрении сплайнов, отличных от кубических, это понятие будет видоизменено.

Теорема 3.1.1 о свойстве минимальной нормы сформулирована здесь в несколько более общем виде по сравнению с первоначальной формулировкой, но ее доказательство не отличается от доказательства, данного Холлидеем.

Теорема 3.1.1. *Пусть даны сетка* Δ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ *и последовательность* $Y = \{y_i\}$ $(i = 0, 1, \ldots, N)$. *Среди всех функций* $f(x) \in \mathcal{K}^2(a, b)$, *для которых* $f(x_i) = y_i$, *кубический сплайн* $S_\Delta(Y; x)$ *типа* II

минимизирует интеграл

$$\int_a^b |f''(x)|^2\,dx.$$

Более того, сплайн $S_\Delta(Y; x)$ *— единственная допустимая функция, минимизирующая этот интеграл.*

Доказательство. Если $f(x) \in \mathscr{K}^2(a, b)$ и $f(x_i) = y_i$, то

$$\int_a^b |f''(x)-S''_\Delta(Y; x)|^2\,dx = \int_a^b |f''(x)|^2\,dx - 2\int_a^b f''(x)\,S''_\Delta(Y; x)\,dx + \int_a^b |S''_\Delta(Y; x)|^2\,dx =$$

$$= \int_a^b |f''(x)|^2\,dx - 2\int_a^b \{f''(x)-S''_\Delta(Y; x)\}\,S''_\Delta(Y; x)\,dx - \int_a^b |S''_\Delta(Y; x)|^2\,dx.$$

Далее,

$$\int_a^b \{f''(x)-S''_\Delta(Y; x)\}\,S''_\Delta(Y; x)\,dx = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} \{f''(x)-S''_\Delta(Y; x)\}\,S''_\Delta(Y; x)\,dx$$

и

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \{f''(x)-S''_\Delta(Y; x)\}\,S''_\Delta(Y; x)\,dx =$$

$$= \{f'(x)-S'_\Delta(Y; x)\}\,S''_\Delta(Y; x)\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \{f'(x)-S'_\Delta(Y; x)\}\,S'''_\Delta(Y; x)\,dx =$$

$$= \{f'(x)-S'_\Delta(Y; x)\}\,S''_\Delta(Y; x)\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \{f(x)-S_\Delta(Y; x)\}\,S'''_\Delta(Y; x)\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} =$$

$$= \{f'(x)-S'_\Delta(Y; x)\}\,S''_\Delta(Y; x)\Big|_{x_{i-1}}^{x_i},$$

так как функция $S'''_\Delta(Y; x)$ постоянна на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ и $f(x_i) = S_\Delta(Y; x_i) = y_i$ $(i = 0, 1, \ldots, N)$. В силу непрерывности произведения $\{f'(x)-S'_\Delta(Y; x)\}\,S''_\Delta(Y; x)$ на $[a, b]$

$$\int_a^b \{f''(x)-S''_\Delta(Y; x)\}\,S''_\Delta(Y; x)\,dx = \sum_{i=1}^N \{f'(x)-S'_\Delta(Y; x)\}\,S''_\Delta(Y; x)\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} =$$

$$= \{f'(x)-S'_\Delta(Y; x)\}\,S''_\Delta(Y; x)\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} = 0.$$

Последнее равенство справедливо, так как по условию сплайн $S_\Delta(Y; x)$ принадлежит типу II′. Отсюда следует, что

$$\int_a^b |f''(x)|^2\,dx - \int_a^b |S''_\Delta(Y; x)|^2\,dx = \int_a^b |f''(x) - S''_\Delta(Y; x)|^2\,dx. \qquad (3.1.1)$$

Правая часть равенства (3.1.1) обращается в нуль, только если $S''_\Delta(Y; x) = f''(x)$, т. е. если $S_\Delta(Y; x) \equiv f(x) + Ax + B$. Так как по условию $S_\Delta(Y; x_i) = f(x_i)$ $(i = 0, 1, \ldots, N)$, то равенство возможно лишь, когда $S_\Delta(Y; x) = f(x)$. Теорема доказана. Равенство (3.1.1) называют *первым интегральным соотношением.*

Содержание теоремы Холлидея предвидели в какой-то мере еще первые исследователи упругих балок, начиная с Бернулли и Эйлера (см. Сокольников [1, стр. 1]), но абстрактная формулировка, простота доказательства Холлидея и интегральное соотношение (3.1.1), доказанное этим методом, являются важным достижением. Однако Холлидей не продолжил эту тему дальше и не исследовал далеко идущие следствия первого интегрального соотношения.

3.2. Свойство наилучшего приближения

Введем в $\mathscr{K}^2(a, b)$ полунорму

$$\|f\| = \left\{\int_a^b |f''(x)|^2\,dx\right\}^{1/2}$$

и для фиксированной функции $f(x) \in \mathscr{K}^2(a, b)$ рассмотрим $\|f - S_\Delta\|$, где $S_\Delta(x)$ — кубический сплайн заданного типа, определяемый фиксированной сеткой Δ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$. Возникает вопрос: минимизирует ли сплайн $S_\Delta(x)$, интерполирующий функцию $f(x)$ на сетке Δ, величину $\|f - S_\Delta(x)\|$? В разд. 2.2 для некоторых важных случаев на этот вопрос дан положительный ответ; мы сформулируем результат для периодического случая.

Теорема 3.2.1. *Пусть даны сетка* Δ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ *и функция* $f(x) \in \mathscr{K}_p^2(a, b)$. *Среди всех периодических кубических сплайнов* $S_\Delta(x)$ *интерполяционный сплайн* $S_\Delta(f; x)$ *минимизирует* $\|f - S_\Delta\|$. *Если сплайн* $\bar{S}_\Delta(x)$ *также минимизирует* $\|f - S_\Delta\|$, *то* $\bar{S}_\Delta(x) = S_\Delta(f; x) + \text{const}$.

Доказательство теоремы 3.2.1, содержащееся в разд. 2.2, классическое; оно использует определение стационарных точек. В разд. 3.4 мы обобщим рассуждения Холлидея и приведем изящное доказательство, которое обходит определение стационарных точек и распространяется с периодического случая не только на сплайны типа I и II, но и на сплайны, не являющиеся простыми. Сейчас мы не будем давать полное определение простого сплайна, а скажем

лишь, что кубический сплайн называется *простым*, если он принадлежит классу $C^2(a, b)$.

Свойство, выраженное теоремой 3.2.1, называют *свойством наилучшего приближения* (Алберг, Нильсон, Уолш [1]). Подобно свойству минимальной нормы и другим важным внутренним свойствам, исследуемым нами дальше, его можно получить в качестве простого следствия из первого интегрального соотношения, которое само (как видно из доказательства Холлидея свойства минимальной нормы) следует из очень общего тождества, справедливого при выполнении определенных условий. Это тождество играет важную роль в теории сплайнов и полезно в случаях, когда методы, подобные методу стандартной минимизации, примененному при доказательстве теоремы 3.2.1, становятся очень громоздкими. Однако, если прямые методы (такие, как в гл. II) применить можно, они обычно дают более точные результаты. Это, в частности, относится к скоростям сходимости. Сейчас мы получим указанное тождество в явном виде и используем его в качестве краеугольного камня в теории сплайнов.

3.3. Основное тождество

Мы сможем вывести вышеупомянутое тождество и в то же время сделать более ясными условия, при которых справедливо первое интегральное соотношение, если, как и в рассуждении Холлидея, дважды проинтегрируем по частям интеграл

$$\int_a^b \{D^2 f(x) - D^2 S_\Delta(x)\} D^2 S_\Delta(x)\, dx.$$

Новое обозначение $D^2 f(x)$ вместо $f''(x)$ поможет сделать обобщения в гл. VI более естественными. В результате двукратного интегрирования по частям на каждом интервале (x_{i-1}, x_i) сетки Δ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ имеем

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \{D^2 f(x) - D^2 S_\Delta(x)\} D^2 S_\Delta(x)\, dx = \{Df(x) - DS_\Delta(x)\} D^2 S_\Delta(x) \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} -$$

$$- \{f(x) - S_\Delta(x)\} D^3 S_\Delta(x) \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \{f(x) - S_\Delta(x)\} D^4 S_\Delta(x)\, dx =$$

$$= \{Df(x) - DS_\Delta(x)\} D^2 S_\Delta(x) \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \{f(x) - S_\Delta(x)\} D^3 S_\Delta(x) \Big|_{x_{i-1}}^{x_i},$$

так как $D^4 S_\Delta(x) \equiv 0$, если $x \in (x_{i-1}, x_i)$. Поэтому в силу непрерывности $\{Df(x) - DS_\Delta(x)\} D^2 S_\Delta(x)$ на $[a, b]$

$$\int_a^b \{D^2 f(x) - D^2 S_\Delta(x)\} D^2 S_\Delta(x)\, dx =$$

$$= \{Df(x) - DS_\Delta(x)\} D^2 S_\Delta(x) \Big|_a^b - \sum_{i=1}^{N} \{f(x) - S_\Delta(x)\} D^3 S_\Delta(x) \Big|_{x_{i-1}}^{x_i}. \quad (3.3.1)$$

Обычно функция $D^3S_\Delta(x)$ претерпевает разрывы в узлах сетки Δ; это вызывает появление суммы

$$\sum_{i=1}^{N} \{f(x) - S_\Delta(x)\} D^3 S_\Delta(x) \Big|_{x_{i-1}}^{x_i}.$$

Заменим в тождестве

$$\| f-g \|^2 = \| f \|^2 - 2\int_a^b \{D^2 f(x) - D^2 g(x)\} D^2 g(x)\, dx - \| g \|^2 \qquad (3.3.2)$$

$g(x)$ на $S_\Delta(x)$ и воспользуемся равенством (3.3.1); получим *основное тождество*

$$\| f - S_\Delta \|^2 = \| f \|^2 - 2\left[\{Df(x) - DS_\Delta(x)\} D^2 S_\Delta(x) \Big| - \right.$$
$$\left. - \sum_{i=1}^{N} \{f(x) - S_\Delta(x)\} D^3 S_\Delta(x) \Big|_{x_{i-1}}^{x_i}\right] = \| S_\Delta \|^2, \qquad (3.3.3)$$

справедливое для любой функции $f(x)$ из класса $\mathscr{K}^2(a, b)$ и для любого простого сплайна $S_\Delta(x)$, определенного на произвольной сетке Δ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$.

3.4. Первое интегральное соотношение

Если $S_\Delta(x) = S_\Delta(f; x) + \text{const}$, то в основном тождестве сумма

$$\sum_{i=1}^{N} \{f(x) - S_\Delta(x)\} D^3 S_\Delta(x) \Big|_{x_{i-1}}^{x_i}$$

обращается в нуль. Если, кроме того, $f(x) \in \mathscr{K}_p^2(a, b)$ и $S_\Delta(x) \in \mathscr{K}_p^2(a, b)$, или $f(x) - S_\Delta(x)$ принадлежит типу I′, или $S_\Delta(x)$ принадлежит типу II′, то основное тождество сводится к первому интегральному соотношению. Ясно, что эти условия лишь достаточные, а не необходимые, так как, в частности, можно потребовать, чтобы выполнялись краевые условия смешанного типа. Можно не требовать непрерывности $S''_\Delta(x)$ и все же получить первое интегральное соотношение, если предположить, что первая производная сплайна $S'_\Delta(x)$ интерполирует $f'(x)$ в узлах сетки Δ; даже это не исчерпывает всех возможностей. Учитывая эти замечания, получаем теорему 3.4.1 как прямое следствие основного тождества.

Теорема 3.4.1. *Если функция $f(x)$ принадлежит классу $\mathscr{K}^2(a, b)$, сплайн $S_\Delta(f; x)$ интерполирует ее на сетке Δ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ и выполнено любое из условий*: a) *функция $f(x)$ и сплайн $S_\Delta(f; x)$ периодические*, b) *разность $f(x) - S_\Delta(f; x)$ принадлежит типу* I′, c) *сплайн $S_\Delta(f; x)$ принадлежит типу* II′, *то*

$$\| f \|^2 = \| S_{\Delta, f} \|^2 + \| f - S_{\Delta, f} \|^2.$$

В свете теоремы 3.4.1 пересмотрим теоремы 3.1.1 и 3.2.1. Если сплайны $S_\Delta(Y; x)$ и $S_\Delta(f; x)$ принадлежат типу II′, то по теореме 3.1.1 $S_\Delta(Y; x) \equiv S_\Delta(f; x)$ для любой функции $f(x) \in \mathscr{K}^2(a, b)$, для которой $f(x_i) = y_i$ $(i = 0, 1, \ldots, N)$.

Далее, по теореме 3.4.1

$$\| f \|^2 - \| S_{\Delta, Y} \|^2 = \| f - S_{\Delta, Y} \|^2 \geqslant 0.$$

Следовательно, для любой функции $f(x)$, удовлетворяющей условиям $f(x_i) = y_i$ $(i = 0, 1, \ldots, N)$ и принадлежащей классу $\mathcal{K}^2(a, b)$,

$$\int_a^b | S''_\Delta (Y; x) |^2 \, dx \leqslant \int_a^b | f'' (x) |^2 \, dx,$$

причем равенство здесь имеет место тогда и только тогда, когда $S''_\Delta (f; x) = f'' (x)$. Таким образом, свойство минимальной нормы непосредственно следует из первого интегрального соотношения. Как мы уже видели, метод доказательства этого соотношения указан Холлидеем.

Если $y_0 = y_N$ и функция $f(x)$ вместе со сплайном $S_\Delta (x)$ принадлежит классу $\mathcal{K}^2_p (a, b)$, то из теоремы 3.4.1 вытекает следующая теорема.

Теорема 3.4.2. *Пусть даны сетка* $\Delta: a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ *и последовательность* $Y \equiv \{y_i \mid i = 0, 1, \ldots, N; y_0 = y_N\}$. *Среди всех функций* $f(x) \in \mathcal{K}^2_p (a, b)$, *для которых* $f(x_i) = y_i$ $(i = 0, 1, \ldots, N)$, *периодический сплайн* $S_\Delta (Y; x)$ *минимизирует интеграл*

$$\int_a^b | f'' (x) |^2 \, dx.$$

Более того, он является единственной допустимой функцией, минимизирующей этот интеграл.

Заметим, что если $y_0 = y_N$, $S_\Delta (Y; x)_p$ — периодический интерполяционный сплайн для Y, а $S_\Delta (Y; x)$ — соответствующий сплайн типа II′, то

$$\int_a^b | S''_\Delta (Y; x) |^2 \, dx \leqslant \int_a^b | S''_\Delta (Y; x)_p |^2 \, dx,$$

причем равенство выполняется только тогда, когда

$$S_\Delta (Y; x)_p \equiv S_\Delta (Y; x) + Ax + B \equiv S_\Delta (Y; x),$$

так как сплайны $S_\Delta (Y; x)_p$ и $S_\Delta (Y; x)$ принимают одно и то же значение в точках $x = a$ и $x = b$. В этом смысле теорема 3.1.1 сильнее, чем теорема 3.4.2.

Сформулируем еще один аналог теоремы 3.1.1.

Теорема 3.4.3. *Пусть даны сетка* $\Delta: a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ *и последовательность* $Y = \{y'_0, y'_N, y_i \mid i = 0, 1, \ldots, N\}$. *Среди всех функций* $f(x)$, *принадлежащих* $\mathcal{K}^2(a, b)$ *и удовлетворяющих условиям* $f(x_i) = y_i$ $(i = 0, 1, \ldots, N)$ *и* $f'(x_i) = y'_i$ $(i = 0, N)$, *сплайн* $S_\Delta (Y; x)$ *типа* I *минимизирует*

зирует интеграл

$$\int_a^b | f''(x) |^2 \, dx. \tag{3.4.1}$$

Более того, он является единственной допустимой функцией, минимизирующей этот интеграл.

Доказательство. Все, кроме единственности, следует непосредственно из теоремы 3.4.1. Для доказательства единственности заметим, что если функция $g(x)$ также удовлетворяет условиям теоремы 3.4.3 и минимизирует интеграл 3.4.1, то в силу теоремы 3.4.1

$$\| g - S_{\Delta, Y} \|^2 = \| g \|^2 - \| S_{\Delta, Y} \|^2 = 0,$$

или $g(x) \equiv S_\Delta(Y; x) + Ax + B \equiv S_\Delta(Y; x)$, ибо $g^{(\alpha)}(a) = S_\Delta^{(\alpha)}(Y; a)$ $(\alpha = 0, 1)$. Если опущено условие $S'_\Delta(Y; x_i) = y'_i$ $(i = 0, N)$, то сплайн типа II′, интерполирующий на сетке Δ последовательность Y, минимизирует интеграл (3.4.1).

Сплайн $S_\Delta(x)$ данного типа линейно зависит от своих значений в узлах сетки Δ и от значений своих производных в точках $x = a$ и $x = b$. Это вытекает из равенств (2.1.2), (2.1.8) и (2.1.9). Следовательно, при различного рода условиях

$$S_\Delta(f + g; x) = S_\Delta(f; x) + S_\Delta(g; x), \tag{3.4.2}$$

хотя это разложение, вообще говоря, не единственно. Укажем полезные наборы краевых условий, при выполнении которых разложение (3.4.2) не только справедливо, но и единственно:

a) все разности $S_\Delta(f; x) - f(x)$, $S_\Delta(g; x) - g(x)$ и $S_\Delta(f + g; x) - f(x) - g(x)$ принадлежат типу I′;

b) все сплайны $S_\Delta(f; x)$, $S_\Delta(g; x)$ и $S_\Delta(f + g; x)$ принадлежат типу II′;

c) все сплайны $S_\Delta(f; x)$, $S_\Delta(g; x)$ и $S_\Delta(f + g; x)$ периодические.

В частности, для некоторых краевых условий на $S_\Delta(f - S_\Delta; x)$ и $S_\Delta(f; x)$

$$S_\Delta(f - S_\Delta; x) = S_\Delta(f; x) - S_\Delta(x). \tag{3.4.3}$$

Так, если сплайн $S_\Delta(f - S_\Delta; x)$ периодический, принадлежит типу II′ или таков, что $S_\Delta(f - S_\Delta; x) - f(x) + S_\Delta(x)$ принадлежит типу I′, то справедливо не только равенство (3.4.3), но и основное тождество и оно записывается в виде

$$\| f - S_\Delta \|^2 - \| S_{\Delta, f - s_\Delta} \|^2 = \| f - S_\Delta - S_{\Delta, f - s_\Delta} \|^2 =$$
$$= \| f - S_\Delta - S_{\Delta, f} + S_\Delta \|^2 = \| f - S_{\Delta, f} \|^2.$$

Отсюда следует, что $\| f - S_\Delta \| \geqslant \| f - S_{\Delta, f} \|$. Если сплайн $S_\Delta(f - S_\Delta; x)$ принадлежит типу II′, то можно изменить условие b) и все же сохранить раз-

ложение (3.4.2), потребовав лишь, чтобы разность $S_\Delta(f; x) - S_\Delta(x)$ принадлежала типу II′. Это доказывает теорему 3.4.4, обобщающую теорему 3.2.1. Заметим, что наиболее сильный результат получается, когда $f(x) - S_\Delta(f; x)$ принадлежит типу I′, ибо в этом случае на $S_\Delta(x)$ не налагается никаких условий.

Теорема 3.4.4. *Пусть даны сетка* $\Delta: a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ *и функция* $f(x)$ *из класса* $\mathcal{K}^2(a, b)$. *Если сплайны* $S_\Delta(x)$ *и* $S_\Delta(f; x)$ *удовлетворяют одному из условий*: а) $f(x)$, $S_\Delta(x)$ *и* $S_\Delta(f; x)$ *принадлежат классу* $\mathcal{K}_p^2(a, b)$, b) $S_\Delta(x) - S_\Delta(f; x)$ *принадлежит типу* II′, c) $f(x) - S_\Delta(f; x)$ *принадлежит типу* I′, *то*

$$\|f - S_\Delta\| \geqslant \|f - S_{\Delta,f}\|.$$

Если здесь выполняется равенство, то $S_\Delta(x) \equiv S_\Delta(f; x) + Ax + B$ (*в периодическом случае* $A = 0$).

Разложение (3.4.2) следует из существования такого множества параметров, от которых сплайн $S_\Delta(x)$ зависит линейно и которые вместе с требованиями непрерывности полностью определяют сплайн $S_\Delta(x)$. Эти параметры называют *определяющими значениями*.

3.5. Единственность

При обсуждении единственности и существования различных сплайнов в настоящей главе мы опирались до сих пор на результаты гл. II. Все сформулированные теоремы справедливы и их справедливость не зависит ни от существования, ни от единственности, хотя, если бы не было по крайней мере существования, теоремы были бы пустыми. Многие теоремы существования и единственности из гл. II получены относительно просто, благодаря наличию у соответствующих матриц доминирующей главной диагонали. Фактически некоторые важнейшие свойства ограниченности матриц, нужные при доказательстве теорем сходимости в гл. II, были также получены из этой доминантности, а из-за ее отсутствия в случае сплайнов более высокой нечетной степени в гл. IV установлены весьма ограниченные теоремы существования и единственности. В гл. V мы обойдем эти трудности, применив первое интегральное соотношение (в более общей форме).

Чтобы продемонстрировать применение первого интегрального соотношения, докажем с его помощью основные теоремы существования и единственности для кубических сплайнов.

Теорема 3.5.1. *Пусть даны сетка* $\Delta: a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ *и функция* $f(x)$. *Если выполнено любое из условий*: а) *функция* $f(x)$ *и сплайн* $S_\Delta(f; x)$ *периодические*, b) $f(x) - S_\Delta(f; x)$ *принадлежит типу* I′, c) $f(x) - S_\Delta(f; x)$ *принадлежит типу* II′, *то интерполяционный сплайн* $S_\Delta(f; x)$ *является единственным.*

Доказательство. Предположим, что одному и тому же условию a), b) или c) удовлетворяют два сплайна $S_\Delta(f; x)$ и $\overline{S}_\Delta(f; x)$, интерполирующих функцию $f(x)$ в узлах сетки Δ. В каждом из этих случаев разность $S_\Delta(f; x) - \overline{S}_\Delta(f; x)$ интерполирует нулевую функцию $z(x)$ и по теореме 3.4.1 выполняется первое интегральное соотношение. Таким образом,

$$\| z - S_{\Delta, f} + \overline{S}_{\Delta, f} \|^2 = \| z \|^2 - \| S_{\Delta, f} - \overline{S}_{\Delta, f} \|^2,$$

$$\| S_{\Delta, f} - \overline{S}_{\Delta, f} \|^2 = - \| S_{\Delta, f} - \overline{S}_{\Delta, f} \|^2,$$

откуда

$$S_\Delta(f; x) \equiv \overline{S}_\Delta(f; x) + Ax + B.$$

Так как оба сплайна $S_\Delta(f; x)$ и $\overline{S}_\Delta(f; x)$ интерполируют функцию $f(x)$ в узлах сетки Δ, то $A = B = 0$.

При доказательстве теоремы 3.5.1 функция $f(x)$ служила только для определения такого вектора, что сплайны $S_\Delta(f; x)$ и $\overline{S}_\Delta(f; x)$ интерполируют его в узлах сетки Δ. Первое интегральное соотношение применялось не к $f(x)$, а к $z(x)$, так что дифференцируемость или даже непрерывность функции $f(x)$ несущественны и ее можно считать произвольной функцией на $[a, b]$.

Замечание 3.5.1. Единственность, доказанная в теоремах 3.1.1, 3.4.2 и 3.4.3, влечет единственность рассматриваемых здесь сплайнов. Однако в случае c) требуется провести рассуждения несколько более тщательно.

3.6. Существование

Теперь мы можем дать другое доказательство существования интерполяционных сплайнов типов I, II и периодических сплайнов. Это доказательство переносится на более общие случаи.

Теорема 3.6.1. *Пусть даны сетка* $\Delta: a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ *и функция* $f(x)$. *Тогда в каждом классе эквивалентности типа* I *или* II *существуют сплайны* $S_\Delta(f; x)$ *типа* I *или* II, *интерполирующие функцию* $f(x)$ *в узлах сетки* Δ. *Если* $f(a) = f(b)$, *то существует периодический сплайн, интерполирующий* $f(x)$ *на* Δ.

Доказательство. Так как функция $f(x)$ рассматривается только в узлах сетки, ее можно изменить так, чтобы ее значения на Δ оставались теми же, а новая функция $\overline{f}(x)$ принадлежала любому наперед заданному классу эквивалентности типа I или типа II. В силу теоремы 3.5.1, если сплайн $S_\Delta(\overline{f}; x)$ существует, то он является единственным. Сплайны, о которых идет речь, существуют, если матрицы систем (2.1.8) и (2.1.9) невырожденны. Обе эти системы можно записать в виде

$$AM = Y, \tag{3.6.1}$$

где A — матрица, M и Y — векторы. Компоненты вектора M равны значениям $S''_\Delta(f; x)$ в узлах сетки Δ. Если уравнение (3.6.1) имеет два различных решения M, то существуют два различных периодических сплайна или два различных сплайна из одного и того же класса эквивалентности типа I (или типа II), интерполирующих функцию $f(x)$ в узлах сетки Δ. Это противоречит теореме 3.5.1, следовательно, уравнение (3.6.1) имеет единственное решение. Так как единственность решения уравнения (3.6.1) для одного Y влечет единственность решения для любого Y, то A^{-1} существует, и теорема доказана.

Хотя теорема 3.6.1 устанавливает существование обратной матрицы A^{-1}, метод доказательства не позволяет оценить $\| A^{-1} \|$. В этом смысле теорема 3.6.1 хуже теорем существования из гл. II. Ее преимущество состоит в ее общности. Более того, первое интегральное соотношение вместе со вторым интегральным соотношением (разд. 3.9) компенсируют в значительной степени отсутствие оценок для $\| A^{-1} \|$.

3.7. Общие уравнения

Матричные уравнения (2.1.8) и (2.1.9) из гл. II были выведены в предположении, что вторая производная сплайна $S_\Delta(x)$ непрерывна и кусочно линейна. В гл. IV мы получим аналогичные уравнения для сплайнов нечетной степени более высокого порядка; но только при ограничениях типа равномерности сетки эти уравнения имеют простой вид. Вообще всегда есть система примерно N уравнений с тем же самым числом неизвестных, где N — число интервалов сетки. Однако представление сплайнов нечетной степени более высокого порядка через эти величины становится значительно сложнее, чем в случае кубических сплайнов (ср. разд. 4.1). Возможность применения аналогичного метода для обобщенных сплайнов, исследуемых в гл. VI, не ясна, поскольку предположение о линейности не выполняется. Следовательно, каждый случай требует специального подхода.

Даже в случае обобщенных сплайнов можно непосредственно написать систему $2nN$ уравнений с $2nN$ неизвестными, где снова N — число интервалов сетки и n — порядок соответствующего дифференциального оператора. Более того, на каждом интервале сетки нетрудно выразить сплайн через эти величины. Возникающие при этом матрицы таковы, что лишь незначительное число их элементов отлично от нуля. Это позволяет использовать на счетно-решающих устройствах специальные процедуры обращения, которые очень сокращают объем памяти, требуемой для выполнения обращения. Однако появляющиеся здесь матрицы имеют тот недостаток, что при стремлении длин интервалов к нулю они стремятся к вырожденной матрице. Более того, когда возможно специальное представление, размер системы уравнений обычно бывает значительно меньше.

Чтобы вывести эти уравнения, изменим нашу прежнюю точку зрения и построение кубических интерполяционных сплайнов будем рассматривать как проблему склеивания вместе N решений дифференциального уравнения

$$D^4 f = 0, \tag{3.7.1}$$

каждое из которых удовлетворяет уравнению на различных открытых интервалах сетки $\Delta: a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$; при этом построенный сплайн $S_\Delta(f; x)$ должен интерполировать заданную функцию $f(x)$ в узлах сетки Δ, удовлетворять определенному множеству краевых условий и принадлежать классу $\mathscr{K}^3(a, b)$.

Любое решение уравнения (3.7.1) является линейной комбинацией четырех линейно независимых решений $u_i(x)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, которые можно выбрать так, что $u_i^{(j)}(0) = \delta_{i-1\,j}$ $(j = 0, 1, 2, 3)$. В частности, $u_i(x) = x^{i-1}/(i-1)!$. Поэтому на любом отрезке $x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i$

$$S_\Delta(f; x) = \sum_{j=1}^{4} c_{ij} u_j (x - x_{i-1}). \tag{3.7.2}$$

Так как $S_\Delta(f; x_i) = f(x_i) = y_i$, то $c_{i1} = y_{i-1}$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$. Чтобы сплайн $S_\Delta(f; x)$ принадлежал классу $\mathscr{K}^3(a, b)$, необходимо выполнение условий

$$\sum_{j=1}^{4} c_{ij} u_j^{(k)} (x_i - x_{i-1}) = \sum_{j=1}^{4} c_{i+1\,j} u_j^{(k)}(0) = c_{i+1\,k+1} \qquad (k = 0, 1, 2;\ i = 1, 2, \ldots, N-1). \tag{3.7.3}$$

Если $S_\Delta(f; x)$ принадлежит типу I, то дополнительно получаем

$$c_{11} = y_0, \qquad c_{12} = y_0', \qquad \sum_{j=1}^{4} c_{Nj} u_j (x_N - x_{N-1}) = y_N, \qquad \sum_{j=1}^{4} c_{Nj} u_j' (x_N - x_{N-1}) = y_N', \tag{3.7.4}$$

а если $S_\Delta(f; x)$ принадлежит типу II, то

$$c_{11} = y_0, \qquad c_{13} = y_0'', \qquad \sum_{j=1}^{4} c_{Nj} u_j (x_N - x_{N-1}) = y_N, \qquad \sum_{j=1}^{4} c_{Nj} u_j'' (x_N - x_{N-1}) = y_N''. \tag{3.7.5}$$

В периодическом случае

$$c_{11} = y_0 = y_N, \quad \sum_{j=1}^{4} c_{Nj} u_j^{(k)} (x_N - x_{N-1}) = c_{1k+1} \qquad (k = 0, 1, 2). \tag{3.7.6}$$

Положим

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_1(x_i - x_{i-1}) & u_2(x_i - x_{i-1}) & u_3(x_i - x_{i-1}) & u_4(x_i - x_{i-1}) \\ u_1'(x_i - x_{i-1}) & u_2'(x_i - x_{i-1}) & u_3'(x_i - x_{i-1}) & u_4'(x_i - x_{i-1}) \\ u_1''(x_i - x_{i-1}) & u_2''(x_i - x_{i-1}) & u_3''(x_i - x_{i-1}) & u_4''(x_i - x_{i-1}) \end{bmatrix} \tag{3.7.7.1}$$

$(i = 1, 2, \ldots, N)$,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.7.7.2}$$

$$C_0^{\mathrm{I}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.7.7.3}$$

$$C_0^{\mathrm{II}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.7.7.4}$$

$$C_N^{\mathrm{I}} = \begin{bmatrix} u_1(x_N - x_{N-1}) & u_2(x_N - x_{N-1}) & u_3(x_N - x_{N-1}) & u_4(x_N - x_{N-1}) \\ u_1'(x_N - x_{N-1}) & u_2'(x_N - x_{N-1}) & u_3'(x_N - x_{N-1}) & u_4'(x_N - x_{N-1}) \end{bmatrix}, \tag{3.7.7.5}$$

$$C_N^{\mathrm{II}} = \begin{bmatrix} u_1(x_N - x_{N-1}) & u_2(x_N - x_{N-1}) & u_3(x_N - x_{N-1}) & u_4(x_N - x_{N-1}) \\ u_1''(x_N - x_{N-1}) & u_2''(x_N - x_{N-1}) & u_3''(x_N - x_{N-1}) & u_4''(x_N - x_{N-1}) \end{bmatrix}, \tag{3.7.7.6}$$

$$C = (c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{21}, \ldots, c_{N4})^{\mathrm{T}}, \tag{3.7.7.7}$$

$$Y = (y_0, \alpha y_0' + \beta y_0'', y_1, 0, 0, 0, y_2, 0, \ldots, y_{N-1}, 0, 0, 0, y_N, \alpha y_N' + \beta y_N'')^{\mathrm{T}}. \tag{3.7.7.8}$$

Тогда

$$AC = Y, \tag{3.7.7.9}$$

где для сплайнов типа I

$$A = \begin{bmatrix} C_0^{\mathrm{I}} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ A_1 & B & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & B & \ldots & 0 & 0 \\ & & & \ldots & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & A_{N-1} & B \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & C_N^{\mathrm{II}} \end{bmatrix} \quad (\alpha = 1, \beta = 0); \tag{3.7.7.10}$$

для сплайнов типа II

$$A = \begin{bmatrix} C_0^{\mathrm{II}} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ A_1 & B & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & B & \ldots & 0 & 0 \\ & & & \ldots & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & A_{N-1}B & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & C_N^{\mathrm{II}} \end{bmatrix} \quad (\alpha = 0, \beta = 1); \tag{3.7.7.11}$$

для периодических сплайнов

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & B & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & B & \ldots & 0 & 0 \\ & & & \ldots & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & A_{N-1} & B \\ B & 0 & 0 & \ldots & 0 & A_N \end{bmatrix} \tag{3.7.7.12}$$

и вектор Y вместо (3.7.7.8) имеет вид

$$Y = (y_1, 0, 0, 0, y_2, 0, \ldots, y_N, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}. \qquad (3.7.7.13)$$

В каждом случае матрица A не вырождена, ибо из представления (3.7.2) коэффициенты c_{ij} определяются однозначно. Таким образом, как и при доказательстве теоремы 3.6.1, два различных решения уравнения (3.7.7) дают два различных интерполяционных сплайна, что противоречит теореме 3.5.1. Так как $c_{i1} = y_{i-1}$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$, то размер системы уравнений легко можно уменьшить с $4nN$ до $3nN$.

3.8. Сходимость производных низших порядков

Исследуем теперь сходимость последовательности интерполяционных сплайнов $\{S_{\Delta_N, f}\}$ $(N = 1, 2, \ldots)$, определенных на последовательности сеток $\{\Delta_N: a = x_0^N < x_1^N < \ldots < x_{m_N}^N = b\}$, $\|\Delta_N\| \to 0$ при $N \to \infty$. Здесь, как и в гл. II, не предполагается, что $\Delta_{N_1} \subseteq \Delta_{N_2}$ при $N_1 \leqslant N_2$. Сделаем одно важное для последующих рассуждений замечание. Так как сплайн $S_{\Delta_N}(f; x)$ интерполирует функцию $f(x)$ в узлах сетки Δ_N, то в силу теоремы Ролля на каждом интервале $x_{i-1}^N < x < x_i^N$ $(i = 1, \ldots, m_N)$ существует такая точка x_{iN}, что

$$f'(x_{iN}) = S'_{\Delta_N}(f; x_{iN}). \qquad (3.8.1)$$

В дальнейшем нам потребуется аналогичное утверждение о том, что на каждом интервале $x_{i-2}^N < x < x_i^N$ $(i = 2, \ldots, m_N)$ существует такая точка $\bar{x}_{iN}$, что

$$f''(\bar{x}_{iN}) = S''_{\Delta_N}(f; \bar{x}_{iN}). \qquad (3.8.2)$$

Теорема 3.8.1. *Пусть даны функция $f(x)$ из класса $\mathscr{K}^2(a, b)$ и последовательность сеток $\{\Delta_N: a = x_0^N < x_1^N < \ldots < x_{m_N}^N = b\}$ $(N = 1, 2, \ldots)$, $\|\Delta_N\| \to 0$ при $N \to \infty$. Пусть соответствующая последовательность интерполяционных сплайнов $\{S_{\Delta_N, f}\}$ $(N = 1, 2, \ldots)$ удовлетворяет одному из следующих условий:* a) *$f(x) \in \mathscr{K}_p^2(a, b)$ и сплайн $S_{\Delta_N}(f; x)$ периодический $(N = 1, 2, \ldots)$,* b) *$f(x) - S_{\Delta_N}(f; x)$ принадлежит типу* I′ *$(N = 1, 2, \ldots)$,* c) *$S_{\Delta_N}(f; x)$ принадлежит типу* II′ *$(N = 1, 2, \ldots)$. Тогда*

$$\lim_{N \to \infty} |f^{(\alpha)}(x) - S^{(\alpha)}_{\Delta_N}(f; x)| = 0 \qquad (\alpha = 0, 1) \qquad (3.8.3)$$

равномерно относительно x на $[a, b]$.

Доказательство. Пусть $x_{iN} \in [x_{i-1}^N, x_i^N]$ и $f'(x_{iN}) = S'_{\Delta_N}(f; x_{iN})$. Применив неравенство Буняковского—Шварца к $f''(x) - S''_{\Delta_N}(f; x)$ и 1, получим

$$|f'(x) - S'_{\Delta_N}(f; x)| = \left| \int_{x_{iN}}^{x} \{f''(x) - S''_{\Delta_N}(f; x)\}\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \int_{x_{iN}}^{x} |f''(x) - S''_{\Delta_N}(f; x)|^2 |dx| \right\}^{1/2} |x - x_{iN}|^{1/2}.$$

Из свойства минимальной нормы получаем

$$|f'(x)-S'_{\Delta_N}(f;x)|\leqslant\|f-S_{\Delta_N,f}\|\cdot|x-x_{iN}|^{1/2}\leqslant K|x-x_{iN}|^{1/2}, \quad (3.8.4)$$

где $K=\|f\|$. Если $\Delta_1\subseteq\Delta_N$ $(N=1, 2, \ldots)$, то в качестве K можно взять $\|f-S_{\Delta_1,f}\|$, поскольку в этом случае сплайн $S_{\Delta_1}(f;x)$ является сплайном на Δ_N и можно применить свойство наилучшего приближения. Так как точки x_{iN} существуют в каждом интервале сетки, то можно среди них выбрать такую, что $|x-x_{iN}|\leqslant\|\Delta_N\|$. Отсюда и из неравенства (3.8.4) следует, что $S'_{\Delta_N}(f;x)\to f'(x)$ при $N\to\infty$ равномерно относительно x на $[a, b]$. Аналогично для любой точки x можно найти такой индекс i, что $x_{i-1}^N\leqslant x\leqslant x_i^N$ и

$$|f(x)-S_{\Delta_N}(f;x)|\leqslant\int_{\bar{x}}^{x}|f'(x)-S'_{\Delta_N}(f;x)||dx|\leqslant\frac{1}{2}K\|\Delta_N\|^{3/2},$$

где $\bar{x}$ есть x_{i-1}^N или x_i^N в зависимости от того, какая из этих точек ближе к x.

Следствие 3.8.1.1. *Если* $\Delta_1\subseteq\Delta_N$ $(N=1, 2, \ldots)$, $\|\Delta_N\|\to 0$ *при* $N\to\infty$, *и сплайн* $S_{\Delta_N}(f;x)$ $(N=1, 2, \ldots)$ *принадлежит заданному классу эквивалентности типа* II, *то равномерно относительно* x *на* $[a, b]$

$$\lim_{N\to\infty}S^{(\alpha)}_{\Delta_N}(f;x)=f^{(\alpha)}(x) \qquad (\alpha=0, 1).$$

Доказательство. Здесь в силу свойства наилучшего приближения можно положить $K=\|f-S_{\Delta_1,f}\|$.

Следствие 3.8.1.2. *Пусть функция* $f(x)$, *последовательность сеток* $\{\Delta_N\}$ $(N=1, 2, \ldots)$ *и последовательность сплайнов* $\{S_{\Delta_N}(f;x)\}$ $(N=1, 2, \ldots)$ *удовлетворяют условиям теоремы* 3.8.1 *или следствия* 3.8.1.1. *Тогда*

$$f^{(\alpha)}(x)=S^{(\alpha)}_{\Delta_N}(f;x)+O(\|\Delta_N\|^{(3-2\alpha)/2}) \qquad (\alpha=0, 1) \quad (3.8.5)$$

равномерно относительно x *на* $[a, b]$.

3.9. Второе интегральное соотношение

Рассмотрим более подробно полунорму

$$\|f\|^2=\int_a^b|f''(x)|^2\,dx\equiv\int_a^b|D^2f(x)|^2\,dx. \quad (3.9.1)$$

Если $f(x)\in\mathcal{K}^4(a, b)$, то для любого сплайна $S_\Delta(x)$, определенного на сетке Δ: $a=x_0<x_1<\ldots<x_N=b$,

$$\|f-S_\Delta\|^2=\int_a^b\{D^2f(x)-D^2S_\Delta(x)\}^2\,dx=$$

$$=\sum_{j=1}^{N}\int_{x_{j-1}}^{x_j}\{D^2f(x)-D^2S_\Delta(x)\}^2\,dx. \quad (3.9.2)$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} \{D^2 f(x) - D^2 S_\Delta(x)\}^2 dx = \{Df(x) - DS_\Delta(x)\}\{D^2 f(x) - D^2 S_\Delta(x)\}\Big|_{x_{j-1}}^{x_j} -$$
$$- \{f(x) - S_\Delta(x)\}\{D^3 f(x) - D^3 S_\Delta(x)\}\Big|_{x_{j-1}}^{x_j} +$$
$$+ \int_{x_{j-1}}^{x_j} \{f(x) - S_\Delta(x)\}\{D^4 f(x) - D^4 S_\Delta(x)\} dx. \qquad (3.9.3)$$

Из равенств (3.9.2), (3.9.3), непрерывности на отрезке $[a, b]$ функции $\{Df(x) - DS_\Delta(x)\}\{D^2 f(x) - D^2 S_\Delta(x)\}$ и равенства

$$\int_a^b \{f(x) - S_\Delta(x)\} D^4 S_\Delta(x)\, dx = 0$$

находим, что

$$\| f - S_\Delta \|^2 = \{Df(x) - DS_\Delta(x)\}\{D^2 f(x) - D^2 S_\Delta(x)\}\Big|_a^b -$$
$$- \sum_{j=1}^{N} \{f(x) - S_\Delta(x)\}\{D^3 f(x) - D^3 S_\Delta(x)\}\Big|_{x_{j-1}}^{x_j} +$$
$$+ \int_a^b \{f(x) - S_\Delta(x)\} D^4 f(x)\, dx. \qquad (3.9.4)$$

Тождество (3.9.4) в теории сплайнов очень важно. Оно справедливо для любой функции $f(x)$ из класса $\mathscr{K}^4(a, b)$ и любого простого сплайна $S_\Delta(x)$, определенного на произвольной сетке Δ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$. При некоторых условиях на сплайн $S_\Delta(x)$ это тождество принимает вид

$$\| f - S_\Delta \|^2 \equiv \int_a^b \{D^2 f(x) - D^2 S_\Delta(x)\}^2 dx = \int_a^b \{f(x) - S_\Delta(x)\} D^4 f(x)\, dx \qquad (3.9.5)$$

и называется *вторым интегральным соотношением*. В частности, следующая теорема вытекает непосредственно из тождества (3.9.4).

Т е о р е м а 3.9.1. *Пусть даны функция $f(x)$ из класса $\mathscr{K}^4(a, b)$ и сетка Δ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$. Если сплайн $S_\Delta(f; x)$ интерполирует функцию $f(x)$ на сетке Δ и удовлетворяет одному из условий*: а) $f(x) - S_\Delta(f; x)$ *принадлежит типу* I′, b) $f(x) - S_\Delta(f;, x)$ *принадлежит типу* II′, c) *сплайн $S_\Delta(f; x)$ периодический и $f(x) \in \mathscr{K}_p^4(a, b)$, то*

$$\| f - S_{\Delta, f} \|^2 \equiv \int_a^b \{D^2 f(x) - D^2 S_\Delta(f; x)\}^2 dx =$$
$$= \int_a^b \{f(x) - S_\Delta(f; x)\} D^4 f(x)\, dx. \qquad (3.9.6)$$

Замечание 3.9.1. Если $f(x) \in \mathcal{K}^2(a, b)$, то утверждение «$f(x) - S_\Delta(f; x)$ принадлежит типу II'» не корректно, так как $f''(x)$ может не существовать в точках $x = a$ или $x = b$. В данной теореме $f(x) \in \mathcal{K}^4(a, b)$ и поэтому утверждение имеет смысл.

3.10. Улучшение оценки порядка сходимости

Пусть функция $f(x)$, последовательность сеток $\{\Delta_N\}$ $(N = 1, 2, \ldots)$ и последовательность сплайнов $\{S_{\Delta_N, f}\}$ $(N = 1, 2, \ldots)$ удовлетворяют условиям теоремы 3.9.1. По тем же соображениям, что и при доказательстве теоремы 3.8.1,

$$|f^{(\alpha)}(x) - S^{(\alpha)}_{\Delta_N}(f; x)| \leqslant \|f - S_{\Delta_N, f}\| \cdot \|\Delta_N\|^{(3-2\alpha)/2} \qquad (\alpha = 0, 1), \quad (3.10.1)$$

а в силу второго интегрального соотношения

$$|f^{(\alpha)}(x) - S^{(\alpha)}_{\Delta_N}(f; x)| \leqslant \left\{\int_a^b |f(x) - S_{\Delta_N}(f; x)|\,|D^4 f(x)|\,dx\right\}^{1/2} \|\Delta_N\|^{(3-2\alpha)/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\int_a^b |D^4 f(x)|\,dx\right\}^{1/2} \left\{\sup_{x\in[a, b]} |f(x) - S_{\Delta_N}(f; x)|\right\}^{1/2} \|\Delta_N\|^{(3-2\alpha)/2} \qquad (\alpha = 0, 1). \quad (3.10.2)$$

Положим $\alpha = 0$ и подставим получившееся неравенство в правую часть неравенства (3.10.2):

$$|f^{(\alpha)}(x) - S^{(\alpha)}_{\Delta_N}(f; x)| \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\int_a^b |D^4 f(x)|\,dx\right\}^{J_1} \left\{\sup_{x\in[a, b]} |f(x) - S_{\Delta_N}(f; x)|\right\}^{J_2} \cdot \|\Delta_N\|^{J_3}, \quad (3.10.3.1)$$

где

$$J_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \quad J_2 = \frac{1}{4}, \quad J_3 = \frac{1}{2}\left\{3\left(1 + \frac{1}{2}\right) - 2\alpha\right\}. \quad (3.10.3.2)$$

Снова положим в (3.10.3.1) $\alpha = 0$ и подставим получившееся неравенство в правую часть неравенства (3.10.2). Повторив этот процесс k раз, получим (3.10.3.1), но теперь

$$J_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{2^k},$$

$$J_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^k}, \quad (3.10.4)$$

$$J_3 = \frac{1}{2}\left\{3\left[1 + \frac{1}{2} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{2^k - 1}\right] - 2\alpha\right\}.$$

Так как это верно для любого натурального k, то

$$\left| f^{(\alpha)}(x) - S^{(\alpha)}_{\Delta_N}(f; x) \leqslant \int_a^b \left| D^4 f(x) \right| dx \, \| \Delta_N \|^{3-\alpha} \qquad (\alpha = 0, 1). \qquad (3.10.5)$$

Можно дать более простое доказательство неравенства (3.10.5). В самом деле, из (3.10.2) вытекает, что

$$\sup_{x \in [a, b]} | f(x) - S_{\Delta_N}(f; x) | \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \int_a^b | D^4 f(x) | \, dx \right\}^{1/2} \{ \sup_{x \in [a, b]} | f(x) - S_{\Delta}(f; x) | \}^{1/2} \| \Delta_N \|^{3/2}.$$

Если

$$\sup_{\in x [a, b]} | f(x) - S_{\Delta_N}(f; x) | = 0,$$

то все доказано; в противном случае

$$\sup_{x \in [a, b]} | f(x) - S_{\Delta_N}(f; x) |^{1/2} \leqslant \left\{ \int_a^b | D^4 f(x) | \, dx \right\} \| \Delta_N \|^{3/2}, \qquad (3.10.6)$$

так что неравенство (3.10.5) справедливо при $\alpha = 0$. Подстановка (3.10.6) в (3.10.2) дает общий случай.

Итак, доказана

Теорема 3.10.1. *Пусть даны функция $f(x)$ из класса $\mathscr{K}^4(a, b)$ и сетка Δ_N: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$, $\| \Delta_N \| \to 0$ при $N \to \infty$. Если сплайн $S_{\Delta_N}(f; x)$ интерполирует функцию $f(x)$ в узлах сетки Δ_N и удовлетворяет одному из условий*: a) *$f(x) - S_{\Delta_N}(f; x)$ принадлежит типу* I′ *($N = 1, 2, \ldots$)*, b) *$f(x) - S_{\Delta_N}(f; x)$ принадлежит типу* II′, c) *$f(x) \in \mathscr{K}^4_p(a, b)$ и сплайн $S_{\Delta_N}(f; x)$ ($N = 1, 2, \ldots$) периодический, то*

$$\sup_{x \in [a, b]} | f^{(\alpha)}(x) - S^{(\alpha)}_{\Delta_N}(f; x) | \leqslant \int_a^b | D^4 f(x) | \, dx \, \| \Delta_N \|^{3-\alpha} \qquad (\alpha = 0, 1).$$

Замечание 3.10.1. Если (3.10.1) заменить более точным неравенством

$$| f^{(\alpha)}(x) - S^{(\alpha)}_{\Delta_N}(f; x) | \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{1-\alpha} \| f - S_{\Delta_N, f} \| \, \| \Delta_N \|^{(3-2\alpha)/2} \qquad (\alpha = 0, 1), \qquad (3.10.7)$$

доказанным в разд. 3.8, то получим

$$\sup_{x \in [a, b]} | f^{(\alpha)}(x) - S^{(\alpha)}_{\Delta_N}(f; x) | \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^{1-\alpha} \int_a^b | D^4 f(x) | \, dx \, \| \Delta_N \|^{3-\alpha} \quad (\alpha = 0, 1). \quad (3.10.8)$$

3.11. Сходимость производных высших порядков

Пусть даны функция $f(x)$ из класса $\mathcal{K}^4(a, b)$, сетка Δ: $a=x_0<x_1<\ldots$ $\ldots<x_N=b$ и сплайн $S_\Delta(f; x)$. Вновь запишем для $x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i$ $(i=1, \ldots, N)$ равенство (3.7.2):

$$S_\Delta(f; x)=\sum_{j=1}^{4} c_{ij}u_j(x-x_{i-1}). \tag{3.11.1}$$

Пусть $\delta_g^\alpha[c, d]$ обозначает α-ю разделенную разность с постоянным шагом произвольной функции $g(x)$ на произвольном отрезке $[c, d]$; положим $\delta_g^0[c, d]=g(c)$. Тогда существует такая точка $x_{i\alpha}\in[x_{i-1}, x_i]$, что

$$\delta^\alpha_{S_\Delta, f}[x_{i-1}, x_i]=S_\Delta^{(\alpha)}(f; x_{i\alpha}) \qquad (\alpha=0, 1, 2, 3),$$

откуда

$$\delta^\alpha_{S_\Delta, f}[x_{i-1}, x_i]=\sum_{j=1}^{4} c_{ij}u_j^{(\alpha)}(x_{i\alpha}-x_{i-1}) \qquad (\alpha=0, 1, 2, 3) \tag{3.11.2}$$

и при $\|\Delta\|\to 0$

$$\delta^\alpha_{S_\Delta, f}[x_{i-1}, x_i]=c_{i\alpha+1} \qquad (\alpha=0, 1, 2, 3). \tag{3.11.3}$$

Заметим, что функции $u_j^{(\alpha)}(x)$ $(j=1, 2, 3, 4; \alpha=0, 1, 2, 3)$ непрерывны на отрезке $[0, b-a]$ и, следовательно, равномерно непрерывны и ограничены на $[0, b-a]$. Когда $\|\Delta\|\to 0$, эти функции остаются фиксированными, а изменяются только точки, в которых они вычисляются. Таким образом, для достаточно малого числа $\|\Delta\|$ система (3.11.2) разрешима и каждый коэффициент c_{ij} является линейной комбинацией четырех величин $\delta^\alpha_{S_\Delta, f}[x_{i-1}, x_i]$ $(\alpha=0, 1, 2, 3)$. Кроме того, с помощью теоремы 3.10.1 получаем соотношения

$$\left|\delta^0_{S_\Delta, f}[x_{i-1}, x_i]-\delta_f^0[x_{i-1}, x_i]\right|=0, \tag{3.11.4.1}$$

$$\left|\delta^1_{S_\Delta, f}[x_{i-1}, x_i]-\delta_f^1[x_{i-1}, x_i]\right|=$$

$$=\left|\frac{\{S_\Delta(f; x_i)-f(x_i)\}-\{S_\Delta(f; x_{i-1})-f(x_{i-1})\}}{h_i}\right|\leqslant 2\int_a^b |D^4f(x)|\,dx\,\frac{\|\Delta\|^3}{h_i}, \tag{3.11.4.2}$$

$$\left|\delta^2_{S_\Delta, f}[x_{i-1}, x_i]-\delta_f^2[x_{i-1}, x_i]\right|=$$

$$=\left|\{S_\Delta(f; x_i)-f(x_i)\}-2\left\{S_\Delta\left(f; x_i-\frac{1}{2}h_i\right)-f\left(x_i-\frac{1}{2}h_i\right)\right\}+\right.$$

$$\left.+\{S_\Delta(f; x_{i-1})-f(x_{i-1})\}\right|\Big/\left(\frac{h_i^2}{4}\right)\leqslant 4^2\int_a^b |D^4f(x)|\,dx\,\frac{\|\Delta\|^3}{h_i^2}, \tag{3.11.4.3}$$

$$|\delta^3_{S_\Delta, f}[x_{i-1}, x_i] - \delta^3_f[x_{i-1}, x_i]| =$$

$$= |\{S_\Delta(f; x_i) - f(x_i)\} - 3\left\{S_\Delta\left(f; x_i - \frac{1}{3}h_i\right) - f\left(x_i - \frac{1}{3}h_i\right)\right\} +$$

$$+3\left\{S_\Delta\left(f; x_i - \frac{2}{3}h_i\right) - f\left(x_i - \frac{2}{3}h_i\right)\right\} - \{S_\Delta(f; x_{i-1}) - f(x_{i-1})\}|/(h_i^3/27) \leqslant$$

$$\leqslant 3^3 \cdot 2^3 \cdot \int_a^b |D^4 f(x)|\, dx \cdot \|\Delta\|^3 h_i^3, \qquad (3.11.4.4)$$

где $h_i = x_i - x_{i-1}$. Если положить $R_\Delta = \max\limits_i \{\|\Delta\|/h_i\}$, то предыдущие неравенства можно записать в виде

$$|\delta^\alpha_{S_\Delta, f}[x_{i-1}, x_i] - \delta^\alpha_f[x_{i-1}, x_i]| \leqslant (2\alpha R_\Delta)^\alpha \int_a^b |D^4 f(x)|\, dx \cdot \|\Delta\|^{3-\alpha}$$

$$(\alpha = 0, 1, 2, 3). \qquad (3.11.5)$$

Учитывая замечание 3.10.1, в правой части неравенства (3.11.5) можно получить дополнительный множитель 1/4.

Теорема 3.11.1. *Пусть даны функция $f(x)$ из класса $\mathscr{K}^4(a, b)$ и последовательность сеток $\{\Delta_N: a = x_0^N < x_1^N < \ldots < x_{m_N}^N = b\}$ $(N = 1, 2, \ldots)$, $\|\Delta_N\| \to 0$ при $N \to \infty$. Пусть величины $R_{\Delta_N} = \max\limits_{i=1, \ldots, m_N} \|\Delta_N\|/(x_i^N - x_{i-1}^N)$ ограничены относительно N и сплайн $S_{\Delta_N}(f; x)$ $(N = 1, 2, \ldots)$ интерполирует функцию $f(x)$ в узлах сетки Δ_N и удовлетворяет одному из условий*: a) *$f(x) - S_{\Delta_N}(f; x)$ принадлежит типу* I′ *$(N = 1, 2, \ldots)$*, b) *$f(x) - S_{\Delta_N}(f; x)$ принадлежит типу* II′ *и $\Delta_1 \subseteq \Delta_N$ $(N = 1, 2, \ldots)$*, c) *$f(x) \in \mathscr{K}_p^4(a, b)$ и сплайны $S_{\Delta_N}(f; x)$ периодические. Тогда*

$$f^{(\alpha)}(x) = S^{(\alpha)}_{\Delta_N}(f; x) + O(\|\Delta_N\|^{3-\alpha}) \qquad (\alpha = 0, 1, 2, 3) \qquad (3.11.6)$$

равномерно относительно x на $[a, b]$.

Доказательство. Так как для некоторой точки $x_{i\alpha}^N \in [x_{i-1}^N, x_i^N]$

$$\delta^\alpha_f[x_{i-1}, x_i] = f^{(\alpha)}(x_{i\alpha}^N) \qquad (\alpha = 0, 1, 2, 3), \qquad (3.11.7)$$

то из (3.11.5) следует, что

$$|\delta^\alpha_{S_{\Delta_N}, f}[x_{i-1}, x_i]| \leqslant |\delta^\alpha_{S_{\Delta_N}, f}[x_{i-1}, x_i] - \delta^\alpha_f[x_{i-1}, x_i]| + |\delta^\alpha_f[x_{i-1}, x_i]| \leqslant$$

$$\leqslant (2\alpha \sup_N R_{\Delta_N})^\alpha \int_a^b |D^4 f(x)|\, dx\, \|\Delta_N\|^{3-\alpha} + \sup_{x \in [a, b]} |f^{(\alpha)}(x)| \qquad (\alpha = 0, 1, 2, 3).$$

Правая часть неравенства по условию ограничена относительно N. Так как матрица системы (3.11.3) при $N \to \infty$ стремится к тождественной матрице равномерно как относительно N, так и относительно расположения отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, то все коэффициенты c_{ij}, определяющие сплайны $S_{\Delta_N}(f; x)$ ($N = 1, 2, \ldots$), равномерно ограничены относительно N. Поэтому для $\alpha < 4$ величины $|S^{(\alpha)}_{\Delta_N}(f; x)|$ равномерно ограничены относительно N. В частности, существует такое действительное число B, что $|S^{(3)}_{\Delta_N}(f; x)| \leqslant B$ для любого N. Так как для любой точки x существует такое i, что $x \in [x^N_{i-2}, x^N_i]$, то из равенства (3.8.2) получаем

$$|f''(x) - S''_{\Delta_N}(f; x)| \leqslant \int_{x_{iN}}^{x} |f^{(3)}(x) - S^{(3)}_{\Delta_N}(f; x)|\, dx| \leqslant$$
$$\leqslant 2\{\sup_{x\in[a,b]} |f^{(3)}(x)| + B\}\, \|\Delta_N\|$$

и, более общо,

$$|f^{(\alpha)}(x) - S^{(\alpha)}_{\Delta_N}(f; x)| \leqslant 2\{\sup_{x\in[a,b]} |f^{(3)}(x)| + B\}\, \|\Delta_N\|^{3-\alpha} \qquad (\alpha = 0, 1, 2).$$

Кроме того,

$$|f^{(3)}(x) - S^{(3)}_{\Delta_N}(f; x)| \leqslant \{\sup_{x\in[a,b]} |f^{(3)}(x)| + B\}\, \|\Delta_N\|^0,$$

и теорема доказана.

Замечание 3.11.1. При $\alpha = 0, 1$ теорема 3.10.1 гарантирует более точные оценки скорости сходимости. Возможно, даже более важно то, что в ней нет дополнительных условий на сетки, в то время как в теореме 3.11.1 величины R_{Δ_N} должны быть ограничены относительно N.

3.12. Ограничения на порядок сходимости

В разд. 3.10 и 3.11 мы установили, что

$$f^{(\alpha)}(x) = S^{(\alpha)}_{\Delta_N}(f; x) + O(\|\Delta_N\|^{3-\alpha}) \qquad (\alpha = 0, 1, 2, 3). \qquad (3.12.1)$$

Кроме того, в гл. II с помощью более специальных методов было показано, что

$$f^{(\alpha)}(x) = S^{(\alpha)}_{\Delta_N}(f; x) + O(\|\Delta_N\|^{4-\alpha}) \qquad (\alpha = 0, 1, 2, 3, 4), \qquad (3.12.2)$$

хотя константы и ограничения на сетки не одни и те же в обоих случаях. В частности, константа в равенстве (3.12.1) пропорциональна $\bigvee_a^b [f^{(3)}]$, а константа в (3.12.2) (когда $f(x) \in C^4(a, b)$) пропорциональна $\|f^{(4)}\|_\infty$; здесь

использованы стандартные обозначения

$$\bigvee_a^b [f] = \int_a^b | f'(x) | dx$$

и

$$\| f \|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} | f(x) |.$$

В замечании 3.11.1 указывается на различие ограничений, налагаемых на сетки. Сейчас мы установим ограничения на скорость сходимости.

Т е о р е м а 3.12.1. *Пусть даны функция $f(x)$ из класса $C^4(a, b)$ и последовательность сеток $\{\Delta_N\}$, $\| \Delta_N \| \to 0$ при $N \to \infty$, и пусть $R = \sup\limits_N R_{\Delta_N} < \infty$. Если при $\mu > 0$*

$$f(x) = S_{\Delta_N}(f; x) + O(\| \Delta_N \|^{4+\mu}) \tag{3.12.3}$$

равномерно относительно x на $[a, b]$, то

$$D^4 f(x) \equiv 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Точно так же, как в разд. 3.11, можно показать, что

$$| \delta^4_{S_{\Delta_N}}[x^N_{i-1}, x^N_i] - \delta^4_f [x^N_{i-1}, x^N_i] | \leqslant 8^4 R^4 \bigvee_a^b [f^{(3)}] \| \Delta_N \|^\mu.$$

Так как $\delta^4_{S_{\Delta_N}}[x^N_{i-1}, x_i] = 0$ для всех N, то для любого $\varepsilon > 0$

$$| \delta^4_f [x^N_{i-1}, x^N_i] | < \varepsilon$$

для всех достаточно больших N. Кроме того, $\delta^4_f [x^N_{i-1}, x^N_i] = f^{(4)}(x_{iN})$ для некоторой точки x_{iN} из отрезка $[x^N_{i-1}, x^N_i]$. Так как функция $f^{(4)}(x)$ равномерно непрерывна на $[a, b]$, то

$$| f^{(4)}(x) | \leqslant | f^{(4)}(x) - f^{(4)}(x_{iN}) | + | f^{(4)}(x_{iN}) | < 2\varepsilon,$$

если значение $\| \Delta_N \|$ достаточно мало. Теорема доказана.

3.13. Приложения к теории гильбертова пространства

Введенный в разд. 3.1 класс $\mathscr{K}^2(a, b)$ при соответствующей факторизации является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_a^b f''(x) g''(x) dx. \tag{3.13.1}$$

Ясно, что семейство F_Δ всех кубических сплайнов на произвольной фиксированной сетке $\Delta: a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ образует линейное подпро-

странство пространства $\mathscr{K}^2(a, b)$. Так как непериодический кубический сплайн определяется своими значениями в узлах сетки Δ и значениями своих первых производных в точках $x = x_0$, $x = x_N$ (которые можно взять в качестве его определяющих значений [1]), то это подпространство $(N + 3)$-мерно или $(N + 1)$-мерно, если считать эквивалентными две функции, разность которых линейна на отрезке $[a, b]$. В этом смысле подпространство P_Δ периодических кубических сплайнов имеет размерность $N - 1$. Поскольку подпространства F_Δ и P_Δ конечномерны, они замкнуты в $\mathscr{K}^2(a, b)$ относительно нормы

$$\| f \| = (f, f)^{1/2}, \tag{3.13.2}$$

индуцируемой скалярным произведением (3.13.1). Если $\Delta_1 \subset \Delta_2$, то $F_{\Delta_1} \subset F_{\Delta_2}$ и $P_{\Delta_1} \subset P_{\Delta_2}$. Процесс ортогонализации Грама — Шмидта позволяет ввести в F_Δ и P_Δ ортонормальный базис [2]).

Пусть $\Delta_N \subset \Delta_{N+1}$; обозначим через $[F_{\Delta_{N+1}} - F_{\Delta_N}]$ подмножество в $F_{\Delta_{N+1}}$, состоящее из сплайнов $S_{\Delta_{N+1}}(x)$, равных нулю в узлах сетки Δ_N и таких, что их первые производные равны нулю в точках $x = a$ и $x = b$. Таким образом, $[F_{\Delta_{N+1}} - F_{\Delta_N}]$ — это подмножество в $F_{\Delta_{N+1}}$, состоящее из сплайнов, определяющие значения которых на Δ_N равны нулю. Аналогично $[P_{\Delta_{N+1}} - P_{\Delta_N}]$ — это подмножество в $P_{\Delta_{N+1}}$, состоящее из сплайнов, определяющие значения которых на Δ_N равны нулю. Напомним, что если $\{V_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ — последовательность взаимно ортогональных подпространств пространства $\mathscr{K}^2(a, b)$, то бесконечная прямая сумма

$$V_\infty = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots$$

является наименьшим линейным подпространством пространства $\mathscr{K}^2(a, b)$, содержащим все конечные прямые суммы

$$V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_N \qquad (N = 1, 2, \ldots)$$

и замкнутым относительно нормы (3.13.2). Элемент $v \in V_\infty$ имеет единственное представление

$$v = \sum_{i=1}^{\infty} v_i,$$

где $v_i \in V_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$.

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана последовательность сеток $\{\Delta_N\}$ $(N = 1, 2, \ldots)$, $\Delta_N \subset \Delta_{N+1}$. Если $N \neq \bar{N}$, то множества $[F_{\Delta_N} - F_{\Delta_{N-1}}]$ и $[F_{\Delta_{\bar{N}}} - F_{\Delta_{\bar{N}-1}}]$ имеют общим только нулевой сплайн. Для определенности пусть $\bar{N} > N$. Тогда если сплайн $S(x)$ принадлежит множеству $[F_{\Delta_N} - F_{\Delta_{N-1}}]$, то это сплайн на Δ_N.

---

[1]) Здесь и в оставшейся части гл. III предполагается, что определяющие значения совпадают с компонентами $\alpha y_i' + \beta y_i''$ и y_i вектора Y [(3.7.7.8) или (3.7.7.13)], связанного с рассматриваемыми сплайнами.

[2]) Ради простоты рассуждений мы будем говорить здесь о сплайнах, а не о классах эквивалентности сплайнов.

Если $S(x)$ принадлежит также множеству $[F_{\Delta_{\overline{N}}} - F_{\Delta_{\overline{N}-1}}]$, то его определяющие значения на Δ_N равны нулю. Следовательно, $S(x)$ — это сплайн на сетке Δ_N, определяющие значения которого на Δ_N равны нулю, а потому $S(x) \equiv 0$. Заметим, что $\mathscr{K}_p^2(a, b)$ плотно в $\mathscr{K}^2(a, b)$, но не является замкнутым подпространством пространства $\mathscr{K}^2(a, b)$. Возникает вопрос: когда для заданной последовательности сеток $\{\Delta_N\}$ соответствующие последовательности линейных пространств $\{F_{\Delta_N}\}$ и $\{P_{\Delta_N}\}$ таковы, что

$$F_{\Delta_\infty} \equiv F_{\Delta_1} \oplus \sum_{N=2}^{\infty} \oplus [F_{\Delta_N} - F_{\Delta_{N-1}}] = \mathscr{K}^2(a, b), \tag{3.13.3}$$

$$P_{\Delta_\infty} \equiv P_{\Delta_1} \oplus \sum_{N=2}^{\infty} \oplus [P_{\Delta_N} - P_{\Delta_{N-1}}] = \mathscr{K}^2(a, b)? \tag{3.13.4}$$

В разд. 3.14 мы рассмотрим важные достаточные условия, при которых справедливы разложения (3.13.3) и (3.13.4). Пусть $f(x)$ — любая функция из $\mathscr{K}^2(a, b)$ и $\{v_i(x)\}$ — ортонормальный базис для F_{Δ_∞}. Так как $F_{\Delta_\infty} \subseteq \subseteq \mathscr{K}^2(a, b)$, то для доказательства справедливости разложения (3.13.3) достаточно показать, что

$$\lim_{N\to\infty} \| f - \sum_{i=1}^{N} (f, v_i) v_i \| = 0. \tag{3.13.5}$$

Аналогичное замечание относится к P_{Δ_∞} и $\mathscr{K}_p^2(a, b)$, ибо последнее пространство плотно в $\mathscr{K}^2(a, b)$. В разд. 3.14 мы покажем, что компоненты, составляющие разложение (3.13.3), взаимно ортогональны, так что это разложение имеет смысл. То же относится и к разложению (3.13.4).

3.14. Сходимость по норме

В этом разделе мы докажем две важные теоремы. Первая теорема посвящена сходимости, и ее можно было доказать еще в разд. 3.8.

Теорема 3.14.1. *Пусть на отрезке* $[a, b]$ *заданы функция* $f(x)$ *из класса* $\mathscr{K}^2(a, b)$ *и последовательность сеток* $\{\Delta_N\}$ $(N = 1, 2, \ldots)$, $\Delta_N \subset \Delta_{N+1}$ *и* $\|\Delta_N\| \to 0$ *при* $N \to \infty$. *Если сплайн* $S_{\Delta_N}(f; x)$ $(N = 1, 2, \ldots)$ *интерполирует функцию* $f(x)$ *на сетке* Δ_N *и удовлетворяет одному из условий*: a) $f(x) - S_{\Delta_N}(f; x)$ *принадлежит типу* I′ $(N = 1, 2, \ldots)$, b) $f(x) - S_{\Delta_N}(f; x)$ *принадлежит типу* II′ $(N = 1, 2, \ldots)$, c) $f(x)$ *и* $S_{\Delta_N}(f; x)$ $(N = 1, 2, \ldots)$ *принадлежат классу* $\mathscr{K}_p^2(a, b)$, *то*

$$\lim_{N\to\infty} \| f - S_{\Delta_N, f} \| = 0. \tag{3.14.1}$$

Доказательство. Пусть $N_1 < N_2$. Так как $S_{\Delta_{N_2}}(f; x) \in \mathscr{K}^2(a, b)$ и сплайн $S_{\Delta_{N_1}}(f; x)$ интерполирует $S_{\Delta_{N_2}}(f; x)$ на сетке Δ_{N_1} и удовлетворяет

одному из условий a), b) или c), то в силу свойства минимальной нормы

$$\| S_{\Delta_{N_1}, f} \| \leqslant \| S_{\Delta_{N_2}, f} \|. \tag{3.14.2}$$

Поэтому последовательность действительных чисел $\{\| S_{\Delta_N, f} \|\}$ монотонно возрастает и снова по свойству минимальной нормы ограничена сверху числом $\| f \|$. Отсюда следует, что она является последовательностью Коши. Так же, как при выводе неравенства (3.14.2), заключаем, что к сплайнам $S_{\Delta_{N_1}}$ и $S_{\Delta_{N_2}}$ можно применить первое интегральное соотношение. Тогда

$$\| S_{\Delta_{N+p}, f} - S_{\Delta_N, f} \|^2 = \| S_{\Delta_{N+p}, f} \|^2 - \| S_{\Delta_N, f} \|^2 \qquad (p = 1, 2, \ldots) \tag{3.14.3}$$

и, следовательно, $\{S''_{\Delta_N}(f; x)\}$ — последовательность Коши в $L^2(a, b)$. Так как пространство $L^2(a, b)$ полно, то существует такая функция $g(x) \in L^2(a, b)$, что

$$\lim_{N \to \infty} \int_a^b \{g(x) - S''_{\Delta_N}(f; x)\}^2 \, dx = 0. \tag{3.14.4}$$

Пусть

$$G(x) = f'(a) + \int_a^x g(x) \, dx; \tag{3.14.5}$$

в силу неравенства Буняковского — Шварца

$$|G(x) - S'_{\Delta_N}(f; x)| \leqslant \int_a^x |g(x) - S''_{\Delta_N}(f; x)| \, dx + |f'(a) - S'_{\Delta_N}(f; a)| \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \int_a^b \{g(x) - S''_{\Delta_N}(f; x)\}^2 \, dx \, (b-a)^{1/2} + |f'(a) - S'_{\Delta_N}(f; a)| \right\}.$$

Учитывая (3.14.4), получаем, что

$$\lim_{N \to \infty} |G(x) - S'_{\Delta_N}(f; x)| = 0 \tag{3.14.6}$$

равномерно относительно x на $[a, b]$, ибо по теореме 3.8.1

$$\lim_{N \to \infty} |f'(x) - S'_{\Delta_N}(f; x)| = 0 \tag{3.14.7}$$

равномерно относительно x на $[a, b]$. Так как правая часть неравенства

$$|f'(x) - G(x)| \leqslant |f'(x) - S'_{\Delta_N}(f; x)| + |G(x) - S'_{\Delta_N}(f; x)|$$

как угодно мала, то $f'(x) \equiv G(x)$ и, следовательно, $f''(x) = g(x)$. Теорема доказана.

Теорема 3.14.1 и следующая лемма играют основную роль при доказательстве справедливости разложений (3.13.3) и (3.13.4).

Лемма 3.14.1. *Пусть на отрезке* $[a, b]$ *заданы две сетки* Δ_1 *и* Δ_2, $\Delta_1 \subset \Delta_2$. *Если сплайны* $S_{\Delta_1}(x)$ *и* $S_{\Delta_2}(x)$ *таковы, что* $S_{\Delta_1}(x)$ *обращается в нуль в точках сетки* Δ_1 *и* $S_{\Delta_1}(x)$ *принадлежит типу* II′, *или* $S_{\Delta_2}(x)$ *принадлежит типу* I′, *или оба сплайна* $S_{\Delta_1}(x)$ *и* $S_{\Delta_2}(x)$ *периодические, то* $(S_{\Delta_1}, S_{\Delta_2}) = 0$.

Доказательство. Пусть сетка Δ_1 определяется точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$. Дважды проинтегрируем $(S_{\Delta_1}, S_{\Delta_2})$ по частям:

$$(S_{\Delta_1}, S_{\Delta_2}) = \int_a^b S''_{\Delta_1}(x)\, S''_{\Delta_2}(x)\, dx = \sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} S''_{\Delta_1}(x)\, S''_{\Delta_2}(x)\, dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \{S''_{\Delta_1}(x) S'_{\Delta_2}(x)\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - S'''_{\Delta_1}(x)\, S_{\Delta_2}(x)\Big|_{x_{i-1}}^{x_i}\} = S''_{\Delta_1}(x)\, S'_{\Delta_2}(x)\Big|_a^b = 0.$$

Лемма доказана.

Теорема 3.14.2. *Пусть задана последовательность сеток* $\{\Delta_N\}$ $(N = 1, 2, \ldots)$, $\Delta_N \subset \Delta_{N+1}$ *и* $\|\Delta_N\| \to 0$ *при* $N \to \infty$. *Для каждого* N *пусть* F_{Δ_N} *обозначает линейное пространство кубических сплайнов на* Δ_N, P_{Δ_N} — *подпространство периодических сплайнов и* F'_{Δ_N} — *подпространство кубических сплайнов типа* II′. *Тогда*

$$\mathscr{K}^2(a, b) = F_{\Delta_1} \oplus \sum_{N=2}^{\infty} \oplus [F_{\Delta_N} - F_{\Delta_{N-1}}] \equiv F_{\Delta_\infty}, \tag{3.14.8}$$

$$\mathscr{K}^2(a, b) = F'_{\Delta_1} \oplus \sum_{N=2}^{\infty} \oplus [F'_{\Delta_N} - F'_{\Delta_{N-1}}] \equiv F'_{\Delta_\infty}, \tag{3.14.9}$$

$$\mathscr{K}^2(a, b) = P_{\Delta_1} \oplus \sum_{N=2}^{\infty} \oplus [P_{\Delta_N} - P_{\Delta_{N-1}}] \equiv P_{\Delta_\infty}. \tag{3.14.10}$$

Доказательство. Докажем лишь равенство (3.14.8), а (3.14.9) и (3.14.10) доказываются аналогично. По определению пространство F_{Δ_∞} замкнуто, так что

$$\mathscr{K}^2(a, b) = F_{\Delta_\infty} \oplus G_{\Delta_\infty}, \tag{3.14.11}$$

где G_{Δ_∞} — ортогональное дополнение в F_{Δ_∞}. Так как $F_{\Delta_\infty} \subseteq \mathscr{K}^2(a, b)$, то необходимо лишь доказать, что если $f(x) \in \mathscr{K}^2(a, b)$, то $f(x) \in F_{\Delta_\infty}$. Пусть сплайны $S_{\Delta_N}(f; x)$ $(N = 1, 2, \ldots)$ типа I интерполируют функцию $f(x)$ в узлах сетки Δ_N и для каждого N разность $f(x) - S_{\Delta_N}(f; x)$ принадлежит типу I′. Тогда по теореме 3.14.1

$$\lim_{N\to\infty} \|f - S_{\Delta_N, f}\| = 0. \tag{3.14.12}$$

Это доказывает теорему, так как пространство F_{Δ_∞} замкнуто и по лемме 3.14.1 составляющие его подпространства ортогональны.

Замечание 3.14.1. При доказательстве равенств (3.14.9) и (3.14.10) надо взять последовательность $\{S_{\Delta_N}(f; x)\}$, состоящую соответственно из сплайнов типа II′ и периодических сплайнов. В (3.14.9) множество $[F'_{\Delta_N} - F'_{\Delta_{N-1}}]$ для каждого N представляет собой семейство сплайнов типа II′, определяющие значения которых на сетке Δ_{N+1} равны нулю. В периодическом случае надо учесть, что $\mathscr{K}_p^2(a, b)$ плотно в $\mathscr{K}^2(a, b)$. Более подробно эти вопросы рассматриваются в разд. 6.14.

3.15. Канонические сеточные базисы и их свойства

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана последовательность сеток $\{\Delta_N\}$ $(N = 1, 2, \ldots)$, $\Delta_N \subset \Delta_{N+1}$. Предположим, что у нас есть ортонормальный базис для F_{Δ_1}. Распространим его до ортонормального базиса для F_{Δ_∞}, построив ортонормальный базис для ортогонального дополнения $[F_{\Delta_\infty} - F_{\Delta_1}]$ к F_{Δ_1} относительно F_{Δ_∞}. Для этого построим для каждого N ортонормальный базис для $[F_{\Delta_N} - F_{\Delta_1}]$. Тем же методом (с небольшими изменениями) можно построить ортонормальные базисы для $[F'_{\Delta_\infty} - F'_{\Delta_1}]$ и $[P_{\Delta_\infty} - P_{\Delta_1}]$. Если $\| \Delta_N \| \to 0$ при $N \to \infty$, то из теоремы 3.14.2 следует, что таким способом можно построить явные ортонормальные базисы для $\mathscr{K}^2(a, b)$. Эти ортонормальные базисы для $[F_{\Delta_\infty} - F_{\Delta_1}]$, $[F'_{\Delta_\infty} - F'_{\Delta_1}]$ и $[P_{\Delta_\infty} - P_{\Delta_1}]$ будем называть *сеточными базисами*.

Обозначим через M множество всех различных узлов последовательности сеток $\{\Delta_N\}$ $(N = 1, 2, \ldots)$, не содержащихся в сетке Δ_1. Так как множество M счетно, его можно занумеровать:

$$M = \{P_{11}\ P_{21} \ldots\}. \tag{3.15.1}$$

Если нас интересует сеточный базис лишь для $[F_{\Delta_N} - F_{\Delta_1}]$, то множество M будет содержать лишь конечное число элементов; обозначим это множество через M_N. Пусть сетка Δ_{11} получена добавлением точки P_1 к сетке Δ_1, и пусть сплайн $\mu_1(x)$ типа I′ на сетке Δ_{11} таков, что $\mu_1(P_1) = 1$ и $\mu_1(x) = 0$ в точках сетки Δ_1. Если сетка Δ_{1i} получена добавлением точки P_i к сетке Δ_{1i-1} $(\Delta_{10} = \Delta_1)$, то сплайн $\mu_i(x)$ типа I′ на сетке Δ_{1i} таков, что $\mu_i(P_i) = 1$ и $\mu_i(x) = 0$ в точках сетки Δ_{1i-1}. В силу леммы 3.14.1 последовательность $\{\mu_i(x)\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ состоит из взаимно ортогональных сплайнов типа I′ и по построению образует базис для $[F_{\Delta_{1\infty}} - F_{\Delta_1}]$, где

$$F_{\Delta_{1\infty}} = F_{\Delta_1} \oplus [F_{\Delta_{11}} - F_{\Delta_1}] \oplus [F_{\Delta_{12}} - F_{\Delta_{11}}] \oplus \ldots.$$

Положим

$$S_i(x) = \frac{\mu_i(x)}{\| \mu_i(x) \|} \qquad (i = 1, 2, \ldots). \tag{3.15.2}$$

Последовательность $\{S_i(x)\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ ортонормальных сплайнов типа I′ образует базис для $[F_{\Delta_{1\infty}} - F_{\Delta_1}]$. Если мы поступим, как в предыдущем случае, но потребуем, чтобы сплайны $\mu_i(x)$ имели тип II′ или были периодическими, то получим сеточные базисы соответственно для $[F'_{\Delta_{1\infty}} - F'_{\Delta_1}]$ и $[P_{\Delta_{1\infty}} - P_{\Delta_1}]$ (необходимые дополнительные определения очевидны).

Эти базисы не единственны, ибо построение зависит от того, как занумеровано множество M. Более того, это не те базисы, которые нам нужны для $[F_{\Delta_\infty} - F_{\Delta_1}]$, $[F'_{\Delta_\infty} - F'_{\Delta_1}]$ и $[P_{\Delta_\infty} - P_{\Delta_1}]$. Однако если для каждого N процесс исчерпает точки сетки Δ_N прежде, чем будут занумерованы все точки для сеток с большим номером, то получатся как раз требуемые сеточные базисы. Выделим один естественный способ нумерации такого типа и назовем полученные сеточные базисы *каноническими сеточными базисами*: для каждого N пронумеруем слева направо узлы, принадлежащие сетке Δ_N, но не принадлежащие предыдущим сеткам. Таким образом, канонический сеточный базис определяется однозначно и зависит лишь от данной последовательности сеток. Однако любой сеточный базис будет каноническим относительно вспомогательной последовательности сеток $\{\Delta_{1i}\}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$, использованной при его построении.

Лемма 3.15.1. *Пусть последовательность сеток* $\{\Delta_N\}$ $(N = 1, 2, \ldots)$, $\Delta_N \subset \Delta_{N+1}$, *определяет канонический сеточный базис* $\{S_i(x)\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ *для* $[F_{\Delta_\infty} - F_{\Delta_1}]$, $[F'_{\Delta_\infty} - F'_{\Delta_1}]$ *или* $[P_{\Delta_\infty} - P_{\Delta_1}]$. *Пусть* $\{\Delta_{1i}\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ — *соответствующая последовательность сеток, использованная при построении базиса* $\{S_i(x)\}$. *Тогда*

$$|S_i^{(\alpha)}(x)| \leqslant 2^{1/2} \|\Delta_{1i}\|^{(3-2\alpha)/2} \qquad (\alpha = 0, 1;\ i = 1, 2, \ldots). \tag{3.15.3}$$

Доказательство. Пусть сетка Δ_{1i} определяется точками $a = x_0^i < x_1^i < \ldots < x_{m_i}^i = b$. Для любой точки $x \in [a, b]$ можно найти такой интервал $x_{j-2}^i \leqslant x \leqslant x_j^i$, что $S_i(x_{j-2}^i) = S_i(x_j^i) = 0$, поскольку сплайн $S_i(x)$ равен нулю в точках сетки Δ_{1i-1}. Следовательно, можно найти такую точку $x_{ij} \in [x_{j-2}^i, x_j^i]$, что $S_i'(x_{ij}) = 0$. Отсюда и из неравенства Буняковского — Шварца выводим, что

$$|S_i'(x)| \leqslant \int_{x_{ij}}^{x} |S_i''(x)|\,|dx| \leqslant \|S_i(x)\|\,|x - x_{ij}|^{1/2} \leqslant 2^{1/2}\|\Delta_{1i}\|^{1/2}.$$

Если $x \in [x_{j-1}^i, x_j^i]$, то либо $S_i(x_{j-1}^i) = 0$, либо $S_i(x_j^i) = 0$. Поэтому, не нарушая общности, можно считать, что $S_i(x_{j-1}^i) = 0$. Итак,

$$|S_i(x)| \leqslant \int_{x_{j-1}^i}^{x} |S_i'(x)|\,|dx| \leqslant 2^{1/2}\|\Delta_{1i}\|^{3/2},$$

и лемма доказана.

Заметим, что для каждого N существует такое число i_N, что $\Delta_N = \Delta_{1i_N}$. Таким образом, если $\| \Delta_N \| \to 0$ при $N \to \infty$, то $\| \Delta_{1i} \| \to 0$ при $i \to \infty$. Если мы предположим, что $\| \Delta_{1i} \| \to 0$ при $i \to \infty$ с приемлемой скоростью, то получим следующую теорему.

Теорема 3.15.1. *Пусть для некоторого $K > 0$, не зависящего от i, канонический сеточный базис $\{S_i(x)\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ удовлетворяет условию $\| \Delta_{1i} \| \leqslant K/i$. Тогда существует такое действительное число $B > 0$, что*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \{S_i(x)\}^2 < B < \infty.$$

Доказательство. В силу леммы 3.15.1

$$\sum_{i=1}^{\infty} \{S_i(x)\}^2 \leqslant 2 \sum_{i=1}^{\infty} \| \Delta_{1i} \|^3 \leqslant 2K^3 \sum_{i=1}^{\infty} i^{-3} < \infty,$$

и теорема доказана.

Замечание 3.15.1. Условия, налагаемые на $\{\Delta_{1i}\}$ в теореме 3.15.1, обычно можно проверить, исходя из свойств $\{\Delta_N\}$, благодаря наличию связи между двумя последовательностями сеток.

3.16. Остаточные члены

Пусть даны функция $f(x)$ из класса $\mathscr{K}^2(a, b)$ и сетка Δ_1: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_K = b$, и пусть сплайн $S_{\Delta_1}(f; x)$ принадлежит типу I, интерполирует функцию $f(x)$ на сетке Δ_1 и разность $f(x) - S_{\Delta_1}(f; x)$ принадлежит типу I'. Исследуем остаточный член

$$R(x) \equiv f(x) - S_{\Delta_1}(f; x). \tag{3.16.1}$$

Добавим к узлам сетки Δ_1 середины всех ее интервалов — получим новую сетку Δ_2; с ней проделаем то же самое и т. д. В результате появится последовательность сеток $\{\Delta_N\}$ $(N = 1, 2, \ldots)$, для которой $\Delta_N \subset \Delta_{N+1}$ и $\| \Delta_N \| \to 0$ при $N \to \infty$. Каждая сетка Δ_N содержит $(2^{N-1}K + 1)$ узлов. Пусть $\{S_i(x)\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ — канонический сеточный базис для $[F_{\Delta_\infty} - F_{\Delta_1}]$ и $\{\Delta_{1i}\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ — соответствующая ему последовательность сеток. Тогда

$$\Delta_{12^{N-2}K} = \Delta_N \qquad (N = 2, 3, \ldots). \tag{3.16.2}$$

Так как

$$\Delta_N \subseteq \Delta_{1i} \subseteq \Delta_{N+1} \qquad (i = 2^{N-2}K, 2^{N-2}K + 1, \ldots, 2^{N-1}K).$$

то

$$\| \Delta_{1i} \| \leqslant \| \Delta_N \| = \frac{1}{2^{N-1}} \| \Delta_1 \| \leqslant \frac{K \| \Delta_1 \|}{i}, \tag{3.16.3}$$

поскольку $i \leqslant 2^{N-1}K$. Итак, условия теоремы 3.15.1 выполнены и для некоторого положительного действительного числа B

$$S(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \{S_i(x)\}^2 dx < B < \infty. \tag{3.16.4}$$

Положим

$$K_n(x, t) = \sum_{i=1}^{n} S_i(x) S_i''(t) \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{3.16.5}$$

Тогда в силу ортонормальности функций $S_i(t)$

$$\int_a^b \{K_{n+p}(x, t) - K_n(x, t)\}^2 dt = \sum_{i=n+1}^{n+p} \{S_i(x)\}^2. \tag{3.16.6}$$

Из (3.16.6) и (3.16.4) следует, что для каждой точки $x \in [a, b]$ последовательность $\{K_n(x, t)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ является последовательностью Коши в $L^2(a, b)$, а из неравенства Буняковского — Шварца следует, что для каждой точки $x \in [a, b]$ она является последовательностью Коши также и в $L(a, b)$. Пусть $K(x, t)$ — ее предел.

В силу (3.16.4) и (3.16.6) интеграл $\int_a^b K(x, t)^2 dt$ равномерно ограничен относительно x. Таким образом, $K(x, t) \in L^2([a, b] \times [a, b])$ и

$$\int_a^b K(x, t) f''(t) dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b K_n(x, t) f''(t) dt =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} S_i(x) \int_a^b S_i''(t) f''(t) dt =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (S_i, f) S_i(x) = f(x) - S_{\Delta_1}(f; x) = R(x).$$

Итак, доказана

Т е о р е м а 3.16.1. *Пусть даны функция $f(x)$ из класса $\mathcal{K}^2(a, b)$ и сетка Δ_1: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$. Пусть сплайн $S_{\Delta_1}(f; x)$, интерполирующий функцию $f(x)$ в узлах сетки Δ_1, принадлежит типу* I *и разность $f(x) - S_{\Delta_1}(f; x)$ принадлежит типу* I′. *Тогда существует ядро $K(x, t) \in L^2([a, b] \times [a, b])$, которое для каждой точки $x \in [a, b]$ принадлежит пространствам $L(a, b)$ и $L^2(a, b)$, и*

$$R(x) = f(x) - S_{\Delta_1}(f; x) = \int_a^b K(x, t) f''(t) dt. \tag{3.16.7}$$

Замечание 3.16.1. Аналогичные ядра можно получить для интерполяционных сплайнов типа II′ и для периодических интерполяционных сплайнов. Заметим, что эти ядра не зависят от функции $f(x)$.

3.17. Преобразования, определяемые сеткой

Сард [1] широко использовал остаточные члены вида (3.16.7) при анализе целого ряда аппроксимаций. Существование ядер $K(x, t)$ в случае, когда в формуле (3.16.7) вторая производная $f''(x)$ заменяется произвольной производной, доказано при очень общих условиях. Первоначальные результаты в этом направлении восходят к Пеано [1]. В гл. V мы докажем существование ядер для сплайн-аппроксимаций, в которых основную роль играют производные, отличные от второй. С более общей точки зрения подошел Гревиль [1], изучивший существование таких ядер в случае, когда $f''(x)$ в формуле (3.16.7) заменяется линейным дифференциальным оператором L порядка n.

Пусть с помощью $k+1$ функций $a_i(x)$ и сетки Δ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b$ определено семейство преобразований вида

$$Tf(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i(x) f(x_i). \tag{3.17.1}$$

Гревиль [1] установил, что если для линейного дифференциального оператора L

$$R_T f(x) \equiv f(x) - Tf(x) = \int_a^b K_T(x, t) Lf(t)\, dt, \tag{3.17.2}$$

то для каждой точки x из $[a, b]$ интеграл

$$\int_a^b \{K_T(x, t)\}^2\, dt \tag{3.17.3}$$

принимает наименьшее значение, если $a_i(x)$ в (3.17.1) выбираются так, чтобы функция $Tf(x)$ была обобщенным сплайном типа II′, интерполирующим $f(x)$ в узлах сетки Δ. Этот результат представляет собой частичное распространение результатов Шёнберга [6] по приближению линейных функционалов на более общий случай. В гл. VI мы дадим полное распространение результатов Шёнберга на обобщенные сплайны.

Наряду с преобразованиями (3.17.1) можно рассмотреть преобразования несколько более общего вида:

$$Tf(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i(x) f(x_i) + b_0(x) f'(x_0) + b_1(x) f'(x_k), \tag{3.17.4}$$

где дополнительные функции $b_0(x)$ и $b_1(x)$ также принадлежат классу $\mathscr{K}^n(a, b)$. Здесь мы ограничимся случаем $n = 2$ и рассмотрим $\mathscr{K}^2(a, b)$ как

гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_a^b f''(x)\, g''(x)\, dx + f'(a)\, g'(a) + f'(b)\, g'(b); \qquad (3.17.5)$$

при этом будем отождествлять функции, отличающиеся на постоянное слагаемое. Кроме того, мы будем считать, что T и R_T линейно отображают $\mathscr{K}^2(a, b)$ в себя. Нас интересует вопрос: при каких условиях на функции $a_i(x)$ ($i = 0, 1, \ldots, k$), $b_0(x)$ и $b_1(x)$ величина $\| R_T \|$ будет минимальной?

Пространство $\mathscr{K}^2(a, b)$ можно представить в виде

$$\mathscr{K}^2(a, b) = F_\Delta \oplus G_\Delta, \qquad (3.17.6.1)$$

где

$$G_\Delta = [\mathscr{K}^2(a, b) - F_\Delta] \qquad (3.17.6.2)$$

— ортогональное дополнение к F_Δ, т. е. G_Δ совпадает с множеством всех функций из $\mathscr{K}^2(a, b)$, которые обращаются в нуль на Δ и первые производные которых равны нулю при $x = a$ и $x = b$. Таким образом, для $f(x) \in G_\Delta$

$$R_T f(x) = f(x), \qquad (3.17.7)$$

откуда $\| R_T \| \geqslant 1$ для всех допустимых преобразований T. Постоянная функция $f(x)$ эквивалентна нулевой функции, так что в этом случае Tf должно быть эквивалентно 0. Следовательно, если мы хотим, чтобы на пространстве $\mathscr{K}^2(a, b)$ с указанными отождествлениями было определено преобразование T, мы должны потребовать, чтобы сумма

$$\sum_{i=0}^{k} a_i(x)$$

была постоянной относительно x.

Пусть в качестве функций $a_i(x)$ выбраны кубические сплайны типа I′ на сетке Δ (так что $a_i(x_j) = \delta_{ij}$), в качестве $b_0(x)$ — кубический сплайн на Δ, который обращается в нуль в каждой точке сетки Δ и первая производная которого равна 1 в точке x_0 и нулю в точке x_k, а в качестве $b_1(x)$ — кубический сплайн, аналогичный $b_0(x)$, но с переставленными значениями первых производных. Тогда $Tf(x)$ будет проекцией функции $f(x)$ на F_Δ. Сумма

$$\sum_{i=0}^{k} a_i(x)$$

будет постоянной относительно x; на самом деле она тождественно равна 1. В этом случае линейные отображения T и R_T будут проекторами, а соответствующие линейные подпространства F_Δ и G_Δ будут ортогональными дополнениями. Из всего этого следует, что

$$\| T \| = \| R_T \| = 1. \qquad (3.17.8)$$

При таком выборе преобразования T оно не только будет проектором, но как проектор будет больше любого другого проектора в классе рассматриваемых

преобразований, поскольку пространство нулей любого другого проектора вида (3.17.4) должно содержать G_Δ. Если же T не является проектором, то в $T[\mathscr{K}^2(a, b)]$ найдется лучшее приближение для $f(x)$, чем $Tf(x)$. Если T — проектор и $T_1 > T$ — также проектор, то $T_1 f(x)$ дает по крайней мере такое же хорошее приближение для $f(x)$, как и $Tf(x)$. Здесь мерой качества приближения $Tf(x)$ к $f(x)$ служит малость величины $\| R_T f \|$.

