Н. В. Александров, А. Я. Яшкин

КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

Механика

Допущено Министерством просвещения СССР в качестве учебного пособия для студентов-заочников физико-математических факультетов педагогических институтов

МОСКВА, «ПРОСВЕЩЕНИЕ», 1978

530
А46

Рецензенты:

Дущенко В. П., Барановский В. М. (кафедра физики Киевского государственного педагогического института им. А. М. Горького) и *Петерсон В. К.* (кафедра общей физики для физических факультетов МГУ им. М. В. Ломоносова)

Александров Н. В. и Яшкин А. Я.

А46 Курс общей физики. Механика. Учеб. пособие для студентов-заочников физ.-мат. фак. пед. ин-тов. М., «Просвещение», 1978. 416 с. с ил.

В книге изложен учебный материал по механике в соответствии с учебной программой по курсу общей физики для физико-математических факультетов заочных педагогических институтов. Авторы учли специфику учебного труда студентов-заочников. Весь материал разбит на 31 занятие, в которые включены приблизительно одинаковые дозы информации. К каждому занятию приведены вопросы для самопроверки.

А $\frac{60602-268}{103(03)-78}$ 29—78

ПРЕДИСЛОВИЕ

Особенность заочного обучения состоит в том, что основную работу по усвоению предмета студент проводит самостоятельно в домашних условиях в период между учебно-экзаменационными сессиями. В процессе самостоятельной работы над курсом студент фактически лишен возможности общения с преподавателем. Это обстоятельство выдвигает определенные требования и к учебным пособиям, которыми должен быть снабжен студент на межсессионный период.

Эта книга имеет своей целью помочь студенту-заочнику физико-математического факультета в самостоятельной работе над первой частью курса общей физики — механикой.

За последнее время научный уровень изложения физики в средней школе значительно возрос и приблизился к современному состоянию науки. В связи с этим изложение программного материала курса общей физики в пединституте должно быть изменено таким образом, чтобы оно, во-первых, не повторяло школьного курса и, во-вторых, давало возможность студенту глубже проникнуть в суть физических явлений и на этой основе осуществляло формирование диалектико-материалистического мировоззрения, подготавливало студента к пониманию разделов теоретической физики и дисциплин технического цикла.

При написании книги мы руководствовались действующей программой. Однако книга не является конспектом лекций и потому на нее не могут налагаться такие же ограничения, как на курс лекций. Книга должна дать студенту возможность изучить весь программный материал по механике в логическом порядке, обеспечивающем глубокое понимание предмета. Для этого она должна содержать и некоторый материал, выходящий за рамки программы. По этой причине, например, несколько шире, чем предусмотрено программой, нами рассмотрены некоторые вопросы из динамики твердого тела, из темы «Работа и энергия» и др.

Очевидно, что изучение курса современной механики невозможно без упоминания о законах релятивистской механики. По этой причине мы вкратце коснулись и этих вопросов.

Что касается формы изложения, то мы остановились на варианте, отвечающем, по нашему мнению, цели пособия. Весь излагаемый материал разбит на разделы в соответствии с программой. Раздел, в свою очередь, состоит из «занятий» (или «уроков»). Каждое «занятие» посвящено изложению какого-либо одного сравнительно небольшого вопроса, входящего в данный раздел. «Занятие» завершается, как правило, разбором примеров и вопросами для самопроверки. К сожалению, ограниченность объема книги не позволила нам уделить достаточного внимания методике решения задач. Однако этот пробел восполняется недавно вышедшими специальными пособиями [1].

По усмотрению преподавателя некоторые занятия могут быть при первом чтении опущены. Однако студенту полезно ознакомиться, хотя бы бегло, с содержанием всех занятий. Это создаст цельное и логически законченное представление о предмете.

Авторы выражают свою искренную благодарность Н. А. Государевой, оказавшей большую помощь в подготовке рукописи к печати, а также всем лицам, которые своими замечаниями способствовали улучшению книги.

Авторы будут признательны кафедрам физики и отдельным лицам, которые пришлют свои замечания и соображения, направленные на улучшение пособия.

Авторы

---

[1] См.: Яшкин А. Я., Какименко Л. М., Куница Р. И., Львовская Е. В., Никитина Е. А., Сазонова Н. А. Задачник-практикум по общей физике, ч. 1. М., 1975; Зайцева А. М. (под ред. Александрова Н. В.). Задачник-практикум по общей физике. Механика. М., 1972.

ВВЕДЕНИЕ

Область человеческого знания об окружающей нас природе называют естествознанием. Науки, изучающие различные виды движения материальных объектов (материи), называют естественными. Физика принадлежит к естественным наукам. Однако в отличие от других естественных наук она изучает наиболее общие виды (формы) движения материи и ее строения. По этой причине она является фундаментом всех естественных наук.

Физика объясняет природу и законы взаимодействия атомов и молекул и поэтому является основой химии. В основе электротехники и радиотехники лежат установленные физикой законы взаимодействия электромагнитных полей и электрических зарядов, в основе небесной механики — закон всемирного тяготения и т. д. На законах физики базируются и все технические науки: сопротивление материалов, строительная механика, теплотехника и др. В свою очередь технические науки в своем развитии ставят перед физикой новые проблемы. Физика и техника взаимосвязаны между собой, и эта связь обусловливает в настоящее время бурный научно-технический прогресс.

Физика делится на части, каждая из которых изучает в основном определенный вид движения материи. Механика изучает перемещение тела в пространстве; молекулярная физика — беспорядочное движение большого количества атомов и молекул, составляющих вещество; электромагнетизм — взаимодействие электрических и магнитных полей с электрическими зарядами; оптика — возникновение, особенности распространения излучения и его взаимодействия с веществом; физика атома и атомного ядра — особенности внутриатомного и внутриядерного движения материи. Конечно, не следует придавать абсолютный характер такому делению, ибо на самом деле нет резких границ между отдельными частями физики.

Процесс познания в физике, как и в любой другой науке, начинается с наблюдения явления в естественных условиях или в специально поставленном эксперименте. В результате обобщения данных наблюдений строится научное предположение о механизме явления, т. е. создается гипотеза. Если гипотеза при логическом ее развитии приводит к следствиям, которые подтверждаются опытом, она становится научной теорией. Например, такие физические явления, как распространение запаха (в отсутствие конвекции), броуновское движение можно объяснить, если предположить, что вещество состоит из мельчайших частиц (молекул), находящихся в беспорядочном движении. Это гипотеза. Из нее следует, что в газах (и в веществе вообще) должны наблюдаться явления переноса (диффузия, теплопроводность, внутреннее трение). Опыт это подтверждает. Так появилась молекулярно-кинетическая теория, которая в свое время сыграла большую роль в познании свойств вещества.

Однако возникшая теория не остается неизменной. С развитием физических исследований обнаруживается ряд явлений, которые данная теория объяснить уже не может.

Молекулярно-кинетическая теория сравнительно хорошо объясняет теплоемкость газов при условиях, близких к нормальным. Но она не может объяснить зависимость теплоемкости от температуры. Значит, эту теорию следует «уточнить». «Подправленная» теория может, в свою очередь, оказаться не точной, тогда и ее нужно «подправить».

В процессе познания важную роль играют абстракции, т. е. упрощенные схемы явлений. Абстракция — это понятие, которое отображает только некоторые существенные при данном рассмотрении свойства тел или некоторые существенные характеристики процесса. Абстракциями являются, например, понятия материальной точки, абсолютно твердого тела, сплошной среды, несжимаемой и невязкой жидкости и др.

Используя те или иные абстракции и упрощенные схемы, следует помнить, что полученные на их основе результаты только приближенно описывают реальные тела и процессы. Так, заменяя реальный газ моделью, представляющей совокупность беспорядочно движущихся не взаимодействующих между собой материальных точек, надо помнить, что все следствия, вытекающие из этой модели, будут справедливы для газов, находящихся в состояниях, при которых расстояние между молекулами настолько велико, что размерами их и взаимодействием между ними можно пренебречь. В других случаях данная абстракция уже не соответствует реальной картине, а ее следствия резко расходятся с опытом.

Механика состоит из следующих частей: механика материальной точки, механика системы точек, механика твердого тела, механика жидкостей и газов. Каждая такая часть, в свою очередь, состоит из трех разделов: кинематики, динамики и статики. Кроме того, особым разделом (в силу его важности) выделяют учение о колебаниях и волнах.

Раздел I
КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

ВВЕДЕНИЕ

1. Кинематика есть часть механики, изучающая движение тел без выяснения причин, обусловливающих это движение, т. е. изучает движение в отрыве от причин, побуждающих тело совершать или изменять свое движение. Такой подход позволяет выявить особенности различных видов движения и ввести их физические характеристики. Однако полное понимание движения достигается лишь при учете взаимодействия движущегося тела с другими телами. Но это уже предмет другого раздела механики — динамики.

2. Рассматривая движение различных реальных тел, мы обнаружим и нечто общее для них и нечто специфическое для каждого. Общее можно выделить, абстрагируясь от конкретных особенностей движущихся тел. Такая абстракция состоит в том, что реальное тело заменяется «материальной точкой», т. е. объектом, обладающим массой (равной массе тела), но не имеющим геометрических размеров.

Надо, однако, отметить, что, пренебрегая размерами тела, мы исключаем из рассмотрения вращение его около собственной оси. Если вращение тела не влияет на характер поступательного движения, то тело, независимо от его размеров, можно считать материальной точкой. Например, свободное падение шарика в отсутствие трения (поступательное движение) не зависит от того, вращается он или нет, поэтому в этих условиях шарик можно считать материальной точкой. Но тот же шарик, скатывающийся без скольжения по наклонной плоскости, уже нельзя считать материальной точкой, так как его вращение влияет на характер поступательного движения по плоскости. Если тело движется не вращаясь, т. е. поступательно, его можно считать материальной точкой независимо от размеров.

3. Изучение движения материальной точки важно не только потому, что оно дает возможность описать (хотя и приближенно) движение реального тела, но и потому, что позволяет

построить точную теорию движения любого реального тела как совокупности материальных точек.

4. Для описания движения материальной точки прежде всего необходимо выбрать систему отсчета, т. е. координатную систему с часами для отсчета времени, связанную с каким-либо реальным телом.

Следует подчеркнуть, что система отсчета всегда «скрепляется» с некоторым реальным телом, относительно которого изучается движение данной материальной точки и которое мы условно принимаем за неподвижное. Однако часто в рассуждениях «забывают» об этом теле и говорят просто о системе отсчета, понимая под этим систему координат и часы. Изучить движение данной материальной точки можно по отношению к различным телам. Но так как эти тела сами могут двигаться, то законы движения изучаемой точки окажутся, вообще говоря, не одинаковыми в разных системах отсчета.

Как же в таком случае следует выбирать систему отсчета? С кинематической точки зрения все системы отсчета являются равноправными. На практике же стараются выбирать такую систему, которая при рассмотрении данной задачи наиболее удобна, т. е. приводит к меньшим вычислениям, обеспечивает наибольшую наглядность и простоту и т. д. Но, как увидим ниже, при рассмотрении динамики движения точки не все системы отсчета являются равноправными; имеется один класс систем отсчета, который обладает преимуществом перед другими системами. Это, конечно, не означает, что другие системы непригодны. В них также можно изучать и описывать движение точки. Только законы движения в таких системах будут несколько сложнее, чем в преимущественных системах.

Сошлемся на известный пример из астрономии. Движение планет и других небесных тел можно рассматривать как относительно системы, связанной с Землей (геоцентрическая система), так и относительно системы, связанной с Солнцем (гелиоцентрическая). В кинематическом отношении обе системы равноправны. Однако только система, связанная с Солнцем, помогла познать строение солнечной системы, установить причины движения планет и раскрыть их закономерности. В этом отношении велика заслуга К о п е р н и к а[1], который первым высказал утверждение, что центром солнечной системы является не Земля, как полагали, а Солнце. Этим он нанес удар по канонам религии и дал ключ к разгадке тайны солнечной системы.

5. В качестве координатной системы обычно используют правую *декартову прямоугольную систему* x, y, z. Иногда бывает удобно использовать полярные, цилиндрические, сферические или другие координатные системы в зависимости от особенно-

---

[1] Николай К о п е р н и к (1473—1543) — польский астроном.

стей решаемых задач. Мы же, как правило, будем пользоваться декартовой системой координат.

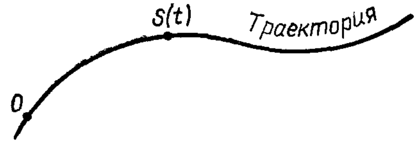


Рис. 1.1

В выбранной системе отсчета в результате наблюдения мы устанавливаем положение движущейся точки в пространстве для каждого момента времени. Множество точек пространства, через которые прошла материальная точка, образует линию, называемую *траекторией* движения. По виду траекторий в данной системе все движения можно разбить на прямолинейные и криволинейные. Вид траектории зависит от выбора системы отсчета. Это означает, что движение одной и той же точки в одной системе представляется прямолинейным, в другой — криволинейным. Например, движение тяжелого шарика, упавшего из окна движущегося вагона, представляется прямолинейным относительно системы отсчета, связанной с вагоном, и криволинейным (парабола) относительно системы отсчета, связанной с землей. Не только траектория, но и характер самого движения также зависит от выбора системы отсчета. Основная задача кинематики состоит в том, чтобы в выбранной системе отсчета научиться описывать движение точки аналитически, т. е. при помощи формул.

6. Существуют три способа аналитического описания движения точки в пространстве.

Первый способ (он получил название «естественного» или «траекторного») состоит в следующем. На заданной траектории устанавливается начало отсчета (рис. 1.1) так называемой дуговой координаты s, определяющей (в данный момент) положение движущейся точки на траектории. Дуговая координата измеряется длиной участка по кривой от начала отсчета до данной точки на траектории; устанавливается также и правило знаков. Дуговая координата в одну сторону от начала отсчета считается положительной, а в другую — отрицательной.

При данном способе описания положение движущейся точки на траектории целиком определяется одной-единственной координатой s, являющейся функцией времени:

$$s = s(t).$$

Поэтому, чтобы задать движение точки по траектории, надо задать функцию $s = s(t)$, которая, таким образом, и является аналитической записью движения точки по траектории. Эту функцию называют законом движения точки по траектории.

Второй способ аналитического описания движения точки, получивший название «векторного», основан на том, что положение точки в пространстве указывается радиус-вектором,

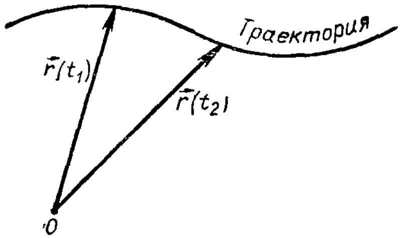


Рис. 1.2

проведенным из некоторого центра O к данной точке (рис. 1.2). При движении точки ее радиус-вектор меняет свой модуль и направление, являясь таким образом функцией времени:

$$\vec r = \vec r(t).$$

Функцию $\vec r = \vec r(t)$ называют векторным законом движения точки, ее можно рассматривать так же, как уравнение траектории движения в параметрической форме (параметр — время t).

Третий способ, получивший название «координатного», состоит в следующем. Положение точки A в пространстве определяется в прямоугольной системе координат заданием трех координат x, y, z (рис. 1.3). При движении точки ее координаты изменяются во времени $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Эти функции, если они известны, определяют положение точки в пространстве в любой момент времени. Координатные уравнения движения можно рассматривать и как запись траектории движения.

Конечно, все три способа связаны между собой. Наиболее простая связь существует между векторным и координатным способами описания. Она вытекает из того известного из аналитической геометрии факта, что каждый вектор $\vec r$ в декартовой системе координат (см. рис. 1.3) может быть представлен в виде суммы трех векторов, направленных по осям x, y, z:

$$\vec r = r_x\vec i + r_y\vec j + r_z\vec k,$$

где r_x, r_y, r_z — проекции вектора $\vec r$ на соответствующие оси; $\vec i$, $\vec j$, $\vec k$ — единичные векторы, направленные по осям x, y, z. Так как проекции вектора $\vec r$ равны координатам конца вектора $\vec r$ (точка A на рисунке 1.3), т. е. $r_x = x$, $r_y = y$, $r_z = z$, то можно записать:

$$\vec r = x\vec i + y\vec i + z\vec k.$$

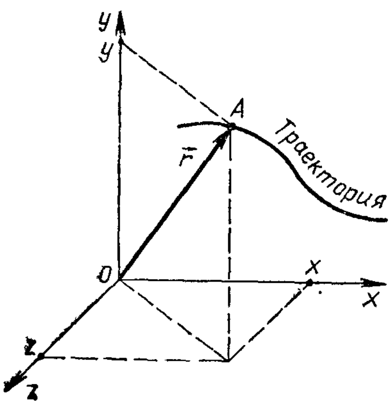


Рис. 1.3

Последнее выражение позволяет осуществить переход от векторного способа описания к координатному и наоборот.

Векторный способ наиболее компактный: он используется в основном при теоретических исследованиях. При решении конкретных задач более употребительны естественный и координатный методы.

7. Все наши знания о движении мы получаем из наблюдения за движением реальных тел в реальных условиях. Для этого мы должны уметь измерять в выбранной системе отсчета длины отрезков и промежутки времени. Измерение длины связано с определением положения движущейся точки на траектории, а также с измерением пройденного пути. Измерение промежутков времени также необходимо, так как и координаты и пути, проходимые точкой, изменяются во времени.

Следовательно, для изучения движения мы должны иметь два прибора: прибор для измерения длины (в простейшем случае это линейка или рулетка) и прибор для измерения промежутков времени (часы, секундомер и т. д.). Результат измерений выражается в определенных единицах. Следовательно, должны быть известны единицы измерения длины и времени. Эти единицы выбираются произвольно, но так, чтобы они были удобны для практических измерений (не слишком малы, но и не слишком велики). За единицу измерения длины принят метр (м), за единицу измерения промежутка времени — секунда (с).

Иногда употребляют единицы, являющиеся дольными или кратными этим единицам (сантиметр, километр, микросекунда, час и т. д.). Имеется вполне строгое определение каждой из упомянутых единиц измерения, но об этом здесь говорить не будем. Важно лишь, что такие единицы есть, и соответствующие приборы дают нам возможность измерить длину и промежутки времени именно в этих единицах. Как будет показано ниже, из этих двух физических величин (длины и времени) можно получить новые физические величины со своими единицами измерения, которые более полно и более точно могут охарактеризовать механическое движение тела.

9. Прежде чем перейти к изучению конкретных видов движения, уточним два понятия, которые будут необходимы в дальнейшем: *путь* и *перемещение* движущейся точки.

Путь. Рассмотрим движение точки по некоторой криволинейной траектории (рис. 1.4). Пусть за промежуток времени t точка передвинулась по траектории из положения A в положение B, причем двигалась по траектории

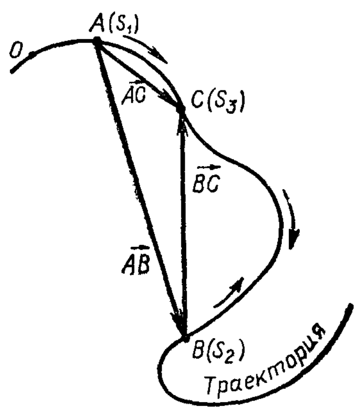


Рис. 1.4

все время в одну сторону. Нетрудно видеть, что путь будет равен $l_1 = s_2 - s_1$ (точка двигалась в сторону положительных s). Если же точка за это время передвинется из A в B, а затем, изменив направление движения, придет в положение C, ее путь будет слагаться из двух частей путь от A к B и путь от B к C. Это можно записать так: $l_2 = s_2 - s_1 + |s_3 - s_2|$.

Таким образом путь, проходимый точкой, выражается в виде суммы путей, проходимых ею по отдельным участкам с монотонным движением. Путь на участках с монотонным движением определяется как абсолютное значение разности дуговых координат. По смыслу путь — величина скалярная и положительная. У всех автомашин, например, имеется счетчик километров. Этот счетчик показывает, какой путь прошла машина со дня выпуска; причем показания прибора не зависят от траектории и характера движения автомобиля.

Перемещение точки. Если точка, двигаясь по траектории (рис. 1.4), перешла из положения A в положение B, то перемещением точки называют вектор $\overrightarrow{AB}$, имеющий длину $|AB|$ и направление от A к B. Если точка перешла по траектории от положения B к положению C, то перемещение будет $\overrightarrow{BC}$. Перемещение точки от A к C (конечное перемещение) изображается вектором $\overrightarrow{AC}$. Из рисунка 1.4 видно, что

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC},$$

т. е. перемещения складываются геометрически.

То, что конечное перемещение равно геометрической сумме отдельных перемещений, составляет важный принцип механики, называемый принципом независимости перемещений (принципом наложения, или суперпозиции), справедливость которого доказывается опытом.

Итак, перемещение — векторная величина. Она показывает, в каком направлении и на какое расстояние сместилась точка. Но по перемещению нельзя судить о том, по какой именно траектории происходило движение. Если положения A и B очень близки друг к другу, то перемещение $\overrightarrow{AB}$, являясь хордой дуги AB, почти «сольется» с самой дугой и тогда истинное движение точки по дуге можно приближенно заменить движением по хорде, т. е. криволинейное движение на участке AB можно рассматривать как прямолинейное. Так как при этом длина вектора $\overrightarrow{AB}$ становится равной длине дуги AB, то перемещение $\overrightarrow{AB}$ содержит информацию как о направлении движения точки на рассматриваемом малом участке, так и о пути Δl, пройденном точкой за время Δt:

$$|\overrightarrow{AB}| = \smile{AB} = |s(t + \Delta t) - s(t)| = |\Delta s|.$$

При изложении кинематики мы будем применять в основном естественный способ описания движения. Поэтому скорость и ускорение мы определим вначале через путь. Затем перейдем к более полным характеристикам, построенным на понятии «перемещения» точки.

Занятие 1

ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Движение называют равномерным, если материальная точка в равные, произвольно выбранные промежутки времени проходит равные пути.

Движение называют неравномерным, если пути, пройденные точкой за произвольные равные промежутки времени, могут быть неодинаковыми.

Существенным в этих определениях является указание на произвольность выбора промежутков времени.

1. РАВНОМЕРНОЕ ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Скорость равномерного движения. В качестве количественной характеристики равномерного прямолинейного движения берут величину, пропорциональную пути, проходимому материальной точкой за единицу времени.

Вводимую таким образом физическую величину называют скоростью или, точнее, модулем скорости $|v|$ равномерного прямолинейного движения:

$$|v| = k\frac{\Delta l}{\Delta t}.$$

Полагая $k = 1$, получим:

$$|v| = \frac{\Delta l}{\Delta t}, \tag{1.1}$$

т. е. скорость измеряется расстоянием (путем), которое проходит равномерно движущаяся точка за единицу времени. Из (1.1) видно, что $|v| = 1$, если $\Delta l = 1$ и $\Delta t = 1$. Отсюда вытекает определение единицы измерения скорости.

За единицу измерения скорости принимается скорость такого равномерного прямолинейного движения, при котором материальная точка за единицу времени проходит путь, равный единице. Единица измерения скорости имеет наименование, которое представляет собой отношение наименования единицы пути к наименованию единицы времени: км/ч, м/с, см/с, мм/с и т. д.

Следует отметнть, что приведенное выше определение скорости не позволяет судить, в каком направлении по траектории движется точка, но дает лишь представление об абсолютном или арифметическом ее значении. Это вытекает из того, что путь Δl и промежуток Δt суть положительные числа.

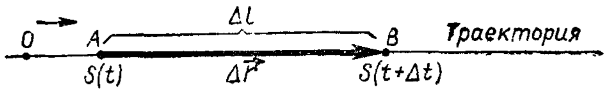


Рис. 1.5

Мгновенная скорость равномерного движения. Согласно формуле (1.1) для вычисления скорости нужно путь Δl разделить на промежуток времени Δt. Далеко не очевидно, останется ли неизменным отношение пути к промежутку времени, если промежуток времени, скажем, уменьшить в n раз. Докажем, опираясь на определение равномерного движения, что отношение не зависит от промежутка времени Δt, т. е. скорость равномерного движения можно определять по любому промежутку времени.