Незначительно изменив представление (3.17.4), можно определить два соответствующих класса преобразований, где сплайны типа II′ и периодические сплайны играют ту же роль, что и сплайны типа I для преобразований (3.17.4).

3.18. Связь с ракетной техникой

Чтобы максимизировать полезный груз, доставляемый ракетой, мы должны минимизировать интеграл от квадрата приложенного ускорения (Зейферт [1, 10-2-2]). В поле, свободном от тяготения, это равносильно минимизации интеграла от квадрата полного ускорения. Если заданы начальное и конечное положения и скорости, а также время полета, то из теоремы 3.4.3 следует, что координаты оптимальной траектории являются кубическими функциями от времени. Этот вывод согласуется с обычным (формальным) анализом задачи (Зейферт [1, 10-3-1]). Если, кроме того, заданы промежуточные положения в моменты времени, отличные от начального и конечного, то решением будет траектория, координаты которой являются сплайнами относительно времени. Это также следует из теоремы 3.4.3. Отметим, что нет надобности предполагать приложенное ускорение непрерывным, достаточно считать его интегрируемым с квадратом. При обычном анализе задачи оптимизация ограничивается профилями ускорения, имеющими вторые производные по времени, чтобы обосновать двойное интегрирование по частям. При доказательстве теоремы 3.4.3 дифференцируется только сплайн, а не функция из класса $\mathscr{K}^2(a, b)$, на которой осуществляется оптимизация.

Глава IV. ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ СПЛАЙНЫ

4.1. Определение и основные уравнения

Естественно попытаться распространить понятие кубического сплайна на кривые, составленные из кусков полиномов произвольной фиксированной степени, и получить для этих кривых свойства, аналогичные установленным в предыдущих главах для кубических сплайнов. Цель этой главы — ввести полиномиальные сплайны и рассмотреть их алгебраические свойства. В следующей главе будут подробно исследованы внутренние свойства полиномиальных сплайнов нечетной степени.

Первый важный момент, на который надо обратить внимание при переходе к полиномиальным сплайнам,— это существенная разница между сплайнами четной и нечетной степени. Оказывается, например, что полиномиальные сплайны четной степени, интерполирующие заданную функцию в узлах сетки, могут не существовать. По этой причине определение интерполяционного сплайна нечетной степени, которое в действительности приводит к ожидаемому распространению свойств кубического сплайна, для сплайнов четной степени должно быть другим.

Рассмотрим сначала число степеней свободы. Полиномиальные сплайны степени $2n-1$ на сетке $\Delta: a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ зависят от $2nN$ произвольных постоянных. Требование непрерывности производных порядка $0, 1, \ldots, 2n-2$ в каждом внутреннем узле сетки дает $(2n-1)(N-1)$ условий. Остальные $N+2n-1$ степеней свободы распределяются на интерполирование в $N+1$ узлах сетки и на $n-1$ краевых условий в каждом из концов $x = x_0$, $x = x_N$.

Для сплайнов степени $2n$ степеней свободы всего $(2n+1)N$. Требование непрерывности производных порядка $0,1, \ldots, 2n-1$ во внутренних узлах сетки дает $2n(N-1)$ условий. Остальные $2n+N$ составляют n краевых условий в точках $x = x_0$ и $x = x_N$ и по одному условию интерполяции в каждом интервале. Естественно взять в качестве N точек интерполяции середину каждого интервала сетки.

В этой главе мы не делаем попытки полностью описать сплайны четной степени. Они вводятся главным образом в ситуациях, где в сочетании со сплайнами нечетной степени они дают более ясную общую картину.

Итак, мы требуем, чтобы полиномиальный сплайн $S_\Delta(x)$ степени k на сетке Δ интерполировал заданную функцию $f(x)$ в узлах сетки, если k нечетно, и в точках

$$\xi_i \ (i = 1, 2, \ldots, N;\ x_{i-1} < \xi_i < x_i),$$

если k четно. Периодические сплайны степени $2n-1$ и $2n$ удовлетворяют, кроме того, условиям $S_\Delta^{(q)}(x_0+0) = S_\Delta^{(q)}(x_N-0)$ для $q=0, 1, \ldots, 2n-2$ и $q=0, 1, \ldots, 2n-1$ соответственно.

Согласно формуле Тейлора с остаточным членом в интегральной форме Коши,

$$S_\Delta(x) = \sum_{j=0}^{k-2} \frac{1}{j!}(x-a)^j S_\Delta^{(j)}(a) + \frac{1}{(k-2)!}\int_a^x (x-t)^{k-2} S_\Delta^{(k-1)}(t)\,dt.$$

Для сплайна степени $2n-1$ запишем это разложение в виде

$$S_\Delta(x_i) = \sum_{k=0}^{2n-3} \frac{1}{k!}(x_i-a)^k S_\Delta^{(k)}(a) + \frac{1}{(2n-3)!}\int_a^b (x_i-t)_+^{2n-3} S_\Delta^{(2n-2)}(t)\,dt, \quad (4.1.1)$$

где для $m \geqslant 0$

$$x_+^m = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ x^m, & x > 0. \end{cases}$$

В этих обозначениях единичная ступенчатая функция со скачком в точке $x=0$ имеет вид x_+^0.

Так как функция $S_\Delta^{(2n-2)}(x)$ линейна на каждом интервале (x_{j-1}, x_j), а первый член в правой части равенства (4.1.1) — полином степени $2n-3$ по x_i, то, вычислив центральные разделенные разности

$$\delta_i^{2n-2} f(x_i) = f[x_{i-n+1}, x_{i-n+2}, \ldots, x_{i+n-1}]$$

при $N \geqslant 2n-2$ и $n-1 \leqslant i \leqslant N-n+1$, получим

$$\delta_i^{2n-2} S_\Delta(x_i) =$$

$$= \frac{1}{(2n-3)!}\delta_i^{2n-2}\sum_{i=1}^{N}\int_{x_{j-1}}^{x_j}\left[S_\Delta^{(2n-2)}(x_{j-1})\frac{x_j-t}{h_j} + S_\Delta^{(2n-2)}(x_j)\frac{t-x_{j-1}}{h_j}\right](x_i-t)_+^{2n-3}\,dt. \quad (4.1.2)$$

Если $n \geqslant 1$, то $d(x_i-t)_+^n/dt = -n(x_i-t)_+^{n-1}$. Проинтегрируем по частям правую часть равенства (4.1.2):

$$\frac{1}{(2n-3)!}\delta_i^{2n-2}\sum_{j=1}^{N}\left\{-\left[\left(M_{j-1}\frac{x_j-t}{h_j} + M_j\frac{t-x_{j-1}}{h_j}\right)\frac{(x_i-t)_+^{2n-2}}{(2n-2)}\right]_{x_{j-1}}^{x_j} - \right.$$

$$\left. -\left[\frac{M_j-M_{j-1}}{h_j}\cdot\frac{(x_i-t)_+^{2n-1}}{(2n-2)(2n-1)}\right]_{x_{j-1}}^{x_j}\right\} =$$

$$= \frac{1}{(2n-2)!}\delta_i^{2n-2}\left\{-\sum_{j=1}^{N}\left[M_j(x_i-x_j)_+^{2n-2} - M_{j-1}(x_i-x_{j-1})_+^{2n-2}\right]\right\} -$$

$$-\frac{1}{(2n-1)!}\,\delta_i^{2n-2}\left\{\sum_{j=1}^{N}\frac{M_j-M_{j-1}}{h_j}\left[(x_i-x_j)_+^{2n-1}-(x_i-x_{j-1})_+^{2n-1}\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{(2n-2)!}\,\delta_i^{2n-2}M_0\left\{(x_i-x_0)_+^{2n-2}+\frac{(x_i-x_1)_+^{2n-1}-(x_i-x_0)_+^{2n-1}}{(2n-1)\,h_1}\right\}+$$

$$+\frac{1}{(2n-1)!}\sum_{j=1}^{N}M_j\,(h_j+h_{j+1})\,\delta_i^{2n-2}\delta_j^2\,(x_i-x_j)_+^{2n-1}, \tag{4.1.3}$$

где $M_j=S_\Delta^{(2n-2)}(x_j)$.

Функция $\delta_j^2\,(x-x_j)_+^{2n-1}$ при $x\leqslant x_{j-1}$ тождественно равна нулю, а при $x\geqslant x_{j+1}$ совпадает с полиномом степени $2n-3$. Следовательно, $\delta_i^{2n-2}\delta_j^2\,(x_i-x_j)_+^{2n-1}=0$ при $i\leqslant j-n$ и $i\geqslant j+n$. Если $i\geqslant 1$, то $(x_i-x_0)_+^{2n-2}+[(x_i-x_1)_+^{2n-1}-(x_i-x_0)_+^{2n-1}]/(2n-1)\,h_1$ — полином степени $2n-3$ по x_i. Таким образом,

$$\delta_i^{2n-2}\left\{(x_i-x_0)_+^{2n-2}+\frac{(x_i-x_1)_+^{2n-1}-(x_i-x_0)_+^{2n-1}}{(2n-1)\,h_1}\right\}=0,$$

если $i\geqslant n$. Для $i=n-1$ коэффициент при M_0 можно записать в виде

$$\frac{1}{(2n-2)!}\,\delta_i^{2n-2}\left[\frac{(x_i-x_1)_+^{2n-1}-(x_i-x_1)^{2n-1}}{(2n-1)\,h_1}\right]_{i=n-1}=$$

$$=\frac{h_1^{2n-2}}{(2n-1)!\prod\limits_{j=1}^{2n-2}(h_1+\ldots+h_j)}. \tag{4.1.4.1}$$

С помощью простого вычисления разностей можно показать, что

$$\frac{1}{(2n-2)!}\,(h_{i-n+1}+h_{i-n+2})\,[\delta_i^{2n-2}\delta_j^2\,(x_i-x_j)_+^{2n-1}]_{j=i-n+1}=$$

$$=\frac{(h_{i-n+2})^{2n-2}}{(2n-1)!\prod\limits_{j=i-n+2}^{i+n-1}(h_{i-n+2}+\ldots+h_j)}. \tag{4.1.4.2}$$

Для $n-1\leqslant i\leqslant N-n+1$ равенство (4.1.2) имеет вид

$$\prod_{j=i-n+1}^{i+n-1}A_{ij}M_j=\delta_i^{2n-2}S_\Delta(x_i), \tag{4.1.5}$$

где

$$A_{ij}=\frac{1}{(2n-1)!}\,(h_j+h_{j+1})\,\delta_i^{2n-2}\delta_j^2\,(x_i-x_j)_+^{2n-1}, \tag{4.1.6}$$

при этом в соответствии с (4.1.4) полагаем

$$\frac{1}{(2n-1)!}\,(h_0+h_1)\,[\delta_i^{2n-2}\delta_j^2\,(x_i-x_j)_+^{2n-1}]_{\substack{i=n-1\\ j=0}}=\frac{h_1^{2n-2}}{(2n-1)!\prod\limits_{j=1}^{2n-2}(h_1+\ldots+h_j)}.$$

В периодическом случае мы полагаем $x_{j-N} = x_j - (b-a)$ и $x_{j+N} = x_j + (b-a)$ и учитываем периодический характер сплайна $S_\Delta(x)$. В силу сказанного выше член с M_0 в формуле (4.1.3) исчезает и равенство (4.1.5) выполняется для каждого узла сетки.

Так как величины A_{ij} не зависят от сплайна $S_\Delta(x)$, то в равенстве (4.1.5) его можно заменить функцией x^{2n-2}, которая на той же сетке сама является сплайном степени $2n-1$. Тогда в силу (4.1.5)

$$(2n-2)! \sum_{j=i-n+1}^{i+n-1} A_{ij} = 1 \qquad (n-1 \leqslant i \leqslant N-n+1). \tag{4.1.7.1}$$

Аналогично если сплайн $S_\Delta(x)$ заменить функцией x^{2n-1}, то получим

$$(2n-1)! \sum_{j=i-n+1}^{i+n-1} x_i A_{ij} = \sum_{j=i-n+1}^{i+n-1} x_j \qquad (n-1 \leqslant i \leqslant N-n+1). \tag{4.1.7.2}$$

В периодическом случае равенства (4.1.7.1) и (4.1.7.2) справедливы для всех i. Дополнительное важное свойство заключается в том, что $A_{ij} \geqslant 0$. В самом деле, рассмотрим функцию

$$\Phi(x) \equiv \frac{(x-x_{j+1})_+^{2n-1} - (x-x_j)_+^{2n-1}}{h_{j+1}} - \frac{(x-x_j)_+^{2n-1} - (x-x_{j-1})_+^{2n-1}}{h_j}.$$

Легко видеть, что $\Phi^{(p)}(x) = 0$ $(p = 0, 1, \ldots, 2n-2)$ для $x \leqslant x_{j-1}$ и

$$\Phi^{(2n-2)}(x) = \begin{cases} (2n-1)!\,(x-x_{j-1})/h_j, & x_{j-1} \leqslant x \leqslant x_j, \\ (2n-1)!\,(x_{j+1}-x)/h_{j+1}, & x_j \leqslant x \leqslant x_{j+1}, \\ 0, & x \geqslant x_{j+1}. \end{cases}$$

Таким образом, первые $2n-2$ производных нигде не отрицательны, поэтому все разделенные разности порядка $2n-2$ в равенстве (4.1.6) не отрицательны.

В периодическом и в непериодическом случае, когда

$$n-1 \leqslant i \leqslant N-n+1,$$

уравнения для сплайнов имеют вид (4.1.5). Кроме того, в непериодическом случае краевые условия дают дополнительно $2n-2$ соотношений. При задании краевых условий мы ограничимся сплайнами нескольких определенных типов.

Под *простым сплайном степени* $2n-1$ будем понимать полиномиальный сплайн степени $2n-1$, принадлежащий классу $C^{2n-2}[a, b]$. Далее, будем говорить, что полиномиальный сплайн степени $2n-1$ и вообще функция (когда из контекста ясно, чему равно n) принадлежат типу I′, если их первые $n-1$ производных обращаются в нуль при $x = a$ и $x = b$. Две функции принадлежат одному и тому же *классу эквивалентности* типа I, если их разность принадлежит типу I′. В этом же смысле (снова когда из контекста ясно, чему равно n) мы будем говорить, что функция $f(x)$ принадлежит типу II′, если $f^{(p)}(a) = f^{(p)}(b) = 0$ для $p = n, n+1, \ldots, 2n-2$. Две функции принадлежат одному и тому же классу эквивалентности типа II, если их разность принадлежит типу II′. Как и раньше, сплайн принадлежит типу I, если $f^{(p)}(a)$ и $f^{(p)}(b)$

($p = 1, 2, \ldots, n-1$) явно входят в представление сплайна как независимые параметры, и сплайн принадлежит типу II, если в его представление явно входят $f^{(p)}(a)$ и $f^{(p)}(b)$ ($p = n, n+1, \ldots, 2n-2$). Во всех этих случаях зависимость от величин $f^{(p)}(a)$ и $f^{(p)}(b)$ должна быть линейной.

Чтобы задать краевые условия для сплайнов типов I и II, образуем разделенные разности вида (4.1.1). Пусть $[x_0, x_1, \ldots, x_j]^k$ и $[x_0, x_1, \ldots, x_j]_+^k$ обозначают соответственно разделенные разности от x^k и x_+^k относительно точек $x_0, x_1, \ldots, x_j$. Тогда из (4.1.1) получаем тем же методом, что и при выводе (4.1.3), уравнения

$$S_\Delta[x_0, x_1, \ldots, x_q] = \sum_{k=q}^{2n-3} \frac{1}{k!} S_\Delta^{(k)}(x_0)\,[0, x_1-x_0, \ldots, x_q-x_0]^k + \\ + \frac{M_0}{(2n-2)!}\left\{[0, x_1-x_0, \ldots, x_q-x_0]_+^{2n-2} + \right. \\ \left. + \frac{[x_0-x_1, 0, x_2-x_1, \ldots, x_q-x_1]_+^{2n-1} - [0, x_1-x_0, \ldots, x_q-x_0]_+^{2n-2}}{(2n-1)\,h_1}\right\} + \\ + \frac{1}{(2n-1)!}\sum_{j=1}^{q} M_j(h_j+h_{j+1})\,d_j[x_0, x_1, \ldots, x_q], \qquad (4.1.8)$$

где $q = 1, 2, \ldots, 2n-3$ и $d_j(x) = \delta_j^2 (x - x_j)_+^{2n-1}$. Последняя сумма в (4.1.8) распространяется лишь на индексы $1, \ldots, q$, поскольку $d_j(x_k) = 0$ при $k \leqslant j-1$.

Для сплайнов типа I мы исключаем неизвестные величины $S_\Delta^{(q)}(a)$ ($q = n, n+1, \ldots, 2n-3$) и получаем $n-1$ уравнений относительно $M_0, M_1, \ldots, M_{2n-3}$. Для сплайнов типа II мы рассматриваем (4.1.8) лишь при $q = n, n+1, \ldots, 2n-3$ и получаем $n-2$ уравнений относительно $M_0, M_1, \ldots, M_{2n-3}$, которые вместе со спецификой выбора M_0 для сплайнов типа II вновь дадут $n-1$ уравнений. Если вместо (4.1.1) применить соотношение

$$S_\Delta(x_i) = \sum_{k=0}^{2n-3} \frac{1}{k!}(x_i-b)^k S_\Delta^{(k)}(b) + \frac{1}{(2n-3)!}\int_a^b S_\Delta^{(2n-2)}(t)\,(x_i-t)_+^{2n-3}\,dt, \qquad (4.1.9)$$

то у нас будет аналогичное множество $n-1$ краевых условий при $x = b$. Таким образом, $N+1-2(n-1)$ стандартных уравнений вида (4.1.5) вместе с $2n-2$ краевыми условиями дадут $N+1$ уравнений относительно $M_0, M_1, \ldots, M_N$.

Если $N < 2n$, то стандартные уравнения вида (4.1.5) не применяются и определяющие уравнения выводят только из равенств (4.1.8) и их аналогов, связанных с (4.1.9). В этой связи заметим, что условие $N \geqslant n-1$ необходимо для существования сплайна типа II. Проинтегрировав $n-1$ раз на отрезке $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$ тождество

$$S_\Delta^{(2n-2)}(x) = M_0\frac{x_1-x}{h_1} + M_1\frac{x-x_0}{h_1}$$

и воспользовавшись условием $S_\Delta^{(q)}(a) = f^{(q)}(a)$ $(q = n, \ldots, 2n-2)$, выразим $S_\Delta^{(q)}(x_1)$ $(q = n, n+1, \ldots, 2n-2)$ через единственный параметр M_1. Проинтегрировав $S_\Delta^{(2n-2)}(x)$ на отрезке $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, выразим $S_\Delta^{(q)}(x_2)$ $(q = n, n+1, \ldots, 2n-2)$ через параметры M_1, M_2. Наконец, проинтегрировав $S_\Delta^{(2n-2)}(x)$ на отрезке $x_{N-1} \leqslant x \leqslant x_N$, выразим $S_\Delta^{(q)}(b)$ $(q = n, n+1, \ldots, 2n-2)$ через параметры $M_1, \ldots, M_N$. Так как величины $S_\Delta^{(q)}(b)$ $(q = n, n+1, \ldots, 2n-2)$ заданы, то в точке b остается $N - n + 1$ степеней свободы, так что $N \geqslant n - 1$. Следующие n интегрирований приводят к $N - n + 1 + n = N + 1$ степеням свободы и, значит, к возможности интерполяции заданной последовательности $\{f_j\}$: $S_\Delta(x_j) = f_j$ $(j = 0, 1, \ldots, N)$.

Для полного определения сплайна надо выразить производные $S_\Delta^{(q)}(x_j)$ $(q = 1, \ldots, 2n-3;\ j = 0, 1, \ldots, N)$ через параметры M_j и через значения $S_\Delta(x_j)$, которые сплайн интерполирует в узлах сетки Δ.

Интегрируя функцию

$$S_\Delta^{(2n-2)}(x) = M_{j-1}\frac{x_j - x}{h_j} + M_j\frac{x - x_{j-1}}{h_j} \tag{4.1.10}$$

на отрезке $x_{j-1} \leqslant x \leqslant x_j$, получаем

$$S_\Delta^{(2n-2-p)}(x) = (-1)^p M_{j-1}\frac{(x_j - x)^{p+1}}{h_j(p+1)!} + M_j\frac{(x - x_{j-1})^{p+1}}{h_j(p+1)!} + \sum_{k=1}^{p}\frac{B_{kj}}{(p-k)!}(x - x_j)^{p-k} \qquad (p = 1, 2, \ldots, 2n-2), \tag{4.1.11}$$

где

$$B_{kj} = S_\Delta^{(2n-2-k)}(x_j) - M_j\frac{h_j^k}{(k+1)!}. \tag{4.1.12}$$

Заменив в (4.1.1) a на x_j и при $n-1 \leqslant j \leqslant N-n+1$ вычислив разделенные разности, получим систему уравнений для определения величин B_{kj}. Для четного p имеем

$$S_\Delta[x_{j-p/2}, \ldots, x_{j+p/2}] = \sum_{k=p}^{2n-3}\frac{1}{k!}\left\{B_{2n-2-kj} + M_j\frac{h_j^{2n-2-k}}{(2n-1-k)!}\right\}[x_{j-p/2} - x_j, \ldots, x_{j+p/2} - x_j]^k + F_j[x_{j-p/2}, \ldots, x_{j+p/2}], \tag{4.1.13}$$

$$F_j(x_i) = \frac{1}{(2n-3)!}\int_{x_j}^{x_i} S_\Delta^{(2n-2)}(t)(x_i - t)^{2n-3}\,dt = \frac{1}{(2n-2)!}M_j\left\{(x_i - x_j)^{2n-2} + \frac{(x_i - x_{j+1})^{2n-1} - (x_i - x_j)^{2n-1}}{(2n-1)h_{j+1}}\right\} + M_i\frac{h_i^{2n-2}}{(2n-1)!} + \frac{1}{(2n-1)!}\sum_{m=j+1}^{i-1} M_m(h_m + h_{m+1})\delta_m^2(x_i - x_m)^{2n-1} \qquad (i > j), \tag{4.1.14}$$

$$F_j(x_i)=\frac{1}{(2n-2)!}M_j\left\{(x_i-x_j)^{2n-2}_+ + \frac{(x_i-x_j)^{2n-1}_+ - (x_i-x_{j-1})^{2n-1}_+}{(2n-1)\,h_j}\right\} + M_i\,\frac{-(h_{i+1})^{2n-2}}{(2n-1)!} -$$

$$-\frac{1}{(2n-1)!}\sum_{m=i+1}^{j-1} M_m\,(h_m+h_{m+1})\,\delta_m^2\,(x_i-x_m)^{2n-1}_+ \qquad (i<j). \tag{4.1.15}$$

Для нечетного p используем разделенные разности

$$S_\Delta[x_{j-(p+1)/2},\ \ldots,\ x_{j-1},\ x_j,\ \ldots,\ x_{j+(p+1)/2}].$$

В итоге система уравнений для определения величин B_{kj} ($k=1,\ 2,\ \ldots,\ 2n-3$) имеет треугольную матрицу коэффициентов, и метод ее решения очевиден.

Перейдем к другому методу построения стандартных соотношений (4.1.5) для сплайна. В прежнем методе алгебраическое вычисление разделенных разностей $\delta_i^{2n-2}\delta_j^2\,(x_i-x_j)_+^{2n-1}$ довольно утомительно.

Нам потребуется такой полином $p(\sigma)$ степени $2n+1$, первые n производных которого в точках $\sigma=0$ и $\sigma=1$ заданы:

$$p^{(k)}(0)=p_0^{(k)},\quad p^{(k)}(1)=p_1^{(k)} \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ n).$$

Запишем полином $p(\sigma)$ в виде

$$p(\sigma)=p_0^{(0)}+p_0^{(1)}\sigma+\frac{1}{2!}p_0^{(2)}\sigma^2+\ldots+\frac{1}{n!}p_0^{(n)}\sigma^n+A_0\sigma^{n+1}+\ldots+A_n\sigma^{2n+1}.$$

Условия в точке $\sigma=1$ дают систему

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ n+1 & n+2 & n+3 & \ldots & 2n+1 \\ (n+1)_{(2)} & (n+2)_{(2)} & (n+3)_{(2)} & \ldots & (2n+1)_{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (n+1)_{(n-1)} & (n+2)_{(n-1)} & (n+3)_{(n-1)} & \ldots & (2n+1)_{(n-1)} \\ (n+1)_{(n)} & (n+2)_{(n)} & (n+3)_{(n)} & \ldots & (2n+1)_{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_{n-1} \\ A_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} p_1^{(0)} - \sum_{k=0}^{n} p_0^{(k)}/k! \\ p_1^{(1)} - \sum_{k=1}^{n} p_0^{(k)}/(k-1)! \\ p_1^{(2)} - \sum_{k=2}^{n} p_0^{(k)}/(k-2)! \\ \vdots \\ p_1^{(n-1)} - p_0^{(n-1)} - p_0^{(n)} \\ p_1^{(n)} - p_0^{(n)} \end{bmatrix}, \tag{4.1.16}$$

где $k_{(j)} = k(k-1)(k-2)\ldots(k-j+1)$. Умножим матричное уравнение (4.1.16) слева на матрицу

$$\mathscr{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots \\ -(n+1) & 1 & 0 & \ldots \\ (n+2)_{(2)} & -(n+1)\cdot 2 & 1 & \ldots \\ -(n+3)_{(3)} & (n+2)_{(2)}\cdot 3 & -(n+1)\,3 & \ldots \\ (n+4)_{(4)} & -(n+3)_{(3)}\cdot 4 & (n+2)_{(2)}\,6 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ (-1)^n (2n)_{(n)} & (-1)^{n-1}(2n-1)_{(n-1)} C_n^1 & (-1)^{n-2}(2n-2)_{(n-2)} C_n^2 & \ldots \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & 0 & 0 \\ & \vdots & \vdots \\ \ldots & -(n+1)\,C_n^{n-1} & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда в левой части уравнения будет матрица

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & n_{(0)} \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n_{(1)} \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 12 & \ldots & n_{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 24 & \ldots & n_{(3)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & \ldots & n_{(4)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & n_{(n)} \end{bmatrix},$$

обратная к которой равна

$$\mathscr{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2!} & -\frac{1}{3!} & \frac{1}{4!} & \ldots & \frac{(-1)^n}{n!} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2!} & -\frac{1}{3!} & \ldots & \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2!}\cdot 1 & \frac{1}{2!}(-1) & \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2!}\right) & \ldots & \frac{1}{2!}\frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3!}\cdot 1 & \frac{1}{3!}(-1) & \ldots & \frac{1}{3!}\frac{(-1)^{n-3}}{(n-3)!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4!}(1) & \ldots & \frac{1}{4!}\frac{(-1)^{n-4}}{(n-4)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{n!} \end{bmatrix}.$$

Далее,

$$\begin{bmatrix} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{p_0^{(k)}}{k!} \\ \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{p_0^{(k+1)}}{k!} \\ \vdots \\ \sum\limits_{k=0}^{1} \frac{p_0^{(k+n-1)}}{k!} \\ p_0^{(n)} \end{bmatrix} = \mathscr{C} \begin{bmatrix} p_0^{(0)} \\ p_0^{(1)} \\ \vdots \\ p_0^{(n-1)} \\ p_0^{(n)} \end{bmatrix},$$

где

$$\mathscr{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{4!} & \cdots & \frac{1}{n!} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \cdots & \frac{1}{(n-1)!} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(n-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом,

$$\begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \mathscr{B}\mathscr{A} \left(\begin{bmatrix} p_1^{(0)} \\ p_1^{(1)} \\ \vdots \\ p_1^{(n)} \end{bmatrix} - \mathscr{C} \begin{bmatrix} p_0^{(0)} \\ p_0^{(1)} \\ \vdots \\ p_0^{(n)} \end{bmatrix} \right). \tag{4.1.17}$$

Элементы γ_{ij} матрицы $\mathscr{B}\mathscr{A}$ вычисляются по формуле

$$\gamma_{ij} = \frac{(-1)^{j+k}}{k!} \sum_{i=0}^{j} \binom{n+j-i}{j-i} \binom{2n-k+1}{n-j+i-k} \binom{k}{i} \qquad (0 \leqslant j \leqslant n,\ 0 \leqslant k \leqslant n),$$

где $\binom{n}{m}$ — биномиальный коэффициент C_n^m, $\binom{n}{m} = 0$ при $m < 0$ и $m > n$, $\binom{0}{0} = 1$.

Произведение матриц $\mathscr{B}\mathscr{A}\mathscr{C}$ имеет более простой вид

$$\mathscr{B}\mathscr{A}\mathscr{C} =$$

$$= \begin{bmatrix} \binom{n}{0}\binom{2n+1}{n} & \binom{n-1}{0}\binom{2n}{n} & \frac{1}{2!}\binom{n-2}{0}\binom{2n-1}{n} & \cdots \\ -\binom{n+1}{1}\binom{2n+1}{n-1} & -\binom{n}{1}\binom{2n}{n-1} & -\frac{1}{2!}\binom{n-1}{1}\binom{2n-1}{n-1} & \cdots \\ \binom{n+2}{2}\binom{2n+1}{n-2} & \binom{n+1}{2}\binom{2n}{n-2} & \frac{1}{2!}\binom{n}{2}\binom{2n-1}{n-2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ (-1)^n\binom{2n}{n}\binom{2n+1}{0} & (-1)^n\binom{2n-1}{n}\binom{2n}{0} & (-1)^n\frac{1}{2!}\binom{2n-2}{n}\binom{2n-1}{0} & \cdots \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cdots & \frac{1}{(n-1)!}\binom{1}{0}\binom{n+2}{n} & \frac{1}{n!}\binom{0}{0}\binom{n+1}{n} \\ \cdots & \frac{-1}{(n-1)!}\binom{2}{1}\binom{n+2}{n-1} & -\frac{1}{n!}\binom{1}{1}\binom{n+1}{n-1} \\ \cdots & \frac{1}{(n-1)!}\binom{3}{2}\binom{n+2}{n-2} & \frac{1}{n!}\binom{2}{2}\binom{n+1}{n-2} \\ & \vdots & \vdots \\ \cdots & \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\binom{n+1}{n}\binom{n+2}{0} & \frac{(-1)^n}{n!}\binom{n}{n}\binom{n+1}{0} \end{bmatrix} \tag{4.1.18}$$

и с его помощью легче вычислить полином

$$p(\sigma) = \sum_{k=0}^{n} [p_0^{(k)} T_{nk}(\sigma) + (-1)^k p_1^{(k)} T_{nk}(1-\sigma)], \tag{4.1.19}$$

где

$$T_{nk}(\sigma) = \frac{\sigma^k}{k!} - \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j \binom{n-k+j}{j}\binom{2n-k+1}{n-j}\sigma^{n+j+1}. \tag{4.1.20}$$

На отрезке $x_{j-1} \leqslant x \leqslant x_j$ сплайн $S_\Delta(x)$ совпадает с полиномом степени $2n-1$. Обозначим его через $S_{\Delta,j}(x)$:

$$S_{\Delta,j}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ S_{\Delta,j}^{(k)}(x_{j-1}) h_j^k T_{n-1k}\left(\frac{x-x_{j-1}}{h_j}\right) + \right.$$

$$\left. + (-1)^k S_{\Delta,j}^{(k)}(x_j) h_j^k T_{n-1k}\left(\frac{x_j-x}{h_j}\right)\right\}. \tag{4.1.21}$$

Тогда для $q = n, n+1, \ldots, 2n-1$

$$S_{\Delta,j}^{(q)}(x_{j-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} \{S_{\Delta,j}^{(k)}(x_{j-1}) h_j^{k-q} T_{n-1k}^{(q)}(0) + (-1)^{k+q} S_{\Delta,j}^{(k)}(x_j) h_j^{k-q} T_{n-1k}^{(q)}(1)\},$$

$$S_{\Delta,j}^{(q)}(x_j) = \sum_{k=0}^{n-1} \{S_{\Delta,j}^{(k)}(x_{j-1}) h_j^{k-q} T_{n-1k}^{(q)}(1) + (-1)^{k+q} S_{\Delta,j}^{(k)}(x_j) h_j^{k-q} T_{n-1k}^{(q)}(0)\}, \tag{4.1.22}$$

где

$$T^{(q)}_{n-1k}(0) = -\frac{1}{k!}(-1)^{q-n}\binom{q-k-1}{q-n}\binom{2n-1-k}{2n-1-q}q!,$$
$$T^{(q)}_{n-1k}(1) = -\frac{1}{k!}\sum_{j=q-n}^{n-1}(-1)^j\binom{n-k-1+j}{j}\binom{2n-k-1}{n-j-1}(n+j)_{(q)}. \tag{4.1.23}$$

В частности,

$$T^{(2n-2)}_{n-1k}(0) = \frac{1}{k!}\binom{2n-k-3}{n-2}\binom{2n-1-k}{1}(2n-2)!,$$
$$T^{(2n-2)}_{n-1k}(1) = \frac{1}{k!}(-1)^{n-1}\binom{2n-k-3}{n-2}\binom{2n-1-k}{1}(2n-2)! - \tag{4.1.24}$$
$$-\frac{(-1)^{n-1}}{k!}\binom{2n-k-2}{n-1}(2n-1)!.$$

Если потребовать, чтобы производные $S^{(q)}_\Delta(x)$ были непрерывны в точке x_j для $q=n, n+1, \ldots, 2n-2$, то для этих значений q будет $S^{(q)}_{\Delta,j}(x_j) = S^{(q)}_{\Delta,j+1}(x_j)$, т. е.

$$h^q_{j+1}\sum_{k=0}^{n-1}h^k_j\{S^{(k)}_{\Delta,j}(x_{j-1})T^{(q)}_{n-1k}(1)+(-1)^{k+q}S^{(k)}_{\Delta,j}(x_j)T^{(q)}_{n-1k}(0)\} =$$
$$= h^q_j\sum_{k=0}^{n-1}h^k_{j+1}\{S^{(k)}_{\Delta,j+1}(x_j)T^{(q)}_{n-1k}(0)+(-1)^{k+q}S^{(k)}_{\Delta,j+1}(x_{j+1})T^{(q)}_{n-1k}(1)\}. \tag{4.1.25}$$

Обозначим $S^{(q)}_\Delta(x_j)$ через $S^{(q)}_j$. Тогда в каждой точке x_j получим $n-1$ уравнений ($q=n, \ldots, 2n-2$)

$$h^q_{j+1}T^{(q)}_{n-1n-1}(1)S^{(n-1)}_{j-1}h^{n-1}_j + T^{(q)}_{n-1n-1}(0)[(-1)^{n+q-1}h^q_{j+1}h^{n-1}_j - h^q_jh^{n-1}_{j+1}]S^{(n-1)}_j -$$
$$-(-1)^{n+q-1}h^q_jh^{n-1}_{j+1}T^{(q)}_{n-1n-1}(1)S^{(n-1)}_{j+1} =$$
$$= -\sum_{k=0}^{n-2}\{h^q_{j+1}T^{(q)}_{n-1k}(1)S^{(k)}_{j-1}h^k_j + T^{(q)}_{n-1k}(0)[(-1)^{k+q}h^q_{j+1}h^k_j - h^q_jh^k_{j+1}]S^{(k)}_j -$$
$$-(-1)^{k+q}h^q_jh^k_{j+1}T^{(q)}_{n-1k}(1)S^{(k)}_{j+1}\}. \tag{4.1.26}$$

Если $n-1 \leqslant i \leqslant N-n+1$, то уравнения (4.1.26) при $i-n+1 \leqslant j \leqslant i+n-1$ дают $(2n-3)(n-1)$ соотношений относительно $(2n-1)(n-1)$ переменных

$$S^{(q)}_j \quad (j = i-n+1, \ldots, i+n-1; \quad q = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Исключая из них $S^{(q)}_j$ ($j = i-n+1, \ldots, i+n-1$; $q = 1, 2, \ldots, n-2$), выводим уравнения для сплайна относительно переменных

$$S^{(n-1)}_j \quad (j = i-n+1, \ldots, i+n-1).$$

Если мы хотим, чтобы уравнения для сплайна были записаны в терминах величин M_j, надо с помощью равенства (4.1.11) выразить $S_{j-1}^{(n-1)}$ и $S_j^{(n-1)}$ через M_{j-1}, M_j, $S_{j-1}^{(q)}$ и $S_j^{(q)}$ ($q = 0, 1, \ldots, n-2$), подставить эти значения в (4.1.16) и, как прежде, выполнить процесс исключения. В итоге получим соотношения, эквивалентные (4.1.5).

В качестве иллюстрации проведем построение для сплайна пятой степени. Функции $T_{20}(\sigma)$, $T_{21}(\sigma)$, $T_{22}(\sigma)$ здесь имеют вид

$$T_{20}(\sigma) = 1 - \sum_{j=0}^{2} (-1)^j \binom{2+j}{j} \binom{5}{2-j} \sigma^{3+j} = 1 - 10\sigma^3 + 15\sigma^4 - 6\sigma^5,$$

$$T_{21}(\sigma) = \sigma - \sum_{j=0}^{2} (-1)^j \binom{1+j}{j} \binom{4}{2-j} \sigma^{3+j} = \sigma - 6\sigma^3 + 8\sigma^4 - 3\sigma^5,$$

$$T_{22}(\sigma) = \frac{\sigma^2}{2} - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{2} (-1)^j \binom{j}{j} \binom{3}{2-j} \sigma^{3+j} = \frac{\sigma^2}{2} - \frac{1}{2}(3\sigma^3 - 3\sigma^4 + \sigma^5),$$

откуда

$$\begin{aligned}
&T_{20}'''(0) = -60, && T_{21}'''(0) = -36, && T_{22}'''(0) = -9,\\
&T_{20}'''(1) = -60, && T_{21}'''(1) = -24, && T_{22}'''(1) = -3,\\
&T_{20}^{(4)}(0) = 360, && T_{21}^{(4)}(0) = 192, && T_{22}^{(4)}(0) = 36,\\
&T_{20}^{(4)}(1) = -360, && T_{21}^{(4)}(1) = -168, && T_{22}^{(4)}(1) = -24.
\end{aligned}$$

В силу равенств (4.1.22)

$$\begin{aligned}
M_{j-1} &= 360\frac{S_{j-1}}{h_j^4} - 360\frac{S_j}{h_j^4} + 192\frac{S'_{j-1}}{h_j^3} + 168\frac{S'_j}{h_j^3} + 36\frac{S''_{j-1}}{h_j^2} - 24\frac{S''_j}{h_j^2},\\
M_j &= -360\frac{S_{j-1}}{h_j^4} + 360\frac{S_j}{h_j^4} - 168\frac{S'_{j-1}}{h_j^3} - 192\frac{S'_j}{h_j^3} - 24\frac{S''_{j-1}}{h_j^2} + 36\frac{S''_j}{h_j^2},
\end{aligned} \tag{4.1.27}$$

так что

$$\begin{aligned}
S''_{j-1} &= \frac{6}{h_j}\cdot\frac{S_j - S_{j-1}}{h_j} - \frac{1}{h_j}(4S'_{j-1} + 2S'_j) + h_j^2\frac{3M_{j-1} + 2M_j}{60},\\
S''_j &= -\frac{6}{h_j}\frac{S_j - S_{j-1}}{h_j} + \frac{1}{h_j}(2S'_{j-1} + 4S'_j) + h_j^2\frac{2M_{j-1} + 3M_j}{60}.
\end{aligned} \tag{4.1.28}$$

Снова применяя равенства (4.1.22), находим

$$\begin{aligned}
S'''_{\Delta, j}(x_{j-1}) &= \frac{S_j - S_{j-1}}{h_j}\left(-\frac{12}{h_j^2}\right) + 6\frac{S'_{j-1} + S'_j}{h_j^2} - \frac{h_j}{60}(9M_j + 21M_{j-1}),\\
S'''_{\Delta, j}(x_j) &= \frac{S_j - S_{j-1}}{h_j}\left(-\frac{12}{h_j^2}\right) + 6\frac{S'_{j-1} + S'_j}{h_j^2} + \frac{h_j}{60}(9M_{j-1} + 21M_j).
\end{aligned} \tag{4.1.29}$$

Требование непрерывности $S'''_\Delta(x)$ в точке x_j приводит к уравнению

$$\frac{3}{20}h_jM_{j-1}+\frac{7}{20}(h_j+h_{j+1})M_j+\frac{3}{20}h_{j+1}M_{j+1}=$$

$$=-6\left\{\frac{S'_{j-1}}{h_j^2}+\left(\frac{1}{h_j^2}-\frac{1}{h_{j+1}^2}\right)S'_j-\frac{S'_{j+1}}{h_{j+1}^2}\right\}-\frac{12}{h_{j+1}^2}\frac{S_{j+1}-S_j}{h_{j+1}}+\frac{12}{h_j^2}\frac{S_j-S_{j-1}}{h_j}, \quad (4.1.30)$$

а непрерывность $S''_\Delta(x)$ в точке x_j с учетом (4.1.28) дает

$$\frac{h_j^2}{30}M_{j-1}+\frac{1}{20}(h_j^2-h_{j+1}^2)M_j-\frac{h_{j+1}^2}{30}M_{j+1}=$$

$$=-\frac{2}{h_j}S'_{j-1}-\left(\frac{4}{h_j}+\frac{4}{h_{j+1}}\right)S'_j-\frac{2}{h_{j+1}}S'_{j+1}+\frac{6}{h_{j+1}}\frac{S_{j+1}-S_j}{h_{j+1}}+\frac{6}{h_j}\frac{S_j-S_{j-1}}{h_j}. \quad (4.1.31)$$

Запишем уравнения (4.1.25) и (4.1.26) в точках x_{j-1}, x_j, x_{j+1} и исключим из них S'_{j-2}, S'_{j-1}, S'_j, S'_{j+1}, S'_{j+2}. Тогда получим

$$\frac{1}{120}\frac{h_{j-1}^3}{(h_{j-1}+h_j)(h_{j-1}+h_j+h_{j+1})}M_{j-2}+$$

$$+\frac{1}{120}\left\{\left[4h_{j-1}+3h_j+\frac{h_{j-1}+h_j}{h_{j-1}}\left(\frac{h_jh_{j+1}}{h_j+h_{j+1}}+2h_j\right)\right]\frac{h_{j-1}}{h_{j-1}+h_j+h_{j+1}}+\right.$$

$$\left.+\frac{h_j^2(h_{j+1}+h_{j+2})}{(h_j+h_{j+1})(h_j+h_{j+1}+h_{j+2})}\right\}M_{j-1}+$$

$$+\frac{1}{120}\left\{\left[\frac{h_jh_{j-1}}{h_{j-1}+h_j}+2h_j+\frac{h_{j-1}+h_j}{h_{j-1}}(3h_j+4h_{j+1})\right]\frac{h_{j-1}}{h_{j-1}+h_j+h_{j+1}}+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{h_{j+1}h_{j+2}}{h_{j+1}+h_{j+2}}+2h_{j+1}+(4h_j+3h_{j+1})\frac{h_{j+1}+h_{j+2}}{h_{j+2}}\right]\frac{h_{j+2}}{h_j+h_{j+1}+h_{j+2}}\right\}M_j+$$

$$+\frac{1}{120}\left\{\frac{(h_{j-1}+h_j)h_{j+1}^2}{(h_j+h_{j+1})(h_{j-1}+h_j+h_{j+1}}+\right.$$

$$\left.+\left[3h_{j+1}+4h_{j+2}+\frac{h_{j+1}+h_{j+2}}{h_{j+2}}\left(\frac{h_jh_{j+1}}{h_j+h_{j+1}}+2h_{j+1}\right)\right]\frac{h_{j+2}}{h_j+h_{j+1}+h_{j+2}}\right\}M_{j+1}+$$

$$+\frac{1}{120}\frac{h_{j+2}^3}{(h_{j+1}+h_{j+2})(h_j+h_{j+1}+h_{j+2})}M_{j+2}=$$

$$=(h_{j-1}+h_j+h_{j+1}+h_{j+2})S_\Delta[x_{j-2}, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, x_{j+2}].$$

Нам осталось лишь потребовать выполнения краевых условий. Выпишем их для сплайнов типа I, хотя развитые методы в равной степени можно применить для сплайнов типа II. Уравнения (4.1.25) и (4.1.26) при $x = a$ используются для того, чтобы удовлетворить условиям непрерывности $S''_\Delta(x)$ и $S'''_\Delta(x)$ в точках x_1 и x_2. Пятым уравнением служит первое из уравнений (4.1.22) (значение S''_0 задано). Исключение переменных S'_1, S'_2 и S'_3 дает два условия на вели-

чины M_0, M_1, M_2, M_3:

$$\frac{h_1^2}{h_1+h_2}\frac{M_0}{120}\left[\frac{h_2+h_3}{h_1+h_2+h_3}+\frac{3h_3+2h_2}{h_1+h_2}\right]+$$
$$+\frac{M_1}{120}\left[\frac{(4h_1+3h_2)(h_2+h_3)}{h_1+h_2+h_3}+\frac{h_1(4h_2+3h_1)}{h_1+h_2}+\frac{h_2h_3(3h_2+2h_3)}{(h_2+h_3)(h_1+h_2+h_3)}\right]+$$
$$+\frac{M_2}{120}\left[\frac{h_2(3h_1+2h_2)(h_2+h_3)}{(h_1+h_2)(h_1+h_2+h_3)}+\frac{h_3(4h_3+3h_2)}{h_1+h_2+h_3}+\frac{h_2^2h_1}{(h_1+h_2)^2}\right]+$$
$$+\frac{M_3}{120}\frac{h_3^3}{(h_2+h_3)(h_1+h_2+h_3)}=$$
$$=S_\Delta[x_0, x_1, x_2, x_3]-\frac{1}{h_1(h_1+h_2)}\left[S_0'-\frac{2h_1+h_2}{h_1+h_2}\frac{S_1-S_0}{h_1}+\frac{h_1}{h_1+h_2}\frac{S_2-S_1}{h_2}\right],$$

$$\frac{M_0}{120}h_1^2\left[3+\frac{h_2(3h_2+2h_1)}{(h_1+h_2)^2}\right]+\frac{M_1}{120}h_1\left[2h_1+\frac{h_2(4h_2+3h_1)}{h_1+h_2}\right]+\frac{M_2}{120}\frac{h_2^3h_1}{(h_1+h_2)^2}=$$
$$=-\frac{h_2}{h_1+h_0}\frac{1}{h_1}\left[S_0'-\frac{2h_1+h_2}{h_1+h_2}\frac{S_1-S_0}{h_1}+\frac{h_1}{h_1+h_2}\frac{S_2-S_1}{h_2}\right]-$$
$$-\left[\frac{S_0''}{2}-\frac{1}{h_1+h_2}\left(\frac{S_2-S_1}{h_2}-\frac{S_1-S_0}{h_1}\right)\right]-2\left[\frac{1}{h_1}\left(\frac{S_1-S_0}{h_1}-S_0'\right)-\frac{S_0''}{2}\right].$$

В силу симметрии из этих соотношений можно непосредственно получить соответствующие краевые условия в точке $x = b$.

Вычислив величины M_j, определим значения S'_{j-1}, S'_j, S''_{j-1} и S''_j и тогда (4.1.21) даст представление для $S_\Delta(x)$ на отрезке $[x_{j-1}, x_j]$. Если исключить S'_{j-2} из двух соотношений непрерывности в точке x_{j-1} и затем S'_{j+1} из тех же соотношений в точке x_j, то получатся два уравнения относительно S'_{j-1} и S'_j, из которых находим, что

$$S'_{j-1}\left(\frac{1}{h_{j-1}}+\frac{1}{h_j}\right)=\frac{1}{h_j}\frac{S_j-S_{j-1}}{h_j}+\frac{1}{h_{j-1}}\frac{S_{j-1}-S_{j-2}}{h_{j-1}}-$$
$$-(h_{j-1}+h_j)h_j^2S_\Delta[x_{j-2}, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}]+\frac{h_{j-1}^2(h_j+h_{j+1})}{h_{j-1}+h_j+h_{j+1}}\frac{M_{j-2}}{120}+$$
$$+\frac{(4h_{j-1}+3h_j)(h_j+h_{j+1})^2+h_jh_{j+1}(3h_{j+1}+2h_j)}{(h_j+h_{j+1})(h_{j-1}+h_j+h_{j+1})}(h_{j-1}+h_j)\frac{M_{j-1}}{120}+$$
$$+\frac{(4h_{j+1}+3h_j)h_{j+1}(h_{j-1}+h_j)+(h_{j+1}+h_j)h_j(3h_{j-1}+2h_j)}{h_{j-1}+h_j+h_{j+1}}\frac{M_j}{120}+$$
$$+\frac{h_{j+1}^3(h_{j-1}+h_j)}{(h_j+h_{j+1})(h_{j-1}+h_j+h_{j+1})}\frac{M_{j+1}}{120}.$$

И наконец, S'_{j-1} и S'_j находим из равенств (4.1.28).

Очевидно, что применение полиномиальных сплайнов, заданных на неравномерной сетке, затруднительно. Бóльшая часть этих трудностей связана с тем,

что величины M_j уравнениями сплайна определяются неявно. В разд. 4.5 мы введем сплайны пятой степени максимального дефекта; они менее сложны и очень удобны для применения.

4.2. Равные интервалы

В теории полиномиальных сплайнов особенно важны полиномиальные сплайны, заданные на равномерной сетке. В этом случае положим $h = (b - a)/N$ и обозначим через $\Delta \equiv E - 1$ разностный оператор, связанный со сдвигом h, т. е. $Ef(x) = f(x + h)$. Запишем уравнения (4.1.5) и (4.1.6) в виде

$$\sum_{j=-n+1}^{n-1} A_j^{(2n-1)} M_{k-j} = \Delta^{2(n-1)} E^{-(n-1)} S_\Delta(kh),$$
$$A_j^{(2n-1)} = \frac{2h}{(2n-1)!}\,\delta_i^{2n-2}\delta_j^2 [(i-j)h]_+^{2n-1}(2n-2)!\,h^{2n-2} \tag{4.2.1}$$

(δ_j, как и раньше, обозначает разделенную разность). Так как $\delta_j^2 [(i-j)h]_+^{2n-1} = \delta_i^2 [(i-j)h]_+^{2n-1}$, то

$$A_j^{(2n-1)} = \frac{1}{(2n-1)!\,h}\,\Delta^{2n} E^{-n} (jh)_+^{2n-1}. \tag{4.2.2}$$

Пусть $h = 1$ и

$$\varphi_k^{(n)} = \Delta^{n+1} E^{-n} (k)_+^n \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1). \tag{4.2.3}$$

Тогда

$$A_j^{(2n-1)} = \frac{h^{2n-2}}{(2n-1)!}\,\varphi_{j+n-1}^{(2n-1)}. \tag{4.2.4}$$

Таким образом,

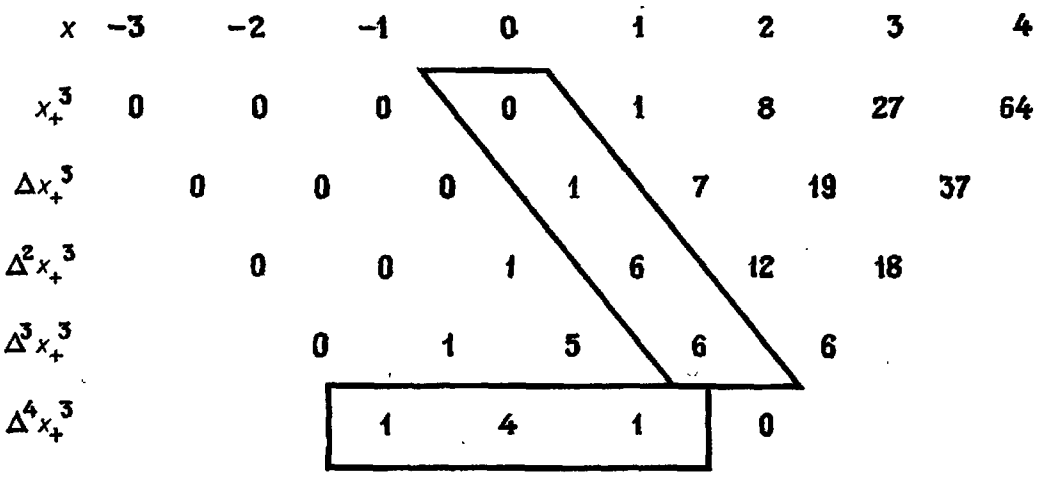
$$\frac{1}{(2n-1)!}\sum_{k=0}^{2n-2} \varphi_k^{(2n-1)} M_{j-n+1+k} = \bar{\delta}^{2n-2}\,\frac{S_\Delta(x_j)}{h^{2n-2}}, \tag{4.2.5}$$

где $\bar{\delta}^2$ — центрально-разностный оператор $E^{-1}\Delta^2$.

Величины $\varphi_k^{(n)}$ для четного n связаны со сплайнами четной степени с точками интерполяции в узлах сетки. Однако удобно рассматривать все множество этих величин. Укажем на связь между нисходящими разностями функции x^n в точке $x = 0$ («разностями нуля», Фриман [1, стр. 123]) и $(n-1)$-ми разностями функции $(x)_+^n$. Обозначим $\Delta^k x^m|_{x=0}$ через $\Delta^k 0^m$; тогда для разностей с единичным шагом

$$\varphi_k^{(m)} = \Delta^{m+1} E^{-m} (k)_+^m = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{m-k-1+j}{j} \Delta^{k+1-j} 0^m \qquad (k = 0, 1, \ldots, m-1). \tag{4.2.6}$$

При $m = 3$ это равенство очевидно. В качестве иллюстрации приведем таблицу



В горизонтальном прямоугольнике указаны значения $\varphi_0^{(3)}$, $\varphi_1^{(3)}$, $\varphi_2^{(3)}$, в диагональном параллелограмме — значения 0^3, $\Delta 0^3$, $\Delta^2 0^3$, $\Delta^3 0^3$.

Следующие равенства очевидны:

$$\Delta 0^m = \varphi_0^{(m)} = 1,$$

$$\Delta^2 0^m = \varphi_1^{(m)} + (m-1)\,\varphi_0^{(m)},$$

$$\Delta^3 0^m = \varphi_2^{(m)} + (\varphi_1^{(m)} + \varphi_0^{(m)}) + (\varphi_1^{(m)} + 2\varphi_0^{(m)}) + \ldots + (\varphi_1^{(m)} + (m-2)\,\varphi_0^{(m)}) =$$

$$= \varphi_2^{(m)} + \binom{m-2}{1}\varphi_1^{(m)} + \binom{m-1}{2}\varphi_0^{(m)},$$

$$\Delta^4 0^m = \varphi_3^{(m)} + (\varphi_2^{(m)} + \varphi_1^{(m)} + \varphi_0^{(m)}) + (\varphi_2^{(m)} + 2\varphi_1^{(m)} + 3\varphi_0^{(m)}) + \ldots$$

$$\ldots + \left(\varphi_2^{(m)} + (m-3)\,\varphi_1^{(m)} + \binom{m-2}{2}\varphi_0^{(m)}\right) =$$

$$= \varphi_3^{(m)} + \binom{m-3}{1}\varphi_2^{(m)} + \binom{m-2}{2}\varphi_1^{(m)} + \binom{m-1}{3}\varphi_0^{(m)},$$

$$\ldots$$

$$\Delta^m 0^m = \varphi_{m-1}^{(m)} + \varphi_{m-2}^{(m)} + \ldots + \varphi_0^{(m)}.$$

Разрешая их относительно $\varphi_k^{(m)}$, получаем равенства (4.2.6).

Разности нуля удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\Delta^k 0^{m+1} = k\,(\Delta^k 0^m + \Delta^{k-1} 0^m). \tag{4.2.7}$$

Покажем, что величины $\varphi_k^{(m)}$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\varphi_k^{(m)} = (k+1)\,\varphi_k^{(m-1)} + (m-k)\,\varphi_{k-1}^{(m-1)}. \tag{4.2.8}$$

В самом деле, в силу (4.2.6)

$$(k+1)\,\varphi_k^{(m-1)} + (m-k)\,\varphi_{k-1}^{(m-1)} =$$

$$= (k+1)\,\Delta^{k+1}0^{m-1} - (k+1)\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\binom{m-k-1+j}{j+1}\Delta^{k-j}0^{m-1} +$$

$$+ (m-k)\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\binom{m-k-1+j}{j}\Delta^{k-j}0^{m-1}. \qquad (4.2.9)$$

Далее,

$$-(k+1)\binom{m-k-1+j}{j+1} + (m-k)\binom{m-k-1+j}{j} =$$

$$= -(k-j)\binom{m-k-1+j}{j+1} + \binom{m-k-1+j}{j} +$$

$$+\left[-(j+1)\binom{m-k-1+j}{j} + (m-k-1)\binom{m-k-1+j}{j}\right], \qquad (4.2.10)$$

и член в квадратных скобках равен нулю, поскольку $k\binom{k+j}{j} = (j+1)\binom{k+j}{j+1}$. Кроме того, $\binom{m}{j} + \binom{m}{j+1} = \binom{m+1}{j+1}$, так что левая часть в (4.2.10) равна

$$-(k-j)\left[\binom{m-k-1+j}{j+1} + \binom{m-k-1+j}{j}\right] + (k+1-j)\binom{m-k-1+j}{j} =$$

$$= -(k-j)\binom{m-k+j}{j} + (k+1-j)\binom{m-k-1+j}{j}. \qquad (4.2.11)$$

Таким образом, правая часть в (4.2.8) равна

$$(k+1)\,\Delta^{k+1}0^{m-1} + \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\left[-(k-j)\binom{m-k+j}{j} + (k+1-j)\binom{m-k-1+j}{j}\right]\Delta^{k-j}0^{m-1}. \qquad (4.2.12)$$

С другой стороны, в силу (4.2.7)

$$\varphi_k^{(m)} = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{m-k-1+j}{j}\Delta^{k+1-j}0^m =$$

$$= \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{m-k-1+j}{j}(k+1-j)\left[\Delta^{k+1-j}0^{m-1} + \Delta^{k-j}0^m\right] =$$

$$= (k+1)\,\Delta^{k+1}0^{m-1} + \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\left[-(k-j)\binom{m-k+j}{j+1} + \right.$$

$$\left. + (k+1-j)\binom{m-k-1+j}{j}\right]\Delta^{k-j}0^{m-1} + (-1)^k\binom{m-1}{k}\Delta^0 0^m.$$

Здесь последнее слагаемое равно нулю, и соотношение (4.2.8) доказано.

Приведем значения нескольких первых членов множества $\{\varphi_k^{(m)}\}$ (индекс m относится к строке, k — к диагонали):

$m=1$ 1 $k=0$

$m=2$ 1 1 $k=1$

$m=3$ 1 4 1 $k=2$

$m=4$ 1 11 11 1 $k=3$

$m=5$ 1 26 66 26 1 $k=4$

$m=6$ 1 57 302 302 57 1 $k=5$

$m=7$ 1 120 1191 2416 1191 120 1 $k=6$.

Нетрудно заметить, что соотношения (4.1.27) для сплайнов пятой степени в случае равномерной сетки примут вид

$$\frac{1}{120}[M_{j-2} + 26M_{j-1} + 66M_j + 26M_{j+1} + M_{j+2}] = \frac{S_{j+2} - 4S_{j+1} + 6S_j - 4S_{j-1} + S_{j-2}}{h^4}. \tag{4.2.13}$$

Проиллюстрируем теперь применение сплайнов четвертой степени, заданных на равномерной сетке. Учитывая тождество (4.1.1), имеем

$$S_\Delta(x_j) = \sum_{k=0}^{2}\frac{1}{k!}(x_j-a)^k + \frac{1}{2!}\int_a^b S_\Delta'''(t)\,(x_j-t)_+^2\,dt,$$

и, вычисляя разности, как при выводе равенств (4.1.5), получаем

$$\frac{1}{24}(M_{j-2} + 11M_{j-1} + 11M_j + M_{j+1}) = \frac{S_{j+1} - 3S_j + 3S_{j-1} - S_{j-2}}{h^3}. \tag{4.2.14}$$

Чтобы получить полную систему уравнений для сплайнов типов I и II, надо выразить (4.1.8) в более простой форме. В случае равномерных сеток система (4.1.8) ($q=1, 2, \ldots, 2n-3$) принимает вид

$$\Delta^q S_j|_{j=0} = \sum_{k=q}^{2n-3}\frac{h^k}{k!}S_\Delta^{(k)}(a)\,\Delta^q 0^k + \frac{M_0 h^{2n-2}}{(2n-2)!}\left[\Delta^q (i)_+^{2n-2} - \frac{\Delta^{q+1}(i-1)_+^{2n-1}}{(2n-1)}\right]_{i=0} +$$

$$+ \frac{h^{2n-2}}{(2n-1)!}\sum_{j=1}^{q} M_j \Delta^{q+2}(i-1-j)_+^{2n-1}|_{i=0}. \tag{4.2.15}$$

(Оператор Δ во втором и третьем членах правой части равенства (4.2.15) действует на индекс i. Ясно, что $\Delta^q (i)_+^{2n-2}\big|_{i=0} = \Delta^q 0^{2n-2}$.)

При выводе представления для сплайна $S_\Delta(x)$ и его производных на отрезке $[x_{j-1}, x_j]$ гораздо удобнее в рассматриваемой ситуации заменить (4.1.11) равенствами ($p = 0, 1, 2, \ldots, n-1$)

$$S_\Delta^{(2n-2p-1)}(x) = -M_{j-1}\frac{(x_j-x)^{2p}}{(2p)!\,h} + M_j\frac{(x-x_{j-1})^{2p}}{(2p)!\,h} - \\ - \sum_{k=1}^{p} A_{kj-1}\frac{(x_j-x)^{2p-2k}}{(2p-2k)!} + \sum_{k=1}^{p} B_{kj}\frac{(x-x_{j-1})^{2p-2k}}{(2p-2k)!}, \tag{4.2.16}$$

$$S_\Delta^{(2n-2p-2)}(x) = M_{j-1}\frac{(x_j-x)^{2p+1}}{(2p+1)!\,h} + M_j\frac{(x-x_{j-1})^{2p+1}}{(2p+1)!\,h} + \\ + \sum_{k=1}^{p} A_{kj-1}\frac{(x_j-x)^{2p-2k+1}}{(2p-2k+1)!} + \sum_{k=1}^{p} B_{kj}\frac{(x-x_{j-1})^{2p-2k+1}}{(2p-2k+1)!}.$$

Из условия непрерывности $S_\Delta^{(2n-3)}(x)$ и $S_\Delta^{(2n-4)}(x)$ в точке x_j вытекает, что

$$A_{1j} = B_{1j}, \qquad \frac{h}{2!}M_j = \frac{\bar\delta^2}{2}A_{1j}. \tag{4.2.17}$$

По индукции немедленно получаем, что для $p = 1, 2, \ldots, n-1$

$$A_{pj} = B_{pj},$$

$$\frac{h^{2p}}{(2p)!}\frac{M_j}{h} + \frac{h^{2p-2}}{(2p-2)!}A_{1j} + \ldots + \frac{h^2}{p!}A_{p-1j} = \frac{\bar\delta^2}{2}A_{pj}. \tag{4.2.18}$$

Кроме того, для $p = n$

$$\frac{h^{2n-1}}{(2n-1)!}\frac{M_j}{h} + \frac{h^{2n-3}}{(2n-3)!}A_{1j} + \ldots + hA_{n-1j} = S_j. \tag{4.2.19}$$

Запишем эту систему разностных уравнений в виде

$$\mathcal{P}\begin{bmatrix} M_j/h \\ A_{1j} \\ A_{2j} \\ \vdots \\ A_{n-1j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ S_j \end{bmatrix}, \tag{4.2.20}$$

где

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} \frac{h^2}{2!} & -\frac{\bar\delta^2}{2} & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{h^4}{4!} & \frac{h^2}{2!} & -\frac{\bar\delta^2}{2} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \frac{h^{2n-2}}{(2n-2)!} & \frac{h^{2n-4}}{(2n-4)!} & \ldots & \frac{h^2}{2!} & -\frac{\bar\delta^2}{2} \\ \frac{h^{2n-1}}{(2n-1)!} & \frac{h^{2n-3}}{(2n-3)!} & \ldots & \frac{h^3}{3!} & h \end{bmatrix}. \tag{4.2.21}$$

В периодическом случае, а также в непериодическом случае при $n-1 \leqslant j \leqslant N-n+1$ умножим слева обе части равенства (4.2.20) на сопряженную матрицу $\mathcal{P}^*$. Пусть $|\mathcal{P}|$ — определитель матрицы $\mathcal{P}$, а p^*_{kj} — элементы матрицы $\mathcal{P}^*$. Тогда

$$\begin{bmatrix} |\mathcal{P}| & & & \\ & |\mathcal{P}| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |\mathcal{P}| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_j/h \\ A_{1j} \\ \vdots \\ A_{n-1j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p^*_{1n}S_j \\ p^*_{2n}S_j \\ \vdots \\ p^*_{nn}S_j \end{bmatrix}, \tag{4.2.22}$$

откуда

$$|\mathcal{P}|\frac{M_j}{h} = p^*_{1n}S_j, \tag{4.2.23}$$

$$|\mathcal{P}|A_{ij} = p^*_{i+1n}S_j \quad (i=1, 2, \ldots, n-1). \tag{4.2.24}$$

Сравнивая равенства (4.2.23) и (4.2.5), видим, что

$$p^*_{n1} = \left(-\frac{\bar{\delta}^2}{2}\right)^{n-1},$$

и поэтому

$$2^{n-1}|\mathcal{P}|M_j = \frac{h^{2n-1}}{(2n-1)!}\sum_{k=0}^{2n-2}\varphi_k^{(2n-1)}M_{j-n+1+k}. \tag{4.2.25}$$

Разумеется, это тождество можно получить непосредственно, разлагая определитель $|\mathcal{P}|$, но вычисления при этом несколько усложняются.

Оператор в правой части равенства (4.2.24) можно записать в виде

$$p^*_{i+1n} = \begin{vmatrix} \frac{h^2}{2!} & -\frac{\bar{\delta}^2}{2} & 0 & \ldots & & & & & 0 \\ \frac{h^4}{4!} & \frac{h^2}{2} & -\frac{\bar{\delta}^2}{2} & 0 & \ldots & & & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & & & \vdots \\ \frac{h^{2i-2}}{(2i-2)!} & \frac{h^{2i-4}}{(2i-4)!} & \ldots & \frac{h^2}{2!} & -\frac{\bar{\delta}^2}{2} & 0 & \ldots & & 0 \\ \frac{h^{2i}}{(2i)!} & \frac{h^{2i-2}}{(2i-2)!} & \ldots & \frac{h^4}{4!} & \frac{h^2}{2!} & 0 & \ldots & & 0 \\ \frac{h^{2i+2}}{(2i+2)!} & \frac{h^{2i}}{(2i)!} & \ldots & \frac{h^6}{6!} & \frac{h^4}{4!} & -\frac{\bar{\delta}^2}{2} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & & & \\ \frac{h^{2n-4}}{(2n-4)!} & \frac{h^{2n-6}}{(2n-6)!} & \ldots & & & & & -\frac{\bar{\delta}^2}{2} & 0 \\ \frac{h^{2n-2}}{(2n-2)!} & \frac{h^{2n-4}}{(2n-4)!} & \ldots & & & & & \frac{h^2}{2} & -\frac{\bar{\delta}^2}{2} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{h^2}{2!} & -\frac{\bar{\delta}^2}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{h^4}{4!} & \frac{h^2}{2!} & -\frac{\bar{\delta}^2}{2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{h^{2i-2}}{(2i-2)!} & \frac{h^{2i-4}}{(2i-4)!} & \frac{h^{2i-6}}{(2i-6)!} & \dots & \frac{h^2}{2!} & -\frac{\bar{\delta}^2}{2} \\ \frac{h^{2i}}{(2i)!} & \frac{h^{2i-2}}{(2i-2)!} & \frac{h^{2i-4}}{(2i-4)!} & \dots & \frac{h^4}{4!} & \frac{h^2}{2!} \end{vmatrix} \left(-\frac{\bar{\delta}^2}{2}\right)^{n-i-1}. \qquad (4.2.26)$$

Обозначим

$$Q_n(x) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & -x & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & -x & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{6!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & -x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \frac{1}{(2n-2)!} & \frac{1}{(2n-4)!} & \dots & \dots & \frac{1}{2!} & -x \\ \frac{1}{(2n)!} & \frac{1}{(2n-2)!} & \dots & \dots & \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} \end{vmatrix}; \qquad (4.2.27)$$

тогда разложение по минорам первого столбца дает равенство

$$Q_n(x) = \frac{1}{2!} Q_{n-1}(x) + \frac{x}{4!} Q_{n-2}(x) + \dots + \frac{x^{n-2}}{(2n-2)!} Q_1(x) + \frac{x^{n-1}}{(2n)!},$$

справедливое для $n \geqslant 2$, если положить $Q_1 = 1/2!$. Запишем $Q_n(x)$ в виде

$$Q_n(x) = \alpha_{n0} + \alpha_{n1}x + \dots + \alpha_{nn-1}x^{n-1}. \qquad (4.2.28)$$

Тогда

$$\sum_{k=0}^{n-2} \alpha_{nk}x^k = \sum_{h=1}^{n-1} \frac{x^{h-1}}{(2k)!} \sum_{j=0}^{n-k-1} \alpha_{n-k\,j}x^j = \sum_{u=1}^{n-1} x^{u-1} \sum_{k=1}^{u} \frac{\alpha_{n-k\,u-k}}{(2k)!},$$

откуда

$$\alpha_{nj} = \sum_{k=1}^{j+1} \frac{\alpha_{n-k\,j+1-k}}{(2k)!} \qquad (j = 0, \dots, n-2); \qquad (4.2.29)$$

$$\alpha_{nn-1} = \frac{1}{(2n)!}.$$

В частности,

$$\alpha_{n0} = \frac{1}{2n}. \tag{4.2.30}$$

Далее, заметим, что

$$\frac{h^2}{2!} = h^2 Q_1(x), \quad \begin{vmatrix} \frac{h^2}{2!} & -x \\ \frac{h^4}{4!} & \frac{h^2}{2!} \end{vmatrix} = h^4 Q_2(x),$$

и по индукции получим

$$\begin{vmatrix} \frac{h^2}{2!} & -x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{h^4}{4!} & \frac{h^2}{2!} & -x & \dots & 0 & 0 \\ \frac{h^6}{6!} & \frac{h^4}{4!} & \frac{h^2}{2!} & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & \vdots \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ \frac{h^{2n-2}}{(2n-2)!} & \frac{h^{2n-4}}{(2n-4)!} & \frac{h^{2n-6}}{(2n-6)!} & \dots & \frac{h^2}{2!} & -x \\ \frac{h^{2n}}{(2n)!} & \frac{h^{2n-2}}{(2n-2)!} & \frac{h^{2n-4}}{(2n-4)} & \dots & \frac{h^4}{4!} & \frac{h^2}{2!} \end{vmatrix} = h^{2n} Q_n(x).$$

Отсюда и из (4.2.26)

$$p^*_{i+1\,n} = h^{2i} Q_i\left(\frac{\bar{\delta}^2}{2}\right)\left(-\frac{\bar{\delta}^2}{2}\right)^{n-i-1}. \tag{4.2.31}$$

Вернемся к определению A_{kj} для сплайнов типов I и II. В силу равенств (4.2.16)

$$\begin{aligned} S_\Delta^{(2n-2p-1)}(x_{j-1}) &= -M_{j-1}\frac{h^{2p-1}}{(2p)!} - \sum_{k=1}^{p} A_{kj}\frac{h^{2p-2k}}{(2p-2k)!}, \\ S_\Delta^{(2n-2p-2)}(x_{j-1}) &= M_{j-1}\frac{h^{2p}}{(2p+1)!} + \sum_{k=1}^{p} A_{kj}\frac{h^{2p-2k+1}}{(2p-2k+1)!}. \end{aligned} \tag{4.2.32}$$

Если величины M_j найдены, то для сплайнов типа I значения $S_\Delta^{(q)}(a)$ $(q = n, \dots, 2n-3)$ можно определить из равенств (4.2.15), переписанных в виде

$$S_\Delta^{(q)}(a) = \frac{1}{h^q}\Delta^q S_j|_{j=0} - \sum_{k=q+1}^{2n-3}\frac{h^{k-q}}{k!}S_\Delta^{(k)}(a)\,\Delta^q 0^k -$$

$$-\frac{M_0 h^{2n-q-2}}{(2n-2)!}\left[\Delta^q (i)_+^{2n-2} - \frac{\Delta^{q+1}(i-1)_+^{2n-1}}{(2n-1)}\right]_{i=0} - \frac{h^{2n-q-2}}{(2n-1)!}\sum_{j=1}^{q} M_j \Delta^{q+2}(i-1-j)_+^{2n-1}|_{i=0}.$$

Аналогично определяются величины $S_\Delta^{(q)}(a)$ ($q = 1, 2, \ldots, n-1$) для сплайнов типа II. После того как будут вычислены все величины $S_\Delta^{(q)}(a)$ ($q = 1, \ldots, 2n-3$), значения $S_\Delta^{(q)}(x_j)$ можно найти с помощью интегрирования. Дважды интегрируя по частям, получаем

$$S_\Delta^{(2n-p-1)}(x_j) = \sum_{k=0}^{p-2} \frac{(h_j)^k}{k!} S_\Delta^{(2n-p-1+k)}(a) + \frac{1}{(p-2)!} \sum_{k=1}^{j} \int_{x_{k-1}}^{x_k} S_\Delta^{(2n-2)}(t)\,(x-t)^{p-2}\,dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{p-2} \frac{(h_j)^k}{k!} S_\Delta^{(2n-p-1+k)}(a) + \frac{h^{p-1}}{(p-1)!} \left\{ [pj^{p-1} - j^p + (j-1)^p] M_0 + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{j-1} M_k [(j-k+1)^p - 2(j-k)^p + (j-k-1)^p] + M_j \right\}.$$

4.3. Существование

Для полиномиальных сплайнов, заданных на неравномерной сетке, очень трудно провести доказательство существования, основанное непосредственно на свойствах матрицы коэффициентов. Заметим, что даже в случае равномерной сетки матрица коэффициентов для сплайнов седьмой степени не имеет доминирующей главной диагонали (сравните таблицу коэффициентов в разд. 4.2).

Существование полиномиальных сплайнов нечетной степени, удовлетворяющих свойству наилучшего приближения или минимальной нормы, как и в случае кубических сплайнов, следует из первого интегрального соотношения. Эти свойства мы рассмотрим более подробно в гл. V.

Что касается периодических полиномиальных сплайнов, заданных на равномерной сетке, то их существование можно доказать непосредственно. Более того, при доказательстве обнаруживаются некоторые свойства матрицы коэффициентов, представляющие также самостоятельный интерес. Матрица коэффициентов системы (4.2.1) является циркулянтом порядка N:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_N \\ a_N & a_1 & a_2 & \ldots & a_{N-1} \\ a_{N-1} & a_N & a_1 & \ldots & a_{N-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_2 & a_3 & a_4 & \ldots & a_1 \end{bmatrix} \equiv C(a_1, a_2, \ldots, a_N), \qquad (4.3.1)$$

$$a_1 = A_0^{(2n-1)}, \quad a_k = a_{N+2-k} = A_k^{(2n-1)} = A_{-k}^{(2n-1)} \quad (k = 1, 2, \ldots, n);$$

$$a_k = 0 \text{ в остальных случаях.}$$

Хорошо известно (см. Эйткен [1] или Мюир [1]), что собственные значения матрицы A равны

$$\theta_k = a_1 + a_2\omega_k + \ldots + a_N\omega_k^{N-1} \quad (k = 1, 2, \ldots, N), \qquad (4.3.2)$$

где $\omega_k = e^{2\pi ik/N}$, а соответствующие им собственные векторы равны

$$(1, \omega_k, \omega_k^2, \ldots, \omega_k^{N-1}). \tag{4.3.3}$$

Следовательно, матрицу A можно представить в виде $A = \Omega\Theta\Omega^{-1}$, где

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \ldots & \omega_N \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \ldots & \omega_N^2 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \omega_1^{N-1} & \omega_2^{N-1} & \ldots & \omega_N^{N-1} \end{bmatrix}, \tag{4.3.4}$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} \theta_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \theta_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \theta_3 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \theta_N \end{bmatrix}. \tag{4.3.5}$$

Тогда

$$\Omega^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{N} & \frac{\omega_1^{-1}}{N} & \frac{\omega_1^{-2}}{N} & \ldots & \frac{\omega_1^{1-N}}{N} \\ \frac{1}{N} & \frac{\omega_2^{-1}}{N} & \frac{\omega_2^{-2}}{N} & \ldots & \frac{\omega_2^{1-N}}{N} \\ \frac{1}{N} & \frac{\omega_3^{-1}}{N} & \frac{\omega_3^{-2}}{N} & \ldots & \frac{\omega_3^{1-N}}{N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \frac{1}{N} & \frac{\omega_N^{-1}}{N} & \frac{\omega_N^{-2}}{N} & \ldots & \frac{\omega_N^{1-N}}{N} \end{bmatrix}, \tag{4.3.6}$$

и если ни одно из собственных значений не равно нулю, то

$$A^{-1} = \Omega\Theta^{-1}\Omega^{-1} = C\left(\sum_{k=1}^{N} \frac{\theta_k^{-1}}{N}, \sum_{k=1}^{N} \frac{(\omega_k\theta_k)^{-1}}{N}, \ldots, \sum_{k=1}^{N} \frac{(\omega_k^{N-1}\theta_k)^{-1}}{N}\right). \tag{4.3.7}$$

Разностное уравнение (4.26) изучал Хилле [1, стр. 47] в связи с дифференциальным оператором $\theta \equiv z\,d/dz$ в комплексной плоскости. Пусть

$$P_m(z) = z\sum_{k=0}^{m-1} \varphi_k^{(m)} z^k \tag{4.3.8}$$

где величины $\varphi_k^{(m)}$ определяются равенством (4.2.3). Покажем с помощью

индукции, что

$$\theta^m \frac{1}{1-z} = \frac{P_m(z)}{(1-z)^{m+1}}. \tag{4.3.9}$$

Для $m=1$ имеем

$$\theta \frac{1}{1-z} = \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{z\varphi_0^{(1)}}{(1-z)^2}.$$

Предположим, что

$$\theta^{m-1} \frac{1}{1-z} = \frac{z \sum_{k=0}^{m-2} \varphi_k^{m-1} z^k}{(1-z)^m},$$

где $\varphi_0^{(m)} = \varphi_{m-1}^{(m)} = 1$ для всех $m \geqslant 1$. Тогда

$$\theta^m \frac{1}{1-z} = \frac{z\{mP_{m-1}(z) + (1-z)P'_{m-1}(z)\}}{(1-z)^{m+1}} = \frac{z\left\{mz \sum_{k=0}^{m-2} \varphi_k^{(m-1)} z^k + (1-z) \sum_{k=0}^{m-1} (k+1)\varphi_k^{(m-1)} z^k\right\}}{(1-z)^{m+1}} =$$

$$= \frac{z\left\{\varphi_0^{(m-1)} + \sum_{k=1}^{m-2} [m\varphi_{k-1}^{(m-1)} + (k+1)\varphi_k^{(m-1)} - k\varphi_{k-1}^{(m-1)}] z^k + \varphi_{m-2}^{(m-1)} z^{m-1}\right\}}{(1-z)^{m+1}} = \frac{P_m(z)}{(1-z)^{m+1}}, \tag{4.3.10}$$

так как $\varphi_k^{(m)} = (k+1)\varphi_k^{(m-1)} + (m-k)\varphi_{k-1}^{(m-1)}$. Из равенства (4.3.10) получаем

$$P_1(z) = z, \quad P_m(z) = z[mP_{m-1}(z) + (1-z)P'_{m-1}(z)] \qquad (m > 1). \tag{4.3.11}$$

С помощью индукции можно также показать, что полином $P_m(z)$ имеет $m-1$ различных действительных отрицательных нулей. Заметим, что $P_2(z) = z(z+1)$, так что -1 является нулем полинома $P_2(z)$. Предположим, что полином $P_{m-1}(z)$ имеет $m-2$ различных отрицательных нулей. (Очевидно, что он обращается в нуль в точке $z=0$.) Так как значения $P_{m-1}(x)$ действительны ($x = \operatorname{Re} z$), то между двумя последовательными нулями полинома $P_{m-1}(x)$ должен быть нуль производной $P'_{m-1}(x)$. Таким образом, $P_{m-1}(x)$ и $P_m(x)$ одновременно не обращаются в нуль, за исключением точки $x=0$. В нуле производной $P'_{m-1}(x)$ полиномы $P_{m-1}(x)$ и $P_m(x)$ имеют противоположные знаки. Старший коэффициент полинома $P_m(x)$ равен 1, так что $P_m(x) \to +\infty$ или $P_m(x) \to -\infty$ при $x \to -\infty$ в зависимости от четности или нечетности m. Итак, $P_m(x)$ имеет нуль между каждыми двумя последовательными нулями производной $P'_{m-1}(x)$ и нуль левее самого левого нуля полинома $P_{m-1}(x)$. Кроме того, $P_m(0) = 0$ и, так как $P'_m(0) > 0$, то между 0 и самым правым нулем производной $P'_{m-1}(x)$ должен быть нуль полинома $P_m(x)$. Следовательно, $P_m(x)$, кроме нуля в точке $x=0$, имеет $m-1$ различных отрицательных нулей.

Теперь уже легко показать (и не одним способом), что $\varphi_k^{(m)} = \varphi_{m-1-k}^{(m)}$. Отсюда будет следовать, что обратная величина каждого нуля полинома $P_m(z)/z$ является также нулем этого полинома и $P_{2n}(-1) = 0$. Поэтому для периодических сплайнов нечетной степени все собственные значения θ_k отличны от нуля. Фактически из равенства (4.3.2), где $a_k = a_{N+2-k}$ $(1 < k \leqslant N)$, видно, что все они действительны. Итак, матрица A в этом случае не вырождена.

Заметим, что (-1) является N-м корнем из единицы, только если N четно. Таким образом, для сплайнов четной степени матрица A не вырождена, если N нечетно. Это завершает доказательство следующей теоремы.

Теорема 4.3.1. *Периодические интерполяционные полиномиальные сплайны степени $2n-1$, заданные на равномерной сетке, содержащей N интервалов $(2n-1 \leqslant N)$, всегда существуют. Периодические интерполяционные полиномиальные сплайны степени $2n \leqslant N$ существуют, если число N нечетно.*

4.4. Сходимость

Для полиномиальных сплайнов до сих пор не установлены все свойства сходимости, аналогичные свойствам сходимости, рассмотренным в гл. II и III для кубических сплайнов. Если функция $f(x)$ принадлежит классу $C^q[a, b]$ $(0 \leqslant q \leqslant 2n-1)$ и сплайн $S_{\Delta_k}(x)$ интерполирует ее в узлах сетки Δ_k, $\lim\limits_{k\to\infty} \| \Delta_k \| = 0$, и удовлетворяет определенным (довольно общим) краевым условиям, то можно ожидать, что

$$f^{(p)}(x) - S^{(p)}_{\Delta_k}(x) = o(\| \Delta_k \|^{q-p}) \qquad (0 \leqslant p \leqslant q \leqslant 2n-1), \tag{4.4.1}$$

если только в случае производных порядка $2n-1$ величины $R_{\Delta_k} = [\max\limits_i \| \Delta_k \| / (x_{ki} - x_{ki-1})]$ ограничены.

В работе Алберга, Нильсона, Уолша [9] рассматривается сходимость последовательности периодических полиномиальных сплайнов, интерполирующих функцию $f(x)$ из класса $C^{2n-2}[a, b]$ для асимптотически равномерных сеток. Несколько позже Циглер [1] доказал сходимость периодических интерполяционных сплайнов без предположения об асимптотической равномерности сеток. Алберг и др. [10] дали оценки порядка сходимости обобщенных сплайнов для функции $f(x)$ из класса $C^n[a, b]$ и из класса $C^{2n}[a, b]$. В последнем случае сетки удовлетворяют условию (2.3.7) (см. гл. V и VI).

В гл. V будет доказано, что если $f(x) \in \mathcal{K}^n(a, b)$, то

$$f^{(p)}(x) - S^{(p)}_{\Delta_k}(x) = O(\| \Delta_k \|^{n-p-1/2}) \qquad (0 \leqslant p \leqslant n-1).$$

Кроме того, если величины R_{Δ_k} ограничены и $f(x) \in C^{2n}[a, b]$, то

$$f^{(p)}(x) - S^{(p)}_{\Delta_k} = O(\| \Delta_k \|^{2n-p-1}) \qquad (0 \leqslant p \leqslant 2n-1).$$

Как и в случае кубического сплайна, ухудшение оценки сверху связано лишь с методом доказательства.

Для того чтобы получить более точные соотношения (4.4.1), как для кубических сплайнов, по-видимому, необходимо использовать свойства матрицы, обратной к матрице коэффициентов системы уравнений, определяющих сплайн. Но пока, кроме некоторых специальных случаев, эти свойства еще не изучены.

В этом разделе устанавливается ряд результатов, касающихся сходимости общих полиномиальных сплайнов нечетной степени при априорном предположении, что матрица, обратная к матрице A коэффициентов системы уравнений

для сплайнов, описанной в разд. 4.1, обладает некоторыми нужными свойствами. В разд. 4.5 подробно обсуждаются периодические полиномиальные сплайны, заданные на равномерных сетках.

Т е о р е м а 4.4.1. *Пусть на отрезке* $[a, b]$ *даны функция* $f(x)$ *из класса* $C^{2n-2}[a, b]$ *и последовательность сеток* $\{\Delta_k\}$, $\|\Delta_k\| \to 0$ *при* $k \to \infty$. *Пусть сплайн* $S_{\Delta_k}(x)$ *интерполирует функцию* $f(x)$ *в узлах сетки* Δ_k *и разность* $f(x) - S_{\Delta_k}(x)$ *принадлежит типу* I′, *или типу* II′, *или сплайн* $S_{\Delta_k}(x)$ *периодический (последнее при условии, что функция* $f(x)$ *периодическая и принадлежит классу* $C^{2n-2}(-\infty, \infty)$). *Если матрица* A_k^{-1}, *обратная к матрице* A_k *коэффициентов системы* (4.1.5), *равномерно ограничена относительно* k, *то*

$$f^{(p)}(x) - S_{\Delta_k}^{(p)}(x) = o(\|\Delta_k\|^{2n-2-p}) \qquad (p = 0, 1, \ldots, 2n-2) \tag{4.4.2}$$

равномерно относительно x *на* $[a, b]$. *Если производная* $f^{2n-2}(x)$ *удовлетворяет на* $[a, b]$ *условию Липшица порядка* α $(0 < \alpha \leqslant 1)$, *то*

$$f^{(p)}(x) - S_{\Delta_k}^{(p)}(x) = O(\|\Delta_k\|^{2n-2+\alpha-p}) \qquad (p = 0, 1, \ldots, 2n-2) \tag{4.4.3}$$

равномерно относительно x *на* $[a, b]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Опустим индекс сетки k и обозначим через M вектор $(M_0, M_1, \ldots, M_N)^T$. Пусть A — матрица коэффициентов системы уравнений для сплайна. Запишем систему в виде

$$AM = d. \tag{4.4.4}$$

Если сплайн $S_\Delta(x)$ периодический, то система (4.4.4) точно совпадает с системой (4.1.5) ($i = 1, 2, \ldots, N$). Здесь вектор d равен $(d_1, \ldots, d_N)$ и

$$d_i = \delta_i^{2n-2} f(x_i). \tag{4.4.5}$$

Таким образом,

$$A[M - (2n-2)!\, d] = [I - (2n-2)!\, A]\, d, \tag{4.4.6}$$

где единичная матрица I имеет порядок N. В силу (4.1.7) правая часть равенства (4.4.6) есть вектор

$$\begin{bmatrix} (2n-2)! \sum_{j=1}^{N} A_{1j}(d_1 - d_j) \\ (2n-2)! \sum_{j=1}^{N} A_{2j}(d_2 - d_j) \\ \vdots \\ (2n-2)! \sum_{j=1}^{N} A_{Nj}(d_N - d_j) \end{bmatrix}.$$

Величины A_{ij} неотрицательны и, следовательно, в силу (4.1.7) равномерно ограничены относительно k. Более того, $A_{ij} = 0$ для $j < i - n + 1$ и $j > i + n - 1$, а для $i - n + 1 \leqslant j \leqslant i + n - 1$

$$| d_j - d_i | \leqslant \omega ((2n - 2) \| \Delta \|, f^{(2n-2)}). \tag{4.4.7}$$

Из (4.4.6) и (4.4.7) вытекает, что

$$\| M - (2n - 2)! d \| \leqslant \| A^{-1} \| \omega ((2n - 2) \| \Delta \|, f^{(2n-2)}). \tag{4.4.8}$$

Дальше доказательство для периодического случая проходит обычным образом. С помощью $(2n - 3)$-кратного применения теоремы Ролля и того факта, что сплайн $S_\Delta(x)$ интерполирует функцию $f(x)$ в узлах сетки Δ, находим, что в любых $2n - 2$ последовательных интервалах есть по крайней мере одна точка ξ, в которой $S_\Delta^{(2n-3)}(\xi) = f^{(2n-3)}(\xi)$. Отсюда

$$f^{(2n-3)}(x) - S_\Delta^{(2n-3)}(x) = \int_\xi^x [f^{(2n-2)}(t) - S_\Delta^{(2n-2)}(t)]\, dt$$

и

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} | f^{(2n-3)}(x) - S_\Delta^{(2n-3)}(x) | \leqslant (2n - 3) \| A^{-1} \| \omega ((2n - 2 \| \Delta \|, f^{(2n-2)}) \| \Delta \|.$$

Продолжая этот процесс, получаем соотношения (4.4.2) и (4.4.3) для периодического случая.

Займемся теперь сплайнами типа II. Здесь доказательство отличается от доказательства, примененного в периодическом случае, наличием $n - 1$ краевых условий в каждом конце отрезка $[a, b]$. Так как мы заранее предполагаем, что обратные матрицы A^{-1} равномерно ограничены (*существование* их доказывается в гл. V), то остается лишь показать, что правая часть равенства (4.4.6) стремится к нулю.

Рассмотрим уравнения (4.1.5) для $i = n - 1, n, \ldots, N - n + 1$. В дополнение к ним имеем $n - 1$ соотношений

$$M_0 = f^{(2n-2)}(0), \tag{4.4.9.1}$$

$$\sum_{j=1}^{q} A_{q-n+1,j} M_j = \frac{\left\{ f[x_0, x_1, \ldots, x_q] - \sum_{k=q}^{2n-3} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) [0, x_1 - a, \ldots, x_q - a]^k \right\}}{[0, x_1 - a, \ldots, x_q - a]^{2n-2}}, \tag{4.4.9.2}$$

$$q = n, n + 1, \ldots, 2n - 3.$$

(Соотношения (4.4.9.2) следуют из (4.1.8).)

Для полинома $p(x)$ степени не выше $2n - 2$ правая часть (4.4.9.2) точно равна $p^{(2n-2)}(x_0)/(2n - 2)!$. Поскольку для таких полиномов равенства (4.1.8) выполняются тождественно, положим $p(x) = x^{2n-2}/(2n - 2)!$. Тогда в (4.1.8) каждая из величин M_j равна 1. Итак, мы представили коэффициенты при M_j в (4.1.8) в виде

$$A_{q-n+1,j} [0, x_1 - a, \ldots, x_q - a]^{2n-2}.$$

Следовательно,

$$\sum_{j=0}^{q} A_{q-n+1j} = \frac{1}{(2n-2)!}.$$

Осталось показать, что правая часть в (4.4.9.2) стремится к $S_\Delta^{(2n-2)}(x_0)/(2n-2)!$ при $\|\Delta\| \to 0$. Пусть полином $p(x)$ степени $2n-2$ удовлетворяет условиям

$$p^{(\alpha)}(x_0) = S_\Delta^{(\alpha)}(x_0), \qquad \alpha = 0, 1, \ldots, 2n-2.$$

Тогда

$$p(x) = \sum_{k=0}^{2n-2} \frac{1}{k!} S_\Delta^{(k)}(a)(x-a)^k,$$

откуда

$$p[x_0, x_1, \ldots, x_q] - \sum_{k=q}^{2n-3} \frac{1}{k!} S_\Delta^{(k)}(a)[0, x_1-a, \ldots, x_q-a]^k =$$

$$= \frac{1}{(2n-2)!} S_\Delta^{(2n-2)}(a)[0, x_1-a, \ldots, x_q-a]^{2n-2},$$

так что правую часть равенства (4.4.9.2) можно записать в виде

$$\frac{S_\Delta[x_0, x_1, \ldots, x_q] - p[x_0, x_1, \ldots, x_q]}{[0, x_1-a, \ldots, x_q-a]^{2n-2}} + \frac{1}{(2n-1)!} S_\Delta^{(2n-2)}(a). \tag{4.4.10}$$

Здесь первое слагаемое является отношением q-х разделенных разностей относительно $x_0, x_1, \ldots, x_q$ функции $F = S_\Delta - p$, первые $2n-2$ производных которой обращаются в нуль в точке x_0, и функции x^{2n-2}.

Исследуем более общую задачу вычисления отношения разделенных разностей двух k раз дифференцируемых функций:

$$\frac{F[x_0, x_1, \ldots, x_k]}{G[x_0, x_1, \ldots, x_k]}. \tag{4.4.11}$$

Заметим, что k-ю разделенную разность можно записать в виде (Дэвис [1, стр. 46]):

$$F[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^{k-1} & F(x_0) \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{k-1} & F(x_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 1 & x_k & x_k^2 & \ldots & x_k^{k-1} & F(x_k) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^k \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^k \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 1 & x_k & x_k^2 & \ldots & x_k^k \end{vmatrix}. \tag{4.4.12}$$

Рассмотрим функцию (Гурса, Хедрик [1, стр. 10])

$$\varphi(x)=\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^{k-1} & F(x_0)\\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{k-1} & F(x_1)\\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot\\ 1 & x_{k-1} & x_{k-1}^2 & \dots & x_{k-1}^{k-1} & F(x_{k-1})\\ 1 & x & x^2 & \dots & x^{k-1} & F(x) \end{vmatrix} - K \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^{k-1} & G(x_0)\\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{k-1} & G(x_1)\\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot\\ 1 & x_{k-1} & x_{k-1}^2 & \dots & x_{k-1}^{k-1} & G(x_{k-1})\\ 1 & x & x^2 & \dots & x^{k-1} & G(x) \end{vmatrix}.$$

Эта функция при $x = x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$ равна нулю. Если взять K в виде (4.4.11), то $\varphi(x_k) = 0$. Таким образом, $\varphi'(x)$ на интервале (x_0, x_k) обращается в нуль k раз, $\varphi''(x)$ обращается в нуль $(k-1)$ раз, ..., $\varphi^{(k)}(x)$ обращается в нуль один раз. Обозначим через ξ точку интервала (x_0, x_k), где $\varphi^{(k)}(x) = 0$. Так как

$$\varphi^{(k)}(x)=\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^{k-1}\\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{k-1}\\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot\\ 1 & x_{k-1} & x_{k-1}^2 & \dots & x_{k-1}^{k-1} \end{vmatrix} [F^{(k)}(x) - KG^{(k)}(x)],$$

то

$$\frac{F[x_0, x_1, \dots, x_k]}{G[x_0, x_1, \dots, x_k]} = \frac{F^{(k)}(\xi)}{G^{(k)}(\xi)}.$$

Поэтому первый член в (4.4.10) равен

$$\frac{S_\Delta^{(q)}(\xi) - p^{(q)}(\xi)}{(2n-2)(2n-3)\dots(2n-q-1)\,\xi^{2n-q-2}}$$

и предел этого выражения при $\| \Delta \| \to 0$ равен нулю. Из (4.4.10) следует теперь, что правая часть в (4.4.9.2) при $\| \Delta \| \to 0$ стремится к $S_\Delta^{(2n-2)}(x_0)/(2n-2)!$. Оставшаяся часть доказательства для сплайнов типа II проходит, как в предыдущем случае.

Доказательство для сплайнов типа I мы проводить не будем. Здесь нет никаких новых идей, и доказательство главным образом связано с непосредственным, но довольно утомительным процессом исключения величин $S_\Delta^n(a)$, $S_\Delta^{(n+1)}(a)$, ..., $S_\Delta^{(2n-3)}(a)$ из равенств (4.1.8).

Укажем некоторые важные случаи, когда нормы $\| A^{-1} \|$ равномерно ограничены и, следовательно, применима сформулированная теорема. В работе Алберга, Нильсона, Уолша [9, теорема 4] показано, что она справедлива для периодических сплайнов, заданных на последовательности асимптотически равномерных сеток $\{\Delta_k\}$, т. е. сеток Δ_k, для которых $\| \Delta_k \| \to 0$ и $\max_j | 1/2 - h_{kj+1}/(h_{kj} + h_{kj+1}) | \to 0$, в частности, для периодических сплайнов на равномерных сетках, которые мы в дальнейшем рассмотрим.

Второй общий результат относится к случаю, когда условия гладкости аппроксимируемой функции ослабляются, но на сетку налагаются дополнительные ограничения (2.3.7).

Т е о р е м а 4.4.2. *Пусть на отрезке* $[a, b]$ *заданы функция* $f(x)$ *из класса* $C^q[a, b]$ $(0 \leqslant q \leqslant 2n-3)$ *и последовательность сеток* $\{\Delta_k\}$, $\|\Delta_k\| \to 0$ *при* $k \to \infty$ *и* $R_{\Delta_k} = \max\limits_j \|\Delta_k\|/(x_{kj+1} - x_{kj}) \leqslant \beta < \infty$. *Пусть нормы* $\|A_k^{-1}\|$ *равномерно ограничены. Если полиномиальный сплайн* $S_{\Delta_k}(x)$ *степени* $2n-1$ *интерполирует функцию* $f(x)$ *на сетке* Δ_k *и разность* $f(x) - S_{\Delta_k}(x)$ *принадлежит типу* I′ *или типу* II′, *или сплайн* $S_{\Delta_k}(x)$ *периодический (последнее при условии, что функция* $f(x)$ *периодическая и принадлежит классу* $C^q(-\infty, \infty)$), *то*

$$f^{(p)}(x) - S_{\Delta_k}^{(p)}(x) = O(\|\Delta_k\|^{q-p}) \qquad (p = 0, 1, \ldots, q). \tag{4.4.13}$$

Если производная $f^{(q)}(x)$ *удовлетворяет на отрезке* $[a, b]$ *условию Липшица порядка* α $(0 < \alpha \leqslant 1)$, *то*

$$f^{(p)}(x) - S_{\Delta_k}^{(p)}(x) = O(\|\Delta_k\|^{q+\alpha-p}) \qquad (p = 0, 1, \ldots, q). \tag{4.4.14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как и в предыдущей теореме, доказательство приведем лишь для периодических сплайнов и сплайнов типа II. При $q < 2n-2$ разделенная разность (индекс сетки опускаем) $f[x_{j-n+1}, \ldots, x_{j+n-1}]$ удовлетворяет неравенству

$$|f[x_{j-n+1}, \ldots, x_{j+n-1}]| \leqslant \frac{2^{2n-q-2}\beta^{2n-q-2}}{(2n-2)!\,\|\Delta\|^{2n-q-2}}\,\omega[(q+1)\|\Delta\|, f^{(q)}]. \tag{4.4.15}$$

Можно показать, что правые части в (4.4.9.2) удовлетворяют аналогичному неравенству с постоянным множителем, стоящим перед

$$\frac{1}{\|\Delta\|^{2n-q-2}}\,\omega[(q+1)\|\Delta\|, f^{(q)}].$$

Из равномерной ограниченности норм $\|A^{-1}\|$, уравнений (4.1.5) (с учетом (4.4.9)) и т. д. следует, что

$$\max \|\Delta\|^{2n-q-2}|M_j| \leqslant K_0\omega[(q+1)\|\Delta\|, f^{(q)}] \leqslant$$
$$\leqslant K_0(q+1)\,\omega(\|\Delta\|, f^{(q)}). \tag{4.4.16}$$

Отсюда

$$\max_x \|\Delta\|^{2n-q-2}|S_\Delta^{(2n-2)}(x)| \leqslant K_0(q+1)\,\omega(\|\Delta\|, f^{(q)}).$$

В периодическом случае в силу (4.1.13)

$$\|\Delta\|^{2n-2-p-q}|B_{pj}| \leqslant K_p\omega(\|\Delta\|, f^{(q)}) \qquad (p = 1, 2, \ldots, q+1)$$

для некоторого числа K_p, не зависящего от индекса сетки. Это неравенство справедливо также в непериодическом случае, если $n-1 \leqslant j \leqslant N-n+1$. Применение краевых условий дает аналогичное неравенство для $0 \leqslant j < n-1$, $N-n+1 < j \leqslant N$.

Из равенства (4.1.11) получаем теперь, что для некоторой другой константы K_p^*

$$\| \Delta \|^{2n-q-p-2} | S_\Delta^{(2n-2-p)}(x) | \leqslant K_p^* \omega (\| \Delta \|, f^{(q)})$$

и, следовательно,

$$| S_\Delta^q(x) - S_\Delta^{(q)}(x_j) | = \left| \int_{x_j}^{x} S_\Delta^{(q+1)}(x)\, dx \right| \leqslant \frac{K_{q+1}^* \omega (\| \Delta \|, f^{(q)})}{\| \Delta \|} | x - x_j |.$$

Так как $S_\Delta(x_j) = f(x_j)$ и $f[x_{j-q}, \ldots, x_j] = S_\Delta^{(q)}(\xi_1) = f^{(q)}(\xi_2)$ для некоторых точек ξ_1 и ξ_2 из интервала (x_{j-q+1}, x_{j+q-1}), то на отрезке $[x_{j-1}, x_j]$

$$S_\Delta^{(q)}(x) - f^{(q)}(x) = [S_\Delta^{(q)}(x) - S_\Delta^{(q)}(x_j)] + [S_\Delta^{(q)}(x_j) - S_\Delta^{(q)}(\xi_1)] + [f^{(q)}(\xi_2) - f^{(q)}(x)],$$

$$| S_\Delta^{(q)}(x) - f^{(q)}(x) | \leqslant [K_{q+1}^* (1+q) + q]\, \omega (\| \Delta \|, f^{(q)}).$$

Таким образом, соотношения (4.4.13) и (4.4.14) доказаны для $p = q$. Справедливость этих соотношений для $p < q$ вытекает из повторного интегрирования и применения интерполяционных свойств.

Заметим, что доказательства предшествующих теорем опираются на свойства ограниченности величин M_j, а не непосредственно на ограниченность норм $\| A_k^{-1} \|$. Пусть функция $f(x)$ принадлежит классу $C^{2n-2}[a, b]$. Если $| M_{kj} | \leqslant B$ $(j = 0, 1, \ldots, N_k;\ k = 1, 2 \ldots)$ и последовательность сеток вложена, то можно показать для интерполяционных полиномиальных сплайнов $S_{\Delta_k}(x)$, что последовательность $\{S_{\Delta_k}^{(2n-2)}(x)\}$ сходится равномерно на $[a, b]$ к $f^{(2n-2)}(x)$ (Алберг и др. [9, теорема 3]). С другой стороны, можно снять требование вложения сеток, если допустить, что сплайны $S_{\Delta_k}^{(2n-2)}(x)$ равностепенно непрерывны. В самом деле, в силу интерполяционных свойств и теоремы Ролля $S_{\Delta_k}^{(2n-2)}(x) = f^{(2n-2)}(x)$ по крайней мере в одной точке из каждых $2n - 2$ последовательных интервалов, и поэтому

$$| f^{(2n-2)}(x) - S_{\Delta_k}^{(2n-2)}(x) | \leqslant \omega [(n-1) \| \Delta_k \|, f^{(2n-2)}] + \omega [(n-1) \| \Delta_k \|, S_{\Delta_k}^{(2n-2)}].$$

Далее, можно показать (Алберг и др. [9, стр. 237]), что если сетки вложены и сплайны $\{S_{\Delta_k}(x)\}$ интерполируют произвольную функцию $f(x)$, определенную на отрезке $[a, b]$, а производные $S_{\Delta_k}^{(2n-2)}(x)$ равностепенно непрерывны и ограничены в какой-то точке, то производная $f^{2n-2}(x)$ существует и $S_{\Delta_k}^{(2n-2)}(x) \to f^{(2n-2)}(x)$ равномерно на $[a, b]$.

Теорему 4.4.2 можно переформулировать следующим образом:

Т е о р е м а 4.4.3. *Пусть на отрезке* $[a, b]$ *заданы функция* $f(x)$ *из класса* $C^q[a, b]$ $(0 \leqslant q \leqslant 2n - 3)$ *и последовательность сеток* $\{\Delta_k\}$, $\| \Delta_k \| \to 0$ *при* $k \to \infty$. *Допустим, что полиномиальные сплайны* $S_{\Delta_k}(x)$ *интерполируют функцию* $f(x)$ *в узлах сетки* Δ_k *и*

$$\lim_{k \to \infty} \max_j | M_{kj} | \, \| \Delta_k \|^{2n-q-2} = 0.$$

Тогда равномерно на $[a, b]$

$$f^{(p)}(x) - S_\Delta^{(p)}(x) = o(\|\Delta_k\|^{q-p}) \qquad (0 \leqslant p \leqslant q).$$

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы, только вместо неравенства (4.4.16) надо воспользоваться тем, что по условию левая часть этого неравенства стремится к нулю.

4.5. Сплайны пятой степени дефектов 2 и 3

Первое интегральное соотношение, выведенное в гл. III для кубических сплайнов, обобщается в гл. V на сплайны нечетной степени. Мы покажем там, что для функции $f(x)$ из класса $C^n[a, b]$ и полиномиального сплайна степени $2n-1$ это соотношение справедливо, если

$$\sum_{j=1}^{N} \sum_{p=1}^{n} [f^{(n-p)}(x) - S_\Delta^{(n-p)}(x)]\, S_\Delta^{(n+p-1)}(x)\Big|_{x_{j-1}}^{x_j} = 0.$$

Мы не рассматриваем пока, при каких условиях на сплайны справедливо это равенство. Заметим лишь, что для простого сплайна (т. е. сплайна, принадлежащего классу $C^{2n-2}[a, b]$) члены при $j = 0, 1, \ldots, N-1$; $p = 1, 2, \ldots, n-1$ исчезают в силу непрерывности $S_\Delta^{(n+p-1)}(x)$ в точке x_j. Члены, содержащие множитель $S_\Delta^{(2n-1)}(x_j)$, обращаются в нуль ввиду равенства $f(x_j) = S_\Delta(x_j)$.

В гл. V будет показано, что условие непрерывности производных $S_\Delta^{(n+p-1)}(x)$ можно заменить условием

$$S_\Delta^{(n-p)}(x_j) = f^{(n-p)}(x_j)$$

для всех p, удовлетворяющих неравенству $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant n-1$ (q задано). В случае сплайнов пятой степени максимальный допустимый дефект равен 3 ($q = 1$). Здесь $S_\Delta^{(p)}(x_j) = f_\Delta^{(p)}(x_j)$ $(p = 0, 1, 2;\ j = 1, \ldots, N-1)$.

При создании алгоритмов численного интегрирования и дифференцирования или интерполирования аналитически заданной функции часто бывает полезно воспользоваться интерполяционными процессами более высокого порядка. В этих алгоритмах сплайны дефекта, превышающего 1, находят важное применение.

Другое применение этой идеи, представляющее и самостоятельный интерес, включает использование сплайнов максимального дефекта, когда только сама функция $f(x)$ известна или ее можно подходящим образом определить в узлах сетки. Здесь мы вначале аппроксимируем требуемые производные некоторым вспомогательным способом, таким, как полиномиальная интерполяция [1]).

Для сплайнов пятой степени дефекта 3 найдем приближенные значения производных f_j' и f_j'' с помощью параболической интерполяции. Пусть функция

---

[1]) На эффективность сплайнов пятой степени максимального дефекта в сглаживании кривых и на их связь с правилом Симпсона и правилом трех восьмых указал С. Ауслендер.

$u_j = u_j(x)$ $(0 < j < N)$ совпадает с параболой, проходящей через точки (x_{j-1}, f_{j-1}), (x_j, f_j) и (x_{j+1}, f_{j+1}). Тогда

$$\begin{aligned} u_j(x_j) &= f_j, \\ u_j'(x_j) &= \lambda_j \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j} + \mu_j \frac{f_{j+1} - f_j}{h_{j+1}}, \\ u_j''(x_j) &= 2f[x_{j-1}, x_j, x_{j+1}] \end{aligned} \tag{4.5.1}$$

($\lambda_j = 1 - \mu_j = h_{j+1}/(h_j + h_{j+1})$, как и в гл. II).

Сплайн $\hat{S}_\Delta(x)$ пятой степени дефекта 3 определяется на отрезке $[x_{j-1}, x_j]$ условиями

$$\hat{S}_\Delta^{(p)}(x_{j-1}) = u_{j-1}^{(p)}(x_{j-1}), \qquad \hat{S}_\Delta^{(p)}(x_j) = u_j^{(p)}(x_j) \qquad (p = 0, 1, 2). \tag{4.5.2}$$

Имеем

$$\begin{aligned} u_j(x) &= f_j + (x - x_j) u_j'(x_j) + \frac{(x - x_j)^2}{2!} u_j''(x_j), \\ u_j(x_{j-1}) &= f_j - h_j u_j'(x_j) + \frac{h_j^2}{2!} u_j''(x_j), \\ u_j(x_{j+1}) &= f_j + h_{j+1} u_j'(x_j) + \frac{h_{j+1}^2}{2!} u_j''(x_j). \end{aligned} \tag{4.5.3}$$

Пусть кубический полином $\alpha(\sigma)$ удовлетворяет условиям $\alpha(0) = \alpha'(0) = \alpha'(1) = 0$, $\alpha(1) = 1$. Тогда

$$\alpha(\sigma) = 3\sigma^2 - 2\sigma^3. \tag{4.5.4}$$

Полином пятой степени, совпадающий на $[x_{j-1}, x_j]$ с $\hat{S}_\Delta(x)$, можно записать в виде

$$u_{j-1}(x)[1 - \alpha_j(x)] + u_j(x)\alpha_j(x), \tag{4.5.5}$$

где $\alpha_j(x) = \alpha[(x - x_{j-1})/h_j]$.

Отметим в связи с этим, что первая и вторая производные в точке x_j равны взвешенным средним наклонов m_{j-1}, m_j, m_{j+1} и моментов M_{j-1}, M_j, M_{j+1} простого кубического сплайна (см. (2.1.15) и (2.1.7)). Для равномерных сеток это дает сглаживание в смысле Шёнберга первой и второй производных кубического сплайна. На практике было обнаружено, что иногда вычерчивание кривой по точкам с помощью такого сплайна пятой степени дает преимущество по сравнению с простым кубическим сплайном.

Важно также заметить, что сплайн пятой степени дефекта 3 полностью определяется аппроксимируемой функцией и ее первой и второй разделенными разностями. Для определения такого сплайна не нужно решать никакой системы уравнений. Кроме того, достаточно четырех параметров, чтобы описать полином пятой степени на $[x_{j-1}, x_j]$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \hat{S}_\Delta(x) = \{f_{j-1} + (x - x_{j-1}) u_{j-1}'(x_{j-1}) + (x - x_{j-1})^2 u_{j-1}''(x_{j-1})/2!\}[1 - \alpha_j(x)] + \\ + \left\{f_j + (x - x_j) u_j'(x_j) + \frac{(x - x_j)^2}{2} u_j''(x_j)\right\} \alpha_j(x). \end{aligned} \tag{4.5.6}$$

Так как

$$u_j'(x_j) = \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j} + \frac{h_j}{2} u_j''(x_j),$$

$$u_{j-1}'(x_{j-1}) = \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j} - \frac{h_j}{2} u_{j-1}''(x_{j-1}),$$

то

$$\hat{S}_\Delta(x) = f_{j-1}\frac{x_j - x}{h_j} + f_j \frac{x - x_{j-1}}{h_j} - \frac{(x_j - x)(x - x_{j-1})}{2}\{u_{j-1}''(x_{j-1})[1 - \alpha_j(x)] + u_j''(x_j)\alpha_j(x)\}. \quad (4.5.7)$$

Сплайны этого типа тесно связаны с численным интегрированием. Имеем

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} \hat{S}_\Delta(x)\,dx = h_j \frac{f_{j-1} + f_j}{2} - \frac{h_j^3}{24}[u_{j-1}''(x_{j-1}) + u_j''(x_j)].$$

Заметим, что при такой аппроксимации использованы лишь значения f_{j-2}, f_{j-1}, f_j, f_{j+1}. Положим $x_j - x_{j-1} = h$, $x_{j-1} - x_{j-2} = x_{j+1} - x_j = \lambda h$. Тогда

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\,dx = \frac{h}{12\lambda(1+\lambda)}\{-f_{j-2} + [6\lambda(1+\lambda) + 1](f_{j-1} + f_j) - f_{j+1}\}. \quad (4.5.8)$$

При $\lambda = -1/3$ процесс заключается в интегрировании по трем интервалам длины $H = h/3$ с абциссами x_{j-1}, x_{j-2}, x_{j+1}, x_j, расположенными в указанном порядке. В результате получаем правило трех восьмых

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\,dx \approx \frac{3}{8} H (f_{j-1} + 3f_{j-2} + 3f_{j+1} + f_j).$$

При $\lambda = -1/2$ процесс заключается в интегрировании по двум интервалам длины $H = h/2$ с расположением абсцисс x_{j-1}, $x_{j-2} = x_{j+1}$, x_j. При таком выборе λ квадратурная формула совпадает с правилом Симпсона

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\,dx \approx \frac{H}{6}(f_{j-1} + 4f_{j+1} + f_j).$$

Допустим, что λ выбрано так, что коэффициенты при f_{j-1} и f_j обращаются в нуль, т. е.

$$6\lambda^2 + 6\lambda + 1 = 0, \quad \lambda = \frac{1}{6}(-3 \pm \sqrt{3}).$$

Тогда мы получаем квадратурную формулу Гаусса второго порядка:

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\left\{f\left(x_{j-1} + h\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right) + f\left(x_{j+1} - h\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)\right\}. \quad (4.5.9)$$

Можно ожидать, что сходимость таких сплайнов эффективно сравнивается со сходимостью кубических сплайнов. В силу (4.5.7) на отрезке $[x_{j-1}, x_j]$

$$|\hat{S}''_\Delta(x) - f''(x)| = |[u''_{j-1}(x_{j-1})(1-\sigma) + u''_j(x_j)\sigma - f''(x)] + 10\sigma(1-\sigma)(1-2\sigma)[u''_{j-1}(x_{j-1}) - u''_j(x_j)]| \leqslant$$
$$\leqslant [2+\sqrt{3}/2]\,\omega(\|\Delta\|, f''). \qquad (4.5.10)$$

Если $f(x)$ принадлежит классу $C^1[a, b]$, то на отрезке $[x_{j-1}, x_j]$

$$\hat{S}'_\Delta(x) - f'(x) = \left[\frac{f_j - f_{j-1}}{h_j} - f'(x)\right] + \left\{\frac{2\sigma-1}{2} h_j [u''_{j-1}(x_{j-1})(1-\alpha_j(x)) + u''_j(x_j)\alpha_j(x)] - \right.$$
$$\left. - \frac{\sigma(1-\sigma)}{2} h_j [u''_j(x_j) - u''_{j-1}(x_{j-1})]\,\alpha'_j(x)\right\}.$$

Если $0 < \beta^{-1} < h_j/h_{j+1} < \beta$ для всех сеток Δ (β фиксировано), то

$$|h_j u''_{j-1}(x_{j-1})| < \frac{\beta}{\beta+1}\omega(2\|\Delta\|, f'),$$
$$|h_j u''_j(x_j)| < \frac{\beta}{\beta+1}\omega(2\|\Delta\|, f').$$

Отсюда следует, что

$$|f'(x) - \hat{S}'_\Delta(x)| \leqslant \text{const}\cdot\omega(\|\Delta\|, f'). \qquad (4.5.11)$$

Наконец, если $f(x)$ принадлежит классу $C[a, b]$, то

$$\hat{S}_\Delta(x) - f(x) = \left[\left(f_{j-1}\frac{x_j - x}{h_j} + f_j\frac{x - x_{j-1}}{h_j}\right) - f(x)\right] - \frac{\sigma(1-\sigma)}{2} h_j^2 \{u''_{j-1}(x_{j-1})[1-\alpha_j(x)] + u''_j(x_j)\alpha_j(x)\},$$

и снова, если $0 < \beta^{-1} < h_j/h_{j+1} < \beta$ для всех сеток Δ, то

$$|h_j^2 u''_{j-1}(x_{j-1})| \leqslant \beta\omega(\|\Delta\|, f).$$

Отсюда следует, что

$$|f(x) - \hat{S}_\Delta(x)| \leqslant \text{const}\cdot\omega(\|\Delta\|, f). \qquad (4.5.12)$$

Можно также распространить на сплайны пятой степени идеи Фейера, описанные в связи с доказательством теоремы 2.3.1. Исследуем сплайн пятой степени дефекта 2, интерполирующий функцию $f(x)$ из класса $C[a, b]$ в узлах сетки Δ на отрезке $[a, b]$ и имеющий производную, равную нулю в каждом из этих узлов. Ограничимся здесь периодическими сплайнами пятой степени и функциями $f(x)$ с периодом $b-a$, принадлежащими классу $C(-\infty, \infty)$.

Снова обозначим этот сплайн через $\hat{S}_\Delta(x)$ и положим для удобства $N_j = \hat{S}''_\Delta(x_j)$. Из равенств (4.1.22) получаем

$$\hat{S}'''_\Delta(x_j - 0) = \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j}\cdot\frac{60}{h_j^2} + \frac{9N_j - 3N_{j-1}}{h_j},$$
$$\hat{S}'''_\Delta(x_j + 0) = \frac{f_{j+1} - f_j}{h_{j+1}}\cdot\frac{60}{h_{j+1}^2} + \frac{3N_{j+1} - 9N_j}{h_{j+1}}. \qquad (4.5.13)$$

В силу непрерывности $\hat{S}'''_\Delta$ в точке x_j

$$-\frac{1}{h_j}N_{j-1}+3\left(\frac{1}{h_j}+\frac{1}{h_{j+1}}\right)N_j-\frac{1}{h_{j+1}}N_{j+1}=20\left(\frac{f_{j+1}-f_j}{h_{j+1}}\cdot\frac{1}{h_{j+1}^2}-\frac{f_j-f_{j-1}}{h_j}\cdot\frac{1}{h_j^2}\right)$$

или, в обозначениях гл. II,

$$-\lambda_j N_{j-1}+3N_j-\mu_j N_{j+1}=$$
$$=20\,\frac{[(f_{j+1}-f_j)/h_{j+1}]\,(h_j/h_{j+1})-[(f_j-f_{j-1})/h_j]\,(h_{j+1}/h_j)}{h_j+h_{j+1}}. \qquad (4.5.14)$$

Здесь норма матрицы, обратной к матрице коэффициентов, ограничена независимо от сетки Δ. Если функция $f(x)$ непрерывна и $\max\limits_j \|\Delta\|/h_j\leqslant\beta$, то $|N_j|\,\|\Delta\|^2\leqslant{}^1/_2\cdot 20\beta^2(2\beta-1)\,\omega(\|\Delta\|, f)$. Из (4.5.13) заключаем, что независимо от сетки Δ можно аналогично оценить $\hat{S}'''_\Delta(x_j)\,\|\Delta\|^3$, а из (4.1.27) заключаем, что то же верно для $\hat{S}^{(4)}_\Delta(x_j-0)\,\|\Delta\|^4$ и $\hat{S}^{(4)}_\Delta(x_j+0)\,\|\Delta\|^4$. Так как на отрезке $[x_{j-1}, x_j]$

$$\hat{S}_\Delta(x)=\hat{S}^{(4)}_\Delta(x_{j-1})\,\frac{(x_j-x)^5}{5!\,h_j}+\hat{S}^{(4)}_\Delta(x_j)\,\frac{(x-x_{j-1})^5}{5!\,h_j}+$$
$$+\left[\hat{S}'''_\Delta(x_{j-1})+\hat{S}^{(4)}_\Delta(x_{j-1})\,\frac{h_j}{2}\right]\frac{(x-x_{j-1})^3}{3!}+$$
$$+\left[\hat{S}''_\Delta(x_{j-1})-\hat{S}^{(4)}_\Delta(x_{j-1})\,\frac{h_j^2}{3!}\right]\frac{(x-x_{j-1})^2}{2!}+$$
$$+\left[\hat{S}'_\Delta(x_{j-1})+\hat{S}^{(4)}_\Delta(x_{j-1})\,\frac{h_j^3}{4!}\right](x-x_{j-1})+$$
$$+\left[\hat{S}_\Delta(x_{j-1})-\hat{S}^{(4)}_\Delta(x_{j-1})\,\frac{h_j^4}{5!}\right],$$

то из предыдущих рассуждений вытекает, что при выполнении условия (2.3.7) разность $f(x)-\hat{S}_\Delta(x)$ можно сделать произвольно малой, если число $\|\Delta\|$ достаточно мало. Таким образом, доказана

Теорема 4.5.1. *Пусть на отрезке* $[a, b]$ *задана последовательность сеток* $\{\Delta_k\}$, *удовлетворяющая условию* (2.3.7) *и такая, что* $\lim\limits_{k\to\infty}\|\Delta_k\|=0$. *Если периодический сплайн* $\hat{S}_{\Delta_k}(x)$ *пятой степени дефекта* 2 *интерполирует непрерывную периодическую функцию* $f(x)$ *периода* $b-a$ *и* $\hat{S}'_{\Delta_k}(x)=0$ *в точках сетки* Δ_k, *то последовательность* $\{\hat{S}_{\Delta_k}(x)\}$ *сходится равномерно к* $f(x)$ *при* $k\to\infty$.

4.6. Сходимость периодических сплайнов на равномерных сетках

В разд. 4.3 было показано, что матрица коэффициентов системы (4.2.5), которая после умножения на $(2n-1)!$ становится циркулянтом порядка N,

$$C(\varphi_{n-1}^{(2n-1)}, \varphi_n^{(2n-1)}, \ldots, \varphi_{2n-2}^{(2n-1)}, 0, \ldots, 0, \varphi_0^{(2n-1)}, \varphi_1^{(2n-1)}, \ldots, \varphi_{n-2}^{(2n-1)}), \qquad (4.6.1)$$

не вырождена. Сейчас мы покажем, что норма обратной матрицы при фиксированном n равномерно ограничена относительно N.

В разд. 4.3 было установлено, что функция

$$q(z)=z\sum_{k=0}^{2n-2}\varphi_k^{(2n-1)}z^k \tag{4.6.2}$$

имеет только действительные отрицательные нули, отличные от -1. Собственные значения матрицы (4.6.1) равны числам $q(\omega_k)/\omega_k^{n-1}$, где $\omega_k=\exp(2k\pi i/N)$. Таким образом, собственные значения этой матрицы отличны от нуля. Теперь нужное нам свойство вытекает из следующей теоремы.

Теорема 4.6.1. *Обозначим через C_k последовательность циркулянтов $C(a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \ldots, a_{N_k}^{(k)})$, $k=1, 2, \ldots$, и через a_j $(j=-m+2, -m+3, \ldots, m)$—данные действительные или комплексные числа. Пусть $a_j^{(k)}=a_j$ $(j=1, \ldots, m)$, $a_j^{(k)}=a_{j-N_k}$ $(j=N_k-m+2, \ldots, N_k)$, $a_j^{(k)}=0$ в остальных случаях. Если полином $q(z)=\sum_{j=-m+2}^{m}a_jz^{j+m-2}$ не имеет нулей, по модулю равных 1, то C_k^{-1} существует и нормы $\|C_k^{-1}\|$ ограничены относительно k.*

Доказательство. Обозначим через P_k матрицу перестановок порядка N_k:

$$P_k=C(0, 1, 0, \ldots, 0).$$

Тогда $P_kC(a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \ldots, a_{N_k}^{(k)})=C(a_{N_k}^{(k)}, \ldots, a_{N_k-1}^{(k)})$ и

$$C_k=a_1^{(k)}I_k+a_2^{(k)}P_k+\ldots+a_{N_k}^{(k)}P_k^{N_k-1}=$$
$$=P_k^{-m+1}\{a_{-m+2}I_k+a_{-m+3}P_k+\ldots+a_mP_k^{2m-1}\}=P_k^{-m+1}q(P_k),$$

где I_k — единичная матрица порядка N_k. Так как полином $q(z)$ не имеет нулей, по модулю равных 1, то существует круговое кольцо $r_1<|z|<r_2$, содержащее в себе $|z|=1$, в котором $q(z)\neq 0$. В этом круговом кольце функцию $[z^{-m+1}q(z)]^{-1}$ можно разложить в абсолютно сходящийся степенной ряд $\sum_{j=-\infty}^{\infty}b_jz^j$. Так как $\|P_k\|=1$ (норма максимума строки), то ряд $\sum_{j=-\infty}^{\infty}b_jP_k^j$ сходится в этой норме к матрице C_k^{-1}, обратной к C_k. Кроме того,

$$\|C_k^{-1}\|\leqslant\sum_{j=-\infty}^{\infty}|b_j|,$$

где правая часть зависит только от $a_{-m+2}, \ldots, a_m$.

Из теоремы 4.4.1 теперь непосредственно следует

Теорема 4.6.2. *Пусть периодическая функция $f(x)$ с периодом $b-a$ принадлежит классу $C^{(2n-2)}(-\infty, \infty)$ и на отрезке $[a, b]$ задана последовательность равномерных сеток $\{\Delta_k\}$ $(\|\Delta_k\|\to 0)$. Если периодический полиномиаль-*

ный сплайн $S_{\Delta_k}(x)$ *степени* $2n-1$ $(n>1)$ *интерполирует функцию* $f(x)$ *в узлах сетки* Δ_k, *то*

$$f^{(p)}(x)-S^{(p)}_{\Delta_k}(x)=o(\|\Delta_k\|^{2n-2-p}) \qquad (p=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 2n-2)$$

равномерно относительно x *на* $[a,\ b]$. *Если производная* $f^{(2n-2)}(x)$ *удовлетворяет на отрезке* $[a,\ b]$ *условию Липшица порядка* α $(0<\alpha\leqslant 1)$, *то*

$$f^{(p)}(x)-S^{(p)}_{\Delta_k}(x)=O(\|\Delta_k\|^{2n-2+\alpha-p}) \qquad (p=0,\ 1,\ \ldots,\ 2n-2)$$

равномерно относительно x *на* $[a,\ b]$.

В следующей теореме функция $f(x)$ имеет бóльшую гладкость.

Т е о р е м а 4.6.3. *Пусть периодическая функция* $f(x)$ *с периодом* $b-a$ *принадлежит классу* $C^{(2n-1)}(-\infty,\ \infty)$. *Если периодический полиномиальный сплайн* $S_{\Delta_k}(x)$ *степени* $2n-1$ *интерполирует функцию* $f(x)$ *в узлах равномерной сетки* $\Delta_k\subset[a,\ b]$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$, *то равномерно относительно* x *на* $[a,\ b]$

$$f^{(p)}(x)-S^{(p)}_{\Delta_k}(x)=o(\|\Delta_k\|^{2n-1-p}) \qquad (p=0,\ 1,\ \ldots,\ 2n-1), \qquad (4.6.3)$$

где $S^{(2n-1)}_{\Delta_k}(x_{kj})$ *есть правый или левый предел последовательности* $\{S^{(2n-1)}_{\Delta_k}(x)\}$ *в точке* x_{kj}. *Если* $f^{(2n-1)}(x)$ *удовлетворяет на* $[a,\ b]$ *условию Липшица порядка* α $(0<\alpha\leqslant 1)$, *то*

$$f^{(p)}(x)-S^{(p)}_{\Delta_k}(x)=O(\|\Delta_k\|^{2n-1+\alpha-p}) \qquad (p=0,\ 1,\ \ldots,\ 2n-1) \qquad (4.6.4)$$

равномерно относительно x *на* $[a,\ b]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим (опуская индекс сетки k)

$$\sigma_j=\frac{M_j-M_{j-1}}{h}.$$

Вычитая члены каждого уравнения системы (4.2.5) из соответствующих членов последующего уравнения, получаем

$$\frac{1}{(2n-1)!}\sum_{h=0}^{2n-2}\varphi_h^{(2n-1)}\sigma_{j-n+1+h}=\frac{\bar\delta^{2n-2}f_j-\bar\delta^{2n-2}f_{j-1}}{h^{2n-1}}=$$

$$=(2n-1)!\,[f_{j-n},\ f_{j-n+1},\ \ldots,\ f_{j+n-1}]. \qquad (4.6.5)$$

Таким образом, если C — циркулянт (4.6.1), σ — вектор $(\sigma_1,\ \ldots,\ \sigma_{N_k})$ и r — вектор правых частей системы (4.6.5), то

$$\frac{1}{(2n-1)!}C(\sigma-r)=\left(I-\frac{1}{(2n-1)!}C\right)r. \qquad (4.6.6)$$

Правую часть равенства (4.6.6) можно представить в виде

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{2n-2} \frac{\varphi_k^{(2n-1)}}{(2n-1)!}(r_1 - r_{k-n+2}) \\ \sum_{k=0}^{2n-2} \frac{\varphi_k^{(2n-1)}}{(2n-1)!}(r_2 - r_{k-n+3}) \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{2n-2} \frac{\varphi_k^{(2n-1)}}{(2n-1)!}(r_{N_k} - r_{k-n+N_k+1}) \end{bmatrix},$$

учитывая, что $r_{-j} = r_{N_k - j}$, $r_{N_k + j} = r_j$. Норма этого вектора не превосходит $(3n-3)\,\omega(\|\Delta_k\|, f^{2n-1})$, так что

$$\|\sigma - r\| \leqslant (2n-1)!\,\|C^{-1}\|\,(3n-3)\,\omega(\|\Delta_k\|, f^{(2n-1)}).$$

С другой стороны, на отрезке $[x_{j-1}, x_j]$

$$|f^{(2n-1)}(x) - r_j| \leqslant \omega[(2n-1)\|\Delta\|, f^{2n-1}] \leqslant (2n-1)\,\omega(\|\Delta\|, f^{(2n-1)}).$$

Так как $S_\Delta^{(2n-1)}(x) = \sigma_j$ на отрезке $[x_{j-1}, x_j]$, то

$$\sup_{a \leqslant x \leqslant b} |f^{(2n-1)}(x) - S_\Delta^{(2n-1)}(x)| \leqslant$$

$$\leqslant [(2n-1) + (2n-1)!\,\|C^{-1}\|\,(3n-3)]\,\omega(\|\Delta_k\|, f^{(2n-1)}).$$

Равенства (4.6.3) и (4.6.4) для $p = 2n-1$ доказаны. С помощью интегрирования и интерполяционных свойств сплайна $S_\Delta(x)$ их можно обычным способом получить и для меньших значений p (см. теорему 2.3.3).

Аналогично обобщается теорема 2.9.5. Мы только сформулируем результат.

Теорема 4.6.4. *Пусть периодическая функция $f(x)$ с периодом $b-a$ принадлежит классу $C^{2n}(-\infty, \infty)$. Если периодический полиномиальный сплайн $S_{\Delta_k}(x)$ степени $2n-1$ интерполирует функцию $f(x)$ на равномерной сетке $\Delta_k \subset [a, b]$ $(k = 1, 2, \ldots)$, то*

$$\lim_{k \to \infty} \max_j \left| \frac{S_{\Delta_k}^{(2n-1)}(x_{kj}+0) - S_{\Delta_k}^{(2n-1)}(x_{kj}-0)}{h_{kj}} - f^{(2n)}(x_{kj}) \right| = 0.$$

Другие результаты о сходимости связаны с ослаблением требований к $f(x)$. Мы изложим их в следующей теореме, которая вытекает из теоремы 4.4.2.

Теорема 4.6.5. *Пусть периодическая функция $f(x)$ с периодом $b-a$ принадлежит классу $C^q(-\infty, \infty)$ $(0 \leqslant q \leqslant 2n-2)$. Если периодический полиномиальный сплайн $S_{\Delta_k}(x)$ степени $2n-1$ интерполирует функцию $f(x)$ на равномерной сетке $\Delta_k \subset [a, b]$ $(k = 1, 2, \ldots)$, то*

$$f^{(p)}(x) - S^{(p)}_{\Delta_k}(x) = o(\|\Delta_k\|^{q-p}) \qquad (0 \leqslant p \leqslant q) \tag{4.6.7}$$

равномерно на $[a, b]$ относительно x. Если $f^{(q)}(x)$ удовлетворяет на отрезке $[a, b]$ условию Липшица порядка α $(0 < \alpha \leqslant 1)$, то

$$f^{(p)}(x) - S^{(p)}_{\Delta_k}(x) = O(\|\Delta_k\|^{q+\alpha-p}) \qquad (0 \leqslant p \leqslant q) \tag{4.6.8}$$

равномерно относительно x на $[a, b]$.

Глава V. ВНУТРЕННИЕ СВОЙСТВА ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ СПЛАЙНОВ НЕЧЕТНОЙ СТЕПЕНИ

5.1. Введение

По своему содержанию эта глава очень близко примыкает к гл. III, и почти каждая теорема, полученная для кубических сплайнов в гл. III, имеет здесь свой аналог. Основное изменение здесь сводится к тому, что при рассмотрении полиномиальных сплайнов степени $2n-1$ $(n>1)$ мы заменяем функциональное пространство $\mathscr{K}^2(a, b)$ функциональным пространством $\mathscr{K}^n(a, b)$ и скалярное произведение

$$(f, g) = \int_a^b f''(x)\, g''(x)\, dx \tag{5.1.1}$$

скалярным произведением

$$(f, g) = \int_a^b f^{(n)}(x)\, g^{(n)}(x)\, dx. \tag{5.1.2}$$

В гл. IV уже были выявлены некоторые затруднения, связанные со сплайнами четной степени, и указаны некоторые пути преодоления части этих затруднений. В этой главе особенно важно требование, чтобы рассматриваемые сплайны были нечетной степени, и это требование нельзя ослабить.

Для изучения внутренних свойств обобщенных сплайнов, в том числе и полиномиальных сплайнов нечетной степени, необходимо задать в пространстве $\mathscr{K}^n(a, b)$ скалярное произведение (f, g). Это можно сделать, если сплайны удовлетворяют (всюду, кроме узлов сетки) самосопряженному дифференциальному уравнению порядка $2n$

$$AS_\Delta = 0. \tag{5.1.3}$$

Тогда оператор A можно представить в виде

$$A = L^*L, \tag{5.1.4}$$

где L — линейный оператор порядка n, а L^* — его формально сопряженный. Скалярное произведение определяется формулой

$$(f, g) = \int_a^b (Lf)(x) \cdot (Lg)(x)\, dx. \tag{5.1.5}$$

Эта точка зрения развивается в гл. VI в предположении, что оператор L имеет действительные и неособенные коэффициенты. Для комплекснозначных сплай-

нов на $[a, b]$ можно развить аналогичную теорию, слегка изменив определения (f, g) и L^*.

Мы не будем приводить тех доказательств, которые в основном повторяют доказательства, данные в гл. III для кубического случая, а только сформулируем соответствующие теоремы. Как правило, мы будем обращать внимание только на различия в доказательствах. В частности, доказанные здесь теоремы существования и единственности требуют некоторого уточнения.

5.2. Основное тождество

Пусть на отрезке $[a, b]$ заданы сетка $\Delta: a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$, полиномиальный сплайн $S_\Delta(x)$ степени $2n-1$ и функция $f(x) \in \mathcal{K}^n(a, b)$. Тогда

$$\int_a^b \{f^{(n)}(x) - S_\Delta^{(n)}(x)\}^2\,dx = \int_a^b \{f^{(n)}(x)\}^2\,dx - \\ - 2\int_a^b \{f^{(n)}(x) - S_\Delta^{(n)}(x)\}\,S_\Delta^{(n)}(x)\,dx - \int_a^b \{S_\Delta^{(n)}(x)\}^2\,dx, \qquad (5.2.1)$$

причем второй интеграл в правой части можно записать в виде

$$\int_a^b \{f^{(n)}(x) - S_\Delta^{(n)}(x)\}\,S_\Delta^{(n)}(x)\,dx = \sum_{j=1}^{N} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \{f^{(n)}(x) - S_\Delta^{(n)}(x)\}\,S_\Delta^{(n)}(x)\,dx.$$

Интегрируя n раз по частям, получаем

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} \{f^{(n)}(x) - S_\Delta^{(n)}(x)\}\,S_\Delta^{(n)}(x)\,dx = \\ = \sum_{\alpha=1}^{n} (-1)^{\alpha+1} \{f^{(n-\alpha)}(x) - S_\Delta^{(n-\alpha)}(x)\}\,S_\Delta^{(n+\alpha-1)}(x)\Big|_{x_{j-1}}^{x_j},$$

откуда

$$\int_a^b \{f^{(n)}(x) - S_\Delta^{(n)}(x)\}^2\,dx = \int_a^b \{f^{(n)}(x)\}^2\,dx - \\ - 2\sum_{\alpha=1}^{n-1} (-1)^{\alpha+1} \{f^{(n-\alpha)}(x) - S_\Delta^{(n-\alpha)}(x)\}\,S_\Delta^{(n+\alpha-1)}(x)\Big|_a^b - \\ - 2\sum_{j=1}^{N} (-1)^{n+1} \{f(x) - S_\Delta(x)\}\,S_\Delta^{(2n-1)}(x)\Big|_{x_{j-1}}^{x_j} - \int_a^b \{S_\Delta^{(n)}(x)\}^2\,dx. \qquad (5.2.2)$$

При выводе этого тождества мы воспользовались непрерывностью функции $\{f^{n-\alpha}(x) - S_\Delta^{(n-\alpha)}(x)\}\, S_\Delta^{(n+\alpha-1)}(x)$ на отрезке $[a, b]$ при $\alpha = 1, 2, \ldots, n-1$ и не ставили никакого другого условия, кроме того, чтобы сплайн $S_\Delta(x)$ был простым полиномиальным сплайном степени $2n-1$ на Δ и функция $f(x)$ принадлежала классу $\mathscr{K}^n(a, b)$. Равенство (5.2.2) называют *основным тождеством* для простого полиномиального сплайна степени $2n-1$ на сетке Δ.

5.3. Первое интегральное соотношение

Из основного тождества непосредственно следует, что если сплайн $S_\Delta(f; x)$ интерполирует функцию $f(x)$ на сетке Δ и удовлетворяет какому-либо множеству краевых условий, то

$$\int_a^b \{f^{(n)}(x)\}^2\, dx = \int_a^b \{S_\Delta^{(n)}(f; x)\}^2\, dx + \int_a^b \{f^{(n)}(x) - S_\Delta^{(n)}(f; x)\}^2\, dx.$$

Это равенство называют *первым интегральным соотношением* для полиномиального сплайна степени $2n-1$, интерполирующего на сетке Δ функцию $f(x)$ из класса $\mathscr{K}^n(a, b)$. Справедлива

Теорема 5.3.1. *Пусть даны сетка* Δ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ *и функция* $f(x)$ *из класса* $\mathscr{K}^n(a, b)$. *Если сплайн* $S_\Delta(f; x)$ *интерполирует функцию* $f(x)$ *на сетке* Δ *и удовлетворяет одному из условий*: a) *разность* $f(x) - S_\Delta(f; x)$ *принадлежит типу* I′, b) *сплайн* $S_\Delta(f; x)$ *принадлежит типу* II′, c) *сплайн* $S_\Delta(f; x)$ *и функция* $f(x)$ *периодические, то*

$$\int_a^b \{f^{(n)}(x)\}^2\, dx = \int_a^b \{S_\Delta^{(n)}(f; x)\}^2\, dx + \int_a^b \{f^{(n)}(x) - S_\Delta^{(n)}(f; x)\}^2\, dx. \quad (5.3.1)$$

Ясно, что можно применить краевые условия смешанного типа. Более того, можно, как указано в гл. III, ослабить условия непрерывности на сплайн $S_\Delta(f; x)$ и его производные и все же получить первое интегральное соотношение, требуя лишь, чтобы определенные производные сплайна $S_\Delta(f; x)$ интерполировали соответствующие производные функции $f(x)$ в узлах сетки Δ. Эти дополнительные интерполяционные условия заменяют непрерывность функции $\{f^{(n-\alpha)}(x) - S_\Delta^{(n-\alpha)}(f; x)\}\, S_\Delta^{(n+\alpha-1)}(f; x)$ на отрезке $[a, b]$. Возможность эту выражает

Теорема 5.3.2. *Пусть даны сетка* Δ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$, *функция* $f(x)$ *из класса* $\mathscr{K}^n(a, b)$ *и сплайн* $S_\Delta(x)$ *из класса* $\mathscr{K}^{2n-k}(a, b)$ $(k \leqslant n)$. *Пусть* $S_\Delta^{(2n)}(x) \equiv 0$ *на каждом открытом интервале сетки* Δ *и* $S_\Delta^{(\alpha)}(x)$ *интерполирует в узлах сетки* $f^{(\alpha)}(x)$ $(\alpha = 0, 1, \ldots, k-1$; $x \neq a$ *и* $x \neq b$ *при* $\alpha \neq 0)$. *Тогда*

$$\int_a^b \{f^{(n)}(x)\}^2\, dx = \int_a^b \{S_\Delta^{(n)}(x)\}^2\, dx + \int_a^b \{f^{(n)}(x) - S_\Delta^{(n)}(x)\}^2\, dx,$$

если выполнено одно из условий: a) $f(x) - S_\Delta(x)$ *принадлежит типу* I', b) $S_\Delta(x)$ *принадлежит типу* II', c) *сплайн* $S_\Delta(x)$ *и функция* $f(x)$ *периодические.*

Замечание 5.3.1 В периодическом случае здесь и в ряде других теорем требуется также, чтобы было $S_\Delta(f; a) = f(a)$ и $S_\Delta^{(\alpha)}(f; a) = S_\Delta^{(\alpha)}(f; b)$ $(\alpha = 0, 1, \ldots, 2n-2)$. Могут понадобиться и условия $S_\Delta^{(\alpha)}(f; a) = f^{(\alpha)}(a)$ $(\alpha = 0, 1, \ldots, k-1)$, $S_\Delta^{(\alpha)}(f; a) = S_\Delta^{(\alpha)}(f; b)$ $(\alpha = 0, 1, \ldots, 2n-k-1)$.

5.4. Свойство минимальной нормы

В качестве непосредственного следствия из первого интегрального соотношения для полиномиальных сплайнов степени $2n-1$ получаем аналог свойства минимальной нормы кубических сплайнов. Сформулируем этот результат и основные краевые условия, при которых он справедлив.

Теорема 5.4.1. *Пусть на отрезке* $[a, b]$ *даны сетка* Δ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ *и произвольная функция* $f(x)$, *имеющая* $n-1$ *производных в точках* $x = a$ *и* $x = b$. *Тогда среди всех функций* $g(x)$ *из класса* $\mathscr{K}^n(a, b)$, *интерполирующих функцию* $f(x)$ *на сетке* Δ, *сплайн* $S_\Delta(f; x)$ *типа* II' *минимизирует интеграл*

$$\int_a^b \{g^{(n)}(x)\}^2\, dx. \tag{5.4.1}$$

Если функция $g(x)$ *такова, что* $f(x) - g(x)$ *принадлежит типу* I', *или если* $f(x)$ *и* $g(x)$ *— периодические функции, то интеграл* (5.4.1) *минимизируется сплайном, интерполирующим функцию* $f(x)$ *в узлах сетки* Δ *и удовлетворяющим тем же самым условиям, что и функция* $g(x)$.

Требования гладкости, наложенные на $S_\Delta(f; x)$, как и в теореме 5.3.2, можно ослабить. Введем следующую терминологию. Пусть даны сетка Δ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ и такая функция $S_\Delta(x)$ из класса $\mathscr{K}^{2n-k}(a, b)$, что $S_\Delta^{(2n)}(x) \equiv 0$ на каждом открытом интервале сетки Δ. Функция $S_\Delta(x)$, удовлетворяющая этим условиям, называется полиномиальным сплайном степени $2n-1$ *дефекта* k. Мы предполагаем, что $0 \leqslant k \leqslant n$. В этой терминологии простой сплайн на Δ имеет дефект 1, а полином степени $2n-1$ имеет дефект 0.

Теорема 5.4.2. *Пусть на отрезке* $[a, b]$ *даны сетка* Δ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ *и произвольная функция* $f(x)$, *имеющая* $n-1$ *производных в точках* $x = a$ *и* $x = b$ *и* $k-1$ $(k \leqslant n)$ *производных во внутренних узлах сетки* Δ. *Тогда среди всех функций* $g(x)$ *из класса* $\mathscr{K}^n(a, b)$, *интерполирующих функцию* $f(x)$ *в узлах сетки* Δ *и таких, что во внутренних узлах сетки* Δ

$$g^{(\alpha)}(x) = f^{(\alpha)}(x) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, k-1),$$

сплайн типа II′ *дефекта* k *минимизирует интеграл* (5.4.1). *Если функция* $g(x)$ *такова, что* $f(x) - g(x)$ *принадлежит типу* I′, *или если* $f(x)$ *и* $g(x)$ — *периодические функции, то интеграл* (5.4.1) *минимизируется интерполяционным сплайном дефекта* k, *удовлетворяющим тем же самым условиям, что и функция* $g(x)$.

Пусть функция $g(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 5.4.1 или 5.4.2 и минимизирует интеграл (5.4.1). Тогда она отличается от соответствующего интерполяционного сплайна $S_\Delta(f; x)$ на решение уравнения $D^n f = 0$. Это следует непосредственно из первого интегрального соотношения. Кроме того, разность $g(x) - S_\Delta(f; x)$ должна обращаться в нуль на Δ и, в зависимости от дополнительно наложенных условий, в определенных точках сетки некоторые из ее производных также должны обращаться в нуль. Если число таких интерполяционных требований не меньше n, то можно ожидать, что $g(x) \equiv S_\Delta(f; x)$. В частности, это верно, когда сетка Δ содержит по крайней мере n точек. Далее, если функция $g(x)$ периодическая, то разность $g(x) - S_\Delta(f; x)$ также периодическая и, следовательно, является константой, причем равной нулю, ибо $g(a) = S_\Delta(f; a)$. В разд. 5.6 мы рассмотрим этот вопрос более подробно.

5.5. Свойство наилучшего приближения

Полиномиальный сплайн $S_\Delta(x)$, заданный на сетке Δ, зависит линейно от своих значений в узлах сетки и от значений своих производных. Более того, он полностью определяется этими величинами. Эти утверждения справедливы независимо от того, равен дефект сплайна 1 или нет. В частности, эта линейная зависимость сплайна отражается в уравнениях (4.1.5), (4.1.8), (4.1.11) — (4.1.13), (5.7.3), (5.7.4) и (5.12.3). Таким образом, при соответствующем выборе краевых условий

$$S_\Delta(f + g; x) = S_\Delta(f; x) + S_\Delta(g; x). \tag{5.5.1}$$

Самые полезные из таких разложений получаются, если выполняется одно из условий:

a) все три разности $S_\Delta(f + g; x) - (f + g)(x)$, $S_\Delta(f; x) - f(x)$ и $S_\Delta(g; x) - g(x)$ принадлежат типу I′;

b) $S_\Delta(f + g; x)$ и $S_\Delta(f; x) + S_\Delta(g; x)$ принадлежат типу II′;

c) $S_\Delta(f + g; x)$, $S_\Delta(f; x)$ и $S_\Delta(g; x)$ — периодические сплайны.

Одно из наиболее важных следствий разложения (5.5.1) состоит в том, что если $g(x) \equiv -S_\Delta(x)$, то при выполнении любого из условий a), b), c)

$$S_\Delta(f - S_\Delta; x) = S_\Delta(f; x) - S_\Delta(x). \tag{5.5.2}$$

Когда разложение (5.5.2) связано с условием b), предполагается, что сплайны $S_\Delta(x)$, $S_\Delta(f; x)$ и $-S_\Delta(g; x)$ принадлежат одному и тому же классу эквивалентности типа II. При выполнении условий a), b) и c) разложение (5.5.2) справедливо, даже если дефект сплайнов $S_\Delta(f - S_\Delta; x)$, $S_\Delta(f; x)$ и $S_\Delta(x)$ больше 1. Если мы определим сплайн $S_\Delta(f - S_\Delta; x)$ так, чтобы выполнялось

первое интегральное соотношение, то, как в гл. III, получим

$$\int_a^b \{f^{(n)}(x) - S_\Delta^{(n)}(x)\}^2\,dx = \int_a^b \{S_\Delta^{(n)}(f - S_\Delta; x)\}^2\,dx +$$

$$+ \int_a^b \{f^{(n)}(x) - S_\Delta^{(n)}(x) - S_\Delta^{(n)}(f - S_\Delta; x)\}^2\,dx =$$

$$= \int_a^b \{S_\Delta^{(n)}(f; x) - S_\Delta^{(n)}(x)\}^2\,dx + \int_a^b \{f^{(n)}(x) - S_\Delta^{(n)}(f; x)\}^2\,dx. \qquad (5.5.3)$$

Отсюда непосредственно вытекают теоремы 5.5.1 и 5.5.2.

Теорема 5.5.1. *Пусть даны сетка* Δ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$, *сплайн* $S_\Delta(x)$ *и функция* $f(x)$ *из класса* $\mathcal{K}^n(a, b)$. *Если сплайн* $S_\Delta(f; x)$ *интерполирует функцию* $f(x)$ *на сетке* Δ *и* $f(x) - S_\Delta(f; x)$ *принадлежит типу* I', *то*

$$\int_a^b \{f^{(n)}(x) - S_\Delta^{(n)}(x)\}^2\,dx \geqslant \int_a^b \{f^{(n)}(x) - S_\Delta^{(n)}(f; x)\}^2\,dx. \qquad (5.5.4)$$

Если рассматриваются лишь сплайны $S_\Delta(x)$ *из заданного класса эквивалентности типа* II, *то интеграл*

$$\int_a^b \{f^{(n)}(x) - S_\Delta^{(n)}(x)\}^2\,dx \qquad (5.5.5)$$

минимизируется сплайном, интерполирующим функцию $f(x)$ *в узлах сетки* Δ *и принадлежащим тому же классу эквивалентности. Если функция* $f(x)$ *и сплайн* $S_\Delta(x)$ *периодические, то интеграл* (5.5.5) *также минимизируется сплайном, интерполирующим* $f(x)$ *на сетке* Δ.

Теорема 5.5.2. *Если на отрезке* $[a, b]$ *заданы сетка* Δ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$, *функция* $f(x)$, *сплайн* $S_\Delta(x)$ *дефекта* k ($k \leqslant n$) *и сплайн* $S_\Delta(f; x)$ *дефекта* k, *интерполирующий функцию* $f(x)$ *в узлах сетки* Δ *и такой, что* $f(x) - S_\Delta(f; x)$ *принадлежит типу* I' *и* $S_\Delta^{(\alpha)}(f; x)$ *интерполирует* $f^{(\alpha)}(x)$ ($\alpha = 1, \ldots, k-1$) *во внутренних узлах сетки* Δ, *то справедливо неравенство* (5.5.4). *Кроме того, если* $S_\Delta(x)$ *принадлежит заданному классу эквивалентности типа* II *или функция* $f(x)$ *и сплайн* $S_\Delta(x)$ *периодические, то интеграл* (5.5.5) *минимизируется соответствующими сплайнами* $S_\Delta(f; x)$ *дефекта* k, *которые интерполируют* $f(x)$ *в узлах сетки* Δ *и производные* $S_\Delta^{(\alpha)}(f; x)$ *которых интерполируют* $f^{(\alpha)}(x)$ ($\alpha = 1, 2, \ldots, k-1$) *во внутренних узлах сетки* Δ.

Если сплайн $S_\Delta(x)$ также минимизирует интеграл (5.5.5) и для него выполняются условия теорем 5.5.1 или 5.5.2, то разность $S_\Delta(x) - S_\Delta(f; x)$ удовлетворяет уравнению $D^n y = 0$. В периодическом случае эта разность постоянна.

5.6. Единственность

Вопрос о единственности полиномиальных сплайнов степени $2n-1$ на сетке Δ: $a=x_0<x_1<x_1<\ldots<x_N=b$ легко сводится к вопросу: равен ли тождественно нулю полином $P(x)$ степени $n-1$, обращающийся в нуль в узлах сетки Δ и обладающий некоторыми другими свойствами? Если этот полином $P(x)$ принадлежит типу I′ или является периодическим, то он равен нулю тождественно. В этих двух случаях сетка Δ может состоять ровно из двух точек $x=a$ и $x=b$. Если $P(x)$ принадлежит типу II′, то ситуация совершенно иная, поскольку требование равенства нулю производных порядка α ($\alpha=n, n+1, \ldots, 2n-1$) при $x=a$ и $x=b$ не дает дополнительных ограничений на полином $P(x)$. В этом случае для того, чтобы полином $P(x)$ был равен нулю тождественно, если он обращается в нуль в узлах сетки Δ, сетка должна содержать по крайней мере n точек. Но если потребовать, чтобы производные $P^{(\alpha)}(x)$ ($\alpha=0, 1, \ldots, k-1$) обращались в нуль во внутренних узлах сетки Δ, то полином $P(x)$ будет равен нулю тождественно, когда $k(N-1)\geqslant n-2$ и $P(a)=P(b)=0$.

Заметим, что нулевая функция $z(x)$ представляет собой полиномиальный сплайн степени $2n-1$ для любого целого числа $n>0$. Нулевая функция $z(x)$ принадлежит не только типу I′, но и типу II′, а также является периодической. Кроме того, $z(x)$ можно интерпретировать как сплайн степени $2n-1$ на Δ дефекта k, $k-1$ производных которого интерполируют нулевую функцию во внутренних узлах сетки Δ. Наконец, $z(x)$ минимизирует интеграл

$$\int_a^b \{f^{(n)}(x)\}^2\,dx. \tag{5.6.1}$$

Рассмотрим любые два сплайна $S_\Delta(x)$ и $\bar{S}_\Delta(x)$ на сетке Δ, разность которых обращается в нуль на Δ и принадлежит типу I′, II′ или является периодической. Так как сплайн $\bar{S}_\Delta(x)-S_\Delta(x)$ интерполирует функцию $z(x)\equiv 0$ на сетке Δ, то

$$\int_a^b \{\bar{S}_\Delta^{(n)}(x)-S_\Delta^{(n)}(x)\}^2\,dx=0. \tag{5.6.2}$$

В силу непрерывности подинтегрального выражения сплайны $S_\Delta(x)$ и $\bar{S}_\Delta(x)$ отличаются на полином степени $n-1$, обращающийся в нуль на Δ и принадлежащий типу I′, II′ или являющийся периодическим. Справедлива

Теорема 5.6.1. *Пусть даны сетка* Δ: $a=x_0<x_1<\ldots<x_N=b$ *и функция* $f(x)$. *Тогда в каждом классе эквивалентности типа* I *существует не более одного сплайна, интерполирующего функцию* $f(x)$ *в узлах сетки* Δ. *Если* $f(a)=f(b)$, *то существует не более одного периодического сплайна, интерполирующего функцию* $f(x)$ *в узлах сетки* Δ. *Наконец, если* $N>n-2$, *то в каждом классе эквивалентности типа* II *существует не более одного сплайна, интерполирующего функцию* $f(x)$ *в узлах сетки* Δ.

Аналогично если полиномиальные сплайны $S_\Delta(x)$ и $\bar{S}_\Delta(x)$ степени $2n-1$ дефекта k ($k \leqslant n$) таковы, что $S_\Delta(x_i) = \bar{S}_\Delta(x_i)$ ($i = 0, 1, \ldots, N$), $S_\Delta^{(\alpha)}(x_i) = \bar{S}_\Delta^{(\alpha)}(x_i)$ ($i = 1, 2, \ldots, N-1$; $\alpha = 1, 2, \ldots, k-1$) и разность $S_\Delta(x) - \bar{S}_\Delta(x)$ принадлежит типу I′, II′ или является периодической, то, как и прежде, можно утверждать, что равенство (5.6.2) выполняется. Это доказывает теорему 5.6.2, из которой теорема 5.6.1 вытекает как частный случай.

Теорема 5.6.2. *Пусть даны сетка* Δ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ *и функция* $f(x)$, *имеющая* $k-1$ *производных в каждом внутреннем узле сетки* Δ. *Тогда в каждом классе эквивалентности типа* I *существует не более одного полиномиального сплайна* $S_\Delta(f; x)$ *степени* $2n-1$ *дефекта* k ($k \leqslant n$), *интерполирующего функцию* $f(x)$ *в узлах сетки* Δ *и такого, что* $S_\Delta^{(\alpha)}(f; x) = f^{(\alpha)}(x)$ ($\alpha = 1, \ldots, k-1$) *во внутренних узлах сетки* Δ. *Аналогично если* $f(a) = f(b)$, *то существует не более одного периодического сплайна дефекта* k, *удовлетворяющего тем же интерполяционным требованиям. Наконец, в каждом классе эквивалентности типа* II *существует не более одного такого сплайна при условии, что* $k(N-1) \geqslant n-2$.

5.7. Определяющие уравнения

Как видно из уравнений (4.1.5) — (4.1.13), представление, полученное для полиномиальных сплайнов нечетной степени в гл. IV, довольно сложно. Мы заменим сейчас эти уравнения системой, аналогичной системе из разд. 3.7.

Пусть $u_j(x) = x^{j-1}/(j-1)!$ ($j = 1, 2, \ldots, 2n$). Тогда $u_j^{(\alpha)}(0) = \delta_{j-1\alpha}$, и функции $u_j(x)$ образуют фундаментальную систему решений дифференциального уравнения

$$D^{2n}f = 0. \tag{5.7.1}$$

Итак, любое решение уравнения (5.7.1) можно представить в виде

$$f(x) = \sum_{j=1}^{2n} c_j u_j(x). \tag{5.7.2}$$

Так как для данной сетки Δ полиномиальный сплайн $S_\Delta(x)$ удовлетворяет уравнению (5.7.1) на каждом открытом интервале $x_{i-1} < x < x_i$ ($i = 1, 2, \ldots, N$), то

$$S_\Delta(x) = \sum_{j=1}^{2n} c_{ij} u_j(x - x_{i-1}).$$

Это представление единственно, ибо функции $u_j(x)$ линейно независимы. Следовательно, множество коэффициентов c_{ij} ($i = 1, 2, \ldots, N$; $j = 1, 2, \ldots, 2n$) однозначно определяет сплайн $S_\Delta(x)$, и обратно, если сплайн $S_\Delta(x)$ существует, то он однозначно определяет множество коэффициентов c_{ij}.

Используя представление (5.7.2) и условия непрерывности и интерполяции, наложенные на сплайны типа I, II и на периодические сплайны, мы получаем следующую систему уравнений для вычисления коэффициентов c_{ij}, а через

них и сплайна $S_\Delta(Y; x)$:

$$A_\Omega C = Y_\Omega \qquad (\Omega = \mathrm{I},\ \mathrm{II},\ P),$$

$$A_\Omega = \begin{bmatrix} C^\Omega_{0,n} & 0 & \dots & & & 0 \\ A_{1n} & B_n & 0 & & & 0 \\ 0 & A_{2n} & B_n & & & 0 \\ \dots & & \dots & & & \dots \\ 0 & \dots & & 0 & A_{N-2n} & B_n \\ 0 & \dots & & & 0 & C^\Omega_{1n} \end{bmatrix}_{(\Omega=\mathrm{I},\ \mathrm{II})}, \tag{5.7.3.1}$$

$$A_P = \begin{bmatrix} A_{1n} & B_n & 0 & \dots & & & 0 \\ 0 & A_{2n} & B_n & 0 & & & 0 \\ \dots & & & & & & \dots \\ \dots & & & & & & \dots \\ 0 & \dots & & & 0 & A_{N-1n} & B_n \\ B_n & \dots & & & & 0 & A_{Nn} \end{bmatrix}, \tag{5.7.3.2}$$

$$A_{in} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ u_1(h_i) & u_2(h_i) & \dots & u_{2n}(h_i) \\ u_1^{(1)}(h_i) & u_2^{(1)}(h_i) & \dots & u_{2n}^{(1)}(h_i) \\ \dots & & & \dots \\ \dots & & & \dots \\ u_1^{(2n-2)}(h_i) & u_2^{(2n-2)}(h_i) & \dots & u_{2n}^{(2n-2)}(h_i) \end{bmatrix}_{h_i = x_i - x_{i-1}}, \tag{5.7.3.3}$$

$$B_n = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & & & & \dots & & \\ \dots & & & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{2n}, \tag{5.7.3.4}$$

$$C_{0n}^{\mathrm{I}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & & & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & & & \dots & 0 \\ \dots & & & & & & & \dots \\ \dots & & & & & & & \dots \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \qquad (5.7.3.5)$$

$$C_{0n}^{\mathrm{II}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & & & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & & & & & & \dots \\ \dots & & & & & & & & & & \dots \\ 0 & \dots & & & & & & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & & & & & & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad (5.7.3.6)$$

$$C_{1n}^{\mathrm{I}} = \begin{bmatrix} u_1(h_N) & u_2(h_N) & \dots & u_{2n}(h_N) \\ u_1^{(1)}(h_N) & u_2^{(1)}(h_N) & \dots & u_{2n}^{(1)}(h_N) \\ \dots & & & \dots \\ \dots & & & \dots \\ u_1^{(n-1)}(h_N) & u_2^{(n-1)}(h_N) & \dots & u_{2n}^{(n-1)}(h_N) \end{bmatrix}_{h_N = x_N - x_{N-1}}, \qquad (5.7.3.7)$$

$$C_{1n}^{\mathrm{II}} = \begin{bmatrix} u_1(h_N) & u_2(h_N) & \dots & u_{2n}(h_N) \\ u_1^{(n)}(h_N) & u_2^{(n)}(h_N) & \dots & u_{2n}^{(n)}(h_N) \\ \dots & & & \dots \\ \dots & & & \dots \\ u_1^{(2n-2)}(h_N) & u_2^{(2n-2)}(h_N) & \dots & u_{2n}^{(2n-2)}(h_N) \end{bmatrix}_{h_N = x_N - x_{N-1}}, \qquad (5.7.3.8)$$

$$C=\begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ \vdots \\ c_{1n+1} \\ \vdots \\ c_{12n} \\ c_{21} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{22n} \\ c_{31} \\ c_{32} \\ \vdots \\ c_{N-1n+1} \\ \vdots \\ c_{N-12n} \\ c_{N1} \\ \vdots \\ c_{Nn+1} \\ c_{Nn+2} \\ \vdots \\ c_{N2n} \end{bmatrix}, \quad Y_{\mathrm{I}}=\begin{bmatrix} y_0 \\ y_0^{(1)} \\ \vdots \\ y_0^{(n-1)} \\ y_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y_{N-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y_N \\ y_N^{(1)} \\ \vdots \\ y_N^{(n-1)} \end{bmatrix}, \quad Y_{\mathrm{II}}=\begin{bmatrix} y_0 \\ y_0^{(n)} \\ \vdots \\ y_0^{(2n-2)} \\ y_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y_{N-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y_N \\ y_N^{(n)} \\ \vdots \\ y_N^{(2n-2)} \end{bmatrix}, \quad Y_P=\begin{bmatrix} y_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y_3 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y_N \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(5.7.3.9) (5.7.3.10) (5.7.3.11) (5.7.3.12)

Если сплайн $S_\Delta(Y; x)$ имеет дефект k, то эта система принимает вид:

$$A_{in}=\left.\begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ u_1(h_i) & \dots & \dots & u_{2n}(h_i) \\ \vdots & & & \vdots \\ u_1^{(2n-k-1)}(h_i) & \dots & \dots & u_{2n}^{(2n-k-1)}(h_i) \end{bmatrix}\right\}_{h_i=x_i-x_{i-1}}^{k}, \qquad (5.7.4.1)$$

$$B_n = \begin{bmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & & & \\ & \dots & & 0\,0\,1 & \end{matrix}}^{h} & \dots & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ & & \\ \dots & & \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \underbrace{\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & \dots & & & \\ 0 & -1 & 0 & \dots & & & \\ & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0\,0 & -1 & 0\,0\,0\,0 \end{matrix}}_{2n-h} & \end{bmatrix}, \qquad (5.7.4.2)$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ \vdots \\ c_{1n+1} \\ \vdots \\ c_{12n} \\ c_{21} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{22n} \\ c_{31} \\ c_{32} \\ \vdots \\ c_{N-1n+1} \\ \vdots \\ c_{N-12n} \\ c_{N1} \\ \vdots \\ c_{Nn+1} \\ c_{Nn+2} \\ \vdots \\ c_{N2n} \end{bmatrix}, \quad (5.7.4.3)$$

$$Y_{\mathrm{I}} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_0^{(1)} \\ \vdots \\ y_0^{(n-1)} \\ y_1 \\ \vdots \\ y_1^{(k-1)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_2^{(k-1)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y_{N-1} \\ \vdots \\ y_{N-1}^{(k-1)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y_N \\ y_N^{(1)} \\ \vdots \\ y_N^{(n-1)} \end{bmatrix}, \quad (5.7.4.4)$$

$$Y_{\mathrm{II}} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_0^{(n)} \\ \vdots \\ y_0^{(2n-2)} \\ y_1 \\ \vdots \\ y_1^{(k-1)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_2^{(k-1)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y_{N-1} \\ \vdots \\ y_{N-1}^{(k-1)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y_N \\ y_N^{(n)} \\ \vdots \\ y_N^{(2n-2)} \end{bmatrix}, \quad (5.7.4.5)$$

$$Y_P = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_1^{(1)} \\ \vdots \\ y_1^{(k-1)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_2^{(k-1)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_3^{(k-1)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y_N \\ y_N^{(1)} \\ \vdots \\ y_N^{(k-1)} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.7.4.6)$$

Существование сплайна $S_\Delta(Y; x)$ связано с существованием матрицы, обратной к A_Ω. Этот вопрос мы исследуем в следующем разделе. Для периодического сплайна у нас есть уравнения для случая $S_\Delta^{(\alpha)}(f; a) = f^{(\alpha)}(a)$ $(\alpha = 0, 1, \ldots, k-1)$, $S_\Delta^{(\alpha)}(f; a) = S_\Delta^{(\alpha)}(f; b)$ $(\alpha = 0, 1, \ldots, 2n-k-1)$.

5.8. Существование

В разд. 5.6 доказана единственность интерполяционного полиномиального сплайна нечетной степени, а в разд. 5.7 установлено, что каждому полиномиальному сплайну $S_\Delta(x)$ нечетной степени соответствует единственное множество коэффициентов c_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, N;\ j = 0, 1, \ldots, 2n-1)$. Следовательно, если уравнение

$$A_\Omega C = 0 \tag{5.8.1}$$

имеет не только нулевое решение, то функцию $z(x) \equiv 0$ интерполируют два различных сплайна, что противоречит теоремам 5.6.1 и 5.6.2. Таким образом, обратная матрица A_Ω^{-1} существует и справедливы следующие две теоремы, которые дополняют теоремы 5.6.1 и 5.6.2.

Теорема 5.8.1. *Пусть на отрезке* $[a, b]$ *заданы сетка* Δ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ *и функция* $f(x)$. *Тогда в каждом классе эквивалентности типа* I *существует единственный сплайн, интерполирующий* $f(x)$ *в узлах сетки* Δ. *Если* $f(a) = f(b)$, *то существует единственный периодический сплайн, интерполирующий* $f(x)$ *в узлах сетки* Δ. *Наконец, если* $N > n-2$, *то в каждом классе эквивалентности типа* II *существует единственный сплайн, интерполирующий* $f(x)$ *в узлах сетки* Δ.

Теорема 5.8.2. *Пусть на отрезке* $[a, b]$ *заданы сетка* Δ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ *и функция* $f(x)$, *имеющая* $k-1$ *производных в каждом внутреннем узле сетки* Δ. *Тогда в каждом классе эквивалентности типа* I *существует единственный полиномиальный сплайн* $S_\Delta(f; x)$ *степени* $2n-1$ *дефекта* k $(k \leqslant n)$, *интерполирующий* $f(x)$ *на* Δ *и такой, что* $S_\Delta^{(\alpha)}(f; x) = f^{(\alpha)}(x)$ $(\alpha = 1, \ldots, k-1)$ *во внутренних узлах сетки* Δ. *Аналогично если* $f(a) = f(b)$, *то существует единственный периодический сплайн дефекта* k, *удовлетворяющий тем же условиям интерполяции. Наконец, если* $k(N-1) \geqslant n-2$, *то существует единственный сплайн в каждом классе эквивалентности типа* II.

Теоремы существования и единственности, доказанные в настоящей главе, непосредственно вытекают из свойства минимальной нормы, и их можно было бы получить до доказательства свойства наилучшего приближения. Это важно, так как при доказательстве последнего свойства в разд. 5.5 мы предполагали существование вспомогательного сплайна $S_\Delta(f - S_\Delta; x)$.

Теорема существования интерполяционных кубических сплайнов из гл. III слабее теоремы, полученной в гл. II другими методами. Из результатов гл. IV

следует, что применение этих методов к полиномиальным сплайнам нечетной степени приводит к теореме существования, в которой требуется, чтобы сетки были почти равномерными. В связи с этим понятна важность теорем 5.8.1 и 5.8.2.

5.9. Сходимость производных низших порядков

Пусть функция $f(x)$ принадлежит классу $\mathscr{K}^n(a, b)$ и сплайн $S_\Delta(f; x)$ интерполирует ее в узлах сетки Δ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$. Многократно применяя теорему Ролля, получаем, что в каждых α последовательных интервалах $S_\Delta^{(\alpha)}(f; x)$ интерполирует $f^{(\alpha)}(x)$ $(0 \leqslant \alpha < n)$ по крайней мере в одной точке. Обозначим эту точку через $\bar{x}_\alpha$. Тогда

$$f^{(\alpha)}(x) - S_\Delta^{(\alpha)}(f; x) = \int_{\bar{x}_\alpha}^{x} \{f^{(\alpha+1)}(x) - S_\Delta^{(\alpha+1)}(f; x)\}\, dx. \tag{5.9.1}$$

Если указанные точки интерполяции $\bar{x}_\alpha$ лежат по обе стороны от x, то интервал интегрирования можно выбрать так, чтобы выполнялось неравенство

$$|\bar{x}_\alpha - x| \leqslant \frac{1}{2}(\alpha+1)\,\|\Delta\|.$$

Если же такие точки интерполяции лежат по одну сторону от x, то множитель $^1/_2$ следует опустить. Для последовательности сеток $\{\Delta_N\}$, у которой $\|\Delta_N\| \to 0$ при $N \to \infty$ и x не совпадает ни с a, ни с b, при достаточном большом N точка x лежит между такими точками интерполяции, так что множитель $^1/_2$ сохраняется. В частности, этот множитель сохраняется, когда $f(x) - S_\Delta(f; x)$ принадлежит типу I′ или функция $f(x)$ и сплайн $S_\Delta(f; x)$ принадлежат $\mathscr{K}_p^n(a, b)$.

Пусть $\alpha = n - 1$. Тогда

$$|f^{(n-1)}(x) - S_\Delta^{(n-1)}(f; x)| \leqslant \int_{\bar{x}_{n-1}}^{x} |f^{(n)}(x) - S_\Delta^{(n)}(f; x)|\, |dx| \leqslant J\{Bn\,\|\Delta\|\}^{1/2}, \tag{5.9.2.1}$$

где

$$J^2 = \int_a^b \{f^{(n)}(x) - S_\Delta^{(n)}(f; x)\}^2\, dx \tag{5.9.2.2}$$

и $B = {}^1/_2$ или $B = 1$. Многократно повторяя эти рассуждения, приходим к неравенству

$$|f^{(\alpha)}(x) - S_\Delta^{(\alpha)}(f; x)| \leqslant$$
$$\leqslant J n^{1/2}(n-1)\ldots(\alpha+1)\,B^{(2n-2\alpha-1)/2}\,\|\Delta\|^{(2n-2\alpha-1)/2} \quad (0 \leqslant \alpha < n). \tag{5.9.3}$$

В силу свойства минимальной нормы (теорема 5.4.1)

$$\left\{\int_a^b \{f^{(n)}(x)-S_{\Delta_N}^{(n)}(f;x)\}^2\,dx\right\}^{1/2}\leqslant\left\{\int_a^b \{f^{(n)}(x)\}^2\,dx\right\}^{1/2}. \qquad (5.9.4)$$

Отсюда и из (5.9.3) заключаем, что справедлива

Теорема 5.9.1. *Пусть даны функция $f(x)$ из класса $\mathscr{K}^n(a,b)$ и последовательность сеток $\{\Delta_N: a=x_0^N<x_1^N\ldots<x_{m_N}^N=b\}$, $\|\Delta_N\|\to 0$ при $N\to\infty$. Если сплайн $S_{\Delta_N}(f;x)$ интерполирует $f(x)$ в узлах сетки Δ_N $(N=0,1,2,\ldots)$ и удовлетворяет одному из условий*: a) *разность $f(x)-S_{\Delta_N}(f;x)$ принадлежит типу* I′ $(N=0,1,2,\ldots)$, b) *функция $f(x)$ и сплайн $S_{\Delta_N}(f;x)$ периодические* $(N=0,1,2,\ldots)$, c) *сплайн $S_{\Delta_N}(f;x)$ принадлежит типу* II′ $(N=0,1,2,\ldots)$, *то*

$$f^{(\alpha)}(x)=S_{\Delta_N}^{(\alpha)}(f;x)+\eta_\alpha(x) \qquad (\alpha=0,1,\ldots,n-1), \qquad (5.9.5.1)$$

$$|\eta_\alpha(x)|\leqslant\frac{\sqrt{n}\,(n-1)\ldots(\alpha+1)}{2^{(2n-2\alpha-1)/2}}\,\|\Delta_N\|^{(2n-2\alpha-1)/2}\left\{\int_a^b \{f^{(n)}(x)\}^2\,dx\right\}^{1/2}. \qquad (5.9.5.2)$$

Если выполнено условие c), *то для $x=a$ и $x=b$ множитель $2^{-(2n-2\alpha-1)/2}$ следует опустить. Наконец, если выполнено условие* d) $\Delta_0\subset\Delta_N$ *и $S_{\Delta_N}(f;x)-S_{\Delta_0}(f;x)$ принадлежит типу* II′, *то в* (5.9.5.1) *и* (5.9.5.2)

$$\left\{\int_a^b \{f^{(n)}(x)\}^2\,dx\right\}^{1/2}$$

следует заменить на

$$\left\{\int_a^b [f^{(n)}(x)-S_{\Delta_0}^{(n)}(f;x)]^2\,dx\right\}^{1/2}.$$

Легко сформулировать аналог теоремы 5.9.1 для сплайнов типов I и II дефекта k. Однако для большей общности рассмотрим полиномиальные сплайны дефекта k, для которых $f^{(\alpha)}(x_i)=S_\Delta^{(\alpha)}(f;\,x_i)$ $(\alpha=0,1,\ldots,k-1)$ не только во внутренних узлах сетки Δ, но и в точках a и b. Для полного определения сплайна в непериодическом случае потребуем дополнительно выполнения условия

$$S_\Delta^{(\alpha)}(f;x_i)=0 \qquad (\alpha=n,n+1,\ldots,2n-k-1;\ i=0,N). \qquad (5.9.6)$$

В периодическом случае должно быть $S_\Delta^{(\alpha)}(f;a)=S_\Delta^{(\alpha)}(f;b)$ $(\alpha=0,1,\ldots,2n-k-1)$. Назовем эти сплайны, как периодические, так и непериодические, интерполяционными сплайнами *типа* k.

Для интерполяционных сплайнов типа k справедливо первое интегральное соотношение и, следовательно, для них можно доказать свойство минимальной нормы, единственность, существование и свойство наилучшего приближения. С помощью этих четырех свойств можно получить аналог теоремы 5.9.1. Доказательство мы опускаем, так как оно протекает по той же схеме.

Теорема 5.9.2. *Пусть на отрезке* $[a, b]$ *заданы функция* $f(x)$ *из класса* $\mathscr{K}^n(a, b)$ *и последовательность сеток* $\{\Delta_N: a = x_0^N < x_1^N < \ldots < x_{m_N}^N = b\}$, $\|\Delta_N\| \to 0$ *при* $N \to \infty$. *Если сплайн* $S_{\Delta_N}(f; x)$ *интерполирует функцию* $f(x)$ *в узлах сетки* Δ_N *и удовлетворяет одному из условий*: а) $S_{\Delta_N}(f; x)$ — *сплайн типа* k $(N = 0, 1, \ldots)$, b) $f(x)$ *принадлежит классу* $\mathscr{K}_p^n(a, b)$ *и* $S_{\Delta_N}(f; x)$ — *периодический сплайн типа* k, *то*

$$f^{(\alpha)}(x) = S_{\Delta_N}^{(\alpha)}(f; x) + \eta_\alpha(x) \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, n-1), \tag{5.9.7.1}$$

где

$$|\eta_\alpha(x)| \leqslant \frac{(n-2k+2)^{1/2}}{2^{(2n-2\alpha-1)/2}} \frac{(n-2k+1)!}{(\alpha-2k+2)!} \|\Delta_N\|^{(2n-2\alpha-1)/2} \left\{\int_a^b [f^{(n)}(x)]^2\, dx\right\}^{1/2}. \tag{5.9.7.2}$$

В случае а) *множитель* $2^{-(2n-2\alpha-1)/2}$ *опускается при* $x = a$ *и* $x = b$, *если* $\alpha > k - 1$. *Если в неравенстве* (5.9.7.2) *множитель* $n - 2k + 2$ *меньше* 1, *то он заменяется на* 1.

Замена множителя $\sqrt{n}\,(n-1)\ldots(\alpha+1)$ в (5.9.5.2) множителем $\sqrt{n-2k+2}\,(n-2k+1)!/(\alpha-2k+2)!$ в (5.9.7.2) обусловлена тем, что если $S_\Delta(f; x)$ — сплайн типа k, то $S_\Delta^{(2k-1)}(f; x)$ интерполирует $f^{(2k-1)}(x)$ по крайней мере один раз в каждом интервале сетки. Таким образом, $S_\Delta^{(2k-1)}(f; x)$ в этом случае обладает интерполяционными свойствами, обычно характерными для первой производной. Если m — неположительное целое число, то в неравенстве (5.9.7.2) полагаем $m! = 1$.

5.10. Второе интегральное соотношение

Соотношения, полученные в разд. 3.9 и 3.10, можно распространить обычным образом на полиномиальные сплайны степени $2n-1$. Пусть

$$(f, g) = \int_a^b D^n f D^n g\, dx \tag{5.10.1}$$

и

$$\|f\| = (f, f)^{1/2}. \tag{5.10.2}$$

Кроме того, пусть даны сетка Δ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ и полиномиальный сплайн $S_\Delta(x)$ степени $2n-1$ на Δ. Если функция $f(x)$ принадлежит классу $\mathscr{K}^{2n}(a, b)$, то

$$\int_a^b \{f^{(n)}(x) - S_\Delta^{(n)}(x)\}^2\,dx = \sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \{f^{(n)}(x) - S_\Delta^{(n)}(x)\}^2\,dx. \tag{5.10.3}$$

Проинтегрируем по частям каждый интеграл в правой части равенства (5.10.3) n раз:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \{f^{(n)}(x) - S_\Delta^{(n)}(x)\}^2\,dx =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{n} (-1)^{\alpha+1} \{f^{(n-\alpha)}(x) - S_\Delta^{(n-\alpha)}(x)\} \{f^{(n+\alpha-1)}(x) - S_\Delta^{(n+\alpha-1)}(x)\} \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} +$$

$$+ (-1)^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \{f(x) - S_\Delta(x)\} \{f^{(2n)}(x) - S_\Delta^{(2n)}(x)\}\,dx, \tag{5.10.4}$$

$$\|f - S_\Delta\|^2 = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\alpha=1}^{n} \{(-1)^{\alpha+1} D^{n-\alpha}(f - S_\Delta)\, D^{n+\alpha-1}(f - S_\Delta) \Big|_{x_{i-1}}^{x_i}\} +$$

$$+ (-1)^n \int_a^b (f - S_\Delta)\, D^{2n} f\,dx. \tag{5.10.5}$$

Тождество (5.10.5) является аналогом тождества (3.9.4). При определенных условиях на разность $f(x) - S_\Delta(x)$ тождество (5.10.5) сводится к соотношению

$$\|f - S_{\Delta, f}\|^2 = (-1)^n \int_a^b (f - S_{\Delta, f})\, D^{2n} f\,dx, \tag{5.10.6}$$

которое мы будем называть *вторым интегральным соотношением*. Заметим, что для сплайна $S_\Delta(f; x)$ типа k, интерполирующего функцию $f(x)$ на сетке Δ, второе интегральное соотношение, вообще говоря, не выполняется. Однако справедливы следующие две теоремы.

Т е о р е м а 5.10.1. *Пусть даны сетка* Δ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ *и функция* $f(x)$ *из класса* $\mathscr{K}^{2n}(a, b)$. *Если полиномиальный сплайн* $S_\Delta(f; x)$ *степени* $2n-1$ *интерполирует функцию* $f(x)$ *в узлах сетки* Δ *и удовлетворяет одному из условий*: a) $f(x) - S_\Delta(f; x)$ *принадлежит типу* I′, b) $f(x) - S_\Delta(f; x)$ *принадлежит типу* II′, c) *функция* $f(x)$ *и сплайн* $S_\Delta(f; x)$ *периодические, то*

$$\|f - S_{\Delta, f}\|^2 = (-1)^n \int_a^b (f - S_{\Delta, f})\, D^{2n} f\,dx.$$

Теорема 5.10.2. *Пусть даны сетка* Δ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ *и функция* $f(x)$ *из класса* $\mathring{W}_2^{(n)}(a, b)$. *Если полиномиальный сплайн* $S_\Delta(f; x)$ *степени* $2n-1$ *дефекта* k *интерполирует функцию* $f(x)$ *в узлах сетки* Δ, *удовлетворяет условию*

$$S^{(\alpha)}(f; x_i) = f^{(\alpha)}(x_i) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, k-1;\ i = 1, 2, \ldots, N-1) \quad (5.10.7)$$

и одному из условий: a) $f(x) - S_\Delta(f; x)$ *принадлежит типу* I^r, b) $f(x) - S_\Delta(f; x)$ *принадлежит типу* II′, c) *функция* $f(x)$ *и сплайн* $S_\Delta(f; x)$ *периодические, то*

$$\| f - S_{\Delta, f} \|^2 = (-1)^n \int_a^b (f - S_{\Delta, f})\, D^{2n} f\, dx.$$

Как мы уже отмечали, для сплайнов типа k второе интегральное соотношение обычно не выполняется. Но для сплайнов, удовлетворяющих несколько измененным краевым условиям

$$S_\Delta^{(\alpha)}(f; x_i) = f^{(\alpha)}(x_i)$$

$$(\alpha = 0, 1, \ldots, k-1;\ \alpha = n, n+1, \ldots, 2n-k-1;\ i = 0, N), \quad (5.10.8)$$

второе интегральное соотношение справедливо. В этом случае справедливо также свойство наилучшего приближения, но отсутствует свойство минимальной нормы. Такие интерполяционные сплайны называют сплайнами *модифицированного типа* k. Сплайны типа II являются сплайнами модифицированного типа I.

5.11. Улучшение оценки порядка сходимости

В этом разделе мы рассуждаем почти так же, как в разд. 3.10. Из неравенства (5.9.3) вытекает, что при подходящем значении константы K_α

$$| f^{(\alpha)}(x) - S_\Delta^{(\alpha)}(f; x) | \leqslant K_\alpha \left\{ \int_a^b \{f^{(n)}(x) - S_\Delta^{(n)}(f; x)\}^2\, dx \right\}^{1/2} \| \Delta \|^{(2n-2\alpha-1)/2}. \quad (5.11.1)$$

Если справедливо второе интегральное соотношение, то неравенство (5.11.1) эквивалентно неравенству

$$| f^{(\alpha)}(x) - S_\Delta^{(\alpha)}(f; x) | \leqslant$$

$$\leqslant K_\alpha \left\{ (-1)^n \int_a^b \{f(x) - S_\Delta(f; x)\}\, f^{(2n)}(x)\, dx \right\}^{1/2} \| \Delta \|^{(2n-2\alpha-1)/2},$$

откуда

$$\sup_x | f^{(\alpha)}(x) - S_\Delta^{(\alpha)}(f; x) | \leqslant$$

$$\leqslant K_\alpha \{ \bigvee_a^b f^{(2n-1)}(x) \}^{1/2} \{ \sup_x | f(x) - S_\Delta(f; x) | \}^{1/2} \| \Delta \|^{(2n-2\alpha-1)/2}. \quad (5.11.2)$$

Положим, как в разд. 3.10, $\alpha = 0$ и решим неравенство (5.11.2) относительно $\sup_x |f(x) - S_\Delta(f; x)|$, считая, что $f(x) \not\equiv S_\Delta(f; x)$. Итак,

$$\sup_x |f(x) - S_\Delta(f; x)| \leqslant K_0^2 \bigvee_a^b f^{(2n-1)}(x) \, \| \Delta \|^{2n-1}. \tag{5.11.3}$$

С учетом неравенства (5.11.2) получаем

$$|f^{(\alpha)}(x) - S_\Delta^{(\alpha)}(f; x)| \leqslant K_\alpha K_0 \bigvee_a^b f^{(2n-1)}(x) \, \| \Delta \|^{2n-\alpha-1}. \tag{5.11.4}$$

Теперь мы можем переформулировать теоремы 5.9.1 и 5.9.2.

Теорема 5.11.1. *Пусть даны функция $f(x)$ из класса $\mathscr{K}^{2n}(a, b)$ и последовательность сеток*

$$\{\Delta_N: a = x_0^N < x_1^N < \ldots < x_{m_N}^N = b\},$$

$\| \Delta_N \| \to 0$ *при* $N \to \infty$. *Если сплайны* $S_{\Delta_N}(f; x)$ *интерполируют функцию* $f(x)$ *и удовлетворяют одному из условий*: a) *разность* $f(x) - S_{\Delta_N}(f; x)$ *принадлежит типу* I′ ($N = 0, 1, \ldots$), b) *функция* $f(x)$ *и сплайн* $S_{\Delta_N}(f; x)$ *периодические* ($N = 0, 1, \ldots$), c) *разность* $f(x) - S_{\Delta_N}(f; x)$ *принадлежит типу* II′ ($N = 0, 1, \ldots$), *то*

$$f^{(\alpha)}(x) = S_\Delta^{(\alpha)}(f; x) + \eta_\alpha(x) \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, n-1), \tag{5.11.5.1}$$

где

$$|\eta_\alpha(x)| \leqslant n(n-1) \ldots (\alpha+1)(n-1)! \, 2^{-(2n-\alpha-1)} \bigvee_a^b f^{(2n-1)}(x) \, \| \Delta_N \|^{2n-\alpha-1}. \tag{5.11.5.2}$$

Если выполнено условие c), *то при* $x = a$ *и* $x = b$ *множитель* $2^{-(2n-\alpha-1)}$ *опускается.*

В новом варианте теоремы 5.9.2 участвуют сплайны модифицированного типа k, а не сплайны типа k.

Теорема 5.11.2. *Пусть даны функция $f(x)$ из класса $\mathscr{K}^{2n}(a, b)$ и последовательность сеток*

$$\{\Delta_N: a = x_0^N < x_1^N < \ldots < x_{m_N}^N = b\},$$

$\| \Delta_N \| \to 0$ *при* $N \to \infty$. *Если сплайны* $S_{\Delta_N}(f; x)$ *интерполируют функцию* $f(x)$ *и удовлетворяют одному из условий*: a) $S_{\Delta_N}(f; x)$ — *сплайн модифицированного типа* k ($N = 0, 1, 2, \ldots$), b) $f(x) \in \mathscr{K}_p^{2n}(a, b)$ *и* $S_{\Delta_N}(f; x)$ — *периодический сплайн типа* k ($N = 0, 1, 2, \ldots$), *то*

$$f^{(\alpha)}(x) = S_{\Delta_N}^{(\alpha)}(f; x) + \eta_\alpha(x) \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, n-1), \tag{5.11.6.1}$$

где

$$|\eta_\alpha(x)| \leqslant \frac{(n-2k+2)\{(n-2k+1)!\}^2}{(\alpha-2k+2)!}\, 2^{-(2n-\alpha-1)} \bigvee_a^b f^{(2n-1)}(x)\, \|\Delta_N\|^{2n-\alpha-1}. \quad (5.11.6.2)$$

В случае а) *множитель* $2^{-(2n-\alpha-1)}$ *опускается, когда* $x = a$ *или* $x = b$ *и* $\alpha \geqslant k$. *Если в* (5.11.6.2) *множитель* $n - 2k + 2$ *меньше* 1, *то он заменяется на* 1.