Пусть за промежуток времени Δt точка переместилась из положения A, определяемого координатой $s\,(t)$, в положение B, определяемое координатой $s(t+\Delta t)$, пройдя при этом путь $\Delta l = s(t+\Delta t) - s(t)$ (рис. 1.5). Тогда скорость движения выразится так:

$$|v| = \frac{\Delta l}{\Delta t}.$$

Если промежуток времени Δt уменьшить в n раз, т. е. взять

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta t}{n},$$

то согласно определению равномерного движения точка за эти новые промежутки времени Δt_1 будет проходить равные пути Δl_1. Следовательно, в прежнем отрезке Δl новый отрезок Δl_1 уложится ровно n раз. Отсюда

$$\Delta l_1 = \frac{\Delta l}{n}.$$

Найдем скорость $|v_1|$ точки в интервале времени Δt_1:

$$|v_1| = \frac{\Delta l_1}{\Delta t_1} = \frac{\Delta l/n}{\Delta t/n} = \frac{\Delta l}{\Delta t}.$$

Таким образом, скорость не зависит от выбора промежутка времени. Это значит, что путь, проходимый точкой при равномерном движении, прямо пропорционален промежутку времени, т. е.

$$\Delta l \sim \Delta t.$$

Коэффициентом пропорциональности является скорость $|v|$:

$$\Delta l = |v| \cdot \Delta t.$$

Используя эту пропорциональную зависимость и устремляя Δt к нулю, мы в пределе будем иметь ту же скорость, что и при конечном Δt:

$$|v| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta l}{\Delta t}. \tag{1.2}$$

Однако скорость, полученная как предел отношения пути Δl к промежутку времени Δt при $\Delta t \to 0$, приобретает новый смысл, а именно: это скорость в данный момент времени или в данной точке траектории. Ее называют *мгновенной скоростью.* Так как момент времени t, от которого мы отсчитываем промежуток времени Δt, выбирается произвольно, то ясно, что при равномерном движении точки ее мгновенная скорость имеет во все моменты времени одно и то же значение. График мгновенной скорости равномерного движения в системе координат $|v|$, t представляет собой прямую, параллельную оси абсцисс (оси времени t).

Вернемся к соотношению (1.2). Путь Δl может быть выражен как модуль разности «дуговых» координат начального и конечного положения точки (см. рис. 1.5): $\Delta l = |s(t+\Delta t) - s(t)|$ Подставляя это значение Δl в выражение (1.2), получим (Δt всегда положительно):

$$|v| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta l}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|s(t+\Delta t) - s(t)|}{\Delta t} = \left|\frac{ds}{dt}\right|. \tag{1.3}$$

Таким образом, *мгновенная скорость равна модулю первой производной по времени от «дуговой» координаты.*

Скорость как алгебраическая величина. Приведенное определение мгновенной скорости (1.3) не содержит информации о направлении движения точки по траектории.

Если договориться приписывать скорости алгебраический знак: положительный, если точка движется в сторону увеличения координаты s, и отрицательный, если она движется в сторону уменьшения s, мы придадим скорости смысл алгебраической величины. Знак скорости будет автоматически определяться знаком производной:

$$v = \frac{ds}{dt}. \tag{1.4}$$

Закон движения и путь. Из соотношения (1.4) следует, что

$$ds = v\,dt,$$

где v не зависит от времени (равномерное движение).

Интегрируя левую и правую части, получим:

$$s = v\int dt + C = vt + C. \tag{1.5}$$

Здесь C — постоянная интегрирования. Для ее определения нужны дополнительные данные о положении точки в начальный

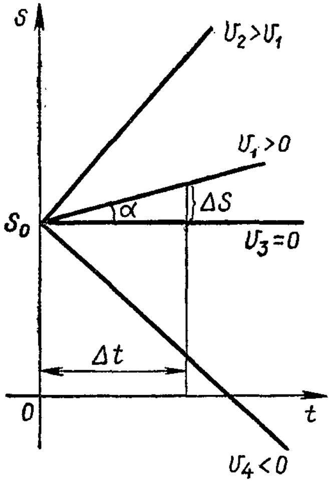


Рис. 1.6

момент времени $t=0$ (в момент начала отсчета времени). Если известно, что в момент $t=0$ положение движущейся точки определялось координатой s_0, то, подставляя эти данные в равенство (1.5), получим, что $C=s_0$. Определив постоянную интегрирования, мы получили закон равномерного движения точки по прямолинейной траектории:

$$s=s_0+vt. \tag{1.6}$$

На рисунке 1.6 приведены графики движения при различных v.

Если задан закон движения, то за промежуток времени t путь l (величина положительная) определится как абсолютная величина разности дуговых координат конечного $s(t)$ и начального $s(0)$ положения движущейся точки:

$$l=|s(t)-s(0)|. \tag{1.7}$$

Из закона движения (1.6) следует, что

$$|s(t)-s(0)|=|v|t$$

($t>0$). Подставляя это значение в выражение (1.7), получим:

$$l=|v|t. \tag{1.8}$$

Таким образом, путь при равномерном прямолинейном движении равен произведению модуля скорости на время движения.

2. НЕРАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Средняя скорость. Наблюдения показывают, что существует бесчисленное множество разнообразных неравномерных движений. В первую очередь, они различаются между собой так называемой *средней скоростью.*

Средней скоростью неравномерного движения называют отношение пути Δl, пройденного за некоторый промежуток времени Δt, к длительности этого промежутка времени:

$$|v_{ср}|=\frac{\Delta l}{\Delta t}. \tag{1.9}$$

По смыслу $|v_{ср}|$ есть величина скорости равномерного движения, у которого путь Δl и время движения Δt такие же, как и у данного неравномерного движения.

Мгновенная скорость. Для точного описания движения следует перейти к заданию средних скоростей на бесконечно большом числе бесконечно малых участков траектории.

Величина средней скорости на участке Δs будет равна

$$|v_{\text{ср}}| = \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{|\Delta s|}{\Delta t}.$$

Предельное значение средней скорости при $\Delta t \to 0$ (если предел существует) называют, как уже было сказано выше, модулем мгновенной скорости и обозначают через $|v|$:

$$|v| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta l}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left|\frac{\Delta s}{\Delta t}\right| = \left|\frac{ds}{dt}\right|. \tag{1.10}$$

Таким образом, модуль мгновенной скорости при неравномерном движении равен абсолютному значению первой производной по времени от дуговой координаты $s(t)$.

Если в соотношении (1.10) снять знаки модуля, мы придем к выражению

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}, \tag{1.11}$$

определяющему мгновенную скорость как алгебраическую величину.

Мгновенная скорость неравномерного движения — это скорость равномерного движения на очень малом участке траектории около данной точки траектории. Если бы тело, начиная с данной точки траектории, стало двигаться равномерно, то скорость этого движения равнялась бы значению мгновенной скорости в этой точке траектории.

Итак, для точного описания неравномерного прямолинейного движения нужно знать мгновенную скорость в каждой точке траектории (или для каждого момента времени). Другими словами, нужно задать одну из двух функций: $v = f(s)$ или $v = F(t)$.

3. РАВНОПЕРЕМЕННОЕ ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Неравномерное движение, при котором скорость изменяется во времени по линейному закону, принято называть равнопеременным. Равнопеременное движение можно определить как такое неравномерное движение, при котором скорость за любые равные промежутки времени изменяется на одинаковую величину.

Ускорение при равнопеременном движении. В качестве количественной характеристики равнопеременного прямолинейного движения можно взять величину, пропорциональную изменению скорости за единицу времени, называемую ускорением равнопеременного прямолинейного движения:

$$|a| = k\frac{|\Delta v|}{\Delta t}.$$

Полагая $k = 1$, определим единицу измерения ускорения: *за единицу ускорения принимают ускорение такого равнопеременного движения, при котором скорость за единицу времени изменяется на единицу скорости.*

Мгновенное ускорение. Опираясь на определение ускорения, можно показать, что при равнопеременном движении ускорение $|a|$ не зависит от того, какой выбирается промежуток времени Δt: большой или малый (рассуждения подобны тем, которые проводились при рассмотрении мгновенной скорости равномерного движения). Это значит, что при равнопеременном движении изменение скорости $|v|$ строго пропорционально промежутку времени Δt. Используя эту пропорциональность, нетрудно прийти к заключению, что ускорение не будет меняться при неограниченном уменьшении промежутка времени Δt:

$$|a| = \lim_{\Delta t \to 0} \left| \frac{\Delta v}{\Delta t} \right| = \frac{|\Delta v|}{\Delta t}.$$

Так как $|\Delta v| = |v(t + \Delta t) - v(t)|$, то

$$|a| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta v|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|v(t + \Delta t) - v(t)|}{\Delta t} = \left| \frac{dv}{dt} \right|. \qquad (1.12)$$

Мы приходим к выводу, что модуль ускорения может быть найден как модуль первой производной от скорости по времени. Предельное значение $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$ по смыслу обозначает ускорение в данный момент времени t или в данной точке $s(t)$ траектории. От определения модуля ускорения можно перейти к определению ускорения как алгебраической величины:

$$a = \frac{dv}{dt}. \qquad (1.12')$$

Так как $v = \frac{ds}{dt}$, то ускорение представится в виде второй производной от дуговой координаты

$$a = \frac{d^2 s}{dt^2}.$$

Закон изменения скорости. Если для данного прямолинейного равнопеременного движения известно ускорение, то можно определить все остальные характеристики движения: скорость, закон движения, путь. Правда, для этого потребуются еще некоторые данные о движении в начальный момент времени.

Из (1.12') следует, что

$$dv = a\,dt.$$

Интегрируя по t левую и правую части этого выражения и учитывая, что $a = \text{const}$, получим:

$$v = \int a\,dt + C_1 = at + C_1. \qquad (1.13)$$

Постоянная интегрирования C_1 определится из (начального) условия: при $t = 0$ скорость $v = v_0$. Подставляя эти значения t и v в (1.13), найдем, что $C_1 = v_0$. Таким образом, закон изменения скорости примет вид:

$$v = v_0 + at. \tag{1.14}$$

Как и следовало ожидать, скорость зависит от t по линейному закону.

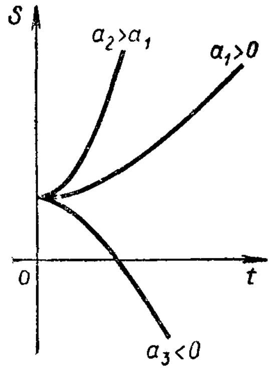


Рис. 1.7

Закон движения точки по траектории. Путь при равномерном движении. Из формулы

$$v = \frac{ds}{dt}$$

получим: $ds = vdt$.

Интегрируя по t обе части равенства и учитывая, что $v = v_0 + at$, найдем:

$$s = \int v\,dt + C_2 = \int (v_0 + at)\,dt + C_2 = v_0 t + \frac{at^2}{2} + C_2.$$

Постоянная интегрирования C_2 вычисляется из условия, что в момент $t = 0$ положение точки на траектории определялось координатой s_0:

$$C_2 = s_0.$$

Таким образом, закон равнопеременного движения точки по траектории имеет вид:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}. \tag{1.15}$$

График этой функции представляет собой параболу со смещенной относительно начала координат вершиной. На рисунке 1.7 представлены графики нескольких движений с одинаковыми начальными данными, но различающимися модулем и знаком ускорения.

Закон, выражаемый соотношением (1.15), в общем случае нельзя отождествлять с выражением для подсчета пути при равнопеременном движении.

Чтобы найти путь при равнопеременном движении, суммируют пути, проходимые точкой за бесконечно малые промежутки времени:

$$l = \int_0^t |v|\,at. \tag{1.16}$$

Связь скорости с положением точки на траектории при равнопеременном движении. Закон движения и закон изменения скорости равнопеременного движения имеет вид:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2},$$
$$v = v_0 + at,$$

где v_0 — скорость точки в момент времени $t = 0$ (или в положении s_0); v — скорость точки в момент времени t (или в положении s). Исключая из этих уравнений время, приходим к равенству

$$v^2 - v_0^2 = 2a(s - s_0), \qquad (1.17)$$

выражающему связь между скоростью и положением движущейся точки: *разность квадратов скоростей в конечном и начальном положениях точки определяется разностью координат конечного и начального положений.* При пользовании формулой (1.17) необходимо помнить о знаках a и s.

Если отсчет координаты производить от начального положения точки, то текущая координата будет обозначать путь, пройденный точкой за время t, а закон движения примет вид:

$$s = l = \frac{at^2}{2}. \qquad (1.18)$$

В этом случае путь прямо пропорционален квадрату времени.

Вопросы для самопроверки

1. Перечислите способы описания движений материальной точки.

2. Какие движения называются равномерными и какие неравномерными?

3. Что называют скоростью равномерного прямолинейного движения? Почему результат вычисления скорости равномерного движения не зависит от длительности промежутка времени? Что такое мгновенная скорость и каков ее физический смысл?

4. Чем отличается смещение точки от пути? При каких условиях длина вектора смещения будет равна пути, проходимому точкой?

5. Что называют средней скоростью неравномерного движения? Каков физический смысл средней скорости и как она рассчитывается? Может ли средняя скорость равняться нулю?

6. Что называют мгновенной скоростью неравномерного движения? Покажите, опираясь на определение неравномерного движения, что мгновенные скорости в разные моменты времени будут неодинаковы.

7. Как модуль мгновенной скорости связан с расстоянием точки от начала отсчета координаты? Что обозначает знак скорости?

8. Как подсчитывается путь при неравномерном движении?

9. Какое движение называется равнопеременным? Что называется ускорением равнопеременного движения и какими единицами оно измеряется?

10. Как по ускорению равнопеременного движения определить скорость, закон движения точки и проходимый ею путь? Какие дополнительные данные необходимы для этого?

11. Как по закону движения определить скорость, ускорение и путь? При каких условиях закон движения является в то же время и законом пути?

12. Что обозначает знак ускорения?

13. Каков вид графика зависимости модуля ускорения во времени для равнопеременного движения?

14. Какова связь скорости равнопеременного движения с координатой положения точки?

15. Что обозначает излом на графике скорости (рис. 1.8.)? Нарисуйте примерные графики ускорений для этих движений.

16. На рисунке 1.9 приведено несколько графиков зависимости от времени положения точки на траектории. Для каждого движения нарисуйте примерные графики скорости и ускорения.

17. Железнодорожный вагон, в котором сидит наблюдатель, движется с постоянным отрицательным ускорением и в некоторый момент времени t изменяет направление движения. В другом случае тот же вагон, двигаясь с таким же ускорением, достигает нулевой скорости и останавливается совсем. Ощутит ли на себе наблюдатель это различие в движении? Нарисуйте примерные графики скорости и ускорения для обоих случаев.

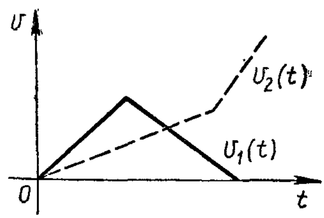


Рис. 1.8

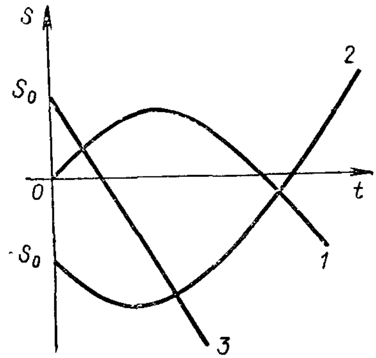


Рис. 1.9

Занятие 2

КРИВОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ. СКОРОСТЬ И УСКОРЕНИЕ ПРИ КРИВОЛИНЕЙНОМ ДВИЖЕНИИ

1. ВИДЫ ТРАЕКТОРИИ. КРИВИЗНА ТРАЕКТОРИИ

Наблюдая разные траектории, можно отметить у них различную степень искривления. Для точного количественного описания искривления в математике используются два связанных между собой понятия: *радиус кривизны* R и *кривизна кривой* ρ в данной точке:

$$\rho = \frac{1}{R}.$$

Поясним эти понятия. Пусть требуется определить радиус кривизны плоской кривой в точке A (рис. 1.10). Проведем касательную ab и нормаль cd к траектории в точке A. Рассмотрим из всего множества касательных окружностей в точке A только две: малого радиуса R_1 и большого радиуса R_2, выбранных таким образом (рис. 1.10, a), что все точки первой окружности

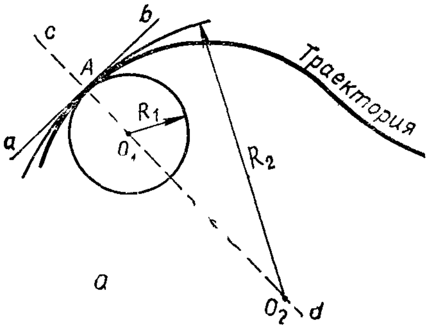


Рис. 1.10а

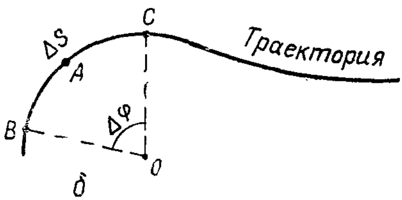


Рис. 1.10б

лежат ниже малого участка траектории около точки A, а все точки второй окружности лежат выше выбранного участка траекторин. Можно, очевидно, подобрать такой радиус окружности, чтобы в окрестности точки A окружность сливалась с траекторией. Радиус такой окружности называют радиусом кривизны траектории в заданной точке A. Очевидно, в другой точке радиус кривизны траектории будет иной. Только у окружности радиус кривизны во всех точках будет один и тот же, равный радиусу окружности.

Чтобы найти радиус кривизны, поступают следующим образом. На кривой около точки A берут две близкие точки B и C (рис. 1.10, *б*). Восставляют в этих точках перпендикуляры к кривой и продолжают их до пересечения (точка O). Затем точки B и C приближают к точке A. Когда они станут очень близки к A, дугу $\overset{\smile}{BC} = \overset{\smile}{\Delta s}$ можно считать с известным приближением дугой окружности с радиусом R, равным радиусу кривизны. Радиус окружности определится как отношение дуги $\overset{\smile}{\Delta s}$ к углу $\Delta\varphi$ между перпендикулярами BO, CO (рис. 10, б), т. е.

$$R \approx \frac{\overset{\smile}{\Delta s}}{\Delta\varphi}, \quad \text{или} \quad R \approx \frac{\Delta s}{\Delta\varphi},$$

так как малую дугу $\overset{\smile}{\Delta s}$ можно заменить хордой Δs. Устремляя $\Delta\varphi$ к нулю, получим точное выражение для радиуса кривизны как предел указанного отношения:

$$R = \lim_{\Delta\varphi \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta\varphi} = \frac{ds}{d\varphi}. \qquad (1.19)$$

Так как длина дуги определяется разностью дуговых координат точек B и C, то величину $\frac{ds}{d\varphi}$ можно рассматривать как производную от дуговой координаты по углу между перпендикулярами.

2. СКОРОСТЬ ПРИ КРИВОЛИНЕЙНОМ ДВИЖЕНИИ

Выше мы ввели понятия скорости и ускорения для прямолинейного движения. Обобщим эти понятия и на случай криволинейного движения. Пусть точка за время Δt переместилась по траектории из положения $s(t)$ в положение $s(t+\Delta t)$. Пройденный ею путь Δl по кривой линии в общем может не совпадать с длиной дуги $\overset{\frown}{\Delta s} = s(t+\Delta t) - s(t)$, так как точка могла неоднократно изменять направление движения.

Однако, если промежуток времени Δt выбран достаточно малым, можно считать, что на соответствующем участке траектории движение точки происходит в одном направлении. Тогда путь $\Delta l = |\overset{\frown}{\Delta s}| = |\Delta s|$, а средняя скорость на этом участке

$$|v_{\text{ср}}| = \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{|s(t+\Delta t) - s(t)|}{\Delta t}.$$

Предельное значение средней скорости при $\Delta t \to 0$ (если таковое существует) дает модуль мгновенной скорости в момент времени t (или в данной точке траектории):

$$|v| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|s(t+\Delta t) - s(t)|}{\Delta t} = \left|\frac{ds}{dt}\right|. \qquad (1.20)$$

Таким образом, модуль мгновенной скорости при криволинейном движении, как и при прямолинейном движении, равен абсолютному значению первой производной по времени от дуговой координаты.

Понятно, что и для алгебраического значения скорости может быть записано выражение, аналогичное (1.20):

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

Положительный знак скорости будет указывать на то, что движение точки по траектории происходит в сторону возрастания дуговой координаты, а отрицательная скорость означает, что движение происходит в сторону убывания дуговой координаты. Знак скорости, таким образом, указывает направление движения точки по траектории, но не в пространстве. Для того чтобы скорость давала представление о направлении движения в пространстве, необходимо перейти к понятию скорости как векторной величины. Для этого надо исходить не из пути Δl, но из векторной величины — перемещения $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta r}$ (рис. 1.11).

Вектор перемещения $\overrightarrow{\Delta r}$, вообще говоря, не совпадает с участком траектории — дугой $\overset{\frown}{\Delta s}$, которую описала движущаяся точка при данном перемещении. Но если перемещение достаточно мало, то с требуемой степенью точности можно заменить малый участок траектории ее хордой и считать, что участок

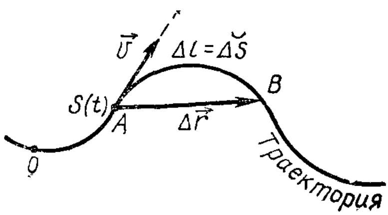


Рис. 1.11

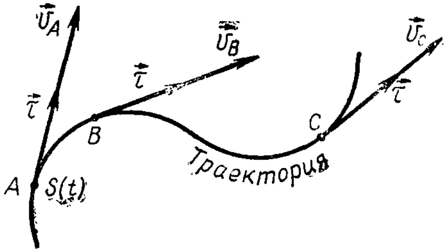


Рис. 1.12

траектории совпадает с вектором перемещения $\Delta\vec{r}$. Тогда путь равен модулю перемещения:

$$\Delta l = |\Delta\vec{r}| = |s(t+\Delta t) - s(t)|.$$

Таким образом, движение на выбранном участке траектории можно с известным приближением считать прямолинейным. Вектор средней скорости на этом участке

$$\vec{v}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

имеет направление вектора $\Delta\vec{r}$. Отношение $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ есть величина, вообще говоря, не постоянная, а зависящая от длительности выбранного промежутка времени Δt.

Предел, к которому стремится это отношение $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ *при беспредельном уменьшении* Δt

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}, \tag{1.21}$$

называют вектором мгновенной скорости (или просто скоростью) криволинейного движения.

Направление вектора $\vec{v}$ совпадает с направлением вектора $\Delta\vec{r}$, которое тот принимает в пределе при $\Delta t\to 0$. Понятно, что вектор $\vec{v}$ расположен по касательной к траектории и направлен в сторону перемещения точки. Модуль вектора скорости определяется так:

$$|\vec{v}| = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{|s(t+\Delta t)-s(t)|}{\Delta t} = \left|\frac{ds}{dt}\right|. \tag{1.22}$$

Если из точки A, взятой на траектории, построить единичный вектор $\vec{\tau}$, направленный по касательной в сторону возрастания координаты s (рис. 1.12), то вектор v можно будет записать следующим образом:

$$\vec{v} = v\vec{\tau} = \frac{ds}{dt}\vec{\tau}.$$

Итак, скорость направлена по касательной к траектории в каждой ее точке. Если на рисунке изобразить векторы скорости для разных моментов времени, получится наглядная картина изменения скорости и по направлению и по модулю (рис. 1.12).

3. УСКОРЕНИЕ ПРИ КРИВОЛИНЕЙНОМ ДВИЖЕНИИ

Как уже было сказано выше, в общем случае криволинейного движения скорость изменяется и по модулю и по направлению. Если в момент времени t скорость была $\vec{v}_1 = \vec{v}(t)$, а в момент $t + \Delta t$ она стала $\vec{v}_2 = \vec{v}(t + \Delta t)$, то изменение скорости за промежуток времени Δt выражается вектором $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$. Отношение $\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ есть вектор, выражающий среднее ускорение за промежуток Δt. Величина и направление этого вектора, вообще говоря, изменяются при уменьшении промежутка времени Δt.

Предел, к которому стремится отношение вектора $\Delta\vec{v}$ изменения скорости к промежутку времени Δt, за которое произошло это изменение при неограниченном уменьшении Δt, называют вектором мгновенного ускорения (или просто ускорением):

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \tag{1.23}$$

Итак, **вектор ускорения равен первой производной от вектора скорости.** Модуль ускорения не равен пределу отношения модуля изменения скорости к промежутку времени $|\vec{a}| \neq \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t}$, так как $|\Delta\vec{v}| \neq |\Delta v|$.

Направление вектора $\vec{a}$ определяется предельным значением направления вектора $\Delta\vec{v}$, и в общем случае оно не совпадает с направлением скорости $\vec{v}$ в данной точке траектории.

Рассмотрим этот вопрос подробнее. Определим ускорение на криволинейной траектории в точке A (рис. 1.13), которая соответствует положению движущейся точки в момент времени t.

Пусть точка B на траектории соответствует положению движущейся точки в момент времени $t + \Delta t$. Скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ в точках A и B направ-

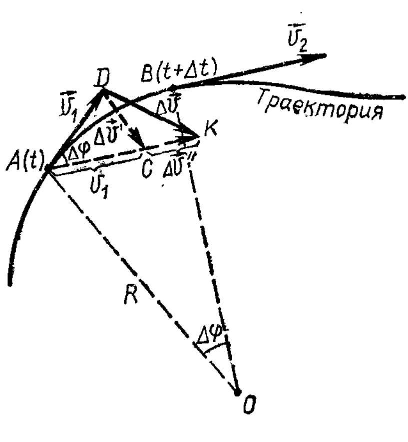


Рис. 1.13

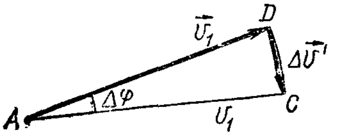


Рис. 1.14

лены по касательной к траектории в этих точках. Перенесем вектор $\vec{v}_2$ в точку A. Изменение скорости за промежуток времени Δt выразится вектором $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$.