5.12. Сходимость производных высших порядков

Пусть даны сетка Δ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ и функция $f(x)$ из класса $\mathscr{K}^{2n}(a, b)$. Пусть полиномиальный сплайн $S_\Delta(f; x)$ степени $2n - 1$ интерполирует функцию $f(x)$ на сетке Δ и удовлетворяет неравенству

$$|f(x) - S_\Delta(f; x)| \leqslant K_0^2 \bigvee_a^b f^{(2n-1)}(x)\, \|\Delta\|^{2n-1}. \quad (5.12.1)$$

Для разделенных разностей

$$\delta^\alpha_{S_{\Delta, f}}[x_{i-1}, x_i] \qquad (i = 1, 2, \ldots, N;\ \alpha = 0, 1, \ldots, 2n-1)$$

с равномерным шагом, где $\delta^0_{S_{\Delta, f}}[x_{i-1}, x_i] = S_\Delta(f; x_{i-1}) = f(x_{i-1})$, можно найти такие точки $x_{\alpha i}$, $x_{i-1} \leqslant x_{\alpha i} \leqslant x_i$, что

$$\delta^\alpha_{S_{\Delta, f}}[x_{i-1}, x_i] = S^{(\alpha)}_\Delta(f; x_{\alpha i}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N;\ \alpha = 0, 1, \ldots, 2n-1). \quad (5.12.2)$$

В качестве следствия отсюда получаем, что при достаточно малых значениях $\|\Delta\|$ можно использовать уравнения

$$\delta^\alpha_{S_{\Delta, f}}[x_{i-1}, x_i] = \sum_{j=1}^{2n} c_{ij} u_j^{(\alpha)}(x_{\alpha i} - x_{i-1}) \quad (i = 1, 2, \ldots N;\ \alpha = 0, 1, \ldots, 2n-1) \quad (5.12.3)$$

для определения коэффициентов c_{ij}, ибо при $\|\Delta\| \to 0$

$$\sum_{j=1}^{2n} c_{ij} u_j^{(\alpha)}(x_{\alpha i} - x_{i-1}) \to c_{i\alpha+1}$$

равномерно как относительно номера, так и относительно расположения отрезков $[x_{i-1}, x_i]$. Более того, так как оператор $\delta^\alpha_f[a, b]$ линеен относительно f, то

$$|\delta^\alpha_{S_{\Delta, f}}[x_{i-1}, x_i] - \delta^\alpha_f[x_{i-1}, x_i]| = |\delta^\alpha_{S_\Delta, f-f}[x_{i-1}, x_i]|, \quad (5.12.4)$$

откуда

$$|\delta^\alpha_{S_{\Delta, f}}[x_{i-1}, x_i] - \delta^\alpha_f[x_{i-1}, x_i]| \leqslant (2\alpha R_\Delta)^\alpha K_0^2 \bigvee_a^b f^{(2n-1)}(x)\, \|\Delta\|^{2n-\alpha-1}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, N;\quad \alpha = 0, 1, \ldots, 2n-1), \quad (5.12.5.1)$$

где

$$R_\Delta = \max_i \frac{\|\Delta\|}{|x_i - x_{i-1}|}. \qquad (5.12.5.2)$$

Теорема 5.12.1. *Пусть даны функция $f(x)$ из класса $\mathcal{K}^{2n}(a, b)$ и последовательность сеток*

$$\{\Delta_N: a = x_0^N < x_1^N < \ldots < x_{m_N}^N = b\},$$

$\|\Delta_N\| \to 0$ *при* $N \to \infty$. *Пусть величины* R_{Δ_N} *заданы равенством* (5.12.5.2) *и ограничены относительно* N. *Если полиномиальный сплайн* $S_{\Delta_N}(f; x)$ *степени* $2n-1$ *интерполирует функцию* $f(x)$ *на сетке* Δ_N *и удовлетворяет одному из условий*: a) $f(x) - S_{\Delta_N}(f; x)$ *принадлежит типу* I′ ($N = 1, 2, \ldots$), b) $f(x) - S_{\Delta_N}(f; x)$ *принадлежит типу* II′ ($N = 1, 2, \ldots$), c) *функция* $f(x)$ *и сплайн* $S_{\Delta_N}(f; x)$ *периодические* ($N = 1, 2, \ldots$), *то*

$$f^{(\alpha)}(x) = S_{\Delta_N}^{(\alpha)}(f; x) + O(\|\Delta_N\|^{2n-\alpha-1}) \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, 2n-1) \quad (5.12.6)$$

равномерно относительно x *на* $[a, b]$.

Доказательство по существу такое же, что и у теоремы 3.11.1.

Аналогично доказывается теорема 5.12.2, которую можно сравнить с теоремой 5.11.2. В тех случаях, когда применима теорема 5.11.2, она точнее (в частности, это верно при $k > 1$). Детали доказательства последнего утверждения теоремы 5.12.2 приведены в разд. 6.12.

Теорема 5.12.2. *Пусть даны функция $f(x)$ из класса $\mathcal{K}^{2n}(a, b)$ и последовательность сеток*

$$\{\Delta_N: a = x_0^N < x_1^N < \ldots < x_{m_N}^N = b\},$$

$\|\Delta_N\| \to 0$ *при* $N \to \infty$. *Пусть величины* R_{Δ_N} *заданы равенством* (5.12.5.2) *и ограничены относительно* N. *Если полиномиальные сплайны* $S_{\Delta_N}(f; x)$ *степени* $2n-1$ *интерполируют функцию* $f(x)$ *в узлах соответствующих сеток* Δ_N *и удовлетворяют одному из условий*: a) $S_{\Delta_N}(f; x)$ *— сплайн модифицированного типа* k ($N = 1, 2, \ldots$), b) $f(x) \in \mathcal{K}_p^{2n}(a, b)$ *и* $S_{\Delta_N}(f; x)$ *— периодический сплайн типа* k ($N = 1, 2, \ldots$), *то*

$$f^{(\alpha)}(x) = S_{\Delta_N}^{(\alpha)}(f; x) + O(\|\Delta_N\|^{2n-\alpha-k}) \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, 2n-k) \quad (5.12.7)$$

равномерно относительно x *на* $[a, b]$. *Кроме того, равномерно относительно* x

$$\lim_{N\to\infty} S_{\Delta_N}^{(\alpha)}(f; x) = f^{(\alpha)}(x) \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, 2n-2).$$

5.13. Ограничения на порядок сходимости

Результаты, касающиеся ограничений на порядок сходимости кубических сплайнов (разд. 3.12), без существенных изменений переносятся на полиномиальные сплайны нечетной степени. В общем случае

$$f^{(\alpha)}(x) = S_{\Delta_N}^{(\alpha)}(f; x) + O(\|\Delta_N\|^{2n-\alpha-1}) \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, 2n-1). \quad (5.13.1)$$

При $\alpha = 0, 1, \ldots, n-1$ на сетки не налагают никаких ограничений, но при $\alpha = n, \ldots, 2n-1$ величины R_{Δ_N} должны быть ограничены относительно N. Для равномерных сеток и периодических сплайнов (разд. 4.6, теорема 4.6.3) известен более сильный результат:

$$f^{(\alpha)}(x) = S^{(\alpha)}_{\Delta_N}(f; x) + O(\|\Delta_N\|^{2n-\alpha}) \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, 2n-1). \tag{5.13.2}$$

В случае (5.13.1) скорость сходимости пропорциональна $\bigvee_a^b f^{(2n-1)}(x)$, а в случае (5.13.2) для функции $f(x)$ из класса $C^{2n}_i(a, b)$ она пропорциональна $\|f^{(2n)}(x)\|_\infty$.

Скорость сходимости в (5.13.2) неулучшаема относительно $\|\Delta_N\|$. Справедлива следующая теорема, доказательство которой аналогично доказательству теоремы 3.12.1.

Т е о р е м а 5.13.1. *Пусть дана последовательность сеток* $\{\Delta_N\}$, $\|\Delta_N\| \to 0$ *при* $N \to \infty$. *Пусть величины* R_{Δ_N} *ограничены относительно* N. *Если функция* $f(x)$ *принадлежит классу* $C^{2n}(a, b)$ *и при* $\mu > 0$

$$f(x) = S_{\Delta_N}(f; x) + O(\|\Delta_N\|^{2n+\mu}) \tag{5.13.3}$$

равномерно относительно x *на* $[a, b]$, *то*

$$D^{2n} f = 0.$$

З а м е ч а н и е 5.13.1. Сплайны, рассматриваемые в теореме 5.13.1, не обязаны иметь дефект 1. Основное условие здесь — это выполнение равенства (5.13.3).

5.14. Приложения к теории гильбертова пространства

Продолжим обсуждение, начатое в разд. 3.13. Если в классе $\mathscr{K}^n(a, b)$ задать псевдоскалярное произведение формулой

$$(f, g) = \int_a^b f^{(n)}(x)\, g^{(n)}(x)\, dx \tag{5.14.1}$$

и отождествить функции, отличающиеся на полином степени $n-1$, то он станет гильбертовым пространством; без этих отождествлений и без этого скалярного произведения (f, g) класс $\mathscr{K}^n(a, b)$ будет просто линейным пространством. Пусть дана сетка Δ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$. Обозначим через $F_\Delta(n, k)$ семейство полиномиальных сплайнов степени $2n-1$ дефекта k ($k \leqslant n$). Как линейное подпространство пространства $\mathscr{K}^n(a, b)$ это семейство имеет размерность $k(N-1) + 2n$, а как гильбертово пространство, в котором отождествляются сплайны, отличающиеся на полином степени $n-1$, оно имеет размерность $k(N-1) + n$. Семейство $P_\Delta(n, k)$ периодических полиномиальных сплайнов на Δ степени $2n-1$ дефекта k является подпространством пространства $F_\Delta(n, k)$. Как линейное пространство (без каких-либо отождествлений) $P_\Delta(n, k)$ имеет размерность Nk, а как гильбертово пространство (с ото-

ждествлением сплайнов, отличающихся на константу) $P_\Delta(n, k)$ имеет размерность $Nk - 1$. Если сетка Δ_2 содержит сетку Δ_1, то $F_{\Delta_1}(n, k)$ — подпространство в $F_{\Delta_2}(n, k)$ и $P_{\Delta_1}(n, k)$ — подпространство в $P_{\Delta_2}(n, k)$. Так как $F_\Delta(n, k)$ и $P_\Delta(n, k)$ конечномерны, то они замкнуты. Пусть $\Delta_1 \subset \Delta_2$; обозначим через $[F_{\Delta_2}(n, k) - F_{\Delta_1}(n, k)]$ и $[P_{\Delta_2}(n, k) - P_{\Delta_1}(n, k)]$ сплайны соответственно из $F_{\Delta_2}(n, k)$ и $P_{\Delta_2}(n, k)$, определяющие значения которых (включая любые производные [1])) в узлах сетки Δ_1 равны нулю. Когда нам понадобится, мы будем применять аналогичные обозначения для других пространств. Ортогональность составляющих подпространств в разложениях, фигурирующих в оставшейся части этого раздела, доказывается в разд. 5.15. Заметим, что линейные пространства $[F_{\Delta_l}(n, k) - F_{\Delta_{l-1}}(n, k)]$ и т. д. в отличие от пространств $F_\Delta(n, k)$ не изменяются при отождествлении функций, отличающихся на полином степени $n - 1$. Таким образом, даже после отождествления элементы этих пространств можно считать функциями, а не классами эквивалентности.

Пусть последовательность сеток $\{\Delta_N\}$ на $[a, b]$ вложена, т. е. $\Delta_N \subset \Delta_{N+1}$ $(N = 1, 2, \ldots)$. Тогда

$$F_{\Delta_N}(n, k) = F_{\Delta_1}(n, k) \oplus [F_{\Delta_2}(n, k) - F_{\Delta_1}(n, k)] \oplus \ldots \\ \ldots \oplus [F_{\Delta_N}(n, k) - F_{\Delta_{N-1}}(n, k)], \tag{5.14.2.1}$$

$$P_{\Delta_N}(n, k) = P_{\Delta_1}(n, k) \oplus [P_{\Delta_2}(n, k) - P_{\Delta_1}(n, k)] \oplus \ldots \\ \ldots \oplus [P_{\Delta_N}(n, k) - P_{\Delta_{N-1}}(n-k)]. \tag{5.14.2.2}$$

Определим $F_{\Delta_\infty}(n, k)$ и $P_{\Delta_\infty}(n, k)$ как бесконечные прямые суммы

$$F_{\Delta_\infty}(n, k) = F_{\Delta_1}(n, k) \oplus \sum_{N=2}^{\infty} \oplus [F_{\Delta_N}(n, k) - F_{\Delta_{N-1}}(n, k)] \tag{5.14.3.1}$$

и

$$P_{\Delta_\infty}(n, x) = P_{\Delta_1}(n, k) \oplus \sum_{N=2}^{\infty} \oplus [P_{\Delta_N}(n, k) - P_{\Delta_{N-1}}(n, k)]. \tag{5.14.3.2}$$

Ясно, что

$$P_{\Delta_\infty}(n, k) \subset F_{\Delta_\infty}(n, k), \tag{5.14.4.1}$$

$$F_{\Delta_\infty}(n, k) \subseteq \mathcal{K}^n(a, b). \tag{5.14.4.2}$$

В разд. 5.15 мы докажем для $k \neq 0$, что $F_{\Delta_\infty}(n, k) = \mathcal{K}^n(a, b)$ и $P_{\Delta_\infty}(n, k) = \mathcal{K}^n(a, b)$, если только $\| \Delta_N \| \to 0$ при $N \to \infty$. Так как по определению пространства $F_{\Delta_\infty}(n, k)$ и $P_{\Delta_\infty}(n, k)$ замкнуты относительно нормы

$$\| f \| = (f, f)^{1/2}, \tag{5.14.5}$$

---

[1]) Здесь и в оставшейся части этой главы мы будем рассматривать только такие определяющие значения, запись которых в (5.7.3.10), (5.7.3.11) или (5.7.3.12) связана с сеткой Δ_1.

то для доказательства сформулированного только что утверждения достаточно показать, что каждое из пространств $F_{\Delta_\infty}(n, k)$ и $P_{\Delta_\infty}(n, k)$ плотно в $\mathscr{K}^n(a, b)$. Но сначала мы выделим два важных дополнительных подпространства в $F_\Delta(n, k)$. Это семейство полиномиальных сплайнов на Δ типа II′ степени $2n-1$ дефекта k и семейство полиномиальных сплайнов на Δ типа k степени $2n-1$ [1]). Обозначим эти подпространства через $F'_\Delta(n, k)$ и $T_\Delta(n, k)$. Заметим, что $F'_\Delta(n, k) \subset T_\Delta(n, k) \subset F_\Delta(n, k)$. Если на отрезке $[a, b]$ дана последовательность сеток $\{\Delta_N\}$, $\Delta_N \subset \Delta_{N+1}$ $(N = 1, 2, \ldots)$, то с помощью подпространств $F'_\Delta(n, k)$ и $T_\Delta(n, k)$ определим бесконечные прямые суммы $F'_{\Delta_\infty}(n, k)$ и $T_{\Delta_\infty}(n, k)$:

$$F'_{\Delta_\infty}(n, k) = F'_{\Delta_1}(n, k) \oplus \sum_{N=2}^{\infty} \oplus [F'_{\Delta_N}(n, k) - F'_{\Delta_{N-1}}(n, k)], \qquad (5.14.6.1)$$

$$T_{\Delta_\infty}(n, k) - T_{\Delta_1}(n, k) \oplus \sum_{N=2}^{\infty} \oplus [T_{\Delta_N}(n, k) - T_{\Delta_{N-1}}(n, k)]. \qquad (5.14.6.2)$$

В разд. 5.15 мы покажем, что для $k \neq 0$

$$T_{\Delta_\infty}(n, k) = F'_{\Delta_\infty}(n, k) = \mathscr{K}^n(a, b), \qquad (5.14.7)$$

если $\|\Delta_N\| \to 0$ при $N \to \infty$.

5.15. Сходимость по норме

Теорема 5.15.1. *Пусть заданы последовательность сеток* $\{\Delta_N: a = x_0^N < x_1^N < \ldots < x_{m_N}^N = b\}$, $\Delta_N \subset \Delta_{N+1}$ $(N = 1, 2, \ldots)$, $\|\Delta_N\| \to 0$ *при* $N \to \infty$, *функция* $f(x)$ *из класса* $\mathscr{K}^n(a, b)$ *и последовательность полиномиальных сплайнов* $\{S_{\Delta_N}(f; x)\}$ *степени* $2n-1$ *дефекта* k $(k \leqslant n)$. *Если* $S^{(\alpha)}_{\Delta_N}(f; x_i^N) = f^{(\alpha)}(x_i^N)$ $(\alpha = 0, 1, \ldots, k-1;\ i = 1, \ldots, m_N - 1)$ *для каждого* N *и выполнено одно из условий*: a) $f(x) - S_{\Delta_N}(f; x)$ *принадлежит типу* I′ $(N = 1, 2, \ldots)$, b) $S_{\Delta_N}(f; x)$ *принадлежит типу* II′ $(N = 1, 2, \ldots)$, c) $S_{\Delta_N}(f; x)$ *принадлежит типу* k $(N = 1, 2, \ldots)$, d) $f(x)$ *и* $S_{\Delta_N}(f; x)$ *принадлежат классу* $\mathscr{K}^n_p(a, b)$ $(N = 1, 2, \ldots)$, *то* $\|f - S_{\Delta_N, f}\| \to 0$ *при* $N \to \infty$.

Доказательство. Так как в этих случаях выполняются свойство минимальной нормы и первое интегральное соотношение, то доказательство протекает точно так же, как и для теоремы 3.14.1. При этом n-я и $(n-1)$-я производные играют соответственно роль второй и первой производных в доказательстве теоремы 3.14.1.

Замечание 5.15.1. Норма в теореме 5.15.1 определяется как норма гильбертова пространства, т. е.

$$\|f\| = (f, f)^{1/2}. \qquad (5.15.1)$$

---

[1]) Сплайн принадлежит типу k, если для некоторой функции $f(x)$ он является интерполяционным сплайном типа k.

Как уже отмечалось, если подпространство V_i ортогонально подпространству V_j $(i \neq j)$ и

$$V = \sum_{N=1}^{\infty} \oplus V_N, \tag{5.15.2}$$

то V — наименьшее замкнутое подпространство, содержащее все составляющие подпространства V_N. Кроме того, можно выбрать базис для V, который будет расширением на V базиса для каждого V_N. Следовательно, теорема 5.15.2 вытекает из теоремы 5.15.1, ибо плотное замкнутое подпространство совпадает со всем пространством [1]).

Т е о р е м а 5.15.2. *Пусть на отрезке* $[a, b]$ *задана последовательность сеток* $\{\Delta_N\}$, $\Delta_N \subset \Delta_{N+1}$ $(N = 1, 2, \ldots)$, $\| \Delta_N \| \to 0$ *при* $N \to \infty$. *Тогда*

$$F_{\Delta_\infty}(n, k) = F'_{\Delta_\infty}(n, k) = T_{\Delta_\infty}(n, k) = \mathscr{K}^n(a, b), \tag{5.15.3.1}$$

$$P_{\Delta_\infty}(n, k) = \mathscr{K}^n(a, b). \tag{5.15.3.2}$$

В разд. 3.14 был по существу развит аналогичный подход и для аналогов наших прямых сумм $F_{\Delta_\infty}(n, k)$, $F'_{\Delta_\infty}(n, k)$, $T_{\Delta_\infty}(n, k)$ и $P_{\Delta_\infty}(n, k)$ было показано, что составляющие подпространства попарно ортогональны, так что указанные разложения являются разложениями в смысле гильбертова пространства. Эти утверждения справедливы и в нашем случае. Приведем лемму, обобщающую лемму 3.14.1.

Л е м м а 5.15.1. *Пусть на отрезке* $[a, b]$ *заданы две сетки* Δ_1 *и* Δ_2, $\Delta_1 \subset \Delta_2$, *и пусть полиномиальные сплайны* $S_{\Delta_1}(x)$ *и* $S_{\Delta_2}(x)$ *на* Δ_1 *и* Δ_2 *соответственно имеют степень* $2n-1$ *и дефект* k $(k \leqslant n)$. *Если* $S^{(\alpha)}_{\Delta_2}(x)$ $(\alpha = 0, 1, \ldots, k-1)$ *обращается в нуль во внутренних узлах сетки* Δ_1 *и выполнено одно из условий*: a) $S_{\Delta_1}(x)$ *принадлежит типу* II′, b) $S_{\Delta_2}(x)$ *принадлежит типу* I′, c) $S_{\Delta_1}(x)$ *и* $S_{\Delta_2}(x)$ *принадлежат типу* k *и* $S^{(\alpha)}_{\Delta_2}(a) = S^{(\alpha)}_{\Delta_2}(b) = 0$ $(\alpha = 0, 1, \ldots, k-1)$, d) $S_{\Delta_1}(x)$ *и* $S_{\Delta_2}(x)$ *принадлежат классу* $\mathscr{K}^n_p(a, b)$ *и* $S^{(\alpha)}_{\Delta_2}(a) = 0$ $(\alpha = 0, 1, \ldots, k-1)$, *то* $(S_{\Delta_1}, S_{\Delta_2}) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть сетка Δ_1 определяется точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$. Тогда

$$(S_{\Delta_1}, S_{\Delta_2}) = \int_a^b S^{(n)}_{\Delta_1}(x)\, S^{(n)}_{\Delta_2}(x)\, dx = \sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} S^{(n)}_{\Delta_1}(x)\, S^{(n)}_{\Delta_2}(x)\, dx.$$

После n-кратного интегрирования по частям получаем

$$(S_{\Delta_1}, S_{\Delta_2}) = \sum_{i=1}^{N} \Big\{ \sum_{\alpha=1}^{n} (-1)^{\alpha+1} S^{(n-\alpha)}_{\Delta_2}(x)\, S^{(n+\alpha-1)}_{\Delta_1}(x) \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} \Big\} = 0.$$

Лемма доказана.

---

[1]) Плотность подпространства $P_{\Delta_\infty}(n, k)$ в $\mathscr{K}^n(a, b)$ доказывается в разд. 6.14.

Рассмотрим любую из бесконечных прямых сумм $F_{\Delta_\infty}(n, k)$, $F'_{\Delta_\infty}(n, k)$, $T_{\Delta_\infty}(n, k)$, $P_{\Delta_\infty}(n, k)$; например,

$$F_{\Delta_\infty}(n, k) = F_{\Delta_1}(n, k) \oplus \sum_{N=2}^{\infty} \oplus [F_{\Delta_N}(n, k) - F_{\Delta_{N-1}}(n, k)]. \qquad (5.15.4)$$

Если $S_{\Delta_N} \in [F_{\Delta_N}(n, k) - F_{\Delta_{N-1}}(n, k)]$, то $S^{(\alpha)}_{\Delta_N}(x)$ $(\alpha = 0, 1, \ldots, k-1)$ обращается в нуль во внутренних узлах сетки Δ_{N-1} и принадлежит типу I'. Таким образом, применима лемма 5.15.1 и, следовательно, (5.15.4) — ортогональное разложение.

Т е о р е м а 5.15.3. *Пусть на отрезке* $[a, b]$ *задана последовательность сеток* $\{\Delta_N\}$, $\Delta_N \subset \Delta_{N+1}$ $(N = 1, 2, \ldots)$ *и* $\| \Delta_N \| \to 0$ *при* $N \to \infty$. *Тогда бесконечные прямые суммы*

$$F_{\Delta_\infty}(n, k) = F_{\Delta_1}(n, k) \oplus \sum_{N=2}^{\infty} \oplus [F_{\Delta_N}(n, k) - F_{\Delta_{N-1}}(n, k)], \qquad (5.15.5.1)$$

$$F'_{\Delta_\infty}(n, k) = F'_{\Delta_1}(n, k) \oplus \sum_{N=2}^{\infty} \oplus [F'_{\Delta_N}(n, k) - F'_{\Delta_{N-1}}(n, k)], \qquad (5.15.5.2)$$

$$T_{\Delta_\infty}(n, k) = T_{\Delta_1}(n, k) \oplus \sum_{N=2}^{\infty} \oplus [T_{\Delta_N}(n, k) - T_{\Delta_{N-1}}(n, k)], \qquad (5.15.5.3)$$

$$P_{\Delta_\infty}(n, k) = P_{\Delta_1}(n, k) \oplus \sum_{N=2}^{\infty} \oplus [P_{\Delta_N}(n, k) - P_{\Delta_{N-1}}(n, k)] \qquad (5.15.5.4)$$

являются ортогональными разложениями относительно скалярного произведения (5.14.1) *и все они тождественно совпадают с пространством* $\mathcal{K}^n(a, b)$.

5.16. Канонические сеточные базисы и их свойства

В разд. 3.15 были введены канонические сеточные базисы для $\mathcal{K}^2(a, b)$ и $\mathcal{K}^2_p(a, b)$. Аналогичные базисы можно построить для $\mathcal{K}^n(a, b)$ и $\mathcal{K}^n_p(a, b)$. Мы сейчас построим такие базисы для $F_{\Delta_\infty}(n, k)$, $F'_{\Delta_\infty}(n, k)$, $T_{\Delta_\infty}(n, k)$ и $P_{\Delta_\infty}(n, k)$, а в силу теоремы 5.15 у нас получатся различные ортонормальные базисы для $\mathcal{K}^n(a, b)$ и $\mathcal{K}^n_p(a, b)$. Приведем построение сеточного базиса лишь для пространства $F_{\Delta_\infty}(n, k)$, так как для остальных пространств построение по существу совпадает с этим. Даже здесь мы упрощаем процесс по сравнению с разд. 3.15, ограничиваясь единой простой нумерацией узлов сетки и тем самым не рассматривая сеточные базисы, которые не являются каноническими.

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана последовательность сеток $\{\Delta_N\}$, $\Delta_N \subset \subset \Delta_{N+1}$ $(N = 1, 2, \ldots)$. Обозначим через M множество всех различных точек, содержащихся в сетках Δ_N, но не принадлежащих сетке Δ_1. Занумеруем точки множества M: $P_1, P_2, \ldots$. Начинаем нумеровать их (слева направо) с точек сетки Δ_2, затем нумеруем точки сетки Δ_3 и т. д. В каждом случае точки, предварительно уже занумерованные, пропускаются. Определим теперь новую

последовательность сеток $\{\pi_m\}$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$, где $\pi_0 = \Delta_1$, $\pi_1 = \Delta_1 \cup \{P_1\}$ и вообще $\pi_m = \pi_{m-1} \cup \{P_m\}$. Предположим, что нам дан ортонормальный базис для $F_{\Delta_1}(n, k)$. Построим ортонормальный базис для $[F_{\Delta_\infty}(n, k) - F_{\Delta_1}(n, k)]$, распространив данный базис до ортонормального базиса для $F_{\Delta_\infty}(n, k)$.

Допустим, что для каждого m $(m = 1, 2, \ldots)$ полиномиальные сплайны $h_{mj}(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ на π_m типа I′ степени $2n - 1$ и дефекта k таковы, что производные $h_{mj}^{(\alpha)}(x)$ $(\alpha = 0, 1, \ldots, k - 1)$ обращаются в нуль на π_{m-1}, а сами сплайны $h_{mj}(x)$ ортонормальны. Такие сплайны можно получить, применив процесс ортогонализации Грама — Шмидта к сплайнам $g_{mj}(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ типа I′ на Δ_m, производные $g_{mj}^{(\alpha)}(x)$ $(\alpha = 0, 1, \ldots, k - 1)$ которых обращаются в нуль в узлах сетки Δ_{m-1} и удовлетворяют условию $g_{mj}^{(\alpha)}(P_m) = \delta_j^{\alpha+1}$. Положив для $i = k(m - 1) + j$, где $k(m - 1) < i \leqslant km$,

$$S_i(n, k; x) = h_{mj}(x) \qquad (m = 1, 2, \ldots, j = 1, 2, \ldots, k), \tag{5.16.1}$$

получим требуемый ортонормальный базис для $[F_{\Delta_\infty}(n, k) - F_{\Delta_1}(n, k)]$. В самом деле, подмножество $\{S_i(n, k; x) \mid i = 1, 2, \ldots, km\}$ представляет собой ортонормальный базис для $[F_{\pi_m}(n, k) - F_{\pi_0}(n, k)]$ $(m = 1, 2, \ldots)$ и для каждого N $(N = 1, 2, \ldots)$ сплайны $S_i(n, k; x)$, которые вместе со своими первыми $k - 1$ производными не обращаются в пуль в каждом узле сетки Δ_N, составляют ортонормальный базис для $[F_{\Delta_N}(n, k) - F_{\Delta_1}(n, k)]$. Если не возникнет неопределенности, будем обозначать $S_i(n, k; x)$ через $S_i(x)$ и $F_\Delta(n, k)$ через F_Δ.

Множество $S_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ вместе с заданным ортонормальным базисом для F_{Δ_1} называют *каноническим сеточным базисом* для F_{Δ_∞}; его аналоги для F'_{Δ_∞}, T_{Δ_∞} и P_{Δ_∞} называют *каноническими сеточными базисами* для этих пространств. Из теоремы 5.15 непосредственно вытекает

Теорема 5.16.1. *Пусть на отрезке* $[a, b]$ *задана последовательность сеток* $\{\Delta_N\}$, $\Delta_N \subset \Delta_{N+1}$ $(N = 1, 2, \ldots)$ *и* $\|\Delta_N\| \to 0$ *при* $N \to \infty$. *Тогда* $F_{\Delta_\infty}(n, k)$, $F'_{\Delta_\infty}(n, k)$ *и* $T_{\Delta_\infty}(n, k)$ *имеют канонические сеточные базисы, которые являются ортонормальными базисами для* $\mathscr{K}^n(a, b)$, *а* $P_{\Delta_\infty}(n, k)$ *имеет канонический сеточный базис, который является ортонормальным базисом для* $\mathscr{K}_p^n(a, b)$ *и* $\mathscr{K}^n(a, b)$.

Замечание 5.16.1. В теореме 5.16.1 $\mathscr{K}^n(a, b)$ и $\mathscr{K}_p^n(a, b)$ рассматриваются как гильбертовы пространства со скалярным произведением, определенным равенством (5.14.1).

Дадим аналог леммы 3.15.1, содержащий крайне важную информацию о модуле величин $S_i^{(\alpha)}(x)$ $(\alpha = 0, 1, \ldots, n - 1)$.

Лемма 5.16.1. *Пусть с помощью последовательности сеток* $\{\Delta_N\}$, $\Delta_N \subset \Delta_{N+1}$ $(N = 1, 2, \ldots)$, *построен канонический сеточный базис* $\{S_i(n, k; x)\}$ *для пространства* $[F_{\Delta_\infty}(n, k) - F_{\Delta_1}(n, k)]$, $[F'_{\Delta_\infty}(n, k) - F'_{\Delta_1}(n, k)]$, $[T_{\Delta_\infty}(n, k) -$

$-T_{\Delta_1}(n, k)]$ *или* $[P_{\Delta_\infty}(n, k) - P_{\Delta_1}(n, k)]$. *Пусть* $\{\pi_m\}$ $(m = 0, 1, \ldots)$ *— последовательность сеток, использованная при его построении. Тогда для* $i = k(m-1) + j$, $0 < j \leqslant k$,

$$|S_i^{(\alpha)}(n, k; x)| \leqslant K_\alpha \|\pi_{m-1}\|^{(2n-2\alpha-1)/2} \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, n-1), \quad (5.16.2.1)$$

где

$$K_\alpha = \frac{\sqrt{(n-2k+2)}\,(n-2k+1)!}{(\alpha-2k+2)!}\, 2^{-(2n-2\alpha-1)/2} \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, n-1). \quad (5.16.2.2)$$

Для $[F'_{\Delta_\infty}(n, k) - F'_{\Delta_1}(n, k)]$ *и* $[T_{\Delta_\infty}(n, k) - T_{\Delta_1}(n, k)]$ *множитель* $2^{-(2n-2\alpha-1)/2}$ *опускается, когда* $x = a$ *и* $x = b$. *Если в равенстве* (5.16.2.2) *множитель* $n - 2k + 2$ *меньше* 1, *то он заменяется на* 1.

Доказательство. На отрезке $[a, b]$, кроме, быть может, точек $x = a$ и $x = b$, можно найти такие точки $\bar{x}_i$, что $S_i^{(n-1)}(\bar{x}_i) = 0$ и $|x - \bar{x}_i| \leqslant \leqslant 1/2 \sqrt{n - 2k + 2}\,\|\pi_{m-1}\|$. Это следует из возможности многократного применения теоремы Ролля и из того, что $S_i^{(k-1)}(x)$ обращается в нуль в каждом узле сетки π_{m-1}. Отсюда и из неравенства Буняковского — Шварца

$$|S_i^{(n-1)}(x)| \leqslant \int_{\bar{x}_i}^{x} |S_i^{(n)}(x)|\,|dx| \leqslant \left[\frac{1}{2}(n-2k+2)\,\|\pi_{m-1}\|\right]^{1/2}. \qquad (5.16.3)$$

Рассуждая так же в отношении $S_i^{(n-1)}(x)$ и используя неравенство (5.16.3) вместо неравенства Буняковского — Шварца, получаем

$$|S_i^{(n-2)}(x)| \leqslant \sqrt{n-2k+2}\,(n-2k+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{3/2}\|\pi_{m-1}\|^{3/2}. \qquad (5.16.4)$$

Продолжая этот процесс, приходим к неравенству (5.16.2). Так как изменения, требуемые при $x = a$ и $x = b$ для $[F'_{\Delta_\infty} - F'_{\Delta_1}]$ и $[T_{\Delta_\infty} - T_{\Delta_1}]$, тривиальны, то лемма доказана.

В заключение разд. 5.16 приведем теорему 5.16.2, играющую важную роль в разд. 5.17 и 5.18.

Теорема 5.16.2. *Пусть канонический сеточный базис* $\{S_i(x)\}$ *таков, что* $\|\pi_m\| = O(1/m)$. *Тогда существуют такие действительные числа* $B_\alpha > 0$, *что*

$$S^{(\alpha)}(x) \equiv \sum_{i=1}^{\infty} \{S_i^{(\alpha)}(x)\}^2 < B_\alpha \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, n-2). \quad (5.16.5)$$

Доказательство. Для некоторых положительных постоянных K и B_α

$$S^{(\alpha)}(x) \leqslant K \sum_{i=1}^{\infty} K_\alpha^2 \left(\frac{1}{i}\right)^{2n-2\alpha-1} < B_\alpha < \infty \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, n-2). \quad (5.16.6)$$

Теорема доказана.

Замечание 5.16.2. Было бы желательно вывести (5.16.5) и для $\alpha = n - 1$, но неравенства (5.16.2) недостаточно точны. Это будет ясно позднее, когда мы получим точные аналоги неравенств (5.16.2) для обобщенных сплайнов, из которых будет видно, что общность наших методов приводит к неточности для малых степеней.

Замечание 5.16.3. В наших рассуждениях само собой предполагалось, что сетка $\Delta_1 = \pi_0$ имеет достаточно много узлов, так что сплайны $S_i(n, k; x) = S_i(x)$ существуют. Кроме того, мы использовали соотношение $i = k(m-1) + j$, где $k(m-1) < i \leqslant km$, введенное нами раньше. Теперь, говоря, что $\lim\limits_{N\to\infty} \| \Delta_N \| = 0$ или что какой-то базис является каноническим сеточным базисом для $\mathscr{K}^n(a, b)$ или $\mathscr{K}_p^n(a, b)$, мы будем дополнительно предполагать, что $\| \pi_i \| = O(1/i)$.

5.17. Ядра и интегральные представления

В разд. 3.16 мы определили ядра, дающие интегральное представление для остаточного члена

$$R(x) = f(x) - S_\Delta(f; x). \tag{5.17.1}$$

Определим теперь такие ядра $H_\alpha(n, k; x, t)$, что для функций $f(x)$ из класса $\mathscr{K}^n(a, b)$

$$f^{(\alpha)}(x) = \int_a^b H_\alpha(n, k; x, t) f^{(n)}(t)\, dt + P_{n-1}^{(\alpha)}(x). \tag{5.17.2}$$

Если $f(x) \in \mathscr{K}^n(a, b)$, то $f(x) - S_\Delta(f, x) \in \mathscr{K}^n(a, b)$ и поэтому (5.17.2) справедливо и для (5.17.1). Остаток $P_{n-1}(x)$ представляет собой полином степени $n - 1$; более подробно мы рассмотрим его в конце этого раздела.

Теорема 5.17.1. *Пусть функция $f(x)$ принадлежит классу $\mathscr{K}^n(a, b)$ или $\mathscr{K}_p^n(a, b)$ и последовательность $\{S_i(n, k; x)\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ вместе с базисом $\{u_i(n, k; x)\}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ для $F_\Delta(n, k)$ образует канонический сеточный базис, который является ортонормальным базисом для $\mathscr{K}^n(a, b)$ или $\mathscr{K}_p^n(a, b)$. Тогда для всех x из отрезка $[a, b]$*

$$f^{(\alpha)}(x) = \lim_{N\to\infty} \int_a^b H_{\alpha N}(n, k; x, t) f^{(n)}(t)\, dt + P_{n-1}^{(\alpha)}(x)$$

$$(\alpha = 0, 1, \ldots, n-1), \tag{15.17.3.1}$$

где $P_{n-1}(x)$ — полином степени $n - 1$ и

$$H_{\alpha N}(n, k; x, t) = \sum_{i=1}^{m} u_i^{(\alpha)}(x) u_i^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^{N} S_i^{(\alpha)}(x) S_i^{(n)}(t), \tag{5.17.3.2}$$

причем сходимость равномерна относительно $x \in [a, b]$.

Доказательство. Пусть при построении $\{S_i(x)\}$ применяется последовательность сеток $\{\pi_i\}$ $(i = 0, 1, \ldots)$. По предположению $\|\pi_i\| \to 0$ при $i \to \infty$; следовательно,

$$f^{(\alpha)}(x) = \lim_{N\to\infty} S^{(\alpha)}_{\pi_N}(f; x) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \Big\{ \sum_{i=1}^{m} (u_i, f)\, u_i^{(\alpha)}(x) + \sum_{i=1}^{N} (S_i, f)\, S_i^{(\alpha)}(x) \Big\} + P^{(\alpha)}_{n-1}(x), \qquad (5.17.4)$$

откуда

$$f^{(\alpha)}(x) = \lim_{N\to\infty} \int_a^b \Big\{ \sum_{i=1}^{m} u_i^{(\alpha)}(x)\, u_i^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^{N} S_i^{(\alpha)}(x)\, S_i^{(n)}(t) \Big\} f^{(n)}(t)\, dt + P^{(\alpha)}_{n-1}(x), \qquad (5.17.5)$$

и по теореме 5.9.2 сходимость равномерна относительно x. Отсюда немедленно вытекает утверждение теоремы, так как равенство (5.17.5) выполняется для $\alpha = 0, 1, \ldots, n-1$.

Доказательство теоремы 5.17.1 использует поточечную сходимость функций $S^{(\alpha)}_{\Delta}(f; x)$ к $f^{(\alpha)}(x)$. Таким образом, для соответствующего канонического сеточного базиса для $F_{\Delta\infty}$ или $P_{\Delta\infty}$ справедливо [1])

Следствие 5.17.1. *Пусть функция $f(x)$ принадлежит классу $K^{2n}(a, b)$ или $K^{2n}_p(a, b)$ и последовательность $\{S_i(n, k; x)\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ вместе с $u_i(n, k; x)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ образует канонический сеточный базис для $F_{\Delta\infty}(n, k)$ или $P_{\Delta\infty}(n, k)$, который является ортонормальным базисом для пространства $\mathcal{K}^{2n}(a, b)$ или $\mathcal{K}^{2n}_p(a, b)$ соответственно. Тогда для всех x из отрезка $[a, b]$ и $\alpha = 0, 1, \ldots, 2n - k - 1$ выполняется равенство* (5.17.3).

Замечание 5.17.1. Отметим, что $H_{\alpha N}(n, k; x, t)$ получается из $H_{\alpha-1\,N}(n, k; x, t)$ формальным почленным дифференцированием относительно x.

В теореме 5.17.1 не устанавливается существование в $L(a, b)$ требуемых ядер $H_\alpha(n, k; x, t)$ для каждого x. Однако мы покажем, что при $\alpha = 0, 1, \ldots, n-2$ ядро $H_\alpha(n, k; x, t)$ существует и принадлежит $L^2(a, b)$; оно представляет собой предел в смысле среднеквадратического частичных сумм $H_{\alpha N}(n, k; x, t)$.

Теорема 5.17.2. *Пусть последовательностью сеток $\{\pi_i\}$ $(i = 0, 1, \ldots)$, заданной на отрезке $[a, b]$, определяется канонический сеточный базис, который является ортонормальным базисом для $\mathcal{K}^n(a, b)$ или $\mathcal{K}^n_p(a, b)$. Если функ-*

[1]) Предполагается, что для вспомогательной последовательности сеток $\{\pi_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ величина R_{π_i} как функция от i ограничена.

ция $H_{\alpha N}(n, k; x, t)$ *определена равенством* (5.17.3.2), *то последовательность* $\{H_{\alpha N}\}$ $(\alpha = 0, 1, \ldots, n-2;\ N = 1, 2, \ldots)$ *как функция от* t *является последовательностью Коши в* $L^2(a, b)$ *и, следовательно, последовательностью Коши в* $L(a, b)$. *Если* $H_\alpha(n, k; x, t)$ $(\alpha = 0, 1, \ldots, n-2)$ *— ее предел, то*

$$f^{(\alpha)}(x) = \int_a^b H_\alpha(n, k; x, t)\, f^{(n)}(t)\, dt + P_{n-1}^{(\alpha)}(x), \quad (\alpha = 0, 1, \ldots, n-2), \quad (5.17.6)$$

где $P_{n-1}(x)$ *— полином степени* $n-1$. *Сходимость равномерна относительно* $x \in [a, b]$, *и* $H_\alpha(n, k; x, t)$ *получается из* $H_{\alpha-1}(n, k; x, t)$ *формальным почленным дифференцированием по* x.

Доказательство. Так как сеточный базис ортонормален, то из леммы 5.16.1 получаем

$$\int_a^b |H_{\alpha N+p} - H_{\alpha N}|^2\, dt = \int_a^b \Big| \sum_{i=N+1}^{N+p} S_i^{(\alpha)}(x)\, S_i^{(n)}(t) \Big|^2 dt =$$

$$= \sum_{i=N+1}^{N+p} |S_i^{(\alpha)}(x)|^2 = O\Big(\sum_{i=N+1}^{N+p} \Big(\frac{1}{i}\Big)^{2n-2\alpha-1} \Big) \quad (5.17.7)$$

$$(i = k(m-1) + j,\ 0 < j \leqslant k).$$

Итак, для $\alpha \leqslant n-2$ мы имеем последовательность Коши, и равенство (5.17.6) следует из (5.17.3); это завершает доказательство, так как пределы существуют равномерно относительно $x \in [a, b]$.

Сделаем несколько замечаний о сеточных базисах. При выборе базисов для F_{Δ_1}, F'_{Δ_1}, T_{Δ_1} и P_{Δ_1} мы могли считать их линейными пространствами (без отождествлений), а не гильбертовыми. Например, можно выбрать базис для F_{Δ_1}, содержащий n независимых полиномов степени, меньшей n. Если F_{Δ_1} рассматривается как гильбертово пространство, то эти базисные элементы тождественны нулевому сплайну. Но такое построение непротиворечиво, так как эти полиномы ортогональны каждому элементу из F_{Δ_1}, в том числе и самим себе. Включение их в базис позволяет выразить $S_{\Delta_N}^{(\alpha)}(f; x)$ в виде

$$S_{\Delta_N}^{(\alpha)}(f; x) = \sum_{i=1}^{m} (u_i, f)\, u_i^{(\alpha)}(x) + \sum_{i=1}^{N} (S_i, f)\, S_i^{(\alpha)}(x) + P_{n-1}^{(\alpha)}(x) \quad (5.17.8)$$

и, следовательно, доказать теорему 5.17.1 и следствие 5.17.1. Здесь полиномы степени, меньшей n, представлены в базисе членом $P_{n-1}^{(\alpha)}(x)$, а остаток базиса

$$[u_1(n, k; x),\ u_2(n, k; x),\ \ldots,\ u_m(n, k; x)]$$

представлен суммой

$$\sum_{i=1}^{m} (f, u_i)\, u_i^{(\alpha)}(x).$$

С другой стороны, можно рассмотреть F_{Δ_1} как гильбертово пространство с ортонормальным базисом $u_1(n, k; x)$, $u_2(n, k; x)$, . . ., $u_m(n, k; x)$, а затем определить $P_{n-1}(x)$ формулой

$$P_{n-1}(x) = S_{\Delta_1}(f; x) - \sum_{i=1}^{m} (f, u_i)\, u_i(x). \tag{5.17.9}$$

Равенство (5.17.8) будет также справедливо [1]). Оба варианта согласуются с формулировкой наших теорем.

5.18. Представление и приближение линейных функционалов

В этом разделе мы исследуем представление линейных функционалов с помощью интегралов, а также рассмотрим приближение функционалов другими функционалами и выведем интегральное представление для остаточного члена. В отличие от разд. 3.17 мы не ограничимся случаем точечных функционалов $\mathscr{L}_x$: $f \to f(x)$. Мы докажем теоремы о представлении, относящиеся к типу, изученному Пеано [1] и Сардом [1]; их связь с теорией сплайнов впервые осознал Шёнберг [6]. Мы приняли другой, новый подход, довольно общий, в значительной мере использующий результаты, полученные здесь и в гл. III. В итоге мы доказываем теоремы в одном смысле более сильные, а в другом более слабые, чем те, которые получены Пеано, Сардом и Шёнбергом.

Пусть функция $f(x)$ принадлежит классу $\mathscr{K}^n(a, b)$ или $\mathscr{K}_p^n(a, b)$ и линейный функционал $\mathscr{L}$, определенный на $\mathscr{K}^n(a, b)$ или $\mathscr{K}_p^n(a, b)$, действует по формуле

$$\mathscr{L} \circ f = \sum_{j=0}^{\eta} \int_a^b f^{(j)}(t)\, d\mu_j(t) \qquad (\eta \leqslant n-1), \tag{5.18.1}$$

где $\mu_j(t)$ — функции ограниченной вариации на $[a, b]$. Подробно функционалы такого типа описаны Сардом [1, гл. I]. Исследуем возможность представления $\mathscr{L} \circ f$ в виде

$$\mathscr{L} \circ f = \int_a^b H(t)\, f^{(n)}(t)\, dt + \mathscr{L} \circ P_{n-1}, \tag{5.18.2}$$

где функция $H(t)$ не зависит от $f(x)$ и принадлежит пространству $L^2(a, b)$, а $P_{n-1}(x)$ — полином степени $n-1$. Как и в предыдущем разделе, установим сначала более общий результат о существовании последовательности функций $\{H_N(n, k; t)\}$ $(N = 1, 2, \ldots)$ из класса $\mathscr{K}^{n-k}(a, b)$, для которой

$$\mathscr{L} \circ f = \lim_{N \to \infty} \int_a^b H_N(n, k; t)\, f^{(n)}(t)\, dt + \mathscr{L} \circ P_{n-1}. \tag{5.18.3}$$

---

[1]) В формуле (5.17.9) под $u_i(x)$ понимается конкретный член из класса эквивалентности, а не сам класс.

Теорема 5.18.1. *Пусть функция $f(x)$ принадлежит классу $\mathscr{K}^n(a, b)$ или $\mathscr{K}_p^n(a, b)$ и последовательность $\{S_i(n, k; x)\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ вместе с $\{u_i(n, k; x)\}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ образует канонический сеточный базис, который является ортонормальным базисом для $\mathscr{K}^n(a, b)$ или $\mathscr{K}_p^n(a, b)$. Если $\mathscr{L}$ — линейный функционал* (5.18.1), *то*

$$\mathscr{L}\circ f = \lim_{N\to\infty} \int_a^b H_N(n, k; t) f^n(t)\, dt + \mathscr{L}\circ P_{n-1}, \tag{5.18.4.1}$$

где

$$H_N(n, k; x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^{N} \beta_i S_i^{(n)}(x), \tag{5.18.4.2}$$

$$\alpha_i = \sum_{j=0}^{\eta} \int_a^b u_i^{(j)}(s)\, d\mu_j(s) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{5.18.4.3}$$

$$\beta_i = \sum_{j=0}^{\eta} \int_a^b S_i^{(j)}(s)\, d\mu_j(s) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N) \tag{5.18.4.4}$$

и $P_{n-1}(x)$ — полином степени $n-1$.

Доказательство. Представим $f^{(\alpha)}(x)$ $(\alpha = 0, 1, \ldots, n-1)$ в виде

$$f^{(\alpha)}(x) = \lim_{N\to\infty} \Big\{ \sum_{i=1}^{m} (f, u_i) u_i^{(\alpha)}(x) + \sum_{i=1}^{N} (f, S_i) S_i^{(\alpha)}(x) \Big\} + P_{n-1}^{(\alpha)}(x),$$

где сходимость равномерна относительно x. Тогда

$$\mathscr{L}\circ f = \sum_{j=0}^{\eta} \int_a^b \lim_{N\to\infty} \Big\{ \sum_{i=1}^{m} (f, u_i) u_i^{(j)}(s) + \sum_{i=1}^{N} (f, S_i) S_i^{(j)}(s) \Big\}\, d\mu_j(s) + \mathscr{L}\circ P_{n-1}.$$

Так как сходимость равномерна относительно x, то

$$\mathscr{L}\circ f = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=0}^{\eta} \int_a^b \Big\{ \sum_{i=1}^{m} (f, u_i) u_i^{(j)}(s) + \sum_{i=1}^{N} (f, S_i) S_i^{(j)}(s) \Big\}\, d\mu_j(s) + \mathscr{L}\circ P_{n-1}.$$

По определению

$$(f, g) = \int_a^b f^{(n)}(t)\, g^{(n)}(t)\, dt, \tag{5.18.5}$$

так что после подстановки значений (f, u_i) и (f, S_i) и изменения порядка суммирования получаем

$$\mathscr{L}\circ f = \lim_{N\to\infty} \int_a^b \left\{ \sum_{i=1}^{m} \left[\sum_{j=0}^{\eta} \int_a^b u_i^{(j)}(s)\, d\mu_j(s) \right] u_i^{(n)}(t) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{N} \left[\sum_{j=0}^{\eta} \int_a^b S_i^{(j)}(s)\, d\mu_j(s) \right] S_i^{(n)}(t) \right\} f^{(n)}(t)\, dt + \mathscr{L}\circ P_{n-1}.$$

Теорема доказана.

Следствие 5.18.1. *Пусть функция $f(x)$ принадлежит классу $\mathscr{K}^{2n}(a, b)$ или $\mathscr{K}_p^{2n}(a, b)$ и последовательность $\{S_i(n, k; x)\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ вместе с $\{u_i(u, k; x)\}$ $(1, 2, \ldots, m)$ образует канонический сеточный базис, который является ортонормальным базисом для $\mathscr{K}^n(a, b)$ или $\mathscr{K}_p^n(a, b)$. Если линейный функционал $\mathscr{L}$ имеет вид*

$$\mathscr{L}\circ f = \sum_{j=0}^{\eta} \int_a^b f^{(j)}(t)\, d\mu_j(t) \qquad (\eta \leqslant 2n-2), \tag{5.18.6}$$

где $\mu_j(t)$ — функции ограниченной вариации на $[a, b]$, то равенство (5.18.4) справедливо, только теперь $\eta \leqslant 2n-2$.

Для функционалов вида

$$\mathscr{L}\circ f = \sum_{j=0}^{\eta} \int_a^b f^{(j)}(t)\, d\mu_j(t) \qquad (\eta \leqslant 2n-2), \tag{5.18.7}$$

где $\mu_j(t)$ — функции ограниченной вариации на $[a, b]$, мы получаем представления специального вида (5.18.2).

Теорема 5.18.2. *Пусть $\{\pi_i\}$ $(i = 0, 1, \ldots)$ — последовательность сеток на $[a, b]$, определяющая канонический сеточный базис, который является ортонормальным базисом для $\mathscr{K}^n(a, b)$ или $\mathscr{K}_p^n(a, b)$. Если функция $H_N(n, k; x)$ задана равенством (5.18.4) (с учетом того, что $\eta \leqslant n-2$), то $\{H_N(n, k; x)\}$ $(N = 1, 2, \ldots)$ является последовательностью Коши в $L^2(a, b)$ и, следовательно, последовательностью Коши в $L(a, b)$. Если $H(n, k; x)$ — ее предел, то*

$$\mathscr{L}\circ f = \int_a^b H(n, k; t)\, f^{(n)}(t)\, dt + \mathscr{L}\circ P_{n-1}, \tag{5.18.8}$$

где $P_{n-1}(x)$ — полином степени $n-1$.

Доказательство. Теорема доказывается по существу так же, как теорема 5.17.2.

Сейчас мы уже можем рассмотреть приближение линейного функционала $\mathscr{L}$ вида (5.18.1) линейными функционалами вида

$$B \circ f = \sum_{i=0}^{r} \sum_{j=0}^{k-1} a_{ij} f^{(j)}(x_i) \qquad (k < n), \tag{5.18.9}$$

определенными совокупностью констант a_{ij} ($i = 0, 1, \ldots, r$; $j = 0, 1, \ldots, k-1$) и сеткой Δ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_r = b$. Пусть $\mu_j(t)$ — кусочно-постоянная функция со скачками a_{ij} в точках x_i ($i = 0, 1, \ldots, r$). Тогда (5.18.9) принимает вид

$$B \circ f = \sum_{j=0}^{k-1} \int_a f^{(j)}(t)\, d\mu_j(t), \tag{5.18.10}$$

где $\mu_j(t)$ — функции ограниченной вариации на $[a, b]$, и наши теоремы о представлении функционалов применимы. Пусть функции $u_1(n, k; x)$, $u_2(n, k; x)$, ..., $u_m(n, k; x)$ образуют базис для $F_\Delta(n, k)$, а последовательность $\{S_i(n, k; x)\}$ ($i = 1, 2, \ldots$) распространяет этот базис до ортонормального базиса для $\mathscr{K}^n(a, b)$. Аналогично можно рассмотреть подпространство $T_\Delta(n, k)$ или $P_\Delta(n, k)$ (в случае $K_p^n(a, b)$); некоторые трудности встречаются при рассмотрении пространства $F'_\Delta(n, k)$ (для $x = a$ и $x = b$).

Сделаем теперь два важных замечания. Первое касается коэффициентов β_i. Так как $S_i^{(\alpha)}(x_j) = 0$ ($\alpha = 0, 1, \ldots, k-1$; $j = 0, 1, \ldots, r$; $i = 1, 2, \ldots$), то все коэффициенты β_i ($i = 1, 2, \ldots, N$), заданные равенством (5.18.4.4), в формуле для B обращаются в нуль. Это происходит потому, что мера $\mu_i(t)$ сосредоточена в узлах сетки Δ; более того, это верно для каждого N. Следовательно, если применить теорему 5.18.1 или 5.18.2 к $\mathscr{L} - B$, то коэффициенты β_i будут определяться только оператором $\mathscr{L}$ и не будут зависеть от B. Второе замечание состоит в том, что

$$\mathscr{L} \circ S_{\Delta, f} = \int_a^b \left\{ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i^{(n)}(n, k; t)\, f^{(n)}(t) \right\} dt + \mathscr{L} \circ P_{n-1}, \tag{5.18.11}$$

и из доказательства теоремы 5.18.1 видно, что

$$\mathscr{L} \circ f = \mathscr{L} \circ S_{\Delta, f} + \lim_{N \to \infty} \int_a^b \left\{ \sum_{i=1}^{N} \beta_i S_i^{(n)}(t)\, f^{(n)}(t) \right\} dt. \tag{5.18.12}$$

Так как коэффициенты a_{ij} в (5.18.9) можно подобрать так, чтобы выполнялось равенство

$$B \circ f = \mathscr{L} \circ S_{\Delta, f}, \tag{5.18.13}$$

то получаем следующие две теоремы.

Теорема 5.18.3. *Если линейный функционал* $\mathscr{L}$ *имеет вид* (5.18.1), *а линейный функционал* B — (5.18.13), *то*

$$\mathscr{L}\circ f - B\circ f = \lim_{N\to\infty} \int_a^b \left\{ \sum_{i=1}^{N} \beta_i S_i^{(n)}(n, k; t)\, f^{(n)}(t) \right\} dt, \qquad (5.18.14.1)$$

где

$$\beta_i = \sum_{j=0}^{\eta} \int_a^b S_i^{(j)}(n, k; s)\, d\mu_j(s) \qquad (\eta < n) \qquad (5.18.14.2)$$

и функции $\mu_j(s)$ $(j = 0, 1, \ldots, \eta)$, *определяемые только оператором* $\mathscr{L}$, *имеют ограниченную вариацию на отрезке* $[a, b]$.

Теорема 5.18.4. *Если линейные функционалы* $\mathscr{L}$ *и* B *имеют вид соответственно* (5.18.7) *и* (5.18.3), *то*

$$\mathscr{L}\circ f - B\circ f = \int_a^b H(n, k; t)\, f^{(n)}(t)\, dt, \qquad (5.18.15.1)$$

где $H(n, k; t)$ *принадлежит пространству* $L^2(a, b)$ *и является пределом в смысле среднеквадратического функции*

$$H_N(n, k; t) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i^{(n)}(n, k; t) + \sum_{i=1}^{N} \beta_i S_i^{(n)}(n, k; t), \qquad (5.18.15.2)$$

$$\alpha_i = \sum_{j=k}^{\eta} \int_a^b u_i^{(j)}(n, k; s)\, d\mu_j(s), \qquad (5.18.15.3)$$

$$\beta_i = \sum_{j=0}^{\eta} \int_a^b S_i^{(j)}(n, k; s)\, d\mu_j(s). \qquad (5.18.15.4)$$

Функции $\mu_j(s)$ *имеют ограниченную вариацию и зависят только от функционала* $\mathscr{L}$, *в определение которого они входят. Если* B — *любой линейный функционал вида* (5.18.9) *и* $\mathscr{L} - B$ *аннулирует полиномы степени, меньшей* n, *то*

$$\mathscr{L}\circ f - B\circ f = \int_a^b H(n, k; t)\, f^{(n)}(t)\, dt, \qquad (5.18.16)$$

где $H(n, k; t)$ *принадлежит пространству* $L^2(a, b)$ *и определяется, как в теореме* 5.18.2. *Кроме того, интеграл*

$$\int_a^b \{H(n, k; t)\}^2\, dt \qquad (5.18.17)$$

принимает наименьшее значение, когда B *удовлетворяет условию* (5.18.13).

Применение методов этого раздела к точечным функционалам $\mathscr{L}_x$: $f \to f(x)$ рассматривается в гл. VI. Там исследуются также другие функционалы, представляющие значительный интерес. Например, если нежелательно, чтобы аппроксимирующий функционал B включал значение функции $f(x)$ в точке x_i, то, казалось бы, можно просто положить в (5.18.9) $a_{i0} = 0$. Однако тогда условие (5.18.3) будет, вообще говоря, нарушено. Но существуют и такие аппроксимирующие функционалы, для которых при этом условие (5.18.3) не нарушается. Это свойство полезно при выводе формул для численного интегрирования методом последовательных приближений, так как для устойчивости процесса часто бывает нужно устранить в этих формулах некоторые значения функции и ее производных.

Глава VI. ОБОБЩЕННЫЕ СПЛАЙНЫ

6.1. Введение

К изучению полиномиальных сплайнов нечетной степени возможны два подхода: 1) алгебраический, состоящий главным образом в подробном изучении системы линейных уравнений, определяющих сплайны, и 2) подход, использующий внутренние свойства сплайнов и основные интегральные соотношения между функциями из классов $\mathscr{K}^n(a, b)$ и $\mathscr{K}^{2n}(a, b)$ и аппроксимирующими сплайнами. Первый подход весьма эффективен при изучении кубических и дважды кубических сплайнов, но его роль заметно падает даже для полиномиальных сплайнов более высокой нечетной степени. Для обобщенных сплайнов в настоящее время нет алгебраической теории, но для некоторых частных случаев обобщенных сплайнов можно достаточно хорошо развить специальные разделы этой теории. Подход, основанный на внутренних свойствах, применим и в случае обобщенных сплайнов и достигает здесь своей полной силы. В настоящей главе эта теория представлена как продолжение внутренней теории полиномиальных сплайнов.

Пусть L — линейный дифференциальный оператор, заданный формулой

$$L \equiv a_n(x) D^n + a_{n-1}(x) D^{n-1} + \ldots + a_0(x), \tag{6.1.1}$$

где функции $a_j(x)$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$ принадлежат $C^n[a, b]$ и $a_n(x) \neq 0$ на $[a, b]$. Обозначим через L^* оператор, формально сопряженный к L:

$$L^* = (-1)^n D^n \{a_n(x)\cdot\} + (-1)^{n-1} D^{n-1} \{a_{n-1}(x)\cdot\} + \ldots$$
$$\ldots - D\{a_1(x)\cdot\} + a_0(x). \tag{6.1.2}$$

Если на отрезке $[a, b]$ задана сетка Δ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$, то обобщенным сплайном дефекта k $(0 \leqslant k \leqslant n)$ относительно сетки Δ называется функция $S_\Delta(x)$ из класса $\mathscr{K}^{2n-k}(a, b)$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$L^* L S_\Delta = 0 \tag{6.1.3}$$

на каждом открытом интервале (x_{i-1}, x_i) $(i = 1, \ldots, N)$. Мы будем говорить, что сплайн $S_\Delta(x)$ имеет порядок $2n$, когда нам нужно будет указать порядок оператора L^*L, определяющего $S_\Delta(x)$.

Если $k=0$ и оператор L имеет аналитические коэффициенты, то $S_\Delta(x)$ имеет непрерывные производные всех порядков и удовлетворяет уравнению (6.1.3) всюду на $[a, b]$; в этом случае непрерывность $(2n-1)$-й производной влечет непрерывность $2n$-й и всех высших производных. Таким образом, для этого важного класса дифференциальных операторов условие равенства нулю дефекта равносильно непрерывности всех производных сплайна. Для обычных сплайнов (дефект 1) допускаются разрывы $(2n-1)$-й производной, но только в узлах сетки. Вообще дефект сплайна указывает, насколько сплайн не удовлетворяет уравнению (6.1.3) на отрезке $[a, b]$.

6.2. Основное тождество

Пусть дан дифференциальный оператор L порядка n и его формально сопряженный L^*. Тогда

$$Lu(x)\,v(x)=\frac{d}{dx}P[u(x), v(x)]+u(x)\,L^*v(x), \tag{6.2.1.1}$$

где билинейная форма $P[u(x), v(x)]$ определена равенством

$$P[u(x), v(x)]=\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-j-1}(-1)^k u^{(n-j-k-1)}(x)\{a_{n-j}(x)\,v(x)\}^{(k)}. \tag{6.2.1.2}$$

Перегруппируем правую часть в (6.2.1.2):

$$P[u(x), v(x)]=\sum_{j=0}^{n-1}u^{(n-j-1)}(x)\sum_{k=0}^{j}(-1)^k\{a_{n-j+k}(x)\,v(x)\}^{(k)}. \tag{6.2.2}$$

Пусть теперь даны сетка Δ: $a=x_0<x_1<\ldots<x_N=b$ и обобщенный сплайн $S_\Delta(x)$ на ней степени $2n$. Если в уравнении (6.2.1) положим $u(x)=f(x)-S_\Delta(x)$ и $v(x)=LS_\Delta(x)$ и проинтегрируем его по отрезку $[x_{i-1}, x_i]$ $(i=0, 1, \ldots, N)$, то получим

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}L\{f(x)-S_\Delta(x)\}\,LS_\Delta(x)\,dx=$$

$$=\left\{\sum_{j=0}^{n-1}[f(x)-S_\Delta(x)]^{(n-j-1)}\sum_{k=0}^{j}(-1)^k[a_{n-j+k}(x)\,LS_\Delta(x)]^{(k)}\right\}\Bigg|_{x_{i-1}}^{x_i}, \tag{6.2.3}$$

поскольку $L^*LS_\Delta(x)=0$ на (x_{i-1}, x_i). Следовательно, из общего тождества

$$\int_a^b\{L[f(x)-S_\Delta(x)]\}^2\,dx=$$

$$=\int_a^b\{Lf(x)\}^2\,dx-2\int_a^b L[f(x)-S_\Delta(x)]\,LS_\Delta(x)\,dx-\int_a^b\{LS_\Delta(x)\}^2\,dx \tag{6.2.4}$$

и равенства (6.2.3) вытекает, что

$$\int_a^b \{L[f(x)-S_\Delta(x)]\}^2\,dx=\int_a^b \{Lf(x)\}^2\,dx-\int_a^b \{LS_\Delta(x)\}^2\,dx-$$

$$-2\sum_{i=1}^{N}\left\{\sum_{j=0}^{n-1}[f(x)-S_\Delta(x)]^{(n-j-1)}\sum_{k=0}^{j}(-1)^k[a_{n-j+k}(x)\,LS_\Delta(x)]^{(k)}\right\}\Big|_{x_{i-1}}^{x_i}. \quad (6.2.5)$$

Тождество (6.2.5) называют *основным тождеством* для обобщенных сплайнов. При его выводе учитывалось, что 1) $S_\Delta(x)$ представляет собой сплайн относительно сетки Δ и 2) функция $f(x)$ принадлежит классу $\mathscr{K}^n(a, b)$.

6.3. Первое интегральное соотношение

При определенных ограничениях на сплайн $S_\Delta(x)$ основное тождество имеет вид

$$\int_a^b |Lf(x)|^2\,dx=\int_a^b |LS_\Delta(f;x)|^2\,dx+\int_a^b |Lf(x)-LS_\Delta(f;x)|^2\,dx \quad (6.3.1)$$

и называется *первым интегральным соотношением* для обобщенных сплайнов. Если дефект сплайна $S_\Delta(x)$ равен k, то производные $\{LS_\Delta(x)\}^{(n-j)}$ $(j=0, 1, \ldots, k)$ в узлах сетки Δ претерпевают разрыв. Обозначим

$$\beta_r(v;x)=\sum_{i=0}^{r}(-1)^i\{a_{n-r+i}(x)\,Lv(x)\}^{(i)} \qquad (r=0, 1, \ldots, n-1); \quad (6.3.2)$$

тогда $\beta_r(S_\Delta; x)$ совпадает с коэффициентом при $\{f(x)-S_\Delta(x)\}^{n-r-1}$ в равенстве (6.2.3). Так как для $r\geqslant n-k$ функции $\beta_r(S_\Delta; x)$ в узлах сетки могут быть разрывными, то мы вместо требования непрерывности потребуем, чтобы разность $f^{(\alpha)}(x)-S_\Delta^{(\alpha)}(x)$ $(\alpha=0, 1, \ldots, k-1)$ обращалась в нуль во внутренних узлах сетки Δ; если, кроме того, выбраны подходящие краевые условия в точках $x=a$ и $x=b$, то равенство (6.3.1) справедливо.

Одно допустимое множество краевых условий мы получим, если потребуем, чтобы разность $f(x)-S_\Delta(x)$ обращалась в нуль в точках $x=a$ и $x=b$ и принадлежала типу I′; другое — чтобы разность $f(x)-S_\Delta(x)$ обращалась в нуль в точках $x=a$ и $x=b$ и сплайн $S_\Delta(x)$ принадлежал типу II′. Подчеркнем здесь, что понятия типа I′ и типа II′ зависят от оператора L. Говорят, что функция $f(x)$ *принадлежит типу* I′, если производные $f^{(\alpha)}(x)$ обращаются в нуль в точках $x=a$ и $x=b$ при $\alpha=1, 2, \ldots, n-1$, где n — порядок оператора L. Говорят, что функция $f(x)$ *принадлежит типу* II′, если производные $\{Lf\}^{(\alpha)}$ $(\alpha=0, 1, \ldots, n-2)$ обращаются в нуль в точках $x=a$ и $x=b$. Для $L\equiv D^n$ эти определения совпадают с прежними [1]). Классы эквива-

[1]) Они равносильны требованию $\beta_\alpha(f; a)=\beta_\alpha(f; b)=0$ $(\alpha=0, 1, \ldots, n-2)$.

лентности и т. д. можно ввести аналогично тому, как это сделано в гл. III и V. Как и прежде, сплайн будем называть *простым*, если он принадлежит классу $C^{2n-2}(a, b)$.

Для обобщенных интерполяционных сплайнов типа k это условие также и достаточно; обобщенный сплайн $S_\Delta(f; x)$ дефекта k на Δ называется *интерполяционным сплайном типа k*, если $S_\Delta^{(\alpha)}(f; x)$ $(\alpha = 0, 1, \ldots, k-1)$ интерполирует значения $f^{(\alpha)}(x)$ во внутренних узлах сетки Δ и $\{LS_\Delta(x)\}^{(\alpha)} = 0$ $(\alpha = 0, 1, \ldots, n-k-1)$ в точках $x = a$ и $x = b$. В периодическом случае разность $f^{(\alpha)}(x) - S_\Delta^{(\alpha)}(f; x)$ $(\alpha = 0, 1, \ldots, k-1)$ должна обращаться в нуль во всех узлах сетки Δ и сплайн $S_\Delta(f; x)$ должен принадлежать классу $C^{2n-k-1}(a, b)$. Сформулируем условия, при которых справедливо первое интегральное соотношение (6.3.1).

Теорема 6.3.1. *Пусть на отрезке $[a, b]$ заданы сетка Δ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ и функция $f(x)$ из класса $\mathcal{K}^{(n)}(a, b)$. Если для обобщенного сплайна $S_\Delta(f; x)$ дефекта k на Δ*

$$f^{(\alpha)}(x) = S_\Delta^{(\alpha)}(f; x) \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, k-1)$$

во внутренних узлах сетки Δ и, кроме того, выполнено одно из условий: a) $f(x) - S_\Delta(f; x)$ *принадлежит типу* I′ *и* $f(x_i) - S_\Delta(f; x_i) = 0$ $(i = 0, N)$, b) $f(x_i) - S_\Delta(f; x_i) = 0$ $(i = 0, N)$ *и* $S_\Delta(f; x)$ *принадлежит типу* II′, c) $S_\Delta(f; x)$ *принадлежит типу k*, d) $f^{(\alpha)}(x_i) - S_\Delta^{(\alpha)}(f; x_i) = 0$ $(\alpha = 0, 1, \ldots, k-1;$ $i = 0, 1, \ldots, N)$, *функция $f(x)$ принадлежит $\mathcal{K}_p^n(a, b)$ и сплайн $S_\Delta(f; x)$ периодический, то первое интегральное соотношение* (6.3.1) *справедливо.*

Первое интегральное соотношение справедливо для более широкого, чем в теореме 6.3.1, класса обобщенных сплайнов. Сплайны этого более широкого класса обладают тем свойством, что в точках сетки задаются некоторые их первые $n-1$ производных. В отличие от сплайнов дефекта k для таких сплайнов нет необходимости задавать в узлах сетки какие-то определенные производные, можно в различных узлах задавать различные производные. Например, можно задать четные производные в узлах с четным номером, а нечетные — в остальных узлах, при этом функцию $f(x)$ считать четной производной. Кроме того, производные $S_\Delta^{(\alpha)}(x)$ $(\alpha = 0, 1, \ldots, n-1)$ должны быть непрерывными. Если $S_\Delta^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i)$, то не обязательно требовать непрерывности функции $\beta_{n-j-1}(S_\Delta; x)$ в точке x_i, а если $S_\Delta^{(j)}(x_i) \neq f^{(j)}(x_i)$, то должно выполняться равенство

$$\lim_{x \to x_i + 0} \beta_{n-j-1}(S_\Delta; x) = \lim_{x \to x_i - 0} \beta_{n-j-1}(S_\Delta; x). \qquad (6.3.3)$$

Наконец, если $S_\Delta^{(j)}(x) \neq f^{(j)}(x)$ при $x = a$ или $x = b$, то функция $\beta_{n-j-1}(S_\Delta; x)$ должна в этих точках обращаться в нуль. Сплайны, удовлетворяющие всем перечисленным условиям, называют *гетерогенными*. Для гетерогенных сплайнов непосредственно из основного тождества вытекает

Теорема 6.3.2. *Пусть на отрезке* $[a, b]$ *даны сетка* Δ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ *и функция* $f(x)$ *из класса* $\mathscr{K}^n(a, b)$. *Если производные* $S_\Delta^{(\alpha)}(f; x_i)$ $(\alpha = 0, 1, \ldots, n-1;\ i = 0, 1, \ldots, N)$ *гетерогенного сплайна* $S_\Delta(f; x)$ *на* Δ *заданы и* $S_\Delta^{(\alpha)}(f; x_i) = f^{(\alpha)}(x_i)$, *то*

$$\int_a^b |Lf(x)|^2\,dx = \int_a^b |LS_\Delta(f; x)|^2\,dx + \int_a^b |Lf(x) - LS_\Delta(f; x)|^2\,dx.$$

6.4. Свойство минимальной нормы

Если выполнены условия теоремы 6.3.1 или 6.3.2, то из первого интегрального соотношения следует, что

$$\int_a^b \{Lf(x)\}^2\,dx \geqslant \int_a^b \{LS_\Delta(f; x)\}^2\,dx. \tag{6.4.1}$$

Сохраним для обобщенных сплайнов терминологию полиномиальных сплайнов и будем называть это экстремальное свойство *свойством минимальной нормы*; при $L \equiv D^n$ неравенство (6.4.1) выражает свойство минимальной нормы для полиномиальных сплайнов.

Теорема 6.4.1. *Пусть даны сетка* Δ: $a = x_0 < x_1 < x_N = b$ *и последовательность* $Y \equiv \{y_{i\alpha} \mid i = 0, 1, \ldots, N;\ \alpha = 0, 1, \ldots, k-1\}$. *Среди всех функций* $f(x)$, *принадлежащих классу* $\mathscr{K}^n(a, b)$ *и таких, что* $f^{(\alpha)}(x_i) = y_{i\alpha}$ $(i = 0, 1, \ldots, N;\ \alpha = 0, 1, \ldots, k-1)$, *обобщенный сплайн* $S_\Delta(Y; x)$ *типа* k, *если он существует, минимизирует интеграл*

$$\int_a^b \{Lf(x)\}^2\,dx. \tag{6.4.2}$$

Если функция $g(x)$ *также минимизирует интеграл* (6.4.2), *то* $g(x)$ *и* $S_\Delta(Y; x)$ *отличаются на решение уравнения* $Lf = 0$. *Кроме того, если* $y_{0\alpha} = y_{N\alpha}$ $(\alpha = 0, 1, \ldots, k-1)$, *то среди всех функций, принадлежащих классу* $\mathscr{K}_p^n(a, b)$, *периодический обобщенный сплайн типа* k, *если он существует, минимизирует интеграл* (6.4.2) *и является единственным с точностью до периодического решения уравнения* $Lf = 0$.

Для $k = 1$ и $L \equiv D^n$ теорема 6.4.1 сводится к основному утверждению теоремы 5.4.1. Хотя теорему о минимальном значении интеграла (6.4.2) можно сформулировать при других условиях, мы формулируем ее только для гетерогенных сплайнов, а другие возможные теоремы рассматриваем как частные случаи теоремы 6.4.2.

Теорема 6.4.2. *Пусть даны сетка* Δ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ *и последовательность* $Y = \{y_{i\alpha_i}\}$, *где совокупность значений* i *составляет некоторое подмножество множества* $0, 1, \ldots, N$ *и совокупность значений* α_i *состав-*

ляет подмножество множества $0, 1, \ldots, n-1$, *которое, вообще говоря, может меняться вместе с* i. *Тогда среди всех функций* $f(x)$ *из класса* $\mathring{K}^{(n)}(a, b)$, *для которых* $f^{(\alpha_i)}(x_i) = y_{i\alpha_i}$ *при* $y_{i\alpha_i} \in Y$, *гетерогенный обобщенный сплайн, если он существует и полностью определяется последовательностью* Y, *минимизирует интеграл*

$$\int_a^b \{Lf(x)\}^2\, dx. \tag{6.4.3}$$

Если функция $g(x)$ *удовлетворяет тем же самым условиям, что и сплайн, и также минимизирует интеграл* (6.4.2), *то* $g(x)$ *и* $S_\Delta(Y; x)$ *отличаются на решение уравнения* $Lf = 0$.

Существование обобщенных сплайнов на каждой сетке и для всех операторов L гарантировать нельзя; обычно они существуют, когда узлов сетки достаточно много. В отличие от полиномиальных сплайнов мы не можем указать явно, сколько узлов необходимо для существования обобщенных сплайнов. Поэтому в теоремах 6.4.1 и 6.4.2 мы в явной форме требуем существования сплайнов $S_\Delta(f; x)$ (в случае полиномиальных сплайнов мы требовали, чтобы число узлов было достаточно велико). Более подробно этот вопрос мы обсудим в разд. 6.7.

6.5. Единственность

При изучении единственности можно непосредственно применить методы гл. III и V и получить нужные результаты. Необходимо только отметить, что если два обобщенных сплайна $S_\Delta(Y; x)$ и $\bar{S}_\Delta(Y; x)$ интерполируют на Δ соответствующий вектор Y, то их разность $S_\Delta(Y; x) - \bar{S}_\Delta(Y; x)$ является обобщенным сплайном того же типа, но она интерполирует нулевой вектор. Кроме того, эта разность обладает в узлах сетки теми же свойствами непрерывности, что и сплайны $S_\Delta(Y; x)$ и $\bar{S}_\Delta(Y; x)$. Теперь с помощью свойства минимальной нормы нетрудно доказать, что $S_\Delta(Y; x) - \bar{S}_\Delta(Y; x) \equiv 0$. Таким способом доказываются следующие две теоремы.

Теорема 6.5.1. *Пусть даны сетка* Δ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ *и вектор* $Y \equiv \{y_{i\alpha} \mid i = 0, 1, \ldots, N;\ \alpha = 0, 1, \ldots, k-1\}$. *Пусть оператор* L *и сетка* Δ *таковы, что если* $Lg \equiv 0$ *и* $g^{(\alpha)}(x_i) = 0$ $(i = 0, 1, \ldots, N;\ \alpha = 0, 1, \ldots, k-1)$, *то* $g(x) \equiv 0$. *Тогда существует не более одного обобщенного сплайна* $S_\Delta(Y; x)$ *типа* k *на* Δ, *для которого* $S_\Delta^{(\alpha)}(Y; x_i) = y_{i\alpha}$ $(i = 0, 1, \ldots, N;\ \alpha = 0, 1, \ldots, k-1)$, *и периодический обобщенный сплайн типа* k *также является единственным.*

Теорема 6.5.2. *Пусть даны сетка* Δ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ *и вектор* $Y \equiv \{y_{i\alpha}\}$, *где совокупность значений* i *составляет некоторое подмножество множества* $0, 1, \ldots, N$, *а совокупность значений* α_i *составляет подмножество множества* $0, 1, \ldots, n-1$, *которое может меняться вместе с* i. *Пусть оператор* L *и сетка* Δ *таковы, что если* $Lg \equiv 0$ *и* $g^{(\alpha_i)}(x_i) = 0$ *для всех*

допустимых значений i и α_i, то $g(x) \equiv 0$. Тогда существует не более одного гетерогенного сплайна $S_\Delta(Y; x)$, удовлетворяющего условиям $S_\Delta^{(\alpha_i)}(Y; x_i) = y_{i\alpha_i}$ для всех допустимых значений i и α_i, если только вектор Y достаточен для определения $S_\Delta(Y; x)$.

6.6. Определяющие уравнения

Пусть функции $u_1(x), \ldots, u_{2n}(x)$ образуют на отрезке $[a, b]$ фундаментальное множество решений дифференциального уравнения $L^*Lf = 0$ и $u_j^{(\alpha)}(a) = \delta_{j\alpha+1}$ $(j = 1, 2, \ldots, 2n;\ \alpha = 0, 1, \ldots, 2n-1)$. Если задана сетка Δ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$, то на каждом интервале $x_{i-1} < x < x_i$ $(i = 1, \ldots, N)$ обобщенный сплайн $S_\Delta(x)$ имеет единственное представление

$$S_\Delta(x) = \sum_{j=1}^{2n} c_{ij} u_j(x). \tag{6.6.1}$$

Принимая во внимание требования интерполяции, непрерывности и краевые условия, получаем для определения $2nN$ коэффициентов c_{ij} систему $2nN$ линейных уравнений. Вопрос о существовании решения этой системы отложим до разд. 6.7, а здесь лишь выведем соответствующие уравнения для ряда важных случаев.

Для того чтобы получить из уравнений (5.7.4) и (5.7.3) соответствующие уравнения для периодических обобщенных сплайнов и обобщенных сплайнов типа I дефекта k, необходимо произвести следующие изменения.

(1) Равенство (5.7.4.1) записать в точке x_i, а не h_i.

(2) Равенство (5.7.3.7) записать в точке x_N, а не h_N.

(3) Равенство (5.7.4.2) заменить равенством

$$B_n = \begin{bmatrix} u_1(x_i) & u_2(x_i) & \ldots & u_{2n}(x_i) \\ u_1'(x_i) & u_2'(x_i) & \ldots & u_{2n}'(x_i) \\ \ldots & & & \ldots \\ u_1^{(k-1)}(x_i) & u_2^{(k-1)}(x_i) & \ldots & u_{2n}^{(k-1)}(x_i) \\ u_1(x_i) & u_2(x_i) & \ldots & u_{2n}(x_i) \\ \ldots & & & \ldots \\ u_1^{(2n-k-1)}(x_i) & u_2^{(2n-k-1)}(x_i) & \ldots & u_{2n}^{(2n-k-1)}(x_i) \end{bmatrix}. \tag{6.6.2.1}$$

В случае обобщенных сплайнов типа II необходимо произвести изменения (1) и (3) и заменить равенства (5.7.3.6) и (5.7.3.8) равенствами

$$C_{0n}^{\mathrm{II}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \{Lu_1\}_a & \{Lu_2\}_a & \ldots & \{Lu_{2n}\}_a \\ \{Lu_1\}_a' & \{Lu_2\}_a' & \ldots & \{Lu_{2n}\}_a' \\ \ldots & & & \ldots \\ \ldots & & & \ldots \\ \{Lu_1\}_a^{(n-2)} & \{Lu_2\}_a^{(n-2)} & \ldots & \{Lu_{2n}\}_a^{(n-2)} \end{bmatrix} \tag{6.6.2.2}$$

и

$$C_{1n}^{\mathrm{II}}=\begin{bmatrix} u_1(b) & u_2(b) & \dots & u_{2n}(b) \\ \{Lu_1\}_b & \{Lu_2\}_b & \dots & \{Lu_{2n}\}_b \\ \{Lu_1\}'_b & \{Lu_2\}'_b & \dots & \{Lu_{2n}\}'_b \\ \dots & & & \dots \\ \dots & & & \dots \\ \{Lu_1\}_b^{(n-2)} & \{Lu_2\}_b^{(n-2)} & \dots & \{Lu_{2n}\}_b^{(n-2)} \end{bmatrix}. \qquad (6.6.2.3)$$

Для обобщенных сплайнов типа k надо проделать то же, что для сплайнов типа II, но только равенства (5.6.2.2) и (5.6.2.3) заменить равенствами

$$C_{0n}^{k}=\begin{bmatrix} \overbrace{1} & \overbrace{0} & \overbrace{0 \dots} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \dots & 0 \\ & \dots & & \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ \{Lu_1\}_a & \{Lu_2\}_a & \dots & \{Lu_{2n}\}_a \\ \{Lu_1\}'_a & \{Lu_2\}'_a & \dots & \{Lu_{2n}\}'_a \\ \dots & \dots & & \dots \\ \{Lu_1\}_a^{(n-k-1)} & \{Lu_2\}_a^{(n-k-1)} & 0 \dots & \{Lu_{2n}\}_a^{(n-k-1)} \end{bmatrix} \qquad (6.6.2.4)$$

(k над первыми двумя столбцами)

и

$$C_{1n}^{k}=\begin{bmatrix} u_1(b) & u_2(b) & \dots & u_{2n}(b) \\ u'_1(b) & u'_2(b) & \dots & u'_{2n}(b) \\ \dots & & & \dots \\ u_1^{(k-1)}(b) & u_2^{(k-1)}(b) & \dots & u_{2n}^{(k-1)}(b) \\ \{Lu_2\}'_b & \{Lu_2\}'_b & \dots & \{Lu_{2n}\}'_b \\ \dots & & & \dots \\ \{Lu_1\}_b^{(n-k-1)} & \{Lu_2\}_b^{(n-k-1)} & \dots & \{Lu_{2n}\}_b^{(n-k-1)} \end{bmatrix}. \qquad (6.6.2.5)$$

В формулах (6.6.2.2)—(6.6.2.5) через $\{Lv\}_c^{(\alpha)}$ обозначена α-я производная в точке $x=c$. Поскольку коэффициенты линейного дифференциального оператора L, вообще говоря, непостоянны, мы должны вычислять функции $u_j(x)$ в точках x_i, а не h_i, ибо в общем случае функция $u_j(x-a)$ не есть решение уравнения $Lf=0$ даже тогда, когда $u_j(x)$ является решением.

Гетерогенные сплайны могут быть различного характера и требуют индивидуального подхода. Однако следует отметить, что в каждом внутреннем узле сетки производные $S_\Delta^{(\alpha)}(x)$ ($\alpha=0, 1, \dots, n-1$) непрерывны. Кроме того, в этих узлах либо заданы производные $S_\Delta^{(\alpha)}(x)$, либо предполагается непрерывность функции $\beta_\gamma(S_\Delta; x)$ ($\alpha=0, 1, \dots, n-1$; $\alpha+\gamma=n-1$).

Эти условия дают $2n(N-1)$ линейных уравнений. В точках $x=a$ и $x=b$ либо задаются значения производных $S_\Delta^{(\alpha)}(x)$, либо предполагается, что функция $\beta_\gamma(S_\Delta; x)$ в этих точках обращается в нуль ($\alpha=0, 1, \ldots, n-1$; $\alpha+\gamma=n-1$). Это дает еще $2n$ уравнений, так что всего получается $2nN$ уравнений; как раз столько же и неизвестных коэффициентов c_{ij}. При выводе системы уравнений, связанной с гетерогенными сплайнами, следует помнить, что $\beta_\gamma(S_\Delta; x)$ линейно зависит от $S_\Delta(x)$, т. е.

$$\beta_\gamma(S_\Delta; x)=\sum_{j=1}^{2n} c_{ij}\beta_\gamma(u_j; x) \qquad (x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i). \tag{6.6.3}$$

6.7. Существование

Теперь уже мы подготовлены к тому, чтобы применить проведенный в трех предыдущих разделах анализ и доказать существование обобщенных сплайнов. Доказательство проходит по той же схеме, что и соответствующие доказательства в гл. III и V.

Теорема 6.7.1. *Пусть даны сетка* Δ: $a=x_0<x_1<\ldots<x_N=b$ *и вектор* $Y\equiv\{y_{i\alpha}\mid i=0, 1, \ldots, N;\ \alpha=0, 1, \ldots, k-1\}$. *Пусть оператор* L *и сетка* Δ *таковы, что если* $Lg\equiv\Delta$ *и* $g^{(\alpha)}(x_i)=0$ $(i=0, 1, \ldots, N;\ \alpha=0, 1, \ldots, k-1)$, *то* $g(x)\equiv 0$. *Тогда существуют обобщенный сплайн* $S_\Delta(Y; x)$ *типа* k *на* Δ, *удовлетворяющий условиям* $S_\Delta^{(\alpha)}(Y; x_i)=y_{i\alpha}$ $(i=0, 1, \ldots, N;\ \alpha=0, 1, \ldots, k-1)$, *и периодический обобщенный сплайн.*

Доказательство. В силу теоремы 6.4.1 если сплайн $S_\Delta(Y; x)$ существует, то он единствен. Кроме того, в разд. 6.6 мы видели, что $S_\Delta(x)$ можно найти из системы линейных уравнений

$$AC=Y, \tag{6.7.1}$$

где C — вектор коэффициентов c_{ij}, A — матрица и Y — заданный вектор. Так как два различных множества коэффициентов c_{ij} определяют два различных сплайна, то уравнение $AC=0$ имеет единственное решение и, следовательно, обратная матрица A^{-1} существует. Теорема доказана.

Аналогично доказывается существование гетерогенных сплайнов.

Теорема 6.7.2. *Пусть даны сетка* Δ: $a=x_0<x_1<\ldots<x_N=b$ *и вектор* $Y\equiv\{y_{i\alpha}\}$, *где совокупность значений* α_i *составляет некоторое подмножество множества* $0, 1, \ldots, n-1$, *а совокупность значений* i *составляет подмножество множества* $0, 1, \ldots, N$, *которое меняется вместе с* i. *Пусть оператор* L *и сетка* Δ *таковы, что если* $Lg\equiv 0$ *и* $g^{(\alpha)}(x_i)=0$ *для всех допустимых значений* i *и* α_i, *то* $g(x)\equiv 0$. *Тогда существует гетерогенный сплайн* $S_\Delta(Y; x)$, *удовлетворяющий условиям* $S_\Delta^{(\alpha_i)}(Y; x_i)=y_{i\alpha_i}$ *для всех допустимых значений* i *и* α_i, *если только вектор* Y *достаточен для определения* $S_\Delta(Y; x)$.

Доказательство существования опирается на установленную ранее единственность. Вопросы единственности в свою очередь связаны с вопросом о том, как часто решение f уравнения $L^*Ly = 0$ и производные этого решения могут обращаться в нуль на $[a, b]$, не обращаясь в нуль тождественно. Для специальных дифференциальных операторов L, таких, как $L = D^n$, на этот вопрос можно дать вполне определенный ответ. В общем случае ситуация менее определенная. Однако известны два основных результата, доказательства которых очевидны и потому мы их не приводим. Первый результат состоит в том, что для каждого оператора L существует свое максимальное число, характеризующее, сколько раз решение уравнения $L^*Ly = 0$ и определенные его производные могут обращаться в нуль, не обращаясь в нуль тождественно. К сожалению, точно это максимальное число неизвестно. Второй результат таков: в любом достаточно малом интервале $2n$ независимых нулевых интерполяционных условий на функцию $y(x)$ и на определенные ее производные вынуждают ее обратиться в нуль тождественно; максимальная длина такого интервала также неизвестна.

6.8. Наилучшее приближение

Как обобщенные сплайны типа k, так и гетерогенные сплайны зависят линейно от своих определяющих значений. Таким образом, в обоих случаях

$$S_\Delta(f - g;\ x) = S_\Delta(f;\ x) - S_\Delta(g;\ x).$$

Пусть даны сетка Δ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ и функция $f(x)$ из класса $\mathscr{K}^n(a, b)$. Для любого сплайна $S_\Delta(x)$ на Δ

$$S_\Delta(f - S_\Delta;\ x) = S_\Delta(f;\ x) - S_\Delta(S_\Delta;\ x) = \\ = S_\Delta(f;\ x) - S_\Delta(x)$$

при условии, что определяющие значения сплайнов $S_\Delta(f;\ x)$, $S_\Delta(S_\Delta;\ x)$ и $S_\Delta(f - S_\Delta;\ x)$ равны соответственно значениям функций $f(x)$, $S_\Delta(x)$ и $f(x) - S_\Delta(x)$ в узлах сетки; при этом требования непрерывности также должны быть совместными. В силу свойства минимальной нормы

$$\|f - S_\Delta\|^2 - \|S_{\Delta,\, f-S_\Delta}\|^2 = \|f - S_\Delta - S_{\Delta,\, f-S_\Delta}\|^2,$$

или

$$\|f - S_\Delta\|^2 - \|S_{\Delta,\, f} - S_\Delta\|^2 = \|f - S_\Delta - S_{\Delta,\, f} + S_\Delta\|^2,$$

откуда

$$\|f - S_\Delta\| \geqslant \|f - S_{\Delta,\, f}\|.$$

Это доказывает следующую теорему.

Теорема 6.8.1. *Пусть даны сетка* Δ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ *и функция* $f(x)$ *из класса* $\mathscr{K}^n(a, b)$. *Среди всех обобщенных сплайнов* $S_\Delta(x)$ *типа* k *на* Δ *интерполяционный сплайн* $S_\Delta(f;\ x)$, *для которого* $S_\Delta^{(\alpha)}(f;\ x_i) = f^{(\alpha)}(x_i)$ $(i = 0, 1, \ldots, N;\ \alpha = 0, 1, \ldots, k - 1)$, *если он существует*,

минимизирует интеграл

$$\int_a^b \{Lf(x) - LS_\Delta(x)\}^2\,dx. \qquad (6.8.1)$$

Если сплайн $S_\Delta(x)$ *также минимизирует интеграл* (6.8.1), *то* $S_\Delta(x)$ *и* $S_\Delta(f; x)$ *отличаются на решение уравнения* $Ly = 0$. *Далее, если функция* $f(x)$ *и сплайн* $S_\Delta(x)$ *периодические, то интерполяционный сплайн типа* k *также минимизирует интеграл* (6.8.1) *и он является единственным с точностью до периодического решения уравнения* $Ly = 0$.

Справедлива также

Теорема 6.8.2. *Пусть даны сетка* Δ: $a = x_0 < \ldots < x_N = b$ *и функция* $f(x)$ *из класса* $\mathfrak{K}^n(a, b)$. *Среди всех обобщенных гетерогенных сплайнов* $S_\Delta(x)$ *на* Δ, *определенных заданными условиями непрерывности и заданными определяющими значениями* $S_\Delta^{(\alpha_i)}(x_i)$, *где совокупность значений* i *составляет некоторое подмножество множества* $0, 1, \ldots, N$, *а совокупность значений* α_i *составляет подмножество множества* $0, 1, \ldots, n-1$, *которое меняется вместе с* i, *интерполяционный сплайн* $S_\Delta(f; x)$, *удовлетворяющий условиям* $S_\Delta^{(\alpha_i)}(f; x_i) = f(x_i)^{(\alpha_i)}$ *для всех допустимых значений* i *и* α_i (*если только эти условия достаточны для его определения*), *если он существует, минимизирует интеграл* (6.8.1). *Если сплайн* $S_\Delta(x)$ *также минимизирует* (6.8.1), *то* $S_\Delta(x)$ *и* $S_\Delta(f; x)$ *отличаются на решение уравнения* $Ly = 0$.

6.9. Сходимость производных низших порядков

При обсуждении сходимости мы ограничимся обобщенными сплайнами типа k. Укажем, однако, что и у периодического обобщенного сплайна типа k, обобщенного сплайна типа I дефекта k и обобщенного сплайна типа II дефекта k также есть регулярно расположенные точки, в которых сплайн и его производные интерполируют значения функции $f(x)$ и соответствующих ее производных. Поэтому здесь, как и в разд. 5.9, применима теорема Ролля и, следовательно, для перечисленных сплайнов можно получить аналогичные свойства сходимости. Мы сформулируем соответствующие теоремы, но значительную часть обсуждений и доказательств проведем только для сплайнов типа k. Гетерогенные сплайны, которые мы рассматриваем, имеют иррегулярности в свойствах интерполяции и непрерывности, связанные с начальной сеткой данной последовательности сеток $\{\Delta_N\}$ $(N = 1, 2, \ldots)$; мы будем предполагать, что $\Delta_1 \subseteq \Delta_N$ $(N = 1, 2, \ldots)$. Упрощения можно достичь за счет требования, чтобы в узлах сетки Δ_N, не принадлежащих Δ_1, выполнялось условие $S_{\Delta_N}(f; x) = f(x)$ и сплайн $S_{\Delta_N}(f; x)$ имел в этих узлах дефект 1 (разд. 1.2). В этом разделе сходимость доказывается так же, как в разд. 5.9, с одним лишь важным исключением, относящимся к применению неравенства Минковского.

Пусть даны функция $f(x)$ из класса $\mathscr{K}^n(a, b)$ и последовательность обобщенных сплайнов $\{S_{\Delta_N}(f; x)\}$ $(N = 1, 2, \ldots)$ типа k. Если $\{\Delta_N: a = x_0^N < x_0^N < x_1^N < \ldots < x_{m_N}^N = b\}$ — соответствующая последовательность сеток, то $S_{\Delta_N}^{(\alpha)}(f; x_i^N) = f^{(\alpha)}(x_i^N)$ $(i = 0, 1, \ldots, m_N; \alpha = 0, 1, \ldots, k-1)$. Многократно применяя теорему Ролля, получаем, что $S_{\Delta_N}^{(\alpha)}(f; x)$ интерполирует $f^{(\alpha)}(x)$ при $\alpha \geqslant 2k$ по крайней мере один раз в каждых $\alpha - 2k + 2$ последовательных интервалах сетки и при $0 \leqslant \alpha \leqslant 2k-1$ по крайней мере один раз в каждом интервале сетки. Следовательно, для каждой точки x из $[a, b]$ можно найти такую точку $x_{\alpha N}$, что $S_{\Delta_N}^{(\alpha)}(f; x_{\alpha N}) = f^{(\alpha)}(x_{\alpha N})$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant n)$ и $|x - x_{\alpha N}| \leqslant K_\alpha \|\Delta_N\|$, где $K_\alpha = \alpha - 2k + 2$, если $2k \leqslant \alpha \leqslant n-1$, и $K_\alpha = 1$, если $0 \leqslant \alpha \leqslant \min(2k, n-1)$. Кроме того, если x не совпадает ни с a, ни с b и N достаточно велико, то узлы интерполяции лежат по обе стороны от x, и тогда $K_\alpha = (\alpha - 2k + 2)/2$ при $2k \leqslant \alpha \leqslant n-1$. Таким образом,

$$|f^{(n-1)}(x) - S_{\Delta_N}^{(n-1)}(f; x)| \leqslant \left| \int_{x_{n-1N}}^{x} \{f^{(n)}(x) - S_{\Delta_N}^{(n)}(f; x)\}\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant J K_{n-1}^{1/2} \|\Delta_N\|^{1/2}, \tag{6.9.1.1}$$

$$J^2 = \int_a^b \{f^{(n)}(x) - S_{\Delta_N}^{(n)}(f; x)\}^2\, dx. \tag{6.9.1.2}$$

Здесь, как и в предыдущих главах, мы использовали неравенство Буняковского — Шварца. Повторим этот процесс для $\alpha = n-2$, но вместо неравенства Буняковского — Шварца применим неравенство (6.9.1). Тогда получим

$$|f^{(n-2)}(x) - S_{\Delta_N}^{(n-2)}(f; x)| \leqslant J \{K_{n-1}\}^{1/2} K_{n-2} \|\Delta_N\|^{3/2}, \tag{6.9.2}$$

а в общем случае

$$|f^{(\alpha)}(x) - S_{\Delta_N}^{(\alpha)}(f; x)| \leqslant J \{K_{n-1}\}^{1/2} K_{n-2} \ldots K_\alpha \|\Delta_N\|^{(2n-2\alpha-1)/2}$$

$$(\alpha = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{6.9.3}$$

С помощью неравенства (6 9.3) оценим величину J сверху и в свою очередь подставим эту оценку в (6.9.3). Тем самым докажем равномерную сходимость функций $S_{\Delta_N}^{(\alpha)}(f; x)$ к $f^{(\alpha)}(x)$ $(\alpha = 0, 1, \ldots, n-1)$ для $x \in [a, b]$.

По определению

$$L\{f(x) - S_{\Delta_N}(f; x)\} \equiv a_n(x) D^n \{f(x) - S_{\Delta_N}(f; x)\} +$$

$$+ a_{n-1}(x) D^{n-1} \{f(x) - S_{\Delta_N}(f; x)\} + \ldots + a_0(x) \{f(x) - S_{\Delta_N}(f; x)\}, \tag{6.9.4}$$

а в силу неравенства Минковского

$$\left\{ \int_a^b [a_n(x) D^n \{f(x) - S_{\Delta_N}(f; x)\}]^2\, dx \right\}^{1/2} \leqslant \left\{ \int_a^b [L\{f(x) - S_{\Delta_N}(f; x)\}]^2\, dx \right\}^{1/2} +$$

$$+\left\{\int_a^b [a_{n-1}(x)\,D^{n-1}\{f(x)-S_{\Delta_N}(f;\,x)\}]^2\,dx\right\}^{1/2}+\ldots$$

$$\ldots+\left\{\int_a^b [a_0(x)\{f(x)-S_{\Delta_N}(f;\,x)]^2\,dx\right\}^{1/2}. \qquad (6.9.5)$$

Перенесем часть членов налево и воспользуемся неравенством (6.9.3):

$$K^{-1}J\leqslant\left\{\int_a^b \{Lf(x)-LS_{\Delta_N}(f;\,x)\}^2\,dx\right\}^{1/2}, \qquad (6.9.6.1)$$

где

$$K^{-1}=\inf_{a\leqslant x\leqslant b}|a_n(x)|-$$

$$-\sum_{j=0}^{n-1}[(b-a)^{1/2}\sup_{a\leqslant x\leqslant b}|a_j(x)|\{K_{n-1}\}^{1/2}K_{n-2}\ldots K_j\|\Delta_N\|^{(2n-2j-1)/2}]. \qquad (6.9.6.2)$$

Так как $a_n(x)\neq 0$ и коэффициенты $a_j(x)$ $(j=0,\,1,\,\ldots,\,n)$ непрерывны на отрезке $[a,\,b]$, то при достаточно малом значении $\|\Delta_N\|$ константа K положительна и ограничена. Таким образом, если выполняется свойство минимальной нормы или свойство наилучшего приближения и $\Delta_1\subseteq\Delta_N$ $(N\geqslant 1)$, то константа J ограничена. Отсюда вытекает справедливость следующих двух теорем.

Теорема 6.9.1. *Пусть даны функция $f(x)$ из класса $\mathscr{K}^n(a,\,b)$ и последовательность сеток $\{\Delta_N\colon a=x_0^N<x_1^N<\ldots<x_{m_N}^N=b\}$ $(N=1,\,2,\,\ldots)$, $\|\Delta_N\|\to 0$ при $N\to\infty$. Если последовательность обобщенных сплайнов $\{S_{\Delta_N}(f;\,x)\}$ $(N=1,\,2,\,\ldots)$ дефекта k такова, что*

$$S_{\Delta_N}^{(\alpha)}(f;\,x_i^N)=f^{(\alpha)}(x_i^N)\ (\alpha=0,\,1,\,\ldots,\,k-1;\ i=1,\,2,\,\ldots,\,m_N-1),$$

и выполнено одно из условий: a) *все сплайны $S_{\Delta_N}(f;\,x)$ принадлежат типу k*, b) *функция $f(x)$ принадлежит классу $\mathscr{K}_p^n(a,\,b)$, $S_{\Delta_N}^{(\alpha)}(f;\,x_i^N)=f^{(\alpha)}(x_i^N)$ $(\alpha=0,\,1,\,\ldots,\,k-1;\ i=0)$ и все сплайны $S_{\Delta_N}(f;\,x)$ периодические*, c) *разность $f(x)-S_{\Delta_N}(f;\,x)$ обращается в нуль при $x=a$ и $x=b$ и принадлежит типу* I′ $(N=1,\,2,\,\ldots)$, d) *разность $f(x)-S_{\Delta_N}(f;\,x)$ обращается в нуль при $x=a$ и $x=b$, $\Delta_1\subseteq\Delta_N$ $(N\geqslant 1)$ и $S_{\Delta_1}(f;\,x)-S_{\Delta_N}(f;\,x)$ принадлежит типу* II′ $(N=1,\,2,\,\ldots)$, *то для $\alpha=0,\,1,\,\ldots,\,n-1$ последовательность $\{S_{\Delta_N}^{(\alpha)}(f;\,x)\}$ сходится равномерно на $[a,\,b]$ к $f^{(\alpha)}(x)$ и*

$$|f^{(\alpha)}(x)-S_{\Delta_N}^{(\alpha)}(f;\,x)|=O(\|\Delta_N\|^{(2n-2\alpha-1)/2}). \qquad (6.9.7)$$

Теорема 6.9.2. *Пусть даны функция $f(x)$ из класса $\mathscr{K}^n(a,\,b)$ и последовательность сеток $\{\Delta_N\colon a=x_0^N<x_1^N<\ldots<x_{m_N}^N=b\}$ $(N=1,\,2,\,\ldots)$, $\|\Delta_N\|\to 0$*

при $N \to \infty$, $\Delta_1 \subseteq \Delta_N$ $(N \geqslant 1)$. *Пусть последовательность обобщенных гетерогенных сплайнов* $\{S_{\Delta_N}(f; x)\}$ $(N = 1, 2, \ldots)$ *такова, что сплайн* $S_{\Delta_N}(f; x)$ *имеет дефект* 1 *в каждом узле сетки* Δ_N, *не принадлежащем* Δ_1, *и интерполирует функцию* $f(x)$ *в этих точках. Пусть для каждого значения* i *из некоторого подмножества множества* $0, 1, \ldots, m_1$ *и для значений* α_i *из подмножества множества* $0, 1, \ldots, n-1$, *зависящих от* i, *но не зависящих от* N, *выполняются условия* $S^{(\alpha_i)}_{\Delta_N}(f; x_i^1) = f^{(\alpha_i)}(x_i^1)$. *Пусть эти интерполяционные условия достаточны для определения каждого сплайна* $S_{\Delta_N}(f; x)$. *Тогда для* $\alpha = 0, 1, \ldots, n-1$ *последовательность* $S^{(\alpha_i)}_{\Delta_N}(f; x)$ *сходится равномерно на* $[a, b]$ *к* $f^{(\alpha)}(x)$ *и справедливо равенство* (6.9.7).

6.10. Второе интегральное соотношение

При выводе первого интегрального соотношения мы пользовались тождеством

$$\{Lu(x)\}\, v(x) = \left(\frac{d}{dx}\right) P[u(x),\ v(x)] + u(x)\,\{L^* v(x)\}, \qquad (6.10.1)$$

связывающим линейный дифференциальный оператор L и его формально сопряженный L^*. Пусть даны сетка Δ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ и функция $f(x)$ из класса $\mathcal{K}^{2n}(a, b)$. Положим $u(x) = f(x) - S_\Delta(x)$ и $v(x) = Lf(x) - LS_\Delta(x)$, где $S_\Delta(x)$ — обобщенный сплайн на Δ, соответствующий оператору L. Тогда

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \{Lf(x) - LS_\Delta(x)\}^2\, dx = P[f(x) - S_\Delta(x),\ Lf(x) - LS_\Delta(x)]\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} +$$

$$+ \int_{x_{i-1}}^{x_i} \{f(x) - S_\Delta(x)\}\, L^* Lf(x)\, dx \quad (i = 1, 2, \ldots, N). \qquad (6.10.2)$$

Обозначим

$$\beta_r(f - S_\Delta; x) = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j [a_{n-r+j}(x)\{Lf(x) - LS_\Delta(x)\}]^{(j)} \qquad (r = 0, 1, \ldots, n-1); \qquad (6.10.3)$$

тогда $P[f(x) - S_\Delta(x),\ Lf(x) - LS_\Delta(x)]$ можно записать в виде

$$P[f(x) - S_\Delta(x),\ Lf(x) - LS_\Delta(x)] = \sum_{j=0}^{n-1} \{f(x) - S_\Delta(x)\}^{(n-j-1)} \beta_j(f - S_\Delta; x). \qquad (6.10.4)$$

Эта формула вытекает из (6.2.2), и обозначение, принятое в ней, согласуется с обозначениями в разд. 6.3. Из (6.10.2) и (6.10.4) следует, что

$$\int_a^b \{Lf(x) - LS_\Delta(x)\}^2\,dx = \sum_{i=1}^{N}\Big[\sum_{j=0}^{n-1}\{f(x)-S_\Delta(x)\}^{(n-j-1)}\beta_j(f-S_\Delta;\,x)\Big]\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} + \\ + \int_a^b \{f(x)-S_\Delta(x)\}\,L^*Lf(x)\,dx. \tag{6.10.5}$$

Если сумма

$$\sum_{i=1}^{N}\Big[\sum_{j=0}^{n-1}\{f(x)-S_\Delta(x)\}^{(n-j-1)}\beta_j(f-S_\Delta;\,x)\Big]\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} \tag{6.10.6}$$

обращается в нуль, то из (6.10.5) получаем соотношение

$$\int_a^b \{Lf(x) - LS_\Delta(x)\}^2\,dx = \int_a^b \{f(x)-S_\Delta(x)\}\,L^*Lf(x)\,dx, \tag{6.10.7}$$

называемое *вторым интегральным соотношением* для обобщенных сплайнов. Если $S_\Delta^{(\alpha)}(x_i) = f^{(\alpha)}(x_i)$ $(0 \leqslant \alpha < n)$ во внутреннем узле x_i сетки, то соответствующий член в сумме (6.10.6) в точке x_i равен нулю. С другой стороны, при $f^{(\alpha)}(x_i) \neq S_\Delta^{(\alpha)}(x_i)$ вклада в сумму в точке x_i также не будет, если

$$\lim_{x\to x_i+0}\beta_{n-\alpha-1}(f-S_\Delta;\,x) = \lim_{x\to x_i-0}\beta_{n-\alpha-1}(f-S_\Delta;\,x). \tag{6.10.8}$$

Если $f^{(\alpha)}(x) - S_\Delta^{(\alpha)}(x) \neq 0$ при $x=a$ и $x=b$, то для того чтобы не было вклада в сумму, мы требуем, чтобы в соответствующей точке функция $\beta_{n-\alpha-1}(f-S_\Delta;\,x)$ обращалась в нуль. Эти рассуждения доказывают следующие две теоремы.

Теорема 6.10.1. *Пусть даны сетка* Δ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ *и функция* $f(x)$ *из класса* $\mathscr{K}^{2n}(a, b)$. *Если обобщенный сплайн* $S_\Delta(f;\,x)$ *на* Δ *дефекта* k *таков, что* $S_\Delta^{(\alpha)}(f;\,x_i) = f^{(\alpha)}(x_i)$ $(\alpha = 0, 1, \ldots, k-1;\ i = 1, 2, \ldots, N-1)$ *и выполнено одно из условий*: a) $S_\Delta^{(\alpha)}(f;\,x_i) = f^{(\alpha)}(x_i)$ $(\alpha = 0, 1, \ldots, k-1;\ i = 0, N)$ *и* $\{Lf(x_i) - LS_\Delta(f;\,x_i)\}^{(\alpha)} = 0$ $(\alpha = 0, 1, \ldots, n-k-1;\ i = 0, N)$, b) *функция* $f(x)$ *принадлежит классу* $\mathscr{K}_p^{2n}(a, b)$, *сплайн* $S_\Delta(f;\,x)$ *периодический и* $S_\Delta^{(\alpha)}(f;\,x_i) = f^{(\alpha)}(x_i)$ $(\alpha = 0, 1, \ldots, k-1;\ i = 0)$, c) *разность* $f(x) - S_\Delta(f,\,x)$ *обращается в нуль при* $x = a$ *и* $x = b$ *и принадлежит типу* I′, d) *разность* $f(x) - S_\Delta(f;\,x)$ *обращается в нуль при* $x = a$ *и* $x = b$ *и принадлежит типу* II′, *то*

$$\int_a^b \{Lf(x) - LS_\Delta(f;\,x)\}^2\,dx = \int_a^b \{f(x)-S_\Delta(f;\,x)\}\,L^*Lf(x)\,dx.$$

Теорема 6.10.2. *Пусть даны сетка* Δ: $a=x_0<x_1<\ldots<x_N=b$ *и функция* $f(x)$ *из класса* $\mathcal{K}^{2n}(a, b)$. *Пусть обобщенный гетерогенный сплайн* $S_\Delta(f; x)$ *на* Δ *удовлетворяет условию* $S_\Delta^{(\alpha_i)}(f; x_i)=f^{(\alpha_i)}(x_i)$, *когда совокупность значений* i *составляет некоторое подмножество множества* $0, 1, \ldots, N$ *и совокупность значений* α_i *составляет подмножество множества* $0, 1, \ldots, n-1$, *зависящее от* i, *и эти интерполяционные условия достаточны для определения сплайна* $S_\Delta(f; x)$. *Если* $S_\Delta^{(\alpha)}(f; x_i)\neq f^{(\alpha)}(x_i)$ *для некоторого* i $(i=0, 1, \ldots, N)$ *и некоторого* α $(\alpha=0, 1, \ldots, n-1)$, *положим,*

$$\lim_{x\to x_i+0}\beta_{n-\alpha-1}(f-S_\Delta; x)=\lim_{x\to x_i-0}\beta_{n-\alpha-1}(f-S_\Delta; x)$$

при $i\neq 0$, $i\neq N$ *и*

$$\beta_{n-\alpha-1}(f-S_\Delta; x_i)=0$$

при $i=0$ *или* $i=N$. *Тогда*

$$\int_a^b\{Lf(x)-LS_\Delta(f; x)\}^2\,dx=\int_a^b\{f(x\}-S_\Delta(f; x)\}\,L^*Lf(x)\,dx.$$

6.11. Улучшение оценки порядка сходимости

Для большинства интересующих нас обобщенных сплайнов из (6.9.1.2), (6.9.3) и (6.9.6) вытекает, что

$$|f^{(\alpha)}(x)-S_{\Delta_N}^{(\alpha)}(f; x)|\leqslant$$

$$\leqslant K\{K_{n-1}\}^{1/2}K_{n-2}\ldots K_\alpha\left\{\int_a^b[Lf(x)-LS_\Delta(f; x)]^2\,dx\right\}^{1/2}\|\Delta_N\|^{(2n-2\alpha-1)/2}$$

$$(\alpha=0, 1, \ldots, n-1). \qquad (6.11.1)$$

Условия, при которых выполняется неравенство (6.11.1), приведены в разд. 6.9, и там же указаны значения констант K и K_α $(\alpha=0, 1, \ldots, n-1)$. Неравенство (6.11.1) выполняется даже для гетерогенных сплайнов, если $\|\Delta_N\|$ умножить на соответствующую константу, но при условии, что точки иррегулярности в свойствах непрерывности и интерполяции содержатся лишь в ограниченном числе сеток из рассматриваемой последовательности. Если мы предположим, что справедливо неравенство (6.11.1) и второе интегральное соотношение, то те же рассуждения, что и в разд. 5.11, приведут к неравенству

$$\|f^{(\alpha)}-S_{\Delta_N, f}^{(\alpha)}\|_\infty\leqslant K^2K_{n-1}(K_{n-2}\ldots K_\alpha)^2K_{\alpha-1}\ldots K_0\bigvee_a^b[f]_L\,\|\Delta_N\|^{2n-1-\alpha}$$

$$(\alpha=0, 1, \ldots, n-1). \qquad (6.11.2)$$

Чтобы была видна аналогия с гл. V, в неравенстве (6.11.2) использовано обычное обозначение

$$\|f\|_\infty=\sup_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)| \qquad (6.11.3)$$

и специальное обозначение

$$\bigvee_a^b [f]_L = \int_a^b |L^*Lf(x)|\,dx. \tag{6.11.4}$$

Фактически мы доказали следующие две теоремы.

Теорема 6.11.1. *Пусть даны последовательность сеток* $\{\Delta_N\colon a = x_0^N < x_1^N < \ldots < x_{m_N}^N = b\}$ $(N = 1, 2, \ldots)$, $\|\Delta_N\| \to 0$ *при* $N \to \infty$, *и функция* $f(x)$ *из класса* $\mathscr{K}^{2n}(a, b)$. *Если последовательность обобщенных сплайнов* $\{S_{\Delta_N}(f; x)\}$ $(N = 1, 2, \ldots)$ *такова, что* $S^{(\alpha)}_{\Delta_N}(f; x_i) = f^{(\alpha)}(x_i)$ $(\alpha = 0, 1, \ldots, k-1;\ i = 1, 2, \ldots, m_N - 1)$ *и выполнено одно из условий*: a) *разность* $f(x) - S_{\Delta_N}(f; x)$ $(N = 1, 2, \ldots)$ *обращается в нуль при* $x = a$ *и* $x = b$ *и принадлежит типу* I′, b) *функция* $f(x)$ *принадлежит классу* $\mathscr{K}_p^{2n}(a, b)$, *сплайн* $S_{\Delta_N}(f; x)$ *периодический и* $f^{(\alpha)}(x_0^N) = S^{(\alpha)}_{\Delta_N}(f; x_0^N)$ $(\alpha = 0, 1, \ldots, k-1;$ $N = 1, 2, \ldots)$, c) *разность* $f(x) - S_{\Delta_N}(f; x)$ *обращается в нуль при* $x = a$ *и* $x = b$, *принадлежит типу* II′ *и* $\Delta_1 \subseteq \Delta_N$ $(N = 1, 2, \ldots)$, d) *функции* $f^{(\alpha)}(x) - S^{(\alpha)}_{\Delta_N}(f; x))$ $(\alpha = 0, 1, \ldots, k-1)$ *и* $(Lf(x) - LS_{\Delta_N}(f; x))^{(\alpha)}$ $(\alpha = 0, 1, \ldots, n-k-1)$ *обращаются в нуль при* $x = a$ *и* $x = b$ $(N = 1, 2, \ldots)$, *то равномерно по* x *на отрезке* $[a, b]$

$$f^{(\alpha)}(x) = S^{(\alpha)}_{\Delta_N}(f; x) + O(\|\Delta_N\|^{2n-1-\alpha}) \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Теорема 6.11.2. *Пусть даны функция* $f(x)$ *из класса* $\mathscr{K}^{2n}(a, b)$ *и последовательность сеток*

$$\{\Delta_N\colon a = x_0^N < x_1^N < \ldots < x_{m_N}^N = b\} \qquad (N = 1, 2, \ldots),$$

$$\|\Delta_N\| \to 0 \text{ при } N \to \infty \text{ и } \Delta_1 \subseteq \Delta_N \ (N \geqslant 1).$$

Пусть последовательность обобщенных гетерогенных сплайнов $\{S_{\Delta_N}(f; x)\}$ $(N = 1, 2, \ldots)$ *такова, что каждый гетерогенный сплайн* $S_{\Delta_N}(f; x)$ *имеет дефект* 1 *в каждом узле сетки* Δ_N, *не принадлежащем* Δ_1, *и интерполирует функцию* $f(x)$ *в этих узлах. Пусть для совокупности значений* i, *составляющей некоторое подмножество множества* $0, 1, \ldots, m_1$, *и для значений* α_i, *составляющих подмножество множества* $0, 1, \ldots, n-1$, *зависящее от* i, *но не зависящее от* N, *выполнено условие* $S^{(\alpha_i)}_{\Delta_N}(f; x_i^1) = f^{(\alpha_i)}(x_i^1)$. *Если в требованиях, налагаемых на гетерогенный сплайн, заменить* $\beta_r(S_{\Delta, f}; x)$ *на* $\beta_r(f - S_{\Delta, f}; x)$, *то*

$$f^{(\alpha)}(x) = S^{(\alpha)}_{\Delta_N}(f; x) + O(\|\Delta_N\|^{2n-1-\alpha}) \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, n-1)$$

равномерно относительно $x \in [a, b]$, *если только условия интерполяции достаточны для определения сплайна* $S_{\Delta_N}(f; x)$.

6.12. Сходимость производных высших порядков

Пусть даны сетка Δ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ и функция $f(x)$ из класса $\mathscr{K}^{2n}(a, b)$. Если обобщенный сплайн $S_\Delta(f; x)$ дефекта k вместе со своими первыми $k-1$ производными интерполирует на Δ функцию $f(x)$ и ее первые $k-1$ производных, то $S_\Delta^{(\alpha)}(f; x)$ интерполирует $f^{(\alpha)}(x)$ по крайней мере один раз в каждых $\alpha - 2k + 2$ последовательных интервалах сетки при $2k \leqslant \alpha \leqslant 2n - k - 1$ и один раз в каждом интервале при $0 \leqslant \alpha \leqslant 2k$. Таким образом,

$$|f^{(\alpha)}(x) - S_\Delta^{(\alpha)}(f; x)| \leqslant \left| \int_{x_{\alpha_i}}^{x} \{f^{(\alpha+1)}(x) - S_\Delta^{(\alpha+1)}(f; x)\}\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant K_\alpha \| f^{(\alpha+1)} - S_{\Delta, f}^{(\alpha+1)} \|_\infty \| \Delta \| \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, 2n-k-1), \tag{6.12.1}$$

где константа K_α определяется, как в разд. 6.9, но теперь для значений α вплоть до $2n - k - 1$, а x_{α_i} — подходящим образом выбранная точка, в которой $S_\Delta^{(\alpha)}(f; x)$ интерполирует $f^{(\alpha)}(x)$. Следовательно, если мы оценим сверху величину $\| f^{(\alpha+1)} - S_{\Delta, f}^{(\alpha+1)} \|_\infty$ независимо от $\| \Delta_N \|$, то будет доказана сходимость $S_\Delta^{(\alpha)}(f; x)$ к $f^{(\alpha)}(x)$ ($\alpha = 0, 1, \ldots, 2n - k - 1$) при $\| \Delta_N \| \to 0$.

Известно, что при $x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i$

$$S_\Delta(f; x) = \sum_{j=1}^{2n} c_{ij} u_j(x), \tag{6.12.2}$$

где функции $u_j(x)$ и коэффициенты c_{ij} определены в разд. 6.6. Если коэффициенты c_{ij} ограничены при $\| \Delta \| \to 0$, то величины $\| S_{\Delta, f}^{(\alpha)} \|_\infty$ ($\alpha = 0, 1, \ldots, 2n - k - 1$) также ограничены, а так как и $\| f^{(\alpha)} \|_\infty$ ($\alpha = 0, 1, \ldots, 2n - k - 1$) ограничены, то отсюда следует нужная нам сходимость. Для доказательства ограниченности коэффициентов c_{ij} воспользуемся методами разд. 5.12. Для некоторой точки x_{α_i} из отрезка $[x_{i-1}, x_i]$

$$\delta_{S_{\Delta, f}}^{\alpha}[x_{i-1}, x_i] = S_\Delta^{(\alpha)}(f; x_{\alpha_i}). \tag{6.12.3}$$

Более того, в разд. 6.11 было показано, что

$$\| f - S_{\Delta, f} \|_\infty \leqslant B_0 \bigvee_a^b [f]_L \| \Delta_N \|^{2n-1}, \tag{6.12.4}$$

где $B_0 = K \{K_{n-1}\}^{1/2} K_{n-2} \ldots K_0$. В силу (6.12.2) и (6.12.3)

$$\delta_{S_{\Delta, f}}^{\alpha}[x_{i-1}, x_i] = \sum_{j=1}^{2n} c_{ij} u_j^{(\alpha)}(x_{\alpha_i}) \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, 2n-1;\ i = 1, 2, \ldots, N). \tag{6.12.5}$$

Оценим левую часть равенства (6.12.5):

$$|\delta_{S_{\Delta, f}}^{\alpha}[x_{i-1}, x_i]| \leqslant \{2\alpha R_\Delta\}^\alpha B_0 \bigvee_a^b [f]_L \| \Delta \|^{2n-\alpha-1} + |\delta_f^\alpha[x_{i-1}, x_i]|$$

$$(i = 1, 2, \ldots, N;\ \alpha = 0, 1, \ldots, 2n-1), \tag{6.12.6.1}$$

где

$$R_\Delta = \max_i \frac{\|\Delta\|}{|x_i - x_{i-1}|}. \qquad (6.12.6.2)$$

Величины

$$\max_{j,\,i} |u_j^{(\alpha)}(x_i) - u_j^{(\alpha)}(x_{\alpha_i})| \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, 2n-1)$$

при $\|\Delta\| \to 0$ стремятся к нулю равномерно как относительно номера, так и относительно положения отрезка $[x_{i-1}, x_i]$. Так как функции $u_j(x)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения $L^*Lf = 0$, то коэффициенты c_{ij} ограничены, если только ограничены величины R_Δ.

Теорема 6.12.1. *Пусть даны функция $f(x)$ из класса $\mathcal{K}^{2n}(a, b)$, последовательность сеток Δ_N: $a = x_0^N < x_1^N < \ldots < x_{m_N}^N = b$ $(N = 1, 2, \ldots)$, $\|\Delta_N\| \to 0$ при $N \to \infty$, и последовательность обобщенных сплайнов $\{S_{\Delta_N}(f; x)\}$ $(N = 1, 2, \ldots)$ дефекта k. Если $S_{\Delta_N}^{(\alpha)}(f; x_i^N) = f^{(\alpha)}(x_i^N)$ $(\alpha = 0, 1, \ldots, k-1;\ i = 1, 2, \ldots, m_N - 1)$ и выполнено одно из условий:* a) $S_{\Delta_N}^{(\alpha)}(f; x_i^N) = f^{(\alpha)}(x_i^N)$ $(\alpha = 0, 1, \ldots, k-1;\ i = 0, m_N)$, $\{LS_{\Delta_N}(f; x_i^N) - Lf(x_i^N)\}^{(\alpha)} = 0$ $(\alpha = 0, 1, \ldots, n-k-1;\ i = 0, m_N)$ *и* $\Delta_1 \subseteqq \Delta_N$ $(N = 1, 2, \ldots)$, b) *функция $f(x)$ принадлежит классу $\mathcal{K}_p^{2n}(a, b)$, $S_{\Delta_N}^{(\alpha)}(f; x_i^N) = f^{(\alpha)}(x_i^N)$ $(\alpha = 0, 1, \ldots, k-1;\ i = 0; N = 1, 2, \ldots)$ и каждый сплайн $S_{\Delta_N}(f; x)$ периодический,* c) *разность $f(x) - S_{\Delta_N}(f; x)$ обращается в нуль при $x = a$ и $x = b$ и принадлежит типу* I′ $(N = 1, 2, \ldots)$, d) *разность $f(x) - S_{\Delta_N}(f; x)$ обращается в нуль при $x = a$ и $x = b$ и принадлежит типу* II′ *и* $\Delta_1 \subseteqq \Delta_N$ $(N = 1, 2, \ldots)$, *то последовательность $\{S_{\Delta_N}^{(\alpha)}(f; x)\}$ сходится разномерно на $[a, b]$ к функции $f^{(\alpha)}(x)$ $(\alpha = 0, 1, \ldots, 2n-k-1)$ и $f^{(\alpha)}(x) = S_{\Delta_N}^{(\alpha)}(f; x) + O(\|\Delta_N\|^{2n-\alpha-k})$, при условии, что величины R_{Δ_N}, определенные равенством* (6.12.6.2), *ограничены.*

Теорема 6.12.2. *Пусть даны функция $f(x)$ из класса $\mathcal{K}^{2n}(a, b)$, последовательность сеток Δ_N: $a = x_0^N < x_1^N < \ldots < x_{m_N}^N = b$, $N = 1, 2, \ldots$, $\|\Delta_N\| \to 0$ при $N \to \infty$, и последовательность обобщенных гетерогенных сплайнов $\{S_{\Delta_N}(f; x)\}$ $(N = 1, 2, \ldots)$. Пусть сплайн $S_{\Delta_N}(f; x)$ имеет дефект 1 в каждом узле сетки Δ_N, не принадлежащем Δ_1, и интерполирует функцию $f(x)$ в этих узлах. Пусть для совокупности значений α_i, составляющих некоторое подмножество множества $0, 1, \ldots, n-1$, зависящее от i, но не зависящее от N, выполнено условие $S_{\Delta_N}^{(\alpha_i)}(f; x_i^1) = f^{(\alpha)}(x_i^1)$. Если в требованиях на гетерогенные сплайны заменить $\beta_r(S_{\Delta, f}; x)$ на $\beta_r(f - S_{\Delta, f}; x)$, то равномерно по x на отрезке $[a, b]$*

$$f^{(\alpha)}(x) = S_{\Delta_N}^{(\alpha)}(f; x) + O(\|\Delta_N\|^{2n-\alpha-1}) \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, 2n-2), \qquad (6.12.7)$$

если только величины R_{Δ_N} ограничены и интерполяционные условия достаточны для определения сплайна $S_{\Delta_N}(f; x)$.

Замечание 6.12.1. Если $S^{(\alpha)}_{\Delta_N}(f; x_i^N) = f^{(\alpha)}(x_i^N)$ $(\alpha = 0, 1, \ldots, k-1)$ в узлах сетки, не принадлежащих Δ_1, и каждый сплайн $S_{\Delta_N}(f; x)$ имеет дефект k в этих узлах, то равенство (6.12.7) справедливо для $\alpha = 0, 1, \ldots, 2n-k-1$, по показатель $2n-\alpha-1$ надо заменить на $2n-\alpha-k$.

Слегка изменив рассуждения, использованные при доказательстве двух предыдущих теорем, можно доказать следующую теорему.

Теорема 6.12.3. *Если выполнены условия теоремы* 6.12.1 *или* 6.12.2, *то равномерно относительно x на $[a, b]$*

$$\lim_{N\to\infty} S^{(\alpha)}_{\Delta_N}(f; x) = f^{(\alpha)}(x) \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, 2n-2). \tag{6.12.8}$$

Доказательство. В самом деле,

$$\delta^{\alpha}_{S_{\Delta_N, f}}[x_{i-1}^N, x_i^N] = \delta^{\alpha}_f[x_{i-1}^N, x_i^N] + O(\|\Delta_N\|^{2n-\alpha-1}) \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, 2n-1). \tag{6.12.9}$$

Далее, в силу ограниченности коэффициентов c_{ij} относительно N производные $S^{(\alpha)}_{\Delta_N}(f; x)$ $(\alpha = 0, 1, \ldots, 2n-2)$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны на интервалах сетки (в качестве значения производной в узлах, где условие непрерывности нарушено, берем односторонний предел). В любом интервале (x_{i-1}, x_i) можно найти такие точки $x^N_{i\alpha}$ и $\bar{x}^N_{i\alpha}$, что

$$\delta^{\alpha}_{f-S_{\Delta_N, f}}[x_{i-1}^N, x_i^N] = f^{(\alpha)}(x^N_{i\alpha}) - S^{(\alpha)}_{\Delta_N}(f; \bar{x}^N_{i\alpha}). \tag{6.12.10}$$

Так как $\delta^{\alpha}_{g+h} = \delta^{\alpha}_g + \delta^{\alpha}_h$, то для завершения доказательства остается применить неравенство треугольника.

6.13. Ограничения на порядок сходимости

Если функция $f(x)$ принадлежит классу $C^{2n}[a, b]$, то указанную в теореме 6.12.1 оценку можно улучшить, но лишь до определенной границы. Для кубических сплайнов эта граница дана в разд. 3.12, а для полиномиальных сплайнов нечетной степени — в разд. 5.13. Для обобщенных сплайнов этот вопрос исследуется аналогично.

Теорема 6.13.1. *Пусть последовательность сеток $\{\Delta_N\}$ $(N = 1, 2, \ldots)$ такова, что $\|\Delta_N\| \to 0$ при $N \to \infty$ и $R = \sup_N R_{\Delta_N} < \infty$. Пусть функция $f(x)$ принадлежит классу $C^{2n}(a, b)$ и $\mu > 0$. Если для последовательности обобщенных сплайнов $\{S_{\Delta_N}(f; x)\}$ $(N = 1, 2, \ldots)$ дефекта k*

$$f(x) = S_{\Delta_N}(f; x) + O(\|\Delta_N\|^{2n+\mu}) \tag{6.13.1}$$

равномерно относительно x на $[a, b]$, то

$$L^*Lf(x) \equiv 0.$$

Доказательство. С помощью методов разд. 6.12 можно показать, что при выполнении условий теоремы

$$\lim_{N\to\infty} S^{(\alpha)}_{\Delta_N}(f; x) = f^{(\alpha)}(x) \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, 2n), \tag{6.13.2}$$

при этом на каждом шаге надо заменить $2n - \alpha - 1$ на $2n - \alpha + \mu$. Как следствие отсюда получаем, что

$$L^*Lf(x) = \lim_{N\to\infty} \{L^*Lf(x) - L^*LS_{\Delta_N}(f; x)\} = 0$$

для почти всех x. Теорема доказана.

Ограничения, наложенные в теореме 6.13.1 на приближаемую функцию и приближающую последовательность интерполяционных сплайнов, не являются единственно возможными. В гл. IV нам встречались другие ограничения подобного характера. Для обобщенных сплайнов они имеют следующий вид.

Теорема 6.13.2. *Пусть даны функция $f(x)$ из класса $C[a, b]$ и последовательность сплайнов $\{S_{\Delta_N}(f; x)\}$ $(N = 1, 2, \ldots)$, интерполирующих функцию $f(x)$ на последовательности сеток $\{\Delta_N\}$ $(N = 1, 2, \ldots)$, $\| \Delta_N \| \to 0$ при $N \to \infty$. Если*

$$S_{\Delta_N}(f; x) = \sum_{j=1}^{2n} c^N_{ij} u_j(x) \qquad (x^N_{i-1} \leqslant x \leqslant x^N_i)$$

и коэффициенты c^N_{ij} ограничены относительно N, то функция $f(x)$ принадлежит классу $C^{2n-k-1}[a, b]$.

Доказательство. В силу ограниченности коэффициентов c^N_{ij} последовательности $\{S^{(\alpha)}_{\Delta_N}(f; x)\}$ $(\alpha = 0, 1, \ldots, 2n - k - 1)$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны. Следовательно, можно найти такую функцию $F_\alpha(x)$, что для подходящей подпоследовательности сеток $\{\Delta_m\}$ $(m = 1, 2, \ldots)$

$$\lim_{m\to\infty} S^{(\alpha)}_{\Delta_{N_m}}(f; x) = F_\alpha(x) \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, 2n - k - 1)$$

равномерно относительно x на $[a, b]$. Таким образом, каждая функция $F_\alpha(x)$ непрерывна. Более того, так как сходимость равномерна, то

$$F_\alpha(x) = \lim_{m\to\infty} S^{(\alpha)}_{\Delta_{N_m}}(f; x) = \lim_{m\to\infty} S^{(\alpha)}_{\Delta_{N_m}}(f; a) + \lim_{m\to\infty} \int_a^x S^{(\alpha+1)}_{\Delta_{N_m}}(f; t)\, dt =$$

$$= F_\alpha(a) + \int_a^x F_{\alpha+1}(t)\, dt \qquad (0 \leqslant \alpha \leqslant 2n - k - 2).$$

Итак, функция $F_0(x)$ принадлежит классу $C^{2n-k-1}[a, b]$ и совпадает с функцией $f(x)$, ибо они обе непрерывны и в силу интерполяционных свойств последовательности $\{S_{\Delta_N}(f; x)\}$ совпадают на множестве, плотном в $[a, b]$. Теорема доказана.

Замечание 6.13.1. Условия интерполяции можно заменить сходимостью последовательности сплайнов к $f(x)$.

6.14. Приложения к теории гильбертова пространства

Как показано в разд. 5.1, класс $\mathscr{K}^n(a, b)$ со скалярным произведением

$$(f, g)_L = \int_a^b Lf(x)\, Lg(x)\, dx \qquad (6.14.1)$$

становится гильбертовым пространством после отождествления функций, отличающихся на решение уравнения $Lf = 0$. Если на отрезке $[a, b]$ задана последовательность сеток $\{\Delta_N\}$ $(N = 1, 2, \ldots)$, $\Delta_N \subset \Delta_{N+1}$, то, как в гл. V, можно образовать конечномерные подпространства $F_{\Delta_N}(k, L)$, состоящие из всех обобщенных сплайнов дефекта k на Δ_N, и подпространства $[F_{\Delta_{N+1}}(k, L) - F_{\Delta_N}(k, L)]$, состоящие из тех элементов подпространства $F_{\Delta_{N+1}}(k, L)$, определяющие значения [1]) которых на Δ_N равны нулю. Аналогично можно образовать подпространства $P_{\Delta_N}(k, L)$ и $[P_{\Delta_{N+1}}(k, L) - P_{\Delta_N}(k, L)]$ периодических сплайнов, подпространства $F'_{\Delta_N}(k, L)$ и $[F'_{\Delta_{N+1}}(k, L) - F'_{\Delta_N}(k, L)]$ сплайнов типа II′ и подпространства $T_{\Delta_N}(k, L)$ и $[T_{\Delta_{N+1}}(k, L) - T_{\Delta_N}(k, L)]$ сплайнов типа k.

Можно также рассмотреть линейные подпространства гетерогенных сплайнов, удовлетворяющих тем же условиям непрерывности в узлах, но имеющих другие определяющие значения. Мы ограничимся рассмотрением гетерогенных сплайнов, которые в точках сетки, не принадлежащих Δ_1, имеют дефект k. Обозначим подпространства, аналогичные подпространствам $F_{\Delta_N}(k, L)$ и $[F_{\Delta_{N+1}}(k, L) - F_{\Delta_N}(k, L)]$, через $H_{\Delta_N}(k, L)$ и $[H_{\Delta_{N+1}}(k, L) - H_{\Delta_N}(k, L)]$ соответственно. Если не будет возникать недоразумений, мы не будем указывать зависимость от k и L, например вместо $F_{\Delta_N}(k, L)$ будем писать просто F_{Δ_N}. Подчеркнем особо, что, задавая различные условия непрерывности, которым должны удовлетворять гетерогенные сплайны в узлах сетки Δ_1, мы получаем различные подпространства H_{Δ_N}. Образуем бесконечные прямые суммы

$$F_{\Delta_\infty}(k, L) = F_{\Delta_1}(k, L) \oplus \sum_{N=1}^{\infty} \oplus [F_{\Delta_{N+1}}(k, L) - F_{\Delta_N}(k, L)], \qquad (6.14.2.1)$$

$$P_{\Delta_\infty}(k, L) = P_{\Delta_1}(k, L) \oplus \sum_{N=1}^{\infty} \oplus [P_{\Delta_{N+1}}(k, L) - P_{\Delta_N}(k, L)], \qquad (6.14.2.2)$$

---

[1]) Под «определяющими значениями» мы понимаем здесь и в оставшейся части гл. VI заданные значения сплайна и его производных.

$$F'_{\Delta_\infty}(k,\ L) = F'_{\Delta_1}(k,\ L) \oplus \sum_{N=1}^{\infty} \oplus [F'_{\Delta_{N+1}}(k,\ L) - F'_{\Delta_N}(k,\ L)], \qquad (6.14.2.3)$$

$$T_{\Delta_\infty}(k,\ L) = T_{\Delta_1}(k,\ L) \oplus \sum_{N=1}^{\infty} \oplus [T_{\Delta_{N+1}}(k,\ L) - T_{\Delta_N}(k,\ L)], \qquad (6.14.2.4)$$

$$H_{\Delta_\infty}(k,\ L) = H_{\Delta_1}(k,\ L) \oplus \sum_{N=1}^{\infty} \oplus [H_{\Delta_{N+1}}(k,\ L) - H_{\Delta_N}(k,\ L)]. \qquad (6.14.2.5)$$

Ортогональность составляющих подпространств доказана в разд. 6.15. В том же разделе показано, что если $\| \Delta_N \| \to 0$ при $N \to \infty$, то все эти бесконечные суммы, за исключением, быть может, $P_{\Delta_\infty}(k,\ L)$, совпадают друг с другом и тождественно равны $\mathscr{K}^n(a,\ b)$.

В гл. V мы установили, что пространство $\mathscr{K}_p^n(a,\ b)$ при натуральном n плотно в $\mathscr{K}^n(a,\ b)$ относительно нормы

$$\| f \|_{D^n} = \left\{ \int_a^b [D^n f(x)]^2\, dx \right\}^{1/2}. \qquad (6.14.3)$$

Покажем сейчас (теорема 6.14.1), что сумма $\mathscr{K}_p^n(a,\ b) + P_{n-1}(a,\ b)$ плотна в $\mathscr{K}^n(a,\ b)$ относительно нормы

$$\| f \|_L = \left\{ \int_a^b [Lf(x)]^2\, dx \right\}^{1/2}, \qquad (6.14.4)$$

определенной скалярным произведением (6.14.1). Здесь $P_{n-1}(a,\ b)$ — линейное пространство полиномов на $[a,\ b]$ степени $n-1$, а $\mathscr{K}_p^n(a,\ b) + P_{n-1}(a,\ b)$ — линейное пространство, натянутое на $\mathscr{K}_p^n(a,\ b)$ и $P_{n-1}(a,\ b)$.

Т е о р е м а 6.14.1. *Линейное пространство* $\mathscr{K}_p^n(a,\ b) + P_{n-1}(a,\ b)$ *плотно в* $\mathscr{K}^n(a,\ b)$ *относительно нормы*

$$\| f \|_L = \left\{ \int_a^b [Lf(x)]^2\, dx \right\}^{1/2}.$$

Если $L \equiv D^n$, *то* $\mathscr{K}_p^n(a,\ b)$ *плотно в* $\mathscr{K}^n(a,\ b)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим сначала частный случай $L \equiv D^n$. Пусть дана произвольная функция $f(x)$ из класса $\mathscr{K}^n(a,\ b)$. Так как $D^n f(x)$ принадлежит $L^2(a,\ b)$, то $D^n f(x)$ разлагается в ряд Фурье, частичная сумма которого является периодической функцией на $[a,\ b]$. Каждую из частичных сумм можно проинтегрировать n раз и выбрать константы интегрирования (положив их равными нулю) так, чтобы получившаяся функция $F_N(x)$ была периодической. Так как $\| f - F_N \|_{D^n} \to 0$ при $N \to \infty$, то для частного случая $L \equiv D^n$ теорема доказана.

Для доказательства теоремы в общем случае покажем, что сходимость относительно нормы $\|\cdot\|_{D^n}$ влечет сходимость относительно нормы $\|\cdot\|_L$, где n — порядок дифференциального оператора L.

Так как $\mathring{\mathscr{K}}_p^n(a, b)$ плотно в $\mathscr{K}^n(a, b)$ относительно нормы $\|\cdot\|_{D^n}$, то можно найти такую последовательность функций $\{\widetilde{F}_N(x)\}$ $(N = 1, 2, \ldots)$ из $\mathring{\mathscr{K}}_p^n(a, b)$, что $\|f - \widetilde{F}_N\|_{D^n} \to 0$ при $N \to \infty$. Заменим последовательность $\{\widetilde{F}_N(x)\}$ последовательностью $\{F_N(x)\}$ $(N = 1, 2, \ldots)$, где $F_N(x) = \widetilde{F}_N(x) + P_N(x)$. Полином $P_N(x)$ степени $n - 1$ выбран так, что $F^{(\alpha)}(a) = f^{(\alpha)}(a)$ $(\alpha = 0, 1, \ldots, n - 1)$. Применяя неравенство Буняковского — Шварца, получаем

$$|f^{(n-1)}(x) - F_N^{(n-1)}(x)| \leqslant K_{n-1} \left\{\int_a^b [f^{(n)}(x) - F_N^{(n)}(x)]^2\, dx\right\}^{1/2}, \qquad (6.14.5.1)$$

$$|f^{(n-2)}(x) - F_N^{(n-2)}(x)| \leqslant K_{n-2} \left\{\int_a^b [f^{(n)}(x) - F_N^{(n)}(x)]^2\, dx\right\}^{1/2}, \qquad (6.14.5.2)$$

$$\ldots$$

$$|f(x) - F_N(x)| \leqslant K_0 \left\{\int_a^b [f^{(n)}(x) - F_N^{(n)}(x)]^2\, dx\right\}^{1/2}, \qquad (6.14.5.n)$$

где константы K_j $(j = 0, 1, \ldots, n - 1)$ не зависят от N. Из определения $L[f(x) - F_N(x)]$, неравенства Минковского и неравенств (6.14.5) имеем

$$\left\{\int_a^b \{L[f(x) - F_N(x)]\}^2\, dx\right\}^{1/2} \leqslant \left\{\int_a^b \{a_n(x) D^n[f(x) - F_N(x)]\}^2\, dx\right\}^{1/2} +$$

$$+ \ldots + \left\{\int_a^b \{a_0(x)[f(x) - F_N(x)]\}^2\, dx\right\}^{1/2} \leqslant K \left\{\int_a^b \{D^n[f(x) - F_N(x)]\}^2\, dx\right\}^{1/2},$$

откуда следует, что $\|f - F_N\|_L \to 0$ при $N \to \infty$, и теорема доказана.

В гл. III было показано, что $\mathscr{K}^2(a, b)$ является гильбертовым пространством относительно нормы $\|\cdot\|_{D^2}$, в гл. V аналогичное утверждение доказано для $\mathring{\mathscr{K}}^n(a, b)$ и нормы $\|\cdot\|_{D^n}$. Здесь мы покажем, что $\mathscr{K}^n(a, b)$ является гильбертовым пространством и относительно нормы $\|\cdot\|_L$. Если принять во внимание псевдохарактер нормы, то при соответствующих нормах все свойства, кроме полноты пространства, становятся очевидными. Последнее свойство также легко доказать.

Теорема 6.14.2. *Пространство $\mathscr{K}^n(a, b)$ полно относительно нормы $\|\cdot\|_L$.*

Доказательство. Предположим, что $\{f_N\}$ $(N = 1, 2, \ldots)$ — последовательность Коши относительно нормы $\|\cdot\|_L$. Тогда $\{Lf_N\}$ $(N = 1$

2, ...) — последовательность Коши в $L^2(a, b)$. Так как пространство L^2 полно, то эта последовательность сходится к некоторой функции $g(x)$ из $L^2(a, b)$. Если $f(x)$ — решение [1]) уравнения $Lf(x) = g(x)$, то $f(x)$ принадлежит $\mathscr{K}^n(a, b)$ и $\|f_N - f\|_L \to 0$ при $N \to \infty$. Таким образом, $\mathscr{K}^n(a, b)$ полно относительно нормы $\|\cdot\|_L$.

6.15. Сходимость по норме

Теорема 6.15.1. *Пусть заданы функция $f(x)$ из класса $\mathscr{K}^n(a, b)$, последовательность сеток $\{\Delta_N: a = x_0^N < x_1^N < \ldots < x_{m_N}^N = b\}$ $(N = 1, 2, \ldots)$, $\Delta_N \subset \Delta_{N+1}$, $\|\Delta_N\| \to 0$ при $N \to \infty$, и последовательность обобщенных сплайнов $\{S_{\Delta_N}(f; x)\}$ $(N = 1, 2, \ldots)$ дефекта k. Если сплайн $S_{\Delta_N}(f; x)$ интерполирует функцию f на сетке Δ_N, $f^{(\alpha)}(x_i^N) = S_{\Delta_N}^{(\alpha)}(f; x_i^N)$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, k-1; i = 1, 2, \ldots, m_N - 1)$ $(N = 1, 2, \ldots)$ и выполнено одно из условий:* a) $f(x) - S_{\Delta_N}(f; x)$ *принадлежит типу* I′ $(N = 1, 2, \ldots)$, b) $f(x) - S_{\Delta_N}(f; x)$ *принадлежит типу* II′ $(N = 1, 2, \ldots)$, c) $f^{(\alpha)}(x_i^N) = S_{\Delta_N}^{(\alpha)}(f; x_i^N)$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, k-1; i = 0, m_N; N = 1, 2, \ldots)$ *и каждый сплайн $S_{\Delta_N}(f; x)$ принадлежит типу k,* d) $f^{(\alpha)}(x_i^N) = S_{\Delta_N}^{(\alpha)}(f; x_i^N)$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, k-1; i = 0; N = 1, 2, \ldots)$, *функция $f(x)$ принадлежит классу $\mathscr{K}_p^n(a, b)$ и каждый сплайн $S_{\Delta_N}(f; x)$ периодический, то*

$$\lim_{N \to \infty} \|f - S_{\Delta_N, f}\| = 0.$$

Доказательство. Так как $S_{\Delta_N}(f; x)$ можно считать интерполяционным сплайном для $S_{\Delta_{N+M}}(f; x)$ $(M \geqslant 1)$, то последовательность $\{\|S_{\Delta_N}(f; x)\|_L\}$ $(N = 1, 2, \ldots)$ монотонно возрастает и ограничена сверху величиной $\|f\|_L$. Это вытекает из первого интегрального соотношения, из которого также следует, что

$$\|S_{\Delta_{N+M}, f} - S_{\Delta_N, f}\|_L^2 = \|S_{\Delta_{N+M}, f}\|_L^2 - \|S_{\Delta_N, f}\|_L^2.$$

Так как последовательность $\{\|S_{\Delta_N, f}\|_L\}$ сходится, то $\{S_{\Delta_N}(f; x)\}$ — последовательность Коши относительно нормы $\|\cdot\|_L$. Как и в разд. (6.9.6), легко показать, что при достаточно малом значении $\|\Delta_N\|$ для некоторой положительной постоянной K, не зависящей от N,

$$\|S_{\Delta_{N+M}, f} - S_{\Delta_N, f}\|_{D^n} \leqslant K \|S_{\Delta_{N+M}, f} - S_{\Delta_N, f}\|_L.$$

Таким образом, $\{S_{\Delta_N}^{(n)}(f; x)\}$ — последовательность Коши в $L^2(a, b)$. Если $g(x)$ — предел в $L^2(a, b)$ этой последовательности и

$$G(x) = f^{(n-1)}(a) + \int_a^x g(x)\, dx,$$

[1]) В качестве решения можно взять решение в смысле Каратеодори (см. Сансоне и Конти [1, стр. 11]).

то

$$|S_{\Delta_N}^{(n-1)}(f;\ x)-G(x)|\leqslant(b-a)^{1/2}\left\{\int_a^b[S_{\Delta_N}^{(n)}(f;\ x)-g(x)]^2\,dx\right\}^{1/2}+$$

$$+|S_{\Delta_N}^{(n-1)}(f;\ a)-f^{(n-1)}(a)|, \qquad (6.15.1)$$

и при $N\to\infty$ правая часть неравенства (6.15.1) стремится к нулю. Отсюда следует, что $f^{(n-1)}(x)\equiv G(x)$ на $[a,\ b]$, поэтому

$$\lim_{N\to\infty}\|S_{\Delta_N,f}-f\|_{D^n}=0. \qquad (6.15.2)$$

Далее,

$$|f^{(n-1)}(x)-S_{\Delta_N}^{(n-1)}(f;x)|\leqslant(b-a)^{1/2}\|f-S_{\Delta_N,f}\|_{D^n}+|f^{(n-1)}(a)-S_{\Delta_N}^{(n-1)}(f;\ a)|, \qquad (6.15.3.1)$$

$$|f^{(n-2)}(x)-S_{\Delta_N}^{(n-2)}(f;\ x)|\leqslant(b-a)^{3/2}\|f-S_{\Delta_N,f}\|_{D^n}+$$

$$+(b-a)|f^{(n-1)}(a)-S_{\Delta_N}^{(n-1)}(f;\ a)|+$$

$$+|f^{(n-2)}(a)-S_{\Delta_N}^{(n-2)}(f;\ a)|, \qquad (6.15.3.2)$$

$$\ldots$$

$$|f(x)-S_{\Delta_N}(f;\ x)|\leqslant(b-a)^{(2n-1)/2}\|f-S_{\Delta_N,f}\|_{D^n}+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}(b-a)^{n-j}|f^{(n-j)}(a)-S_{\Delta_N}^{(n-j)}(f;\ a)|. \qquad (6.15.3.n)$$

Из этих неравенств при достаточно большом N получаем

$$\|f-S_{\Delta_N,f}\|_L\leqslant K\|f-S_{\Delta_N,f}\|_{D^n}, \qquad (6.15.4)$$

где K — положительная постоянная, не зависящая от N. Теорема доказана.

Те же рассуждения можно применить к последовательности гетерогенных сплайнов, так что справедлива

Теорема 6.15.2. *Пусть даны функция $f(x)$ из класса $\mathring{W}^n(a,\ b)$, последовательность сеток $\{\Delta_N\colon\ a=x_0^N<x_1^N<\ldots<x_{m_N}^N=b\}$ $(N=1,\ 2,\ \ldots)$, $\Delta_N\subset\Delta_{N+1}$, $\|\Delta_N\|\to0$ при $N\to\infty$, и последовательность обобщенных гетерогенных сплайнов, удовлетворяющих условиям теоремы* 6.9.2. *Тогда*

$$\lim_{N\to\infty}\|f-S_{\Delta_N,f}\|_L=0.$$

Приведем непосредственные аналоги леммы 5.15.1 и теоремы 5.15.3 для обобщенных сплайнов.

Лемма 6.15.1. *Пусть на отрезке* $[a, b]$ *заданы две сетки* Δ_1 *и* Δ_2, $\Delta_1 \subset \Delta_2$ *и два обобщенных сплайна* $S_{\Delta_1}(x)$ *и* $S_{\Delta_2}(x)$, *удовлетворяющих в узлах сетки* Δ_1 *одним и тем же условиям непрерывности. Если в узлах сетки* Δ_1 *заданы одни и те же значения сплайнов и их производных и определяющие значения сплайна* $S_{\Delta_2}(x)$ *в узлах сетки* Δ_1 *равны нулю, то*

$$(S_{\Delta_1}, S_{\Delta_2})_L = 0.$$

Доказательство. Пусть сетку Δ_1 определяют точки $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$. Тогда

$$(S_{\Delta_1}, S_{\Delta_2})_L = \int_a^b LS_{\Delta_1}(x)\, LS_{\Delta_2}(x)\, dx = \sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} LS_{\Delta_1}(x)\, LS_{\Delta_2}(x)\, dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} P\,[S_{\Delta_2}(x),\ LS_{\Delta_1}(x)]\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} + \int_{x_{i-1}}^{x_i} S_{\Delta_2}(x)\, L^*LS_{\Delta_1}(x)\, dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} P\,[S_{\Delta_2}(x),\ LS_{\Delta_1}(x)]\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} = 0.$$

Последняя сумма равна нулю потому, что если какое-нибудь ее слагаемое не аннулируется непосредственно другим слагаемым (в силу непрерывности), оно умножается на определяющее значение сплайна $S_{\Delta_2}(x)$ на Δ_1 и обращается в нуль. Это доказывает лемму, из которой в свою очередь следует

Теорема 6.15.3. *Пусть на отрезке* $[a, b]$ *задана последовательность сеток* $\{\Delta_N\}$ $(N = 1, 2, \ldots)$, $\Delta_N \subset \Delta_{N+1}$ *и* $\|\Delta_N\| \to 0$ *при* $N \to \infty$. *Тогда бесконечные прямые суммы* (6.14.2) *представляют собой ортогональные разложения относительно* $(f, g)_L$ *и, кроме, быть может,* $P_{\Delta_\infty}(k, L)$, *совпадают с* $\mathcal{K}^n(a, b)$. *Для* $P_{\Delta_\infty}(k, L)$ *справедливы включения*

$$\mathcal{K}_p^n(a, b) \subseteq P_{\Delta_\infty}(k, L) \subseteq \mathcal{K}^n(a, b).$$

6.16. Канонические сеточные базисы

Мы не будем здесь давать определение и построение канонических сеточных базисов для $F_{\Delta_\infty}(k, L)$, $F'_{\Delta_\infty}(k, L)$, $T_{\Delta_\infty}(k, L)$ и $P_{\Delta_\infty}(k, L)$, так как это делается точно так же, как в гл. V. Однако аналог леммы 5.16.1 формулируется и доказывается иначе. Доказательство более сложно в том смысле, что нужно еще показать, что если $S_i(L; x)$ — элемент канонического сеточного базиса, связанного с линейным дифференциальным оператором L порядка n, то

$$\|S_i(L; x)\|_{D^n} \leqslant K \|S_i(L; x)\|_L, \tag{6.16.1}$$

где положительная постоянная K не зависит от i. Эта постоянная нам понадобится при выводе аналога неравенства (5.16.2).

Итак, мы следуем разд. 6.9. Так как определяющие значения сплайна $S_i(L; x)$ равны нулю во всех узлах сеток, предшествующих сетке π_i (последовательность сеток $\{\pi_i\}$ $(i = 0, 1, \ldots)$ возникает при построении канонического сеточного базиса), то в качестве функции $f(x)$ можно взять нулевую функцию. Таким образом, в (6.9.1) можно положить

$$J^2 = \int_a^b \{S_i^{(n)}(L; x)\}^2 \, dx. \tag{6.16.2}$$

Далее, тем же методом, что и в разд. 6.9, доказывается существование константы K, не зависящей от i, при которой выполняется неравенство (6.16.1). Следовательно, существуют такие положительные постоянные K_α, не зависящие от i, что справедлив аналог леммы 5.16.1. Для этих постоянных нет простого представления, так что мы не будем приводить их явного значения.

Лемма 6.16.1. *Пусть канонический сеточный базис* $\{S_i(L; x)\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ *для* $[F_{\Delta_\infty}(k, L) - F_{\Delta_1}(k, L)]$, $[F'_{\Delta_\infty}(k, L) - F'_{\Delta_1}(k, L)]$, $[T_{\Delta_\infty}(k, L) - T_{\Delta_1}(k, L)]$, $[H_{\Delta_\infty}(k, L) - H_{\Delta_1}(k, L)]$ *или* $[P_{\Delta_\infty}(k, L) - P_{\Delta_1}(k, L)]$ *определяется с помощью последовательности сеток* $\{\Delta_N\}$ $(N = 1, 2, \ldots)$, $\Delta_N \subset \Delta_{N+1}$. *Пусть при построении сплайнов* $S_i(L; x)$ *использована соответствующая последовательность сеток* $\{\pi_i\}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$. *Тогда существуют такие постоянные* K_α, *не зависящие от* i, *что*

$$|S_i^{(\alpha)}(L; x)| \leqslant K_\alpha \| \pi_{i-1} \|^{(2n-2\alpha-1)/2} \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{6.16.3}$$

С помощью этой леммы можно доказать следующий аналог теоремы 5.16.2.

Теорема 6.16.1. *Пусть канонический сеточный базис* $\{S_i(L; x)\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ *таков, что* $\| \pi_i \| = O(1/i)$. *Тогда существуют такие действительные числа* $\beta_\alpha > 0$, *что*

$$S_\alpha(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \{S_i^{(\alpha)}(L; x)\}^2 < \beta_\alpha \qquad (0 \leqslant \alpha \leqslant n-2). \tag{6.16.4}$$

Элементы $S_i(L; x)$ канонического сеточного базиса не только ортогональны, но при $\Delta_N \subset \Delta_{N+1}$ базис для $F_{\Delta_{N+1}}$ получается просто расширением базиса для F_{Δ_N}. Пусть сетка Δ_N задана точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$. Если для построения базиса для F_{Δ_N} используются фундаментальные сплайны $S_i(\Delta_N; x)$, определяющие значения которых во всех точках, кроме x_i, равны нулю, а в этой точке лишь одно из них равно единице, то не только сохраняется ортогональность, но при переходе от F_{Δ_N} к $F_{\Delta_{N+1}}$ нет необходимости строить полностью новое множество базисных элементов. Эта ситуация в какой-то степени аналогична использованию интерполяционной формулы Ньютона вместо интерполяционной формулы Лагранжа. Если надо добавить точки интерполяции, то приходится полностью построить новое множество фунда-

ментальных многочленов Лагранжа (Дэвис [1, стр. 41]); в то же время, чтобы учесть новые точки интерполяции, достаточно только дополнить новыми членами интерполяционную формулу Ньютона.

6.17. Ядра и интегральные представления

В настоящем разделе мы приведем для обобщенных сплайнов аналоги теорем разд. 5.17. Все теоремы справедливы также и для гетерогенных сплайнов. Так как доказательства несущественно отличаются от прежних, то мы их опускаем.

Теорема 6.17.1. *Пусть функция* $f(x)$ *принадлежит классу* $\mathscr{K}^n(a, b)$ *или* $\mathscr{K}_p^n(a, b)$ *и сплайны* $\{S_i(L, k; x)\}$ $(i=1, 2, \ldots)$ *вместе с* $\{u_i(L, k; x)\}$ $(i=1, 2, \ldots, m)$ *образуют канонический сеточный базис для* $F_{\Delta_\infty}(k, L)$, $F'_{\Delta_\infty}(k, L)$, $T_{\Delta_\infty}(k, L)$, $H_{\Delta_\infty}(k, L)$ *или* $P_{\Delta_\infty}(k, L)$, *который является ортонормальным базисом для* $\mathscr{K}^n(a, b)$ *или* $\mathscr{K}_p^n(a, b)$. *Тогда для каждой точки* x *из* $[a, b]$

$$f^{(\alpha)}(x) = \lim_{N\to\infty} \int_a^b H_{\alpha N}(L, k; x, t)\, Lf(t)\, dt + G^{(\alpha)}(x) \quad (\alpha = 0, 1, \ldots, n-1), \tag{6.17.1}$$

где $LG(x) \equiv 0$ *для* $x \in [a, b]$ *и*

$$H_{\alpha N}(L, k; x, t) = \sum_{i=1}^{m} u_i^{(\alpha)}(L, k; x)\, Lu_i(L, k; t) + \sum_{i=1}^{N} S_i^{(\alpha)}(L, k; x)\, LS_i(L, k; t), \tag{6.17.2}$$

причем сходимость в (6.17.1) *равномерна относительно* x *из* $[a, b]$.

Следствие 6.17.1. *Пусть функция* $f(x)$ *принадлежит классу* $\mathscr{K}^{2n}(a, b)$ *или* $\mathscr{K}_p^{2n}(a, b)$ *и сплайны* $\{S_i(L, k; x)\}$ $(i=1, 2, \ldots)$ *вместе с* $\{u_i(L, k; x)\}$ $(i=1, 2, \ldots, m)$ *образуют канонический сеточный базис* (см. сноску на стр. 181) *для* $F_{\Delta_\infty}(k, L)$, $F'_{\Delta_\infty}(k, L)$, $T_{\Delta_\infty}(k, L)$, $H_{\Delta_\infty}(k, L)$ *или* $P_{\Delta_\infty}(k, L)$, *который является ортонормальным базисом для* $\mathscr{K}^n(a, b)$ *или* $\mathscr{K}_p^n(a, b)$. *Тогда равенство* (6.17.1) *справедливо для всех* $x \in [a, b]$ *и* $\alpha = 0, 1, \ldots, 2n-2$. *В случае гетерогенных сплайнов предполагается, что максимальный дефект не превосходит* k.

Теорема 6.17.2. *Пусть последовательность сеток* $\{\pi_i\}$ $(i=0, 1, 2, \ldots)$ *на* $[a, b]$ *определяет канонический сеточный базис для* $F_{\Delta_\infty}(k, L)$, $F'_{\Delta_\infty}(k, L)$, $T_{\Delta_\infty}(k, L)$, $H_{\Delta_\infty}(k, L)$ *или* $P_{\Delta_\infty}(k, L)$, *который является ортонормальным базисом для* $\mathscr{K}^n(a, b)$ *или* $\mathscr{K}_p^n(a, b)$. *Если функция* $H_{\alpha N}(L, k; x, t)$ *задана равенством* (6.17.2), *то* $\{H_{\alpha N}\}$ $(\alpha = 0, 1, \ldots, n-2; N = 1, 2, \ldots)$ *для всех* x *является последовательностью Коши в* $L^2(a, b)$ *и, следовательно, последовательностью Коши в* $L(a, b)$. *Если* $H_\alpha(L, K; x, t)$ $(\alpha = 0, 1, \ldots, n-2)$ — *ее предел, то для функции* $f(x)$ *из класса* $\mathscr{K}^n(a, b)$ *или* $\mathscr{K}_p^n(a, b)$

$$f^{(\alpha)}(x) = \int_a^b H_\alpha(L, k; x, t) Lf(t)\, dt + G^{(\alpha)}(x), \tag{6.17.3}$$

где $LG(x) = 0$ *для* $x \in [a, b]$. *Кроме того, сходимость равномерна относительно* $x \in [a, b]$ *и* $H_\alpha(L, k; x, t)$ *получается из* $H_{\alpha-1}(L, k; x, t)$ *формальным дифференцированием по* x.

Замечание 6.17.1. Мы предполагали, не оговаривая это особо, что сетки $\{\pi_i\}$, применяемые при построении канонического сеточного базиса для $\mathscr{K}^n(a, b)$ или $\mathscr{K}_p^n(a, b)$, удовлетворяют условию $\|\pi_i\| = O(1/i)$.

6.18. Представление и приближение линейных функционалов

Для обобщенных сплайнов можно сформулировать и доказать аналоги всех четырех теорем, приведенных в разд. 5.18, но так как доказательства в основном остаются прежними, мы не будем их здесь повторять. Рассмотрим несколько примеров приближения линейных функционалов, в которых при аппроксимации интеграла берутся равноотстоящие значения подинтегральной функции. Эти примеры рассматривал Сард [1, гл. II]; они иллюстрируют метод, которым в теории сплайнов можно получить многие из его многочисленных «наилучших приближений». Мы дадим также приложения теории обобщенных сплайнов к вычислению собственных значений линейного дифференциального оператора. В конце этого раздела укажем применение гетерогенных сплайнов к приближению точечных функционалов $\mathscr{L}_x$: $f \to f(x)$.

Теорема 6.18.1. *Пусть функция* $f(x)$ *принадлежит классу* $\mathscr{K}^n(a, b)$ *или* $\mathscr{K}_p^n(a, b)$ *и сплайны* $\{S_i(k, L; x)\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ *вместе с* $\{u_i(k, L; x)\}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ *образуют канонический сеточный базис для* $F_{\Delta_\infty}(k, L)$, $F'_{\Delta_\infty}(k, L)$, $T_{\Delta_\infty}(k, L)$, $H_{\Delta_\infty}(k, L)$ *или* $P_{\Delta_\infty}(k, L)$, *который является ортонормальным базисом для* $\mathscr{K}^n(a, b)$ *или* $\mathscr{K}_p^n(a, b)$. *Если линейный функционал* $\mathscr{L}$ *имеет вид* (5.18.1), *то*

$$\mathscr{L} \circ f = \lim_{N \to \infty} \int_a^b H_N(k, L; t)\, Lf(t)\, dt + \mathscr{L} \circ G, \tag{6.18.1.1}$$

где

$$H_N(k, L; x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i L u_i(k, L; t) + \sum_{i=1}^{N} \beta_i L S_i(k, L; x), \tag{6.18.1.2}$$

$$\alpha_i = \sum_{j=0}^{\eta} \int_a^b u_i^{(j)}(k, L; s)\, d\mu_j(s) \qquad (i = 0, 1, \ldots, m), \tag{6.18.1.3}$$

$$\beta_i = \sum_{j=0}^{\eta} \int_a^b S_i^{(j)}(k, L; s)\, d\mu_j(s) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N), \tag{6.18.1.4}$$

и $LG(x) = 0$ *для всех* x *из отрезка* $[a, b]$.

Следствие 6.18.1. *Пусть функция $f(x)$ принадлежит классу $\mathscr{K}^{2n}(a, b)$ или $\mathscr{K}_p^{2n}(a, b)$ и сплайны $\{S_i(k, L; x)\}$ $(i=1, 2, \ldots)$ вместе с $\{u_i(k, L; x)\}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ образуют канонический сеточный базис для $F_{\Delta_\infty}(k, L)$, $F'_{\Delta_\infty}(k, L)$, $T_{\Delta_\infty}(k, L)$, $H_{\Delta_\infty}(k, L)$ или $P_{\Delta_\infty}(k, L)$, который является ортонормальным базисом для $\mathscr{K}^n(a, b)$ или $\mathscr{K}_p^n(a, b)$. Если линейный функционал $\mathscr{L}$ имеет вид*

$$\mathscr{L}\circ f = \sum_{j=0}^{\eta} \int_a^b f^{(j)}(t)\, d\mu_j(t), \tag{6.18.2}$$

где $\mu_j(t)$ — функция ограниченной вариации на $[a, b]$, то справедливо равенство (5.18.1), но только теперь $\eta < 2n-k-1$.

Замечание 6.18.1. И в теореме, и в следствии из нее функция $G(x)$ зависит от $f(x)$, но ядро $H_N(k, L; x)$ не зависит от $f(x)$. Доказательство по существу использует равномерность сходимости подпоследовательности сплайнов и их производных к функции $f(x)$ и ее производным, а не скорость этой сходимости. Поэтому, учитывая теорему 6.12.3, в следствии 6.18.1 нужно требовать, чтобы η было меньше $2n-2$, а не $2n-k-1$.

Теорема 6.18.2. *Пусть функция $f(x)$ принадлежит классу $\mathscr{K}^n(a, b)$ или $\mathscr{K}_p^n(a, b)$ и сплайны $\{S_i(k, L; x)\}$ $(i=1, 2, \ldots)$ вместе с $\{u_i(k, L; x)\}$ $(i=1, 2, \ldots, m)$ образуют канонический сеточный базис для $F_{\Delta_\infty}(k, L)$, $F'_{\Delta_\infty}(k, L)$, $T_{\Delta_\infty}(k, L)$, $H_{\Delta_\infty}(k, L)$ или $P_{\Delta_\infty}(k, L)$, который является ортонормальным базисом для $\mathscr{K}^n(a, b)$ или $\mathscr{K}_p^n(a, b)$. Если линейный функционал $\mathscr{L}$ имеет вид (5.18.1), где $\eta \leqslant n-2$, то последовательность $\{H_N(k, L; x)\}$ является последовательностью Коши в $L^2(a, b)$ и, следовательно, последовательностью Коши в $L(a, b)$. Если $H(k, L; x)$ — ее предел, то*

$$\mathscr{L}\circ f = \int_a^b H(k, L; t)\, Lf(t)\, dt + \mathscr{L}\circ G, \tag{6.18.3}$$

где $LG(x)=0$ для всех $x \in [a, b]$.

Сформулируем теперь аналоги теорем 5.18.3 и 5.18.4 о приближении линейных функционалов.

Теорема 6.18.3. *Если линейный функционал $\mathscr{L}$ задается формулой (5.18.1), а линейный функционал B таков, что*

$$B\circ f = L\circ S_{\Delta, f}, \tag{6.18.4}$$

где $S_\Delta(f; x)$ — интерполяционный сплайн для функции $f(x)$ из класса $\mathscr{K}^n(a, b)$ или $\mathscr{K}_p^n(a, b)$, представляющий собой линейную комбинацию функций $\{u_i(k, L; x)\}$ $(i=1, 2, \ldots, m)$ и $G(x)$, то

$$\mathscr{L}\circ f - B\circ f = \lim_{N\to\infty} \int_a^b \left\{\sum_{i=1}^{N} \beta_i LS_i(k, L; t)\right\} Lf(t)\, dt, \tag{6.18.5.1}$$

где

$$\beta_i = \sum_{j=0}^{\eta} \int_a^b S_i^{(j)}(k, L; s)\, d\mu_j(s) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N), \tag{6.18.5.2}$$

а $\mu_j(s)$ $(j = 0, 1, \ldots, \eta)$ *— функции ограниченной вариации на* $[a, b]$, *связанные с оператором* $\mathscr{L}$ *представлением* (6.18.1).

Теорема 6.18.4. *Если линейный функционал* $\mathscr{L}$ *имеет вид* (5.18.1), *а линейный функционал* B *удовлетворяет условию* (6.18.4), *причем* $\eta < n - 1$, *то*

$$\mathscr{L}\circ f - B\circ f = \int_a^b H(k, L; t)\, Lf(t)\, dt.$$

Функция $H(k, L; t)$ *принадлежит пространству* $L^2(a, b)$ *и является пределом в смысле среднеквадратического последовательности*

$$H_N(k, L; x) = \sum_{i=1}^{N} \beta_i LS_i(k, L; x), \tag{6.18.6.1}$$

где

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{\eta} \int_a^b S_i^{(j)}(k, L; s)\, d\mu_j(s) \qquad (\eta < n); \tag{6.18.6.2}$$

функции $\mu_j(s)$ *имеют ограниченную вариацию на* $[a, b]$ *и зависят только от* $\mathscr{L}$ *(снова* $f(x)$ *— функция класса* $\mathscr{K}^n(a, b)$ *или* $\mathscr{K}_p^n(a, b)$*). Если* B *— любой линейный функционал вида* (5.18.9) *и* $\mathscr{L}$ *— B аннулирует решения уравнения* $Lf(x) = 0$, *то для* $k < n$

$$\mathscr{L}\circ f - B\circ f = \int_a^b H(k, L; t)\, Lf(t)\, dt, \tag{6.18.7}$$

где функция $H(k, L; t)$ *принадлежит* $L^2(a, b)$ *и определяется, как в теореме* 6.18.2, *только теперь* $\mathscr{L}$ *следует заменить на* $\mathscr{L} - B$. *Кроме того, интеграл*

$$\int_a^b \{H(k, L; t)\}^2\, dt \tag{6.18.8}$$

принимает наименьшее значение, если B *удовлетворяет условию* (6.18.4).

Замечание 6.18.2. Если на коэффициенты a_{ij}, фигурирующие в формуле (5.18.9), наложены дополнительные ограничения, то условие (6.18.4) не всегда удовлетворяется. Однако, как правило, можно добиться выполнения условия (6.18.4), используя гетерогенные сплайны. Это, в частности, можно сделать, если некоторые из коэффициентов a_{ij} должны быть нулями. Кроме того, если функция $f(x)$ принадлежит классу $\mathscr{K}^{2n}(a, b)$ или $\mathscr{K}_p^{2n}(a, b)$, то в тео-

реме 6.18.3 условие $\eta < n$ в равенстве (5.18.1) следует заменить условием $\eta < 2n - 2$. Напомним, что дефект k сплайна никогда не превосходит n, т. е. порядка оператора L.

Рассмотрим теперь приближение интеграла

$$\mathscr{L} \circ f = \int_{-1}^{1} f(x)\, dx \tag{6.18.9}$$

функционалами вида

$$B \circ f = a_1 f(-1) + a_2 f(0) + a_3 f(1). \tag{6.18.10}$$

Можно было бы рассмотреть произвольный отрезок $[a, b]$ и положить

$$B \circ f = a_1 f(a) + a_2 f\left(\frac{a+b}{2}\right) + a_3 f(b), \tag{6.18.11}$$

но вычисления при этом становятся более громоздкими. К тому же, допуская упрощение (6.18.9), мы не теряем общности, так как

$$\int_a^b f(x)\, dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{1} g(t)\, dt, \qquad g(t) = f\left(\frac{b-a}{2} t + \frac{b+a}{2}\right),$$

и потому

$$\frac{b-a}{2} B \circ g = \frac{b-a}{2} \{a_1 g(-1) + a_2 g(0) + a_3 g(1)\} =$$

$$= \frac{b-a}{2} \left\{a_1 f(a) + a_2 f\left(\frac{a+b}{2}\right) + a_3 f(b)\right\},$$

что эквивалентно равенству (6.18.11).

Потребуем дополнительно, чтобы для линейных функций приближение было точным. Тогда по теореме 5.18.4 (или 6.18.4)

$$\mathscr{L} \circ f - B \circ f = \int_{-1}^{1} H_B(t)\, D^2 f(t)\, dt \tag{6.18.12}$$

и интеграл

$$\int_{-1}^{1} \{H_B(t)\}^2\, dt \tag{6.18.13}$$

принимает наименьшее значение, когда $B \circ f = \mathscr{L} \circ S_{\Delta, f}$, где $S_\Delta(f; x)$ — кубический сплайн типа II′, интерполирующий функцию $f(x)$ на сетке Δ: $-1 < 0 < 1$. Пусть

$$u_1(x) = 1, \quad u_2(x) = x, \quad u_3(x) = \frac{1}{2} x^2, \quad u_4(x) = \frac{1}{6} x^3; \tag{6.18.14}$$

тогда

$$S_\Delta(f; x) = c_{11} u_1((x) + c_{12} u_2(x) + c_{13} u_3(x) + c_{14} u_4(x) \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 0), \tag{6.18.15.1}$$

$$S_\Delta(f; x) = c_{21} u_1(x) + c_{22} u_2(x) + c_{23} u_3(x) + c_{24} u_4(x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1) \tag{6.18.15.2}$$

и

$$\mathscr{L}\circ S_{\Delta, f} = c_{11}\int_{-1}^{0} u_1(x)\,dx + c_{12}\int_{-1}^{0} u_2(x)\,dx + c_{13}\int_{-1}^{0} u_3(x)\,dx + c_{14}\int_{-1}^{0} u_4(x)\,dx +$$
$$+ c_{21}\int_{0}^{1} u_1(x)\,dx + c_{22}\int_{0}^{1} u_2(x)\,dx + c_{23}\int_{0}^{1} u_3(x)\,dx + c_{24}\int_{0}^{1} u_4(x)\,dx.$$

Поскольку

$$\int_0^1 u_1(x)\,dx = 1, \qquad \int_{-1}^0 u_1(x)\,dx = 1,$$
$$\int_0^1 u_2(x)\,dx = 1, \qquad \int_{-1}^0 u_3(x)\,dx = -\frac{1}{2},$$
$$\int_0^1 u_3(x)\,dx = \frac{1}{6}, \qquad \int_{-1}^0 u_3(x)\,dx = \frac{1}{6},$$
$$\int_0^1 u_4(x)\,dx = \frac{1}{24}, \qquad \int_{-1}^0 u_4(x)\,dx = -\frac{1}{24},$$

то

$$\mathscr{L}\circ S_{\Delta, f} = c_{11} - \frac{1}{2}c_{12} + \frac{1}{6}c_{13} - \frac{1}{24}c_{14} + c_{21} + \frac{1}{2}c_{22} + \frac{1}{6}c_{23} + \frac{1}{24}c_{24}.$$

Из интерполяционных свойств сплайна $S_\Delta(f; x)$ вытекает, что

$$f(0) = c_{11} = c_{21},$$
$$f(-1) = c_{11} - c_{12} + \frac{1}{2}c_{13} - \frac{1}{6}c_{14},$$
$$f(1) = c_{21} + c_{22} + \frac{1}{2}c_{23} + \frac{1}{6}c_{24},$$

а условия непрерывности производных $S'_\Delta(f; x)$ и $S''_\Delta(f; x)$ в точке $x = 0$ дают $c_{12} = c_{22}$ и $c_{13} = c_{23}$. И наконец, так как сплайн принадлежит типу II′, то

$$0 = c_{13} - c_{14}, \qquad 0 = c_{23} + c_{24}.$$

Итак,

$$c_{13} = c_{23} = c_{14} = -c_{24}$$

и

$$\mathscr{L}\circ S_{\Delta, f} = 2c_{11} + \frac{1}{4}c_{13}.$$

Кроме того, $c_{11} = f(0)$, так что

$$f(-1) - f(0) = -c_{12} + \frac{1}{3}c_{13},$$
$$f(1) - f(0) = c_{12} + \frac{1}{3}c_{13}.$$

Отсюда следует равенство

$$c_{13} = \frac{3f(-1) - 6f(0) + 3f(1)}{2},$$

из которого в свою очередь вытекает, что

$$\mathscr{L} \circ S_{\Delta, f} = \frac{3f(-1) + 10f(0) + 3f(1)}{8}. \tag{6.18.16}$$

Эта формула называется правилом 3—10—3; ее получил Сард [1, стр. 42], непосредственно минимизируя интеграл (6.18.13).

Если потребовать, чтобы функционал B был точен для полиномов второй степени, то с меньшим усилием можно получить более известную квадратурную формулу. В этом случае

$$\mathscr{L} \circ f - B \circ f = \int_{-1}^{1} H_B(t)\, D^3 f(t)\, dt, \tag{6.18.17}$$

и интеграл (6.18.13) принимает наименьшее значение, когда $B \circ f = \mathscr{L} \circ S_{\Delta, f}$, где $S_\Delta(f; x)$ — сплайн пятой степени типа II′, интерполирующий функцию $f(x)$ на сетке Δ. Так как функция

$$y(x) = \frac{f(-1) - 2f(0) + f(1)}{2} x^2 + \frac{f(1) - f(-1)}{2} x + f(0) \tag{6.18.18}$$

интерполирует $f(x)$ на Δ и является сплайном пятой степени типа II′ на Δ, то в силу единственности сплайна $S_\Delta(f; x)$

$$S_\Delta(f; x) \equiv y(x).$$

Следовательно,

$$\mathscr{L} \circ S_{\Delta, f} = \frac{f(-1) - 2f(0) + f(1)}{3} + 2f(0) = \frac{f(-1) + 4f(0) + f(1)}{3};$$

эта формула известна под названием формулы Симпсона. Ее также получил Сард, непосредственно минимизируя интеграл (6.18.13). Кроме того, Сард показал, что если функционал B точен для полиномов третьей степени, то остаток имеет вид

$$\mathscr{L} \circ f - B \circ f = \int_{-1}^{1} H_B(t)\, D^4 f(t)\, dt. \tag{6.18.19}$$

При этом интеграл (6.18.13) также принимает наименьшее значение, когда функционал B определяется по формуле Симпсона.

Вывод этой формулы с помощью теории сплайнов приводит к серьезным трудностям, так как полиномиальные сплайны седьмой степени типа II′ определяются на Δ неоднозначно. Один из возможных сплайнов — полином $y(x)$ второй степени, определяемый равенством (6.18.18); он дает формулу Симпсона. Если же к сетке Δ добавить любую четвертую точку p, то на новой сетке $\overline{\Delta}$ полиномиальный сплайн $S_{\overline{\Delta}}(f; x)$ седьмой степени типа II′ определится

однозначно и совпадет с кубическим полиномом, интерполирующим $f(x)$ на $\bar{\Delta}$. Если $B \circ f = \mathscr{L} \circ S_{\Delta, f}$ и функционал B точен для кубических полиномов, то равенство (6.18.19) справедливо, и при таком выборе B интеграл (6.18.13) принимает наименьшее значение.

Пусть

$$u(x) = \frac{x^3 - x}{p^3 + p};$$

тогда кубический полином $u(x)$ обращается в нуль на Δ и равен 1 в точке p. Кроме того,

$$S_\Delta(f; x) = y(x) + \{f(p) - y(p)\} u(x)$$

и $\mathscr{L} \circ S_{\Delta, f} = \mathscr{L} \circ y + \{f(p) - y(p)\} \mathscr{L} \circ u = \mathscr{L} \circ y$. Итак, мы подтвердили хорошо известный результат, что формула Симпсона точна для кубических полиномов, и указали, все еще в соответствии с Сардом, аппроксимирующий функционал вида (6.18.10), точный для кубических полиномов. При этом остаточный член представим в виде (6.18.19) и интеграл (6.18.13) принимает наименьшее значение, когда функционал B определяется из формулы Симпсона. Кроме того, мы показали, что добавление четвертого узла к сетке Δ и рассмотрение аппроксимирующих функционалов B вида

$$B \circ f = af(-1) + bf(0) + cf(1) + df(p)$$

не приводят к улучшению приближения интеграла относительно меры (6.18.13).

Мы разобрали примеры, в которых участвовали только полиномиальные сплайны; теперь нам понадобятся обобщенные сплайны. Рассмотрим задачу вычисления собственных значений линейного дифференциального оператора (6.1.1) при условии, что задано n линейно независимых вспомогательных условий, каждое из которых требует, чтобы функция $f(x)$ или одна из ее первых $n - 1$ производных обращалась в нуль в некоторой точке отрезка $[a, b]$. Ограничимся простым случаем, когда вспомогательные условия заданы только на концах отрезка. Пусть

$$\begin{aligned} f^{(\alpha_i)}(a) &= 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, I;\ \alpha_i \neq \alpha_j,\ i \neq j), \\ f^{(\gamma_j)}(b) &= 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, J;\ \gamma_i \neq \gamma_j,\ i \neq j), \end{aligned} \tag{6.18.20}$$

где $I + J = n$ и все числа α_i и γ_j меньше n. Пусть дана сетка Δ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ и $\mathscr{F}_\Delta$ обозначает семейство простых обобщенных сплайнов $S_\Delta(L; x)$, связанных с оператором L и удовлетворяющих краевым условиям (6.18.20) и дополнительным условиям

$$\begin{aligned} \beta_{n-\alpha_i-1}(S_\Delta; a) &= 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, I), \\ \beta_{n-\gamma_j-1}(S_\Delta; b) &= 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, J), \end{aligned} \tag{6.18.21}$$

где функция $\beta_j(v; x)$ определяется формулой (6.3.2). Кроме того, мы предполагаем, что если $Ly \equiv 0$ и y удовлетворяет условиям (6.18.20), то $y \equiv 0$.

Прежде чем приступить к задаче о собственных значениях, связанной с оператором L и условиями (6.18.20), рассмотрим задачу нахождения решения неоднородного уравнения

$$Lf(x) = g(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b, \tag{6.18.22}$$

удовлетворяющего условиям

$$\begin{aligned} f^{(\alpha_i)}(a) &= A_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, I;\ \alpha_i \neq \alpha_j,\ i \neq j), \\ f^{(\gamma_j)}(b) &= B_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, J;\ \gamma_i \neq \gamma_j,\ i \neq j), \end{aligned} \tag{6.18.23}$$

где $I + J = n$ и числа α_i и γ_j меньше n. Если решение соответствующего однородного уравнения удовлетворяет условиям (6.18.23) и можно найти частное решение уравнения (6.18.22), удовлетворяющее однородным краевым условиям (6.18.20), то неоднородное уравнение также разрешимо.

Заметим, что $\mathscr{F}_\Delta$ — пространство со скалярным произведением

$$(f, g)_L = \int_a^b Lf(x)\, Lg(x)\, dx.$$

Пусть его размерность равна m и $\{u_i(L; x)\}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ — его ортогональный базис. Пусть $\{P_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ — последовательность различных точек из $[a, b]$, отличных от узлов сетки Δ. Образуем последовательность сеток $\{\pi_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, начиная с $\pi_0 = \Delta$ и последовательно добавляя по одной точке P_i в порядке их нумерации, причем последовательность $\{P_i\}$ должна быть такой, чтобы выполнялось условие $\| \pi_i \| = O(1/i)$. Таким образом, можно ввести такие дополнительные ортонормальные сплайны $S_i(L; x)$, удовлетворяющие краевым условиям (6.18.20) и (6.18.21), что последовательность $\{S_i(L; x)\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ вместе с $\{u_i(L; x)\}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ образует канонический сеточный базис для $\mathscr{K}^n(a, b)$. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет уравнению (6.18.22) и краевым условиям (6.18.20). Тогда по теореме 6.17.2, если краевые условия (6.18.20) однозначно определяют решение дифференциального уравнения (6.18.22), то

$$f(x) = \int_a^b H(L; x, t)\, Lf(t)\, dt, \tag{6.18.24}$$

где $H(L; x, t)$ — предел в смысле среднеквадратического последовательности $\{H_N(L; x, t)\}$ $(N = 1, 2, \ldots)$,

$$H_N(L; x, t) = \sum_{i=1}^{m} u_i(L; x)\, Lu_i(L; t) + \sum_{i=1}^{N} S_i(L; x)\, LS_i(L; t). \tag{6.18.25}$$

Применяя лемму 6.16.1, получаем

$$|S_i(L; x)| \leqslant K\left(\frac{1}{i}\right)^{n-1/2} \qquad (i = 1, 2, \ldots). \tag{6.18.26}$$

Решение $f(x)$ уравнения (6.18.22), удовлетворяющее условиям (6.18.23), имеет вид

$$f(x) = G(x) + \int_a^b H(L; x, t)\, g(t)\, dt, \tag{6.18.27}$$

где $G(x)$ — решение соответствующего однородного уравнения. Ядро $H(L; x, t)$ можно интерпретировать как функцию Грина.

Задача о собственных значениях уравнения

$$Lv(x) = \lambda v(x), \tag{6.18.28}$$

где функция $v(x)$ удовлетворяет условиям (6.18.20), эквивалентна задаче о собственных значениях интегрального уравнения

$$v(x) = \lambda \int_a^b H(L; x, t)\, v(t)\, dt. \tag{6.18.29}$$

Но последняя задача имеет важное преимущество перед первой, поскольку $H(L; x, t)$ в случае $n \geqslant 2$ представляет собой предел в среднеквадратическом вырожденных ядер $H_N(L; x, t)$. В этом случае приближенное решение находится из интегрального уравнения с вырожденным ядром. При обосновании аппроксимации и установлении скорости сходимости можно использовать неравенство (6.18.26).

Применение обобщенных сплайнов в подобных задачах не ограничивается специальными краевыми условиями (6.18.20). В общем случае требования на краевые условия должны быть такими, чтобы выполнялось первое интегральное соотношение. Если дана сетка Δ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ и линейный дифференциальный оператор L, то первое интегральное соотношение выполняется, если

$$\sum_{i=1}^{N} P\,[f - S_{\Delta, f},\ LS_{\Delta, f}]\,\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} = 0, \tag{6.18.30}$$

где $P(u, v)$ — билинейная форма оператора L. В силу условий интерполяции и непрерывности, наложенных на сплайн $S_\Delta(f; x)$, равенство (6.18.30) принимает вид

$$P\,[f - S_{\Delta, f},\ LS_{\Delta, f}]\,\Big|_a^b = 0. \tag{6.18.31}$$

Следовательно, если разность $f(x) - S_\Delta(f; x)$ удовлетворяет линейным однородным краевым условиям, при которых уравнение (6.18.22) имеет единственное решение на отрезке $[a, b]$, и $LS_\Delta(f; x)$ удовлетворяет сопряженному множеству краевых условий, то равенство (6.18.31) справедливо. Дальше теория развивается, как и прежде.