От точки A на перенесенном векторе $\vec{v}_2$ отложим отрезок $AC = v_1$. Соединим точку C с концом вектора $\vec{v}_1$ (точка D). Введем в рассмотрение векторы $\overrightarrow{DC} = \Delta\vec{v}'$ и $\overrightarrow{CK} = \Delta\vec{v}''$. Из рисунка 1.13 видно, что $\Delta\vec{v} = \Delta\vec{v}' + \Delta\vec{v}''$. Тогда ускорение в точке A равно:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}'}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}''}{\Delta t}.$$

Ниже мы увидим, что оба предела в правой части равенства существуют:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}'}{\Delta t} = \vec{a}_n, \quad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}''}{\Delta t} = \vec{a}_t.$$

Величину $\vec{a}_n$ будем называть *нормальным ускорением*, а величину $\vec{a}_t$ — тангенциальным ускорением.

Рассмотрим предел отношения $\frac{\Delta\vec{v}'}{\Delta t}$. Если мы начем уменьшать промежуток времени Δt, вектор $\vec{v}_2$ будет поворачиваться около точки A и в пределе совпадет с вектором $\vec{v}_1$. При этом вектор $\Delta\vec{v}'$ будет уменьшаться и поворачиваться и в пределе (при $\Delta t \to 0$) окажется направленным перпендикулярно вектору $\vec{v}_1$.

По этой причине и вектор $\vec{a}_n$ будет перпендикулярен скорости $\vec{v}_1$ и также направлен к центру кривизны (в сторону вогнутости траектории). Отсюда и название этого вектора — нормальный (т. е. перпендикулярный). Определим теперь модуль нормального ускорения. При малом $\Delta\varphi$ модуль вектора может быть заменен длиной дуги $\smile{DC}$ (рис. 1.14). Следовательно, модуль нормального ускорения равен:

$$a_n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\overset{\frown}{DC}|}{\Delta t}.$$

Но $\overset{\frown}{DC} = v_1 \cdot \Delta\varphi$, причем из определения радиуса кривизны в точке A следует, что

$$\Delta\varphi = \frac{|\overset{\frown}{AB}|}{R} = \frac{v_1 \cdot \Delta t}{R},$$

ибо длина дуги AB (см. рис. 1.13) равна пути, пройденному точкой за малый промежуток времени Δt. Итак,

$$a_n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\overset{\smile}{DC}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_1 \cdot \Delta\varphi}{\Delta t} =$$

$$= \lim \frac{v_1 v_1 \cdot \Delta t}{R \cdot \Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_1^2}{R} = \frac{v_1^2}{R},$$

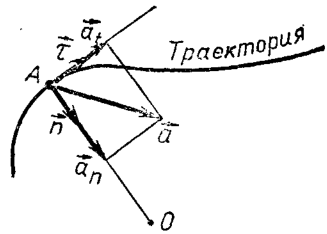


Рис. 1.15

Таким образом, модуль нормального ускорения $\vec{a}_n$ в некоторой точке траектории равен отношению квадрата скорости к радиусу кривизны траектории в этой же точке:

$$a_n = \frac{v^2}{R}. \tag{1.24}$$

Если на нормали к траектории отложить в точке A единичный вектор $\vec{n}$, направленный к центру кривизны (рис. 1.15), то вектор нормального ускорения можно записать так:

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R}\vec{n}. \tag{1.25}$$

Рассмотрим теперь вектор тангенциального ускорения:

$$\vec{a}_t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}''}{\Delta t}.$$

Отметим, что модуль вектора $\Delta\vec{v}''$ равен абсолютной величине разности модулей скоростей $\vec{v}_2$ и $\vec{v}_1$ (см.: рис. 1.13):

$$|\Delta\vec{v}''| = |\Delta v| = |v_2 - v_1|.$$

Но тогда модуль вектора ускорения $\vec{a}_t$ выразится следующим образом:

$$|\vec{a}_t| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\vec{v}''|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta v|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|v(t+\Delta t) - v(t)|}{\Delta t} = \left|\frac{dv}{dt}\right|.$$

Соответственно алгебраическое значение тангенциального ускорения определяется так:

$$a_t = \frac{dv}{dt}, \text{ или } a_t = \frac{d^2 s}{dt^2}. \tag{1.26}$$

Другими словами, алгебраическое значение тангенциального ускорения равно первой производной по времени от алгебраического значения скорости или второй производной от дуговой координаты. Направление вектора a_t определяется направлением вектора $\Delta\vec{v}''$, которое он имеет в пределе при $\Delta t \to 0$. Легко видеть, что в пределе вектор $\Delta\vec{v}''$ направлен по касательной к траектории в точке A. Отсюда возникло и название этого вектора — тангенциальный (что значит касательный). Введя единичный вектор $\vec{\tau}$, касательный к траектории и направленный в сторону роста координаты s, можно тангенциальное ускорение записать следующим образом:

$$\vec{a}_t = \frac{dv}{dt}\vec{\tau}. \qquad (1.27)$$

Что же обозначают векторы $\vec{a}_t$ и $\vec{a}_n$? Так как $\vec{a}_t$ направлен по касательной, он указывает на то, как быстро изменяется скорость по модулю.

Вектор $\vec{a}_n$ направлен по нормали к скорости. Поэтому он выражает быстроту изменения скорости по направлению. Итак, для полного ускорения можно записать:

$$\vec{a} = \frac{v^2}{R}\vec{n} + \frac{dv}{dt}\vec{\tau} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau. \qquad (1.28)$$

Модуль вектора полного ускорения находится по соотношению

$$a = \sqrt{\left(\frac{v^2}{R}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2} = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}. \qquad (1.29)$$

4. ПРИМЕРЫ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ДВИЖЕНИЙ

1. Движение тела, брошенного горизонтально. Рассматривая этот случай движения, будем пренебрегать сопротивлением воздуха.

Пусть тело брошено горизонтально со скоростью $\vec{v}_0$. Во всех точках траектории полное ускорение равно $\vec{g}$ и направлено вертикально вниз (рис. 1.16). При криволинейном движении это ускорение является векторной суммой нормального $\vec{a}_n$ и тангенциального $\vec{a}_t$ ускорений:

$$\vec{g} = \vec{a}_t + \vec{a}_n.$$

Зная модуль нормального ускорения, можно вычислить и радиус кривизны в данной точке траектории:

$$R = \frac{v^2}{a_n},$$

где $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$, $a_n = g\cos\varphi$ (где φ — угол между векторами $\vec{g}$ и $\vec{a}_n$). Наименьший радиус кривизны имеет траектория в начальной точке:

$$R = \frac{v^2}{g}.$$

Радиус кривизны увеличивается по мере продвижения точки по траектории. Движение точки по траектории является ускоренным. Но ускорение a_t непостоянно:

$$a_t = g \sin \varphi,$$

так как в процессе движения тела угол φ возрастает.

Закон движения точки по траектории, выраженный через дуговую координату s, в данном случае довольно сложен. Проще представлять это движение в координатной форме.

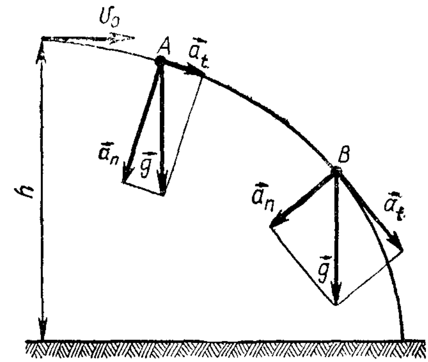


Рис. 1.16

2. Движение планет. Интересно отметить, что задолго до возникновения динамики, используя лишь одни кинематические данные о движении планет по небосводу и идею Коперника, Иоганну Кеплеру[1] удалось установить, что все планеты солнечной системы движутся по эллиптическим орбитам, в одном из фокусов которых находится Солнце. Более того, он смог установить и законы движения планет по этим орбитам. Результаты своих исследований Кеплер сформулировал в виде трех законов, носящих теперь его имя:

1) каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце;

2) радиус-вектор, проведенный от Солнца к планете, в равные промежутки времени описывает равные площади;

3) квадраты времени обращения (периодов) двух планет относятся как кубы больших полуосей эллипсов, по которым планеты движутся.

Эти законы описывают движение планет чисто кинематически, т. е. безотносительно к причинам, обусловливающим движение.

Из закона площадей вытекает неравномерность движения планет по траектории. Скорость планеты в перигелии (ближняя к Солнцу точка) наибольшая, а в афелии (самая дальняя точка) — наименьшая. На рисунке 1.17 это видно из формы заштрихованных площадей, «ометаемых» радиус-вектором за равные промежутки времени около перигелия *П* и афелия *А* (см. рис. 1.17). Важнейшим следствием законов Кеплера

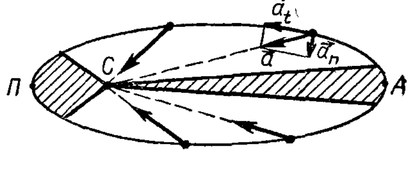


Рис. 1.17

[1] Иоганн Кеплер (1571—1630) — австрийский астроном.

является то, что общее ускорение ($\vec{a}$) планеты во все моменты времени направлено к Солнцу, а модуль его обратно пропорционален квадрату расстояния планеты от Солнца (движение планеты является центральным). Ускорение, направленное к Солнцу (его называют центральным), имеет две составляющие: тангенциальную $\vec{a}_t$, изменяющую модуль скорости по орбите, и нормальную $\vec{a}_n$, изменяющую направление скорости.

Движение спутников планет (в том числе и искусственных) также подчиняется законам Кеплера.

Вопросы для самопроверки

1. В чем состоит естественный способ описания криволинейного движения точки? Сколько требуется для этого координат?

2. Что называют радиусом кривизны траектории? Почему малый участок траектории можно приближенно считать дугой некоторой окружности и что это за окружность?

3. В каких случаях путь, пройденный точкой по криволинейной траектории, будет равен абсолютному значению разности координат конечного и начального положения точки? Почему путь, пройденный за малый промежуток времени, можно всегда представить через разность координат независимо от характера движения точки?

4. Что называют средней скоростью криволинейного движения?

5. Что называют модулем мгновенной скорости? Что он характеризует? Может ли криволинейное движение быть равномерным?

6. Что называют алгебраическим значением мгновенной скорости? Чем эта величина отличается от модуля мгновенной скорости? Как она вычисляется? Что означает отрицательный знак мгновенной скорости? Зависит ли знак мгновенной скорости от способа отсчета угловой координаты?

7. Почему в общем случае надо говорить, что скорость равна первой производной по времени от дуговой координаты, а не так: «скорость равна первой производной по времени от пути». При каком движении и каких начальных условиях эти определения совпадают?

8. Что называют перемещением точки? При каких условиях вектор перемещения совпадает с участком криволинейной траектории? Поясните, почему при малых перемещениях длина вектора перемещения равна длине соответствующего участка траектории?

9. Что называют вектором средней скорости? Каково направление этого вектора? Как оно изменяется при уменьшении промежутка времени?

10. Что называют вектором мгновенной скорости? Где расположено начало этого вектора и как вектор направлен в пространстве?

11. Докажите, что модуль мгновенной скорости равен модулю первой производной по времени от дуговой координаты, а алгебраическое значение скорости — просто первой производной от дуговой координаты.

12. Приращение вектора скорости за промежуток времени Δt равно $\Delta\vec{v} = \vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)$, а приращение модуля скорости за этот же промежуток времени равно $\Delta v = v(t + \Delta t) - v(t)$. Почему при криволинейном движении $|\Delta\vec{v}| \neq |\Delta v|$?

13. Что называют ускорением движущейся точки? Что характеризует эта величина? Что называется средним ускорением за промежуток Δt? Как направлен вектор среднего ускорения и будет ли это направление оставаться неизменным при уменьшении Δt?

14. Что называют вектором мгновенного ускорения точки и каков его физический смысл? Как направлен этот вектор? Почему его направление не совпадает при криволинейном движении с направлением скорости?

15. Вектор ускорения равен первой производной по времени от вектора скорости $\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}$. Почему нельзя писать так $|\vec{a}|=\left|\frac{dv}{dt}\right|$?

16. Что называют тангенциальным ускорением? Что оно характеризует при криволинейном движении? Как направлен вектор тангенциального ускорения и чему равен его модуль?

17. Что называют нормальным ускорением и что оно характеризует? Докажите, что вектор мгновенного нормального ускорения перпендикулярен скорости и направлен к центру кривизны траектории в данной точке. Покажите, что направление вектора $\vec{a}_n$ не зависит от направления движения точки по траектории. Чему равен модуль вектора $\vec{a}_n$?

18. Как модуль полного ускорения связан с модулями тангенциального и нормального ускорений? Может ли полное ускорение при криволинейном движении быть направленным по касательной? по нормали?

Занятие 3

ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ ПО ОКРУЖНОСТИ

1. УГЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ ПО ОКРУЖНОСТИ

Движение точки по окружности иногда удобнее описывать не линейными величинами s, $\vec{v}$, $\vec{a}$, а угловыми: углом поворота φ, угловой скоростью ω и угловым ускорением β.

Угловая скорость. Угловой скоростью равномерного движения точки по окружности, т. е. в случае, когда модуль скорости не изменяется, называют физическую величину, пропорциональную углу поворота радиус-вектора, соединяющего центр окружности с движущейся точкой, за единицу времени (рис. 1.18):

$$\omega=k\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Положим $k=1$ и определим из полученного соотношения

$$\omega=\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \qquad (1.30)$$

единицу измерения угловой скорости. *За единицу угловой скорости равномерного движения точки по окружности принимают угловую скорость такого движения, при котором радиус-вектор за единицу времени поворачивается на единичный угол (1 рад).*

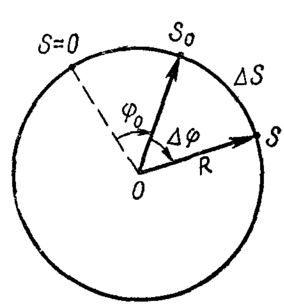


Рис. 1.18

Между линейной скоростью v и угловой скоростью ω существует связь. Так как длина пути равна произведению радиуса на угол, стягивающий дугу

$$\Delta s=R\cdot\Delta\varphi,$$

то линейная скорость движения точки выражается так:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{R \cdot \Delta \varphi}{\Delta t} = R\omega. \quad (1.31)$$

Линейная скорость равна произведению радиуса окружности на угловую скорость.

Угловую скорость ω можно выразить через число оборотов n, которое совершает движущаяся точка за 1 с. Так как одному обороту соответствует угол 2π радиана, то при n оборотах

$$\omega = 2\pi n \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}}\right).$$

Линейная скорость может быть выражена через число оборотов следующим образом:

$$v = R\omega = 2\pi R n.$$

Зная угловую скорость, нетрудно из (1.30) определить угол поворота радиус-вектора за промежуток времени Δt:

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0 = \omega\,\Delta t = \omega(t - t_0),$$

откуда, если $t_0 = 0$, получим:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t.$$

Это закон равномерного движения точки по окружности, выраженный в угловых величинах.

Понятие угловой скорости для равномерного движения точки по окружности нетрудно обобщить и на случай неравномерного движения. Если точка движется неравномерно и за промежуток времени Δt радиус-вектор $\vec{R}$ поворачивается на угол $\Delta\varphi = \varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)$, то отношение $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ выражает среднюю угловую скорость на участке $\Delta\varphi$. *Предел отношения угла поворота к промежутку времени Δt при неограниченном уменьшении Δt называют мгновенной угловой скоростью (или просто угловой скоростью) неравномерного движения точки по окружности:*

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (1.32)$$

Угловая скорость равна первой производной по времени от угловой координаты.

Соотношение (1.32) позволяет по ω определить закон движения точки через угловую координату:

$$d\varphi = \omega\, dt.$$

Интегрируя, получим:

$$\varphi = \int \omega\, dt + C,$$

или

$$\varphi = \varphi_0 + \int \omega\, dt,$$

где φ_0 — угловая координата (положение радиус-вектора) в момент $t = 0$.

Между линейной и угловой скоростью при неравномерном движении точки по окружности существует такая же связь, как и в случае равномерного движения:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(R\varphi)}{dt} = R\frac{d\varphi}{dt} = R\omega.$$

Но в этой формуле v и ω — мгновенные значения линейной и угловой скоростей.

Угловое ускорение. Неравномерность движения точки по окружности (изменение модуля скорости) характеризуется, как известно, тангенциальным ускорением a_t. Однако неравномерность движения можно также характеризовать угловой величиной, называемой *угловым ускорением* β.

Определим это понятие сначала на примере равнопеременного движения, когда $a_t = \mathrm{const}$ (для определенности будем полагать $a_t > 0$, т. е. движение будем считать равноускоренным). При равноускоренном движении вместе с линейной скоростью v изменяется и угловая скорость ω. Пусть за время Δt угловая скорость изменилась на величину $\Delta\omega = \omega(t + \Delta t) - \omega(t)$. Для количественного описания неравномерности движения может быть принята физическая величина, пропорциональная отношению $\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$, показывающему, как изменяется угловая скорость за единицу времени:

$$\beta = k\frac{\Delta\omega}{\Delta t}.$$

Это и есть угловое ускорение. Полагая $k = 1$, получим соотношение

$$\beta = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}, \qquad (1.33)$$

из которого нетрудно установить единицу измерения углового ускорения: *за единицу углового ускорения принимают угловое ускорение такого равнопеременного движения точки по окружности, при котором угловая скорость вращения радиус-вектора изменяется на единицу за единицу времени.*

Угловое ускорение, таким образом, имеет наименования: рад/с^2; рад/ч^2 и т. д.

Если движение точки является неравномерным, то отношение $\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ (которое теперь обозначает среднее угловое ускорение точки в промежутке времени Δt) будет при уменьшении Δt изменяться. *Предел, к которому стремится отношение* $\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ *при* *неограниченном уменьшении промежутка времени Δt, называют мгновенным угловым ускорением (или просто угловым ускорением) точки, движущейся по окружности:*

$$\beta = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\omega(t+\Delta t) - \omega(t)}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}. \tag{1.34}$$

Так как

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt},$$

то

$$\beta = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \tag{1.35}$$

Из (1.34) и (1.35) следует, что **угловое ускорение равно первой производной по времени от угловой скорости или второй производной от угловой координаты.** Заметим, что между тангенциальным ускорением (называемым *линейным ускорением*) и угловым ускорением существует взаимная связь. Подставляя в выражение $a_t = \frac{dv}{dt}$ значение $v = R\omega$, получаем:

$$a_t = R\beta. \tag{1.36}$$

Аналогия между формулами, описывающими движение через линейные и угловые величины. Итак, движение точки по окружности можно описать как через линейные, так и угловые характеристики движения, при этом, как видно из вышеизложенного, между линейными и угловыми характеристиками имеет место вполне определенное соответствие, которое иллюстрируется таблицей 1.1.

Так как существует соответствие между основными физическими величинами, характеризующими движение точки, должно существовать соответствие и между различными формулами, описывающими движение точки через линейные и угловые величины. В таблице 1.2 приведены примеры соответствия между различными формулами.

Таблица 1.1

Линейные характеристики	Угловые характеристики	Связь между линейными и угловыми характеристиками
Дуговая координата s	Угловая координата φ	$s = R\varphi$
Скорость $v = \frac{ds}{dt}$	Угловая скорость $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$	$v = R\omega$
Тангенциальное ускорение $a_t = \frac{dv}{dt}$	Угловое ускорение $\beta = \frac{d\omega}{dt}$	$a_t = R\beta$
Нормальное ускорение a_n		$a_n = \omega^2 R$

Таблица 1.2

Формулы связи между линейными величинами (для прямолинейного и криволинейного движений)	Формулы связи между угловыми величинами (для движения по окружности)
Равномерное движение	
Скорость $v = \text{const}$ Закон движения $s = s_0 + vt$	Угловая скорость $\omega = \text{const}$ Закон движения $\varphi = \varphi_0 + \omega t$
Равноускоренное движение	
Ускорение $a = \text{const}$ Закон скоростей $v = v_0 + a_t t$ Закон движения $s = s_0 + v_0 t + \frac{a_t t^2}{2}$ Связь скорости с дуговой координатой для прямолинейного движения $v_2^2 - v_1^2 = 2a(s_2 - s_1)$ Связь скорости с угловой координатой для криволинейного движения $v_2^2 - v_1^2 = 2a_t(s_2 - s_1)$	Угловое ускорение $\beta = \text{const}$ Закон скоростей $\omega = \omega_0 + \beta t$ Закон движения $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\beta t^2}{2}$ Связь угловой скорости с угловой координатой $\omega_2^2 - \omega_1^2 = 2\beta(\varphi_2 - \varphi_1)$

Из таблицы 1.2 следует, что любую формулу, выведенную для прямолинейного или криволинейного движения, можно переписать в угловых величинах для движения по окружности (и, как увидим ниже, для вращательного движения твердого тела).

2. УГЛОВАЯ СКОРОСТЬ И УСКОРЕНИЕ КАК ВЕКТОРНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Угловая скорость как векторная величина. Чтобы считать угловую скорость вектором, надо постулировать два правила, определяющие ее модуль и направление. За модуль вектора $\vec{\omega}$ естественно принять значение угловой скорости ω. Что касается направления вектора $\vec{\omega}$, то его целесообразно связать с осью вращения. Назовем осью вращения движущейся по окружности точки прямую, проходящую через центр окружности перпендикулярно к плоскости, в которой лежит эта окружность. Условимся вектор $\vec{\omega}$ располагать вдоль оси вращения и направлять его в сторону, определяемую правилом винта; если поворачивать головку винта с правой нарезкой в сторону движения точки по окружности, то поступательное движение винта укажет направление вектора $\vec{\omega}$. Начало вектора $\vec{\omega}$ удобно совместить с центром окружности (хотя ее можно поместить в любое место оси).

Если вдоль оси вращения отложить единичный вектор $\vec{\nu}$ в соответствии с упомянутым правилом винта, то вектор $\vec{\omega}$ можно будет записать так:

$$\vec{\omega} = \omega\vec{\nu}.$$

Представление угловой скорости в виде вектора имеет смысл лишь потому, что опыт подтвердил применимость к введенным таким образом векторам правила векторного сложения: векторная сумма двух векторов угловой скорости, направленных вдоль пересекающихся осей, определяет направление оси результирующего вращения и значение его угловой скорости.

Угловое ускорение как векторная величина. Рассмотрим вначале движение точки по окружности, при котором ось вращения не меняет своего направления. В этом случае вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ располагается вдоль одной и той же неподвижной прямой. Поскольку векторы $\vec{\omega}(t+\Delta t)$ и $\vec{\omega}(t)$ лежат на одной прямой, то модуль изменения за промежуток времени Δt вектора угловой скорости

$$\Delta\vec{\omega} = \vec{\omega}(t+\Delta t) - \vec{\omega}(t)$$

будет равен абсолютному значению разности величин угловых скоростей:

$$|\Delta\vec{\omega}| = |\omega(t+\Delta t) - \omega(t)| = |\Delta\omega|.$$

Ясно также, что в этом случае вектор $\Delta\vec{\omega}$ ориентирован по оси вращения. Следовательно, по оси вращения будет ориентирован и вектор $\frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}$, а значит, и вектор $\vec{\beta}$ мгновенного углового ускорения:

$$\vec{\beta} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \tag{1.37}$$

Учитывая, что при неподвижной оси $|\Delta\vec{\omega}| = |\Delta\omega|$, можно для модуля углового ускорения записать:

$$|\vec{\beta}| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\vec{\omega}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\omega|}{\Delta t} = \left|\frac{d\omega}{dt}\right|. \tag{1.38}$$

Угловую скорость $\vec{\omega}$ и угловое ускорение $\vec{\beta}$ можно представить так:

$$\vec{\omega} = \omega\vec{\nu} = \frac{d\varphi}{dt}\vec{\nu},$$

$$\vec{\beta} = \beta\vec{\nu} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}\vec{\nu},$$

где $\vec{\nu}$ — ранее введенный уже единичный вектор, отложенный вдоль оси вращения.

Связь между линейной и угловой скоростями и ускорением. Легко проверить (рис. 1.19), что между линейной скоростью $\vec{v}$ и угловой скоростью $\vec{\omega}$ существует связь следующего вида:

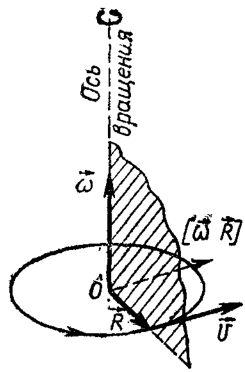


Рис. 1.19

$$\vec{v} = [\vec{\omega}\vec{R}], \tag{1.39}$$

где $\vec{R}$ — радиус-вектор, соединяющий центр окружности с движущейся точкой.