Другое важное замечание состоит в том, что если дан самосопряженный дифференциальный оператор $R = L^*L$, где L не имеет особенностей на $[a, b]$, то можно с помощью тех же методов решить уравнение

$$Rf(x) = g(x), \tag{6.18.32}$$

удовлетворяющее самосопряженным линейным однородным краевым условиям, гарантирующим справедливость равенства (6.18.31). Такими условиями будут, например, условия

$$f^{(\alpha)}(a) = f^{(\alpha)}(b) = 0 \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{6.18.33}$$

При их выполнении

$$f(x) = \int_a^b H(R; x, t)\, Rf(t)\, dt, \tag{6.18.34}$$

где $H(R; x, t)$ — равномерный предел последовательности $\{H_N(R; x, t)\}$ $(N = 1, 2, \ldots)$,

$$H_N(R; x, t) = \sum_{i=1}^{m} u_i(L; x)\, u_i(L; t) + \sum_{i=1}^{N} S_i(L; x)\, S_i(L; t). \tag{6.18.35}$$

Равенство (6.18.34) можно доказать так же, как равенство (6.18.24). Следует только заметить, что в этом случае

$$\int_a^b LS_i(L; x)\, Lf(x)\, dx = \int_a^b S_i(L; x)\, L^*Lf(x)\, dx.$$

Аналогичные замечания относятся к задаче о собственных значениях уравнения

$$Rf(x) = \lambda f(x).$$

Если порядок оператора R равен 2, то оператор L имеет первый порядок. Поэтому неравенство (6.18.26) слишком слабое для установления равномерной сходимости $H_N(R; x, t)$ к $H(R; x, t)$. Однако, если в наш канонический сеточный базис добавлять новые узлы, двигаясь слева направо, и на каждом шаге вводить точку, делящую пополам интервал сетки, то равномерность сходимости можно будет доказать. Здесь важно, что базисные элементы $S_i(L; x)$ тождественно равны нулю всюду, кроме двух смежных интервалов сетки, разделенных узлом из соответствующей сетки π_i, в котором сплайн $S_i(L; x)$ интерполирует ненулевое значение. Так как сплайн $S_i(L; x)$ единствен и оператор L имеет первый порядок, то достаточно потребовать только непрерывности сплайна $S_i(L; x)$, а не его производных. Таким образом, если бы сплайн $S_i(L; x)$ не обращался в нуль тождественно на интервале сетки, в обоих концах которого он равен нулю, то это бы противоречило его единственности, ибо тогда существовал бы другой сплайн с теми же свойствами интерполяции и непрерывности, что и у сплайна $S_i(L; x)$, переопределенного так, что он на рассматриваемом интервале сетки обращается в нуль. Итак, для любой точки x из отрезка $[a, b]$ на каждом шаге только два базисных элемента не обращаются в ней в нуль. Так как на каждом шаге сеточные интервалы делятся пополам, то равномерная сходимость следует из леммы (6.16.1).

В заключение этой главы приведем пример, в котором для приближения линейного функционала $\mathscr{L}$ требуются гетерогенные сплайны. Пример взят

из численного анализа или, более точно, из области численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Предположим, что интегрирование ведется с постоянным шагом. Так как зависимость от длины шага линейна, то можно считать ее равной единице. Рассмотрим два последовательных интервала, определенных точками x_{n-1}, x_n, x_{n+1}; в качестве этих точек можно взять 0, 1, 2 соответственно. Таким образом, дана сетка $0 < 1 < 2$ и надо получить формулу для вычисления значения функции $f(x)$ в точке $x = 2$, зная ее значения в точках $x = 0$, $x = 1$ и значения ее первой производной во всех трех точках. Мы хотим, чтобы для кубических полиномов аппроксимация была точной. (Здесь предполагается, что найдены удовлетворительные значения функции $f(x)$ и производной $f'(x)$ в точках $x = 0$ и $x = 1$ и с помощью предварительной формулы и дифференциального уравнения получено приемлемое значение $f'(x)$ в точке $x = 2$ для использования его в уточняющей формуле.) Наконец, мы хотим, чтобы уточняющая формула была линейной функцией пяти величин $f(0)$, $f(1)$, $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(2)$ и чтобы эти величины полностью отражали зависимость формулы от функции $f(x)$.

Из общей теории следует, что, если линейный функционал $\mathscr{L}$, определяемый равенством $\mathscr{L} \circ f = f(2)$, удовлетворяет этим условиям, то его можно приблизить с помощью гетерогенного полиномиального сплайна $S_\Delta(f; x)$ седьмой степени. Имеем

$$f(2) = S_\Delta(f; 2) + \mathscr{R}(2),$$

где остаточный член $\mathscr{R}(2)$ можно представить в виде

$$\mathscr{R}(2) = \int_0^2 H(2, t)\, D^4 f(x)\, dt. \tag{6.18.36}$$

Интеграл

$$\int_0^2 \{H(2, t)\}^2\, dt \tag{6.18.37}$$

принимает наименьшее значение, когда в качестве аппроксимирующего функционала взят сплайн $S_\Delta(f; 2)$. Сплайн $S_\Delta(f; x)$ полностью определяется условиями

$$\left.\begin{aligned}
&S_\Delta(f; 0) = f(0), \quad S_\Delta(f; 1) = f(1);\\
&S'_\Delta(f; 0) = f'(0), \quad S'_\Delta(f; 1) = f'(1), \quad S'_\Delta(f; 2) = f'(2);\\
&S_\Delta^{(\alpha)}(f; 1+0) = S_\Delta^{(\alpha)}(f; 1-0) \quad (\alpha = 0, 1, 2, 3, 4, 5);\\
&S_\Delta^{(\alpha)}(f; 0) = 0 \quad (\alpha = 4, 5);\\
&S_\Delta^{(\alpha)}(f; 2) = 0 \quad (\alpha = 4, 5, 7).
\end{aligned}\right\} \tag{6.18.38}$$

Если $u_i(x) = x^{i-1}$ $(i = 1, 2, \ldots, 8)$ и

$$S_\Delta(f; x) = \begin{cases} c_{11}u_1(x) + c_{12}u_2(x) + \ldots + c_{18}u_8(x), & 0 \leqslant x \leqslant 1,\\ c_{21}u_2(x) + c_{22}u_2(x) + \ldots + c_{28}u_8(x), & 1 \leqslant x \leqslant 2, \end{cases}$$

то условия (6.18.38) дают 16 линейно независимых уравнений для выражения 16 величин c_{ij} через $f(0)$, $f(1)$, $f'(0)$, $f'(1)$ и $f'(2)$. Точное решение этой системы приводит к формуле

$$f(2)=\frac{8}{43}f(1)+\frac{35}{43}f(0)+\frac{15}{43}f'(2)+\frac{52}{43}f'(1)+\frac{11}{43}f'(0), \qquad (6.18.39)$$

полученной Сардом [1, стр. 83]. Сард указал также, что это решение устойчиво и сходится в смысле Далквиста [1]. При численном решении системы, порожденной условиями (6.18.36), получаются следующие значения коэффициентов:

$$\left.\begin{aligned}\frac{8}{43}&\approx 0{,}1860464,\\ \frac{35}{43}&\approx 0{,}8139536,\\ \frac{15}{43}&\approx 0{,}3488372,\\ \frac{52}{43}&\approx 1{,}209302,\\ \frac{11}{43}&\approx 0{,}2558140.\end{aligned}\right\} \qquad (6.18.40)$$

Глава VII. ДВАЖДЫ КУБИЧЕСКИЕ СПЛАЙНЫ

7.1. Введение

До сих пор мы изучали только теорию одномерных сплайнов, но она легко обобщается на бо́льшие размерности. В одномерной теории сплайнов основную роль играли простые кубические сплайны, а в двумерной теории основными будут простые дважды кубические сплайны (разд. 1.2). В этой главе мы ограничимся простыми двумерными сплайнами, общий случай рассмотрим в гл. VIII.

Пусть на плоскости задана прямоугольная область $\mathscr{R}$: $a \leqslant t \leqslant b$; $c \leqslant s \leqslant d$. Если даны две одномерные сетки Δ_t: $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b$ и Δ_s: $c = s_0 < s_1 < \ldots < s_M = d$, то двумерная сетка $\pi = \{P_{ij}\}$ $(i = 0, 1, \ldots, N;\ j = 0, 1, \ldots, M)$, где $P_{ij} = (t_i, s_j)$, разбивает область $\mathscr{R}$ на прямоугольники

$$\{\mathscr{R}_{ij}:\ t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i;\ s_{j-1} \leqslant s \leqslant s_j\} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N;\ j = 1, 2, \ldots, M).$$

Функция $S_\pi(t, s)$ называется *простым дважды кубическим сплайном* относительно сетки π, если 1) она совпадает с бикубическим полиномом на каждом прямоугольнике $\mathscr{R}_{ij}$ и 2) принадлежит классу $C_2^4(\mathscr{R})$, где $C_r^n(\mathscr{R})$ — семейство функций $f(t, s)$, определенных на $\mathscr{R}$, n-я частная производная которых, включающая не более r дифференцирований относительно каждой переменной, существует и непрерывна.

Как и в одномерном случае, можно провести различие между сплайном и его представлениями. Можно представить двумерные сплайны в виде линейной функции конечного числа линейно независимых параметров; выбор этих параметров, так называемых «определяющих значений», осуществляется не единственным образом. В этой главе мы ограничимся определенной, но важной группой таких представлений. Сплайн имеет представление *типа* I, если в число его определяющих значений входят следующие значения его частных производных:

$$\begin{aligned}
&\text{a)}\ \frac{\partial S_\pi}{\partial t} \text{ в узлах } \{P_{ij}\} && (i = 0, N;\ j = 0, 1, \ldots, M),\\
&\text{b)}\ \frac{\partial S_\pi}{\partial s} \text{ в узлах } \{P_{ij}\} && (i = 0, 1, \ldots, N;\ j = 0, M),\\
&\text{c)}\ \frac{\partial^2 S_\pi}{\partial t\, \partial s} \text{ в узлах } \{P_{ij}\} && (i = 0, N;\ j = 0, M).
\end{aligned} \tag{7.1.1}$$

Остальные параметры, необходимые для единственности представления сплайна $S_\pi(t, s)$, иногда не выделяют; в случае интерполяционных сплайнов на π они совпадают со значениями сплайна $S_\pi(t, s)$ в узлах сетки π. Аналогично

сплайн имеет представление *типа* II, если в число его определяющих значений входят следующие значения его частных производных:

$$\begin{aligned} &\text{a) } \frac{\partial^2 S_\pi}{\partial t^2} \text{ в узлах } \{P_{ij}\} \quad (i=0, N;\ j=0, 1, \ldots, M),\\ &\text{b) } \frac{\partial^2 S_\pi}{\partial s^2} \text{ в узлах } \{P_{ij}\} \quad (i=0, 1, \ldots, N;\ j=0, M),\\ &\text{c) } \frac{\partial^4 S_\pi}{\partial t^2\, \partial s^2} \text{ в узлах } \{P_{ij}\} \quad (i=0, N;\ j=0, M). \end{aligned} \tag{7.1.2}$$

Двумерные сплайны называются *периодическими по* t, если $S_\pi(t, s)$, $\partial S_\pi(t, s)/\partial t$ и $\partial^2 S_\pi(t, s)/\partial t^2$ — периодические функции с периодом $b - a$ по t. Аналогично определяется сплайн, *периодический по* s. Сплайн называется *дважды периодическим*, если он периодический по t и по s с периодами $b - a$ и $d - c$ соответственно. Наиболее удобно в качестве определяющих значений дважды периодического сплайна взять его значения в точках $\{P_{ij}\}$ ($i = 1, 2, \ldots, N$; $j = 1, 2, \ldots, M$). Такой сплайн называют *дважды периодическим интерполяционным сплайном на* π. Иногда слова «дважды» и «на π» мы будем опускать.

Если значения (7.1.1) равны нулю, то говорят, что сплайн принадлежит *типу* I′. Если значения (7.1.2) равны нулю, то говорят, что сплайн принадлежит *типу* II′. Как и в одномерном случае, разделим функции $f(t, s)$, определенные на $\mathscr{R}$, на *классы эквивалентности типа* I и *типа* II: будем говорить, что две функции принадлежат одному и тому же классу эквивалентности типа I, если их частные производные (7.1.1) определены и совпадают. Функции, для которых величины в (7.1.1) определены и равны нулю, называются *функциями типа* I′. Аналогично определяются *функции типа* II и *функции типа* II′. Однако в отличие от одномерных аналогов эти определения зависят от выбора сетки, ибо они зависят и от количества узлов сетки, и от их расположения на границе области $\mathscr{R}$.

Исторически теория двумерных сплайнов отстала от ее одномерного аналога более чем на 15 лет. Первую попытку обобщения предприняли в 1960 г. Биркгоф и Гарабедян [1]. Год спустя де Бур [2] заложил основы теории двумерных сплайнов, установив существование простого сплайна типа I, интерполирующего функцию $f(t, s)$ на прямоугольной сетке. Свойства минимальной нормы, наилучшего приближения, сходимости и ортогональности получили в 1964 г. Алберг, Нильсон и Уолш [4, 10].

Прежде чем развивать дальше теорию дважды кубических сплайнов, рассмотрим одно полезное обобщение.

7.2. Частичные сплайны

Пусть даны прямоугольник $\mathscr{R}$: $a \leqslant t \leqslant b$, $c \leqslant s \leqslant d$, сетка Δ_t: $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b$ и $N + 1$ функций $f_i(s)$ ($i = 0, 1, \ldots, N$), определенных на отрезке $c \leqslant s \leqslant d$. Для каждого s можно образовать одномерный кубический сплайн $S_\Delta(Y(s); t)$ типа II′, где

$$Y(s) = [f_0(s), f_1(s), \ldots, f_N(s)]^{\mathrm{T}}. \tag{7.2.1}$$

Аналогично, если $f_0(s) = f_N(s)$, то можно образовать периодические сплайны $S_\Delta(Y(s); t)$ или, если дополнительно даны две функции $g_0(s)$ и $g_N(s)$, можно образовать сплайны типов I и II; при этом дополнительные производные по t в точках $t = a$ и $t = b$ для данного значения s полагаются равными значениям функций $g_0(s)$ и $g_N(s)$ соответственно. При фиксированном s выполняются в одномерном смысле свойства минимальной нормы и наилучшего приближения. Если функции $f_i(s)$ $(i = 0, 1, \ldots, N)$, $g_0(s)$ и $g_N(s)$ принадлежат пространству $L(c, d)$, то и $S_{\Delta t}(Y(s); t)$, $\partial S_{\Delta t}(Y(s); t)/\partial t$, $\partial^2 S_{\Delta t}(Y(s); t)/\partial t^2$ принадлежат этому пространству, поскольку сплайн $S_\Delta(Y(s); t)$ линейно зависит от функций $f_i(s)$, $g_0(s)$, $g_N(s)$ и они полностью отражают его зависимость от s. В таком случае теорема 7.2.1 служит типичным примером теорем, справедливых для частичных сплайнов. Ее доказательство немедленно следует из теории одномерных сплайнов. За исключением нескольких замечаний, касающихся сходимости и действия линейных операторов на частичные сплайны, мы предоставляем читателю самому перенести всю теорию одномерных сплайнов на частичные сплайны.

Теорема 7.2.1. *Пусть даны сетка* Δ_t: $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b$ *и функций* $f_i(s)$ $(i = 0, 1, \ldots, N)$ *из* $L(c, d)$. *Среди всех функций* $f(t, s)$, *определенных в прямоугольнике* $\mathcal{R}$: $a \leqslant t \leqslant b$, $c \leqslant s \leqslant d$, *совпадающих с* $f_i(s)$ *при* $t = t_i$ $(i = 0, 1, \ldots, N)$ *и при каждом* $s \in [c, d]$ *принадлежащих классу* $\mathcal{K}^2(a, b)$, *частичный сплайн* $S_{\Delta_t}(Y(s); t)$ *типа* II′, *где вектор* $Y(s)$ *задан формулой* (7.2.1), *минимизирует интеграл*

$$\int_c^d \int_a^b \left\{\frac{\partial^2 f(t, s)}{\partial t^2}\right\}^2 dt\, ds$$

и является единственной допустимой функцией, минимизирующей этот интеграл.

При измельчении сетки Δ_t функции $S_{\Delta_t}(Y(s); t)$ и $\partial S_{\Delta_t}(Y(s); t)/\partial t$ для каждого s сходятся соответственно к $f(t, s)$ и $\partial f(t, s)/\partial t$ равномерно относительно t. Если интеграл

$$\int_a^b \left\{\frac{\partial^2 f(t, s)}{\partial t^2}\right\}^2 dt$$

равномерно ограничен относительно s, то сходимость также равномерна относительно s. Важно заметить, что в силу линейной зависимости $S_{\Delta_t}(Y(s); t)$ от $f_i(s)$ $(i = 0, 1, \ldots, N)$, $g_0(s)$ и $g_N(s)$

$$\frac{\partial^\alpha S_{\Delta_t}(Y(s); t)}{\partial s^\alpha} = S_{\Delta_t}\left(\frac{\partial^\alpha Y(s)}{\partial s^\alpha}; t\right)$$

для всех α, для которых производная $\partial^\alpha Y(s)/\partial s^\alpha$ определена. На самом деле это соотношение выполняется для достаточно хороших линейных операторов.

Далее,

$$\int_c^d S_{\Delta_t}(Y(s);\ t)\,ds = S_{\Delta_t}\Big(\int_c^d Y(s)\,ds;\ t\Big).$$

В дальнейшем мы будем рассматривать простые частичные сплайны. Так называются только что введенные одномерные сплайны, если они при фиксированном значении s являются простыми.

7.3. Связь частичных сплайнов с дважды кубическими сплайнами

Введение частичных сплайнов облегчает построение дважды кубических сплайнов; оно сводит его к построению одномерных сплайнов.

Пусть функция $f(t,\ s)$ задана в прямоугольнике $\mathcal{R}$: $a \leqslant t \leqslant b$, $c \leqslant s \leqslant d$. Если сетка π на $\mathcal{R}$ определяется одномерными сетками Δ_t: $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b$ и Δ_s: $c = s_0 < s_1 < \ldots < s_M = d$ и для $f(t,\ s)$ существуют частичные производные (7.1.1), то можно положить

$$\begin{aligned} f_i(s) &= f(t_i,\ s) \qquad (i = 0,\ 1,\ \ldots,\ N), \\ g_i(s) &= \frac{\partial f(t_i,\ s)}{\partial t} \qquad (i = 0,\ N), \end{aligned} \tag{7.3.1}$$

и для $i = 0,\ 1,\ \ldots,\ N$ построить сплайн $S_{\Delta_s}(f_i;\ s)$ типа I, интерполирующий $f_i(s)$ на Δ_s и такой, что разность $f_i(s) - S_{\Delta_s}(f_i;\ s)$ принадлежит типу I′. Пусть $S_{\Delta_s}(g_i;\ s)$ $(i = 0,\ N)$ — аналогичный сплайн для функций $g_0(s)$ и $g_N(s)$. Обозначим через $S_\pi(f;\ t,\ s)$ частичный сплайн типа I, определенный сплайнами $S_{\Delta_s}(f_i;\ s)$ $(i = 0,\ 1,\ \ldots,\ N)$ и $S_{\Delta_s}(g_i;\ s)$ $(i = 0,\ N)$. Легко проверить, что $S_\pi(f;\ t,\ s)$ — простой дважды кубический сплайн, интерполирующий функцию $f(t,\ s)$ на сетке π. Следует только заметить, что при $t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i$

$$S_\pi(f;\ t,\ s) = \sum_{h=0}^{N} A_{ih}(t)\,S_{\Delta_s}(f_h;\ s) + \\ + B_{i0}(t)\,S_{\Delta_s}(g_0;\ s) + B_{iN}(t)\,S_{\Delta_s}(g_N;\ s), \tag{7.3.2}$$

где $A_{ij}(t)$ $(j = 0,\ 1,\ \ldots,\ N)$ и $B_{ij}(t)$ $(j = 0,\ N)$ — кубические полиномы относительно t. Но так как при $s_{j-1} \leqslant s \leqslant s_j$ $(j = 0,\ 1,\ \ldots,\ M)$ функции $S_{\Delta_s}(f_i;\ s)$ $(i = 0,\ 1,\ \ldots,\ N)$ и $S_{\Delta_s}(g_i;\ s)$ $(i = 0,\ N)$ являются кубическими полиномами относительно s, то в каждом прямоугольнике $\mathcal{R}_{ij}$: $t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i$, $s_{j-1} \leqslant s \leqslant s_j$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N;\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ M)$ функция $S_\pi(f;\ t,\ s)$ совпадает с двойным кубическим полиномом. Из способа построения ясно, что $S_\pi(f;\ t,\ s)$ принадлежит классу $C_2^4(\mathcal{R})$.

Это построение доказывает существование по крайней мере одного простого дважды кубического сплайна типа I, интерполирующего функцию $f(t,\ s)$ в узлах сетки π и такого, что разность $f(t,\ s) - S_\pi(f;\ t,\ s)$ принадлежит типу I′. При этом естественно сразу же возникает вопрос о единственности, ибо можно получить второй такой сплайн, поменяв ролями переменные s и t. Единственность будет довольно просто доказана после распространения на дважды куби-

ческие сплайны свойства минимальной нормы. Можно также установить единственность, исследовав более тщательно равенство (7.3.2).

Аналогично строятся периодические сплайны и сплайны типа II, интерполирующие функцию $f(t, s)$ на сетке π. Заметим, что кубические полиномы по s и t, к которым сводится сплайн $S_\pi(f; t, s)$ на границе каждого прямоугольника $\mathcal{R}_{ij}$, дают достаточно информации для определения сплайна $S_\pi(f; t, s)$ на $\mathcal{R}_{ij}$[1]). Эти кубические полиномы можно получить из одномерных сплайнов, участвующих в построении сплайна $S_\pi(f; t, s)$. Так как при его построении используются значения функции $f(t, s)$ и некоторых ее производных лишь в конечном числе точек, то функция $f(t, s)$ является по существу произвольной функцией на $\mathcal{R}$.

7.4. Основное тождество

Пусть функция $f(t, s)$ принадлежит классу $C_2^4(R)$ и прямоугольник $\mathcal{R}$: $a \leqslant t \leqslant b$; $c \leqslant s \leqslant d$ с помощью сетки π разбит на прямоугольники $\mathcal{R}_{ij}$: $t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i$; $s_{j-1} \leqslant s \leqslant s_j$ ($i = 1, 2, \ldots, N$; $j = 1, 2, \ldots, M$; $t_0 = a$, $t_N = b$, $s_0 = c$, $s_M = d$). Тогда очевидно, что

$$\int_c^d \int_a^b \left\{\frac{\partial^4 f(t, s)}{\partial s^2\, \partial t^2}\right\}^2 dt\, ds = \int_c^d \int_a^b \left\{\frac{\partial^4 S_\pi(t, s)}{\partial s^2\, \partial t^2}\right\}^2 dt\, ds + \int_c^d \int_a^b \left\{\frac{\partial^4 f(t, s)}{\partial s^2\, \partial t^2} - \frac{\partial^4 S_\pi(t, s)}{\partial s^2\, \partial t^2}\right\}^2 dt\, ds + 2\int_c^d \int_a^b \left\{\frac{\partial^4 f(t, s)}{\partial s^2\, \partial t^2} - \frac{\partial^4 S_\pi(t, s)}{\partial s^2\, \partial t^2}\right\} \frac{\partial^4 S_\pi(t, s)}{\partial s^2\, \partial t^2}\, dt\, ds. \quad (7.4.1)$$

Преобразуем последний член в правой части, дважды интегрируя его по частям относительно t:

$$\int_c^d \int_a^b \left\{\frac{\partial^4 f(t, s)}{\partial s^2\, \partial t^2} - \frac{\partial^4 S_\pi(t, s)}{\partial s^2\, \partial t^2}\right\} \frac{\partial^4 S_\pi(t, s)}{\partial s^2\, \partial t^2}\, dt\, ds =$$

$$= \int_c^d \left\{\sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left\{\frac{\partial^4 f(t, s)}{\partial s^2\, \partial t^2} - \frac{\partial^3 S_\pi(t, s)}{\partial s^2\, \partial t^2}\right\} \frac{\partial^4 S_\pi(t, s)}{\partial s^2\, \partial t^2}\, dt\right\} ds =$$

$$= \int_c^d \sum_{i=1}^N \left\{-\left[\frac{\partial^2 f(t, s)}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 S_\pi(t, s)}{\partial s^2}\right] \frac{\partial^5 S_\pi(t, s)}{\partial s^2\, \partial t^3} + \left[\frac{\partial^3 f(t, s)}{\partial s^2\, \partial t} - \frac{\partial^3 S_\pi(t, s)}{\partial s^2\, \partial t}\right] \frac{\partial^4 S_\pi(t, s)}{\partial s^2\, \partial t^2}\right\} \Bigg|_{t_{i-1}}^{t_i} ds,$$

[1]) Это утверждение нуждается в пояснении, а именно: такие величины, как $\partial^2 S_\pi / \partial s\, \partial t$, в вершинах прямоугольников $\mathcal{R}_{ij}$ получены в результате построения одномерных сплайнов, интерполирующих $\partial S / \partial s$ вдоль линий $s = s_{j-1}$ и $s = s_j$, и последующего дифференцирования по t.

и дважды по частям относительно s:

$$\int_c^d \int_a^b \left\{\frac{\partial^4 f(t,s)}{\partial s^2\,\partial t^2} - \frac{\partial^4 S_\pi(t,s)}{\partial s^2\,\partial t^2}\right\} \frac{\partial^4 S_\pi(t,s)}{\partial s^2\,\partial t^2}\,dt\,ds =$$

$$= \sum_{j=1}^{M}\left\{\sum_{i=1}^{N}\left\{[f(t,s)-S_\pi(t,s)]\frac{\partial^6 S_\pi(t,s)}{\partial s^3\,\partial t^3} - \left[\frac{\partial f(t,s)}{\partial s} - \frac{\partial S_\pi(t,s)}{\partial s}\right]\frac{\partial^5 S_\pi(t,s)}{\partial s^2\,\partial t^3} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \left[\frac{\partial f(t,s)}{\partial s} - \frac{\partial S_\pi(t,s)}{\partial s}\right]\frac{\partial^5 S_\pi(t,s)}{\partial s^3\,\partial t^2} + \left[\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial s\,\partial t} - \frac{\partial^2 S_\pi(t,s)}{\partial s\,\partial t}\right]\frac{\partial^4 S_\pi(t,s)}{\partial s^2\,\partial t^2}\right\}\Big|_{t_{i-1}}^{t_i}\right\}\Big|_{s_{j-1}}^{s_j}.$$

Отсюда и из равенства (7.4.1) выводим тождество

$$\int_c^d \int_a^b \left\{\frac{\partial^4 f(t,s)}{\partial s^2\,\partial t^2}\right\}^2 dt\,ds = \int_c^d \int_a^b \left\{\frac{\partial^4 S_\pi(t,s)}{\partial s^2\,\partial t^2}\right\}^2 dt\,ds + \int_c^d \int_a^b \left\{\frac{\partial^4 f(t,s)}{\partial s\,\partial t^2} - \frac{\partial^4 S_\pi(t,s)}{\partial s^2\,\partial t^2}\right\}^2 dt\,ds +$$

$$+2\sum_{j=1}^{M}\left\{\sum_{i=1}^{N}\left\{[f(t,s)-S_\pi(t,s)]\frac{\partial^6 S_\pi(t,s)}{\partial s^3\,\partial t^3} - \left[\frac{\partial f(t,s)}{\partial s} - \frac{\partial S_\pi(t,s)}{\partial s}\right]\frac{\partial^5 S_\pi(t,s)}{\partial s^2\,\partial t^3} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \left[\frac{\partial f(t,s)}{\partial t} - \frac{\partial S_\pi(t,s)}{\partial t}\right]\frac{\partial^5 S_\pi(t,s)}{\partial s^3\,\partial t^2} + \left[\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial s\,\partial t} - \frac{\partial^2 S_\pi(t,s)}{\partial s\,\partial t}\right]\frac{\partial^4 S_\pi(t,s)}{\partial s^2\,\partial t^2}\right\}\Big|_{t_{i-1}}^{t_i}\right\}\Big|_{s_{j-1}}^{s_j}. \tag{7.4.2}$$

Его называют *основным тождеством*; в нем $S_\pi(t, s)$ является двойным кубическим полиномом в каждом прямоугольнике $\mathscr{R}_{ij}$ ($i = 1, 2, \ldots, N$; $j = 1, 2, \ldots, M$). При его выводе не предполагалось, что функция $S_\pi(t, s)$ принадлежит классу $C_2^4(\mathscr{R})$. Если же такое предположение сделать, то $S_\pi(t, s)$ будет простым дважды кубическим сплайном на $\mathscr{R}$ и тождество (7.4.2) примет вид

$$\int_c^d \int_a^b \left\{\frac{\partial^4 f(t,s)}{\partial s^2\,\partial t^2}\right\}^2 dt\,ds =$$

$$= \int_c^d \int_a^b \left\{\frac{\partial^4 S(t,s)}{\partial s^2\,\partial t^2}\right\}^2 dt\,ds + \int_c^d \int_a^b \left\{\frac{\partial^4 f(t,s)}{\partial s^2\,\partial t^2} - \frac{\partial^4 S_\pi(t,s)}{\partial s^2\,\partial t^2}\right\}^2 dt\,ds +$$

$$+2\sum_{j=1}^{M}\left\{\sum_{i=1}^{N}[f(t,s)-S_\pi(t,s)]\frac{\partial^6 S_\pi(t,s)}{\partial s^3\,\partial t^3}\Big|_{t_{i-1}}^{t_i}\right\}\Big|_{s_{j-1}}^{s_j} -$$

$$-2\left\{\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial f(t,s)}{\partial s} - \frac{\partial S_\pi(t,s)}{\partial s}\right]\frac{\partial^5 S_\pi(t,s)}{\partial s^2\,\partial t^3}\Big|_{t_{i-1}}^{t_i}\right\}\Big|_c^d -$$

$$-2\left\{\sum_{j=1}^{M}\left[\frac{\partial f(t,s)}{\partial t} - \frac{\partial S_\pi(t,s)}{\partial t}\right]\frac{\partial^5 S_\pi(t,s)}{\partial s^3\,\partial t^2}\Big|_{s_{j-1}}^{s_j}\right\}\Big|_a^b +$$

$$+2\left\{\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial s\,\partial t} - \frac{\partial^2 S_\pi(t,s)}{\partial s\,\partial t}\right\}\frac{\partial^4 S_\pi(t,s)}{\partial s^2\,\partial t^2}\Big|_a^b\Big|_c^d. \tag{7.4.3}$$

Важно заметить, что, хотя производная $\partial^5 S_\pi(t, s)/\partial s^2\,\partial t^3$, вообще говоря, не обязательно непрерывна на прямой $t = t_j$, но ее левосторонний и правосторонний пределы при $t \to t_j$ непрерывно зависят от s. То же верно и для производной $\partial^5 S_\pi(t, s)/\partial s^3\,\partial t^2$, если поменять ролями переменные s и t. Эти свойства простых дважды кубических сплайнов были использованы при сведении основного тождества к виду (7.4.3),

7.5. Первое интегральное соотношение

При различных дополнительных условиях основное тождество приводится к интегральному соотношению

$$\int_c^d \int_a^b \left\{\frac{\partial^4 f(1,t)}{\partial s^2\,\partial t^2}\right\}^2 dt\,ds = \int_c^d \int_a^b \left\{\frac{\partial^4 S_\pi(t,s)}{\partial s^2\,\partial t^2}\right\}^2 dtds + \int_c^d \int_a^b \left\{\frac{\partial^4 f(t,s)}{\partial s^2\,\partial t^2} - \frac{\partial^4 S_\pi(t,s)}{\partial s^2\,\partial t^2}\right\}^2 dtds, \tag{7.5.1}$$

которое называется *первым интегральным соотношением*. Это снова непосредственное обобщение одномерной ситуации. Для простых интерполяционных дважды кубических сплайнов справедлива

Теорема 7.5.1. *Пусть даны прямоугольник* $\mathcal{R}$: $a \leqslant t \leqslant b$, $c \leqslant s \leqslant d$ *и сетка* π, *определенная одномерными сетками* Δ_t: $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b$ *и* Δ_s: $c = s_0 < s_1 < \ldots < s_M = d$. *Если простой дважды кубический сплайн* $S_\pi(t, s)$ *интерполирует на сетке* π *функцию* $f(t, s)$ *из класса* $C_2^4(R)$ *и выполняется одно из условий*: a) $f(t, s) - S_\pi(f; t, s)$ *принадлежит типу* I′, b) $S_\pi(f; t, s)$ *принадлежит типу* II′, c) *функция* $f(t, s)$ *и сплайн* $S_\pi(f; t, s)$ *дважды периодические, то*

$$\int_c^d \int_a^b \left\{\frac{\partial^4 f(t,s)}{\partial s^2\,\partial t^2}\right\}^2 dt\,ds = \int_c^d \int_a^b \left\{\frac{\partial^4 S_\pi(f;t,s)}{\partial s^2\,\partial t^2}\right\}^2 dt\,ds + \int_c^d \int_a^b \left\{\frac{\partial^4 f(t,s)}{\partial s^2\,\partial t^2} - \frac{\partial^4 S_\pi(f;t,s)}{\partial s^2\,\partial t^2}\right\}^2 dt\,ds.$$

Разумеется, первое интегральное соотношение справедливо и при других краевых условиях.

7.6. Свойство минимальной нормы

В качестве непосредственного следствия из теоремы 7.5.1 получаем обобщение на дважды кубические сплайны свойства минимальной нормы, характерного для одномерных сплайнов.

Теорема 7.6.1. *Пусть даны прямоугольник* $\mathcal{R}$: $a \leqslant t \leqslant b$, $c \leqslant s \leqslant d$, *сетка* π, *определенная одномерными сетками* Δ_t: $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b$

и Δ_s: $c = s_0 < s_1 < \ldots < s_M = d$, *и множество действительных чисел* $\{f_{ij}\}$ $(i = 0, 1, \ldots, N;\ j = 0, 1, \ldots, M)$, *где значения* f_{ij} *связаны с узлами сетки. Тогда среди всех функций* $f(t, s)$ *из класса* $C_2^4(\mathscr{R})$ *сплайн типа* II′, *интерполирующий значения* f_{ij} *на* π, *минимизирует интеграл*

$$\int_c^d \int_a^b \left\{\frac{\partial^4 f(t, s)}{\partial s^2\, \partial t^2}\right\}^2 dt\, ds. \tag{7.6.1}$$

Кроме того, если частная производная $\partial f(t, s)/\partial t$ *задана в точках* (t_i, s_j) $(i = 0, N;\ j = 0, 1, \ldots, M)$, *частная производная* $\partial f(t, s)/\partial s$ *задана в точках* (t_i, s_j) $(i = 0, 1, \ldots, N;\ j = 0, M)$ *и* $\partial^2 f(t, s)/dt\, ds$ — *в точках* (t_i, s_j) $(i = 0, N;\ j = 0, M)$, *то соответствующий интерполяционный сплайн типа* I *минимизирует интеграл* (7.6.1). *Если* $f_{0j} = f_{Nj}$ $(j = 0, 1, \ldots, M)$ *и* $f_{i0} = f_{iM}$ $(i = 0, 1, \ldots, N)$, *то интеграл* (7.6.1) *принимает наименьшее значение, когда в качестве функции* $f(t, s)$ *выбран дважды периодический интерполяционный сплайн*[1]).

Любая другая функция, минимизирующая этот интеграл, отличается от указанных сплайнов на решение уравнения $\partial^4 f/\partial x^2\, \partial y^2 = 0$, удовлетворяет нулевым интерполяционным условиям и принадлежит типу I′, II′ или является дважды периодической. Множество таких решений бесконечномерно.

7.7. Единственность и существование

Единственность дважды кубических интерполяционных сплайнов типов I и II, а также дважды периодических сплайнов легко следует из единственности в одномерном случае. Рассмотрим типичный случай дважды периодических интерполяционных сплайнов. Пусть два дважды периодических сплайна $S_\pi(f; t, s)$ и $\hat{S}_\pi(f; t, s)$ интерполируют на сетке π функцию $f(t, s)$, заданную на прямоугольнике $\mathscr{R}$. Тогда их разность $S_\pi(f; t, s) - S_\pi(f; t, s)$ представляет собой дважды кубический сплайн, интерполирующий нулевую функцию $z(t, s)$ на сетке π, и при $t = t_i$ или $s = s_j$ она тождественно равна нулю, ибо совпадает с периодическим сплайном, определяющие значения которого равны нулю. А так как в R_{ij} разность сплайнов совпадает с бикубическим полиномом, который на границе R_{ij} обращается в нуль и удовлетворяет уравнению $\partial^4 f(t, s)/\partial t^2\, \partial s^2 = 0$, то она равна нулю тождественно.

Теорема 7.7.1. *Пусть даны прямоугольник* $\mathscr{R}$: $a \leqslant t \leqslant b$, $c \leqslant s \leqslant d$ *и сетка* π, *определенная одномерными сетками* Δ_t: $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b$ *и* Δ_s: $c = s_0 < s_1 < \ldots < s_M = d$. *Если функция* $f(t, s)$ *задана на* $\mathscr{R}$, *простой дважды кубический сплайн* $S_\pi(f; t, s)$ *интерполирует ее на сетке* π *и выполняется одно из условий*: a) $f(t, s) - S_\pi(f; t, s)$ *принадлежит типу* I′, b) $f(t, s) - S_\pi(f; t, s)$ *принадлежит типу* II′, c) *функция* $f(t, s)$ *и сплайн* $S_\pi(f; t, s)$ *дважды периодические, то сплайн* $S_\pi(f; t, s)$ *является единственным.*

[1]) Формулировка теоремы и последующие рассуждения авторов были неточны. При переводе эти неточности устранены.— *Прим. перев.*

Замечание 7.7.1. Так как функция $f(t, s)$ определена только в узлах сетки, то в теореме 7.7.1 утверждается, что в любом классе эквивалентности типа I или II существует не более одного сплайна, интерполирующего функцию $f(t, s)$ на сетке π.

Доказательство существования одномерных кубических сплайнов в гл. III основано на изучении системы линейных уравнений, обеспечивающих выполнение условий интерполяции и непрерывности, наложенных на сплайн. В этом случае из доказанной единственности следовало, что система линейных уравнений разрешима. В двумерном случае не вполне очевидно, как записать простым способом конечную систему линейных уравнений, обеспечивающих требуемую непрерывность сплайна $S_\pi(f; t, s)$ и его производных вдоль прямых. Однако здесь существование вытекает из построения сплайна $S_\pi(f; t, s)$, выполненного в разд. 7.3, поскольку при этом построении требовалось лишь существование одномерных сплайнов. А раз существование установлено, можно выписать соответствующую систему независимых линейных уравнений, используя структуру дважды кубических сплайнов в каждом прямоугольнике $\mathcal{R}_{ij}$ (см. Алберг и др. [11]).

7.8. Наилучшее приближение

Так как сплайн линейно зависит от своих определяющих значений, то для интерполяционных сплайнов относительно сетки π при соответствующем выборе краевых условий

$$S_\pi(f + g; t, s) = S_\pi(f; t, s) + S_\pi(g; t, s). \tag{7.8.1}$$

В частности, разложение (7.8.1) справедливо, если выполнено одно из условий: a) $S_\pi(f + g; t, s) - S_\pi(f; t, s) - S_\pi(g; t, s)$ принадлежит типу I′, b) $S_\pi(f + g; t, s) - S_\pi(f; t, s) - S_\pi(g; t, s)$ принадлежит типу II′, c) функции $f(t, s)$, $g(t, s)$ и сплайны $S_\pi(f + g; t, s)$, $S_\pi(f; t, s)$ и $S_\pi(g; t, s)$ дважды периодические.

Если разложение (7.8.1) применить к разности $f(t, s) - S_\pi(t, s)$, где $S_\pi(t, s)$ — произвольный простой сплайн относительно сетки π, то в силу свойства минимальной нормы

$$\int_c^d \int_a^b \{f''(t, s) - S''_\pi(t, s)\}^2 \, dt \, ds =$$

$$= \int_c^d \int_a^b \{f''(t, s) - S''_\pi(t, s) - S''_\pi(f - S_\pi; t, s)\}^2 \, dt \, ds + \int_c^d \int_a^b \{S''_\pi(f - S_\pi; t, s)\}^2 \, dt \, ds =$$

$$= \int_c^d \int_a^b \{f''(t, s) - S''_\pi(f; t, s)\}^2 \, dt \, ds + \int_c^d \int_a^b \{S''_\pi(f - S_\pi; t, s)\}^2 \, dt \, ds,$$

если только краевые условия таковы, что $S_\pi(S_\pi; t, s) = S_\pi(t, s)$. Отсюда легко получить свойство наилучшего приближения простого дважды кубического сплайна.

Теорема 7.8.1. *Пусть даны прямоугольник* $\mathcal{R}$: $a \leqslant t \leqslant b$; $c \leqslant s \leqslant d$ *и сетка* π, *определенная одномерными сетками* Δ_t: $a = t_0 < t_1 \ldots < t_N = b$ *и* Δ_s: $c = s_0 < s_1 < \ldots < s_M = d$. *Если функция* $f(t, s)$ *принадлежит классу* $C_2^4(\mathcal{R})$, *простой сплайн* $S_\pi(t, s)$ *определен сеткой* π, *простой сплайн* $S_\pi(f; t, s)$ *интерполирует функцию* $f(t, s)$ *на* π *и разность* $f(t, s) - S_\pi(f;, t, s)$ *принадлежит типу* I′, *то*

$$\int_c^d \int_a^b \{f''(t, s) - S_\pi''(t, s)\}^2 \, dt \, ds \geqslant \int_c^d \int_a^b \{f''(t, s) - S_\pi''(f; t, s)\}^2 \, dt \, ds,$$

причем с точностью до решения уравнения $\partial^4 f(t, s)/\partial s^2 \, \partial t^2 = 0$ *сплайн* $S_\pi(f; t, s)$ *является единственным, удовлетворяющим этому неравенству. Если требуется, чтобы все функции были дважды периодическими или принадлежали заданному классу эквивалентности типа* II, *то неравенство* (7.8.2) *справедливо, когда в качестве* $S_\pi(f; t, s)$ *взят соответствующий интерполяционный сплайн. В дважды периодическом случае сплайн* $S_\pi(f; t, s)$ *является единственным с точностью до периодического решения, а в остальных случаях — с точностью до произвольного решения уравнения* $\partial^4 f(t, s)/\partial s^2 \, \partial t^2 = 0$.

7.9. Фундаментальные сплайны

Фундаментальные сплайны уже встречались в этой книге в разд. 2.7; они также очень полезны при интерпретации представления (7.3.2) для дважды кубических сплайнов. В очень широком смысле фундаментальные сплайны можно определить как сплайны, у которых одно определяющее значение равно единице, а все другие равны нулю. Функции

$$\begin{aligned} &A_j(t) = A_{ij}(t), && t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i && (i = 1, 2, \ldots, N;\ j = 0, 1, \ldots, M), \\ &B_0(t) = B_{i0}(t), && t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i && (i = 1, 2, \ldots, N), \\ &B_N(t) = B_{iN}(t), && t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i && (i = 1, 2, \ldots, N), \end{aligned} \tag{7.9.1}$$

фигурирующие в равенстве (7.3.2), являются одномерными фундаментальными сплайнами. Кроме того, справедливы одномерные представления

$$\begin{aligned} S_{\Delta_s}(f_i; s) &= \sum_{j=0}^{M} \bar{A}_j(s) f(t_i, s_j) + \bar{B}_0(s) \frac{\partial f(t_i, s_0)}{\partial s} + \bar{B}_M(s) \frac{\partial f(t_i, s_M)}{\partial s} \quad (i = 0, 1, \ldots, N), \\ S_{\Delta_t}(g_0; s) &= \sum_{j=0}^{M} \bar{A}_j(s) \frac{\partial f(t_0, s_j)}{\partial t} + \bar{B}_0(s) \frac{\partial^2 f(t_0, s_0)}{\partial s \, \partial t} + \bar{B}_M(s) \frac{\partial^2 f(t_0, s_M)}{\partial s \, \partial t}, \\ S_{\Delta_s}(g_N; s) &= \sum_{j=0}^{M} \bar{A}_j(s) \frac{\partial f(t_N, s_j)}{\partial t} + \bar{B}_0(s) \frac{\partial^2 f(t_N, s_0)}{\partial s \, \partial t} + \bar{B}_M(s) \frac{\partial^2 f(t_N, s_M)}{\partial s \, \partial t}, \end{aligned} \tag{7.9.2}$$

где $\bar{A}_j(s)$, $\bar{B}_0(s)$ и $\bar{B}_M(s)$ — соответствующие одномерные фундаментальные сплайны, определенные сеткой Δ_s: $c = s_0 < s_1 < \ldots < s_M = d$.

Подставим в (7.3.2) представления (7.9.2):

$$S_\pi(f; t, s) = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M} C_{ij}(t, s) f(t_i, s_j) + \sum_{j=0}^{M} D_{0j}(t, s)\frac{\partial f(t_0, s_j)}{\partial t} +$$
$$+ \sum_{j=0}^{M} D_{Nj}(t, s)\frac{\partial f(t_N, s_j)}{\partial t} + \sum_{i=0}^{N} E_{i0}(t, s)\frac{\partial f(t_i, s_0)}{\partial s} +$$
$$+ \sum_{i=0}^{N} E_{iM}(t, s)\frac{\partial f(t_i, s_M)}{\partial s} + F_{00}(t, s)\frac{\partial^2 f(t_0, s_0)}{\partial s\,\partial t} +$$
$$+ F_{0N}(t, s)\frac{\partial^2 f(t_N, s_0)}{\partial s\,\partial t} + F_{0M}(t, s)\frac{\partial^2 f(t_0, s_M)}{\partial s\,\partial t} +$$
$$+ F_{NM}(t, s)\frac{\partial^2 f(t_N, s_M)}{\partial s\,\partial t}, \qquad (7.9.3.1)$$

где

$$\begin{aligned} C_{ij}(t, s) &= A_i(t)\,\overline{A}_j(s) && (i = 0, 1, \ldots, N;\ j = 0, 1, \ldots, M),\\ D_{ij}(t, s) &= B_i(t)\,\overline{A}_j(s) && (i = 0, N;\ j = 0, 1, \ldots, M),\\ E_{ij}(t, s) &= A_i(t)\,\overline{B}_j(s) && (i = 0, 1, \ldots, N;\ j = 0, M),\\ F_{ij}(t, s) &= B_i(t)\,\overline{B}_j(s) && (i = 0, N;\ j = 0, M). \end{aligned} \qquad (7.9.3.2)$$

Ясно, что $C_{ij}(t, s)$, $D_{ij}(t, s)$, $E_{ij}(t, s)$, $F_{ij}(t, s)$ — двумерные фундаментальные сплайны, необходимые для представления сплайна $S_\pi(f; t, s)$. Из равенств (7.9.3.2) видно, что они представляют собой произведения одномерных фундаментальных сплайнов. Таким образом, хотя сплайн $S_\pi(f;, t, s)$, вообще говоря, не равен произведению функции от t на функцию от s, но его можно представить в виде конечной суммы таких произведений.

7.10. Свойства сходимости

Свойства сходимости дважды кубических сплайнов фактически непосредственно вытекают из представления (7.3.2), которое с учетом (7.9.1) можно записать в виде

$$S_\pi(f; t, s) = \sum_{i=0}^{N} A_i(t)\, S_{\Delta_s}(f_i; s) + B_0(t)\, S_{\Delta_s}(g_0; s) + B_N(t)\, S_{\Delta_s}(g_N; s) \qquad (7.10.1)$$

Следовательно,

$$\lim_{\|\Delta_s\|\to 0} S_\pi(f; t, s) = \sum_{i=0}^{N} A_i(t) f(t_i, s) + B_0(t)\frac{\partial f(t_0, s)}{\partial t} + B_N(t)\frac{\partial f(t_N, s)}{\partial t}$$

и

$$\lim_{\|\Delta_t\|\to 0}\ \lim_{\|\Delta_s\|\to 0} S_\pi(f; t, s) = f(t, s).$$

Если функция $f(t, s)$ принадлежит классу $C_2^4(\mathscr{R})$, то сходимость равномерна как относительно t, так и относительно s и повторный предел можно заменить двойным пределом. Дифференцируя $S_\pi(f; t, s)$ и рассуждая аналогично, заключаем, что справедлива

Теорема 7.10.1. *Пусть даны прямоугольник* $\mathscr{R}$: $a \leqslant t \leqslant b$; $c \leqslant s \leqslant d$ *и сетка* π, *определенная одномерными сетками* Δ_t: $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b$ *и* Δ_s: $c = s_0 < s_1 < \ldots < s_M = d$. *Если функция* $f(t, s)$ *принадлежит классу* $C_2^4(\mathscr{R})$ *и* $\|\pi\| \to 0$, *то* $\partial^\nu S_\pi(f; t, s)/\partial s^\alpha \partial t^\beta$ *равномерно относительно* t *и* s *сходится к* $\partial^\nu f(t, s)/\partial s^\alpha \partial t^\beta$, *где* $\gamma = \alpha + \beta \leqslant 2$, $\alpha \leqslant 1$, $\beta \leqslant 1$, *и*

$$\frac{\partial^\nu f(t, s)}{\partial s^\alpha \partial t^\beta} = \frac{\partial^\nu S_\pi(f; t, s)}{\partial s^\alpha \partial t^\beta} + O(\|\Delta_t\|^{2-\beta-1/2} + \|\Delta_s\|^{2-\alpha-1/2}). \tag{7.10.2}$$

Если функция $f(t, s)$ *принадлежит классу* $C_4^8(\mathscr{R})$, *то*

$$\frac{\partial^\nu f(t, s)}{\partial s^\alpha \partial t^\beta} = \frac{\partial^\nu S_\pi(f; t, s)}{\partial s^\alpha \partial t^\beta} + O(\|\Delta_t\|^{3-\beta} + \|\Delta_s\|^{3-\alpha}). \tag{7.10.3}$$

Далее, равенство (7.10.3) *выполняется для* $\gamma = \alpha + \beta \leqslant 6$, $\alpha \leqslant 3$, $\beta \leqslant 3$ *при условии, что отношение норм сеток к минимальному расстоянию между смежными узлами остается равномерно ограниченным, когда* $\|\Delta_s\|$ *и* $\|\Delta_t\|$ *стремятся к нулю. В этом случае показатели* $3 - \beta$ *и* $3 - \alpha$ *можно даже заменить на* $4 - \beta$ *и* $4 - \alpha$ *соответственно.*

Замечание 7.10.1. В теореме предполагается, что сплайн $S_\pi(f; t, s)$ удовлетворяет краевым условиям, которые по существу диктуются теорией одномерных сплайнов. В частности, теорема 7.10.1 справедлива, если сплайн $S_\pi(f; t, s)$ интерполирует функцию $f(t, s)$ на сетке π и разность $f(t, s) - S_\pi(f; t, s)$ принадлежит типу I′ или II′. Теорема справедлива также, если функция $f(t, s)$ и сплайн $S_\pi(f; t, s)$ дважды периодические. Для того чтобы можно было применять соотношение (7.10.2), сплайны $S_\pi(f; t, s)$ должны рассматриваться только из фиксированного класса эквивалентности типа II.

7.11. Второе интегральное соотношение

Для дважды кубических сплайнов существует аналог второго интегрального соотношения

$$\int_c^d \int_a^b \left\{\frac{\partial^4 f(t, s)}{\partial s^2 \partial t^2} - \frac{\partial^4 S_\pi(f; t, s)}{\partial s^2 \partial t^2}\right\}^2 dt\, ds =$$

$$= \int_c^d \int_a^b \{f(t, s) - S_\pi(f; t, s)\} \frac{\partial^8 f(t, s)}{\partial s^4 \partial t^4} dt\, ds \tag{7.11.1}$$

при подходящих краевых условиях, но так как с помощью представления (7.10.1) можно получить свойства сходимости дважды кубических сплайнов непосред-

ственно из свойств сходимости одномерных сплайнов, то значение этого тождества не так велико. В теореме 7.11.1 указываются условия, при которых справедливо тождество (7.11.1). Эта теорема доказывается по той же общей схеме, по которой было установлено первое интегральное соотношение для дважды кубических сплайнов.

Теорема 7.11.1. *Пусть даны прямоугольник* $\mathcal{R}$: $a \leqslant t \leqslant b$; $c \leqslant s \leqslant d$ *и сетка* π, *определенная одномерными сетками* Δ_t: $a = t_0 < t_1 \ldots < t_N = b$ *и* Δ_s: $c = s_0 < s_1 < \ldots < s_M = d$. *Если функция* $f(t, s)$ *принадлежит классу* $C_4^8(\mathcal{R})$, *сплайн* $S_\pi(f; t, s)$ *интерполирует ее на сетке* π *и выполняется одно из условий*: a) $f(t, s) - S_\pi(f; t, s)$ *принадлежит типу* I′, b) $f(t, s) - S_\pi(f; t, s)$ *принадлежит типу* II′, c) *функция* $f(t, s)$ *и сплайн* $S_\pi(f; t, s)$ *дважды периодические, то*

$$\int_c^d \int_a^b \left\{ \frac{\partial^4 f(t, s)}{\partial s^2 \partial t^2} - \frac{\partial^4 S_\pi(f; t, s)}{\partial s^2 \partial t^2} \right\}^2 dt\, ds = \int_c^d \int_a^b \{f(t, s) - S_\pi(f; t, s)\} \frac{\partial^8 f(t, s)}{\partial s^4 \partial t^4} dt\, ds.$$

7.12. Прямое произведение гильбертовых пространств

Пусть H_1 и H_2 — сепарабельные гильбертовы пространства с базисами $\{e_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ и $\{f_j\}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ соответственно, и пусть $\overline{H}$ — линейное пространство, натянутое на $\{h_{ij}\} = \{e_i, f_j\}$ $(i = 1, 2, \ldots; j = 1, 2, \ldots)$. Положим

$$(h_{ij}, h_{kl})_{\overline{H}} = (e_i, e_k)_{H_1} \cdot (f_j, f_l)_{H_2}, \tag{7.12.1}$$

где $(\cdot, \cdot)_{H_1}$ и $(\cdot, \cdot)_{H_2}$ — скалярные произведения. Пользуясь линейностью, доопределим $(\cdot, \cdot)_{\overline{H}}$ до скалярного произведения на всем $\overline{H}$. Положим

$$\| u \|_{\overline{H}} = (u, u)_{\overline{H}}^{1/2}; \tag{7.12.2}$$

тогда $\overline{H}$ можно пополнить относительно нормы $\| \cdot \|_{\overline{H}}$ и расширить скалярное произведение $(\cdot, \cdot)_{\overline{H}}$ на это пополнение. Обозначим пополненное пространство $\overline{H}$ через H, а расширенное скалярное произведение через $(\cdot, \cdot)_H$. Легко проверить, что H — сепарабельное гильбертово пространство относительно $(\cdot, \cdot)_H$. Более детально эта конструкция изучалась Сардом [1, стр. 354].

Мы занялись обсуждением прямого произведения гильбертовых пространств, так как хотим образовать прямое произведение пространств $\mathcal{K}^n(a, b)$ и $\mathcal{K}^n(c, d)$. В гл. III мы рассматривали пространство $\mathcal{K}^2(a, b)$ как псевдогильбертово пространство со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_a^b f''(t)\, g''(t)\, dt$$

и построили для него несколько ортонормальных базисов. Для наших целей наиболее полезным из этих базисов оказался канонический сеточный базис.

Пусть последовательность $\{u_i(t)\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ образует канонический сеточный базис для $\mathscr{K}^2(a, b)$, а $\{v_j(s)\}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ образует канонический сеточный базис для $\mathscr{K}^2(c, d)$. Пусть задан прямоугольник $\mathscr{R}$: $a \leqslant t \leqslant b$; $c \leqslant s \leqslant d$. Обозначим через $\mathscr{K}^2(\mathscr{R})$ прямое произведение пространств $\mathscr{K}^2(a, b)$ и $\mathscr{K}^2(c, d)$. Тогда

$$(f, g) = \int_c^d \int_a^b \left\{\frac{\partial^4 f(t, s)}{\partial s^2\, \partial t^2} \cdot \frac{\partial^4 g(t, s)}{\partial s^2\, \partial t^2}\right\} dt\, ds \tag{7.12.3}$$

будет скалярным произведением для $\mathscr{K}^2(\mathscr{R})$, ибо

$$\int_c^d \int_a^b \left\{\frac{\partial^4 u_i(t)\, v_j(s)}{\partial s^2\, \partial t^2} \cdot \frac{\partial^4 u_l(t)\, v_k(s)}{\partial s^2\, \partial t^2}\right\} dt\, ds = \int_a^b u_i''(t)\, u_l''(t)\, dt \int_c^d v_j''(s)\, v_k''(s)\, ds.$$

Это соотношение позволяет интерпретировать $\mathscr{K}^2(\mathscr{R})$ как пространство классов функций на $\mathscr{R}$, а символическое произведение $u_i v_j$ — как поточечное произведение функций $u_i(t)$ и $v_j(s)$. Но для наших целей необходимо отождествить функции, отличающиеся на функцию, линейную относительно t и s.

Покажем, что $C_2^4(\mathscr{R}) \subset \mathscr{K}^2(\mathscr{R})$.

Пусть последовательность сеток $\{\pi_N\}$ $(N = 1, 2, \ldots)$ на $\mathscr{R}$ определена одномерными сетками Δ_t^N: $a = t_0^N < t_1^N < \ldots < t_{n_N}^N = b$ и Δ_s^N: $c = s_0^N < s_1^N < \ldots$ $\ldots < S_{m_N}^N = d$, причем сетка π_M содержит в себе сетку π_N, если $M > N$. Пусть соответствующая последовательность сплайнов $\{S_{\Delta_N}(f; t, s)\}$ $(N = 1, 2, \ldots)$ интерполирует на этих сетках функцию $f(t, s)$ из класса $C_2^4(\mathscr{R})$. Так как при $M > N$ сплайн $S_N(f; t, s)$ интерполирует на сетке π_N сплайн $S_M(f; t, s)$, то в силу первого интегрального соотношения

$$\int_c^d \int_a^b \left\{\frac{\partial^4 S_M(f; t, s)}{\partial s^2\, \partial t^2} - \frac{\partial^4 S_N(f; t, s)}{\partial s^2\, \partial t^2}\right\}^2 dt\, ds =$$

$$= \int_c^d \int_a^b \left\{\frac{\partial^4 S_M(f; t, s)}{\partial s^2\, \partial t^2}\right\}^2 dt\, ds - \int_c^d \int_a^b \left\{\frac{\partial^4 S_N(f; t, s)}{\partial s^2\, \partial t^2}\right\}^2 dt\, ds.$$

Отсюда вытекает, что последовательность действительных чисел

$$\int_c^d \int_a^b \left\{\frac{\partial^4 S_N(f; t, s)}{\partial s^2\, \partial t^2}\right\}^2 dt\, ds \qquad (N = 1, 2, \ldots)$$

монотонно возрастает и ограничена сверху величиной

$$\int_c^d \int_a^b \left\{\frac{\partial^4 f(t, s)}{\partial s^2\, \partial t^2}\right\}^2 dt\, ds,$$

и потому последовательность

$$\left\{\frac{\partial^4 S_N(f;\ t,\ s)}{\partial s^2\,\partial t^2}\right\} \qquad (N=1,\ 2,\ \ldots)$$

есть последовательность Коши в $L^2(\mathscr{R})$ и ее предел $g(t,\ s)$ также принадлежит $L^2(\mathscr{R})$. Продолжая, как в гл. III, полагаем

$$G(t,\ s)=\frac{\partial^2 f(a,\ c)}{\partial s\,\partial t}+\int\limits_c^s\int\limits_a^t g(x,\ y)\,dx\,dy$$

и получаем

$$G(t,\ s)-\frac{\partial^2 S_N(f;\ t,\ s)}{\partial s\,\partial t}=\left\{\frac{\partial^2 f(a,\ c)}{\partial s\,\partial t}-\frac{\partial^2 S_N(f;\ a,\ c)}{\partial s\,\partial t}\right\}+$$

$$+\int\limits_c^s\int\limits_a^t\left\{g(x,\ y)-\frac{\partial^4 S_N(f;\ x,\ y)}{\partial y^2\,\partial x^2}\right\}dx\,dy.$$

Теперь из теоремы 7.10.1, определения $g(t,\ s)$ и неравенства Буняковского—Шварца заключаем, что

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\partial^2 S_N(f;\ t,\ s)}{\partial s\,\partial t}=G(t,\ s),$$

откуда

$$G(t,\ s)\equiv\frac{\partial^2 f(t,\ s)}{\partial s\,\partial t}.$$

Следовательно,

$$g(t,\ s)=\frac{\partial^4 f(t,\ s)}{\partial s^2\,\partial t^2},$$

т. е.

$$\lim_{N\to\infty}\|f-S_{N,\,f}\|_{\mathscr{K}^2(\mathscr{R})}=0.$$

Т е о р е м а 7.12.1. *Пусть даны прямоугольник* $\mathscr{R}$: $a\leqslant t\leqslant b$; $c\leqslant s\leqslant d$ *и последовательность сеток* $\{\pi_N\}$ $(N=1,\ 2,\ \ldots)$, *определенная одномерными сетками* Δ_t^N: $a=t_0^N<t_1^N<\ldots<t_{n_N}^N=b$ *и* Δ_s^N: $c=s_0^N<s_1^N<\ldots$ $\ldots<s_{m_N}^N=d$. *Пусть* $\|\pi_N\|\to 0$ *при* $N\to\infty$ *и сетка* π_N *содержит сетку* $\pi_{N'}$ *при* $N'<N$ [1]). *Если функция* $f(t,\ s)$ *принадлежит классу* $C_2^4(\mathscr{R})$, *сплайн* $S_N(f;\ t,\ s)$ *интерполирует ее на* π_N *и выполняется одно из условий*: a) $f(t,\ s)-S_N(f;\ t,\ s)$ *принадлежит типу* I′ $(N=1,\ 2,\ \ldots)$, b) $S_N(f;\ t,\ s)$ *принадлежит типу* II′ $(N=1,\ 2,\ \ldots)$, c) *функция* $f(t,\ s)$ *и сплайн* $S_N(f;\ t,\ s)$ $(N=1,\ 2,\ \ldots)$ *дважды периодические, то*

$$\lim_{N\to\infty}\|f-S_{N,\,f}\|_{\mathscr{K}^2(\mathscr{R})}=0.$$

С л е д с т в и е 7.12.1. $C_2^4(\mathscr{R})\subset\mathscr{K}^2(\mathscr{R})$.

---

[1]) Можно положить $\|\pi_N\|=\max\{\|\Delta_t^N\|,\ \|\Delta_s^N\|\}$.

7.13. Метод фундаментальных сплайнов

В разд. 7.9 мы показали, что можно построить дважды кубические фундаментальные сплайны, попарно перемножая кубические фундаментальные сплайны. В настоящем разделе мы используем это и другие свойства фундаментальных сплайнов для приближения решений дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Пусть функция $f(t, s)$ определена на прямоугольнике $\mathscr{R}$: $a \leqslant t \leqslant b$; $c \leqslant s \leqslant d$ и принадлежит классу $C_4^8(\mathscr{R})$. Если ортонормальный базис $\{u_i(t, s)\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ для $\mathscr{K}^2(\mathscr{R})$ представляет собой прямое произведение канонических сеточных базисов для $\mathscr{K}^2(a, b)$ и $\mathscr{K}^2(c, d)$, то

$$\| f - \sum_{i=1}^{\infty} a_i u_i \|_{\mathscr{K}^2(\mathscr{R})} = 0, \tag{7.13.1.1}$$

$$a_i = \int_c^d \int_a^b \frac{\partial^4 f(t, s)}{\partial s^2\, \partial t^2} \frac{\partial^4 u_i(t, s)}{\partial s^2\, \partial t^2}\, dt\, ds \qquad (i = 1, 2, \ldots). \tag{7.13.1.2}$$

Кроме того, если постоянные b_1, b_2, b_3, b_4 выбраны надлежащим образом[1]), то

$$f(t, s) = b_1 + b_2 t + b_3 s + b_4 ts + \sum_{i=1}^{\infty} a_i u_i(t, s). \tag{7.13.2}$$

Положим

$$S_N(f; t, s) = b_1 + b_2 t + b_3 s + b_4 ts + \sum_{i=1}^{N} a_i u_i(t, s) \qquad (N = 1, 2, \ldots) \tag{7.13.3}$$

и рассмотрим только подходящую подпоследовательность. Тогда можно считать, что сплайны $S_N(f; t, s)$ интерполируют функцию $f(t, s)$ и к ним применима теорема 7.10.1. Таким образом, для $\gamma = \alpha + \beta$

$$\frac{\partial^\gamma f(t, s)}{\partial s^\alpha\, \partial t^\beta} = \frac{\partial^\gamma S_N(f; t, s)}{\partial s^\alpha\, \partial t^\beta} + \frac{\partial^\gamma E_N(f; t, s)}{\partial s^\alpha\, \partial t^\beta} = \frac{\partial^\gamma S_N(f; t, s)}{\partial s^\alpha\, \partial t^\beta} + O\left(\| \Delta_t^N \|^{4-\beta} + \| \Delta_s^N \|^{4-\alpha}\right), \tag{7.13.4}$$

где $0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 4$ и $f(t, s) = S_N(f; t, s) + E_N(f; t, s)$. В равенстве (7.13.4) через Δ_t^N и Δ_s^N обозначены одномерные сетки, возникающие при построении канонических сеточных базисов, с помощью которых были получены функции $u_i(t, s)$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$. Заметим, что если функция $f(t, s)$ принадлежит классу $C_2^4(\mathscr{R})$, а не $C_4^8(\mathscr{R})$, то в силу теоремы 2.3.4 теорема 7.10.1 остается справедливой и сходимость сохраняется для $0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 2$; но здесь скорость сходимости меньше и оценить ошибку, как мы это сделали в предыдущем случае, нельзя. Итак, хотя при доказательстве сходимости мы будем пользоваться равенством (7.13.4), наш метод применим и при менее ограничительных условиях.

[1]) Это возможно не для любой функции $f(t,s)$ из $C_4^8(\mathscr{R})$. Например, если $f(t, s) \equiv t^4$, то $a_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$, но $t^4 \neq b_1 + b_2 t + b_3 s + b_4 ts$. В дальнейшем представление (7.13.2) не используется.— *Прим. перев.*

Пусть на $\mathscr{R}$ заданы дифференциальное уравнение в частных производных вида

$$a_1(t, s)\,U_{tt} + a_2(t, s)\,U_{st} + a_3(t, s)\,U_{ss} + a_4(t, s)\,U_t + \\ + a_5(t, s)\,U_s + a_6(t, s)\,U + g(t, s) = 0 \qquad (7.13.5)$$

и множество таких краевых условий, что задача корректна в смысле Адамара. Это значит, что уравнение (7.13.5) имеет единственное решение $U(t, s)$, непрерывно зависящее от множества исходных данных. Так как мы собираемся лишь продемонстрировать метод, то рассмотрим только случай, когда уравнение — эллиптического типа и на границе области $\mathscr{R}$ решение $U(t, s)$ принимает заданное значение $f(\tau)$, где τ — длина дуги вдоль границы, причем производная $f''(\tau)$ непрерывна вдоль каждой стороны прямоугольника $\mathscr{R}$. Следовательно, $f(\tau)$ определяет также значения $U_s(t, s)$ вдоль вертикальных сторон прямоугольника $\mathscr{R}$ и значения $U_t(t, s)$ вдоль горизонтальных сторон прямоугольника $\mathscr{R}$. Наконец, мы предполагаем, что коэффициенты уравнения (7.13.5) и граничные данные достаточно гладкие, так что $U(t, s)$ принадлежит классу $C_4^8(\mathscr{R})$. Предположение эллиптичности и гладкости не умаляет общности метода, но позволяет сделать изложение более доступным.

Пусть сплайн $S_N(U; t, s)$ интерполирует функцию $U(t, s)$ и разность $U(t, s) - S_N(U; t, s)$ принадлежит типу Γ' ($N = 1, 2, \ldots$). В обозначениях разд. 7.9 сплайн $S_N(U; t, s)$ принимает вид

$$S_N(U; t, s) = \sum_{i=0}^{n_N}\sum_{j=0}^{m_N} U(t_i, s_j)\,A_i(t)\,\bar{A}_j(s) + \\ + \sum_{j=0}^{m_N}\{U_t(a, s_j)\,B_0(t) + U_t(b, s_j)\,B_{n_N}(t)\}\,\bar{A}_j(s) + \\ + \sum_{i=0}^{n_N}\{U_s(t_i, c)\,\bar{B}_0(s) + U_s(t_i, d)\,\bar{B}_{m_N}(s)\}\,A_i(t) + \\ + U_{st}(a, c)\,B_0(t)\,\bar{B}_0(s) + U_{st}(b, c)\,B_{n_N}(t)\,\bar{B}_0(s) + \\ + U_{st}(a, d)\,B_0(t)\,\bar{B}_{m_N}(s) + U_{st}(b, d)\,B_{n_N}(t)\,\bar{B}_{m_N}(s). \qquad (7.13.6)$$

Если положить

$$L \equiv a_1(t, s)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\cdot + a_2(t, s)\frac{\partial}{\partial s\,\partial t}\cdot + a_3(t, s)\frac{\partial^2}{\partial s^2}\cdot + \\ + a_4(t, s)\frac{\partial}{\partial t}\cdot + a_5(t, s)\frac{\partial}{\partial s}\cdot + a_6(t, s)\cdot, \qquad (7.13.7.1)$$

то уравнение (7.13.5) запишется так:

$$LU + g(t, s) = 0. \qquad (7.13.7.2)$$

Следовательно,

$$LS_N(U; t, s) = -g(t, s) - LE_N(U; t, s), \qquad (7.13.8)$$

и, выбирая N достаточно большим, можно, учитывая равенство (7.13.4), сделать член $LE_N(U; t, s)$ произвольно малым по абсолютной величине. Если мы потребуем, чтобы равенство (7.13.8) выполнялось в точках (t_i, s_j) $(i = 0, 1, \ldots, n_N;\ j = 0, 1, \ldots, m_N)$, то получим $(n_N + 1)(m_N + 1)$ линейных уравнений относительно неизвестных

$$\begin{aligned} &U(t_i, s_j) && (i = 1, 2, \ldots, n_N - 1;\ j = 1, 2, \ldots, m_N - 1),\\ &U_t(t_i, s_j) && (i = 0, n_N;\ j = 1, 2, \ldots, m_N - 1),\\ &U_s(t_i, s_j) && (i = 1, 2, \ldots, n_N - 1;\ j = 0, m_N),\\ &U_{st}(t_i, s_j) && (i = 0, n_N;\ j = 0, m_N). \end{aligned} \tag{7.13.9}$$

Для определения остальных величин $U(t_i, s_j)$, $U_t(t_i, s_j)$, $U_s(t_i, s_j)$, фигурирующих в равенстве (7.13.6), используются исходные данные. В матричной форме эти уравнения принимают вид

$$A_N U_N = G_N + E_N, \tag{7.13.10}$$

где A_N — матрица коэффициентов, U_N — вектор неизвестных, G_N — вектор, связанный с функцией $-g(t, s)$ и граничными данными, и E_N — вектор, связанный с функцией $-LE_N(U; t, s)$. Хотя существование обратной матрицы A_N^{-1} не гарантировано, но оно очень вероятно, так как решение $U(t, s)$ существует и единственно, а функцией $U(t, s)$ сплайн $S_N(U; t, s)$ определяется однозначно. Если предположить, что A_N^{-1} существует и $\| A_N^{-1} E_N \| \to 0$ при $N \to \infty$, то решения $\bar{U}_N$ аппроксимирующих уравнений

$$A_N \bar{U}_N = G_N \tag{7.13.11}$$

определяют дважды кубические сплайны $S_N(t, s)$, сходящиеся к $U(t, s)$ при $N \to \infty$. Скорость сходимости зависит от оценок (7.13.4) и поведения матрицы A_N^{-1}. Заметим, что сплайн $S_N(U; t, s)$ удовлетворяет не краевым условиям, а лишь сплайн-аппроксимациям краевых условий. Таким образом, важно, что задача корректна. Если прямоугольник $\mathscr{R}$ разбит примерно на 100 прямоугольников, то матрицу A_N можно обратить численно с помощью метода исключения, в других случаях обычно применяются итеративные методы. Так как $A_i(t)$, $\bar{A}_j(s)$, $B_i(t)$ и $\bar{B}_j(s)$ — кубические сплайны, то их нахождение сильно облегчается. Полученные приближения не будут полностью численными, поскольку равенство (7.13.6) (или оно же, но с более удобной перегруппировкой членов) дает также промежуточные значения. Это позволяет использовать полученные приближения в аналитических исследованиях. Последняя особенность остается также в силе при применении метода для численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Так как ошибка равна $A_N^{-1} E_N$, то оценку для ошибки можно получить в процессе вычисления. Если требуется вычислять значения функции в большом числе промежуточных точек, то метод фундаментальных сплайнов выгоднее методов такой же точности, которые дают лишь значения $U(t, s)$ в узлах сетки.

7.14. Иррегулярные области

До сих пор мы изучали дважды кубические сплайны, заданные только в прямоугольных областях. Результаты легко распространить и на другие области, например на области, состоящие из конечного числа прямоугольников. В определении для таких областей представлений типов I и II величины, задававшиеся ранее равенствами (7.1.1) и (7.1.2) соответственно, задаются теперь вдоль сторон прямоугольников, параллельных оси t. То же относится и к сторонам, параллельным оси s. Величины, определяемые условием (c) из (7.1.1) и (7.1.2), должны задаваться в каждой вершине прямоугольников. Первое интегральное соотношение, свойства минимальной нормы, наилучшего приближения и другие свойства дважды кубических сплайнов, полученные для прямоугольной области, непосредственно обобщаются на области, указанные

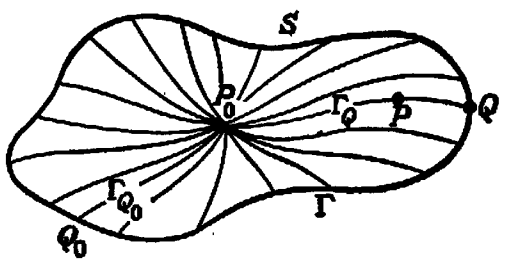


Рис. 1.

выше. Мы предоставляем читателю самостоятельно исследовать такие области, а сами займемся областями или, возможно, более уместно сказать, «поверхностями», которые при подходящем преобразовании отображаются в прямоугольник $\mathcal{R}$. Отображения могут не быть взаимно однозначными (и даже просто однозначными) и поэтому не всем функциям на $\mathcal{R}$ будут соответствовать функции на первоначальной поверхности.

Рассмотрим поверхность S, изображенную на рис. 1. Предположим, что на поверхности S даны точка P_0 и семейство $\{\Gamma_Q\}$ гладких кривых на S, соединяющих точку P_0 с точками Q, расположенными на границе Г поверхности S. Мы считаем, что граница Г также является гладкой кривой в том смысле, что каждая из описывающих ее координат имеет непрерывную вторую производную относительно длины дуги, соответствие между точками Q и кривыми Γ_Q взаимно однозначно и любая пара этих кривых пересекается только в точке P_0. Семейство $\{\Gamma_Q\}$ заполняет поверхность в том смысле, что через любую точку P на S (кроме точки P_0) проходит точно одна кривая из нашего семейства.

Пусть $d(P, P')$ обозначает расстояние между точками P и P', измеряемое по кривой Γ_Q, проходящей через точку P. Ясно, что функция $d(P, P')$ определена не для произвольной пары точек P и P' из S, но если P и P' можно соединить кривой Γ_Q, то это можно сделать единственным способом, так что d (P и P') в этом случае определено. Далее, пусть $t(P)$ — расстояние, измеряемое вдоль кривой Г против часовой стрелки от фиксированной точки Q_0 на Г до точки Q_P, единственной точки на Г, для которой точка P лежит на

кривой Γ_{Q_P}. Положим

$$s(P) = \frac{d(P, P_0)}{d(Q_P, P_0)}. \tag{7.14.1}$$

Тогда каждой точке P поверхности S, не лежащей на кривой Γ_{Q_0}, можно поставить в соответствие пару чисел $[t(P), s(P)]$, причем эта пара определяется однозначно. Для точки $P \neq P_0$, лежащей на Γ_{Q_0}, таких пар будет две: $[0, s(P)]$ и $[l, s(P)]$, где l — длина кривой Γ, а для точки P_0 — бесконечное множество: пары $[t, 0]$, где $0 \leqslant t \leqslant l$. Таким образом, отображение F: $P \to [t(P), s(P)]$, хотя и не однозначно, переводит S в $\mathscr{R}$: $0 \leqslant t \leqslant l$; $0 \leqslant s \leqslant 1$. При этом кривая F_Q $(Q \neq Q_0)$ переходит в прямолинейный отрезок $t = t(Q)$, параллельный оси s. Кривая Γ_{Q_0} отображается в два прямолинейных отрезка $t = 0$ и $t = l$, точка P_0 — в прямолинейный отрезок $s = 0$ и кривая Γ — в прямолинейный отрезок $s = 1$. Заметим, что, не будучи однозначным, F имеет однозначное обратное отображение F^{-1}, ибо каждая точка (t, s) в $\mathscr{R}$ является образом точно одной точки поверхности S. Следовательно, для каждой функции $f(P)$, определенной на S, существует единственная функция $f(t, s) = f[F^{-1}(t, s)]$. В силу гладкости кривых Γ и Γ_Q некоторые частные производные функции $f(P)$ можно выразить через частные производные функции $f(t, s)$ и обратно. Итак, каждой функции $f(P)$, заданной на S, можно поставить в соответствие интерполяционные сплайны $S(f, P)$, которые на самом деле интерполируют соответствующие функции $f(t, s) = f[F^{-1}(t, s)]$, заданные на $\mathscr{R}$. Существенно, что функции $f(t, s)$ принадлежат классу $C_2^4(\mathscr{R})$, постоянны на отрезке $s = 0$ и являются периодическими относительно t.

Построим еще одно отображение, которое также может оказаться полезным. Предположим, что вместо семейства кривых Γ_Q, соединяющих точку P_0 с граничными точками Q, у нас есть семейство заполняющих поверхность гладких кривых $\{\Gamma_{Q, Q'}\}$, где обе точки Q и Q' лежат на Γ. Рассмотрим два случая: 1) через каждую точку поверхности S, кроме двух точек Q_0 и Q_1, лежащих на Γ, проходит единственная кривая $\Gamma_{Q, Q'}$ нашего семейства и 2) существует одна особая точка P_0, через которую проходят все кривые $\Gamma_{Q, Q'}$ нашего семейства. Если особой точки нет, поставим в соответствие каждой точке P на S координату $t(P)$, равную расстоянию, измеряемому вдоль Γ в направлении против часовой стрелки, от точки Q_0 до граничной точки Q_P, первой встретившейся нам точки кривой $\Gamma_{Q_P, Q_{P'}}$, проходящей через P. Заметим, что граничная точка Q_P встречается нам раньше точки Q_1.

Кроме того, мы предполагаем, что Γ — спрямляемая жорданова кривая, так что наша поверхность S односвязна. Пример такой поверхности показан на рис. 2. $t(P)$ однозначно сопоставляется точке P, если 0 соответствует точке Q_0 и расстояние l' от точки Q_0 до Q_1, измеряемое вдоль кривой Γ против часовой стрелки, соответствует точке Q_1.

Точке P, отличной от Q_0 и от Q_1, можно единственным образом поставить в соответствие вторую координату

$$s(P) = \frac{d(Q_P, P)}{d(Q_P, Q_{P'})}; \tag{7.14.2}$$

для $P = Q_0$ и $P = Q_1$ функция $s(P)$ не определена, и величины $s(Q_0)$ и $s(Q_1)$ могут принимать любое значение между 0 и 1. Как и прежде, отображение

$$F\colon P \to [t(P),\ s(P)]$$

переводит поверхность S в прямоугольник $\mathscr{R}\colon 0 \leqslant t \leqslant l';\ 0 \leqslant s \leqslant 1$. Отображение F вновь не однозначно, но обратное к нему однозначно, так что с функцией $f(P)$, заданной на S, можно связать функцию $f(t, s) = f[F^{-1}(t, s)]$, заданную на $\mathscr{R}$. Теперь можно определить интерполяционные сплайны $S(f, P)$ так же, как и раньше. В этом случае они принадлежат классу $C_2^4(\mathscr{R})$ и постоянны на отрезках $t = 0$ и $t = l'$.

Если различать кривые $\Gamma_{Q, Q'}$ и $\Gamma_{Q', Q}$ (они имеют противоположное направление), то можно считать прямоугольник $\mathscr{R}\colon 0 \leqslant t \leqslant l;\ 0 \leqslant s \leqslant 1$, где l — длина кривой Γ, образом области. Отображение F переводит кривые

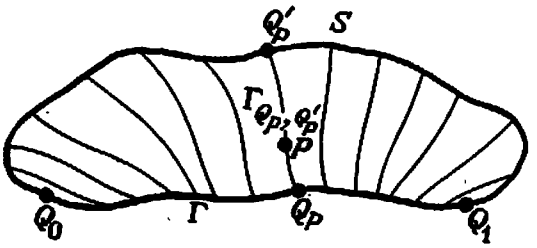


Рис. 2.

$\Gamma_{Q, Q'}$ и $\Gamma_{Q', Q}$ в прямолинейные отрезки $t = \text{const}$ и $t' = \text{const}$. Числа t и t', связанные таким образом, называют *сопряженными*, а точки (t, s) $(t', 1 - s)$ называют *сопряженными точками*. В этой терминологии интересующие нас функции из класса $C_2^4(\mathscr{R})$ постоянны на отрезках $t = 0$, $t = l'$, периодичны по t и равны в сопряженных точках.

Если особая точка P_0 существует, то требуется некоторая модификация. Возьмем в качестве точки Q_0 произвольную точку на Γ и определим $t(P)$, как и раньше. Нам нужно поставить в соответствие точке P_0 координату s независимо от кривых Γ_{Q_P, Q'_P} нашего семейства. Для точек P, расположенных на кривой Γ_{Q_P, Q'_P} между Q_P и P_0, положим

$$s(P) = \frac{1}{2}\frac{d(Q_P, P)}{d(Q_P, P_0)}, \qquad (7.14.3.1)$$

а для точек P, расположенных на кривой Γ_{Q_P, Q'_P} между точками P_0 и $P_{P'}$, положим

$$s(P) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{d(P_0, P)}{d(P_0, Q'_P)}\right). \qquad (7.14.3.2)$$

Если мы различаем кривые $\Gamma_{Q, Q'}$ и $\Gamma_{Q', Q}$, то прямоугольник $\mathscr{R}\colon a \leqslant t \leqslant l;\ 0 \leqslant s \leqslant 1$ опять можно считать образом рассматриваемой области. Соответствующие функции из класса $C_2^4(\mathscr{R})$ периодичны по t, постоянны вдоль отрезка $s = 1/2$ и равны в сопряженных точках (t, s) и $(t', 1 - s)$. Этот случай изображен на рис. 3.

Во всех предыдущих рассуждениях мы не требовали, чтобы поверхности были плоскими. Таким образом, кривые Γ, Γ_Q, $\Gamma_{Q,Q'}$ не обязаны быть плоскими. Отображение F: $P \to [t(P), s(P)]$ задает множество внутренних координат на поверхности S. Важно отметить, что кривые Γ, Γ_Q, $\Gamma_{Q,Q'}$ можно приблизить одномерными сплайнами в смысле приближения их внутренних

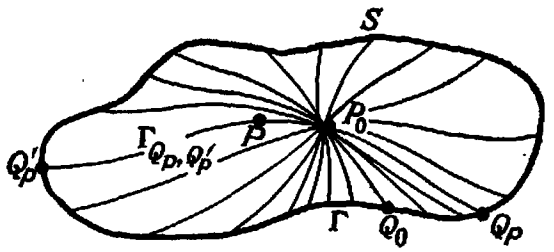


Рис. 3.

координат [1]). Итак, можно построить поверхности, определенные лишь конечным числом точек, и использовать их для приближения других гладких поверхностей. Можно доказать не только поточечную сходимость, но также сходимость касательных плоскостей и кривизн. Более подробно эти идеи развиваются в разд. 7.15.

7.15. Представление поверхности

Распространим идеи разд. 7.14 на другие классы поверхностей. Рассмотрим три класса поверхностей: 1) гладкие поверхности, гомеоморфные сфере, 2) гладкие поверхности, гомеоморфные тору, и 3) гладкие поверхности, гомеоморфные цилиндру конечной длины. Первый класс рассмотрим более подробно, а для двух других укажем лишь необходимые изменения. Возможны две различные точки зрения: можно попытаться приблизить данную поверхность другой поверхностью, определяемой конечным числом точек, а можно попытаться сразу определить поверхность (разумным, но не обязательно единственным способом), задавая конечное число ее точек.

Мы примем последнюю точку зрения, ибо она представляется более важной. Пусть дано $N+1$ множеств точек, причем точки каждого множества компланарны. Обозначим соответствующие плоскости через Ω_j ($j = 0, 1, \ldots, N$) и предположим, что в плоскости Ω_j содержатся $m_j + 1$ точек Q_{ij} ($i = 0, 1, \ldots, m_j$), $Q_{0j} = Q_{m_j j}$, описывающих приближенно простую замкнутую кривую Γ_j, причем кривые Γ_0 и Γ_N вырождаются в точки. Допустим, что точки Q_{0j} ($j = 0, 1, \ldots, N$) компланарны. Мы будем считать плоскости Ω_j упорядоченными в том смысле, что они параллельны и направленное расстояние от любой плоскости Ω_j до Ω_{j+1} положительно (это условие не является необходимым). Схематично эта ситуация изображена на рис. 4.

---

[1]) Приближают обычно только конечное число кривых Γ_Q или $\Gamma_{Q,Q'}$, и они служат для определения линий решетки, параллельных оси s.

Пусть каждая точка Q_{ij} определяется своими прямоугольными координатами (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}). Обозначим через $d(Q_{ij}, Q_{kj})$ длину суммарной хорды от Q_{ij} до Q_{kj}, соответствующей увеличению первого индекса от i до k, а через l_j длину всей суммарной хорды, т. е. $l_j = d(Q_{0j}, Q_{m_j j})$. Тогда для каждого ($j = 0, 1, \ldots, N$) можно определить три периодических сплайна $\hat{S}_j(x_{i,j}; s)$,

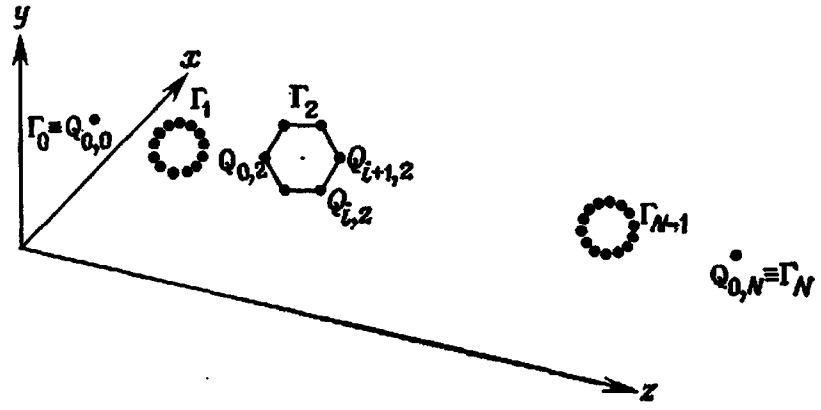


Рис. 4.

$\hat{S}_j(y_{ij}; s)$ и $\hat{S}_j(z_{ij}; s)$, интерполирующих соответственно значения x_{ij}, y_{ij} и z_{ij} в точках $s = s_{ij}$ $(i = 0, 1, \ldots, m_j)$, где

$$s_{ij} = \frac{d(Q_{0j}, Q_{ij})}{l_j} \qquad (i = 0, 1, \ldots, m_j;\ j = 0, 1, \ldots, N). \tag{7.15.1}$$

Разобьем единичный отрезок $0 \leqslant s \leqslant 1$ с помощью сетки Δ:

$$0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_{k-1} < s_k = \frac{1}{2} < s_{k+1} < \ldots < s_{2k} = 1,$$

и зададим в каждом множестве Ω_j новое множество точек P_{ij}, вычислив значения $\hat{S}_j(x_{ij}; s)$, $\hat{S}_j(y_{ij}; s)$ и $\hat{S}_j(z_{ij}; s)$ в точках $s = s_0, s_1, \ldots, s_{2k}$. В частности, $Q_{0j} \equiv P_{0j} \equiv P_{2kj}$ $(j = 0, 1, \ldots, N)$, $P_{i0} \equiv Q_{00}$ $(i = 0, 1, \ldots, 2k)$ и $P_{iN} \equiv Q_{0N}$ $(i = 0, 1, \ldots, 2k)$.

В каждой плоскости Ω_j построим новые периодические сплайны, интерполирующие координаты точек P_{ij} в узлах сетки Δ. Обозначим эти сплайны через $S_j(x; s)$, $S_j(y; s)$ и $S_j(z; s)$; вообще говоря, они не интерполируют исходные координаты, но можно надеяться, что соответствующие им плоские кривые близки к оригиналу Γ_j. Эти кривые обладают тем ценным свойством, что их координаты определяются периодическими сплайнами с общей сеткой Δ

Зададим для фиксированного i и $q = i + k \pmod{2k}$ множество x-координат:

$$x_{00} = \bar{x}_{0i} = S_0(x; s_i), \qquad \bar{x}_{1i} = S_i(x; s_i), \ \ldots, \qquad \bar{x}_{N-1i} = S_{N-1}(x; x_i),$$
$$x_{0N} = \bar{x}_{Ni} = S_N(x; s_i), \qquad \bar{x}_{N+1i} = S_{N-1}(x; s_q), \ \ldots, \qquad \bar{x}_{2N+1i} = S_0(x; s_q) = x_{00}.$$

и аналогичные множества y-координат и z-координат. Тогда получим $2k$ различных упорядоченных множеств координат. Заметим, что множества, соответствующие $i = 0$ и $i = 2k$, отождествляются, а множества, соответствующие i и q, отличаются только порядком. Эти множества координат можно использовать для определения $2k$ ориентированных замкнутых пространственных кривых, образованных периодическими сплайнами $\overline{\mathcal{T}}_i(x; t)$, $\overline{\mathcal{T}}_i(y; t)$ и $\overline{\mathcal{T}}_i(z; t)$, интерполирующими значения этих координат. Зависимость переменной t от точек интерполяции определяется равенствами

$$t_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{d(P_{i0}, P_{ij})}{d(P_{i0}) P_{iN})} & (0 \leqslant j \leqslant N) \\ \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{d(P_{iN}, P_{ij})}{d(P_{iN}, P_{i2N})} \right\} & (N \leqslant j \leqslant 2N), \end{cases} \tag{7.15.2}$$

где $d(P_{ij}, P_{il})$ — длина суммарной хорды между точками P_{ij} и P_{il}, соответствующей увеличению второго индекса от j до l. Точке Q_{0N} всегда соответствует параметр $t = 1/2$, а точке Q_{00} в силу периодичности сплайнов — и $t = 0$, и $t = 1$. Как правило, этими значениями исчерпываются все значения t, в которых интерполируются исходные точки Q_{ij} (кроме случаев $i = 0$, $i = 2k$ и $i = k$, в которых все точки интерполяции совпадают с исходными точками Q_{0j}).

Напомним, что сплайны $\overline{\mathcal{T}}_i(x; t)$, $\overline{\mathcal{T}}_i(y; t)$ и $\overline{\mathcal{T}}_i(z; t)$ строятся на сетке Δ_i: $0 = t_{i0} < t_{i1} < \ldots < t_{i2N} = 1$, которая меняется вместе с i. Чтобы устранить эту зависимость, построим на единичном отрезке $0 \leqslant t \leqslant 1$ сетку π

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = \frac{1}{2} < t_{N+1} < \ldots < t_{2N} = 1$$

и вычислим значения сплайнов $\overline{\mathcal{T}}_i(x; t)$, $\overline{\mathcal{T}}_i(y; t)$ и $\overline{\mathcal{T}}_i(z; t)$ для этих новых значений t. Мы получим тогда $2k$ новых множеств координат. Образуем новые периодические сплайны $\mathcal{T}_{\pi i}(x; t)$, $\mathcal{T}_{\pi i}(y; t)$ и $\mathcal{T}_{\pi i}(z; t)$, интерполирующие новые координаты в узлах общей сетки π. Здесь i принимает значения $0, 1, \ldots, 2k$ и $\mathcal{T}_{\pi 0}(x; t) \equiv \mathcal{T}_{\pi 2k}(x; t)$, $\mathcal{T}_{\pi 0}(y; t) \equiv \mathcal{T}_{\pi 2k}(y; t)$, $\mathcal{T}_{\pi 0}(z; t) \equiv \mathcal{T}_{\pi 2k}(z; t)$. Наконец, вычислим значения этих сплайнов при фиксированном t_j и построим периодические сплайны $S_{\Delta, j}(x; s)$, $S_{\Delta, j}(y; s)$ и $S_{\Delta, j}(z; s)$ относительно сетки Δ. Для каждого j этими координатными функциями определяются простые замкнутые кривые, аналогичные исходным кривым, но только теперь у нас $2N + 1$ кривых, а не $N + 1$, так как мы учитываем ориентацию.

Периодические одномерные сплайны

$$\mathcal{T}_{\pi i}(x; t),\ \mathcal{T}_{\pi i}(y; t),\ \mathcal{T}_{\pi i}(z; t) \qquad (i = 0, 1, \ldots, 2k), \tag{7.15.3.1}$$

$$S_{\Delta, j}(x; s),\ S_{\Delta, j}(y; s),\ S_{\Delta, j}(z; s) \qquad (j = 0, 1, \ldots, 2N) \tag{7.15.3.2}$$

дают значения x, y и z на линиях решетки единичного квадрата $\mathcal{R}$: $0 \leqslant t \leqslant 1$; $0 \leqslant s \leqslant 1$, определяемых сетками π и Δ. Нетрудно понять, что эти одномерные сплайны содержат достаточную и непротиворечивую информацию, позволяющую считать x, y, z дважды кубическими сплайнами на $\mathcal{R}$, которые для равно-

мерных сеток π и Δ удовлетворяют соотношениям симметрии:

$$\begin{aligned} x(t;\ s) &= x(1-t,\ 1-s),\\ y(t,\ s) &= y(1-t,\ 1-s),\\ z(t,\ s) &= z(1-t,\ 1-s),\\ [x(0,\ s),\ y(0,\ s),\ z(0,\ s) &= Q_{00},\\ \left[x\left(\tfrac{1}{2},\ s\right),\ y\left(\tfrac{1}{2},\ s\right),\ z\left(\tfrac{1}{2},\ s\right)\right] &= Q_{0N}. \end{aligned} \tag{7.15.4}$$

Но это верно только когда сделаны отождествления, необходимые для (7.15.4) и для периодичности сплайнов, т. е., когда поверхность, описываемая координатами $x(t,\ s)$, $y(t,\ s)$ и $z(t,\ s)$, гомеоморфна сфере. Без отождествлений (7.15.4) она больше похожа на две сферы с общим северным полюсом.

Для поверхностей, гомеоморфных тору, две кривые Γ_0 и Γ_N не вырождаются, а отождествляются. Следовательно, сплайны по своей природе периодичны относительно t и нет необходимости удваивать рассматриваемые поверхности, чтобы сделать их периодическими. Это значительно упрощает процедуру. Для поверхности, гомеоморфной конечному цилиндру, сплайны относительно t принадлежат типу I или II. Это не вызывает затруднений, необходима лишь дополнительная информация для определения требуемых производных в концах цилиндра.