Найдем связь между линейным ускорением $\vec{a}$ и угловым ускорением $\vec{\beta}$. Подставляя в выражение

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

значение скорости из (1.39) и пользуясь правилом дифференцирования векторного произведения, получим:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}[\vec{\omega}\vec{R}] = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}\vec{R}\right] + \left[\vec{\omega}\frac{d\vec{R}}{dt}\right].$$

Учитывая, что $\frac{d\vec{\omega}}{dt}$ есть угловое ускорение $\vec{\beta}$, а $\frac{d\vec{R}}{dt}$ — линейная скорость $\vec{v}$, приходим к выражению:

$$\vec{a} = [\vec{\beta}\vec{R}] + [\vec{\omega}\vec{v}]. \tag{1.40}$$

Таблица 1.3

Линейные величины	Угловые величины	Связь между линейными и угловыми величинами
Скорость $\vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{\tau}$	Угловая скорость $\vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt}\vec{\nu}$	$\vec{v} = [\vec{\omega}\vec{R}]$
Тангенциальное ускорение $\vec{a}_t = \frac{dv}{dt}\vec{\tau}$	Угловое ускорение $\vec{\beta} = \frac{d\omega}{dt}\vec{\nu}$	$\vec{a}_t = [\vec{\beta}\vec{R}]$
Нормальное ускорение $\vec{a}_n = \frac{v^2}{R}\vec{n}$		$\vec{a}_n = [\vec{\omega}\vec{v}]$ $\vec{a}_n = \omega^2 R\vec{n}$

Это соотношение выражает известное нам разложение

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n,$$

где

$$\vec{a}_t = [\vec{\beta}\vec{R}], \quad \vec{a}_n = [\vec{\omega}\vec{v}], \tag{1.41}$$

Таблица 1.3 иллюстрирует соответствие линейных и угловых векторных характеристик движения точки.

3. СКОРОСТЬ, УСКОРЕНИЕ И ТРАЕКТОРИЯ ПРИ ВЕКТОРНОМ И КООРДИНАТНОМ СПОСОБАХ ОПИСАНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Векторный способ описания движения. Сначала выясним, как выражается скорость точки при векторном способе описания движения. Рассмотрим положение движущейся точки для двух моментов времени t и $t + \Delta t$. За время Δt точка переместится по траектории из положения A в положение B. Перемещение это характеризуется вектором $\Delta\vec{r}$, направленным от A к B. Отношение $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ в пределе при $\Delta t \to 0$ есть скорость точки, направленная по касательной к траектории (годографу радиус-вектора) в точке A.

Из рисунка 1.20 видно, что вектор перемещения $\Delta\vec{r}$ равен разности радиусов векторов, определяющих положение точки в момент t и $t + \Delta t$:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t). \tag{1.42}$$

Подставляя это значение $\Delta\vec{r}$ в выражение (1.32), получим:

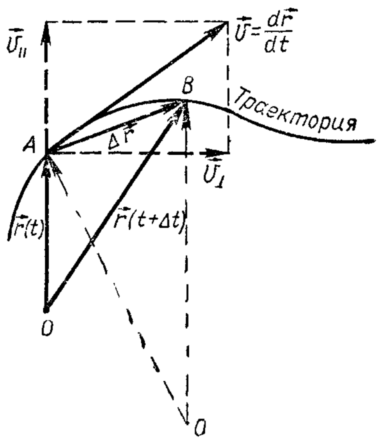


Рис. 1.20

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}. \tag{1.43}$$

Этот предел, если он существует, называют производной по t от радиус-вектора $\vec{r}(t)$ и обозначают символом $\frac{d\vec{r}}{dt}$. Таким образом, можно сказать, что при векторном способе описания **скорость движущейся точки равна первой производной по времени от радиус-вектора:**

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \tag{1.44}$$

Из рисунка 1.20 видно, что вектор $\Delta\vec{r}$ для фиксированных точек A и B не зависит от выбора центра O. Если перенести центр в точку O', то $\Delta\vec{r}$ не изменится; не изменится и предел отношения (1.43). Отсюда следует, что для описания движения центр O можно выбирать произвольно.

Перейдем к выражению для ускорения. По определению ускорения

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Учитывая, что $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, получим:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \tag{1.45}$$

Таким образом, если задана векторная функция $\vec{r}(t)$, указывающая положение точки в пространстве для каждого момента времени, то скорость и ускорение движущейся точки определяется соответственно как первая и вторая производные от этой функции по времени.

Координатный способ описания. Радиус-вектор, определяющий положение точки, можно представить в виде суммы трех векторов, направленных по осям неподвижной прямоугольной декартовой системы координат, начало которой совпадает с центром радиус-вектора (рис. 1.21):

$$\vec{r} = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}, \tag{1.46}$$

где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — проекции радиус-вектора $\vec{r}$ на соответствующие координатные оси. Дифференцируя это равенство по t, получим выражение для скорости движущейся точки

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \tag{1.47}$$

(векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ неподвижны), которое показывает, что проекции вектора скорости на координатные оси равны первым производным от соответствующих координат:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

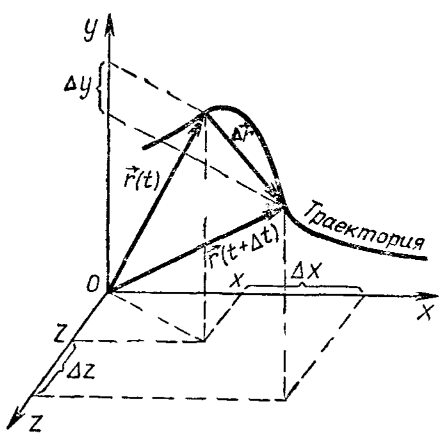


Рис. 1.21

При координатном способе описания движения точки задаются функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Их можно рассматривать как проекции вектора $\vec{r}$ на соответствующие оси. Производные от функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ являются проекциями скорости на координатные оси.

Что касается ускорения, то нетрудно видеть, что его проекции на оси координат равны первым производным от проекций вектора скорости или вторым производным от проекции радиус-вектора по времени:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2},$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}. \tag{1.48}$$

Координатный способ (в отличие от векторного) дает возможность довольно просто определять модули и направление векторов скорости и ускорения и находить траекторию движения.

Модуль скорости находится так:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

Направление скорости можно задать, указав направляющие косинусы, т. е. косинусы углов, образованных вектором с осями координат:

$$\cos(\widehat{\vec{v}\,\vec{i}}) = \frac{v_x}{|\vec{v}|} = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}.$$

Аналогично выражаются модуль ускорения

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

и направляющие косинусы ускорения

$$\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{i}}) = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$$

Если плоское движение задано в координатной форме, т. е. заданы функции

$$\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \end{aligned} \tag{1.49}$$

то уравнение траектории получается из системы уравнений (1.49) путем исключения параметра t. В результате получают соотношение, содержащее только x и y, которое и является уравнением плоской кривой.

Вопросы для самопроверки

1. Как выражаются полное ускорение $\vec{a}$ и его нормальная и тангенциальная составляющие при движении точки по окружности? При каком условии точка движется по окружности равномерно? Будет ли при таком движении вектор a_n постоянным?

2. Что называют угловой скоростью движения точки по окружности? В каких единицах измеряется угловая скорость? Дайте определение единицы угловой скорости.

3. Какова связь линейной скорости с угловой при равномерном движении точки по окружности?

4. Как записывается закон равномерного движения точки через угловые величины?

5. Что называют мгновенной угловой скоростью и каков физический смысл этой величины? Как связаны линейная и угловая скорости при переменном движении точки по окружности?

6. Что называют угловым ускорением равнопеременного движения по окружности? Дайте определение единицы измерения углового ускорения. Что называют мгновенным ускорением? Как угловое ускорение связано с угловой скоростью и углом поворота?

7. Какова связь линейного ускорения a_t с угловым ускорением β?

8. Как записать закон равнопеременного движения точки по окружности через угловые величины?

9. Задан закон движения естественным способом. Как переписать его через угловые величины?

10. Что понимают под угловой скоростью $\vec{\omega}$? Как направлен этот вектор и чему равен его модуль?

11. Что понимают под угловым ускорением? Как направлен этот вектор и чему равна его величина, если ось вращения неподвижна? если ось вращения поворачивается?

12. Напишите формулу связи между векторами $\vec{v}$, $\vec{\omega}$, $\vec{R}$.

13. Напишите формулу связи между векторами $\vec{a}_n$, $\vec{\omega}$, $\vec{v}$.

14. На вращающемся диске отмечена точка. Запишите закон движения этой точки и найдите все кинематические характеристики движения, если известно, что диск вращается равнозамедленно и в момент начала отсчета времени ($t = 0$) он имел скорость $\omega_1 = 1$ об/с, а через $\Delta t = 20$ с диск остановился.

15. Как описывается движение точки с помощью векторной функции $\vec{r}(t)$? Когда $|\Delta \vec{r}| \neq |\Delta r|$ и когда эти величины равны?

16. Каков физический смысл производной по времени от векторной функции $\vec{r} = \vec{r}(t)$? Как направлена производная вектора и чему равен ее модуль? Зависит ли производная функции $\vec{r}(t)$ по времени от выбора в пространстве центра O (см. рис. 1.20).

17. Как определяется ускорение при векторном способе описания движения? Как направлено ускорение относительно годографа функции $\vec{r} = \vec{r}(t)$ (траектории движения), если известно, что это ускорение направлено по касательной к годографу скорости? Покажите, что ускорение может быть представлено в виде суммы двух взаимно перпендикулярных векторов. Как направлены эти векторы и каковы их модули?

18. В чем состоит координатный способ описания движения? Каков физический смысл координатных функций?

19. Какова связь векторного и координатного способов описания?

20. Докажите, что первые производные по времени от координат равны проекциям скорости на координатные направления, а вторые производные — проекции ускорений.

Раздел II
ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

ВВЕДЕНИЕ

Как указывалось, динамика — часть механики, изучающая движение тел как результат их взаимодействия.

Основы динамики были заложены Ньютоном[1] в его книге «Математические начала натуральной философии», изданной в 1687 г. В этой книге Ньютон обобщил накопленный до него опыт по изучению движения и сформулировал три закона динамики, которые играют исключительно важную роль в физике. На этих законах основывается, как теперь принято говорить, ньютоновская механика, т. е. классическая механика малых скоростей (по отношению к скорости распространения света). Механику больших скоростей (сравнимых со скоростью света) называют релятивистской.

Чтобы сформулировать эти законы, Ньютону пришлось ввести два новых понятия — понятия *массы* и *силы* и уточнить уже известные в его время понятия инерции, пространства и времени. В процессе последующего развития физики понятия, введенные Ньютоном, видоизменялись и уточнялись. Особенно большим изменениям подверглись ньютоновские представления о пространстве и времени.

Справедливость всякого вновь открытого закона физики подтверждается тем, что все вытекающие из него следствия согласуются с данными опыта. Ньютоновская механика выдержала эти испытания.

Все следствия, вытекающие из законов Ньютона, хорошо согласуются с данными опыта.

Долгое время считали, что законы Ньютона полностью исчерпывают объективно существующую связь между механическими явлениями природы.

Однако в начале XX в. обнаружилось, что закоиы Ньютона не могут объяснить особенностей движения тел при больших

---

[1] Исаак Ньютон (1642—1726) — величайший английский физик и математик.

скоростях, сравнимых со скоростью света. А это означает, что законы Ньютона не являются абсолютными, т. е. справедливыми при всех обстоятельствах: для них существуют определенные «границы» применимости. И в этом нет ничего удивительного, так как каждое явление природы находится во взаимной связи с большим числом других явлений, которые обнаруживаются лишь в процессе длительного изучения с применением всех новых и более тонких средств исследования. По мере раскрытия новых связей открытые ранее законы, естественно, уточняются и видоизменяются. В этом состоит диалектика познания природы.

Занятие 4

НАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ЗАКОНАХ НЬЮТОНА

1. ПЕРВЫЙ ЗАКОН НЬЮТОНА

Если обратиться к опыту, то первое, что нам бросается в глаза, это то, что для поддержания прямолинейного равномерного движения тела необходимо его все время подталкивать или непрерывно «тянуть» (детская коляска, сани и т. д.), т. е. необходимо непрерывное воздействие со стороны других тел. Тело, выведенное из состояния покоя и предоставленное самому себе, как показывают наблюдения, рано или поздно останавливается. Этот факт до Галилея считался доказательством того, что для равномерного прямолинейного движения тела необходимо постоянное воздействие со стороны других тел. Но согласно первому закону Ньютона никакого воздействия не нужно.

Конечно, одними абстрактными рассуждениями к такому выводу прийти нельзя. Нужны опыты. И вот такие опыты были впервые поставлены Галилеем[1]. Серией блестящих опытов, многие из которых вошли в качестве демонстрационных в школьные и вузовские курсы физики, он показал, что тело, брошенное по горизонтальной поверхности, останавливается потому, что на него действует сама эта поверхность (трение), что из-за трения для поддержания равномерного движения тела необходимо постоянное воздействие на него других тел. Так что если трение исключить совсем, то тело будет двигаться равномерно и прямолинейно, причем никакое воздействие со стороны других тел для этого не требуется. Таким образом, уже Галилей пришел к открытию важного закона природы — закона инерции. И сделал он это, анализируя данные опыта. При этом он проявил гениальную способность к абстрагированию. В самом деле, ведь Галилей не мог на опыте полностью исключить трение. Однако, подметив закономерность в движении тела при уменьшении тре-

[1] Галилео Галилей (1564—1642) — выдающийся итальянский ученый, основатель экспериментальной физики.

ния, он смог указать тот предельный случай в движении, который должен наблюдаться в отсутствие трения.

Ньютон четко сформулировал закон инерции и включил его в систему трех основных законов динамики.

Вот формулировка этого закона, данная Ньютоном: **всякое тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, пока и поскольку воздействие со стороны других тел не понуждает его изменить это состояние**[1].

Явление сохранения телами состояния покоя или равномерного прямолинейного движения называют *инерцией.* Поэтому первый закон Ньютона называют также *законом инерции.*

Постараемся поглубже вникнуть в содержание первого закона Ньютона.

1. Всякое движение имеет смысл, если указана система отсчета. В формулировке первого закона Ньютона нет указаний на выбор системы отсчета, но само собой разумеется, что утверждение относится к движению (или покою) в определенной системе отсчета.

Системы отсчета, в которых тело, не подверженное действию других тел, движется равномерно прямолинейно (или покоится), принято называть инерциальными системами. Системы отсчета, в которых тело, не подверженное действию других тел, движется неравномерно или непрямолинейно, называют неинерциальными (в существовании таких систем мы убедимся позднее).

Таким образом, первый закон Ньютона следует прежде всего рассматривать как определение особого вида систем отсчета — инерциальных систем. Сам Ньютон в качестве инерциальной системы принимал систему отсчета, начало которой совпадало с центром Солнца и оси координат направлены на далекие (а потому неподвижные) звезды. Эту систему он называл «абсолютной». Смысл такого названия будет ясен позднее.

Вопрос о том, существуют ли инерциальные системы отсчета, мы рассмотрим подробнее в другом разделе. Здесь же мы отметим, что система отсчета, связанная с Землей (а именно в этой системе в основном производились наблюдения), только с известным приближением может считаться инерциальной, и только для тех опытов, для которых эффект вращения Земли оказывается незначительным (малы скорости движения тел).

2. Исключить полностью трение невозможно. Невозможно также исключить действие поля тяготения, электрических и магнитных полей. Другими словами, невозможно поставить изучаемое тело в такие условия, чтобы на него не оказывали воздействия другие тела. А это означает, что строго равномерных и

---

[1] Строго говоря, первый закон Ньютона (как, впрочем, и остальные законы) справедлив лишь для материальных точек, так как тела могут не сохранять своего состояния покоя, находясь, например, во врещении, материальная же точка вращаться не может. Очевидно, закон выполняется для реальных тел только в случае их поступательного движения.

прямолинейных движений, длящихся сколь угодно долго, в природе не существует. Даже свет не является исключением: вблизи небесных тел световой луч искривляется. Таким образом, прямолинейное равномерное движение есть абстракция. Но как она полезна! Благодаря ей, из того опытного факта, что все наблюдаемые нами движения не являются равномерными и прямолинейными, мы приходим к очень важному выводу, что в природе не существует изолированных тел, что все тела так или иначе связаны между собой, воздействуют друг на друга.

3. Согласно первому закону Ньютона тело в инерциальной системе отсчета не может само по себе изменить своего состояния покоя или равномерного прямолинейного движения, это состояние оно изменяет только под действием других реальных тел. Следовательно, первый закон Ньютона отражает в рамках механики инерциальных систем причинную связь явлений. Опыт показывает, что ни одно явление природы не может возникнуть само по себе: оно появляется лишь как следствие другого явления. Признание объективной причиной связи в природе является одним из основных положений диалектического материализма — основы нашего мировоззрения.

4. В первом законе Ньютона как равноправные выступают покой и равномерное прямолинейное движение. Этим подтверждается, с одной стороны, относительный характер покоя и движения и, с другой стороны, косвенно утверждается, что все системы отсчета, относительно которых тело покоится или движется равномерно прямолинейно, являются инерциальными. Отсюда следует, что, если найдена одна инерциальная система отсчета (относительно которой тело, например, покоится), любая другая система, движущаяся равномерно и прямолинейно относительно первой, также будет инерциальной.

5. Наконец, первый закон Ньютона, называемый законом инерции, раскрывает одно фундаментальное свойство тел (и, как увидим позже, вообще всех материальных объектов, будь то тело, частица или поле), состоящее в способности тел сохранять покой или равномерное прямолинейное движение относительно некоторой (вообще говоря, произвольной) инерциальной системы отсчета. Только благодаря этому свойству мы можем понять поведение тела, особенности его движения в других, неинерциальных системах отсчета. Например, благодаря этому свойству становится понятным, почему пассажир при резком торможении вагона отклоняется относительно стен вагона вперед по движению, а при резком ускорении — назад, против движения. Действительно, когда вагон движется равномерно относительно земли (инерциальная система отсчета), равномерно относительно земли движется и пассажир. При торможении вагон изменяет состояние равномерного движения, а пассажир продолжает сохранять это движение относительно земли; в результате мы наблюдаем смещение пассажира относительно стен вагона

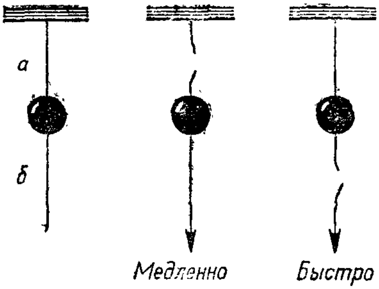


Рис. 2.1

(т. е. относительно неинерциальной системы отсчета), и это смещение произошло в сторону движения вагона. Аналогичная картина получается и при ускорении вагона: пассажир сохраняет относительно земли (инерциальная система отсчета) состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, а вагон ускоряет свое движение относительно земли; в результате пассажир отклоняется назад.

Инертность тел проявляется при попытке изменить их состояние равномерного прямолинейного движения или покоя, и проявляется тем значительнее, чем быстрее изменяют это состояние. Вот примеры.

На рисунке 2.1 показан тяжелый шар, висящий на тонкой нити. Если медленно потянуть за нить, прикрепленную к шару снизу, то верхняя нить оборвется. В этом случае шар, находящийся в покое, под действием нижней нити изменяет это свое состояние, смещаясь вниз. В результате верхняя нить растягивается и обрывается. Если же за нижнюю нить дернуть очень резко (и сильно!), то оборвется нижняя нить. А это значит, что тело при кратковременном воздействии смещается очень мало и верхняя нить не разрывается. Это и подчеркивает свойство тела сохранять состояние покоя.

Некогда в цирке показывали такой трюк: ставили тяжелую наковальню на грудь человека. Другой человек со всего размаха бил молотом по наковальне. Казалось бы, от такого сильного удара артист неминуемо должен пострадать. Однако удар молота никаких повреждений ему не причинял. Дело все в том, что удар происходил очень быстро и за короткое время наковальня, обладая инертностью, не успевала сместиться и, следовательно, не оказывала дополнительного воздействия на артиста. Разумеется, чем тяжелее наковальня, тем безопаснее трюк. Вся трудность состояла лишь в удержании на груди тяжелой наковальни.

Приведенные два примера иллюстрируют инертность покоящихся тел. А вот примеры, в которых проявляется инертность движущихся тел.

Свинцовая пуля, ударяясь о твердую стенку, сплющивается. Объясняется это тем, что все части пули, кроме той, что пришла в соприкосновение, продолжают движение, преодолевая молекулярное сцепление. Это приводит к относительному перемещению отдельных частей пули, т. е. к деформации (сплющиванию). Инерцию движущегося тела используют, например, в артиллерии. Чтобы снаряд не «рикошетил», носовая часть его изготовляется из относительно мягкого металла. При ударе о броню носовая часть расплющивается и как бы «прилипает». Внутренняя часть снаряда из твердого металла с заостренным концом продолжает движение по инерции и «проходит» через броню.

2. ВТОРОЙ ЗАКОН НЬЮТОНА. СИЛА И МАССА

В механике Ньютона движение и взаимодействие тел рассматриваются в инерциальной системе отсчета. В этой системе формулируется и второй закон Ньютона, устанавливающий связь между силой и ускорением тела. Однако, прежде чем сформулировать закон, необходимо ввести два новых понятия: понятия *силы* и *массы*.

Сила. Согласно первому закону Ньютона тело изменяет свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, т. е. приобретает ускорение, только в том случае, если на него действует другое тело. Ускорение, таким образом, является результатом воздействия одного тела на другое.

Однако практика показывает, что ускорение не является единственным результатом воздействия. В некоторых случаях единственным результатом внешнего воздействия является деформация тела.

Но можно ли количественно оценить воздействие одного тела на другое? Можно ли сравнивать количественно два различных по природе воздействия, например воздействие при соприкосновении тел и воздействие на расстоянии?

Это можно сделать с помощью понятия силы, являющейся количественной мерой воздействия одного тела на другое. Понятие силы позволяет абстрагироваться от самого воздействующего тела и природы этого воздействия. Например, фразу «Сани через веревку испытывают воздействие величиной в пять единиц со стороны человека» можно заменить такой: «Сани испытывают действие силы в пять единиц». При этом оказалось неважным, что это воздействие исходило от человека и осуществлялось через веревку. Но действие такой же силы сани могут испытывать, находясь на наклонной плоскости или в результате работы какого-либо двигателя. Во всех этих случаях результат воздействия может быть одним и тем же.

Величина, характеризующая воздействие одного тела на другое — *сила* — может быть оценена по результату этого воздействия: по деформации или ускорению. Следовательно, возможны два пути измерения силы: а) по деформации эталонного тела (например, пружины); б) по ускорению эталонного тела.

Предположим, что мы пользуемся эталонной пружиной. Примем за единицу силы такую силу, которая приводит к растяжению пружины, скажем, на 1 см. Опыт покажет, что растяжение пружины на 2 см называется силой, которая в два раза больше прежней. Используя это свойство пружины и размещая у ее подвижного конца шкалу, можно по растяжению пружины (в пределах закона Гука) определить значение действующей силы в выбранных единицах.

Для измерения силы по ускорению эталонного тела нужно знать связь между ускорением и силой. Но дело как раз в том, что связь ускорения с действующей силой выражается вторым законом Ньютона, который нам пока неизвестен. Поэтому вопрос об измерении силы по ускорению эталонного тела мы рассмотрим позже.

Масса. Опыт показывает, что на действие одинаковых сил одни тела отзываются малым ускорением, а другие — большим. Про тела, отзывающиеся малым ускорением, говорят, что они обладают большой инертностью. Если же тело отзывается на действие силы бо́льшим ускорением, говорят, что инертность этого тела мала.

Инертность, таким образом, есть некоторое присущее каждому телу свойство, которое проявляется в его способности отзываться бо́льшим или меньшим ускорением на действие данной силы. Для количественной характеристики инертности служит физическая величина, называемая массой тела и обозначаемая буквой m. Масса есть мера инертности тел. Масса тела не зависит от того, где это тело находится: на Земле, на Луне или в открытом космическом пространстве.

Как измерить массу тела? Для этого нужно установить единицу измерения и указать метод сравнения неизвестной массы с массой, принятой за единицу. Обычно за единицу массы принимают массу некоторого эталонного тела. В системе СИ массу эталона называют килограммом (сокращенно — кг).

Так как масса проявляется при изменении состояния покоя или равномерного прямолинейного движения тела, то сравнивать массы нужно на опыте путем измерения ускорений.

Но для этого нужно знать, как ускорение связано с массой тела и с действующей на него силой. Эта связь нам пока неизвестна. Как быть? Выход один: сравнивать массы косвенным путем. Пусть мы имеем эталонное тело, масса которого принята за единицу. Соединенные вместе два одинаковых эталонных тела образуют новое тело. Спрашивается, какова масса этого тела? Чтобы ответить на этот вопрос, нужно знать, по какому закону складываются массы. Мы этого пока не знаем. Но предположим, что масса сложного тела равна сумме масс его отдельных частей. Предполагая так, мы принимаем, что масса — величина аддитивная.