Переменные s и t, участвующие в этих построениях, могут применяться в ситуациях, когда поверхность удваивается четное число раз. В более ограничительных ситуациях часто бывают удобнее другие переменные. В частности, во многих случаях в качестве переменной s берут угол между прямой, соединяющей точку на кривой Γ_j с фиксированной точкой, и фиксированной прямой, проходящей через фиксированную точку. Если поверхность тороидальна, то аналогичную замену можно осуществить и в отношении t. Для поверхности, гомеоморфной конечному цилиндру, в качестве одной из переменных часто берется сама координата z. Если возможно использовать независимые переменные, подобные указанным выше, то можно значительно сократить число переопределений поверхности для получения в конце концов прямоугольной сетки (иногда поверхность даже совсем не надо переопределять).

7.16. Поверхности Кунса

Метод Кунса [1] представления поверхностей заключается в том, что прямоугольная область $\mathscr{R}: a \leqslant t \leqslant b;\ c \leqslant s \leqslant d$ делится на прямоугольники $\mathscr{R}_{ij}: t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i,\ s_{j-1} \leqslant s \leqslant s_j$ $(i = 1, 2, \ldots, N;\ j = 1, 2, \ldots, M)$ и на каждом прямоугольнике определяется поверхность $S(t,\ s)$, совпадающая вдоль каждой из четырех сторон этого прямоугольника с одной из заданных кривых $f_i(s)$ $(i = 0, 1, \ldots, N)$, $g_j(t)$ $(j = 0, 1, \ldots, M)$, определенных на прямолинейных отрезках, разбивающих $\mathscr{R}$ на прямоугольники $\mathscr{R}_{ij}$. Это осуществляется так, чтобы первые частные производные $S(t,\ s)$ в направлении нормали к стороне прямоугольника $\mathscr{R}_{ij}$ (назовем их нормальными производ-

ными) зависели только от значений граничных данных в концах стороны и от значений первой производной граничных данных там же (вдоль стороны). В частности, для каждого прямоугольника $\mathscr{R}_{ij}$ имеем $S(t, s_{j-1}) = g_{j-1}(t)$, $t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i$, и $\partial S(t, s)/\partial s|_{s=s_{j-1}}$, $t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i$, зависит только от величин $f_{j-1}(s_{i-1})$, $f_{j-1}(s_i)$, $f'_{j-1}(s_{i-1})$, $f'_{j-1}(s_i)$ (и от некоторых величин, не зависящих от граничных данных). Следовательно, функцию $g_{j-1}(t)$ можно переопределить на отрезке $t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i$ (пока значения $g_{j-1}(t)$ и $g'_{j-1}(t)$ в точках t_{i-1} и t_i не изменяются), не меняя нормальной производной функции $S(t, s)$. Кроме того, в построение вводится достаточная симметрия, так что нормальная производная функции $S(t, s)$ непрерывна вдоль границы между двумя смежными прямоугольниками.

Хотя для достижения этих целей не существует единого метода, мы опишем сейчас один метод, тесно связанный с теорией сплайнов.

Пусть функции $g_{j-1}(t)$ и $g_j(t)$ определяют значения функции $S(t, s)$ вдоль прямых $s = s_{j-1}$ и $s = s_j$ соответственно, а функции $f_{i-1}(s)$ и $f_i(s)$ определяют ее значения вдоль прямых $t = t_{i-1}$ и $t = t_i$ соответственно. Эти четыре функции определяют значения функций $S(t, s)$, $\partial S(t, s)/\partial s$ и $\partial S(t, s)/\partial t$ в вершинах прямоугольников $\mathscr{R}_{ij}$. Зададим значения смешанной производной $\partial^2 S(t, s)/\partial s\,\partial t$ в вершинах прямоугольников $\mathscr{R}_{ij}$ некоторым фиксированным, но произвольным образом. (В смежных прямоугольниках значения должны быть непротиворечивыми.) Тогда в каждом прямоугольнике $\mathscr{R}_{ij}$ существует единственный бикубический полином $\hat{S}(t, s)$, определенный этими 16 величинами.

Положим

$$
\begin{aligned}
S_1(t, s) &= \{g_{j-1}(t) - \hat{S}(t, s_{j-1})\}\left\{-2\left(\frac{s_j - s}{s_j - s_{j-1}}\right)^3 + 3\left(\frac{s_j - s}{s_j - s_{j-1}}\right)^2\right\},\\
S_2(t, s) &= \{g_j(t) - \hat{S}(t, s_j)\}\left\{-2\left(\frac{s - s_j}{s_j - s_{j-1}}\right)^3 + 3\left(\frac{s - s_{j-1}}{s_j - s_{j-1}}\right)^2\right\},\\
S_3(t, s) &= \{f_{i-1}(s) - \hat{S}(t_{i-1}, s)\}\left\{-2\left(\frac{t_i - t}{t_i - t_{i-1}}\right)^3 + 3\left(\frac{t_i - t}{t_i - t_{i-1}}\right)^2\right\},\\
S_4(t, s) &= \{f_i(s) - \hat{S}(t_i, s)\}\left\{-2\left(\frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}\right)^3 + 3\left(\frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}\right)^3\right\}.
\end{aligned}
\tag{7.16.1}
$$

Тогда функция

$$
S(t, s) = \hat{S}(t, s) + \sum_{i=1}^{4} S_i(t, s) \tag{7.16.2}
$$

будет обладать нужными свойствами.

Легко найти функцию $\hat{S}(t, s)$. Для этого допустим, что $\mathscr{R}_{ij}$ — квадрат с единичной стороной, и пусть

$$
\begin{aligned}
S(t, s) = {} & (s - s_{j-1})^3 \{a_{11}(t - t_{i-1})^3 + a_{12}(t - t_{i-1})^2 + a_{13}(t - t_{i-1}) + a_{14}\} +\\
& + (s - s_{j-1})^2 \{a_{21}(t - t_{i-1})^3 + a_{22}(t - t_{i-1})^2 + a_{23}(t - t_{i-1}) + a_{24}\} +\\
& + (s - s_{j-1}) \{a_{31}(t - t_{i-1})^3 + a_{32}(t - t_{i-1})^2 + a_{33}(t - t_{i-1}) + a_{34}\} +\\
& + \{a_{41}(t - t_{i-1})^3 + a_{42}(t - t_{i-1})^2 + a_{43}(t - t_{i-1}) + a_{44}\}.
\end{aligned}
\tag{7.16.3}
$$

Тогда

$$a_{44} = S(t_{i-1},\ s_{j-1}),\quad a_{34} = \frac{\partial S}{\partial t}\Big|_{t_{i-1},\ s_{j-1}},\quad a_{43} = \frac{\partial S}{\partial t}\Big|_{t_{i-1},\ s_{j-1}};\quad a_{33} = \frac{\partial^2 S}{\partial s\,\partial t}\Big|_{t_{i-1},\ s_{j-1}};$$

$$a_{14} + a_{24} = S(t_{i-1},\ s_j) - a_{34} - a_{44};$$

$$3a_{14} + 2a_{24} = \frac{\partial S}{\partial t}\Big|_{t_{i-1},\ s_j} - a_{34};$$

$$a_{13} + a_{23} = \frac{\partial S}{\partial s}\Big|_{t_{i-1},\ s_j} - a_{33} - a_{43};$$

$$3a_{13} + 2a_{23} = \frac{\partial^2 S}{\partial s\,\partial t}\Big|_{t_{i-1},\ s_j} - a_{33};$$

$$a_{41} + a_{42} = S(t_i,\ s_{j-1}) - a_{43} - a_{44};$$

$$3a_{41} + 2a_{42} = \frac{\partial S}{\partial t}\Big|_{t_i,\ s_{j-1}} - a_{43};$$

$$a_{31} + a_{32} = \frac{\partial S}{\partial s}\Big|_{t_i,\ s_{j-1}} - a_{33} - a_{34};$$

$$3a_{31} + 2a_{32} = \frac{\partial^2 S}{\partial s\,\partial t}\Big|_{t_i,\ s_{j-1}} - a_{33};$$

$$a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22} = S(t_i,\ s_j) - a_{13} - a_{14} - a_{23} - a_{24} - a_{31} - a_{32} - a_{33} - a_{34} - a_{41} - a_{42} - a_{43} - a_{44};$$

$$3a_{11} + 3a_{12} + 2a_{21} + 2a_{22} = \frac{\partial S}{\partial s}\Big|_{t_i,\ s_j} - 3a_{13} - 3a_{14} - 2a_{23} - 2a_{24} - a_{31} - a_{32} - a_{33} - a_{34};$$

$$3a_{11} + 2a_{12} + 3a_{21} + 2a_{22} = \frac{\partial S}{\partial t}\Big|_{t_i,\ s_j} - a_{13} - a_{23} - 3a_{31} - 2a_{32} - a_{33} - 3a_{41} - 2a_{42} - a_{43};$$

$$9a_{11} + 6a_{22} + 6a_{21} + 4a_{22} = \frac{\partial^2 S}{\partial s\,\partial t}\Big|_{t_i,\ s_j} - 3a_{13} - 2a_{33} - 3a_{31} - 2a_{21} - 2a_{33}.$$

Кроме того, нам заданы следующие значения:

$$S(t_{i-1},\ s_{j-1}) = g_{j-1}(t_{i-1}) = f_{i-1}(s_{j-1});$$

$$S(t_{i-1},\ s_j) = g_j(t_{i-1}) = f_{i-1}(s_j);$$

$$S(t_i,\ s_{j-1}) = g_{j-1}(t_i) = f_i(s_{j-1}),\qquad S(t_i,\ s_j) = g_j(t_i) = f_i(s_j);$$

$$\frac{\partial S}{\partial s}\Big|_{t_{i-1},\ s_{j-1}} = f'_{i-1}(s_{j-1}),\qquad \frac{\partial S}{\partial t}\Big|_{t_{i-1},\ s_{j-1}} = g'_{j-1}(t_{i-1});$$

$$\frac{\partial S}{\partial s}\Big|_{t_{i-1},\ s_j} = f'_{i-1}(s_j)\qquad \frac{\partial S}{\partial t}\Big|_{t_{i-1},\ s_j} = g'_j(t_{i-1});$$

$$\left.\frac{\partial S}{\partial s}\right|_{t_i,\, s_{j-1}} = f_i'(s_{j-1}), \quad \left.\frac{\partial S}{\partial t}\right|_{t_i,\, s_{j-1}} = g_{j-1}'(t_i);$$

$$\left.\frac{\partial S}{\partial s}\right|_{t_i,\, s_j} = f_i'(s_j), \quad \left.\frac{\partial S}{\partial t}\right|_{t_i,\, s_j} = g_j'(t_i);$$

$$\left.\frac{\partial^2 S}{\partial s\,\partial t}\right|_{t_{i-1},\, s_{j-1}}, \quad \left.\frac{\partial^2 S}{\partial s\,\partial t}\right|_{t_{i-1},\, s_j}, \quad \left.\frac{\partial^2 S}{\partial s\,\partial t}\right|_{t_i,\, s_{j-1}}, \quad \left.\frac{\partial^2 S}{\partial s\,\partial t}\right|_{t_i,\, s_j}.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что функция $S(t, s)$ обладает нужными свойствами. Если мы хотим задать нормальную производную функции $S(t, s)$ вдоль границ прямоугольников $\mathscr{R}_{ij}$, то требуются весовые функции 5-й степени, для высших производных необходимы полиномы более высокой степени.

Однако весовые функции могут быть и не полиномами. Например, можно потребовать, чтобы $\hat{S}(t, s)$ и аналоги полиномиальных частей равенств (7.16.1) удовлетворяли уравнению $L^*L\hat{S} = 0$ при фиксированном t и уравнению $M^*M\hat{S} = 0$ при фиксированном s (L и M — линейные дифференциальные операторы, L^* и M^* — их формально сопряженные). Если функции $f_i(s)$ и $g_j(t)$ удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению $L^*Lh \equiv M^*Mh = 0$ ($2n$-го порядка), так что надо задать информацию только в вершинах прямоугольников $\mathscr{R}_{ij}$, то поверхности Кунса представляют собой двумерные сплайны $S(t, s)$, где каждый из одномерных сплайнов, полученных при сужении сплайна $S(t, s)$ на какую-то линию решетки, имеет дефект n в каждом узле сетки на этой линии. Так как Кунс рассматривал по существу каждый из прямоугольников $\mathscr{R}_{ij}$ отдельно, а не все вместе, то надо допускать дефект равным n.

Глава VIII. ОБОБЩЕННЫЕ СПЛАЙНЫ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

8.1. Введение

Содержание настоящей главы тесно связано с содержанием гл. VII. Однако здесь наше внимание сосредоточено на сплайнах $S_\pi(t, s)$, которые в каждом прямоугольнике $\mathscr{R}_{ij}$ удовлетворяют одновременно двум дифференциальным уравнениям: дифференциальному уравнению по переменной t и дифференциальному уравнению (не обязательно связанному с первым) по переменной s. Мы не требуем здесь, чтобы одномерные сплайны, полученные фиксированием одной из переменных, были простыми. Если рассматривать фиксированную переменную как параметр, то все сплайны такого однопараметрического семейства будут иметь общую сетку; мы предполагаем также, что они обладают одинаковыми свойствами непрерывности во внутренних узлах сетки и удовлетворяют краевым условиям одного и того же типа.

Мы связываем рассматриваемые сплайны с теорией гильбертова пространства, строя прямые произведения двух гильбертовых пространств одномерных сплайнов. Кроме того, мы получаем некоторые характеристики сплайнов, охватывающие свойства наилучшего приближения и минимальной нормы, устанавливая условия, при которых справедливо первое интегральное соотношение. Вопросы поточечной сходимости двумерных сплайнов мы сводим к аналогичным вопросам для случая одномерных сплайнов, где ответ известен.

Применяемые здесь методы с бо́льшими или меньшими трудностями обобщаются на большее число переменных: построение прямого произведения более чем двух гильбертовых пространств не вызывает затруднений; однако установление условий, при которых справедливо первое интегральное соотношение, сопряжено со значительными вычислительными трудностями, связанными главным образом с громоздкостью рассматриваемых выражений. Поэтому мы ограничиваемся лишь двумерным случаем. Хотя это и можно было бы сделать, мы не будем останавливаться на применении обобщенных двумерных сплайнов для представления поверхностей.

8.2. Основные определения

Пусть даны прямоугольник $\mathscr{R}$: $a \leqslant t \leqslant b$; $c \leqslant s \leqslant d$ и два дифференциальных оператора

$$\begin{aligned} L_t &= a_n(t) D_t^n \cdot + a_{n-1}(t) D_t^{n-1} \cdot + \ldots + a_0(t) \cdot, \\ L_s &= b_m(s) D_s^m \cdot + b_{m-1}(s) D_s^{m-1} \cdot + \ldots + b_0(t) \cdot. \end{aligned} \tag{8.2.1}$$

Здесь $D_t = d/dt$, $D_s = d/ds$, коэффициенты $a_i(t)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ имеют непрерывные n-е производные, $a_n(t) \neq 0$ на $[a, b]$; коэффициенты $b_j(s)$ $(j = 0, 1, \ldots, m)$ имеют непрерывные m-производные, $b_m(s) \neq 0$ на $[c, d]$. Обозначим через L_t^* и L_s^* операторы, формально сопряженные к операторам L_t и L_s. Наконец, пусть сетки Δ_t: $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b$ и Δ_s: $c = s_0 < s_1 < \ldots < s_M = d$ определяют сетку π, разбивающую прямоугольник $\mathscr{R}$ на NM прямоугольников $\mathscr{R}_{ij}$ $(i = 1, 2, \ldots, N;\ j = 1, 2, \ldots, M)$.

Определение 8.2.1. Функция $S_\pi(t, s)$ называется *двумерным обобщенным сплайном на $\mathscr{R}$ относительно сетки* π, связанным с операторами L_t и L_s, если а) для каждой точки s из $[c, d]$ она является гетерогенным сплайном на $[a, b]$ относительно сетки Δ_t, связанным с оператором L_t, и b) для каждой точки t из $[a, b]$ она является гетерогенным сплайном на $[c, d]$ относительно сетки Δ_s, связанным с оператором L_s.

Интересно исследовать важность требования, чтобы выполнялись условия $L_t^* L_t S_\pi = 0$ и $L_s^* L_s S_\pi = 0$ внутри каждого прямоугольника $\mathscr{R}_{ij}$. Если $L_t^* L_t S_\pi = 0$ в прямоугольнике $\mathscr{R}_{ij}$, то в этом прямоугольнике

$$S_\pi(t, s) = a_1(i, j; s)\, u_1(t) + a_2(i, j; s)\, u_2(t) + \ldots + a_{2n}(i, j; s)\, u_{2n}(t),$$

где функции $u_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, 2n)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения $L_t^* L_t u = 0$. Тогда из условия $L_s^* L_s S_\pi = 0$ получаем

$$0 = L_s^* L_s a_1(i, j; s)\, u_1(t) + L_s^* L_s a_2(i, j; s)\, u_2(t) + \ldots$$
$$\ldots + L_s^* L_s a_{2n}(i, j; s)\, u_{2n}(t).$$

Следовательно, $L_s^* L_s a_k(i, j; s) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, 2n)$, так что

$$a_k(i, j; s) = c_{k1}(i, j)\, v_1(s) + c_{k2}(i, j)\, v_2(s) + \ldots + c_{k2m}(i, j)\, v_{2m}(s),$$

где функции $v_l(s)$ $(l = 1, 2, \ldots, 2m)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения $L_s^* L_s v = 0$. Таким образом, для (t, s) из $\mathscr{R}_{ij}$

$$S_\pi(t, s) = \sum_{k=1}^{2n} \sum_{l=1}^{2m} c_{kl}(i, j)\, u_k(t)\, v_l(s). \tag{8.2.2}$$

Из представления (8.2.2) видно, что, если производная $\partial^\alpha S_\pi(t, s)/\partial s^\alpha$ непрерывна при $t = t_i$, то и производные $\partial^{\beta+\alpha} S_\pi(t, s)/\partial s^\alpha\, \partial t^\beta$ $(\beta = 0, 1, \ldots, 2m)$ также непрерывны при $t = t_i$, кроме, быть может, точек (t_i, s_j) $(j = 0, 1, \ldots, M)$. Аналогичный результат справедлив, если переменные t и s поменять ролями. Заметим, что в силу представления (8.2.2) можно менять порядок дифференцирований при вычислении частных производных функции $S_\pi(t, s)$.

8.3. Основное тождество

Билинейную форму $P(u, v)$, связанную с линейным дифференциальным оператором L_t, можно записать в виде

$$P[u, v] = \sum_{j=0}^{n-1} u^{(n-j-1)}(t)\, \beta_j(L_t, v; t), \tag{8.3.1.1}$$

где

$$\beta_j(L_t, v; t) = \sum_{i=0}^{j} (-1)^i \{a_{n-j-1}(t)\, v(t)\}^{(i)}. \tag{8.3.1.2}$$

(В разд. 6.2 мы обозначили $\beta_j(L, LS_\pi; t)$ через $\beta_j(S_\pi; t)$.) Так как рассматриваемые здесь функции зависят от двух переменных t и s и нам даны два оператора L_t и L_s, то мы слегка изменим обозначения:

$$P_{L_t}(u, v] = \sum_{j=0}^{n-1} D_t^{n-j-1} u(t, s)\, \beta_j(L_t, v, s; t), \tag{8.3.2.1}$$

$$\beta_j(L_t, v, s; t) = \sum_{i=0}^{j} (-D_t)^i \{a_{n-j-1}(t)\, v(t, s)\}, \tag{8.3.2.2}$$

$$P_{L_s}[u, v] = \sum_{j=0}^{m-1} D_s^{m-j-1} u(t, s)\, \beta_j(L_s, v, t; s), \tag{8.3.2.3}$$

$$\beta_j(L_s, v, t; s) = \sum_{i=0}^{j} (-D_s)^i \{b_{m-j-1}(s)\, v(t, s)\}. \tag{8.3.2.4}$$

Пусть функция $f(t, s)$ задана в прямоугольнике $\mathcal{R}$: $a \leqslant t \leqslant b$; $c \leqslant s \leqslant d$ и ее частные производные, содержащие не более n дифференцирований по t и не более m дифференцирований по s, непрерывны в $\mathcal{R}$. Пусть Δ_t: $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b$ и Δ_s: $c = s_0 < s_1 < \ldots < s_M = d$ определяют на $\mathcal{R}$ сетку π и $S_\pi(t, s)$ является сплайном на $\mathcal{R}$ относительно этой сетки, связанным с операторами L_t и L_s. Рассмотрим интеграл

$$I = \int_c^d \int_a^b L_t L_s \{f(t, s) - S_\pi(t, s)\}\, L_t^* L_s^* S_\pi(t, s)\, dt\, ds.$$

Так как $L_t^* L_t S_\pi(t, s) = 0$ и $L_s^* L_s S_\pi(t, s) = 0$ внутри каждого прямоугольника $\mathcal{R}_{ij}$, то

$$I = \int_c^d \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=0}^{n-1} D_t^{n-j-1} L_s \{f(t, s) - S_\pi(t, s)\}\, \beta_j(L_t, L_s L_t S_\pi, s; t)\Big|_{t_{i-1}}^{t_i} ds =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{M} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{m-1} D_s^{m-l-1} D_t^{n-j-1} \{f(t, s) - S_\pi(t, s)\} \cdot$$

$$\cdot \beta_l[L_s, \beta_j(L_t, L_s L_t S_\pi, s; t), t; s]\Big|_{t_{i-1}}^{t_i}\Big|_{s_{k-1}}^{s_k}. \tag{8.3.3}$$

Если в тождестве

$$\int_c^d \int_a^b \{L_t L_s [f(t, s) - S_\pi(t, s)]\}^2 dt\, ds = \int_c^d \int_a^b \{L_t L_s f(t, s)\}^2 dt\, ds -$$

$$-2 \int_c^d \int_a^b L_t L_s \{f(t, s) - S_\pi(t, s)\} L_t L_s S_\pi(t, s)\, dt\, ds - \int_c^d \int_a^b \{L_t L_s S_\pi(t, s)\}^2 dt\, ds$$

заменим I правой частью равенства (8.3.3), то получим тождество

$$\int_c^d \int_a^b \{L_t L_s f(t, s)\}^2 dt\, ds =$$

$$= \int_c^d \int_a^b \{L_t L_s S_\pi(t, s)\}^2 dt\, ds + \int_c^d \int_a^b \{L_t L_s f(t, s) - L_t L_s S_\pi(t, s)\}^2 dt\, ds -$$

$$-2 \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{M} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{m-1} D_s^{m-l-1} D_t^{n-j-1} \{f(t, s) - S_\pi(t, s)\} \cdot$$

$$\cdot \beta_l [L_s, \beta_j (L_t, L_s L_t S_\pi, s; t), t; s] \Big|_{t_{i-1}}^{t_i} \Big|_{s_{k-1}}^{s_k}, \quad (8.3.4)$$

называемое *основным* тождеством для обобщенных двумерных сплайнов. Хотя функции β_l допускают разрывы в узлах сетки или вдоль линий решетки, но они имеют точки разрыва лишь первого рода, и поэтому вычисления, связанные с нахождением величины I, надо проводить в терминах левосторонних и правосторонних пределов.

8.4. Типы сплайнов

С помощью сетки Δ: $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b$ на отрезке $[a, b]$ можно определить различные сплайны, отвечающие одному и тому же линейному дифференциальному оператору L. Любой конкретный сплайн $S_\Delta(t)$ зависит от конечного числа независимых параметров, которые мы называем определяющими значениями; $S_\Delta(t)$ есть результат конкретного задания численных значений этих параметров. Если таких параметров k и каждый их них может принимать любое действительное значение, то мы получаем k-параметрическое семейство сплайнов F_Δ относительно сетки Δ. Семейство F_Δ состоит из сплайнов, отличающихся только заданием численных значений этих параметров и, следовательно, обладающих в точках сетки одинаковыми свойствами непрерывности. В этом смысле семейство F_Δ определяет тип сплайна.

Для некоторых классов сплайнов мы уже ввели в рассмотрение понятие фундаментального сплайна, т. е. сплайна, для которого все значения параметров равны нулю, кроме одного, равного единице. Таким образом, с семейством F_Δ можно связать k линейно независимых сплайнов $e_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ и рассматривать его как линейное пространство с элементами $e_i(t)$ в качестве

базиса. Это значит, что, если $S_\Delta(t) \in F_\Delta$, то

$$S_\Delta(t) = \sum_{i=1}^{k} a_i e_i(t). \tag{8.4.1}$$

Фундаментальными сплайнами являются, например, сплайны, о которых говорится в следующих двух определениях [1]).

Определение 8.4.1. Пусть $S_\Delta(t) \in F_\Delta$. Семейство F_Δ называется семейством гетерогенных сплайнов *явного типа*, если каждый коэффициент a_i в равенстве (8.4.1) можно определить (до некоторой степени независимо от рассматриваемого сплайна $S_\Delta(t)$) как значение производной $S_\Delta^{(\alpha)}(t)$ в каком-нибудь узле сетки Δ для некоторого α ($\alpha = 0, 1, \ldots, n-1$). Если ни одна из производных $S_\Delta^{(\alpha)}(t_i)$ ($\alpha = 0, 1, \ldots, n-1$; $i = 0, 1, \ldots, N-1$) не участвует в определении коэффициентов a_i, то функция $\beta_\alpha(L'\ LS_\Delta; t)$ непрерывна при $t = t_i$ ($i = 1, 2, \ldots, N-1$) или обращается в нуль при $t = t_i$ ($i = 0, N$).

Большинство из рассмотренных нами сплайнов были сплайнами явного типа (при подходящем выборе базисных элементов). Данное определение (в частности, его двумерный аналог) в значительной степени облегчает формулировку многих основных результатов.

Определение 8.4.2. Пусть F_π — семейство двумерных сплайнов на $\mathscr{R}$ относительно сетки π, и пусть базис состоит из k сплайнов $h_i(t, s)$ ($i = 1, 2, \ldots, k$). Семейство F_π называется семейством гетерогенных сплайнов *явного типа*, если из равенства

$$S_\pi(t, s) = \sum_{i=1}^{k} a_i h_i(t, s) \tag{8.4.2}$$

вытекает, что каждый коэффициент a_i можно определить (до некоторой степени независимо от рассматриваемого сплайна $S_\pi(t, s)$) как значение частной производной $\partial^{\alpha+\gamma} S_\pi(t, s)/\partial t^\alpha \partial s^\gamma$ в каком-нибудь узле сетки π для некоторого числа $\alpha + \gamma$ ($\alpha = 0, 1, \ldots, n-1$; $\gamma = 0, 1, \ldots, m-1$). Если ни одна из производных $\partial^{\alpha+\gamma} S_\pi(t, s)/\partial t^\alpha \partial s^\gamma$ ($\alpha = 0, 1, \ldots, n-1$; $\gamma = 0, 1, \ldots, m-1$; $i = 0, 1, \ldots, N$; $j = 0, 1, \ldots, M$) не участвует в определении коэффициентов a_i, то функция $\beta_\gamma[L_s, \beta_\alpha(L_t, L_t L_s S_\pi, s; t), t; s]$ во внутренних узлах (t_i, s_j) сетки непрерывна [2]) либо по t, либо по s, или обращается в нуль либо непрерывна вдоль границы в узлах (t_i, s_j) (в граничных узлах сетки, не совпадающих с угловыми точками), или обращается в нуль в точках (t_i, s_j) (в угловых точках).

---

[1]) Эти определения не охватывают все классы сплайнов, например периодические сплайны. Но нетрудно дать определения для всех нужных случаев.

[2]) Утверждая, что функция $f(t, s)$ в точке (t_i, s_j) непрерывна по t, мы подразумеваем, что, если пределы $f(t, s_j+0)$ и $f(t, s_j-0)$ различны, то они оба непрерывны по t.

Когда мы говорим, что сплайн $S_\pi(t, s)$ интерполирует функцию $f(t, s)$ на сетке π, то понимаем под этим, что $S_\pi(t, s) = f(t, s)$ в узлах сетки π. Дадим более строгое определение.

Определение 8.4.3. Пусть семейство F_π состоит из сплайнов явного типа и сплайн $S_\pi(f; t, s)$ принадлежит F_π. Сплайн $S_\pi(f; t, s)$ называется сплайном *сильной интерполяции* для функции $f(t, s)$, если его частные производные, фактически участвующие в определении 8.4.2, интерполируют соответствующие частные производные функции $f(t, s)$ в указанных узлах сетки π.

8.5. Первое интегральное соотношение

Теорема 8.5.1. *Пусть функция $f(t, s)$ задана на прямоугольнике $\mathcal{R}$: $a \leqslant t \leqslant b$, $c \leqslant s \leqslant d$ и ее частные производные, содержащие не более n дифференцирований по t и не более m дифференцирований по s, непрерывны на $\mathcal{R}$. Пусть сетки*

$$\Delta_t: a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b$$

и

$$\Delta_s: c = s_0 < s_1 < \ldots < s_M = d$$

определяют на $\mathcal{R}$ сетку π. Если $S_\pi(f; t, s)$ представляет собой сплайн на $\mathcal{R}$ относительно π, связанный с операторами L_t и L_s, и является сплайном сильной интерполяции для $f(t, s)$ на π, то справедливо первое интегральное соотношение

$$\int_c^d \int_a^b \{L_s L_t f(t, s)\}^2 \, dt \, ds = \int_c^d \int_a^b \{L_s L_t S_\pi(f; t, s)\}^2 \, dt \, ds +$$

$$+ \int_c^d \int_a^b \{L_s L_t f(t, s) - L_s L_t S_\pi(f; t, s)\}^2 \, dt \, ds.$$

Доказательство. В силу основного тождества и тождества (8.3.4) для доказательства теоремы достаточно показать, что величина I равна нулю. Специальный вид представления (8.2.2) для сплайна $S_\pi(f; t, s)$ позволяет убедиться в справедливости следующих двух замечаний: 1) слагаемые, соответствующие внутренним узлам (t_i, s_j) сетки, не дают вклада в величину I, если в этих узлах производная $\partial^{\alpha+\nu} S_\pi(f; t, s)/\partial t^\alpha \partial s^\nu$ интерполирует $\partial^{\alpha+\nu} f(t, s)/\partial t^\alpha \partial s^\nu$ или функция $\beta_\nu [L_s, \beta_\alpha (L_t, L_s L_t S_\pi, s; t), t; s]$ непрерывна либо по t, либо по s, и 2) слагаемые, соответствующие граничным узлам сетки, не дают вклада, если $\beta_\nu [L_s, \beta_\alpha (L_t, L_s L_t S_\pi, s; t), t; s]$ обращается в нуль в этих узлах, либо непрерывна в них как функция, рассматриваемая лишь на границе прямоугольника $\mathcal{R}$. Но условия пунктов 1 и 2 выполнены, поскольку $S_\pi(f; t, s)$ является сплайном сильной интерполяции для $f(t, s)$ на π. Теорема доказана.

8.6. Единственность

Сформулируем теперь свойство минимальной нормы для двумерных сплайнов. Это свойство весьма полезно при исследовании единственности интерполяционных сплайнов; как и раньше, оно вытекает из первого интегрального соотношения.

Теорема 8.6.1. *Пусть даны прямоугольник* $\mathcal{R}$: $a \leqslant t \leqslant b$; $c \leqslant s \leqslant d$, *сетка* π, *определенная одномерными сетками* Δ_t: $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b$, Δ_s: $c = s_0 < s_1 < \ldots < s_M = d$, *и семейство* F_π *сплайнов заданного типа. Если функция* $f(t, s)$ *определена на* $\mathcal{R}$ *и ее частные производные, содержащие не более* $n - 1$ *дифференцирований по* t *и не более* $m - 1$ *дифференцирований по* s, *непрерывны на* $\mathcal{R}$, *а частные производные, содержащие* n *дифференцирований по* t *и* m *дифференцирований по* s, *непрерывны в каждом прямоугольнике* $\mathcal{R}_{ij}$, *и если* $S_\pi(f; t, s)$ — *сплайн сильной интерполяции для* $f(t, s)$, *то*

$$\int_c^d \int_a^b \{L_s L_t f(t, s)\}^2 \, dt \, ds \geqslant \int_c^d \int_a^b \{L_s L_t S_\pi(f; t, s)\}^2 \, dt \, ds.$$

Если дано семейство F_π явного типа, то любое решение уравнения $L_s L_t f = 0$ принадлежит F_π [1]). В частности, нулевая функция $z(t, s)$ (нулевой сплайн) будет элементом семейства F_π.

Определение 8.6.1. Если в F_π существует лишь один сплайн, который удовлетворяет уравнению $L_s L_t S_\pi = 0$ и является сплайном сильной интерполяции для $z(t, s)$, то говорят, что семейство F_π обладает *свойством единственности.*

Заметим, что если функция $S_\pi(t, s)$ на линиях решетки одномерных сплайнов сильной интерполяции для нулевой функции равна нулю, то из представления (8.2.2) видно, что она равна нулю тождественно.

Теорема 8.6.2. *Если семейство* F_π *обладает свойством единственности и* $S_\pi(f; t, s)$ — *сплайн сильной интерполяции для функции* $f(t, s)$, *удовлетворяющей условиям теоремы* 8.6.1, *то сплайн* $S_\pi(f; t, s)$ *является единственным.*

Доказательство. Разность любых двух сплайнов сильной интерполяции для $f(t, s)$ является сплайном сильной интерполяции для $z(t, s)$. В силу первого интегрального соотношения эта разность удовлетворяет уравнению $L_s L_t S_\pi = 0$ и, следовательно, тождественно равна нулю. Теорема доказана.

8.7. Существование

После того как получены фундаментальные сплайны, образующие базис для семейства F_π сплайнов заданного типа, нетрудно построить для функции $f(t, s)$ сплайн сильной интерполяции $S_\pi(f; t, s)$ из семейства F_π — достаточно

[1]) Вообще говоря, это утверждение неверно (см., например, разд. 7.6 и стр. 243, где $L_s = \partial^2/\partial s^2$ $L_t = \partial^2/\partial t^2$). — *Прим. перев.*

найти лишь некоторые частные производные функции $f(t, s)$. Но здесь важно, что фундаментальные сплайны существуют и известны.

Отметим, что двумерные сплайны выражаются через одномерные. Из этого факта, в частности, следует представление (8.2.2). Пусть в прямоугольнике $\mathcal{R}$: $a \leqslant t \leqslant b$; $c \leqslant s \leqslant d$ с помощью одномерных сеток Δ_t: $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b$ и Δ_s: $c = s_0 < s_1 < \ldots < s_M = d$ определена сетка π. Из представления (8.2.2) видно, что в каждом прямоугольнике $\mathcal{R}_{ij}$ надо определить $4nm$ коэффициентов c_{ij}. Если мы надлежащим образом запишем систему линейных уравнений для нахождения коэффициентов c_{ij} (всего таких коэффициентов $4nmNM$), то для установления разрешимости этой системы можно будет воспользоваться свойством единственности. В самом деле, если бы соответствующая однородная система имела два решения, то для нулевой функции были бы два сплайна из F_π сильной интерполяции, что невозможно.

Однако, чтобы получить соответствующую систему уравнений для c_{ij}, условия на $S_\pi(f; t, s)$ должны гарантировать выполнение первого интегрального соотношения. В каждом внутреннем узле (t_i, s_j) таких условий $4mn$: а) производные $\partial^{\alpha+\nu} S_\pi(f; t, s)/\partial t^\alpha\, \partial s^\nu$ ($\alpha = 0, 1, \ldots, n-1$, $\gamma = 0, 1, \ldots, m-1$) в точке (t_i, s_j) непрерывны и по t, и по s (это дает $3nm$ условий), b) производная $\partial^{\alpha+\nu} S_\pi(f; t, s)/\partial t^\alpha\, \partial s^\nu$ интерполирует $\partial^{\alpha+\nu} f(t, s)/\partial t^\alpha\, \partial s^\nu$ или функции $\beta_\nu[L_s, \beta_\alpha(L_t, L_t L_s S_\pi, s; t), t+0; s]$ и $\beta_\nu[L_s, \beta_\alpha(L_s, L_t L_s S_\pi, s; t), t-0; s]$ непрерывны по t в точках (t_i, s_j) при $\alpha = 0, 1, \ldots, n-1$; $\gamma = 0, 1, \ldots, m-1$ (переменные t и s можно поменять ролями).

Таким образом, кроме того случая, когда выполняется условие а) и первая альтернатива в условии b), в узле (t_i, s_j) необходимо удовлетворить не четырем, а пяти условиям. Так как условия, которые должны выполняться в граничных узлах сетки, остаются неизменными, то создается впечатление, что в некоторых случаях число условий превосходит число имеющихся в распоряжении коэффициентов. Следовательно, можно ожидать (по крайней мере формально), что коэффициенты c_{ij} должны удовлетворять более чем $4nmNM$ условиям. Однако в действительности эти условия не всегда оказываются переопределенными.

Например, пусть F_{Δ_t} — семейство сплайнов явного типа на $[a, b]$, а F_{Δ_s} — семейство сплайнов явного типа на отрезке $[c, d]$. Обозначим через $\{h_i(t)\}$ ($i = 1, 2, \ldots, k$) множество фундаментальных сплайнов, связанных с F_{Δ_t}, и через $\{g_j(s)\}$ ($j = 1, 2, \ldots, l$) множество фундаментальных сплайнов, связанных с F_{Δ_s}. Рассмотрим линейное пространство F_π, порожденное множеством $\{h_i(t)\, g_j(s)\}$ ($i = 1, \ldots, k$; $j = 1, \ldots, l$) попарных произведений. Предоставляем читателю самому проверить, что F_π состоит из двумерных сплайнов на $\mathcal{R}$ относительно π; на самом деле F_π будет даже семейством сплайнов явного типа. Заметим, что в данном случае [1])

$$\beta_\alpha[L_s, \beta_\alpha(L_t, L_t L_s h_i g_j, s; t)\, t; s] = \beta_\alpha(L_s, L_s g_j; s)\, \beta_\alpha(L_t, t_t h; t). \quad (8.7.1)$$

[1]) Для этих сплайнов, согласно (8.7.1), в каждом внутреннем узле сетки должны выполняться лишь 4 условия. Можно показать, что в данном случае во внутренних узлах сетки имеется $4(M-1)(N-1)nm$ условий и в граничных узлах сетки $4(N+M+1)nm$ условий, т. е. всего $4MNnm$ условий.

Понятие частичных сплайнов можно также использовать (как и в гл. VII) для построения двумерных обобщенных сплайнов. Но и здесь оба семейства сплайнов, участвующих в построении, должны быть явного типа. Тогда будет справедливо первое интегральное соотношение и в силу единственности переменные t и s можно будет (как и в гл. VII) поменять ролями.

8.8. Сходимость

Обоснование сходимости, данное в разд. 7.10, можно с таким же успехом применить и здесь, так что задача сходимости в двумерном случае сводится к задаче сходимости в одномерном случае. Только теперь, чтобы можно было изменять порядок дифференцирований, надо потребовать еще непрерывности функции $f(t, s)$ и достаточного числа ее частных производных. Теорема 8.8.1 служит типичным примером теорем сходимости, доказанных таким способом. Ее доказательство проводится по схемам разд. 7.10, и поэтому мы его опускаем. При желании можно также оценить скорость сходимости посредством скоростей сходимости рассматриваемых одномерных сплайнов.

Теорема 8.8.1. *Пусть даны прямоугольник* $\mathcal{R}$: $a \leqslant t \leqslant b$; $c \leqslant s \leqslant d$ *и последовательность сеток* $\{\pi_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *на* $\mathcal{R}$, *определенная последовательностями* $\{\Delta_t^k: a = t_0^k < t_1^k < \ldots < t_{N_k}^k = b\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *и* $\{\Delta_s^k: c = s_0^k < s_1^k < \ldots < s_{M_k}^k = d\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. *Пусть функция* $f(t, s)$ *имеет на* $\mathcal{R}$ *непрерывные частные производные, содержащие не более* n_1 *дифференцирований по* t *и не более* m_1 *дифференцирований по* s, *и пусть* $\{S_{\pi_k}(f; t, s)\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ — *последовательность двумерных сплайнов, связанных с линейными операторами* L_t *и* L_s *вида* (8.2.1); $n \leqslant n_1$, $m \leqslant m_1$. *Если для каждого* t_i^k

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\partial^\gamma S_{\pi_k}(f; t_i^k, s)}{\partial s^\gamma} = \frac{\partial^\gamma f(t_i^k, s)}{\partial s^\gamma} \qquad (\gamma = 0, 1, \ldots, m_1)$$

равномерно по s *и* t_i^k *и для каждого* s_j^k

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\partial^\alpha S_{\pi_k}(f; t, s_j^k)}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^\alpha f(t, s_j^k)}{\partial t^\alpha} \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, n_1)$$

равномерно по t *и* s_j^k, *то*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\partial^{\alpha+\gamma} S_{\pi_k}(f; t, s)}{\partial t^\alpha\, \partial s^\gamma} = \frac{\partial^{\alpha+\gamma} f(t, s)}{\partial t^\alpha\, \partial s^\gamma} \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, n_1;\ \gamma = 0, 1, \ldots, m_1)$$

равномерно по s *и* t.

8.9. Приложения к теории гильбертова пространства

Если даны прямоугольник $\mathscr{R}$: $a \leqslant t \leqslant b$; $c \leqslant s \leqslant d$ и канонические сеточные базисы $\{S_i(L_t; t)\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ и $\{S_j(L_s; s)\}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ для пространств $\mathscr{K}^n(a, b)$ и $\mathscr{K}^m(c, d)$ соответственно, то можно образовать прямое произведение этих пространств в смысле гильбертова пространства (Сард [1, стр. 354]). Обозначим это прямое произведение через $\mathscr{K}^n_m(\mathscr{R})$. Его можно интерпретировать как замыкание относительно полунормы

$$\| f \|^2 = \int_a^b \int_c^d | L_t L_s f(t, s) |^2 \, dt \, ds \tag{8.9.1}$$

(здесь отождествляются функции, отличающиеся на решение уравнения $L_t L_s f = 0$) пространства функций, порожденного попарными произведениями элементов канонических базисов для $\mathscr{K}^n(a, b)$ и $\mathscr{K}^m(c, d)$. Следовательно, функции

$$S_{ij}(t, s) \equiv S_i(L_t; t) S_j(L_s; s) \qquad (i = 1, 2, \ldots; j = 1, 2, \ldots) \tag{8.9.2}$$

образуют базис для $\mathscr{K}^n_m(\mathscr{R})$.

Обозначим через $C^{\alpha}_{\beta\gamma}(\mathscr{R})$ пространство функций $f(t, s)$, α-я частная производная которых, содержащая не более β дифференцирований по t и не более γ дифференцирований по s, непрерывна на $\mathscr{R}$. В этой терминологии $C^{n+m}_{nm}(\mathscr{R})$ и $C^{2(n+m)}_{2n2m}(\mathscr{R})$ — подпространства пространства $\mathscr{K}^n_m(\mathscr{R})$.

Если функция $f(t, s)$ принадлежит $C^{n+m}_{nm}(\mathscr{R})$, то ее можно представить в виде

$$f(t, s) = g(t, s) + \sum_{i, j} a_{ij} S_{ij}(t, s), \tag{8.9.3}$$

где

$$a_{ij} = \int_a^b \int_c^d f(t, s) L_t L_s S_{ij}(t, s) \, ds \, dt \qquad (i = 1, 2, \ldots; j = 1, 2, \ldots),$$

$$L_t L_s g(t, s) = 0.$$

Из теоремы 8.8.1 следует, что при достаточно слабых ограничениях сходимость равномерна относительно t и s. Поступая, как в разд. 5.17, получаем представление

$$f(t, s) = g(t, s) + \int_a^b \int_c^d K(t, s; t', s') L_t L_s f(t', s') \, ds' \, dt', \tag{8.9.4.1}$$

где

$$K(t, s; t', s') = \lim_{N \to \infty} \sum_{i, j < N} S_{ij}(t, s) L_t L_s S_{ij}(t', s'). \tag{8.9.4.2}$$

Уравнение (8.9.4), как и в разд. 6.18, можно использовать для решения дифференциальных уравнений в частных производных вида

$$L_t L_s h(t, s) = f(t, s) \tag{8.9.5}$$

и соответствующей задачи о собственных значениях. Недостаток этого метода состоит в том, что произвольный дифференциальный оператор в частных производных, вообще говоря, нельзя представить в виде (8.9.5). Кроме того, метод применим лишь для прямоугольных областей $\mathscr{R}$. Чтобы устранить последнее ограничение, можно специальным образом подобрать координаты, как это описано в разд. 7.14, но обычно выбор координат нарушает разложение вида (8.9.5), если оно было справедливо.

Что касается приближения и представления линейных функционалов, то здесь ситуация намного лучше. Одна из причин заключается в том, что линейные функционалы часто определяются внутренне, а не в терминах конкретной координатной системы. Например, пусть

$$Lf = \int_D f(P)\, dA, \tag{8.9.6}$$

где D — односвязная замкнутая область, звездообразная относительно точки P_0, и dA — элемент площади. Введем в D полярные координаты r и θ с полюсом в точке P_0. Пусть $\bar{r} = g(\theta)$ — граница области D. Практически в качестве функции $g(\theta)$ можно взять простой кубический сплайн относительно переменной θ. Введем новые координаты

$$\beta = \frac{r}{\bar{r}}, \qquad \alpha = \theta; \tag{8.9.7}$$

тогда

$$Lf = \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(\beta, \alpha) \begin{vmatrix} \frac{\partial r}{\partial \beta} & \frac{\partial r}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial \theta}{\partial \beta} & \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} \end{vmatrix} \beta g(\alpha)\, d\beta\, d\alpha = \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(\beta, \alpha)\, g(\alpha)^2 \beta\, d\beta\, d\alpha. \tag{8.9.8}$$

Этот пример показывает, что координатную систему в области D можно ввести так, что область изменения координат станет прямоугольной. После перехода к прямоугольной области большой класс функционалов можно представить и приблизить так же, как в гл. V и VI. Расхождения с одномерными методами не вызывают затруднений.

ЛИТЕРАТУРА

Альберг, Нильсон (Ahlberg J. H., Nilson E. N.)
1. Convergence properties of the spline fit, *Notices Am. Math. Soc.* (1961), 61T-219.
2. Convergence properties of the spline fit, Intern. Congr. Math. Stockholm, 1962.
3. Convergence properties of the spline fit, *J. Soc. Ind. Appl. Math.*, **11** (1963), 95—104.
4. Convergence properties of generalized splines, *Notices Am. Math. Soc.* (1964), 64T-485.
5. Orthogonality properties of spline functions, *J. Math. Anal. Appl.*, **11** (1965), 321—327.
6. The approximation of linear functionals, *J. Soc. Ind. Appl. Math.*, *Numer. Anal.*, Ser. B, 3 (1966), 173—182.

Альберг, Нильсон, Уолш (Ahlberg J. H., Nilson E. N., Walsh J. L.)
1. Best approximation properties of the spline fit, *J. Math. Mech.*, **11** (1962), 225—234.
2. Best approximation and convergence properties of higher order spline fits, *Notices Am. Math. Soc.* (1963), 63T-103.
3. Orthogonality properties of the spline function, *Notices Am. Math. Soc.* (1964), 64T-338.
4. Extremal, orthogonality, and convergence properties of multi-dimensional splines, *Notices Am. Math. Soc.* (1964), 64T-339.
5. Fundamental properties of generalized splines, *Notices Am. Math. Soc.* (1964), 64T-451.
6. Higher-order spline interpolation, *Notices Am. Math. Soc.* (1964), 64T-494.
7. Fundamental properties of generalized splines, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 52 (1964), 1412—1419.
8. Generalized splines and the best approximation of linear functionals, *Notices Am. Math. Soc.* (1965), 65T-125.
9. Best approximation and convergence properties of higher order spline approximations, *J. Math. Mech.*, **14** (1965), 231—244.
10. Convergence properties of generalized splines, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 54 (1965), 344—350.
11. Extremal, orthogonality, and convergence properties of multi-dimensional splines, *J. Math. Anal. Appl.*, **11** (1965), 27—48.
12. Convergence properties of cubic splines, *Notices Am. Math. Soc.* (1966), 66T-47.

Аттиа (Atteia M.)
1. Généralisation de la définition et des propriétés des «spline function», *Compt. Rend.*, 260 (1965), 3550—3553.

Беллман, Калаба (Bellman R. E., Kalaba R. E.)
1. Modern analytic and computational methods in science and mathematics, Amsterdam, 1965.

Биркгоф (Birkhoff G.)
1. Error bounds for spline fits, *Notices Am. Math. Soc.* (1964), 64T-296.

Биркгоф, де Бур (Birkhoff G., de Boor C.)
1. Error bounds for spline interpolation, *J. Math. Meth.*, 13 (1964), 827—835.

Биркгоф, Гарабедян (Birkhoff G., Garabedian H.)
1. Smooth surface interpolation, *J. Math. Phys.*, 39 (1960), 258—268.

Гильдебранд (Hildebrand F. B.)
1. Introduction to numerical analysis, New York, 1956.

Голомб, Вайнбергер (Golomb M., Weinberger H. F.)
1. Optimal approximation and error bounds. On numerical approximation, Proc. Symp. Math. Res. Center, Univ. Wisconsin, April 1958, pp. 117—190.

Гревиль (Greville T. N. E.)
1. Numerical procedures for interpolation by spline functions, Math. Res. Center Tech. Summary Rept. 450, US Army, Univ. of Wisconsin, 1964.
2. Interpolation by generalized spline functions, Math. Res. Center Tech. Summary Rept. 476. US Army, Univ. of Wisconsin. 1964.
3. Numerical procedures for interpolation by spline functions. *J. Soc. Ind. Appl. Math., Numerical Anal.*, Ser. B. **1** (1964), 53—68.

Гурса, Бергман (Goursat E., Bergmann S.)
1. A course in mathematical analysis, vol. III, part 2, New York, 1964.

Гурса, Хедрик (Goursat E., Hedrick E. R.)
1. A course in mathematical analysis, vol. I, Boston, 1904.

Далквист (Dahlquist G.)
1. Convergence and stability in the numerical integration of ordinary differential equations, *Math. Scand.*, 4 (1956), 33—53.

Де Бур (de Boor C.)
1. Bicubic «spline» interpolation, *Notices Am. Math. Soc.* (1961), 579-24.
2. Bicubic spline interpolation, *J. Math. Phys.*, **41** (1962), 212—218.
3. Best approximation properties of spline functions of odd degree, *J. Math. Mech.*, 12 (1963), 747—749.

Де Бур, Линч (de Boor C., Lynch R. E.)
1. General spline functions and their minimum properties, *Notices Am. Math. Soc.* (1964), 64T-456.
2. On splines and their minimum properties. *J. Math.* Mech., **15** (1966), 953—969.

Джонсон (Johnson R. S.)
1. On monosplines of least deviation, *Trans. Am. Math. Soc.*, **96** (1960), 458—477.

Дэвис (Davis P. J.)
1. Interpolation and approximation, New York, 1963.

Зейферт (Seifert H. S., ed.)
1. Space Technology, New York, 1959.

Кунс (Coons S. A.)
1. Surfaces for computer-aided design of space figures. 1964 (не опубликовано).

Ландис, Нильсон (Landis F., Nilson E. N.)
1. The determination of thermodynamic properties by direct differentiation techniques, Progr. Intern. Res. Thermodyn. Transport Properties, Am. Soc. Mech. Engrs, 1962.

Мюир (Muir T.)
1. A treatise on the theory of determinants, New York, 1960.

Пеано (Peano G.)
1. Resto nelle formule di quadrature expresso con un integrale definito, *Atti Accad. Nazl. Lincei, Rend. Classe Sci. Fis. Mat. Nat.* (5), 22 (1913), 562—569; Opere Scelte Roma, **1** (1957), 410—418.

Сансоне, Конти (Sansone G., Conti R.)
1. Non-linear differential equations, New York, 1964.

Сард (Sard A.)
1. Linear approximation «Mathematical Surveys» № 9, Am. Math. Soc., Providence, 1963.

Секрест (Secrest D.)
1. Best integration formulas and best error bounds, *Math. Comp.*, **19** (1965), 79—83.
2. Error bounds for interpolation and differentiation by the use of spline functions, *J. Soc. Ind. Appl. Math., Numer. Anal.*, Ser. B, **2** (1966), 440—447.

Сокольников (Sokolnikoff I. S.)
1. Mathematical theory of elasticity, New York, 1956.

Тайльхаймер, Старквезер (Theilheimer F., Starkweather W.)
1. The fairing of ship lines on a high-speed computer, *Numerical Tables Aids Computation*, 15 (1961), 338—355.

Тейлор (Taylor A. E.)
1. Introduction to functional analysis, New York, 1958.

Тодд (Todd J., ed.)
1. Survey of numerical analysis, New York, 1962.

Фейер (Fejér L.)
1. Über Interpolation, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Physik. Kl., 1916.
2. Die Abschätzung eines Polynoms in einem Intervalle, wenn Schranken für seine Werte und ersten Ableitungswerte in einzelnen Punkten des Intervalles gegebenen sind, und ihre Anwendung auf die Konvergenzfrage Hermiteschen Interpolationsreihen, *Math. Z.*, 32 (1930), 426—457.

Фриман (Freeman H.)
1. Mathematics for actuarial students, vol. II, Cambridge Univ. Press, London, New York, 1949.

Хилле (Hille E.)
1. Analytic function theory, vol. II, Boston, 1962.

Холлидей (Holladay J. C.)
1. Smoothest curve approximation, *Math. Tables Aids Comput.*, 11 (1957), 233—243.

Циглер (Ziegler Z.)
1. On the convergence of n-th order spline functions, *Notices Am. Soc.* (1965), 65T-354.

Шарма, Мейер (Sharma A., Meir A.)
1. Convergence of spline functions, *Notices Am. Math. Soc.* (1964), 64T-496.
2. Degree of approximation of spline interpolation, *J. Math. Mech.*, 15 (1966), 759—767.

Швайкерт (Schweikert D. G.)
1. An interpolation curve using a spline in tension, *J. Mash. Phys.*, 45 (1966), 312—317.

Шёнберг (Schoenberg I. J.)
1. Contributions to problem of approximation of equidistant data by analytic functions, *Quart. Appl. Math.*, 4 (1946), 45—99, 112—141.
2. On Polya frequency functions and their Laplace transforms, *J. Anal. Math.*, 1 (1951), 331—374.
3. Spline functions, convex curves, and mechanical quadrature, *Bull. Am. Math. Soc.*, 64 (1958), 352—357.
4. Spline interpolation and the higher derivatives, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 51 (1964), 24—28.
5. Spline interpolation and best quadrature formulae, *Bull. Am. Math. Soc.*, 70 (1964), 143—148.
6. On the best approximation of linear operators, *Konikl. Ned. Akad. Wetenschap. Proc.*, Ser. A, 67 (1964), 155—163.
7. On trigonometric spline interpolation, *J. Math. Mech.*, 13 (1964), 795—825.
8. On interpolation by spline functions and its minimal properties. «International Series of Numerical Analysis», vol. 5. pp. 109—129, Academic Press, New York, 1964.
9. Spline functions and the problem of graduation, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 52 (1964), 947—950.
10. On monosplines of least deviation and best quadrature formulae, *J. Soc. Ind. Appl. Math., Numer. Anal.*, Ser. B, 2 (1965), 145—170.

Шёнберг, Уитни (Schoenberg I. J., Whitney A.)
1. Sur la positivité des déterminants de translations de fonctions de fréquence de Pólya avec une application au problème d'interpolation par les fonctions «spline», *Compt. Rend.*, 228 (1949), 1996—1998.
2. On Polya frequency functions. III, *Trans. Am. Math. Soc.*, 74 (1953), 246—259.

Эйткен (Aitken A. C.)
1. Determinants and matrices, Edinburgh, London, 1958.

Эскер (Asker B.)
1. The spline curve, a smooth interpolating function used in numerical design of ship-lines, *Nord. Tidskr. Inform. Behandling*, 2 (1962), 76—82.

ДОБАВЛЕНИЯ

С. Б. Стечкин, Ю. Н. Субботин

§ 1. Полиномиальные сплайны первой степени

Функцию $S_1(x)$ называют сплайном первой степени на сетке

$$\Delta: a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b, \tag{1.1}$$

если она непрерывна на $[a, b]$ и совпадает с линейной функцией на каждом из отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Полиномиальные сплайны первой степени (ломаные) с успехом применяются в качестве промежуточного приближения. Эта идея восходит к Лебегу (см., например, [7] [1])), который использовал промежуточное приближение ломаными для доказательства теоремы Вейерштрасса о полноте множества алгебраических многочленов в пространстве $C(0, 1)$. В дальнейшем этот метод развивался в работах Н. П. Корнейчука, например, в [12].

Сформулируем некоторые результаты о приближении интерполяционными сплайнами первой степени. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$ и сплайн $S_1(x)$ интерполирует ее в узлах $x_k = k/n$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Обозначим через H_ω и WH_ω классы функций, модуль непрерывности $\omega(\delta, f)$ и соответственно модуль непрерывности первой производной $\omega(\delta, f')$ которых не превосходит заданного модуля непрерывности $\omega(\delta)$. В. Н. Малоземов [17] доказал следующие две теоремы.

Т е о р е м а 1. *Если* $\omega(\delta)$ — *выпуклый модуль непрерывности, то*

$$\sup_{f \in H_\omega} \| f(x) - S_1(x) \|_C = \omega\left(\frac{1}{2n}\right), \tag{1.2}$$

$$\sup_{f \in WH_\omega} \| f(x) - S_1(x) \|_C = \frac{1}{4} \int_0^{1/n} \omega(t)\, dt. \tag{1.3}$$

Т е о р е м а 2. *Для произвольного модуля непрерывности* $\omega(\delta)$

$$\sup_{f \in WH_\omega} \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} | f'(x) - S_1'(x) | = n \int_0^{1/n} \omega(t)\, dt. \tag{1.4}$$

Обобщение равенства (1.2) дано В. Ф. Сторчаем [26].

---

[1]) Жирные цифры в квадратных скобках указывают номер работы в списке литературы к этим добавлениям. Светлые цифры отсылают к основному списку.

Т е о р е м а 3. *Если* $\omega(\delta)$ — *выпуклый модуль непрерывности, то*

$$\sup_{f\in H_\omega} \| f(x) - S_1(x) \|_{L_p} = \left\{ 2n \int_0^{1/2n} [\omega(t)]^p \, dt \right\}^{1/p}. \tag{1.5}$$

Равенство (1.2) получается отсюда предельным переходом при $p \to \infty$.

Приближения ломаными функций класса H_ω для произвольного $\omega(\delta)$ рассматривались в работе А. С. Логинова [14], где доказана

Т е о р е м а 4. *Если* $\omega(\delta) \not\equiv 0$, *то для любого* $n = 1, 2, \ldots$

$$I(\omega, n) = \sup_{f\in H_\omega} \frac{\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} |f(x) - S_1(x)|}{\omega(1/2n)} < \frac{3}{2},$$

$$\sup_{\omega(\delta)\not\equiv 0} I(\omega, n) = \frac{3}{2}, \tag{1.6}$$

$$\sup_{f\in H_\omega} \max_{0\leqslant x\leqslant 1} |f(x) - S_1(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} \omega\left(\frac{1}{2^k n}\right),$$

где $S_1(x)$ — *ломаная с вершинами в точках* $(k/n, f(k/n))$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Докажем теорему 2. Пусть

$$s(x) = f'(x) - n\left[f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right], \qquad \frac{k}{n} \leqslant x \leqslant \frac{k+1}{n},$$

и

$$|s(x_0)| = \max_{\frac{k}{n}\leqslant x\leqslant \frac{k+1}{n}} |s(x)|.$$

Так как

$$\int_{k/n}^{(k+1)/n} s(x)\, dx = 0,$$

то

$$|s(x_0)| = n \left| \int_0^{1/n} \left[s(x_0) - s\left(\frac{k}{n} + x\right) \right] dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant n \int_0^{1/n} \omega\left(\left| x_0 - \frac{k}{n} - x \right| \right) dx \leqslant n \int_0^{1/n} \omega(t)\, dt.$$

Покажем, что для функции

$$f_0(x) = \int_0^x s_0(t)\, dt, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

где

$$s_0(x)=\begin{cases}\omega\left(\frac{1}{n}-x\right)-n\int\limits_0^{1/n}\omega(t)\,dt, & 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{n},\\ -n\int\limits_0^{1/n}\omega(t)\,dt, & \frac{1}{n}\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

($s_0(x)\in H_\omega$), выполняется равенство

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|f_0'(x)-S_1'(x)|=n\int\limits_0^{1/n}\omega(t)\,dt.$$

В самом деле,

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|f_0'(x)-S_1'(x)|=\max\left[n\int\limits_0^{1/n}\omega(t)\,dt,\ \omega\left(\frac{1}{n}\right)-n\int\limits_0^{1/n}\omega(t)\,dt\right].$$

Далее,

$$\omega\left(\frac{1}{n}\right)=\omega\left(\frac{1}{n}-t+t\right)\leqslant\omega\left(\frac{1}{n}-t\right)+\omega(t).$$

Интегрируя это неравенство от 0 до $1/n$, получаем

$$\omega\left(\frac{1}{n}\right)\leqslant 2n\int\limits_0^{1/n}\omega(t)\,dt.$$

Следовательно,

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|f_0'(x)-S_1'(x)|=n\int\limits_0^{1/n}\omega(t)\,dt.$$

Теорема доказана.

§ 2. Интерполяционные параболические сплайны

2.1. Существование и сходимость. Здесь рассматриваются сплайны четной степени, узлы которых находятся посредине между узлами интерполяции. Впервые такие сплайны на равномерной сетке изучал Шёнберг [1].

Пусть заданы непрерывная периодическая функция $f(x)$ с периодом $b-a$ и сетка

$$\Delta:\ a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b. \tag{2.1}$$

Функцию $S_2(x)$ называют периодическим сплайном второй степени с периодом $b-a$, интерполирующим функцию $f(x)$ на сетке Δ, если

1) $S_2(x+b-a)\equiv S_2(x)$, $-\infty<x<\infty$,

2) $S_2(x)$ имеет непрерывную первую производную и $S_2''(x)=S_k''$ при $(x_{k-1}+x_k)/2\leqslant x\leqslant(x_k+x_{k+1})/2$, где S_k'' — константы, $k=1,2,\ldots,n$, $x_{n+1}=b-a+x_1-x_0$,

3) $S_2(x_k)=f(x_k)$, $k=0,1,\ldots,n$.

Положим

$$h_k = x_{k+1} - x_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, n,$$

$$f(x_k, x_{k+1}) = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{h_k},$$

$$f(x_{k-1}, x_k, x_{k+1}) = \frac{f(x_k, x_{k+1}) - f(x_{k-1}, x_k)}{h_{k-1} + h_k}.$$

Представим $S_2(x)$ в виде

$$S_2(x) = S_2(a) + S_2'(a)(x - a) + \int_0^x (x - t) S_2''(t)\, dt$$

и потребуем, чтобы выполнялось условие $S_2(x_{k-1}, x_k, x_{k+1}) = f(x_{k-1}, x_k, x_{k+1})$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Тогда

$$\frac{h_{k-1}}{h_{k-1} + h_k} S_{k-1}'' + 3S_k'' + \frac{h_k}{h_{k-1} + h_k} S_{k+1}'' = 8f(x_{k-1}, x_k, x_{k+1}), \tag{2.2}$$

$$k = 1, 2, \ldots, n, \quad S_0'' = S_n'', \quad S_{n+1}'' = S_1''.$$

Матрица коэффициентов системы (2.2) обладает доминирующей главной диагональю, следовательно, система имеет единственное решение. Неизвестные $S_2(a)$ и $S_2'(a)$ находятся из условий интерполяции. Таким образом, при $n \geqslant 1$ существование и единственность периодического интерполяционного сплайна второй степени доказаны.

Положим

$$\alpha = \max_k \alpha_k, \qquad \alpha_k = h_k |S_k''|,$$

$$\beta = \max_k \beta_k, \qquad \beta_k = h_{k-1} |S_k''|,$$

$$\gamma = \max(\alpha, \beta), \qquad \delta = \max_k h_k.$$

Лемма 1. *Если сплайн $S_2(x)$ второй степени интерполирует в узлах сетки (2.1) непрерывную периодическую функцию $f(x)$ с периодом $b - a$, то*

$$\gamma \leqslant 16 \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{\omega(h_k, f)}{h_k}, \tag{2.3}$$

$$\max_k |S_k''| \leqslant 16 \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{h_{k-1}^{-1} \omega(h_{k-1}, f) + h_k^{-1} \omega(h_k, f)}{h_{k-1} + h_k}. \tag{2.4}$$

Если, кроме того, $f(x)$ имеет непрерывную первую производную, то

$$\gamma \leqslant 16\omega(\delta, f'). \tag{2.5}$$

Доказательство. Пусть $\gamma = \max(\alpha, \beta) = \max_k \max(\alpha_k, \beta_k)$; тогда из равенств (2.2) получаем

$$\frac{3}{8}\gamma \leqslant \frac{3}{8}\alpha_i + \frac{3}{8}\beta_i \leqslant \frac{1}{8}\alpha_{i-1} + \frac{1}{8}\beta_{i+1} + (h_{i-1} + h_i) |f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{8}\gamma + (h_{i-1} + h_i) |f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})|, \tag{2.6}$$

откуда

$$\gamma \leqslant 8\{h_{i-1}^{-1}\omega(h_{i-1}, f) + h_i^{-1}\omega(h_i, f)\} \leqslant 16 \max_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{\omega(h_k, f)}{h_k},$$

$$\gamma \leqslant 8\{f'(x_i + \theta_1 h_i) - f'(x_i - \theta_2 h_{i-1})\} \leqslant 16\omega(\delta, f'), \qquad 0 < \theta_i < 1,$$

Далее, в силу (2.2)

$$|S_i''| = \max_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k''| \leqslant \frac{1}{3}\left\{\frac{h_{i-1}}{h_{i-1}+h_i}|S_{i-1}''| + \frac{h_i}{h_{i-1}+h_i}|S_{i+1}''|\right\} +$$

$$+\frac{8}{3}|f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})| \leqslant \frac{1}{3}|S_i''| + \frac{8}{3}|f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})|,$$

$$|S_i''| \leqslant 16\,\frac{h_{i-1}^{-1}\omega(h_{i-1}, f) + h_i^{-1}\omega(h_i, f)}{h_{i-1}+h_i}.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Если периодическая функция $f(x)$ с периодом $b-a$ имеет непрерывную вторую производную $f''(x)$ и сплайн $S_2(x)$ второй степени интерполирует эту функцию в узлах сетки* (2.1), *то*

$$\|S_k'' - S_{k-1}''\| = \max_k |S_k'' - S_{k-1}''| \leqslant 8\omega(\delta, f''). \tag{2.7}$$

Доказательство. Заменим в (2.2) k на $k+1$ и вычтем из второго равенства первое; получим

$$\frac{h_{k+1}}{8(h_k+h_{k+1})}(S_{k+2}'' - S_{k+1}'') + \left[\frac{3}{8} + \frac{1}{8}\,\frac{h_{k-1}h_{k+1} - h_k^2}{(h_k+h_{k-1})(h_k+h_{k+1})}\right](S_{k+1}'' - S_k'') +$$

$$+\frac{h_{k-1}}{8(h_{k-1}+h_k)}(S_k'' - S_{k-1}'') = f(x_k, x_{k+1}, x_{k+2}) - f(x_{k-1}, x_k, x_{k+1}).$$

Положим

$$e_k = |S_{k+1}'' - S_k''|, \qquad e_i = \max_k e_k.$$

Тогда

$$\left[\frac{3}{8} + \frac{1}{8}\,\frac{h_{i-1}h_{i+1} - h_i^2}{(h_{i-1}+h_i)(h_i+h_{i+1})}\right] e_i \leqslant \frac{h_{i+1}e_{i+1}}{8(h_i+h_{i+1})} + \frac{h_{i-1}e_{i-1}}{8(h_{i-1}+h_i)} + \frac{1}{2}\omega(4\delta, f'') \leqslant$$

$$\leqslant 2\omega(\delta, f'') + \frac{h_ih_{i+1} + 2h_{i-1}h_{i+1} + h_{i-1}h_i}{8(h_{i-1}+h_i)(h_i+h_{i+1})}\,e_i,$$

т. е. $e_i/4 \leqslant 2\omega(\delta, f'')$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Если периодический сплайн $S_2(x)$ второй степени интерполирует в узлах сетки* (2.1) *непрерывную периодическую функцию $f(x)$ с периодом $b-a$ и $\delta = \max\limits_k h_k$, то*

$$\|f(x) - S_2(x)\| = \max_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x) - S_2(x)| \leqslant \omega(\delta, f) + \delta L, \tag{2.8}$$

где $L = 8 \max\limits_{0\leqslant k\leqslant n-1} h_k^{-1}\omega(h_k, f)$.

Доказательство. Для $x_i < x < x_{i+1}$ имеем $(0 < \lambda < 1)$

$$|f(x) - S_2(x)| =$$

$$= |f(x) - \lambda f(x_i) - (1-\lambda) f(x_{i+1}) + \lambda S_2(x_i) + (1-\lambda) S_2(x_{i+1}) - S_2(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \omega(\delta, f) + |(1-\lambda) S_2'(x'')(x_{i+1} - x) - \lambda S_2'(x')(x - x_i)|,$$

где $x_i < x'$, $x'' < x_{i+1}$. Положим $\lambda = (x_{i+1} - x_i)^{-1}(x_{i+1} - x)$, $1 - \lambda = (x - x_i)(x_{i+1} - x_i)^{-1}$. Тогда

$$|f(x) - S_2(x)| \leqslant \omega(\delta, f) + \frac{h_i}{4} |S_2'(x'') - S_2'(x')| \leqslant$$

$$\leqslant \omega(\delta, f) + \left| \int_{x'}^{x''} |S''(t)|\, dt \leqslant \omega(\delta, f) + \frac{h_i}{4} (|\alpha_i| + |\beta_{i+1}|). \right.$$

Применяя теперь неравенство (2.3), получаем утверждение теоремы.

Следствие. *Если* $f(x) \in \mathrm{Lip}\, 1$, *т. е.* $\omega(\delta, f) = \delta$, *то при любом расположении узлов*

$$\| f(x) - S_2(x) \| \leqslant 9\delta,$$

т. е. интерполяционный процесс всегда сходится.

Теорема 2. *Если функция* $f(x)$ *с периодом* $b - a$ *имеет непрерывную первую производную, то*

$$\| f^{(i)}(x) - S_2^{(i)}(x) \| \leqslant K_i \delta^{1-i} \omega(\delta, f') \qquad (i = 0, 1), \tag{2.9}$$

где $K_0 = 8{,}5$; $K_1 = 17$.

Доказательство. Пусть x — произвольная точка отрезка $[a, b]$ и $x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}$ для некоторого i. Так как $f(x_k) = S_2(x_k)$, $k = i, i+1$, то существует такая точка ξ, $x_i < \xi < x_{i+1}$, что $f'(\xi) = S_2'(\xi)$. Тогда

$$|f'(x) - S_2'(x)| \leqslant \omega(\delta, f') + |S_2'(\xi) - S_2'(x)| =$$

$$= \omega(\delta, f') + \left| \int_x^{\xi} S''(t)\, dt \right| \leqslant \omega(\delta, f') +$$

$$+ \frac{1}{2} (h_i |S_i''| + h_i |S_{i+1}''|) \leqslant \omega(\delta, f') + \gamma.$$

С помощью (2.5) получаем неравенство (2.9) при $i = 0$. Далее, для $x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}$

$$|f(x) - S_2(x)| = \left| \int_y^x [f'(t) - S'(t)]\, dt \right| \leqslant 8{,}5\delta\omega(\delta, f),$$

где y — ближайший к x конец отрезка $[x_i, x_{i+1}]$. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Если функция $f(x)$ с периодом $b-a$ имеет непрерывную вторую производную, то*

$$\| f^{(i)}(x) - S_2^{(i)}(x) \| \leqslant A_i \delta^{2-i} \omega(\delta, f'') \qquad (i = 0, 1, 2), \tag{2.10}$$

где $A_0 = 9/4$, $A_1 = 18$, $A_2 = 18$.

Доказательство. Пусть $x_k < x < x_{k+1}$ и число R таково, что $g(x) = 0$, где $g(z) = f(z) - S_2(z) - R(z - x_k)(z - x_{k+1})$. В силу интерполяционных свойств сплайна $S_2(x)$ и выбора числа R

$$g(x) = g(x_k) = g(x_{k+1}) = 0.$$

По теореме Ролля существуют такие точки ξ_1, ξ_2, $x_k < \xi_1$, $\xi_2 < x_{k+1}$, что $g'(\xi_1) = g'(\xi_2) = 0$. Так как функция $g'(z)$ непрерывна на отрезке $[\xi_1, \xi_2]$, то в некоторой точке ξ функция $|g'(\xi)|$ достигает своего наибольшего значения. Следовательно, в этой точке либо а) $g''(\xi) = 0$, либо б) $g''(\xi + 0)$ и $g''(\xi - 0)$ имеют противоположные знаки; пусть для определенности $g''(\xi + 0) \geqslant 0$, $g''(\xi - 0) \leqslant 0$. Здесь $g''(\xi + 0)$ и $g''(\xi - 0)$ — соответственно правосторонняя и левосторонняя производные функции $g'(z)$ в точке ξ. Обозначим через $f''(x) - S''(x \pm 0)$ ту из двух величин $f''(x) - S_2''(x + 0)$, $f''(x) - S_2''(x - 0)$, которая больше по абсолютной величине. В случае а)

$$|f(x) - S_2(x)| = \frac{|f''(\xi) - S_2''(\xi)|}{2}(x - x_k)(x_{k+1} - x).$$

В случае б)

$$f''(\xi) - S_2''(\xi + 0) - 2R \geqslant 0,$$
$$f''(\xi) - S_2''(\xi - 0) - 2R \leqslant 0.$$

Следовательно,

$$|f(x) - S_2(x)| \leqslant \frac{|f''(\xi) - S_2''(\xi \pm 0)|}{2}(x - x_k)(x_{k+1} - x) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{h_k^2}{8}|f''(\xi) - S_2''(\xi \pm 0)|. \tag{2.11}$$

Пусть теперь $x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}$. Тогда

$$|f''(x) - S_2''(x)| \leqslant |f''(x) - S_2''(x \pm 0)|. \tag{2.12}$$

Из интерполяционных свойств сплайна $S_2(x)$ получаем $f(x_i) - S_2(x_i) = 0$, $i = k - 1, k, k + 1$. Рассуждая далее, как в случае функции $g(z)$, устанавливаем, что либо существует такая точка η, что $f''(\eta) = S_2''(\eta) = 0$, либо $f''(\eta) - S_2''(\eta + 0)$ и $f''(\eta) - S_2''(\eta - 0)$ имеют противоположные знаки. Применяя лемму 2 и, возможно, неравенство $\| S_{k+2}'' - S_k'' \| \leqslant 2 \| S_{k+1}'' - S_k'' \|$, находим, что

$$|f''(x) - S_2''(x \pm 0)| \leqslant |f''(x) - f''(\eta) + S_2''(\eta + 0) - S_2''(x \pm 0)| \leqslant$$
$$\leqslant 2\omega(\delta, f'') + 16\omega(\delta, f'') = 18\omega(\delta, f''). \tag{2.13}$$

Положим в (2.13) $x = \xi$. Тогда в силу (2.13) и (2.11)

$$|f(x) - S_2(x)| \leqslant \frac{9}{4}\delta^2\omega(\delta, f'').$$

По теореме Ролля существует такая точка ξ_0, $x_k < \xi_0 < x_{k+1}$, что $f'(\xi_0) - S_2'(\xi_0) = 0$. Поэтому для $x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}$

$$|f'(x) - S_2'(x)| \leqslant \left| \int_{\xi_0}^{x} [f''(t) - S_2''(t)]\, dt \right| \leqslant 18\delta\omega(\delta, f'').$$

Теорема доказана.

Для полиномиальных сплайнов второй степени справедливы аналоги большинства теорем из гл. II настоящей книги. Мы остановимся здесь лишь на доказательстве аналога теоремы 2.9.1.

Пусть на отрезке $[a, b]$ заданы сетка Δ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ и функция $f(x)$. Функцию $S_2(x)$ назовем интерполяционным сплайном второй степени для функции $f(x)$ на сетке Δ, если

1) первая производная $S_2'(x)$ непрерывна на $[a, b]$,

2)
$$S_2''(x) = \begin{cases} S_0'', & x_0 \leqslant x \leqslant \frac{x_0 + x_1}{2}, \\ S_k'', & \frac{x_{k-1} + x_k}{2} < x \leqslant \frac{x_k + x_{k+1}}{2}, \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1), \\ S_n'', & \frac{x_{n-1} + x_n}{2} < x \leqslant x_n, \end{cases}$$

где S_k'' $(k = 0, 1, \ldots, n)$ — константы.

3) $S_2(x_k) = f(x_k)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$.

Этими условиями непериодический сплайн второй степени определяется неоднозначно, так как он имеет $n + 3$ параметра, а интерполяционные свойства дают лишь $n + 1$ условий. Поэтому нужно наложить еще 2 условия (краевые условия) на $S_2(x)$. Можно потребовать, например, чтобы выполнялось или а) $S_0'' = S_n'' = 0$, или б) $S_0'' = f''(x_0)$, $S_n'' = f''(x_n)$, или в) $S_2'(x_0) = f'(x_0)$, $S_2'(x_n) = f'(x_n)$. В терминах $\{S_k''\}$ условия в) принимают вид

$$\begin{aligned} 3S_0'' + S_1'' &= \frac{8}{h_0}\left[\frac{f(x_1) - f(x_0)}{h_0} - f'(x_0)\right], \\ S_{n-1}'' + 3S_n'' &= \frac{8}{h_{n-1}}\left[\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{h_{n-1}} - f'(x_n)\right], \quad h_k = x_{k+1} - x_k. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Так же, как для кубических сплайнов, можно рассмотреть краевые условия общего вида

$$\begin{aligned} 3S_0'' + \lambda_0 S_1'' &= d_0, \\ \mu_n S_{n-1}'' + 3S_n'' &= d_n, \end{aligned} \tag{2.15}$$

где λ_0, μ_n, d_0 и d_n — заданные числа. Воспользуемся обозначениями разд. 2.1 основного текста:

$$\lambda_j = \frac{h_j}{h_{j-1}+h_j}, \qquad \mu_j = 1-\lambda_j \qquad (j=1, 2, \ldots, n-1).$$

Тогда с учетом соотношения (2.2) для $k = 1, 2, \ldots, n-1$ и условий (2.15), получаем систему уравнений для нахождения величин S_k'':

$$\begin{bmatrix} 3 & \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \mu_1 & 3 & \lambda_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & \lambda_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu_{n-1} & 3 & \lambda_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mu_n & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0'' \\ S_1'' \\ S_2'' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ S_{n-2}'' \\ S_{n-1}'' \\ S_n'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}, \tag{2.16}$$

где $d_k = 8f(x_{k-1}, x_k, x_{k+1})$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Если величины S_k'' найдены, то сплайн $S_2(x)$ однозначно определяется из условий интерполяции. Поэтому вопрос о единственности интерполяционного сплайна $S_2(x)$ сводится к вопросу единственности решения системы (2.16). Сформулируем аналог теоремы 2.9.1.

Теорема 4. *Непериодический сплайн $S_2(x)$, имеющий заданные ординаты $y_0, y_1, \ldots, y_n$ в узлах сетки Δ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ и удовлетворяющий краевым условиям* (2.15), *существует и является единственным, если только $\lambda_0 < 9$, $\mu_n < 9$.*

Эту теорему можно доказать по схеме доказательства теоремы 2.9.1. Поэтому детали доказательства мы опустим. Положим для $k > j$

$$\bar{D}(\lambda_j, \ldots, \lambda_k) = \begin{vmatrix} 3 & \lambda_j & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1-\lambda_{j+1} & 3 & \lambda_{j+1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-\lambda_{k-1} & 3 & \lambda_{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-\lambda_k & 3 \end{vmatrix}. \tag{2.17}$$

Как и при выводе неравенств (2.9.4), можно показать, что при $0 \leqslant \lambda_j \leqslant 1$ $(j \leqslant i \leqslant k)$

$$\frac{1}{9} \leqslant \frac{\bar{D}(\lambda_{j+2}, \ldots, \lambda_k)}{\bar{D}(\lambda_j, \ldots, \lambda_k)} \leqslant \frac{1}{8}. \tag{2.18}$$

Далее,

$$8 \leqslant \bar{D}(\lambda_j, \lambda_{j+1}) = 9 - \lambda_j(1 - \lambda_{j+1}) \leqslant 9,$$

$$24 \leqslant \bar{D}(\lambda_j, \lambda_{j+1}, \lambda_{j+2}) = 24 + 3\lambda_{j+1}(1 - \lambda_{j+2}) + 3(1 - \lambda_j)(1 - \lambda_{j+1}) \leqslant 27.$$

Докажем с помощью индукции, что справедлива

Лемма 3. *Если* $0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1$ $(j \leqslant i \leqslant k)$ *и* $k > j$, *то*

$$\left\{ \begin{array}{ll} 8^{(k-j+1)/2}, & k-j \text{ нечетно} \\ 3 \cdot 8^{(k-j)/2}, & k-j \text{ четно} \end{array} \right\} \leqslant \bar{D}(\lambda_j, \ldots, \lambda_k) \leqslant 3^{k-j+1}. \qquad (2.19)$$

Разложим определитель $D = \bar{D}(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$ матрицы коэффициентов системы (2.16) сначала по элементам первой строки, а затем по элементам последней строки:

$$D = 9\bar{D}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) - 3\mu_n\lambda_{n-1}\bar{D}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-2}) -$$

$$- 3(1 - \lambda_1)\lambda_0\bar{D}(\lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}) + \lambda_0(1 - \lambda_1)\lambda_{n-1}\mu_n\bar{D}(\lambda_2, \ldots, \lambda_{n-2}). \qquad (2.20)$$

Поскольку определитель D — линейная функция как относительно λ_1, так и относительно λ_{n-1}, то он принимает свои наибольшее и наименьшее значения, когда λ_1 равно 0 или 1 и λ_{n-1} равно 0 или 1. Поэтому при оценке определителя D снизу можно ограничиться лишь этими значениями λ_1 и λ_{n-1}. В силу (2.20)

$$D = \left\{ \begin{array}{ll} (9 - \lambda_0)(9 - \mu_n)\bar{D}(\lambda_2, \ldots, \lambda_{n-2}) & \text{при } \lambda_1 = 0,\ \lambda_{n-1} = 1, \\ (9 - \lambda_0)\bar{D}(0, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-2}) & \text{при } \lambda_1 = 0,\ \lambda_{n-1} = 0, \\ (9 - \mu_n)\bar{D}(1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-2}, 1) & \text{при } \lambda_1 = 1,\ \lambda_{n-1} = 1, \\ 9\bar{D}(1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-2}, 0) & \text{при } \lambda_1 = 1,\ \lambda_{n-1} = 0. \end{array} \right.$$

Отсюда и из неравенств (2.18) и (2.19) для $\lambda_0 < 9$ и $\mu_n < 9$ вытекает, что определитель D матрицы коэффициентов системы (2.16) удовлетворяет неравенству

$$D \geqslant [\min(8, 9 - \lambda_0) \cdot \min(8, 9 - \mu_n)] \cdot \left\{ \begin{array}{ll} 8^{(n-3)/2}, & n \text{ нечетно} \\ 3 \cdot 8^{(n-4)/2}, & n \text{ четно} \end{array} \right\} > 0.$$

Теорема доказана.

2.2. Пример расходимости. Из теоремы 1 следует, что если $\delta_n = \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant n-1} |x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)}| \to 0$ и $\delta_n L_n \to 0$, где $L_n = 8 \max\limits_i h_{in}^{-1} \omega(h_{in}, f)$, $h_{in} =$

$= x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)}$, то последовательность сплайнов $S_n(x)$ второй степени, интерполирующих функцию $f(x)$ в узлах сетки

$$a \leqslant x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \ldots < x_n^{(n)} = b, \tag{2.21}$$

равномерно сходится к $f(x)$ при $n \to \infty$. Первый пример расходящегося интерполяционного сплайн-процесса построил Норд [44] для случая кубических сплайнов. Отметим, что в примере Норда $f(x) \in \mathrm{Lip}\, 1/3$. Функция $f(x)$ принадлежит классу $\mathrm{Lip}\,\alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$, если $|f(x+h) - f(x)| \leqslant h^\alpha$. Мы покажем, что существуют такая последовательность сеток (2.21) и такая функция $f^*(x)$ из класса $\mathrm{Lip}\,\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$, что последовательность сплайнов $S_n(x)$ второй степени, интерполирующих функцию $f^*(x)$ на этих сетках, не сходится к $f^*(x)$.

Положим

$$f_1(x) = \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k^\alpha (k+1)^\alpha} + (-1)^n \left(x - \frac{1}{n}\right)^\alpha,$$
$$0 < \alpha < 1, \qquad \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant \frac{1}{n-1}, \qquad n = 2, 3, \ldots, \tag{2.22}$$

$$f^*(x) = \begin{cases} f_1(x), & 0 < x \leqslant 1, \\ f_1(-x), & -1 \leqslant x < 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \tag{2.23}$$

Продолжим функцию $f^*(x)$ периодически с периодом 2 на всю ось x. Ясно, что функция $f^*(x)$ принадлежит классу $\mathrm{Lip}\,\alpha$.

Построим последовательность $\{S_n(x)\}$ периодических сплайнов второй степени, интерполирующих функцию $f^*(x)$ в узлах

$$\pm\frac{1}{n}, \quad \pm\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^\beta}\right), \quad \pm\frac{2}{n}, \ldots, \pm 1,$$

где при $\varepsilon > -1$

$$\beta = \begin{cases} 2, & \text{если } (1+\varepsilon) \leqslant 2(1-\alpha), \\ \dfrac{1+\varepsilon}{1-\alpha}, & \text{если } (1+\varepsilon) \geqslant 2(1-\alpha), \end{cases} \qquad 0 < \alpha < 1. \tag{2.24}$$

Для сокращения записи положим $x_{-1} = -1/n$, $x_1 = 1/n$, $x_2 = 1/n + 1/n^\beta$, $x_j = (j-1)/n$, $j = 3, 4, \ldots, n+1$. Заметим, что в силу четности функции $f^*(x)$ и симметричности узлов относительно точки 0 сплайны $S_n(x)$ являются четными. Это следует из единственности интерполяционного сплайна. Отсюда, в частности, вытекает, что, хотя для всех сплайнов $S_n(x)$ точка 0 служит точкой склейки, но в этой точке сплайны $S_n(x)$ имеют непрерывную вторую производную и $S_n''(0) = S_n''(x_1) = S_n''(x_{-1})$. Следуя схеме рассуждений Норда, докажем, что справедлива

Лемма 4. $S_n''(x_1)/n^{2+\varepsilon} \not\to 0$ *при* $n \to \infty$.

Доказательство. Допустим, что $S_n''(x_1) = a_n n^{2+\varepsilon}$, где $a_n \to 0$ при $n \to \infty$. В силу определения функции $f^*(x)$ и равенств (2.2)

$$\frac{1}{4n} S_n''(x_{-1}) + \frac{3}{8}\left(\frac{2}{n} + \frac{1}{n^\beta}\right) S_n''(x_1) + \frac{1}{8n^\beta} S_n''(x_2) =$$

$$= \left(\frac{1}{n} + \frac{3}{8n^\beta}\right) S_n''(x_1) + \frac{1}{8n^\beta} S_n''(x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} =$$

$$= (-1)^n \frac{n^\beta}{n^{\alpha\beta}} = (-1)^n n^{\beta(1-\alpha)}, \tag{2.25}$$

так как $1/n + 1/n^\beta < 1/(n-1)$, $n = 2, 3, \ldots$. Из (2.25) находим, что

$$S_n''(x_2) = (-1)^n 8n^{(2-\alpha)\beta} - (8n^{\beta-1} + 3) S_n''(x_1) =$$

$$= (-1)^n 8n^{(2-\alpha)\beta} - (8n^{\beta-1} + 3) n^{2+\varepsilon} a_n.$$

По предположению $a_n \to 0$, а в силу (2.24) $\beta \geqslant 2$ и $\beta + \varepsilon + 1 \leqslant (2-\alpha)\beta$. Поэтому существует такое число n_1, что при всех $n \geqslant n_1$

$$7n^{(2-\alpha)\beta} \leqslant |S_n''(x_2)| \leqslant 9n^{(2-\alpha)\beta}, \qquad n \geqslant n_1. \tag{2.26}$$

Еще раз применяя равенства (2.2), получаем

$$\frac{1}{8n^\beta} S_n''(x_1) + \frac{3}{8n} S_n''(x_2) + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^\beta}\right) S_n''(x_3) =$$

$$= \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \tag{2.27}$$

и складывая соотношения (2.25) и (2.27), имеем

$$S_n''(x_3) = \frac{8n^2}{1 - 1/n^{\beta-1}} \cdot \frac{f(x_3) - f(x_2)}{1 - 1/n^{\beta-1}} - \frac{3 + 1/n^{\beta-1}}{1 - 1/n^{\beta-1}} S_n''(x_2) - \frac{8 + 3/n^{\beta-1}}{1 - 1/n^{\beta-1}} S_n''(x_1) =$$

$$= -3S_n''(x_2) + o[S_n''(x_2)] + O(n^{2-\alpha}) + o(n^{2+\varepsilon}), \tag{2.28}$$

поскольку

$$|f(x_3) - f(x_2)| \leqslant |x_3 - x_2|^\alpha = n^{-\alpha}\left(1 - \frac{1}{n^{\beta-1}}\right)^\alpha < n^{-\alpha}.$$

Кроме того, $(2-\alpha) < (2-\alpha)\beta$, $2 + \varepsilon = 1 + 1 + \varepsilon < \beta + (1-\alpha)\beta = (2-\alpha)\beta$. Следовательно,

$$|S_n''(x_3)| = 3|S_n''(x_2)| + o(n^{(2-\alpha)\beta}).$$

Отсюда и из (2.26) вытекает, что для всех n, превосходящих некоторое число $n_2 \geqslant n_1$,

$$20n^{(2-\alpha)\beta} \leqslant |S_n''(x_3)| \leqslant 28n^{(2-\alpha)\beta}. \tag{2.29}$$

Далее,

$$\frac{1}{8n}\left(1-\frac{1}{n^{\beta-1}}\right)S_n''(x_2)+\frac{3}{8n}\left(2-\frac{1}{n^{\beta-1}}\right)S_n''(x_3)+\frac{1}{8n}S_n''(x_4)=$$
$$=n[f(x_4)-f(x_3)]-n(1-n^{1-\beta})^{-1}[f(x_3)-f(x_2)].$$

Заметим, что

$$|f^*(x)|\leqslant f^*(1)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^{\alpha}(n+1)^{\alpha}}<1.$$

Таким образом,

$$S_n''(x_4)=-S_n''(x_2)-6S_n''(x_3)+o[n^{(2-\alpha)\beta}],$$

и из (2.26) и (2.29) вытекает, что для всех n, превосходящих некоторое число $n_3\geqslant n_2$,

$$110n^{(2-\alpha)\beta}\leqslant|S_n''(x_4)|\leqslant 178n^{(2-\alpha)\beta}. \tag{2.30}$$

Покажем по индукции, что для $i=3, 4, \ldots, n$

$$|S_n''(x_{i+1})|\geqslant 3|S_n''(x_i)|\geqslant 60n^{(2-\alpha)\beta}. \tag{2.31}$$

Для $i=3$ это верно, так как

$$20n^{(2-\alpha)\beta}\leqslant|S_n''(x_3)|\leqslant 28n^{(2-\alpha)\beta}<36n^{(2-\alpha)\beta}<\frac{1}{3}|S_n''(x_4)|,\qquad n\geqslant n_3.$$

Пусть неравенство (2.31) верно для $i=k\geqslant 3$. Из равенств (2.2) имеем

$$S_n''(x_{k-1})+6S_n''(x_k)+S_n''(x_{k+1})=8n^2[f(x_{k+1})-2f(x_k)+f(x_{k-1})]$$

и

$$\begin{aligned}|S_n''(x_{k+1})|&\geqslant 6|S_n''(x_k)|-|S_n''(x_{k-1})|-32n^2\geqslant\\&\geqslant 6|S_n''(x_k)|-|S_n''(x_{k-1})|-32n^{(2-\alpha)\beta}\geqslant\\&\geqslant 6|S_n''(x_k)|-3|S_n''(x_{k-1})|\geqslant 5|S_n''(x_k)|>\\&>3|S_n''(x_k)|>9|S_n''(x_{k-1})|>3|S_n''(x_{k-1})|\geqslant\\&\geqslant 60n^{(2-\alpha)\beta}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$|S_n''(x_n)|\geqslant 3^{n-3}|S_n''(x_3)|\geqslant 20\cdot 3^{n-3}\cdot n^{(2-\alpha)\beta}.$$

С другой стороны, с помощью неравенства (2.4) выводим, что

$$|S_n''(x_n)|\leqslant 16n^{2\beta}\omega\left(\frac{1}{n}, f^*\right)\leqslant 16n^{2\beta-\alpha},$$

и при достаточно больших n получаем противоречие. Лемма 4 доказана.

Теорема 5. *Для любого* $0<\alpha<1$ *существуют такая функция* $f(x)\in \mathrm{Lip}\,\alpha$ *и такая последовательность узлов* $\{x_k^{(n)}\}_{k=0}^{n}$, *что последовательность сплайнов* $\{S_n(x)\}$ *второй степени, интерполирующих* $f(x)$ *в узлах* $\{x_k^{(n)}\}$, *не сходится к* $f(x)$. *Более того, для некоторой подпоследовательности* $\{n_k\}$

$$\|f(x)-S_{n_k}(x)\|_p\to\infty \text{ при } k\to\infty$$

где

$$\|f(x)\|_p=\begin{cases}\left(\int\limits_{-1}^{1}|f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}, & 1\leqslant p<\infty,\\ \max\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|, & p=\infty.\end{cases}$$

Доказательство. Пусть $f(x)=f^*(x)$, где $f^*(x)$ определяется по формуле (2.23), и пусть узлы $\{x_i^{(n)}\}$ имеют вид

$$\pm\frac{1}{n},\ \pm\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^\beta}\right),\ \pm\frac{2}{n},\ \pm\frac{3}{n},\ \ldots,\ \pm 1.$$

Тогда в силу леммы 4 существует такая подпоследовательность $\{n_k\}$, $n_k\to\infty$ при $k\to\infty$, что $|S''_{n_k}(x_1)|=|a_{n_k}|n_k^{2+\varepsilon}$, где $|a_{n_k}|\geqslant c>0$. Заметим, что в силу неравенства Гёльдера

$$\|f^*(x)-S_n(x)\|_p\geqslant 2^{-1/q}\|f^*(x)-S_n(x)\|_1\geqslant$$
$$\geqslant\frac{1}{2}\|f^*(x)-S_n(x)\|_1,$$

где $p^{-1}+q^{-1}=1$. Поэтому теорему достаточно доказать для $p=1$. Имеем

$$I_{n_k}=\|f^*(x)-S_{n_k}(x)\|_1\geqslant\int\limits_{-1/n_k}^{1/n_k}|f^*(x)-S_{n_k}(x)|\,dx\geqslant$$
$$\geqslant\int\limits_{-1/n_k}^{1/n_k}|S_{n_k}(x)|\,dx-\frac{2}{n_k}.$$

Так как

$$S_n(x)=\frac{1}{2}S''_n(x_1)\left(x^2-\frac{1}{n^2}\right)+f^*(x_1)=$$
$$=\frac{1}{2}a_nn^{2+\varepsilon}\left(x^2-\frac{1}{n^2}\right)+f^*(x_1),\qquad -\frac{1}{n}\leqslant x\leqslant\frac{1}{n},$$

то

$$I_{n_k}\geqslant\frac{1}{2}n_k^{2+\varepsilon}a_{n_k}\frac{4}{3n_k^3}-\frac{4}{n_k}\geqslant\frac{2}{3}n_k^{\varepsilon-1}c-\frac{4}{n_k},$$

так что при $\varepsilon>1$ получаем, что $I_{n_k}\to\infty$ при $k\to\infty$.