Правильность такого предположения подтверждается опытом. Об этом будет рассказано ниже при рассмотрении второго закона Ньютона.

Итак, в силу принятого нами свойства аддитивности масса системы из n эталонных тел равна n единицам массы. Если эталонное тело разделить на n равных частей, то масса каждой части будет равна $\frac{1}{n}$ массы эталона. Свойство аддитивности позволяет нам создать набор тел с различными массами: кратными массе, принятой за единицу, или составляющими от нее определенные доли. Теперь обратимся к опыту. Положим на разные чашки рычажных весов по одному телу одинаковой массы (например, по эталонному телу). Мы отметим, что весы будут в равновесии (причиной этого является равенство действующих на тела сил тяжести). Значит, и обратно: если весы находятся в равновесии, то массы тел на чашках весов одинаковые. Имея набор тел с различными массами, можно измерить массу любого тела. Конечно, такое измерение можно произвести в любом месте на Земле или на другой планете; результат будет одинаковым. Но его нельзя произвести в космическом корабле, где имеется состояние невесомости. В этом случае измерить массу можно только через ускорение, которое получает тело под действием известной силы.

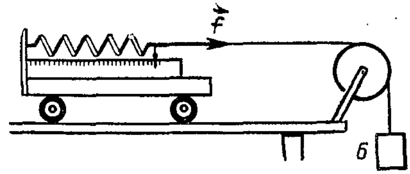


Рис. 2.2

Второй закон Ньютона. Зная, как измеряется масса тела на рычажных весах и сила по растяжению эталонной пружины, можно приступить к рассмотрению опытов, раскрывающих связь между ускорением тела и действующей на него силой.

На рисунке 2.2 показана тележка, которая под действием груза *Б* может двигаться по столу с очень малым трением. Сила, действующая на тележку, измеряется по растяжению пружины. Меняя груз *Б* и измеряя ускорение тележки постоянной массы, найдем, что оно пропорционально приложенной силе:

$$a \sim f.$$

Помещая на тележку различные грузы и измеряя ускорение тележки при действии одной и той же силы, убеждаемся в том, что ускорение обратно пропорционально массе тележки:

$$a \sim \frac{1}{m}.$$

Объединив оба результата, можно записать следующее соотношение:

$$a \sim \frac{f}{m}. \tag{2.1}$$

Ускорение, приобретаемое телом, прямо пропорционально приложенной силе и обратно пропорционально массе тела.

В этом и состоит второй закон Ньютона. Чтобы пропорциональную зависимость (2.1) записать в виде равенства, следует ввести коэффициент пропорциональности k, **который зависит от** выбора единиц измерения величин a, f, m:

$$a = k\frac{f}{m}. \tag{2.2}$$

Если единицы измерения всех величин, входящих в формулу (2.2), выбраны независимо друг относительно друга, то коэффициент k может оказаться размерной величиной, его значение может отличаться от единицы.

Но удобнее коэффициент k принять безразмерным и равным единице. Тогда единицу измерения одной из трех величин a, f и m уже нельзя выбирать произвольно, а нужно установить из связи

$$a = \frac{f}{m}. \tag{2.3}$$

Очевидно, что из соотношения (2.3) нет смысла определять единицу измерения ускорения (тогда бы пришлось пересмотреть всю кинематику). Значит, остается одно из двух: либо определить из (2.3) единицу измерения массы, а единицу силы установить независимым способом (например, через деформацию эталонной пружины), либо из (2.3) определить единицу измерения силы, а единицу массы установить независимо (например, как масса эталонного тела). В соответствии с этими двумя подходами появляются два варианта систем единиц измерения всех механических величин. В настоящее время отдается предпочтение второму варианту (системы СГС, СИ). Произвольно устанавливается единица массы (грамм, килограмм); единица же измерения силы определяется из второго закона Ньютона. Из (2.3) следует, что сила будет равна единице, если $a = 1$ ед. и $m = 1$ ед. Тогда за единицу силы принимается такая сила, которая массе в одну единицу сообщает ускорение в одну единицу. Единица силы в системе СГС, называемая диной (дин), определяется так: 1 дин — *это сила, которая массе в* 1 г *сообщает ускорение в* 1 см/с^2. Определение единицы силы в системе СИ будет такое: *за единицу силы в системе СИ* — ньютон (Н) — *принимается такая сила, которая массе в* 1 кг *сообщает ускорение в* 1 м/с^2.

Формулу (2.3) можно записать так:

$$ma = f. \tag{2.4}$$

При этом второй закон Ньютона формулируется следующим образом: **произведение массы тела на его ускорение равно приложенной силе.**

Рассмотрим теперь некоторые вопросы, связанные со вторым законом Ньютона.

1. Второй закон Ньютона $ma = f$ относится, строго говоря, к материальной точке, а не к телу вообще, ибо тело может вра-

щаться и, следовательно, различные точки его будут иметь разные ускорения.

2. Опыт показывает, что постоянная сила вызывает постоянное ускорение. Если сила с течением времени изменяется, то закон $ma = f$ устанавливает связь между силой и ускорением для данного момента времени. В этом случае величины a и f имеют смысл мгновенных значений.

3. Известно, что ускорение — величина векторная. Поэтому сила также должна быть векторной величиной[1].

Учитывая это, второй закон Ньютона следует записывать в векторной форме:

$$m\vec{a} = \vec{f}. \qquad (2.5)$$

4. Выясним, каков будет результат одновременного действия на материальную точку массой m нескольких независимых между собой сил $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_n$. Примем, что в этом случае справедлив принцип независимого действия сил (принцип суперпозиции), согласно которому модуль и направление ускорения, вызванного действием одной какой-либо силы, не зависит от действия других сил. Справедливость этого принципа доказывается тем, что все вытекающие из него следствия согласуются с опытом.

Согласно этому принципу при одновременном действии n сил материальная точка получит n независимых ускорений

$$\vec{a}_1 = \frac{\vec{f}_1}{m}, \quad \vec{a}_2 = \frac{\vec{f}_2}{m}, \ldots .$$

Так как ускорения при независимых движениях складываются геометрически, то полное ускорение точки равно

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n = \frac{1}{m}(\vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \ldots \vec{f}_n). \qquad (2.6)$$

Сопоставляя это выражение с законом Ньютона $\vec{a} = \frac{\vec{f}}{m}$, мы видим, что роль силы $\vec{f}$ в выражении (2.6) выполняет векторная сумма сил $\vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \ldots + \vec{f}_n$.

Итак, если на материальную точку действует несколько сил $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots$, то она будет иметь такое ускорение $\vec{a}$, которое получила бы при действии только одной силы $\vec{f}$, равной по модулю и направлению векторной сумме всех действующих сил:

$$\vec{f} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \ldots + \vec{f}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{f}_i.$$

---

[1] Но одного этого соображения еще не достаточно, чтобы отнести силу к категории векторов. Необходимо показать, что сложение сил происходит по правилам сложения векторов (см. ниже).

Силу $\vec{f}$, которая вызывает такое же действие, что и система сил $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_n$, называют равнодействующей этих сил.

Таким образом, принцип суперпозиции приводит к ряду следствий: а) одновременное действие на материальную точку нескольких сил эквивалентно действию одной силы, называемой равнодействующей; б) равнодействующая равна геометрической сумме действующих сил (это и доказывает, что сила есть вектор); сложение действующих сил производится по правилу параллелограмма [1].

Эти следствия можно проверить на опыте, измеряя ускорение тела (материальной точки), когда на него действуют, например, две силы $\vec{f}_1$ и $\vec{f}_2$ и когда на него действует только одна сила $\vec{f}=\vec{f}_1+\vec{f}_2$. Опыт показывает, что ускорение в обоих случаях будет одинаковым, что подтверждает справедливость принципа суперпозиции.

Итак, если на материальную точку массой m действует несколько сил $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_n$, которые сообщают точке ускорения $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$, то в соответствии со вторым законом Ньютона

$$\begin{aligned} m\vec{a}_1 &= \vec{f}_1, \\ m\vec{a}_2 &= \vec{f}_2, \\ &\cdots\cdots \\ m\vec{a}_n &= \vec{f}_n. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Вследствие принципа суперпозиции это система из n независимых уравнений, которая описывает движение материальной точки под действием приложенных сил. Определив из этих уравнений ускорения $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$, мы найдем полное ускорение, приобретаемое материальной точкой в результате одновременного действия всех сил:

$$\vec{a}=\vec{a}_1+\vec{a}_2+\ldots+\vec{a}_n.$$

Но вследствие того же принципа суперпозиций можно систему независимых уравнений (2.7) заменить одним уравнением

$$m\vec{a}=\vec{f}=\sum_{i-1}^{n}\vec{f}_i, \tag{2.8}$$

в котором $\vec{f}$ обозначает сумму всех действующих сил, а $\vec{a}$ — полное ускорение материальной точки.

---

[1] Это правило, как и сам принцип независимого действия сил, не распространяется на тела, скорость которых соизмерима со скоростью света.

Выражение (2.8) является, таким образом, обобщением второго закона Ньютона для случая, когда на тело (материальную точку) действует не одна, а несколько сил.

5. Согласно принципу суперпозиции уравнение

$$m\vec{a} = \vec{f},$$

описывающее движение материальной точки под действием силы $\vec{f}$, можно представить как систему из n независимых уравнений типа (2.7), в которой $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_n$ — суть составляющие силы $(\vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \ldots + \vec{f}_n = \vec{f})$, а $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ — ускорения, сообщаемые точке каждой из составляющих сил в отдельности.

В частности, если составляющие силы выбрать по трем направлениям, совпадающим с координатными осями декартовой системы, то вместо уравнения $m\vec{a} = \vec{f}$ можно записать три независимых векторных уравнения:

$$m\vec{a}_x = \vec{f}_x, \quad m\vec{a}_y = \vec{f}_y, \quad m\vec{a}_z = \vec{f}_z, \qquad (2.9)$$

или (в проекциях на оси координат):

$$ma_x = f_x, \; ma_y = f_y, \; ma_z = f_z. \qquad (2.10)$$

Итак, благодаря принципу независимого действия сил оказалось возможным от векторного уравнения $m\vec{a} = \vec{f}$ перейти к трем скалярным уравнениям (2.10), каждое из которых описывает движение точки вдоль одной координатной оси. Это важное следствие широко используется при решении конкретных задач. Очевидно, что если заданы три координатных уравнения (2.10), их по желанию можно объединить в одно векторное (2.5). Этим приемом часто пользуются при теоретическом исследовании движений.

5. Из второго закона Ньютона следует, в частности, что если действующая сила равна нулю ($\vec{f} = 0$), то и ускорение равно нулю ($\vec{a} = 0$). Это означает, что в отсутствие сил тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения. В связи с этим может возникнуть вопрос, не является ли первый закон Ньютона простым следствием второго закона? Если он является следствием, то зачем его включают в систему основных законов динамики?

Нет, первый закон Ньютона имеет глубокое самостоятельное значение. Из него следует фундаментальное свойство всех реальных тел — инертность, тогда как второй закон Ньютона выражает количественную связь между силой, ускорением и массой, являющейся мерой инертности. Первый закон Ньютона является также определением системы отсчета, в которой ускорение тела появляется лишь в результате воздействия на него других тел (инерциальная система отсчета).

To обстоятельство, что следствие второго закона Ньютона совпадает с одним из положений, содержащимся в первом законе Ньютона, указывает лишь на непротиворечивость этих двух законов.

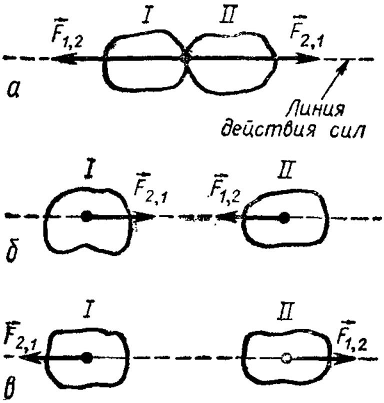


Рис. 2.3

3. ТРЕТИЙ ЗАКОН НЬЮТОНА

Ньютон сформулировал третий закон динамики следующим образом: **действию всегда соответствует равное и противоположное противодействие.** Это значит, что силы, с которыми два тела действуют друг на друга, всегда равны по модулям и направлены в противоположные стороны. На рисунке 2.3 показаны силы при контактном взаимодействии (*а*) и взаимодействии на расстоянии (*б*, *в*).

Силу, приложенную к одному телу, называют действием, приложенную ко второму — противодействием или реакцией. Какую из них называть действием и какую реакцией, это чисто условно и определяется удобством решения той или иной задачи.

Позже мы увидим, что при больших скоростях взаимодействующих тел или при очень кратковременном взаимодействии третий закон Ньютона может и не выполняться. Таким образом, этот закон, как и другие, имеет ограниченную область применения. Но в повседневном опыте, когда скорости не велики, а время взаимодействия значительно, третий закон Ньютона справедлив.

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте первый закон Ньютона. Какую информацию содержит этот закон?

2. Какие системы отсчета называют инерциальными и какие неинерциальными? К какой системе отсчета относятся законы Ньютона?

3. Почему следует считать, что первый закон Ньютона указывает на причинную связь между механическими явлениями? Что является причиной изменения состояния покоя или равномерного прямолинейного движения тела в инерциальной системе?

4. Какой физической величиной характеризуется изменение состояния покоя или равномерного прямолинейного движения?

5. Что такое инертность тела? Есть ли такие материальные объекты, которые не обладали бы инертностью? Приведите примеры, иллюстрирующие проявление инертности.

6. Какая физическая величина служит мерой инертности тела? Как устанавливается единица измерения этой величины? В чем состоят прямой и косвенный способы измерения массы тела? Какие величины называют аддитивными? Какими опытами подтверждается аддитивность массы?

7. Почему на практике тело, предоставленное самому себе, обычно не сохраняет сколь угодно долго свою скорость?

8. Опыт показывает, что обычно тела движутся в инерциальной системе замедленно или по криволинейным траекториям (замкнутым или незамкнутым). О чем это говорит? Почему не наблюдается прямолинейных равномерных движений, длящихся сколь угодно долго?

9. Приведите примеры таких инерциальных систем отсчета, в которых действуют гравитационные силы. При каком условии тело в таких системах отсчета будет покоиться или двигаться равномерно и прямолинейно? Какова характерная особенность внутреннего состояния покоящихся тел в таких системах отсчета?

10. Какой смысл имеет понятие силы в ньютоновской механике? Какое бы вы дали определение силе в неинерциальной системе отсчета?

11. Как устанавливается единица измерения силы? Какими способами можно измерить силу?

12. Сформулируйте второй закон Ньютона. Поясните, почему он относится к материальной точке, а не к телу вообще. От чего зависит значение коэффициента пропорциональности k в формуле $a = k\frac{f}{m}$? Почему удобно принять коэффициент k, равным 1? Как это достигается?

13. Как устанавливаются единицы измерения силы и массы в различных системах единиц?

14. Почему второму закону Ньютона следует придавать векторный смысл: $m\vec{a} = \vec{f}$? Откуда следует, что сила есть векторная величина?

15. В чем состоит принцип независимого действия сил (принцип суперпозиции)? Какие следствия вытекают из этого принципа и как они проверяются на опыте?

16. Покажите, опираясь на принцип суперпозиции, что если на тело действует несколько сил, то закон Ньютона можно записать в форме $m\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{f}_i$.

17. Покажите, опираясь на принцип суперпозиции, что в декартовых координатах векторному уравнению $m\vec{a} = \vec{f}$ эквивалентна система из трех независимых скалярных уравнений

$$ma_x = f_x, \quad ma_y = f_y, \quad ma_z = f_z$$

и, наоборот, трем приведенным здесь скалярным уравнениям эквивалентно одно векторное уравнение $m\vec{a} = \vec{f}$.

18. Сформулируйте третий закон Ньютона. Приведите примеры проявления этого закона в окружающей действительности. Как надо понимать равенство $\vec{f}_{1,2} = -\vec{f}_{2,1}$, если интенсивность взаимодействия изменяется с течением времени?

19. Приведите пример, в котором противодействие не равно действию.

20. Изобразите векторы всех сил, действующих на тела системы «лошадь — телега», и укажите, под действием каких сил эта система движется как целое по горизонтальной и наклонной дороге. Поясните происхождение каждой силы. Запишите для системы «лошадь — телега» второй закон Ньютона и укажите, какую систему отсчета вы использовали. То же самое разберите для автомашины, везущей прицеп.

21. На концах нити, перекинутой через неподвижный блок, укреплены два груза различной массы. Выберите систему отсчета и запишите второй закон Ньютона для каждого груза в отдельности. В той же системе запишите второй закон Ньютона для каждого груза при условии, что сам блок движется вверх с ускорением a.

Раздел III
СИЛЫ В МЕХАНИКЕ

В зависимости от природы взаимодействия различают и природу сил. Например, сила тяготения есть количественная мера гравитационного взаимодействия тела, а сила сухого трения скольжения — количественная мера взаимодействия при скольжении твердого тела по поверхности другого.

Наблюдения показывают, что взаимодействия по своей природе могут быть разнообразными: гравитационное, электрическое и магнитное взаимодействия, взаимодействия при контакте и т. д. Но не все виды взаимодействия простые, несводимые к другим более простым видам.

Взаимодействия, которые не сводятся к более простым, принято называть фундаментальными.

Силы, описывающие фундаментальные взаимодействия, и законы, которым они подчиняются, называются фундаментальными.

В настоящее время известны четыре вида фундаментальных взаимодействий: гравитационное, электромагнитное, ядерное (или сильное) и так называемое слабое взаимодействие.

Известные в механике силы упругости и силы трения не являются фундаментальными, так как они могут быть сведены (во всяком случае, в принципе) к силам электромагнитной природы. Нашей целью является изучение сил, чаще всего встречаемых при решении механических задач: сил тяготения, сил упругости и сил трения.

Занятие 5
СИЛЫ ТЯГОТЕНИЯ

1. ЗАКОН ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ

Сам факт существования в природе гравитационного взаимодействия (называемого еще всемирным тяготением) и закон, которому подчиняется это взаимодействие, были открыты Ньютоном и опубликованы им в 1686 г. в упоминавшемся уже труде

«Математические начала натуральной философии».

Всемирное тяготение состоит в том, что **всем телам природы присуще свойство притягивать друг друга. Закон всемирного тяготения формулируется так. Сила взаимного притяжения двух материальных точек прямо пропорциональна произведению масс взаимодействующих точек и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними:**

$$f = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{3.1}$$

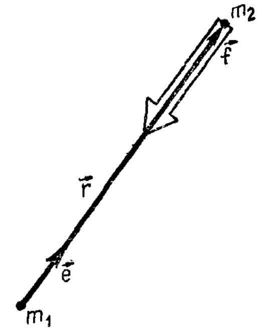


Рис. 3.1

где γ — коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора единиц измерения входящих в формулу величин.

Взаимодействие неточечных (протяженных) тел представляет собой суммарный результат взаимодействия между отдельными элементами (точками) взаимодействующих тел.

Гениальность Ньютона проявилась здесь в том, что он поставил и правильно решил такой вопрос: есть ли взаимное притяжение протяженных тел их свойство *как протяженных тел* или же оно есть результат взаимодействия составляющих эти тела элементов масс. Ньютон ответил на этот вопрос гениальной догадкой в пользу последнего и поэтому сформулировал свой закон для материальных точек. Не имея этого фундаментального закона, трудно было бы разобраться во взаимодействиях протяженных тел, так как в этом случае сила взаимодействия зависит также от размеров и формы тел.

Закону всемирного тяготения (3.1) можно придать векторную форму. Для этого договоримся определять положение второй материальной точки, относительно первой, радиус-вектором $\vec{r}$, проведенным от m_1 к m_2 (рис. 3.1).

Введем единичный вектор $\vec{e}$ вдоль вектора $\vec{r}$. Тогда

$$\vec{r} = r\vec{e}.$$

Очевидно, что сила, с которой точка массы m_1 действует на точку массы m_2, запишется так:

$$\vec{f} = -f\vec{e},$$

где знак минус указывает на то, что вектор $\vec{f}$ противоположен вектору $\vec{e}$. Таким образом, силу $\vec{f}$ можно записать в векторной форме следующим образом:

$$\vec{f} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{e}. \tag{3.2}$$

Рассказывают, будто упавшее с дерева яблоко навело Ньютона на размышления, которые привели к открытию закона всемирного тяготения. Возможно, что это и так. Но бесспорно, что при таком (или подобном) наблюдении Ньютону пришла удивительная мысль: не является ли сила, удерживающая Луну на орбите, силой той же природы, что и сила, заставляющая тело падать на поверхность Земли, но лишь ослабленной за счет расстояния? Сопоставляя центростремительное ускорение Луны и ускорение свободного падения тел на поверхности Земли, Ньютон немедленно пришел к выводу, что если причина падения тел на Землю и движения Луны одна и та же и состоит во взаимном притяжении тел, то сила, с которой тело притягивается к Земле, должна быть обратно пропорциональна квадрату расстояния до центра Земли. Распространив гипотезу о притяжении между телами на все тела солнечной системы, Ньютон смог объяснить, почему движение планет подчиняется трем законам Кеплера, почему этим же законам подчиняется движение спутников около планет (спутники Марса, Юпитера, Земли). На основе закона всемирного тяготения Ньютон также объяснил движение комет, образование морских приливов на Земле, возмущения в движении Луны. Далее Ньютон сделал обобщающее предположение, что взаимное притяжение тел — универсальное свойство и проявляется во всем окружающем нас мире. То, что взаимное тяготение тел не наблюдалось в обычных условиях нашей жизни (между окружающими нас телами), объясняется только тем, что сила взаимного притяжения для тел с небольшой массой очень мала и в обычных условиях перекрывается другими силами (например, трением). Однако, если создать специальные условия, устраняющие трение, можно обнаружить и силы взаимного притяжения обычных тел. Это впервые проделал Кавендиш [1].

Ньютон опубликовал свой закон лишь спустя 16 лет после его открытия, когда ему удалось с помощью изобретенного им метода интегрального исчисления (а также для «убедительности» и элементарным путем) решить задачу о силе взаимодействия тонкого сферического слоя с материальной точкой, находящейся вне сферы.

Он показал, что сферический слой притягивает внешнюю точку массы m так, как если бы вся масса M этого слоя была сосредоточена в центре сферы:

$$f = \gamma \frac{Mm}{r^2},$$

где r — расстояние материальной точки от центра сферы.

Из этого результата вытекает, что однородное тело шаровой формы притягивает внешнюю материальную точку так, как если

[1] Генри Кавендиш (1731—1810) — выдающийся английский физик и химик.

бы вся его масса была сосредоточена в центре шара. Два же однородных шара притягиваются так, как если бы массы обоих шаров были сосредоточены в их центрах. Это значит, что шары взаимодействуют как материальные точки, массы которых равны массам шаров.

2. ГРАВИТАЦИОННАЯ И ИНЕРТНАЯ МАССА ТЕЛ

Массу тела можно определить, используя второй закон Ньютона

$$m_{\text{ин}} = \frac{F}{a}.$$

Определяемая таким путем масса $m_{\text{ин}}$ получила название инертной массы. Инертная масса является мерой инертности тела.

Массу того же самого тела можно определить, используя закон всемирного тяготения, путем измерения силы тяготения к другому телу, например к Земле:

$$m_{\text{грав}} = \frac{FR_{з}^2}{\gamma M}.$$

Определяемая этим способом масса $m_{\text{грав}}$ носит название гравитационной массы. Гравитационная масса является, таким образом, количественной мерой присущему всем телам свойству гравитации.

Выясним теперь, в каком отношении друг к другу находятся обе массы тела. Опыты показали, что инертные массы всех тел в пределах достигнутой точности измерений пропорциональны их гравитационным массам.

Простейший из этих опытов заключается в проверке, действительно ли все тела (из любых веществ) падают на Земле с одинаковым ускорением. Пусть мы имеем два разнородных тела, например из железа и гранита. Обозначим их инертные и гравитационные массы через $m_{1\text{ин}}$, $m_{1\text{грав}}$ и $m_{2\text{ин}}$, $m_{2\text{грав}}$. Для первого тела

$$m_{1\,\text{ин}} g_1 = \frac{\gamma M_з m_{1\,\text{грав}}}{R_з}, \tag{3.3}$$

а для второго

$$m_{2\,\text{ин}} g_2 = \frac{\gamma M_з m_{2\,\text{грав}}}{R_з}. \tag{3.4}$$

После деления уравнения (3.3) на (3.4) получим:

$$\frac{m_{1\,\text{ин}} g_1}{m_{2\,\text{ин}} g_2} = \frac{m_{1\,\text{грав}}}{m_{2\,\text{грав}}}, \quad \text{или} \quad \frac{m_{1\,\text{ин}} g_1}{m_{1\,\text{грав}} g_2} = \frac{m_{2\,\text{ин}}}{m_{2\,\text{грав}}}. \tag{3.5}$$

Полученное соотношение показывает, что отношение инертной массы тела к его гравитационной массе будет для всех тел (из любых веществ) одинаковым

$$\frac{m_{1\,\text{ин}}}{m_{1\,\text{грав}}} = \frac{m_{2\,\text{ин}}}{m_{2\,\text{грав}}} = \text{const}, \tag{3.6}$$

если будет доказано, что все тела независимо от их размера и рода вещества падают в вакууме с одинаковым ускорением ($g_1 = g_2 = \ldots = g$). Опыты по непосредственному измерению ускорения свободного падения показывают, что это ускорение в пределах точности измерения одинаково для всех тел.

Классические опыты такого типа принадлежат Ньютону, который использовал для этой цели метод маятника.

Среди других, получивших известность опытов отметим опыт Этвеша[1], проведенный им в 1890 г. Идея опыта состоит в следующем. Если к длинной нити, верхний конец которой закреплен, подвесить груз, то вследствие вращения Земли эта нить отклонится от направления к центру планеты на некоторый угол θ. Величина этого угла определяется отношением $\frac{m_{\text{ин}}}{m_{\text{грав}}}$ инертной массы груза к его гравитационной массе[2]. Понятно, что если при повторении опыта с различными грузами (отличающимися размерами и материалом) будет получаться каждый раз один и тот же угол θ отклонения нити, то из этого можно заключить о постоянстве отношения $\frac{m_{\text{ин}}}{m_{\text{грав}}}$ для всех тел

$$\frac{m_{\text{ин}}}{m_{\text{грав}}} = \text{const} \tag{3.7}$$

или о наличии прямой пропорциональности между инертной и гравитационной массами.

Этвеш провел измерения угла отклонения для восьми различных тел. При этом точность измерений была такова, что относительная ошибка не превосходила 10^{-8}. Эти опыты, как и эксперименты, проведенные уже в наше время с точностью до 10^{-10}, подтвердили равенство (3.7). Значит, для всех тел, частиц и вообще для всех материальных объектов имеется строгая пропорциональность между инертной и гравитационными массами:

$$\frac{m_{\text{ин}}}{m_{\text{грав}}} = k.$$

При строгой пропорциональности значение коэффициента роли не играет и его можно принять равным единице ($k = 1$). При этом гравитационная масса будет равна инертной массе

---

[1] Роланд Этвеш (1848—1919) — венгерский физик.

[2] Речь идет об отношении силы инерции к силе тяготения тела к Земле.

тела (именно равна, а не тождественна ей[1]). По этой причине обычно говорят о массе тела, не уточняя, идет ли речь об инертной или гравитационной массе.

Принимая, что гравитационная масса равна инертной массе, мы этим предопределяем единицу измерения массы в законе всемирного тяготения. Таким образом, единицы измерения всех входящих в формулу (3.1) величин установлены. При этих условиях коэффициент пропорциональности γ (постоянная тяготения) должен иметь вполне определенное значение и определенную размерность. Значение постоянной γ рассчитать нельзя; оно устанавливается из опыта.

3. МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОСТОЯННОЙ ТЯГОТЕНИЯ

Смысл постоянной тяготения выясняется, если в формуле (3.1) положить $m_1 = m_2 = 1$ кг, $r = 1$ м. Тогда $F = \gamma$. Это значит, что постоянная тяготения равна силе взаимного притяжения двух точечных единичных масс, расположенных на расстоянии в 1 единицу длины. В системе СИ постоянная тяготения равна силе взаимодействия двух точечных масс по 1 кг, находящихся на расстоянии 1 м друг от друга.

По современным измерениям, проводившимися с телами из различных материалов,

$$\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{кг}^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{дин}\cdot\text{см}^2}{\text{г}^2}.$$

Такое малое значение постоянной тяготения объясняет, почему мы не наблюдаем взаимного притяжения тел в повседневной жизни, когда мы имеем дело с телами малой массы. По этой же причине гравитационное взаимодействие не играет никакой роли в атомно-молекулярных явлениях. Но с ростом массы роль гравитационного взаимодействия возрастает. Движение планет вокруг Солнца, спутников вокруг планет, враще-

[1] В ньютоновской механике инертность и гравитация — это совершенно самостоятельные и не зависящие друг от друга свойства тел. Поэтому в рамках этой механики нет никаких теоретических предпосылок считать инертную и гравитационную массы пропорциональными друг другу. Эту пропорциональность обнаруживает только опыт и притом с очень высокой степенью точности. Из этого опытного факта мы можем сделать заключение (выходящее уже за рамки ньютоновской механики), что у каждого тела в сущности имеется одна масса, которая определяет и инертные и гравитационные его свойства. Но тогда это будет означать, что между инертностью и гравитацией нет различия. Это наводит на мысль о таком пересмотре основных положений ньютоновской механики, чтобы в новой теории инертность и гравитация были тождественны. Такая механика создана Эйнштейном. Это *общая теория относительности*, или теория тяготения. В основе этой теории лежит постулат о тождественности инертности и гравитации (инертной и гравитационной массы).

ние Галактики вокруг своего центра полностью определяются гравитационным взаимодействием.

Постоянная тяготения относится к мировым константам наряду с такими, как скорость света, заряд электрона и др. Она характеризует с количественной стороны фундаментальное свойство материи — гравитацию.

Первую оценку этой величины дал Ньютон. Он исходил из следующих простых рассуждений. Сила притяжения к Земле сообщает телу массы m ускорение g. Поэтому можно записать [1]:

$$\gamma \frac{M_3 m}{R_3} = mg,$$

или, сокращая на массу ($m = m_{\text{ин}} = m_{\text{грав}}$),

$$\gamma = \frac{R_3 g}{M_3}. \tag{3.8}$$

Радиус Земли в то время уже был известен. Массу Земли M_3 Ньютон ориентировочно оценил по средней плотности, которую вычислил сам. Приходится удивляться тому, что найденная по тем скудным данным средняя плотность Земли почти в точности совпадает с современной оценкой $\left(5{,}5 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}\right)$. Таким образом, измеряя g, зная радиус и массу Земли, можно вычислить и постоянную тяготения, что и было сделано Ньютоном.

Наоборот, зная γ из прямых измерений силы взаимодействия между двумя шарами, можно найти массу Земли. Точность в определении массы будет зависеть от точности измерения γ (и, конечно, R и g). Впервые прямое измерение γ проделал Кавендиш в 1798 г. с использованием крутильных весов [2]. Схема его опыта показана на рисунке 3.2. Два маленьких свинцовых шарика массой m скреплены горизонтальным стержнем, подвешенным за середину на тонкой кварцевой нити. При поднесении к шарикам двух свинцовых шаров [3], масса каждого из которых M, стержень поворачивается и нить закручивается. Сила, необходимая для закручивания нити на данный угол, может быть известна из предварительных измерений (градуированная упругая нить). Таким образом, подставляя в закон всемирного тяготения резуль-

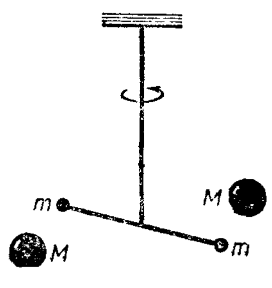


Рис. 3.2

[1] Эффектом, связанным с вращением Земли, пренебрегаем.

[2] Их преимущество от обычных — рычажных — состоит в том, что они не имеют трущихся деталей и по этому у них отсутствует трение покоя, накладывающее ограничение на величину измеряемой силы.

[3] Тела берутся шаровой формы, так как они взаимодействуют как материальные точки.

таты измерения силы, массы тел и расстояния между их центрами, можно вычислить и постоянную тяготения.

Опыты Кавендиша поражают своей ювелирностью, так как измеряемая сила чрезвычайно мала.

Чувствительность крутильных весов тем выше, чем меньше диаметр кварцевой нити. Так как тонкая кварцевая нить очень хрупка, обращение с прибором требует особых предосторожностей.

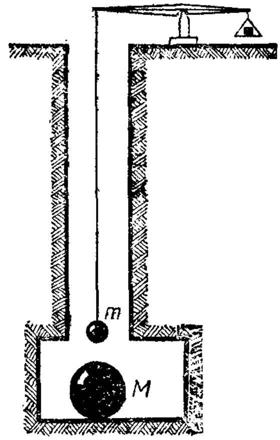


Рис. 3.3

В этом отношении имеет преимущество другой прибор, работающий по принципу рычажных весов. Схема прибора показана на рисунке 3.3. К одному плечу рычажных весов на длинной нити, уходящей глубоко в подвал здания, подвешен шар массой m. На другом плече, как обычно, чашка для равновесов. Когда весы уравновешены, к шару m выдвигается из глубины другой более массивный шар массой M. Весы выходят из равновесия. Для их уравновешивания на чашку кладут дополнительные разновесы, вес которых и будет равен силе притяжения между шарами.

4. ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ

1. В формулировке закона всемирного тяготения предполагается, что внезапное изменение места нахождения одного из взаимодействующих тел (внезапное изменение r) приводит к мгновенному изменению силы, действующей на второе тело. Другими словами, действие от одного тела передается к другому мгновенно. В действительности это не так. Любое действие не может передаваться со скоростью, превышающей скорость света. Поэтому закон всемирного тяготения в форме (3.1) имеет ограниченную область применения: он справедлив для покоящихся или медленно движущихся тел.

2. Закон всемирного тяготения указывает лишь, от чего зависит сила взаимного притяжения тел, но не объясняет механизм передачи действия на расстоянии через вакуум. За это Ньютона критиковали его современники (Лейбниц и др.). Сам Ньютон находил бессмысленным действие на расстоянии без помощи посредника, но избегал выражать свое отношение к природе сил тяготения. В рамках классической механики тяготение есть фундаментальное свойство материи; оно не может быть сведено к другим, «более простым» свойствам [1].

---

[1] В общей теории относительности, развитой Эйнштейном, тяготение имеет первопричину; ею является искривление пространства.

По современным воззрениям, любое взаимодействие тел на расстоянии осуществляется через особый материальный посредник — силовое поле. Силовое поле, передающее гравитационное взаимодействие, называют *гравитационным полем* или полем тяготения. Силовое поле, передающее взаимодействие электрических зарядов, называют *электромагнитным полем* и т. д.

Взаимодействие двух точечных масс m_1 и m_2, определяемое силой

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

надо рассматривать так: масса m_1 создает вокруг себя поле, которое и оказывает действие на массу m_2; в свою очередь масса m_2 создает свое поле, которое действует на массу m_1. Любая масса M создает вокруг себя поле. Обнаружить это поле мы можем по его действию на вносимое пробное тело массой m. В какую бы точку поля мы не вносили пробную (точечную) массу m, везде мы обнаружим действие некоей силы, направленное в сторону массы, создающей это поле. И наоборот, если на пробную массу, помещенную в любую точку пространства, действует сила, мы заключаем, что пробное тело находится в силовом поле тяготения. Для количественной характеристики гравитационного поля в каждой его точке вводится физическая величина $\vec{G}$, называемая *напряженностью* гравитационного поля. Напряженность поля — векторная величина. Она измеряется силой, с которой поле тяготения действует на пробное тело единичной массы, помещенное в данную точку поля.

Если на пробное тело массой m действует со стороны поля сила $\vec{F}$, то напряженность поля $\vec{G}$ равна:

$$\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

Подставляя в эту формулу выражение (3.2) силы тяготения, получаем:

$$\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m} = -\gamma \frac{M}{r^2} \vec{e},$$

или для модуля напряженности:

$$G = \gamma \frac{M}{r^2}.$$

Мы видим, что вектор напряженности поля тяготения направлен к центру, в котором помещен точечный источник поля. Поле подобного вида называют центральным.

Гравитационная сила, действуя на тело массой m, сообщает ему ускорение свободного падения. Пользуясь вторым законом динамики

$$\vec{F} = m\vec{a},$$

получаем:

$$-\gamma \frac{Mm}{r^2}\vec{e} = m\vec{a},$$

или

$$\vec{a} = -\gamma \frac{M}{r^2}\vec{e}. \qquad (3.9)$$

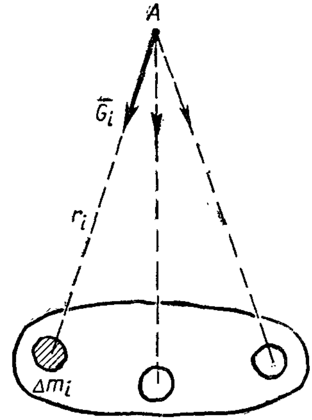


Рис. 3.4

Из (3.9) видно, что ускорение свободного падения не зависит ни от массы, ни от природы падающего тела; все тела падают с одинаковым ускорением, которое, однако, зависит от расстояния r падающего тела, от массы, создающей поле.

Сопоставляя выражения для $\vec{G}$ и $\vec{a}$, найдем, что напряженность гравитационного поля равна ускорению свободного падения: $\vec{G} = \vec{a}$. Этот результат является следствием неразличимости гравитационной и инертной масс.

Принцип суперпозиции. Поле протяженных тел. В ньютоновской механике гравитационные поля подчиняются принципу суперпозиции[1] (наложения). Согласно этому принципу поля, создаваемые несколькими точечными источниками, накладываются, не изменяя друг друга. Или, другими словами, поле данного точечного источника не зависит от наличия или отсутствия полей других источников. Поэтому **напряженность поля, создаваемого несколькими точечными источниками, равна сумме** напряженностей полей, создаваемых каждым из источников:

$$\vec{G} = \vec{G}_1 + \vec{G}_2 + \ldots .$$

Справедливость принципа суперпозиции подтверждается опытом.

Поле протяженных тел рассматривается как суперпозиция полей, создаваемых каждым элементом тела Δm_i (рис. 3.4):

$$\vec{G} = \sum \vec{G}_i = -\sum \gamma \frac{\Delta m_i}{r_i^2}\vec{e}_i.$$

При разбиении тела на бесконечно большое число малых элементов суммирование заменяется интегрированием.

Гравитационное поле имеет шаровую симметрию: модуль вектора напряженности $\vec{G}$ для точек, равноудаленных от центра,

[1] В теории тяготения Эйнштейна принцип суперпозиции справедлив только для полей, создаваемых малыми массами. Поля больших масс, накладываясь, искажают друг друга.

имеет одинаковые значения: $G = \text{const}$. Внутри сплошного однородного шара поле также является центральным, но зависимость модуля напряженности от радиус-вектора $\mathbf{r}$ в этом случае иная.

В заключение отметим одну важную особенность гравитационного поля: оно проникает внутрь любого тела, и его ничем нельзя экранировать[1]. Это свойство гравитации объясняется только в рамках теории Эйнштейна.

Вопросы для самопроверки

1. В чем состоит закон всемирного тяготения? Какова его математическая запись?

2. Как подсчитывается сила взаимного притяжения двух протяженных тел?

3. Не производя расчета, покажите, что сила, с которой шаровой слой действует на материальную точку, находящуюся вне его, направлена к центру сферы.

4. Ньютон доказал, что шаровой слой массы M действует на находящуюся вне его материальную точку массой m так, как если бы вся масса слоя была сосредоточена в центре сферы. Основываясь на этом, докажите, что действие на материальную точку m сплошного однородного шара M тоже происходит так, как если бы вся масса шара была сосредоточена в центре шара. При каком условии *это верно и для неоднородного шара?* Докажите, что при расчете силы взаимодействия между двумя однородными шарами можно принять, что массы шаров сосредоточены в их центрах.

5. Зависят ли периоды обращения планет вокруг Солнца от их масс? Каким был бы период обращения Луны вокруг Земли, если бы масса Луны была вдвое большей?

6. Расстояние между центрами двух одинаковых шаров равно 1 м. Сила их гравитационного притяжения равна 1 *Н*. Какова их масса?

7. Полагая в законе тяготения $\gamma = 1$, можно определить единицу массы как массу, которая на равную себе массу на расстоянии 1 м действует с силой в 1 *Н*. Чему будет равна эта единица массы, если ее выразить в килограммах? Каким был бы коэффициент пропорциональности во втором законе динамики $f = kma$, если бы применялась единица массы, введенная указанным способом?

8. Какие опыты показывают, что инертная и гравитационная массы пропорциональны друг другу? Опишите эти опыты.

9. Опишите опыты по измерению гравитационной постоянной. Можно ли провести опыт Кавендиша в условиях невесомости? Как это сделать? Изменится ли при этом результат?

10. Как определить массу Земли, зная гравитационную постоянную?

11. Как обнаруживается поле тяготения? Какую физическую величину называют напряженностью поля? Изобразите на графике зависимость модуля напряженности поля тяготения от расстояния точки от центра, создающего поле. Какие поля называют однородными? Известно, что металлические оболочки могут экранировать некоторую область пространства от действия электрического поля. Существует ли подобный экран для гравитационного поля?

12. В чем состоит принцип суперпозиции полей? Рассчитайте положение точки между Землей и Луной, в которой напряженность суммарного поля равна нулю.

13. При каком условии модуль ускорения свободно падающего тела в некоторой точке поля равен модулю напряженности поля в этой точке? По-

[1] Электрические и магнитные поля можно экранировать. Экранирование электрических полей основано на суперпозиции внешнего поля с полем, создаваемым наведенными в металлическом экране зарядами.

чему ускорение свободного падения тел на Земле только приблизительно равно напряженности поля?

14. Как изменится сила взаимодействия между двумя одинаковыми шарами, если их поместить в жидкость, плотность которой равна плотности материала шаров? больше плотности шаров? меньше плотности шаров?

Занятие 6

СИЛЫ УПРУГОСТИ

ВВЕДЕНИЕ

Все твердые тела способны под действием внешних сил деформироваться, т. е. изменять свою форму или объем.

Тела, в которых после прекращения действия внешних сил деформация полностью исчезает и первоначальная форма тела и его объем полностью восстанавливаются, называют абсолютно упругими, а саму деформацию — упругой. Тела, которые после прекращения действия внешних сил не восстанавливают свою первоначальную форму (и объем), называют неупругими или пластичными; соответственно их деформацию называют неупругой, пластичной. В случае, когда после устранения внешних сил деформация полностью сохраняется, тело называют абсолютно неупругим.

Свойство тел восстанавливать форму и объем после прекращения действия внешних сил называют упругостью. Различают объемную упругость и упругость формы. Объемная упругость — универсальное свойство всех тел, включая жидкости и газы [1].

Упругость формы — свойство многих твердых тел, и прежде всего кристаллических. В природе, конечно, нет абсолютно упругих и абсолютно неупругих тел. Все тела в той или иной степени являются неупругими. Но многие твердые тела (например, металлические) при малых и медленно протекающих деформациях [2] ведут себя как абсолютно упругие; остаточные деформации в них настолько малы, что ими вполне можно пренебречь. С другой стороны, имеются такие тела (воск, сырая глина, вар, свинец), которые уже при малых деформациях ведут себя как абсолютно неупругие: они почти полностью сохраняют деформации после устранения внешних сил.

Внутренние силы, возникающие при деформациях упругих и неупругих тел, существенно различаются между собой. В упругих телах они определяются величиной и видом деформации и при устранении внешних сил возвращают телу его первоначальную форму и объем. В неупругих телах внутренние силы зависят

---

[1] Объемная упругость газов в отличие от объемной упругости других тел односторонняя; она противодействует сжатию, но не противодействует расширению.

[2] Вопрос о том, как малы и медленны должны быть деформации, чтобы реальное тело можно было считать абсолютно упругим, решается опытом для каждого конкретного случая.

от скорости изменения деформации и при устранении внешних сил исчезают, не возвращая телу первоначальной формы.

Внутренние силы, возникающие в упругих телах при небольших деформациях, называют упругими. Их нам и предстоит изучить. Внутренние силы в неупругих телах относятся к силам иного вида, называемым силами вязкости или силами внутреннего трения. Эти силы мы изучим позднее.

Виды упругих деформаций. Существует множество различных видов упругих деформаций: одностороннее растяжение (и сжатие), всестороннее растяжение (и сжатие), изгиб, сдвиг, кручение и др. Но не все виды деформации являются независимыми, многие из них могут быть сведены к совокупности небольшого числа более простых деформаций. Так, изгиб стержня можно свести к деформациям неоднородного растяжения и сжатия, кручение — к неоднородному сдвигу, сдвиг — к неоднородному растяжению и сжатию в двух взаимно перпендикулярных направлениях и т. д. Можно показать, что любую упругую деформацию, как бы сложна она ни была, можно свести к совокупности двух деформаций, получивших название основных: растяжение (или сжатие) и сдвиг.

Закон Гука. При любой деформации (простой или сложной) в теле возникают упругие силы. Гук[1] еще в 1675 г. обнаружил, что величина и направление сил упругости определенным образом зависят как от вида, так и от величины деформации.

Установленный Гуком закон, носящий теперь его имя, состоит в следующем: **а) при любой малой деформации сила упругости пропорциональна величине деформации; б) малые деформации тела пропорциональны приложенным силам.**

Чтобы записать этот закон в математической форме, нужно ввести новые физические величины, характеризующие с количественной стороны деформацию и силу упругости.

1. СИЛЫ УПРУГОСТИ И ЗАКОН ГУКА ПРИ ДЕФОРМАЦИИ ОДНОСТОРОННЕГО РАСТЯЖЕНИЯ (СЖАТИЯ)

Характеристики деформации. Закон Гука. Деформация одностороннего растяжения возникает, например, в тонком стержне, один конец которого закреплен, а к другому приложена внешняя сила F, стремящаяся растянуть стержень (рис. 3.5). Под действием приложенной силы стержень удлинится на величину Δl, но после снятия нагрузки (если удлинение не превзошло определенного предела) возвращается к первоначальной длине. Количественной характеристикой деформации может служить абсолютное удлинение Δl (положительное при растяжении и отрицательное при сжатии), или относительное удлинение (сжа-

---

[1] Роберт Гук — выдающийся английский физик (1645—1703), современник Ньютона.

тие) $\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon$, называемое также в общем виде относительной деформацией.

Относительное удлинение — отвлеченное число, указывающее, на какую часть увеличилась или уменьшилась первоначальная длина стержня. Величину ε можно рассматривать как удлинение, которое испытывает каждый участок стержня длиной 1 м (или 1 см). Замечательно то, что если весь стержень имеет относительное удлинение $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$, то при однородной деформации каждый элемент тела произвольной длины l_1 имеет точно такое же относительное удлинение $\frac{\Delta l_1}{l_1} = \varepsilon$ (рис. 3.5). Таким образом, ε есть количественная характеристика деформации как в отношении всего стержня, так и в отношении его любой части, т. е. является исчерпывающей характеристикой однородной деформации данного вида.

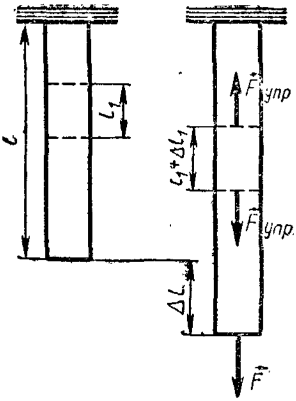


Рис. 3.5

Сила упругости $F_{упр}$, возникающая в растянутом стержне, оценивается по внешней растягивающей силе F. Из условия равновесия стержня имеем:

$$F_{упр} = -F. \tag{3.11}$$

Но силы упругости $F_{упр}$ действуют в любом сечении стержня (рис. 3.5) и при однородной статистической деформации они повсюду одинаковы и равны растягивающей силе.

Нагружая нижний конец стержня гирями и измеряя при каждом грузе абсолютное удлинение, можно установить, что абсолютное удлинение прямо пропорционально длине стержня l, растягивающей силе F и обратно пропорционально поперечному сечению стержня S:

$$\Delta l \sim \frac{lF}{S}. \tag{3.12}$$

Эта пропорциональная зависимость справедлива и для деформации одностороннего сжатия (при соответствующих опытах нужно пользоваться короткими стержнями с большим поперечным сечением, чтобы стержень не гнулся и не ломался). Переходя от пропорциональной зависимости к равенству, мы должны ввести коэффициент пропорциональности α:

$$\Delta l = \alpha \frac{lF}{S}. \tag{3.13}$$

Как показывает опыт, коэффициент α зависит от рода материала, из которого сделан образец, и является, таким образом, характеристикой упругих свойств данного материала по отношению к деформации растяжения (и сжатия). Его называют **коэффициентом упругости.** Численное значение этого коэффициента определяют из опыта[1].

Вводя в (3.13) модуль Югна

$$E = \frac{1}{\alpha}$$

и заменяя F на $-F_{\text{упр}}$, получим искомую зависимость силы упругости от абсолютной деформации:

$$F_{\text{упр}} = -\frac{ES}{l}\Delta l,$$

или

$$E_{\text{упр}} = -k \cdot \Delta l. \tag{3.14}$$

Полученное соотношение представляет собой одну из математических записей закона Гука для деформации растяжения. Знак минус в формуле (3.14) указывает, что направление силы упругости $F_{\text{упр}}$ противоположно направлению растяжения.

Мы видим, что сила упругости, возникающая в теле при одностороннем растяжении (сжатии), прямо пропорциональна абсолютному удлинению тела. Коэффициент пропорциональности

$$k = \frac{ES}{l} \tag{3.15}$$

для данного тела зависит от его размеров (Sl) и модуля упругости материала E. Величину k называют коэффициентом силы упругости или просто упругостью (для пружины — жесткостью). Для стержня его можно рассчитать по формуле (3.15). Для пружины расчет k затруднителен, так как при растяжении (или сжатии) пружины деформация проволоки имеет сложный характер и не может быть сведена только к растяжению. На практике k определяют из опыта, измеряя удлинение пружины (или стержня) под действием известной внешней силы.