Обозначим через $H_{\omega,\beta}$ класс непрерывных периодических функций $f(x)$ с периодом 2, модуль непрерывности $\omega(\delta, f)$ которых не превосходит заданного модуля непрерывности $\omega(\delta)$. При этом $\omega(\delta)$ удовлетворяет следующему условию: существует такое число β, что $\delta^{1-\beta}\omega(\delta^{\beta}) \to \infty$ при $\delta \to 0$. Ясно, что $\beta > 1$. В силу свойств модуля непрерывности можно считать, что $\beta \geqslant 2$. Докажем для случая $p = \infty$ обобщение теоремы 4.

Т е о р е м а 6. *Существует такая функция $f_2(x) \in H_{\omega,\beta}$, что последовательность сплайнов $\{S_n(x)\}$ второй степени, интерполирующих ее в узлах*

$$\pm\frac{1}{n},\ \pm\left(\frac{1}{n}+n^{-\beta}\right),\ \pm\frac{2}{n},\ \pm\frac{3}{n},\ \ldots,\ \pm 1,$$

не сходится к ней.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим функцию $f_2(x)$ аналогично функции $f^*(x)$, только вместо (2.22) положим

$$f_1(x)=\sum_{k=n}^{\infty}(-1)^{k+1}\omega\left(\frac{1}{k^2+k}\right)+(-1)^n\omega\left(x-\frac{1}{n}\right),$$
$$\frac{1}{n}\leqslant x\leqslant\frac{1}{n-1},\qquad n=2,\ 3,\ \ldots\ .$$

Предположим, что $S_n''(x_1)=a_n\omega(n^{-\beta})\,n^{\beta+1}$, где $a_n\to 0$ при $n\to\infty$. Тогда в силу (2.25)

$$S_n''(x_2)=8n^{2\beta}[f_2(x_2)-f_2(x_1)]-(8n^{\beta-1}+3)\,S_n''(x_1)=$$
$$=8n^{2\beta}(-1)^n\omega(n^{-\beta})-(8n^{2\beta}+3n^{\beta+1})\,a_n\omega(n^{-\beta}).$$

Таким образом, начиная с некоторого номера n_1,

$$7n^{2\beta}\omega(n^{-\beta})\leqslant|S_n''(x_2)|\leqslant 9n^{2\beta}\omega(n^{-\beta}),\qquad n\geqslant n_1. \tag{2.32}$$

Из первого равенства в (2.28) имеем

$$|S_n''(x_3)|=3|S_n''(x_2)|+o(|S_n''(x_2)|)+O(|S_n''(x_1)|)+O\left[n^2\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]=$$
$$=3|S_n''(x_2)|+o[n^{2\beta}\omega(n^{-\beta})],$$

поскольку

$$|S_n''(x_2)|=O[n^{2\beta}\omega(n^{-\beta})],$$
$$\frac{|S_n''(x_1)|}{n^{2\beta}\omega(n^{-\beta})}=a_nn^{-\beta+1}\to 0\ \text{ при }\ n\to\infty\qquad(\beta\geqslant 2),$$
$$\frac{n^2\omega(n^{-1})}{n^{2\beta}\omega(n^{-\beta})}=\frac{\omega(n^{-\beta}\cdot n^{\beta-1})}{n^{2(\beta-1)}\omega(n^{-\beta})}\leqslant\frac{[n^{\beta-1}]+1}{n^{2(\beta-1)}}\leqslant\frac{2}{n^{\beta-1}}\to 0.$$

Итак, начиная с некоторого номера $n_2 \geqslant n_1$,

$$20n^{2\beta}\omega(n^{-\beta}) \leqslant |S_n''(x_3)| \leqslant 28n^{2\beta}\omega(n^{-\beta}), \qquad n \geqslant n_2. \tag{2.33}$$

Как и в лемме 4, доказывается, что, начиная с некоторого номера $n_3 \geqslant n_2$,

$$|S_n''(x_n)| \geqslant 20 \cdot 3^{n-3} n^{2\beta}\omega(n^{-\beta}), \qquad n \geqslant n_3. \tag{2.34}$$

С другой стороны,

$$|S_n''(x_n)| \leqslant 16\omega(n^{-1}, f_2)\, n^{2\beta} = \\ = 16n^{2\beta}\omega(n^{-1}) \leqslant 16n^{2\beta}[n^{\beta-1}+1]\,\omega(n^{-\beta}), \tag{2.35}$$

так что при достаточно больших n получаем противоречие. Следовательно, существует подпоследовательность $\{n_k\}$, для которой $|a_{n_k}| \geqslant c > 0$. Поэтому

$$\|f_2(x) - S_{n_k}(x)\|_\infty \geqslant |S_{n_k}(0)| \geqslant \frac{1}{2n_k^2}|S_{n_k}''(x_1)| - \left|f_2\left(\frac{1}{n_k}\right)\right| \geqslant \\ \geqslant \frac{c}{2} n_k^{\beta-1}\omega(n_k^{-\beta}) - \left|f_2\left(\frac{1}{n_k}\right)\right| \to \infty \text{ при } k \to \infty.$$

Теорема доказана.

Замечание. Рассмотрим класс функций H_ω^*, модули непрерывности $\omega(\delta, f)$ которых не превосходят заданного модуля непрерывности $\omega(\delta)$. При этом $\omega(\delta)$ удовлетворяет следующему условию: существует такая последовательность $\{\beta_n\}$, $\beta_n \geqslant 2$, $\beta_n \leqslant n \ln 3/\ln n$ (начиная с некоторого номера), что $\omega(n^{-\beta_n})\, n^{\beta_n - 1} \to \infty$. Тогда найдутся такая функция $f(x) \in H_\omega^*$ и такая последовательность узлов, что соответствующая последовательность интерполяционных сплайнов расходится. Для доказательства достаточно применить рассуждения, использованные при доказательстве теоремы 6, но только с заменой β на β_n. В силу (2.34) и (2.35)

$$\omega(n^{-1}) \geqslant \frac{5}{108} 3^n \omega(n^{-\beta_n}) \geqslant \frac{5}{108}\omega(3^n n^{-\beta_n}) \geqslant \frac{5}{108}\omega(1).$$

Заключительная часть доказательства проводится, как в теореме 6.

Следствие. *Если в предыдущем замечании* $\omega(\delta) = \delta \ln^\gamma \delta^{-1}$ $(\gamma > 1)$, *то существуют функция* $f(x)$ *с модулем непрерывности* $\delta \ln^\gamma \delta^{-1}$ *и последовательность узлов, для которых соответствующая последовательность интерполяционных сплайнов расходится к* $+\infty$.

Для доказательства достаточно взять $\beta_n = n \ln 3/\ln n$, $n \geqslant 2$.

§ 3. Полиномиальные сплайны на равномерной сетке

Рассмотрим приближение непрерывных функций, заданных на всей оси, интерполяционными сплайнами на равномерной сетке. Мы приведем оценки остаточного члена, а также формулы, удобные для приложений.

Функцию $S_r(x, h)$ называют сплайном степени r, определенным на равномерной сетке $\{mh\}$, если

1) производная $S_r^{(r-1)}(x, h)$ непрерывна на $(-\infty, \infty)$,

2) $S_r^{(r)}(x, h) = Z_m^{(r)}$,

$$\alpha_{mr} = mh + \left[\frac{r+1}{2}\right] - \frac{r+1}{2} < x \leqslant$$

$$\leqslant (m+1)h + \left[\frac{r+1}{2}\right] - \frac{r+1}{2} = \alpha_{m+1r}, \tag{3.1}$$

где $Z_m^{(r)}$ — константы, $[y]$ — целая часть числа y и $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Сплайн $S_r(x, h)$ интерполирует функцию $f(x)$ в узлах $\{mh\}$, если $S_r(mh, h) = f(mh)$. Впервые такие сплайны рассматривались Шёнбергом [1]. Нетрудно заметить, что сплайнов $S_r(x, h)$, интерполирующих функцию $f(x)$ в узлах $\{mh\}$, бесконечно много. В работе [27] показано, что если

$$\|\Delta_h^r f(mh)\| = \sup_m |\Delta_h^r f(mh)| < \infty,$$

где

$$\Delta_h^r f(mh) = \sum_{k=0}^{r} (-1)^{r-k} C_r^k f(mh + kh),$$

то существует единственный сплайн $S_r(x, h)$, интерполирующий функцию $f(x)$ в узлах $\{xh\}$ и имеющий ограниченную r-ю производную. При этом

$$Z_m^{(r)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^{\gamma_r} \frac{x_p^{\gamma_r - 1 + |k|}}{P'_{2\gamma_r}(x_p)} \cdot \frac{\Delta_h^r f(mh - \gamma_r h + kh)}{h^r}, \tag{3.2}$$

где $\gamma_r = [r/2]$,

$$P_{2\gamma_r}(x) = \frac{1}{r!} \sum_{l=0}^{2\gamma_r} \sum_{k=0}^{l} (-1)^k C_{r+1}^k \left(l - k + \frac{r+1}{2} - \left[\frac{r}{2}\right]\right)^r x^l \tag{3.3}$$

и x_p $(p = 1, 2, \ldots, \gamma_r, -1 < x_{\gamma_r} < x_{\gamma_r - 1} < \ldots < x_1 < 0)$ — нули полинома $P_{2\gamma_r}(x)$.

Пусть r-я производная сплайна $S_r(x, h)$ определена равенствами (3.1) и (3.2). Тогда

$$S_r(x, h) = P_{r-1}(x) + \frac{1}{(r-1)!} \int_0^x (x - t)^{r-1} S_r^{(r)}(t, h)\, dt, \tag{3.4}$$

$$\Delta_h^r S_r(mh, h) = \Delta_h^r f(mh), \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

где $P_{r-1}(x)$ — полином степени не выше $r-1$. Если потребовать, чтобы сплайн $S_r(x, h)$ совпадал с функцией $f(x)$ в r различных узлах $\{mh\}$, то полином $P_{r-1}(x)$ будет однозначно определен и разность $f(x) - S_r(x, h)$ будет обращаться в нуль во всех узлах $\{mh\}$. Например, если в качестве r узлов выбраны

точки $0, h, \ldots, (r-1)h$, то [28]

$$P_{r-1}(x) = f(0) + \sum_{s=1}^{r-1} \frac{\Delta_h^s f(0) - \Delta_h^s \psi(0)}{h^s} Q_s(x, h), \tag{3.5}$$

где

$$\psi(x) = \frac{1}{(r-1)!} \int_0^x (x-t)^{r-1} S_r^{(r)}(t, h)\, dt$$

и

$$Q_s(x, h) = \frac{x(x-h)\ldots[x-(s-1)h]}{s!}.$$

Практически, если h мало, то для уменьшения ошибки надо для определения $P_{r-1}(x)$ брать более редкую сетку.

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ непрерывна вместе со своей k-й производной, $k \leqslant r$, и $\| \Delta_h^r f(mh) \| \leqslant \beta(h) < \infty$, то существует единственный сплайн $S_r(x, h)$, интерполирующий $f(x)$ в узлах $\{mh\}$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, и удовлетворяющий неравенству*

$$\| f^{(p)}(x) - S_r^{(p)}(x, h) \|_{C(-\infty, \infty)} \leqslant A(r, k, p)\, \omega_{r+1-p}(h, f^{(p)}) \qquad (0 \leqslant p \leqslant k) \tag{3.6}$$

где

$$\omega_s(h, f) = \sup_{-\infty < x < \infty} \sup_{|t| \leqslant h} |\Delta_t^s f(x)| \qquad (s \geqslant 1)$$

и константа $A(r, k, p)$ зависит только от r, k и p.

Доказательство. Пусть r-я производная сплайна $S_r(x, h)$, интерполирующего функцию $f(x)$ в узлах $\{mh\}$, определяется равенствами (3.1) и (3.2). Докажем, что для такого сплайна справедливо неравенство (3.6). Возьмем произвольную точку x и выберем такое целое число n, что

$$\alpha_n = 3np(r-p+1)h \leqslant x \leqslant 3(n+1)p(r-p+1)h = \alpha_{n+1}. \tag{3.7}$$

Будем считать, что $p < r$ (по поводу случая $p = k = r$ см. [28]). В силу интерполяционных свойств сплайна и теоремы Ролля на каждом интервале $(mh, mh + ph)$ существует по крайней мере одна точка x', для которой

$$f^{(p)}(x') = S_r^{(p)}(x', h).$$

В частности, на интервале (3.7) существуют по крайней мере $r - p + 1$ точек

$$\alpha_n < x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \ldots < x_{r-p+1}^{(n)} < \alpha_{n+1},$$

для которых

$$ph \leqslant |x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)}| \leqslant 3ph, \quad f^{(p)}(x_i^{(n)}) = S_r^{(p)}(x_i^{(n)}, h), \quad i = 1, 2, \ldots, r-p+1. \tag{3.8}$$

Отсюда и из (3.4)

$$P_{r-1}^{(p)}(x_i^{(n)}) = f^{(p)}(x_i^{(n)}) - \frac{1}{(r-p+1)!}\int_0^{x_i^{(n)}} (x_i^{(n)}-t)^{r-p-1} S_r^{(r)}(t, h)\,dt = s(x_i^{(n)}),$$

$$i = 1, 2, \ldots, r-p+1.$$

Представим $P_{r-1}^{(p)}(x)$ по формуле Лагранжа:

$$P_{r-1}^{(p)}(x) = \sum_{i=1}^{r-p+1} s(x_i^{(n)}) \frac{\omega_{r-p+1}(x)}{(x-x_i^{(n)})\,\omega'_{r-p+1}(x_i^{(n)})}, \tag{3.9}$$

где $\omega_{r-p+1}(x) = (x-x_1^{(n)})(x-x_2^{(n)})\ldots(x-x_{r-p+1}^{(n)})$. Тогда

$$f^{(p)}(x) - S_r^{(p)}(x, h) = \frac{1}{(r-p-1)!}\int_{\alpha_n}^{\alpha_{n+1}} s(x, t)\, S_r^{(r)}(t, h)\,dt +$$

$$+ \sum_{i=1}^{r-p+1} \{f^{(p)}(x) - f^{(p)}(x_i^{(n)})\} \frac{\omega_{r-p+1}(x)}{(x-x_i^{(n)})\,\omega'_{r-p+1}(x_i^{(n)})}, \tag{3.10}$$

где

$$s(x, t) = \frac{1}{(r-p-1)!}\left\{(x-t)_+^{r-p+1} - \sum_{i=1}^{r-p+1} \frac{\omega_{r-p+1}(x)\,(x_i^{(n)}-t)_+^{r-p-1}}{(x-x_i^{(n)})\,\omega'_{r-p+1}(x_i^{(n)})}\right\}.$$

Если $\alpha_n \leqslant x$, $t \leqslant \alpha_{n+1}$, то при выполнении условий (3.8)

$$|s(x, t)| \leqslant A_1(p, r)\,h^{r-p-1}. \tag{3.11}$$

Заметим также, что

$$\int_{\alpha_n}^{\alpha_{n+1}} s(x, t)\,dt = 0. \tag{3.12}$$

В силу неравенства Лебега (см., например, [18])

$$\left|\sum_{i=1}^{r-p+1} \{f^{(p)}(x) - f^{(p)}(x_i^{(n)})\} \frac{\omega_{r-p+1}(x)}{(x-x_i^{(n)})\,\omega'_{r-p+1}(x_i^{(n)})}\right| \leqslant$$

$$\leqslant (L_{r-p}+1)\,E_{r-p}(f^{(p)}; \alpha_n, \alpha_{n+1}), \tag{3.13}$$

где $E_n(f; a, b)$ — наилучшее приближение функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ алгебраическими многочленами степени не выше n, а

$$L_{r-p} = \max_{\alpha_n \leqslant x \leqslant \alpha_{n+1}} \sum_{i=1}^{r-p+1} \left|\frac{\omega_{r-p+1}(x)}{(x-x_i^{(n)})\,\omega'_{r-p+1}(x_i^{(n)})}\right|$$

— константа Лебега соответствующего интерполяционного процесса. При выполнении условий (3.8)

$$L_{r-p} \leqslant A_2(r, p), \tag{3.14}$$

где $A_2(r, p)$ зависит только от r и p.

Далее воспользуемся следующим результатом Уитни (см. [48]):

$$E_n(f; a, b) \leqslant A_n^r \sup |\Delta_t^{n+1} f(x)|, \tag{3.15}$$

где A_n зависит только от n и не зависит от длины интервала, а верхняя грань берется по всем значениям x и t, для которых $a \leqslant x$, $x + (n+1)t \leqslant b$. Отсюда, в частности, следует, что

$$|t| \leqslant \frac{b-a}{n+1}.$$

Учитывая соотношения (3.2), (3.10)—(3.15), получаем

$$|f^{(p)}(x) - S_r^{(p)}(x, h)| \leqslant$$
$$\leqslant A_3(r, p)\,\omega_{r-p+1}(h, f^{(p)}) + A_4(r, p)\,h^{r-p} \sup_{\alpha_n \leqslant t \leqslant \alpha_{n+1}} |S_r^{(r)}(t, h) - S_r^{(r)}(\alpha_n, h)| \leqslant$$
$$\leqslant A_3(r, p)\,\omega_{r-p+1}(h, f^{(p)}) + A_5(r, p)\,h^{-p}\omega_{r+1}(h, f).$$

В силу свойств модуля гладкости

$$\omega_{r+1}(h, f) \leqslant h^p \omega_{r-p+1}(h, f^{(p)}),$$

и неравенство (3.6) доказано.

Докажем единственность. Пусть сплайн $S_r(x, h)$ удовлетворяет условиям теоремы. Тогда при $h_1 = h/r$

$$\left|\frac{\Delta_{h_1}^r S_r(\alpha_{m,r}, h)}{h_1^r}\right| = |Z_m^{(r)}| = \left|\frac{\Delta_{h_1}^r [f(\alpha_{m,r}) - S_r(\alpha_{m,r}, h)]}{h_1^r} - \frac{\Delta_{h_1}^r f(\alpha_{m,r})}{h_1^r}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2^r A(r, k, 0)\,\omega_{r+1}(h, f) + \beta(h_1)}{h_1^r} < \infty.$$

Из этой оценки вытекает, что последовательность $\{Z_m^{(r)}\}$ ограничена и, как уже отмечалось, такая последовательность однозначно определяется равенствами (3.2).

Следствие 1. *При выполнении условий теоремы* 1

$$|f^{(i)}(x) - S_r^{(i)}(x, h)| \leqslant A(r, k, i)\,h^{k-i}\omega_{r-k+1}(h, f^{(k)}) \qquad (0 \leqslant i \leqslant k).$$

Следствие 2. *Если функция* $f(x)$ *удовлетворяет условиям теоремы* 1 *и является периодической с периодом* 2π, *а* $h = 2\pi/n$ (n — *натуральное число*), *то*

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} \left|f^{(i)}(x) - S_r^{(i)}\left(x, \frac{2\pi}{n}\right)\right| \leqslant A(r, k, i)\,h^{k-i}\omega_{r-k+1}\left(\frac{2\pi}{n}, f^{(k)}\right), 0 \leqslant i \leqslant k.$$

При этом из представления (3.2) *следует, что сплайн* $S_r(x, 2\pi/n)$ *также имеет период* 2π.

Замечание. При выполнении условий следствия 2 правая часть равенства (2) сворачивается в конечную сумму

$$Z_m^{(r)} = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=1}^{\gamma_r} \frac{x_p^{\gamma_r - 1}(x_p^k + x_p^{n-k})}{(1-x_p^n) P'_{2\gamma_r}(x_p)} \frac{\Delta_h^r f(mh - \gamma_r h + kh)}{h^r} \tag{3.16}$$

$$(m = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Пусть $\widetilde{W}_r$ обозначает множество непрерывных функций $f(x)$ с периодом 2π, имеющих непрерывные производные вплоть до $(r-1)$-го порядка, причем $(r-1)$-я производная удовлетворяет условию Липшица

$$|f^{(r-1)}(x') - f^{(r-1)}(x)| \leqslant |x' - x|.$$

Для класса $\widetilde{W}_r$ В. М. Тихомировым [32] получен следующий окончательный результат.

Теорема 2. *Если функция $f(x)$ принадлежит классу $\widetilde{W}_r$ и периодический сплайн $S_{r-1}(x, \pi/n)$ степени $r-1$ интерполирует ее в узлах $\{\pi i/n\}$ $(i = 0, 1, \ldots, 2n)$, то*

$$\sup_{f \in \widetilde{W}_r} \| f(x) - S_{r-1}(x, \pi/n) \|_{C(0, 2\pi)} = K_r n^{-r}, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{3.17}$$

где K_r — константа Фавара

$$K_r = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m(r+1)}}{(2m+1)^{r+1}}.$$

Так как совокупность сплайнов $S_{r-1}(x, \pi/n)$ образует $2n$-мерное подпространство пространства $C(0, 2\pi)$ непрерывных периодических функций с периодом 2π, то равенство (3.17) дает оценку сверху для поперечника

$$d_{2n}(\widetilde{W}_r, C(0, 2\pi)) = \inf_{\substack{L_m \subset C(0, 2\pi) \\ m \leqslant 2n}} \sup_{f \in \widetilde{W}_r} \inf_{y \in L_m} \| f(x) - y(x) \|_{C(0, 2\pi)},$$

где L_m есть m-мерное подпространство пространства $C(0, 2\pi)$. В этой же работе [32] доказано, что эта оценка является точной, т.е. что

$$d_{2n}(\widetilde{W}_r, C(0, 2\pi)) = K_r n^{-r},$$

и, кроме того, вычислены поперечники класса

$$W_r = \{f(x): |f^{(r-1)}(x') - f^{(r-1)}(x)| \leqslant |x' - x|;\ |x|, |x'| \leqslant 1\}$$

в пространстве $C(-1, 1)$ непрерывных непериодических функций, заданных на отрезке $[-1, 1]$. При этом существенную роль играют функции $x_{nr}(t)$, обобщающие полиномы Чебышева и представляющие собой решение экстремальной задачи

$$\| x_{nr}(t) \|_{C(-1, 1)} = \Big\| t^r - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} (t - t_k^*)_+^r - \sum_{s=0}^{r-1} a_s^* t^s \Big\|_{C(-1, 1)} =$$

$$= \inf \max_{-1 \leqslant t \leqslant 1} \Big| t^r - \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} (t - t_k)_+^r - \sum_{s=0}^{r-1} a_s t^s \Big|,$$

где нижняя грань берется по всем a_s, $m \leqslant n$ и $-1 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_m \leqslant 1$. Экстремальным n-мерным подпространством для класса W_r вновь будет подпространство сплайнов степени $r-1$, но в этом случае узлы сплайна уже не равномерные и связаны с узлами функции $x_{n-r\,r}(t)$.

§ 4. Некоторые приложения сплайнов

4.1. Приближенное решение краевой задачи и задачи Коши. Схема применения сплайнов для численного решения краевой задачи изложена в разд. 2.7 основного текста. Аналогичную схему использовал И. Петерсон [21]; кроме того, он получил некоторые оценки уклонения аппроксимирующего решения от точного решения. Сформулируем его результат.

Пусть кубический сплайн $S(x)$ задан на сетке Δ: $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ и $S(x_i)=y_i$, $x_i=(b-a)\,i/n$, $i=0, 1, \ldots, n$. Положим $S(x_{1/2})=y_{1/2}$, $S(x_{n-1/2})=y_{n-1/2}$, где $x_{1/2}=(b-a)/2n$, $x_{n-1/2}=(b-a)(2n-1)/2n$. Требуется найти приближенное решение краевой задачи

$$y''+p(x)\,y'+q(x)\,y=r(x), \qquad (4.1)$$
$$y(a)=y(b)=0.$$

Будем искать решение в виде кубического сплайна $S(x)$. Из краевых условий сразу получаем, что $S(a)=y_0=S(b)=y_n=0$. Наложим дополнительно условие

$$S''(y)+p(y)\,S'(y)+q(y)\,S(y)=r(y), \qquad (4.2)$$

где $y=x_{1/2}, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n-1/2}$. Таким образом, у нас есть система $n+1$ уравнений с $n+1$ неизвестными $y_{1/2}, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_{n-1/2}$.

Теорема 1. *Если функции $p(x)$, $q(x)$ и $r(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и задача (4.1) имеет единственное решение при любом $r(x)$, то система (4.2) при достаточно большом n имеет единственное решение, причем*

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|y_*^{(i)}(x)-S^{(i)}(x)|=O\left[\omega\left(\frac{1}{n},p\right)+\omega\left(\frac{1}{n},q\right)+\omega\left(\frac{1}{n},r\right)+\frac{1}{n}\right],$$

где $y_*(x)$ — точное решение задачи (4.1) и

$$\omega(\delta, f)=\max_{|t|\leqslant\delta}\ \max_{a\leqslant x, x+t\leqslant b}|f(x+t)-f(x)|.$$

Остановимся более подробно на приближенном решении с помощью сплайнов второй и третьей степени задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка

$$y'=f(x, y), \qquad 0\leqslant x\leqslant b, \qquad y(0)=y_0. \qquad (4.3)$$

Предлагаемый метод был развит в работе Лоскалзо и Талбота [40].

Пусть $T=\{(x, y),\ 0\leqslant x\leqslant b\}$ и функция $f(x, y)$ имеет непрерывные $(m-2)$-е частные производные в T, $m\geqslant 2$. При $m=2$ предполагается, что функция $f(x, y)$ непрерывна в T. Кроме того, она удовлетворяет условию

Липшица

$$|f(x, y_1) - f(x, y)| \leqslant L|y_1 - y|, \qquad 0 \leqslant x \leqslant b,$$

где L — абсолютная постоянная. Эти условия, в частности, гарантируют единственность решения задачи (4.3).

Приближенное решение задачи (4.3) будем искать в виде сплайнов $S_m(x)$ степени m дефекта 1. Пусть узлы сплайна $S_m(x)$ равномерны: $\{x_i = ih\}$, $i = 0, 1, \ldots, n$; $n > m$, $h = b/n$. Положим

$$S(x) = S_m(x) = y(0) + y'(0)\,x + \ldots + \frac{1}{(m-1)!}y^{(m-1)}(0)\,x^{m-1} + \frac{a_0}{m!}x^m,$$

где $y'(0) = f(0, y_0)$, $y''(0) = \partial f(0, y_0)/\partial x + (\partial f(0, y_0)/\partial y)\,f(0, y_0)$ и т. д. Для определения коэффициента a_0 потребуем, чтобы функция $S(x)$ удовлетворяла уравнению (4.3) в точке $x = h$:

$$S'(h) = f(h, S(h)).$$

Пусть функция $S(x)$ определена на отрезке $(\nu - 2)\,h \leqslant x \leqslant (\nu - 1)\,h$. Положим

$$S(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!}S_i^{(k)}[(\nu-1)h](x - \nu h + h)^k + \frac{a_{\nu-1}}{m!}(x - \nu h + h)^m,$$

$$(\nu - 1)\,h \leqslant x \leqslant \nu h,$$

и найдем коэффициент $a_{\nu-1}$ из условия

$$S_m'(\nu h) = f[\nu h, S_m(\nu h)], \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.4}$$

В работе [40] показано, что при $m \geqslant 4$ этот процесс неустойчив, а при $m = 2$ и $m = 3$ справедливы соответственно следующие теоремы.

Теорема 2. *Если $f(x, y) \in C^2$ на T, то существует такая константа K, что для всех $h < 2/L$ и всех $x \in [0, b]$*

$$|S_2(x) - y(x)| < Kh^2, \qquad |S_2^{(i)}(x) - y^{(i)}(x)|\,Kh^{3-i}, \qquad i = 1, 2.$$

Здесь $y(x)$ — точное решение задачи (4.3) и

$$S_2''(x_k) = \frac{1}{2}\left[S_2^{(2)}\left(x_k - \frac{h}{2}\right) + S_2^{(2)}\left(x_k + \frac{h}{2}\right)\right], \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Теорема 3. *Если $f(x, y) \in C^3$ на T, то существует такая константа K, что для всех $h < 3/L$ и для всех $x \in [a, b]$*

$$|y^{(i)}(x) - S_3^{(i)}(x)| \leqslant Kh^{4-i}, \qquad i = 0, 1, 2, 3. \tag{4.5}$$

Здесь $y(x)$ — точное решение задачи (4.3) и

$$S_3^{(3)}(x_k) = \frac{1}{2}\left[S_3^{(3)}\left(x_k - \frac{h}{2}\right) + [S_3^{(3)}\left(x_k + \frac{h}{2}\right)\right], \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Докажем теорему 3.

Лемма 1. *Если $h < m/L$, то сплайн $S_m(x)$, определяемый соотношениями (4.4), существует и является единственным.*

Доказательство. Запишем (4.4) в виде

$$a_\nu = \frac{(m-1)!}{h^{m-1}}\left\{f\left[(\nu+1)h,\ A_\nu(\nu h+h)+\frac{a_\nu}{m!}h^m\right]-A'_\nu(\nu h+h)\right\} = g_h(a_\nu), \quad (4.6)$$

где

$$A_\nu(x) = \sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{k!}S^{(k)}(\nu h)(x-\nu h)^k.$$

При $h < m/L$ отображение $z = g_h(t)$ является непрерывным строго сжимающим, следовательно, имеет единственную неподвижную точку. В самом деле, пусть $z = g_h(t)$, $z_1 = g_h(t_1)$. Тогда

$$|z-z_1| \leqslant \frac{(m-1)!}{h^{m-1}}L|t-t_1|\frac{h^m}{m!} = \frac{Lh}{m}|t-t_1|,$$

где L — константа Липшица для функции $f(x, y)$. Лемма доказана.

Рассмотрим на отрезке $[0, b]$ семейство $\mathscr{C}$ кубических сплайнов $S(x) = S_3(x)$ дефекта 1 с узлами в точках сетки Δ: $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, $x_i = bi/n$, $i = 0, 1, \ldots, n$. На любом отрезке $[kh, (k+2)h]$, $0 \leqslant k < k+2 \leqslant n$, сплайн $S(x)$ из $\mathscr{C}$ зависит от 5 линейных параметров, так что величины

$$S(hi),\ S'(ih), \qquad i = k,\ k+1,\ k+2, \quad (4.7)$$

линейно зависимы.

Лемма 2. *Для любого сплайна $S(x)$ из $\mathscr{C}$*

$$S(kh+2h) - S(kh) = \frac{h}{3}[S'(kh+2h) + 4S'(kh+h) + S'(kh)]. \quad (4.8)$$

Доказательство. Пусть

$$\sum_{i=0}^{2}\alpha_i S(kh+ih) = h\sum_{i=0}^{2}\beta_i S'(kh+ih).$$

Тогда

$$(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)S(kh)+(\alpha_1+2\alpha_2-\beta_0-\beta_1-\beta_2)hS'(kh)+$$
$$+\left(\frac{\alpha_1}{2}+2\alpha_2-\beta_1-2\beta_2\right)h^2S''(kh)+\left(\frac{1}{6}\alpha_1+\frac{7}{6}\alpha_2-\frac{1}{2}\beta_1-\frac{3}{2}\beta_2\right)h^3S'''\left(kh+\frac{h}{2}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{6}\alpha_2-\frac{1}{2}\beta_2\right)h^3S'''\left(kh+\frac{3}{2}h\right) \equiv 0.$$

Так как это соотношение справедливо для любого сплайна из $\mathscr{C}$, то

$$\begin{aligned}
\alpha_0+\alpha_1 &= -\alpha_2,\\
\alpha_1 -\beta_0-\beta_1-\beta_2 &= -2\alpha_2,\\
\tfrac{1}{2}\alpha_1 -\beta_1-2\beta_2 &= -2\alpha_2,\\
\tfrac{1}{6}\alpha_1 -\tfrac{1}{2}\beta_1-\tfrac{3}{2}\beta_2 &= -\tfrac{7}{6}\alpha_2,\\
-\tfrac{1}{2}\beta_2 &= -\tfrac{1}{6}\alpha_2.
\end{aligned}$$

Определитель этой системы

$$\begin{vmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & -1 & -1 & -1\\
0 & \frac{1}{2} & 0 & -1 & -2\\
0 & \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}
\end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix}
\frac{1}{2} & -1\\
\frac{1}{6} & -\frac{1}{2}
\end{vmatrix} = \frac{1}{24}$$

отличен от нуля, так что для любого фиксированного α_2 система имеет единственное решение. В частности, при $\alpha_2=1$

$$\alpha_0=-1,\quad \alpha_1=0,\quad \alpha_2=1,\quad \beta_0=\frac{1}{3},\quad \beta_1=\frac{4}{3},\quad \beta_2=\frac{1}{3},$$

и (4.8) доказано.

Лемма 3. *Для $h<3/L$ решение двухшаговой разностной схемы*

$$y_{i+2}-y_i=\frac{h}{3}[f(ih,\ y_i)+4f(ih+h,\ y_{i+1})+f(ih+2h,\ y_{i+2})] \qquad (i=0,\ 1,\ \ldots,\ n-2), \tag{4.9}$$

при начальных условиях $y_0=S(0)$, $y_1=S(h)$ единственно и $y_i=S(ih)$, $i=0,\ 1,\ \ldots,\ n$, где $S(x)$ определяется с помощью равенств (4.4) при $m=3$.

Доказательство. Пусть значения $y_0,\ y_1,\ \ldots,\ y_{i+1}$ $(i\geqslant 0)$ заданы. Тогда из (4.9) y_{i+2} находится однозначно, так как при $h<3/L$ отображение $z=\psi_h(t)=c+{}^1/_3hf'(ih+2h,\ t)$ непрерывно и строго сжимающее и поэтому имеет единственную неподвижную точку. Так как последовательность $\{S(ih)\}$ в силу леммы 2 также удовлетворяет соотношению (4.9), то лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Существует такая константа K, что для $h<3/L$*

$$|y(h)-S(h)|\leqslant Kh^4,$$

где $y(x)$ — точное решение задачи (4.3) и $S(x)=S_3(x)$.

Доказательство. Так как

$$y(h) = y_0 + hy_0' + \frac{1}{2}h^2y_0'' + \frac{1}{6}h^3y_0''' + \frac{h^3}{24}y^4(\xi), \qquad 0 < \xi < h,$$

$$S(h) = y_0 + hy_0' + \frac{1}{2}h^2y_0''' + \frac{h^3}{6}a_0,$$

то

$$|S(h) - y(h)| = \frac{h^3}{6}\left|(a_0 - y_0''') - \frac{h}{4}y^{(4)}(\xi)\right|. \tag{4.10}$$

Докажем сначала, что при $h < 3/L$ функция $a_0 = a_0(h)$ ограничена. Положим

$$g_h(a_0) = \frac{2}{h^2}\left\{f\left(h,\ y_0 + hy_0' + \frac{h^2}{2}y_0'' + \frac{h^3}{6}a_0\right) - y_0' - hy_0''\right\}.$$

Тогда при $h \leqslant 2/L$

$$|g_h(a_0)| - |g_h(0)| \leqslant |g_h(a_0) - g_h(0)| \leqslant \frac{Lh}{3}|a_0| \leqslant \frac{2}{3}|a_0|.$$

Так как $g_h(a_0) = a_0$, то

$$|a_0| \leqslant 3|g_h(0)| = \frac{6}{h^2}\left|f\left(h,\ y_0 + hy_0' + \frac{h^2}{2}y_0''\right) - y_0' - hy_0''\right| =$$

$$= \frac{6}{h^2}\left|f\left(h,\ y_0 + hy_0' + \frac{h^2}{2}y_0''\right) - f(h,\ y(h)) + O(h^2)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{6}{h^2}\left|L\left|y_0 + hy_0' + \frac{h^2}{2}y_0'' - y(h)\right| + O(h^2)\right| \leqslant M,$$

где M не зависит от h. Так как h принимает лишь значения b/n, n — натуральное число, то между $2/L$ и $3/L$ имеется лишь конечное число значений h, и потому функция $a_0 = a_0(h)$ ограничена для всех $h = h_n = b/n < 3/L$. Отсюда и из (4.10) вытекает оценка

$$|S(h) - y(h)| = O(h^3). \tag{4.11}$$

Далее,

$$|S'(h) - y'(h)| = |f[h,\ S(h)] - f[h,\ y(h)]| \leqslant$$
$$\leqslant L\,|S(h) - y(h)| = O(h^3),$$

т. е.

$$S'(h) = y'(h) + O(h^3) = y_0' + hy_0'' + \frac{1}{2}h^2y_0''' + O(h^3).$$

Из определения $S(x)$ следует, что

$$S'(h) = y_0' + hy_0'' + \frac{1}{2}h^2a_0.$$

Из этих двух представлений для $S'(h)$ находим, что $a_0 = y''' + O(h)$. Вновь применяя равенство (4.10), получаем утверждение леммы.

Так как начальные данные в методе Милна — Симпсона (4.9) имеют четвертый порядок точности, то вычисленные с помощью этого метода значения $S(ih)$ также имеют четвертый порядок точности [38, стр. 248], т. е. для некото-

рой константы K, не зависящей от h,

$$|S(x_k) - y(x_k)| \leqslant Kh^4, \tag{4.12}$$

где $y(x)$ — точное решение и $x_k = kb/n$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Далее,

$$|S'(x_k) - y'(x_k)| = |f[x_k, S(x_k)] - f[x_k, y(x_k)]| \leqslant$$
$$\leqslant L|S(x_k) - y(x_k)| \leqslant KLh^4. \tag{4.13}$$

Лемма 5. *Пусть функция $y(x)$ принадлежит классу $C^4(0, b)$ и точки x_k и $x_{k+1} = x_k + h$ лежат на отрезке $[0, b]$. Если полином*

$$P(x) \equiv P_3(x) = a_0 + a_1(x - x_k) + a_2(x - x_k)^2 + a_3(x - x_k)^3$$

удовлетворяет условиям

$$P(x_k) = y_1 = y(x_k) + O(h^4), \quad P(x_{k+1}) = y_2 = y(x_{k+1}) + O(h^4),$$
$$P'(x_k) = y_1' = y'(x_k) + O(h^3), \quad P'(x_{k+1}) = y_2' = y'(x_{k+1}) + O(h^3), \tag{4.14}$$

то

$$|y^{(i)}(x) - P^{(i)}(x)| = O(h^{4-i}) \qquad (x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1},\ i = 0, 1, 2, 3). \tag{4.15}$$

Доказательство. Положим $\alpha_k = y(x_k) - y_1$, $\alpha_{k+1} = y(x_{k+1}) - y_2$, $\alpha_k' = y'(x_k) - y_1'$, $\alpha_{k+1}' = y'(x_{k+1}) - y_2'$. Тогда в силу интерполяционной формулы Эрмита (см, например, [7], стр. 66)

$$P(x) = \sum_{s=k}^{k+1} \frac{(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2}{(x-x_s)^2(2x_s-x_k-x_{k+1})^2}\left\{y(x_s)\left[1 - \frac{2(x-x_s)}{(2x_s-x_k-x_{k+1})}\right] + y'(x_s)(x-x_s)\right\} +$$
$$+ \sum_{s=k}^{k+1} \frac{(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2}{(x-x_s)^2(2x_s-x_k-x_{k+1})^2}\left\{\alpha_s\left[1 - \frac{2(x-x_s)}{(2x_s-x_k-x_{k+1})}\right] + \alpha_s'(x-x_s)\right\} =$$
$$= P_1(x) + P_2(x), \tag{4.16}$$

где $P_1(x)$ интерполирует точные значения функции $y(x)$ и ее производной $y'(x)$ в узлах x_k и x_{k+1}. Из представления (4.16) получаем

$$|P_{2\Delta}^{(i)}(x)| \leqslant Kh^{4-i}, \qquad x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}. \tag{4.17}$$

В силу теоремы Ролля существуют такие точки ξ_1, ξ_2, $x_k < \xi_1 < \xi < x_{k+1}$, что $P_1''(\xi_1) - y''(\xi_1) = 0$ и $P_1'''(\xi) - y'''(\xi) = 0$. Следовательно, для $x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}$

$$|y'''(x) - P_1'''(x)| = |y'''(x) - y'''(\xi) + P_1'''(\xi) - P_1'''(x)| = |y'''(x) - y'''(\xi)| = O(h), \tag{4.18}$$

$$|y''(x) - P_1''(x)| = \left|\int_{\xi_1}^{x} [y'''(x) - P_1'''(x)]\,dx\right| = O(h^2), \tag{4.19}$$

$$|y'(x) - P_1'(x)| = \left|\int_{x_k}^{x} [y''(x) - P_1''(x)]\,dx\right| = O(h^3) \tag{4.20}$$

и

$$|y(x)-P_1(x)|=\left|\int_{x_k}^{x}[y'(x)-P_1'(x)]\,dx\right|=O(h^4). \tag{4.21}$$

Из (4.16)—(4.21) вытекает (4.15). Лемма доказана.

Так как при выполнении условий теоремы 3 точное решение $y(x)$ и приближенное решение $S(x)=S_3(x)$ удовлетворяют на каждом отрезке $[x_k, x_{k+1}]$, $k=0, 1, \ldots, n-1$, условиям леммы 5, то теорема 3 доказана.

Сплайны и обобщенные сплайны находят применение также при приближенном вычислении собственных значений и собственных функций самосопряженного дифференциального уравнения (см., например, [41], [36]).

4.2. Наилучшие квадратурные формулы. Остановимся на одном важном частном случае наилучшего приближения линейных функционалов, а именно на задаче о наилучших квадратурных формулах для некоторых классов функций. Обозначим через W_q^r класс функций, непрерывных на отрезке $[0, 1]$, имеющих абсолютно непрерывную $(r-1)$-ю производную и r-ю производную, удовлетворяющую неравенству

$$\left\{\int_0^1 |f^{(r)}(x)|^q\,dx\right\}^{1/q}\leqslant 1. \tag{4.22}$$

Если, кроме того, функции и их производные вплоть до $(r-1)$-го порядка являются периодическими с периодом 1, то такой класс функций будем обозначать через $\widetilde{W}_q^r$.

Поставим в соответствие интегралу

$$\int_0^1 f(x)\,dx$$

квадратурную формулу

$$\sum_{k=0}^{n} a_k f(x_k), \qquad 0\leqslant x_0<x_1<\ldots<x_n\leqslant 1,$$

или, в более общем случае, квадратурную формулу

$$\sum_{s=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} a_{ks}\,f^{(s)}(x_k) \qquad (m\leqslant r-1). \tag{4.23}$$

Положим

$$R(f)=\left|\int_0^1 f(x)\,dx-\sum_{s=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} a_{ks}f^{(s)}(x_k)\right| \qquad (m\leqslant r-1). \tag{4.24}$$

Если $f(x) \in W_q^r$, то с помощью формулы Тейлора в интегральной форме находим, что

$$R(f) = \Bigg| \sum_{l=0}^{m-1} f^{(l)}(a) \left\{ \frac{1}{(l+1)!} - \sum_{s=0}^{l} \sum_{k=0}^{n} a_{ks} \frac{(x_k)^{l-s}}{(l-s)!} \right\} + \sum_{l=m}^{r-1} f^{(l)}(a) \left\{ \frac{1}{(l+1)!} - \sum_{s=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} a_{ks} \frac{(x_k)^{l-s}}{(l-s)!} \right\} + \frac{1}{r!} \int_0^1 \left\{ (1-t)^r - r! \sum_{s=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{ks}}{(r-s-1)!} (x_k - t)_+^{r-s-1} \right\} f^{(r)}(t)\, dt \Bigg|. \quad (4.25)$$

Для того чтобы величина

$$R = \sup_{f \in W_q^r} R(f) \quad (4.26)$$

была конечной, необходимо, чтобы квадратурная формула была точной для полиномов степени, не превосходящей $r - 1$, т. е. чтобы выполнялись равенства

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(l+1)!} - \sum_{s=0}^{l} \sum_{k=0}^{n} a_{ks} \frac{x_k^{l-s}}{(l-s)!} = 0, \qquad l = 0, 1, \ldots, m-1, \\ &\frac{1}{(l+1)!} - \sum_{s=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} a_{ks} \frac{x_k^{l-s}}{(l-s)!} = 0, \qquad l = m, m+1, \ldots, r-1. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Сформулируем задачу о наилучшей квадратурной формуле для класса функций W_q^r. При этом возможны две постановки задачи.

При заданных узлах $\{x_k\}$ требуется найти такие веса $\{a_{ks}^*\}$, чтобы на классе функций W_q^r остаток $R(f)$ принимал наименьшее значение, а также указать его величину, т. е. найти R^* и $\{a_{ks}^*\}$, для которых

$$R^* = \sup_{f \in W_q^r} \left| \int_0^1 f(x)\, dx - \sum_{s=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} a_{ks}^* f^{(s)}(x_k) \right| = \inf_{\{a_{ks}\}} \sup_{f \in W_q^r} R(f). \quad (4.28)$$

Эта задача восходит к Сарду и, как уже отмечалось в основном тексте, ею занимались при выполнении условий (4.27) Сард ($m = 0$, $q = 2$, $x_k = k/n$, $k = 0, 1, \ldots, n$), Шёнберг ($m > 0$) и другие.

Вторая постановка принадлежит А. Н. Колмогорову (см. например, [19], стр. 5). Он ищет наилучшую квадратурную формулу, когда варьируются не только веса, но и узлы квадратурной формулы. Для класса W_q^r требуется найти такие значения $\{a_{ks}^*\}$, $\{x_k^*\}$ и R_*, что

$$R_* = \sup_{f \in W_q^r} \left| \int_0^1 f(x)\, dx - \sum_{s=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} a_{ks}^* f^{(s)}(x_k^*) \right| = \inf_{\{a_{ks}\}, \{x_k\}} \sup_{f \in W_q^r} R(f). \quad (4.29)$$

Сформулируем некоторые результаты, полученные в этом направлении. Бо́льшая их часть представляет собой дальнейшее развитие идей С. М. Никольского ([19], [20]). В частности, в этих работах показано, что при выполнении условий (4.27)

$$\sup_{f\in W_q^r} R(f)=\frac{1}{r!}\left\{\int_0^1\left|(1-t)^r-r!\sum_{s=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}a_{ks}\frac{(x_k-t)_+^{s-r-1}}{(r-s-1)!}\right|^p dt\right\}^{1/p}, \qquad (4.30)$$

где $1/p+1/q=1$ $(1\leqslant p,\ q\leqslant\infty)$. Таким образом,

$$R_*=\inf_{\{a_{ks}\},\,\{x_k\}}\frac{1}{r!}\left\{\int_0^1\left|(1-t)^r-r!\sum_{s=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}a_{ks}\frac{(x_k-t)_+^{r-s-1}}{(r-s-1)!}\right|^p dt\right\}^{1/p}, \qquad (4.31)$$

причем коэффициенты a_{ks}, удовлетворяют условиям (4.27).

Отметим, что для функций подкласса W_{0q}^r класса W_q^r, удовлетворяющих условиям

$$f^l(a)=0, \qquad l=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ r-1,$$

формула (4.30) справедлива без дополнительных ограничений (4.27), т. е. в (4.31) нижняя грань берется по произвольным $\{a_{ks}\}$ и $\{x_k\}$. Для этого случая в работе [19] приведены наилучшие квадратурные формулы и значения величин R_* для $m=0$, $r=1,\ 2$; $q=\infty$ и произвольных натуральных чисел n. Там же (см. также [20]) найдены наилучшие квадратурные формулы и величины R_* для $m=r-2$, r четно, $r\geqslant 2$, $q=\infty$, n — произвольное натуральное число. Для тех же значений m, r, n и $q=1$ наилучшая квадратурная формула получена А. И. Киселевым (см., например, [19], стр. 107).

Для класса W_{0q}^r при произвольном q, $1\leqslant q\leqslant\infty$, М. Б. Аксень и А. Х. Турецкий [1] доказали следующую теорему.

Т е о р е м а 1. *Среди квадратурных формул вида* (4.23) *наилучшей для класса* W_{0q}^r *при* $1\leqslant q\leqslant\infty$, $m=r-2$, r *четно*, $r\geqslant 2$, *и произвольном натуральном* n *является квадратурная формула с узлами*

$$x_k^*=2(k+1)h, \qquad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n,$$

и весами

$$a_{k2s+1}^*=0, \qquad s=0,\ 1,\ \ldots,\ \frac{r-4}{2};\quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1,$$

$$a_{k2s}^*=\frac{2h^{2s+1}R_{rp}^{(r-2s-1)}(1)}{r!}, \qquad s=0,\ 1,\ \ldots,\ \frac{r-2}{2};\quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1,$$

$$a_{ns}^*=h^{s+1}\left\{\frac{1}{(s+1)!}[R_{rp}(1)]^{\frac{s+1}{r}}-\frac{1}{r!}R_{rp}^{(r-s-1)}(-1)\right\}, \qquad s=0,\ 1,\ \ldots,\ r-2, \qquad (4.32)$$

где

$$h=\frac{1}{2n+2+\sqrt[r]{R_{rp}(1)}}$$

и $R_{rp}(x)$ — *полином степени* r *с коэффициентом при* x^r, *равным единице, наименее уклоняющийся от нуля в метрике* $L_p(-1, 1)$, *т. е.*

$$\left\{\int_0^1 |R_{rp}(x)|^p\,dx\right\}^{1/p} = \inf_{\{b_s\}}\left\{\int_{-1}^1 \left|x^r - \sum_{s=0}^{r-1} b_s x^s\right|^p dx\right\}^{1/p}, \qquad 1 \leqslant p \leqslant \infty.$$

При этом

$$R_* = \frac{h^r R_{rp}(1)}{r!\sqrt[p]{rp+1}}.$$

Частные случаи этой теоремы при $q = 2$, $r = 2$ и при $q = 2$, r — произвольном четном числе были получены ранее в работах Г. Я. Доронина [8] и И. И. Ибрагимова и Р. М. Алиева [9] соответственно.

Аналогичные результаты М. Б. Аксень и А. Х. Турецкий получили для класса W_q^r в предположении, что квадратурная формула точна для полиномов степени не выше $r - 1$. В этом случае

$$x_k^* = \left(2k + \sqrt[r]{R_{rp}(1)}\right)h_1, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

$$a_{0s}^* = h_1^{s+1}\left\{(-1)^{r-1}\frac{1}{(s+1)!}[R_{rp}(1)]^{\frac{s+1}{r}} + \frac{1}{r!}R_{rp}^{((r-s-1)')}(1)\right\}, \qquad s = 0, 1, \ldots, m,$$

где

$$h_1 = \frac{1}{2n + 2\sqrt[r]{R_{rp}(1)}}$$

и остальные коэффициенты a_{ks}^* определяются по формулам (4.32), где надо заменить h на h_1.

Н. Е. Лушпай [15] рассмотрел случай $m = r - 1$. Оказывается, что наилучшие квадратурные формулы для $m = r - 2$ совпадают с наилучшими при $m = r - 1$, если r четно. Мы не будем выписывать соответствующие формулы для других значений r. Отметим, что аналогичный результат независимо был получен Каутским [39]. Для класса $\widetilde{W}_q^r$ Н. Е. Лушпай [16] нашел наилучшие квадратурные формулы вида (4.23), точные для константы, при $m = r - 1$, $r = 1, 2, 3, \ldots$ и $m = r - 2$, r — четное число, $r \geqslant 2$. В частности доказано, что при $r = 1, 2$ и $m = 0$ наилучшей для класса $\widetilde{W}_q^r$ среди квадратурных формул вида

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} a_k f(x_k) + \overline{R}(f)$$

является формула прямоугольников

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{2\pi}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{2k\pi}{n+1}\right) + \overline{R}(f).$$

В дальнейшем Н. П. Корнейчук и Н. Е. Лушпай [13] нашли наилучшую квадра-

турную формулу для класса W_1^r при $m = r - 2$, $m = r - 3$ (r нечетно, $r \geqslant 3$). Аналогичные результаты получены ими для классов W_{01}^r и W_1^r.

Как видно из равенств (4.27), вывод наилучшей квадратурной формулы для классов W_q^r тесно связан с наилучшим приближением конкретной функции $(1-t)^r$ сплайнами степени $r-1$ дефекта $m-1$ с n нефиксированными узлами в метрике пространства $L_p(0, 1)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$. В следующем разделе мы кратко обсудим вопросы наилучшего приближения сплайнами.

4.3. Наилучшие приближения сплайнами некоторых классов функций. В § 1 уже отмечались работы Н. П. Корнейчука, связанные с наилучшим приближением классов функций $\widetilde{W}^r H_\omega$ сплайнами степени $r+1$ с нефиксированными узлами и с $(r+1)$-й производной, не превосходящей по абсолютной величине заданной константы K. Обозначим через $\widetilde{W}^r H_\omega$ класс функций с периодом 2π, непрерывных на всей оси и имеющих непрерывные производные вплоть до r-го порядка, причем модуль непрерывности $\omega(f^{(r)}, \delta)$ r-й производной не превосходит заданного модуля непрерывности $\omega(\delta)$. В этих работах для выпуклого модуля непрерывности и $r \leqslant 5$ даны характеристические свойства сплайна наилучшего приближения в $C(0, 2\pi)$ для функций из класса $\widetilde{W}^r H_\omega$ и вычислена величина наилучшего приближения. Характеристические свойства сплайнов наилучшего приближения изучались также Джонсоном, Шумейкером, Райсом и др. (библиографию см., например, в [47]).

Другое направление исследований — изучение порядков приближения некоторых классов функций сплайнами с фиксированными и нефиксированными узлами ([24; 29; 30; 35]).

Функцию $S(x) = S_{mn}(x)$ будем называть сплайном порядка (m, n), если 1) она $m-1$ раз непрерывно дифференцируема и 2) существует такое разбиение $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_\mu = 1$ отрезка $[0, 1]$ на $\mu \leqslant n$ частей, что на каждом отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ функция $S_{mn}(x)$ совпадает с некоторым многочленом степени не выше m.

Рассмотрим задачу об изучении наилучших приближений сплайнами некоторых классов функций $\mathfrak{M}$. Пусть

$$E_{mn}(f)_p = \inf_{S_{mn}} \| f(x) - S_{mn}(x) \|_{L^p(0, 1)} \qquad (1 \leqslant p \leqslant \infty), \tag{4.33}$$

где нижняя грань берется по всем сплайнам порядка (m, n) с произвольными узлами. Положим

$$E_{mn}(\mathfrak{M}) = \sup_{f \in \mathfrak{M}} E_{mn}(f)_p. \tag{4.34}$$

В работе Ю. Н. Субботина и Н. И. Черных [30] доказана

Т е о р е м а 1. *Пусть* $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, *функция* $f(x)$ *имеет абсолютно непрерывную производную* $f^{(m)}(x)$ $(m \geqslant 1)$ *и* $\| f^{(m+1)} \|_{L_q(0, 1)} \leqslant 1$. *Тогда*

$$E_{mn}(f)_p \leqslant \left[9 + \frac{4}{\pi} \ln(m+1)\right] \sqrt{\frac{2m}{\pi}} \left(\frac{e}{4}\right)^m n^{-(m+1)} \| f^{(m+1)} \|_{L_q(0, 1)}. \tag{4.35}$$

Оценка на рассматриваемом классе функций точна по порядку при $n \to \infty$.

Отметим, что задачу о нахождении и оценке величины (4.34) можно поставить также для интерполяционных сплайнов с нефиксированными узлами. Сформулируем один результат в этом направлении, который легко следует из теоремы 4 работы [30]. Пусть W_q^r есть класс непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$, имеющих абсолютно непрерывную первую производную и вторую производную, удовлетворяющую неравенству $\|f''\|_{L_q(0,1)} \leqslant 1$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$. Тогда

$$e_n(W_q^2) = \sup_{f \in W_q^2} \inf_{S_1(x)} \|f(x) - S_1(x)\|_{C(0,1)} = 4c_q n^{-2} \qquad (n \geqslant 1), \tag{4.36}$$

где $c_1 = 1$, $c_\infty = 1/2$, $c_q = \{(q-1)(2q-1)^{-1}\}^{(q-1)q^{-1}}$ $(1 < q < \infty)$ и нижняя грань в (4.36) берется по ломаным, вписанным в $f(x)$ в точках $(x_k, f(x_k))$, x_k — произвольные числа, удовлетворяющие неравенствам

$$0 = x_0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n = 1. \tag{4.37}$$

Оценка сверху для $e_n(W_q^2)$ вытекает из неравенства (34) работы [30]. Для оценки снизу достаточно рассмотреть функцию

$$f^*(x) = \int_0^x dt \int_0^{t+h} s(u+h)\, du,$$

где

$$s(t) = \begin{cases} ct^{q'-1}, & 0 \leqslant t \leqslant h, \\ s(2h-t), & h \leqslant t \leqslant 2h, \\ -s(4t-1), & 2h \leqslant t \leqslant 4h, \end{cases}$$

$$h = \frac{1}{2n}; \quad c = (1+q')^{1/q}(2n)^{q'-1}; \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1;$$

далее функция $s(t)$ продолжается с периодом $4h$ на всю ось. Заметим, что

$$f^*\left(\frac{2k+1}{2n}\right) = (-1)^k f^*(h) = (-1)^k \int_0^h us(u)\, du.$$

Ясно, что каковы бы ни были узлы (4.37), ломаная, вписанная в $f^*(x)$ в точках $(x_k, f^*(x_k))$, уклоняется от $f^*(x)$ не менее, чем на $\int_0^h us(u)\, du$, т. е.

$$e_n(W_q^2) \geqslant \int_0^h us(u)\, du = \left(\frac{1}{1 \cdot q'}\right)^{1/q'} \frac{1}{4n^2} = \frac{1}{4n^2}\{(q-1)(2q-1)^{-1}\}^{(q-1)q^{-1}}.$$

Равенство (4.36) доказано.

Сравним этот результат с приближением функций того же класса вписанными ломаными на фиксированной сетке (4.37). Имеем

$$\| f(x) - S_1(x) \|_{C(0,\,1)} \leqslant \max_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \max_{x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} s(x,\, t)\, f''(t)\, dt \right|, \qquad (4.38)$$

где

$$s(x,\, t) = (x-t)_+ - \frac{(x_{k+1}-t)(x-x_k)}{x_{k+1}-x_k}.$$

Применяя неравенство Гёльдера, получаем

$$\| f(x) - S_1(x) \|_{C(0,\,1)} \leqslant \max_k \max_{x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}} \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} |s(x,\, t)|^{q'}\, dt \right)^{1/q'} \| f'' \|_{L_q(0,\,1)} \leqslant$$

$$\leqslant \max_k \max_{x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}} \left\{ \left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k} \right)^{q'} \frac{(x_{k+1}-x)^{q'+1}}{q'+1} + \left(\frac{x_{k+1}-x}{x_{k+1}-x_k} \right)^{q'} \frac{(x-x_k)^{q'+1}}{q'+1} \right\}^{1/q'} \| f'' \|_{L_q} \leqslant$$

$$\leqslant \max_k \frac{1}{4} \left(\frac{1}{q'+1} \right)^{1/q'} (x_{k+1}-x_k)^{(2q-1)/q} \| f'' \|_{L_q} = \frac{1}{4} c_q \delta^{(2q-1)/q} \| f'' \|_{L_q},$$

где $\delta = \max\limits_{0 \leqslant k \leqslant n-1} (x_{k+1}-x_k)$. Поэтому для фиксированных узлов $\{x_i\}$

$$e_n(W_q^2) \leqslant \frac{c_q}{4} \delta^{(2q-1)/q}. \qquad (4.39)$$

Пусть $\delta = x_1 - x_0$. Тогда пример функции

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & 0 \leqslant x \leqslant \delta, \\ f_1(\delta) + f_1'(\delta)(x-\delta), & \delta \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

где $f_1(x)$ строится так же, как в предыдущем примере строилась функция $f^*(x)$, только h следует положить равным $\delta/2$ и

$$c = (1+q')^{1/q}\, \delta^{-(q'+1)/q} 2^{q'/q} \qquad \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1 \right),$$

показывает, что в неравенстве (4.39) на самом деле имеет место знак равенства, т.е.

$$e_n(W_q^r) = \frac{c_q}{4} \delta^{(2q-1)/q}. \qquad (4.40)$$

В частности, наилучшими фиксированными узлами для функций класса W_q^2 являются равномерные узлы.

В. Л. Великин [4] изучал приближение функций $f(x)$ из класса H_ω сплайнами $S_{2r-1}(x)$ степени $2r-1$ дефекта r, интерполирующими функцию $f(x)$ в фиксированных узлах (4.37) и такими, что $S^{(k)}_{2r-1}(x_i)=0$, $k=1, 2, \ldots, r-1$; $i=0, 1, \ldots, n$. Им показано, что для таких сплайнов справедлива оценка (1.5) и что константу $^3/_2$, вообще говоря, уменьшить нельзя. Кроме того, он доказал, что для этих сплайнов при $p=1$ и выпуклом модуле непрерывности $\omega(\delta)$ выполняется равенство (1.4).

Укажем здесь также на исследования А. Н. Колмогорова [11] (см. также [5], стр. 89—106), связанные с приближением в метрике пространства $C(0, 1)$ некоторых классов r раз дифференцируемых функций сплайнами степени r, r-я производная которых не превосходит заданной константы K, и с приложением полученных результатов для оценок энтропии пространства дифференцируемых функций.

Ю. А. Брудный и И. Е. Гопенгауз [2, 3] развивают теорию локальных наилучших приближений, началом которой послужила работа П. Л. Чебышева [34]. При этом фактически рассматривается приближение функций сплайнами степени n дефекта n.

В работе Алберга, Нильсона, Уолша [9], Шёнберга [45], Нитше [42, 43], А. А. Попова, Б. Х. Сендова [22] рассматриваются также обратные теоремы для сплайн-аппроксимаций.

§ 5. Многомерный случай

В этом параграфе рассматриваются частичные сплайны $S(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ степени $2p+1$ дефекта p по каждой переменной. Формулируемые здесь результаты принадлежат В. С. Рябенькому [23] (см. также [24], стр. 158—168).

Пусть ограниченная функция $\tilde{\psi}(x_1, \ldots, x_n)$ задана в узлах $(x_1, \ldots, x_n)$ сетки, $x_i = m_i h$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, $m_i = 0, \pm 1, \pm 2$. Положим

$$\Delta_{x_i^0} \circ f = f \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

$$\Delta_{x_i} f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i+h, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

$$\Delta_{x_1^{k_1}\ldots x_i^{k_i}\ldots x_n^{k_n}} f = \Delta_{x_i}\Delta_{x_1^{k_1}\ldots x_i^{k_i-1}\ldots x_n^{k_n}} f \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

и

$$C_h(\tilde{\psi}) = \sup_{\substack{x_1, \ldots, x_n \\ k_1+\ldots+k_n=k}} \left| \frac{1}{h^k} \Delta_{x_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n}} \tilde{\psi}(x_1, \ldots, x_n) \right|. \tag{5.1}$$

Справедлива следующая теорема:

Теорема 1. *Для всякой ограниченной функции $\tilde{\psi}(x_1, \ldots, x_n)$, заданной на сетке $(x_1, \ldots, x_n)$ и любого натурального числа p найдется функция*

$S(x_1, \ldots, x_n)$, *обладающая следующими свойствами:*

1) *функция* $S(x_1, \ldots, x_n)$ *определена на всем пространстве и совпадает с* $\widetilde{\psi}$ *в узлах сетки;*

2) *функция* $S(x_1, \ldots, x_n)$ *имеет непрерывные производные до порядка* p *включительно по всевозможным комбинациям* $x_1, x_2, \ldots, x_n$;

3) *справедливы неравенства*

$$\left|\frac{\partial^k S}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}\right| \leqslant C(p)\, C_k(\widetilde{\psi}) \qquad (k = 0, 1, \ldots, p), \tag{5.2}$$

где константа $C(p)$ *зависит только от* p.

Мы не будем приводить полное доказательство теоремы, а укажем лишь вид функций $S(x_1, \ldots, x_n)$, которые фактически являются частичными сплайнами (определение см. в разд. 7.1 основного текста) степени $2p + 1$ дефекта p по каждой переменной.

Пусть $n = 1$ и $P_i(\widetilde{\psi}, x)$ $(i = 0, 1)$ — многочлен степени не выше p, совпадающий с функцией $\widetilde{\psi}(x)$ в $p + 1$ точках $x = ih$, $(i + 1)h$, $\ldots$, $(i + p)h$. Построим интерполяционный многочлен Эрмита $Q(\widetilde{\psi}, x)$ степени не выше $2p + 1$, удовлетворяющий условиям

$$\frac{d^k Q(\widetilde{\psi}, 0)}{dx^k} = \frac{d^k P_0(\widetilde{\psi}, 0)}{dx^k}, \qquad \frac{d^k Q(\widetilde{\psi}, h)}{dx^k} = \frac{d^k P_1(\widetilde{\psi}, h)}{dx^k}$$

$(k = 0, 1, \ldots, p)$, и положим $S(x) \equiv Q(\widetilde{\psi}, x)$, $0 \leqslant x \leqslant h$. На отрезках $mh \leqslant x \leqslant (m + 1)h$ функция $S(x)$ строится аналогично, только за начало отсчета следует взять точку $x = mh$.

Пусть оператор L переводит указанным способом функцию $\widetilde{\psi}(x)$ одного переменного, определенную в точках $x = mh$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, в функцию $S(x)$, определенную всюду. Через L_i обозначим оператор L, когда он применяется к функциям $\widetilde{\psi}(x_1, \ldots, x_n)$ одного переменного x_i, $x_i = mh$ (остальные переменные рассматриваются как параметры). Тогда функция

$$S(x_1, \ldots, x_n) = L_n L_{n-1} \ldots L_1 \widetilde{\psi}(x_1, \ldots, x_n) \tag{5.3}$$

удовлетворяет всем условиям теоремы.

Положим в формуле (5.1) $k_1 = k_1^0, \ldots, k_n = k_n^0$, где k_i^0 — фиксированные числа, $k_1^0 + k_2^0 + \ldots + k_n^0 = k^0$, и пусть верхняя грань берется только по $(x_1, \ldots, x_n)$. Наряду с величиной $C_{k^0}(\widetilde{\psi})$ рассмотрим также величину

$$C_{k^0}(\widetilde{\psi})_q = \Big\{ \sum_{x_1=-\infty}^{\infty} \ldots \sum_{x_n=-\infty}^{\infty} |\Delta_{x_1^{k_1^0} \ldots x_n^{k_n^0}} \widetilde{\psi}(x_1, \ldots, x_n)|^q \Big\}^{1/q}. \tag{5.4}$$

Не нарушая общности, можно считать $h = 1$.

Введем функционал

$$\mathscr{L}_q^{k^0}(\widetilde{\psi}) = \inf_F \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^{k^0} F(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1^{k_1^0} \ldots \partial x_n^{k_n^0}} \right|^q dx_n \right\}^{1/q} \qquad (1 \leqslant q \leqslant \infty),$$

где нижняя грань берется по функциям $F(x_1, \ldots, x_n)$, определенным на всем пространстве и совпадающим в целых точках с функцией $\widetilde{\psi}(x_1, \ldots, x_n)$. Рассмотрим всевозможные функции $\widetilde{\psi}$, для которых $C_{k^0}(\psi)_q < \infty$. В работе [31] вычислена норма функционала

$$\| \mathscr{L}_q^{k^0} \| = \sup_{C_{k^0}(\widetilde{\psi})_q \leqslant 1} | \mathscr{L}_q^{k^0}(\widetilde{\psi}) |$$

и построен линейный метод

$$F_*(x_1, \ldots, x_n) = A\widetilde{\psi}(x_1, \ldots, x_n),$$

продолжающий функции $\widetilde{\psi}(x_1, \ldots, x_n)$, заданные в целых точках, на все пространство и такой, что

$$\left\| \frac{\partial^{k^0} F_*}{\partial x_1^{k_1^0} \ldots \partial x_n^{k_n^0}} \right\|_{L_q^n} \leqslant \| \mathscr{L}_q^{k^0} \| \cdot C_{k^0}(\widetilde{\psi})_q.$$

В частном случае $n = 1$, $q = \infty$ функция $F_*(x)$ совпадает с интерполяционным сплайном степени k^0 дефекта 1 (см. § 3). Позднее Шёнберг [46] дал решение этой задачи при $n = 1$, $q = 1, 2, \infty$, причем для $q = 2$ указал наилучшее продолжение для индивидуальной функции $\widetilde{\psi}(x)$. В этом случае функция $F_*(x)$ совпадает с интерполяционным сплайном степени $2k^0 - 1$ дефекта 1. Ограниченность нормы $\| \mathscr{L}_q^{k^0} \|$ доказана ранее С. Л. Соболевым [25] с помощью метода В. С. Рябенького.

Функции $S(x_1, \ldots, x_n)$, определенные равенством (5.3), можно использовать для приближения гладких функций. Справедлив следующий результат [24].

Теорема 2. *Пусть функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ имеет всевозможные непрерывные производные до некоторого порядка q включительно. Обозначим через $\widetilde{f}(x_1, \ldots, x_n)$ функцию, определенную лишь в точках $(m_1 h, \ldots, m_n h)$ $(m_i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; i = 1, 2, \ldots, n)$ и совпадающую в этих точках с функцией $f(x_1, \ldots, x_n)$. Для заданного натурального числа p, $p \geqslant q$, построим функцию*

$$S_{hp}(x_1, \ldots, x_n) = L_n L_{n-1} \ldots L_1 \widetilde{f}(x_1, \ldots, x_n),$$

где L_i — оператор, описанный выше. Тогда

$$\left|\frac{\partial^k f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} - \frac{\partial^k S_{hp}(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant h^{q-k} C_1(p) \sup_{x_1, \ldots, x_n} \max_{q_1+\ldots+q_n=q} \left|\frac{\partial^q f}{\partial x_1^{q_1} \ldots \partial x_n^{q_n}}\right| \qquad (k<q),$$

где константа $C_1(p)$ зависит только от p.

Приближение функций многих переменных сплайнами и их приложения исследуются также в ряде работ Ю. С. Завьялова [48—52].

ЛИТЕРАТУРА

1. Аксень М. Б., Турецкий А. Х.. Наилучшие квадратурные формулы для некоторых классов функций, *Весці АН БССР*, сер. физ.-матем., 1 (1966), 15—27.
2. Брудный Ю. А., Гопенгауз И. Е., Приближение кусочно-полиномиальными функциями, *Изв. АН СССР*, сер. матем., 27, № 4 (1963), 723—743.
3. Брудный Ю. А., О локальных наилучших приближениях функций многочленами, *ДАН СССР*, 161, № 4 (1965), 746—749.
4. Великин В. Л., О наилучшем приближении сплайн-функциями на классах непрерывных функций, *Матем. заметки*, 8, № 1 (1970), 41—46.
5. Витушкин А. Г., Оценка сложности задачи табулирования, Физматгиз, М., 1959.
6. Галкин П. В., О разрешимости задачи периодической сплайн-интерполяции. *Матем. заметки*, 8, № 5 (1970).
7. Гончаров В. Л., Теория интерполирования и приближения функций, Гостехиздат, М.— Л., 1954.
8. Доронин Г. Я., К вопросу о формулах механических квадратур, Сборник научных трудов Днепропетр. инж.-стр. ин-та, № 1—2 (1955), стр. 210.
9. Ибрагимов И. И., Алиев Р. М., Наилучшие квадратурные формулы для некоторых классов функций, *ДАН СССР*, 162, № 1 (1965), 23—25.
10. Качмаж С., Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов, Физматгиз, М., 1958.
11. Колмогоров А. Н., О некоторых асимптотических характеристиках вполне ограниченных метрических пространств, *ДАН СССР*, 108, № 3 (1956).
12. Корнейчук Н. П.. О наилучшем приближении непрерывных функций, *Изв. АН СССР*, сер. матем., 27, № 1 (1963), 29—44.
13. Корнейчук Н. П., Лушпай Н. Е., Наилучшие квадратурные формулы для классов дифференцируемых функций и кусочно-полиномиальное приближение, *Изв. АН СССР*, сер. матем., 33, № 6 (1969), 1416—1437.
14. Логинов А. С., Приближение непрерывных функций ломаными, *Матем. заметки*, № 2 (1969), 149—160.
15. Лушпай Н. Е., Наилучшие квадратурные формулы для некоторых классов функций, *Изв. вузов*, матем., 12 (1969), 53—59.
16. Лушпай Н. Е., Наилучшие квадратурные формулы на классах дифференцируемых периодических функций, *Матем. заметки*, 6, № 4 (1969), 475—482.
17. Малоземов В. Н., Об отклонении ломаных, *Матем. заметки*, 1, № 5 (1967), 537—540.
18. Натансон И. П., Конструктивная теория функций, Гостехиздат, М.— Л., 1949.
19. Никольский С. М., Квадратурные формулы, Физматгиз, М., 1958.
20. Никольский С. М., К вопросу об оценках приближений квадратурными формулами, *УМН*, 5 , № 2 (36), (1950), 165—177.

21. Петерсон И., О кусочно-полиномиальной аппроксимации, *Изв. АН Эст. ССР.*, сер. физ.-матем. и техн., 1 (1962).

22. Попов В. А., Сендов Б. Х., О классах, характеризуемых наилучшим приближением сплайн-функциями, *Матем. заметки*, 8, № 2 (1970), 137—148.

23. Рябенький В. С., Об устойчивости конечноразностных схем и о применении метода конечных разностей к решению задачи Коши для системы уравнений с частными производными, Диссертация, МГУ, 1952.

24. Рябенький В. С., Филиппов А. Ф., Об устойчивости разностных уравнений, М., 1956.

25. Соболев С. Л., Лекции по теории кубатурных формул, часть 2, Новосибирск, 1965, стр. 170.

26. Сторчай В. Ф., Об отклонении ломаных в метрике L_p, *Матем. заметки*, 5, № 1 (1969), 31—37.

27. Субботин Ю. Н., О связи между конечными разностями и соответствующими производными, *Труды Матем. ин-та АН СССР*, 78 (1965), 24—42.

28. Субботин Ю. Н., Поперечники класса W^rL в L (0, 2π) и приближение сплайн-функциями, *Матем. заметки*, 7, № 1 (1970), 43—52.

29. Субботин Ю. Н., Об одном линейном методе приближения дифференцируемых функций, *Матем. заметки*, 7, № 4 (1970), 423—430.

30. Субботин Ю. Н., Черных Н. И., Порядок наилучших сплайн-приближений некоторых классов функций, *Матем. заметки*, 7, № 1 (1970), 31—42.

31. Субботин Ю. Н., Функциональная интерполяция в среднем с наименьшей n-й производной, *Труды Матем. ин-та АН СССР*, 88 (1967), 30—60.

32. Тихомиров В. М., Наилучшие методы приближения и интерполирования дифференцируемых функций в пространстве C (—1, 1), *Матему сб.*, 80 (122), № 2 (10), (1969), 290—304.

33. Ульянов П. Л., О некоторых свойствах рядов по системе Шаудера, *Матем. заметки*, 7, № 4 (1970), 431—442.

34. Чебышев П. Л., Теория механизмов, известных под названием параллелограммов, Полное собрание сочинений, т. II, М.— Л., 1947, стр. 23—51.

35. Birkhof G., Local spline approximation by moments, *Z. Math. Mech.*, 13, № 9 (1967).

36. Ciarlet P. G., Schultz M. H., Varga R. S., Numerical methods of high-order accuracy for nonlinear boundary value problems, *Num. Math.*, 12 (1968), 120—133.

37. Ciesielski Z., On Haar functions and on the Schauder basis of the space C [0, 1], *Akad. Pol. Sci.*, Ser. math., astr. et phys., 7, № 4 (1959), 227—232.

38. Henrici P., Discrete variable methods in ordinary differential equations, New York, 1962.

39. Kautsky J., Optimal quadrature formulae and minimal monosplines in L_q, *Jour. Austr. Math. Soc.*, 21 № 1 (1970), 48—56.

40. Loscalzo F. R., Talbot T. D., Spline function approximation for solutions of ordinary differential equations, *Siam J. Numer. Anal.*, 4, № 3 (1967), 433—445.

41. Natterer F., Schranken für die Eigenwerte gewohnlicher Differentialgleichungen durch Spline-Approximation, *Num. Math.*, 14, (1970), 346—354.

42. Nitsche, Sätze vom Jackson-Bernstein-Typ für die Approximation mit Spline-Function, *Math. Z.*, 109, № 2 (1969), 97—106.

43. Nitsche, Umkehrsätze für Spline-Approximation, *Compositio Math.*, 21, 4 (1969), 400—416.

44. Nord S., Approximation properties of the spline fit, *BIT*, 7 (1967), 132—144.

45. Schoenberg I. J., Spline interpolation and the higher derivatives, Number theory and analysis, New York, 1968, pp. 279—295.

46. Schoenberg I. J., Cardinal interpolation and spline functions, *Jour. Approx. Theory*, 2, № 2 (1969), 167—206.

47. Schumaker L. L., Approximation by spline functions под редакцией Grevielle T. N. E., Academic Press, New York, 1969, pp. 65—85.

48. Завьялов В. С., Применение вычислительных систем для решения сложных задач проектирования в машиностроении, сб. Вычислительные системы, вып. 38, Новосибирск, 1970.

49. Завьялов Ю. С., Интерполирование кубическими многозвенниками, сб. Вычислительные системы, вып. 39, Новосибирск, 1970.

50. Завьялов Ю. С., Интерполирование бикубическими многозвенниками, сб. Вычислительные системы, вып. 38, Новосибирск, 1970.

51. Завьялов Ю. С., Экстремальное свойство кубических многозвенников и задача сглаживания, сб. Вычислительные системы, вып. 42, Новосибирск, 1970.

52. Завьялов Ю. С., Экстремальное свойство бикубических многозвенников и задача сглаживания, сб. Вычислительные системы, вып. 42, Новосибирск, 1970.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Балка консольная 14

Второе интегральное соотношение для сплайнов дважды кубических 239
— — — — — — кубических 86, 90, 91
— — — — — — обобщенных 200, 201
— — — — — — полиномиальных 165, 166
Вычерчивание кривой по точкам 13, 53

Гетерогенные сплайны 190
— — явного типа 260
Гильбертова пространства теория для сплайнов кубических 97
— — — — — — обобщенных 208
— — — — — — полиномиальных 171

Дважды кубические сплайны простые 228, 233
— — — типа I 228, типа I′ 229, типа II 229, типа II′ 229
— — — частичные 229, 231
— периодические сплайны 229
Дефект сплайна 12
— — кубического 28
— — обобщенного 187
— — полиномиального 153
— — пятой степени 122, 141, 142
Дифференциальный оператор 106, 222

Единственность сплайнов дважды кубических 235
— — двумерных 262
— — кубических 84
— — обобщенных 192
— — полиномиальных 156, 157

Интерполяционный сплайн типа k 164, 190
Иррегулярные области 246

Краевые условия 14, 15, 17, 18, 20, 29, 48, 53, 55, 65, 68, 83
Кубические сплайны 10, 13, 22, 55, 84
Кунса поверхности 252

Моменты 14, 15

Наклоны 14, 15, 55

Обобщенные сплайны 11, 187, 255
— — двумерные 257
Ограничения на порядок сходимости 96, 170, 171, 206
— — сетки 25
Определяющие значения 84, 98, 208, 226
Ортогональность сплайнов 101
Основное тождество для сплайнов дважды кубических 223
— — — — двумерных 258, 259
— — — — кубических 81
— — — — обобщенных 189
— — — — полиномиальных 151, 152
Остаточные члены 105, 106

Параболические сплайны 272
Первое интегральное соотношение 8, 79
— — — для сплайнов дважды кубических 234
— — — — — — двумерных 261
— — — — — — кубических 30, 81, 86
— — — — — — обобщенных 189
— — — — — — полиномиальных 152

Периодические сплайны 13, 14, 15, 25, 110, 145
Полиномиальные сплайны 109
Порядок сплайна 12, 187
Представление поверхности 249, 252

Приближенное решение дифференциальных уравнений 13, 54
— — — — — в частных производных 244
— — задачи Коши и краевой задачи 54, 56, 291
— — интегральных уравнений 60
Простые сплайны 112, 190
Прямое произведение гильбертовых пространств 249
Пятой степени сплайны 120, 14, 142

Равномерные сетки 46, 48, 145
Равные интервалы 38, 125
Расходимости пример 279, 280

Свойство минимальной кривизны 9
— — нормы 8, 9
— — — для сплайнов дважды кубических 234
— — — — — —кубических 77, 82
— — — — — — обобщенных 191
— — — — — — полиномиальных 153
— — — — — — частичных 230
— наилучшего приближения для сплайнов дважды кубических 236
— — — — — — кубических 23, 79, 80
— — — — — — обобщенных 196
— — — — — — полиномиальных 154
— — — — — — частичных 230
Сглаживание 46, 142
Сеточные базисы 102, 103
— — канонические для сплайнов кубических 102, 103
— — — — — — обобщенных 213
— — — — — — полиномиальных 175, 176
Собственные значения матрицы 131, 132
Собственных значений проблема 222, 224
Сопряженные точки 248
— — числа 248
Сплайн 7, 8, 9, 11, 13, 14, 15, 22, 25, 55
— от сплайна 47
Сплайны в напряженном состоянии 11
— нечетной степени 109
— сильной интерполяции 261
— типа I 77, 112, 113, 189, 228
— — I′ 77, 112, 113, 189, 229
— — II 77, 112, 113, 189, 229
— — II′ 77, 112, 113, 189, 229
— — k 164, 170, 173, 190
— — — модифицированного 167, 170
— четной степени 109, 123, 272
Степень сплайна 10, 109
Суммарная длина хорды 54
Существование сплайнов дважды кубических 235
— — двумерных 262
— — гетерогенных 195
— — кубических 64
— — обобщенных 195
— — полиномиальных 131
Сходимость для сплайнов дважды кубических 238
— — — двумерных 264
— — — кубических 23, 64, 89, 94
— — — обобщенных 197, 204, 205
— — — полиномиальных 134, 145
— по норме для сплайнов кубических 99
— — — — — — обобщенных 211
— — — — — — полиномиальных 173

Фундаментальные сплайны дважды кубические 237, 243
— — кубические 55, 59

Циркулянт 33

Частичные сплайны 229

Эквивалентности классы 77, 189—190

Явный вид сплайна 260
Ядро 105, 106, 178, 215

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аксень М. Б. 299, 300
Алберг (Ahlberg J. H.) 6, 8, 9, 10, 11, 12, 72, 80, 134, 138, 140, 229, 236, 304
Алиев Р. М. 300
Аттиа (Atteia M.) 11
Ауслендер (Auslender S.) 141

Беллман (Bellman R. E.) 58
Бергман (Bergmann S.) 61
Бернулли (Bernoullis J.) 79
Биркгоф (Birkhoff G.) 10, 33, 229
Брудный Ю. А. 304
де Бур (deBoor C.) 9, 10, 11, 12, 33, 229

Вайнбергер (Weinberger H. F.) 12
Великин В. Л. 304

Гарабедян (Garabedian H.) 11, 229
Гильдебранд (Hildebrand F. B.) 32
Голомб (Golomb M.) 12
Гопенгауз И. Е. 304
Гревиль (Greville T. N. E.) 9, 11, 106
Гурса (Goursat E.) 61, 138

Далквист (Dahlquist G.) 227
Джексон (Jackson D.) 5
Джонсон (Johnson O. G.) 301
Доронин Г. Я. 300
Дэвис (Davis P. J.) 23, 137, 215

Завьялов Ю. С. 307
Зейферт (Seifert H. S.) 108

Ибрагимов И. И. 300

Калаба (Kalaba R. E.) 58
Каратеодори (Carathéodory C.) 211
Каутский (Kautsky J.) 300
Киселев А. И. 299
Колмогоров А. Н. 298, 304
Конти (Conti R.) 211
Корнейчук Н. П. 5, 270, 301
Кунс Coons S.) 252

Лебег (Lebesque A.) 5, 270
Линч (Lynch R. E.) 9, 11, 12
Логинов А. С. 271
Лоскалзо (Loscalso F. R.) 291
Лушпай Н. Е. 300

Малоземов В. Н. 270
Мейер (Meir A.) 10, 31
Мюир (Muir T.) 39, 131

Никольский С. М. 299
Нильсон (Nilson E. N.) 6, 8, 9, 10, 11, 12, 72, 80, 134, 138, 140, 229, 236, 304
Ницше (Nitsche J.) 304
Норд (Nord S.) 230

Пеано (Peano G.) 106, 181
Петерсон И. 291
Попов В. А. 304

Райс (Rice J.R.) 301
Рябенький В. С. 304, 306

Сансоне (Sansone G.) 211
Сард (Sard A.) 11, 106, 181, 216, 221, 222, 227, 240, 265, 248, 298
Секрест (Secrest D.) 12
Сендов Б. Х. 304
Соболев С. Л. 306
Сокольников (Sokolnikoff I. S.) 8. 9, 79
Стечкин С. Б. 6, 270

Сторчай В. Ф. 270
Субботин Ю. Н. 5, 270, 301, 306

Талбот (Talbot T. D.) 291
Тихомиров В. М. 5, 290
Тодд (Todd J.) 19
Турецкий А. Х. 299, 300

Уитни (Whitney A.) 8, 289
Уолш (Walsh J. L.) 6, 8, 9, 10, 11, 12, 80, 134, 138, 140, 229, 236, 304

Фейер (Fejér L.) 27, 28, 144
Фриман (Freeman H.) 123

Хедрик (Hedrick E. R.) 138
Хилле (Hille E.) 132
Холлидей (Holladay J. C.) 8, 49, 77, 79, 80, 82

Циглер (Ziegler Z.) 10, 134

Чебышев П. Л. 304
Черных Н. И. 301

Шарма (Sharma A.) 10, 31
Швайкерт (Schweikert D. G.) 11
Шёнберг (Schoenberg I. J.) 5, 8, 9, 10, 11, 12, 46, 77, 106, 142, 181, 272, 286, 298, 304, 306
Шумейкер (Schumaker L. L.) 301

Эйлер (Euler L.) 5, 79
Эйткен (Aitken A. C.) 64, 131

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода 5
Глава I. Введение 7

1.1. Что такое сплайн? 7
1.2. Последние достижения в теории сплайнов 8

Глава II. Кубические сплайны 13

2.1. Введение 13
2.2. Существование, единственность и наилучшее приближение . . 19
2.3. Сходимость 23
2.4. Равные интервалы 38
2.5. Приближенное дифференцирование и интегрирование 45
2.6. Вычерчивание кривой по точкам 53
2.7. Приближенное решение дифференциальных уравнений . . . 54
2.8. Приближенное решение интегральных уравнений 60
2.9. Дополнительные теоремы существования и сходимости . . . 64

Глава III. Внутренние свойства кубических сплайнов 77

3.1. Свойство минимальной нормы 77
3.2. Свойство наилучшего приближения 79
3.3. Основное тождество 80
3.4. Первое интегральное соотношение 81
3.5. Единственность 84
3.6. Существование 85
3.7. Общие уравнения 86
3.8. Сходимость производных низших порядков 89
3.9. Второе интегральное соотношение 91
3.10. Улучшение оценки порядка сходимости 92
3.11. Сходимость производных высших порядков 94
3.12. Ограничения на порядок сходимости 96
3.13. Приложения к теории гильбертова пространства 97
3.14. Сходимость по норме 99
3.15. Канонические сеточные базисы и их свойства 102
3.16. Остаточные члены 104
3.17. Преобразования, определяемые сеткой 106
3.18. Связь с ракетной техникой 108

Глава IV. Полипомиальные сплайны 109

4.1. Определение и основные уравнения 109
4.2. Равные интервалы 123
4.3. Существование 131
4.4. Сходимость 134
4.5. Сплайны пятой степени дефектов 2 и 3 141
4.6. Сходимость периодических сплайнов на равномерных сетках . . 145

Глава V. Внутренние свойства полиномиальных сплайнов нечетной степени 150

5.1. Введение 150
5.2. Основное тождество 151
5.3. Первое интегральное соотношение 152
5.4. Свойство минимальной нормы 153
5.5. Свойство наилучшего приближения 154
5.6. Единственность 156
5.7. Определяющие уравнения 157
5.8. Существование 162
5.9. Сходимость производных низших порядков 163
5.10. Второе интегральное соотношение 165
5.11. Улучшение оценки порядка сходимости 167
5.12. Сходимость производных высших порядков 169
5.13. Ограничения на порядок сходимости 170
5.14. Приложения к теории гильбертова пространства 171
5.15. Сходимость по норме 173
5.16. Канонические сеточные базисы и их свойства 175
5.17. Ядра и интегральные представления 178
5.18. Представление и приближение линейных функционалов 181

Глава VI. Обобщенные сплайны 187

6.1. Введение 187
6.2. Основное тождество 188
6.3. Первое интегральное соотношение 189
6.4. Свойство минимальной нормы 191
6.5. Единственность 192
6.6. Определяющие уравнения 193
6.7. Существование 195
6.8. Наилучшее приближение 196
6.9. Сходимость производных низших порядков 197
6.10. Второе интегральное соотношение 200
6.11. Улучшение оценки порядка сходимости 202
6.12. Сходимость производных высших порядков 204
6.13. Ограничения на порядок сходимости 206
6.14. Приложения к теории гильбертова пространства 208
6.15. Сходимость по норме 211

6.16. Канонические сеточные базисы 213
6.17. Ядра и интегральные представления 215
6.18. Представление и приближение линейных функционалов . . . 216

Глава VII. Дважды кубические сплайны 228

7.1. Введение 228
7.2. Частичные сплайны 229
7.3. Связь частичных сплайнов с дважды кубическими сплайнами . . 231
7.4. Основное тождество 232
7.5. Первое интегральное соотношение 234
7.6. Свойство минимальной нормы 234
7.7. Единственность и существование 235
7.8. Наилучшее приближение 236
7.9. Фундаментальные сплайны 237
7.10. Свойства сходимости 238
7.11. Второе интегральное соотношение 238
7.12. Прямое произведение гильбертовых пространств 240
7.13. Метод фундаментальных сплайнов 243
7.14. Иррегулярные области 246
7.15. Представление поверхности 249
7.16. Поверхности Кунса 252

Глава VIII. Обобщенные сплайны двух переменных 256

8.1. Введение 256
8.2. Основные определения 256
8.3. Основное тождество 258
8.4. Типы сплайнов 259
8.5. Первое интегральное соотношение 261
8.6. Единственность 262
8.7. Существование 262
8.8. Сходимость 264
8.9. Приложения к теории гильбертова пространства 265
Литература 267

Добавления. *С. Б. Стечкин, Ю. Н. Субботин* 270

§ 1. Полиномиальные сплайны первой степени 270
§ 2. Интерполяционные параболические сплайны 272
§ 3. Полиномиальные сплайны на равномерной сетке 285
§ 4. Некоторые приложения сплайнов 291
§ 5. Многомерный случай 304
Литература 307
Предметный указатель 310
Именной указатель 312

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Ваши замечания о содержании книги,
ее оформлении, качестве перевода и другие
просим присылать по адресу:
129820 Москва, И-110, ГСП,
1-й Рижский пер., д. 2
Издательство «Мир»

Дж. Алберг, Э. Нильсон, Дж. Уолш

ТЕОРИЯ СПЛАЙНОВ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Редактор *Л. Б. Штейнпресс*
Художник *О. Н. Коняхин*
Художественный редактор *В. И. Шаповалов*
Технический редактор *Е. Н. Лебедева*

Сдано в набор 26/XI 1971 г,
Подписано к печати 10/IV 1972г.
Бумага № 1,70×90¹/₁₆=10 бум. л.
Усл. печ. л. 23,40
Уч.-изд. л. 21,35 Изд. № 1/5627
Цена 2 р. 04 к. Зак. 1197

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Московская типография № 16
Главполиграфпрома Комитета по печати
при Совете Министров СССР
Москва, Трехпрудный пер., 9

Издательство «Мир»
в 1973 году
выпустит книгу

РОКАФЕЛЛЕР Р. Выпуклый анализ, Принстон, 1970, перевод с английского, 27 л.

Первая в мировой литературе монография, специально посвященная комплексному анализу — сформировавшемуся совсем недавно разделу анализа, занимающемуся изучением выпуклых функций. Эти функции привлекли особое внимание исследователей в пятидесятых годах нашего века, когда выяснилось, какую огромную роль они играют в задачах линейного программирования, теории игр и теории оптимальных процессов при наличии ограничений. Исследование выпуклых функций проводится в книге во всех аспектах: алгебраическом, топологическом, с точки зрения двойственности, представления в виде неравенств и т. д. Большое внимание уделено приложениям. Автору удалось сочетать доступность учебника и обстоятельность монографии. Это делает его труд интересным для широкого круга математиков различных специальностей — от студентов до научных работников.

ВНИМАНИЮ ЧИТАТЕЛЕЙ!

Только предварительный заказ на книги в магазинах, торгующих научно-технической литературой, обеспечит своевременное получение интересующих вас книг.

Издательство «Мир»
в 1973 году
выпустит книгу

СТЕЙН Э. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций, Принстон, 1970, перевод с английского, 19 л.

Книга посвящена теории функций многих действительных переменных. В ней систематически изложены результаты исследований последних десятилетий по сингулярным интегралам и связанным с ними интегральным преобразованиям, по мультипликаторам интегралов Фурье, граничным значениям гармонических функций многих переменных и, наконец, по классификации свойств дифференцируемости функций на основе их представимости интегралами типа потенциала или поведения их разностей. Подобный подход к изучению дифференцируемости функций многих переменных не освещен в отечественной литературе.

Книга написана чрезвычайно ясно и сочетает все качества хорошего учебника с обстоятельностью монографии. Она, несомненно, заинтересует математиков многих специальностей, прежде всего специалистов по теории функций и теории дифференциальных уравнений, и будет полезна преподавателям, аспирантам и студентам университетов и пединститутов.

ВНИМАНИЮ ЧИТАТЕЛЕЙ!

Только предварительный заказ на книги в магазинах, торгующих научно-технической литературой, обеспечит своевременное получение интересующих вас книг.