Коэффициент упругости и модуль упругости. Вернемся к соотношению (3.13). Разрешая его относительно α, найдем:

$$\alpha = \frac{\frac{\Delta l}{l}}{\frac{F}{S}} = \frac{\varepsilon}{p}, \quad E = \frac{\frac{F}{S}}{\frac{\Delta l}{l}} = \frac{p}{\varepsilon}, \tag{3.16}$$

где $p = \frac{F}{S}$ — внешняя сила, приходящаяся на единицу площади поперечного сечения стержня. В рассматриваемом случае эта сила направлена перпендикулярно сечению. В теории упругости величину p называют у с и л и е м (в данном случае речь идет о растягивающем усилии).

---

[1] Для некоторых тел их можно рассчитать теоретически, исходя из атомно-молекулярных представлений.

Из соотношений (3.16) следует, что коэффициент упругости α численно равен тому относительному удлинению ε, которое получается под влиянием усилия, равного единице; модуль Юнга E численно равен усилию p, вызывающему относительное удлинение, равное единице. Но относительное удлинение равно единице, если $\Delta l = l$. Значит, модуль Юнга численно равен усилию p, которое растягивает стержень вдвое. Кроме каучука, ни один материал такого растяжения не выдерживает; он разрывается при гораздо меньших растяжениях.

Из соотношений (3.16) легко получить наименования единиц и размерности для α и E (для α — м²/Н и $M^{-1}L^{\circ}T^{2}$; для E — Н/м² = Па и $ML^{\circ}T^{-2}$).

Значения модуля Юнга для некоторых материалов приведены в таблице 3.1.

Таблица 3.1

Вещество	Модуль Юнга		Модуль сдвига		Коэффициент Пауссона	Предел упругости		Предел прочности	
	ГПа	$\times 10^{3}$ кгс/мм²	ГПа	$\times 10^{3}$ кгс/мм²		$\times 10^{7}$ Па	кгс/мм²	$\times 10^{7}$ Па	кгс/мм²
Сталь	200	20	76	7,7	0,27	32,4	33	73,5	75
Железо	190	19	76	7,7	0,27	4,9	5	34,2	35
Медь	98	10	44	4,5	0,37	2,94	3	21,6	22
Алюминий	69	7	24	2,5	0,34	5,88	6	31,4	32
Свинец	10	1	—	—	—	0,392	0,4	1,76	1,8
Стекло	5,5	0,56	21	22	—	—	—	—	—
Дерево	12	1,2	—	—	0,2	2,45	2,5	7,85	8
Каучук	$8\cdot10^{-3}$	$8\cdot10^{-4}$	$2{,}6\cdot10^{-4}$	$2{,}7\cdot10^{-5}$	0,5	—	—	—	—

Примечание. Па — сокращенная запись единицы измерения давления, называемой паскаль; 1 ГПа = 10^{9} Па.

Поскольку для данного материала величины α и E постоянны, то соотношения (3.16) показывают, что относительное удлинение прямо пропорционально растягивающему усилию:

$$\varepsilon = \alpha p. \qquad (3.17)$$

Обычно внутреннюю силу, действующую на единицу площади сечения стержня, называют напряженным (или внутренним напряжением). Очевидно, что для однородного стержня при однородной деформации напряжение равно усилию. Обозначая напряжение тем же индексом $p_{\text{упр}}$ и учитывая, что $p = -p_{\text{упр}}$, можно записать закон Гука в следующей форме:

$$p_{\text{упр}} = -E\varepsilon. \qquad (3.18)$$

При малых деформациях упругое напряжение, возникающее внутри тела, прямо пропорционально относительной деформации.

Коэффициент поперечного сжатия. Опыт показывает, что деформация продольного растяжения сопровождается уменьшением поперечного размера образца, а деформация сжатия — увеличением поперечного размера. Уменьшение поперечных размеров хорошо видно, например, при растяжении резинового шнура или трубки. Изменение поперечных размеров тела при его растяжении или сжатии характеризуют относительным поперечным сжатием (или относительным поперечным растяжением) $\varepsilon_п$:

$$\varepsilon_п = \frac{\Delta d}{d},$$

где d — поперечный размер тела до деформации, Δd — абсолютное значение изменения поперечного размера тела. Величину $\varepsilon_п$ называют также *коэффициентом поперечного сжатия.*

Опыт показывает, что **для всех тел из одного и того же материала отношение коэффициента поперечного сжатия $\varepsilon_п$ к относительной продольной деформации $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ есть величина постоянная:**

$$\frac{\varepsilon_п}{\varepsilon} = \mu. \qquad (3.19)$$

Эту безразмерную постоянную называют *коэффициентом Пуассона*[1] или *модулем поперечного сжатия.* Коэффициент Пуассона зависит от материала и наряду с модулем Юнга является важной характеристикой упругих свойств материала. Величины E и μ полностью характеризуют упругие свойства изотропного материала. Это значит, что упругие силы, возникающие при любой сколь угодно сложной деформации, будут определенным образом зависеть только от двух модулей.

В таблице 3.1 приведены значения μ для некоторых материалов. Опыт показывает, что μ для всех известных материалов не превосходит 0,5.

2. УПРУГИЕ СИЛЫ И ЗАКОН ГУКА ПРИ ДЕФОРМАЦИИ СДВИГА

Деформацию сдвига можно получить в параллелепипеде, если одну его грань закрепить, а к противоположной приложить силу F (ее называют скалывающей силой), лежащую в плоскости этой грани (рис. 3.6, *а*). Величина Δa (рис. 3.6, *б*) есть абсолютное смещение (сдвиг) слоя AB относительно неподвижного (закрепленного) слоя MN; $\Delta a'$ — абсолютный сдвиг слоя $A'B'$ и т. д. Из рисунка видно, что абсолютный сдвиг неодинаков для разных слоев: он тем больше, чем дальше сдвигаемый слой находится от неподвижного. Однако отношение γ абсолютного сдвига Δa к расстоянию l между сдвигаемым и неподвижным

[1] Симон Пуассон (1781—1840) — французский математик и физик.

слоем, называемое *относительным сдвигом*, одинаково для всех слоев и равно тангенсу угла сдвига θ:

$$\gamma = \frac{\Delta a}{l} = \frac{\Delta a'}{l'} = \ldots = \operatorname{tg}\theta.$$

При малых углах сдвига $\operatorname{tg}\theta \approx \theta$ и, следовательно,

$$\gamma = \theta.$$

Таким образом, **при малой деформации относительный сдвиг равен измеренному в радианах углу сдвига.**

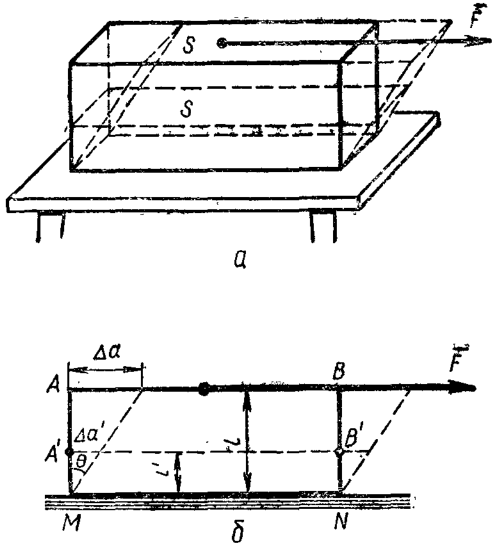


Рис. 3.6

При сдвиге внутри тела возникают упругие силы, которые при статической деформации уравновешивают внешнюю (скалывающую) силу:

$$F_{\text{упр}} = -F.$$

Измеряя абсолютный сдвиг Δa верхней грани AB (рис. 3.6, *б*) при различных значениях скалывающей силы, можно установить, что **при малых деформациях абсолютный сдвиг прямо пропорционален скалывающей силе F и расстоянию l смещаемой грани от неподвижной и обратно пропорционален площади S сдвигаемого слоя:**

$$\Delta a = \beta \frac{lF}{S}, \tag{3.20}$$

где β — коэффициент пропорциональности, называемый *коэффициентом сдвига*. Опыт показывает, что в выбранной системе единиц β зависит только от материала образца, являясь, таким образом, количественной характеристикой упругих свойств тела к деформации сдвига. На практике чаще имеют дело с величиной N, обратной β, которую называют *модулем сдвига*:

$$N = \frac{1}{\beta}.$$

Значения модуля сдвига для некоторых материалов приведены в таблице 3.1.

Отношение

$$\frac{F}{S} = \tau$$

называют *скалывающим усилием*. Оно равно силе, действующей на единицу площади поверхности и направленной по касательной (тангенциально) к этой поверхности. Деля (3.20) на l и учитывая, что $\frac{\Delta a}{l} = \gamma$, получим:

$$\gamma = \beta\tau. \tag{3.21}$$

Относительный сдвиг прямо пропорционален скалывающему напряжению.

Очевидно, что при статической и однородной деформации упругое тангенциальное напряжение $\frac{F_{\text{упр}}}{S} = \tau_{\text{упр}}$, возникающее в теле, будет по модулю равно, а по направлению противоположно скалывающему усилию:

$$\tau_{\text{упр}} = -\tau.$$

Так что соотношению (3.21) можно придать несколько иной смысл:

$$\tau_{\text{упр}} = -N\gamma. \tag{3.22}$$

При небольших деформациях упругое тангенциальное напряжение прямо пропорционально относительному сдвигу.

Выражения (3.21) и (3.22) являются математической записью закона Гука при сдвиге. Из них вытекают и определения коэффициента и модуля сдвига: коэффициент сдвига численно равен относительному сдвигу, приобретаемому телом при действии на него единичного скалывающего напряжения ($1 Н/м^2$ или 1 Па); модуль сдвига измеряется упругим тангенциальным напряжением, которое возникает в теле при относительной деформации, равной единице. При $\gamma = 1$ имеем $\theta = 45°$; следовательно, модуль сдвига равен тангенциальному напряжению, которое возникает в теле (при условии, что его свойства остаются неизменными) при сдвиге на угол 45°.

В теории упругости доказывается, что модули E, μ, N не являются независимыми, но связаны между собой следующим соотношением:

$$N = \frac{E}{2(1+\mu)}. \tag{3.23}$$

Это позволяет, как указывалось выше, приводить любую деформацию к двум: либо к растяжению и сжатию с модулями E и μ, либо к растяжению (сжатию) и сдвигу с модулями E и N.

3. СИЛЫ УПРУГОСТИ И ЗАКОН ГУКА ПРИ ВСЕСТОРОННЕМ СЖАТИИ

Как уже было показано, продольное (одностороннее) растяжение тела сопровождается его поперечным сжатием и, наоборот, продольное сжатие — поперечным утолщением. А это приводит к изменению объема тела. Найдем изменение объема куба с ребром, равным единице (1 м, 1 см). При растяжении куб превращается в параллелепипед длиной $1+\varepsilon$. Поперечный размер куба уменьшится на величину $\mu\varepsilon$, так что новое сечение станет равным $(1-\mu\varepsilon)^2$. Относительное изменение объема куба будет равно

$$\frac{\Delta V}{V}=(1+\varepsilon)(1-\mu\varepsilon)^2-1.$$

Раскрывая скобки и пренебрегая квадратными членами, получим:

$$\frac{\Delta V}{V}=(1-2\mu)\varepsilon.$$

Для всех тел $2\mu<1$. Поэтому при одностороннем растяжении ($\varepsilon>0$) объем тела увеличивается на величину $(1-2\mu)\varepsilon$, а при одностороннем сжатии ($\varepsilon<0$) объем тела уменьшается на такую же величину. Можно показать, что при всестороннем однородном сжатии (типа гидростатического) относительное изменение объема в три раза больше, чем при одностороннем сжатии:

$$\frac{\Delta V}{V}=3(1-2\mu)\varepsilon. \tag{3.24}$$

Так как относительное удлинение согласно закону Гука определяется формулой

$$\varepsilon=\alpha p,$$

где p — нормальное усилие (давление на грани куба), то соотношение (3.24) запишется так:

$$\frac{\Delta V}{V}=3(1-2\mu)\alpha p,$$

или

$$\frac{\Delta V}{V}=\varkappa p. \tag{3.25}$$

Относительное изменение объема тела при всестороннем однородном сжатии прямо пропорционально внешнему давлению. Таким образом, всестороннее сжатие также подчиняется закону Гука.

Величину $\varkappa=3(1-2\mu)\alpha$ называют *коэффициентом сжимаемости*[1]. Из (3.25) находим:

$$\varkappa=\frac{\Delta V}{Vp}. \tag{3.26}$$

Отсюда видно, что коэффициент сжимаемости численно равен относительному изменению объма тела при всестороннем действии на него давления, равного единице. Для тел, у которых μ близко к $^1/_2$, коэффициент сжимаемости очень мал; такие тела почти не сжимаются. Жидкости относятся именно к таким телам.

---

[1] Обратную величину иазывают модулем сжимаемости.

4. СИЛЫ УПРУГОСТИ И ЗАКОН ГУКА ПРИ ДЕФОРМАЦИИ КРУЧЕНИЯ

Рассмотренный выше сдвиг прямоугольного бруска (параллелепипеда) представляет собой однородную деформацию, т. е. относительный сдвиг γ для всех параллельных слоев одинаков. Кручение — деформация неоднородного сдвига. Такая деформация возникает в стержне, если закрепить один конец и закручивать другой (рис. 3.7). При этом различные сечения стержня будут поворачиваться на различные углы относительно закрепленного основания стержня. Так, сечение в плоскости a повернется на угол $\varphi = \varphi_a$, сечение в плоскости b — на угол $\varphi = \varphi_b < \varphi_a$ и т. д. При кручении объем тела не изменяется, так как ни сечение, ни длина стержня не изменяются.

Пусть верхнее сечение повернулось на угол φ (рис. 3.7). Тогда каждая из образующих цилиндрической поверхности (например, образующая OA) повернется на угол θ, называемый *углом сдвига* или *углом кручения*. При малых сдвигах, как видно из рисунка, относительный сдвиг равен:

$$\gamma = \operatorname{tg}\theta \approx \theta = \frac{|\breve{AA'}|}{l} = \frac{R\varphi}{l}.$$

Если мысленно выделить в стержне цилиндрическую поверхность меньшего радиуса ($r < R$), то найдем, что ее элементы испытывают сдвиг (в фиксированной плоскости a)

$$\theta_r = \frac{r\varphi}{l},$$

меньший, чем элементы на поверхности самого стержня. Таким образом, при кручении элементы стержня испытывают тем большие сдвиги, чем дальше от оси они находятся. Деформация такого вида называется *неоднородной.*

На опыте можно установить, что угол закручивания φ верхнего сечения (в плоскости a) пропорционален силе F, приложенной по касательной к поверхности стержня в плоскости его сечения a, и радиусу стержня:

$$\varphi \sim FR.$$

Произведение $FR = M$ называют *моментом силы*[1]. Учитывая это и вводя коэффициент пропорциональности, запишем:

$$\varphi = dM. \tag{3.27}$$

Значит, угол закручивания верхнего (свободного) сечения стержня прямо пропорционален моменту закручивающей силы, действующему в этом сечении. Величину d называют *коэффициентом упругости при деформации кручения.* При закручивании

[1] Полное определение момента силы будет проведено позже.

возникают внутри стержня упругие силы, которые создают упругий момент $M_{упр}$, уравновешивающий закручивающий внешний момент $M_{упр} = -M$. Из (3.27) имеем [1]:

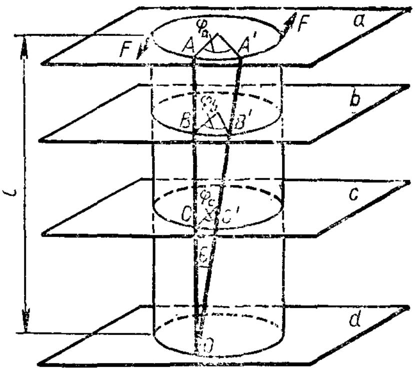


Рис. 3.7

$$M_{упр} = -D\varphi, \qquad (3.28)$$

где $D = \frac{1}{d}$ — *коэффициент упругого* (или *возвращающего*) момента [2]. Для стержня заданных размеров он постоянный и может быть определен из опыта. Для этого нужно измерить угол закручивания стержня при действии известного момента M и из (3.27) вычислить $\frac{1}{d} = D$. Коэффициент D имеет наименование $\frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{рад}}$ и размерность кг·м^2·с$^{-2}$. Выражения (3.27) и (3.28) представляют собой запись закона Гука для деформации сдвига.

Поскольку кручение приводится к деформации сдвига, то коэффициент D можно подсчитать и теоретически, выразив его через модуль сдвига и абсолютные размеры стержня. Соответствующий расчет приводит к формуле:

$$D = \frac{\pi N R^4}{2l}. \qquad (3.29)$$

С увеличением радиуса стержня коэффициент возвращающего момента резко растет. Поэтому толстые (и короткие) стержни трудно поддаются закручиванию: уже при малых углах нужны очень большие внешние силы. Наоборот, тонкие и длинные нити под влиянием даже очень малых сил закручиваются на большой угол. Этим обстоятельством пользуются, как уже указывалось, в крутильных весах.

5. ПРЕДЕЛЫ УПРУГОСТИ И ПРОЧНОСТИ

Итак, упругие деформации любого вида подчиняются закону Гука. Однако закон Гука имеет место только в определенной области: когда деформация лежит ниже некоторого предела, определяемого экспериментально для каждого конкретного случая. Рассмотрим этот вопрос на примере деформации одностороннего растяжения. Возьмем тонкий стержень из определенного вещества (например, из стали) и будем его постепенно нагружать,

[1] Знак минус поставлен для того, чтобы подчеркнуть, что упругий момент направлен против закручивающего.

[2] Его называют также *коэффициентом жесткости стержня на кручение.*

измеряя при каждой нагрузке соответствующие растяжения ε. Результаты измерений изобразим на графике, откладывая по оси абсцисс относительное растяжение $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$, а по оси ординат — внутреннее упругое напряжение $p_{упр}$, равное по модулю внешнему усилию. Растягивая стержень до тех пор, пока он не разорвется, получим характерный график, вид которого изображен на рисунке 3.8. Как видно из графика, линейная зависимость p от ε, соответствующая закону Гука, выполняется лишь в определенных пределах изменения деформации ε. Пределы эти для большинства тел невелики. Так, для стали $\varepsilon_{пред} \approx 10^{-3}$; для других материалов $\varepsilon_{пред}$ еще меньше.

Предельное значение напряжения, при котором еще соблюдается линейная зависимость p от ε, называют *пределом пропорциональности* — $p_п$.

Деформации могут еще сохранить упругий характер при напряжениях, превосходящих $p_п$. Предельное значение напряжения, при котором еще не возникают остаточные деформации, называют *пределом упругости* — $p_у$. Участок AB графика невелик, поэтому обычно в инженерных расчетах считают $p_у = p_п$.

Для всех напряжений, превышающих $p_у$, возникают деформации, сохраняющиеся после снятия внешних сил. Их называют *остаточными* (или *пластичными*) деформациями. После снятия нагрузки тело в этом случае возвращается к ненапряженному состоянию по линии CO', а не CO. Напряжение $p_т$, при котором остаточная деформация достигает условно выбранной величины (около 0,002), называют *пределом текучести*. Участок графика CD показывает, что деформация возрастает без увеличения нагрузки, тело как бы «течет». Область CD носит название *пластических деформаций*. На этом виде деформации основаны такие способы обработки металлов, как ковка, прессовка, прокат, волочение, чеканка.

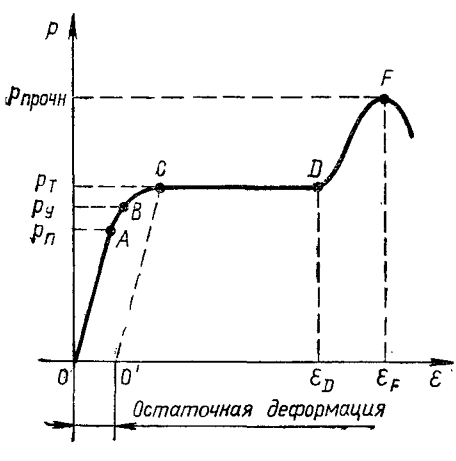


Рис. 3.8

Для деформаций, превосходящих ε_D (рис. 3.8), упругие силы вновь возрастают, т. е. тело начинает снова сопротивляться растяжению. Максимальное напряжение, возникающее в теле до разрушения, называют *пределом прочности* — $p_{прочн}$. При деформации, превышающей ε_F, упругие силы резко уменьшаются, и внешняя сила не уравновешивается, тело беспрепятственно растягивается и вскоре разрывается.

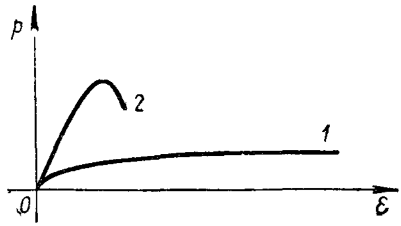


Рис. 3.9

Материалы, имеющие область текучести *СД* значительного размера (график 1 на рис. 3.9), называют *вязкими* или *пластичными* (глина, вар, свинец и др.). Материалы, у которых область текучести практически отсутствует (график 2 на рис. 3.9), называют *хрупкими* (стекло, бетон, фарфор и др.).

Следует отметить, что свойства тел зависят от внешних факторов. Так, стекло при обычной температуре хрупко, а при высокой — пластично; свинец при обычной температуре пластичен, при низкой — хрупок. Тело, имеющее на поверхности микротрещины, обладает низким пределом прочности, но то же тело, подвергшееся специальной обработке, приводящей к «заплавке» трещин, обладает высоким пределом прочности. Кроме того, механические свойства тела зависят от длительности действия сил. Одно и то же тело при кратковременном действии больших сил проявляет себя как хрупкое, а при длительном действии малых сил — как вязкое.

6. УПРУГОЕ ПОСЛЕДЕЙСТВИЕ И УПРУГИЙ ГИСТЕРЕЗИС

Реальные твердые тела обнаруживают довольно сложную зависимость деформации от времени, эта зависимость не содержится в законе Гука, и мы ее до сих пор нигде не учитывали.

Опыт показывает, что после начала действия внешней силы деформация достигает соответствующего значения не сразу, а лишь по истечении определенного промежутка времени. После прекращения действия внешней силы деформация пропадает также не мгновенно: сначала она быстро спадает до некоторой малой величины, а в последующие моменты эта деформация исчезает очень медленно. Тело медленно восстанавливает свою форму. Это явление называют *упругим последействием*. Упругое последействие можно наблюдать на резиновой трубке не очень хорошего качества. Если сильно растянуть трубку, а потом снять усилие и положить трубку на стол, можно заметить, что трубка станет длиннее. Однако с течением времени длина ее постепенно будет уменьшаться, приближаясь к первоначальной.

Если взять образец, ранее не подвергавшийся деформации, то при растяжении в нем возникнет напряжение p, изменяющееся с увеличением ε по кривой OA (рис. 3.10). После достижения состояния A будем постепенно уменьшать ε. При этом график зависимости p от ε пойдет ниже кривой AO, и образец придет к состоянию B ($p = 0$), при котором он сохраняет часть

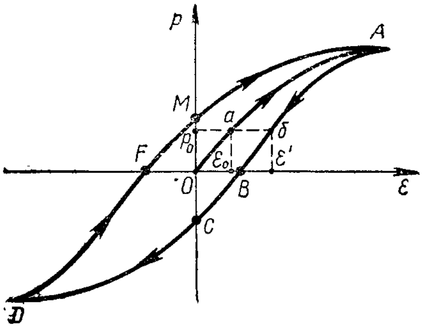


Рис. 3.10

полученной им деформации. Участок OB изображает остаточную деформацию. Чтобы ее уничтожить, нужно сжать тело (т. е. приложить к нему отрицательное внешнее усилие), состояние, отвечающее точке C, характеризуется тем, что тело полностью восстановило свою форму, но имеет внутреннее напряжение, величина которого характеризуется отрезком OC. Если продолжать сжатие и дальше, то зависимость p от ε пойдет по кривой CD. После достижения образцом некоторого состояния D начнем постепенно уменьшать внешнее усилие, доведя его до нуля. Зависимость p от ε при этом изобразится кривой DF. В состоянии, отмеченном точкой F, тело имеет остаточную деформацию (сжатия) OF. Для ее ликвидации надо тело растянуть на величину OM. Произведя растяжение дальше, мы переведем образец по кривой MA в состояние A. Дальнейшее уменьшение растяжения пойдет по кривой AB. При изменении внешней нагрузки зависимость p от ε будет выражаться петлей $ABCDFMA$, получившей название *петли упругого гистерезиса*. Слово «гистерезис» в переводе с греческого означает отставание. Явление упругого гистерезиса состоит в отставании деформации от изменения напряжения. Отставание для каждого значения p выражается горизонтальным отрезком, соединяющим кривую OA с кривой ABC. Так, для $p = p_0$ отставание измеряется отрезком $аб$ (см. рис. 3.10).

Площадь петли гистерезиса пропорциональна энергии, выделенной в теле (нагревание), при каждом цикле периодически изменяющейся деформации. Чем больше площадь петли гистерезиса, тем больше выделяется энергии и тем сильнее нагревается тело. Для уменьшения нагревания (которое вредно сказывается на упругих свойствах тела) ответственные детали машин изготавливают из материалов с узкой петлей гистерезиса.

Объяснение упругого последействия и гистерезиса следует искать в том, что все тела, включая и монокристаллы, состоят из очень маленьких соприкасающихся друг с другом «областей». Отдельные такие области при упругой деформации могут смещаться, поворачиваться и при определенных условиях цепляться друг за друга, перекашиваясь и растягиваясь.

Освобождение от зацеплений происходит постепенно, вследствие беспорядочиого теплового движения. Оно происходит более интенсивно при высокой температуре и менее интенсивно при низкой. Смещаясь и поворачиваясь, такие области трутся одна об другую, вследствие чего выделяется тепло и тело нагревается.

Деформации, не изменяющиеся во времени, называют *стационарными.* Они делятся на два вида: *статические* и *динамические.* Статической называется деформация покоящегося или равномерно движущегося тела, а динамической — деформация тела, движущегося с ускорением.

Стационарные деформации могут быть *однородные* и *неоднородные.* Однородной называют деформацию, при которой упругое напряжение распределено по всему его объему равномерно (одностороннее сжатие и растяжение). Неоднородной называют деформацию, при которой упругое напряжение распределено по объему тела неодинаково: в одних местах оно больше, в других — меньше (кручение, изгиб). Что касается динамических деформаций, то они всегда неоднордны (у точек приложения силы они всегда больше).

Вопросы для самопроверки

1. По какому признаку тела делятся на упругие и неупругие? Что называют деформацией тела? Какова особенность сил, возникающих внутри тела, при упругих и пластических деформациях?

2. Перечислите деформации основного вида. Покажите, что деформация изгиба и деформация кручения сводятся к совокупности деформаций основного вида.

3. Какие деформации называют одиородными и какие — неоднородными? При каких условиях статическая деформация растяжения будет однородной и при каких — неоднородной?

4. Что называют деформацией растяжения (сжатия), сдвига? Как при этом смещаются отдельные слои (и частицы) тела? Какими абсолютными и относительными величинами характеризуются эти деформации и какими силами они вызываются?

5. Как распределены силы упругости и внутренние напряжении при однородных деформациях растяжения и сдвига?

6. В чем состоит закон Гука? Как он математически записывается в общей форме? Приведите запись закона Гука для абсолютной деформации растяжения и сдвига. От чего зависит коэффициент пропорциональности между силой упругости и абсолютной деформацией при растяжении и сдвиге?

7. Что называют жесткостью пружины и от чего она зависит? Как определяют жесткость системы пружин, соединеннных последовательно и параллельно?

8. Что называют модулем Юнга и модулем сдвига? Какими единицами они измеряются и как они связаны с коэффициентами растижения и сдвига? Какие тела называют абсолютно твердыми и какие значения E и N приписывают таким телам? Покажите, что коэффициент объемного сжатия в 3 раза больше коэффициента однородного сжатия. Указание. Тело взять в форме куба.

9. Изобразите примерный график зависимости упругого напряжения от значения деформации. Укажите область, где справедлив закон Гука. Укажите область пластических деформаций. Как по графику найти величину остаточной деформации? Покажите, пользуясь графиком, что область линейной зависимости для тела, подвергавшегося пластической деформации, больше, чем для тела, не подвергавшегося такой деформации.

Говорят, что остаточные деформации «упрочняют» материал. Поясните это утверждение, пользуясь графиком. Как на практике можно освободиться от остаточной деформации?

Что называют пределом пропорциональной зависимости? пределом упругости? пределом прочности?

10. Что называют упругим гистерезисом? Изобразите петлю гистерезиса. Что выражает площадь петли?

11. Что называют упругим последействием и как оно проявляется в опыте?

12. Чем отличаются динамические деформации от статических? Как распределяются напряжения внутри тела при динамической деформации растяжения (сжатия) и сдвига?

13. При каких условиях промежуточное тело передает силу от одного тела к другому без изменения?

14. Как найти, насколько будет уменьшена сила при передаче ее ускоренно движущемуся телу через промежуточное тело массой m?

Занятие 7

СИЛЫ ТРЕНИЯ

Трение является одним из проявлений контактного взаимодействия тел. Трение различают двух видов: внешнее и внутреннее. Силы внешнего трения возникают на поверхности контакта двух тел; приложены они к телам в соответствии с третьим законом Ньютона и направлены по касательной к поверхности контакта. Внутреннее трение — это тангенциальное взаимодействие между слоями одного и того же тела. Из всего многообразия внешнего трения мы рассмотрим лишь так называемое сухое трение, т. е. такое трение, которое наблюдается между сухими поверхностями твердых тел, когда одно твердое тело перемещается по поверхности другого. Из многообразия случаев внутреннего трения рассмотрим лишь жидкое трение, возникающее при относительном движении твердого тела в жидкости или газе.

1. СУХОЕ ТРЕНИЕ

Различают три вида сухого трения: трение покоя, трение скольжения и трение качения.

Трение покоя. Обратимся к следующему опыту. Положим массивный брусок на горизонтальную крышку стола и попытаемся сдвинуть его с места, действуя в горизонтальном направлении на нить, прикрепленную перпендикулярно к одной из его вертикальных граней. Для измерения силы, с которой мы действуем на брусок, поместим между нитью и бруском пружинный динамометр (рис. 3.11). Опыт покажет, что брусок останется в покое даже в том случае, когда на него действует со стороны нити некоторая сила. Но это означает, что, кроме натяжения нити, на брусок действует еще одна сила, возникающая в результате особого (тангенциального) взаимодействия бруска с поверх-

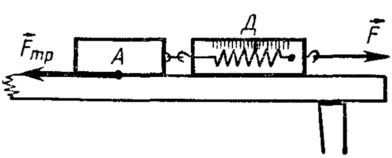


Рис. 3.11

ностью стола, равная по модулю натяжению нити и направленная в противоположную сторону. Эту силу и называют силой трения покоя. Очевидно, такую же силу, но направленную в сторону натяжения нити, будет испытывать и сам стол.

При увеличении натяжения нити брусок остается в покое до тех пор, пока натяжение не достигнет определенного значения, при котором брусок начнет равномерно скользить по поверхности стола. Следовательно, до тех пор, пока не возникнет скольжение, сила трения покоя остается равной натяжению нити и «автоматически» изменяется вместе с изменением натяжения. Причем, если изменить направление внешней силы (т. е. тянуть брусок в другую сторону), и сила трения покоя также изменит свое направление. Таким образом, до возникновения скольжения сила трения покоя может иметь любое направление и может принимать любое значение от нуля до некоторого максимального, равного натяжению нити, при котором возникает скольжение

$$0 \leqslant \vec{F}_{\text{тр}} \leqslant \vec{F}_{\text{тр. макс}} = -\vec{F}_{\text{нат. нити}}.$$

Силу трения покоя, равную по модулю той внешней силе, при которой начинается скольжение данного тела по поверхности другого, принято называть максимальной силой трения покоя. Опыт показывает, что модуль максимальной силы трения покоя не зависит от направления приложенной силы.

Благодаря возникновению силы трения покоя не всякая внешняя сила способна вызвать скольжение. Скольжение возникает только в том случае, если внешняя сила становится равной или превосходит по модулю максимальную силу трения покоя. Таким образом, для внешней силы, вызывающей скольжение одного тела по поверхности другого, существует пороговое значение, равное максимальной силе трения покоя. Сила, меньшая по модулю пороговой силы трения, не вызывает скольжения. Эта особенность присуща только сухому трению. В случае жидкого трения, как увидим ниже, никакого порога для внешней силы не существует.

Выясним теперь, чем определяется максимальная сила трения покоя. Для этого мы проведем серию экспериментов по измерению этой силы при различных условиях: будем изменять силу, прижимающую брусок к поверхности стола, заменять один брусок другим, изготовленным из другого материала или из того же материала, но с другой обработкой его поверхностей. В результате таких опытов мы сможем подметить следующие закономерности, на которые указывали еще А м о н т о н в 1699 г. и независимо от него К у л о н [1] в 1785 г.

---

[1] Гильом А м о н т о н (1663—1705) — французский физик; Шарль Огюст К у л о н (1736—1806) — французский физик.

1. Максимальная сила трения покоя пропорциональна силе нормального давления, т. е. силе, перпендикулярной к поверхности соприкосновения тел и прижимающей соприкасающиеся поверхности друг к другу

$$F_{\text{тр. макс}} \sim N.$$

Введя **безразмерный коэффициент пропорциональности** μ, называемый *коэффициентом трения покоя*, переходя от пропорциональной зависимости к равенству, мы получим уравнение, которое называют законом Кулона:

$$F_{\text{тр. макс}} = \mu N. \tag{3.30}$$

2. При одной и той же силе нормального давления N максимальная сила трения покоя (а следовательно, и коэффициент μ) зависит от физической природы соприкасающихся тел и обработки их поверхностей.

3. При одной и той же силе нормального давления максимальная сила трения покоя (а так же и μ) не зависит от площади соприкосновения их поверхностей.

Отмеченные закономерности носят приближенный характер. Это связано с тем, что $F_{\text{тр. макс}}$ зависит от большого числа факторов, многие из которых просто не поддаются учету (наличие на соприкасающихся поверхностях окислов, влаги, адсорбированных газов и др.). Строгой теории сил трения покоя, как и сил сухого трения, до настоящего времени не создано.

Качественную картину механизма образования этих сил можно пояснить на примере двух щеток. Сложим вместе две щетки щетинами навстречу друг другу. При этом щетины одной щетки войдут в пространство между щетинами другой щетки. Глубина проникновения будет зависеть от прижимающей силы. Теперь начнем сдвигать щетки друг относительно друга. Мы заметим, что, во-первых, для этого необходимо приложить некоторое усилие и, во-вторых, которое тем ощутимее, чем сильнее щетки прижаты друг к другу. Наблюдая за поведением щетинок, мы увидим, что все они изогнутся. В той щетке, которая неподвижна, щетинки изогнутся в сторону движения второй щетки. Так как щетинки обладают упругостью, то при изгибе в них возникают упругие силы, которые действуют на щетки, уравновешивая приложенную внешнюю силу. Как только наступит равновесие сил, смещение щеток и дальнейшая деформация щетин прекратится. Наступит стационарное состояние, при котором щетки окажутся сдвинутыми относительно первоначальных положений, а щетины — деформированными. Стоит убрать внешнюю силу, как щетины выпрямятся и щетки придут в первоначальное положение. Таким образом, с увеличением внешней силы (до некоторого предела) деформация щетинок увеличивается, что и обеспечивает «автоматическое» возрастание упругих сил, пока не наступит равновесие и дальнейшее смещение щеток прекратится.

Если внешние силы превзойдут некоторый предел, то одна щетка начнет «скользить» по другой. При этом щетинки будут беспорядочно сгибаться и выпрямляться, совершая при этом колебания около своих начальных положений.

Итак, если при трении покоя щетинки, изогнувшись, остаются неподвижными, то при трении скольжения они совершают колебательные движения. В этом состоит принципиальное отличие в поведении щетинок при трении покоя и трении скольжения.

Нечто подобное происходит и на соприкасающихся поверхностях твердых тел. Поверхности тел, если их рассматривать в атомных масштабах, неровные и очень напоминают щетку, у которой щетины имеют различную толщину и длину.

Описанная картина взаимодействия поверхностей двух тел позволяет понять, почему при улучшении качества обработки поверхностей силы трения покоя и скольжения не уменьшаются, а возрастают. Это связано с тем, что при повышении чистоты поверхности сами неровности становятся по размерам меньше, но число их возрастает. В идеальном случае зеркальных поверхностей каждый атом поверхности представляет собой неровность. Число атомов на поверхности громадно, поэтому сила трения велика. Опыт показывает, что при очень тщательной шлифовке поверхностей соприкасающиеся тела прилипают друг к другу. Прилипание может получиться таким же крепким, как сварка. Этим можно воспользоваться для холодной сварки металлов в вакууме. Вакуум необходим потому, что поверхности соприкасающихся тел должны быть абсолютно чистыми и в механическом и в химическом смысле (не должно быть окислов, влаги и вообще «посторонних» атомов). Малейшее загрязнение контактных поверхностей сильно ослабляет взаимодействие атомов.

Таким образом, можно сказать, что у грубо обработанной поверхности основную роль в возникновении силы трения покоя (и скольжения) играют зацепления неровностей, а при тщательной обработке — молекулярное (или атомное) сцепление.

Отметим, что максимальная сила трения покоя зависит еще от того, сколько времени тела находятся в контакте друг с другом. При значительной силе нормального давления и длительном контакте происходит пластическая деформация (сжатие) выступов на поверхности тел. Выступы «сплющиваются», отчего увеличивается площадь контакта и возрастает роль молекулярного сцепления. Это способствует слипанию тел и приводит к росту максимальной силы трения покоя.

Значение трения покоя в технике. Трение покоя имеет исключительно важное значение в жизни человека, в его практической деятельности. Прежде всего силы трения покоя обеспечивают возможность ходьбы по земле. Между подошвой и землей в плоскости соприкосновения возникают силы трения покоя. Одна из них есть тангенциальная сила, с которой подошва действует на землю; другая — тангенциальная сила, с которой земля действует на подошву. Обе силы равны по модулям и противоположны по направлениям. Вторая из указанных сил и обеспечивает перемещение человека по земле.

Сила трения покоя является движущей и тормозящей силой для всех наземных колесных видов транспорта. Но силы трения покоя имеют и отрицательные проявления. Это касается, прежде всего, измерительных приборов, содержащих трущиеся части. Обычно в таких приборах производится измерение смещения подвижной части прибора. Наличие трения покоя ограничивает измеряемую величину «снизу». Это значит, что измеряемая величина, если она меньше некоторого определенного (для данного прибора) значения, прибором не отмечается. Другое проявление трения покоя в измерительных приборах состоит в том, что подвижная часть прибора, будучи выведенной из покоя, останавливается не точно у того места, которое соответствует измеряемой величине, а около него: либо несколько ближе, либо несколько дальше. И вот почему. В большинстве измерительных приборов к подвижной части крепится пружина, которая, деформируясь, уравновешивает силу, вызывающую смещение подвижной части. Но из-за наличия трения покоя подвижная часть может остановиться в таком положении, в котором упомянутые силы могут быть не равными по модулям. В этом случае их разность не превосходит максимальной силы трения покоя. Ясно, что условию

$$|F_{\text{изм}} - F_{\text{упр}}| \leqslant F_{\text{тр. пок. макс}}$$

отвечает целая область около положения, соответствующего равенству $F_{\text{изм}} = F_{\text{упр}}$. Эту область называют *областью застоя.* Итак, измерительный прибор дает показания с некоторой ошибкой, которая тем больше, чем больше область застоя. Область застоя имеется, естественно, и около начального (нулевого) положения подвижной части.

Явление застоя характерно для измерительных приборов, в которых движение подвижной части связано со скольжением. Но в таких приборах, как, например, крутильные весы, подвижная часть укрепляется на тонкой и длинной нити. Силы сухого трения здесь отсутствуют, и подвижная часть начинает перемещаться под действием сколь угодно малой силы; останавливается она в таком положении, в котором измеряемая сила равна силе упругости закрученной нити. В таких приборах нет области застоя, их показания поэтому отличаются большей точностью.

Трение скольжения. Обратимся вновь к опыту с бруском, находящимся на поверхности стола (рис. 3.11).

Когда модуль внешней силы достигает значения, равного $F_{\text{тр. пок. макс}}$, возникает скольжение бруска по поверхности стола.

При этом сила трения продолжает существовать. Она называется в этом случае силой трения скольжения. Силы трения скольжения действуют вдоль поверхности контакта двух тел. Они приложены к обеим трущимся поверхностям в соответствии с третьим законом Ньютона. Сила трения скольжения, действующая на одно из двух взаимодействующих тел, имеет направление, противоположное скорости этого тела по отношению к другому телу. Модуль силы трения скольжения зависит от материала тел и состояния поверхностей. Но, кроме того, он зависит также и от относительной скорости движения тел. Характер зависимости силы трения скольжения от скорости для тел из разных материалов и с различным состоянием поверхности неодинаков, но обычно имеет вид, представленный на рисунке 3.12. С увеличением скорости сила трения скольжения вначале уменьшается, а затем снова начинает возрастать. Рисунок 3.12 наглядно передает также особенность силы трения покоя; при относительном покое соприкасающихся тел ($v = 0$) сила трения может иметь любое значение от нуля до $F_{\text{тр. пок. макс}}$ (график в этом случае имеет вертикальный участок, совпадающий с осью ординат).

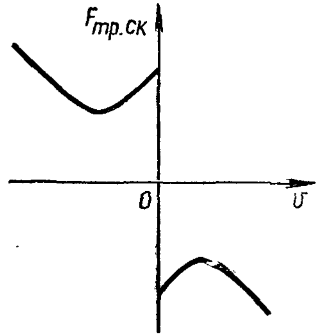


Рис. 3.12

Уменьшение силы трения скольжения при небольших скоростях можно объяснить тем, что при движении тела имеющиеся на его поверхности микроскопические выступы не успевают так глубоко западать в углубления поверхности другого тела, как при покое. Деформируются только «верхушки» выступов, и поэтому сила упругого сопротивления уменьшается. Увеличение силы трения скольжения при больших скоростях связано, по-видимому, с разрушением выступов и их размельчением. Но полной ясности в этом вопросе пока нет. Нагрев трущихся поверхностей объясняется тем, что при срыве зацеплений выступы некоторое время колеблются, рассеивая в тепло запасенную энергию упругой деформации.

Силы трения скольжения (как и максимальная сила трения покоя) зависят от нормального давления на поверхность соприкосновения. При неизменной относительной скорости движения сила трения скольжения тем больше, чем больше нормальное давление:

$$F_{\text{тр. ск}} = \mu_{\text{ск}} N. \tag{3.31}$$

Коэффициент трения скольжения зависит от материала и состояния поверхности тел, а также от относительной скорости движения.

В первом приближении можно считать $\mu_{\text{скольж}}$ равным коэффициенту трения покоя μ.

Трение качения. При качении тела по поверхности другого тела возникает особая сила — *сила трения качения*, которая препятствует качению тела.

Как показывает опыт, сила трения качения при тех же материалах соприкасаемых тел всегда меньше трения скольжения. Этим обстоятельством пользуются на практике, заменяя подшипники скольжения шариковыми или роликовыми подшипниками.

Кулон опытным путем установил, что сила трения качения пропорциональна силе нормального давления, оказываемого на соприкасающиеся поверхности, и обратно пропорциональна радиусу катящегося цилиндра (или колеса):

$$F_{\text{к}} = \mu_{\text{к}} \frac{N}{R}, \tag{3.32}$$

где $\mu_{\text{к}}$ — коэффициент трения качения. Это положение именуется законом Кулона. Коэффициент трения качения имеет размерность длины и в системе СИ измеряется в метрах, а в системе СГС — в сантиметрах. Коэффициент трения качения не зависит от скорости качения и радиуса цилиндра, но зависит от материала, из которого изготовлены взаимодействующие тела, а также от состояния их поверхностей. Обычно $\mu_{\text{к}}$ уменьшается с увеличением твердости материала и чистоты его обработки.

Причины появления силы трения качения. Пусть на горизонтальной плоскости покоится цилиндр. Под действием силы, прижимающей цилиндр к плоскости (этой силой может быть сила тяжести), цилиндр и плоскость деформируются (рис. 3.13). Для упрощения рассуждений будем считать, что деформируется только плоскость. Это упрощение мало повлияет на результат рассуждений. Силы упругости, действующие на каждый малый элемент цилиндра со стороны плоскости, будут симметричны относительно вертикальной плоскости AA, проходящей через ось

Рис. 3.13

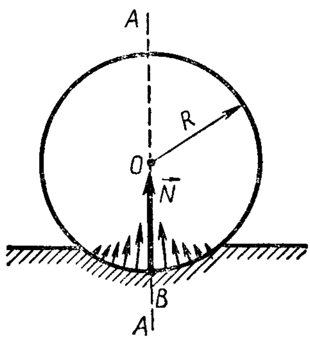


Рис. 3.14

цилиндра O. Поэтому результирующая сила «реакции опоры» вертикальна и проходит через ось цилиндра. Она и уравновешивает силу тяжести (рис. 3.14):

$$\vec{N} = -m\vec{g}.$$

При **д в и ж е н и и** цилиндра по плоскости картина распределения элементарных сил упругости существенно меняется. Это происходит по следующим двум причинам.

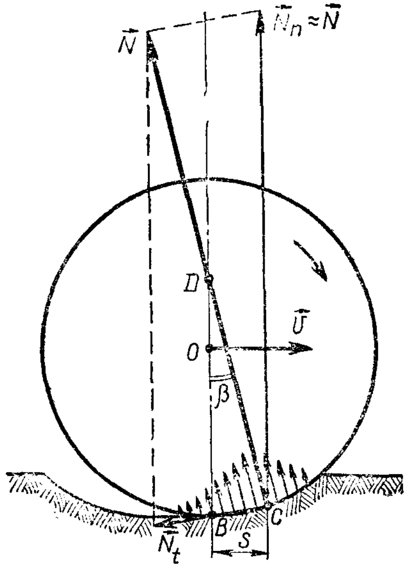


Рис. 3.15

1. Строго говоря, всякая деформация твердого тела (как бы она мала ни была) в какой-то степени неупруга; абсолютно упругих тел в природе не существует. Хотя при малых деформациях реальных твердых тел остаточные деформации весьма малы и ими обычно пренебрегают, здесь они приобретают принципиальное значение и пренебрегать ими нельзя.

2. Все реальные тела (и упругие в том числе) обладают свойством послеупругого действия («последействия»), состоящим в том, что тела не сразу восстанавливают свою форму после снятия нагрузки.

При движении колеса эти факторы проявляются в том, что деформация плоскости качения становится несимметричной (рис. 3.15).

Сзади колеса деформация плоскости не исчезает или исчезает лишь спустя некоторое время. Поэтому равнодействующая всех элементарных сил реакции плоскости оказывается наклоненной к поверхности качения и не проходит через ось цилиндра. Можно простыми рассуждениями прийти к заключению, что результирующая сила $\vec{N}$ реакции плоскости должна проходить впереди оси, как показано на рисунке 3.15. При этом момент силы препятствует движению. Точка C приложения силы $\vec{N}$ смещается в сторону движения на некоторое расстояние S, называемое коэффициентом момента силы трения качения. Угол β и смещение, как показывает опыт, очень малы. Разложим силу $\vec{N}$ реакции плоскости на нормальную $\vec{N}_n$ и касательную $\vec{N}_t$ — составляющие к плоскости качения. Так как угол β мал, то $\vec{N}_n \approx \vec{N}$, а $\vec{N}_t$ направлено почти по касательной и ободу колеса.

Касательная, составляющая N_t, есть как раз та сила, которая препятствует движению цилиндра вперед. Ее и называют силой трения качения. Действие силы трения качения вызывает нагревание контактирующих тел.

2. ЖИДКОЕ ТРЕНИЕ

Силы жидкого, или вязкого, трения возникают при движении тела в жидкости или газе, если относительная скорость движения не превосходит некоторого предела, зависящего от размера и формы тела, от состояния его поверхности, а также от свойства самой жидкости.

При движении тела в жидкости и газе со скоростью, превышающей некоторый предел, силы, препятствующие движению тела (силы сопротивления), приобретают иную природу; они также по-иному зависят от скорости движения, формы и размеров тела.

Сила жидкого трения зависит от относительной скорости тела v по линейному закону:

$$F_{\text{ж. т}} = -k_1 v, \tag{3.33}$$

где k_1 — коэффициент трения, который, как показывает опыт, зависит от свойств жидкости или газа, от размеров, формы и состояния поверхности тела. В частности, k_1 растет с увеличением вязкости среды; например, для глицерина k_1 больше, чем для воды; k_1 тем больше, чем больше размеры тела, и т. д. Знак минус указывает на то, что эта сила направлена навстречу относительной скорости.

Отличительной чертой жидкого трения является то, что в этом случае нет силы трения покоя. Как бы мала ни была внешняя сила, действующая на тело, она обязательно вызовет его движение, сообщив ему скорость

$$v = \frac{F}{k_1}.$$

Поэтому даже один человек в состоянии сдвинуть с места корабль и «тащить» его с постоянной скоростью, правда очень и очень малой. Но сдвинуть железнодорожный вагон, который намного легче корабля, человек не сможет.

Силы сопротивления среды (жидкости или газа) зависят от относительной скорости движения тела по квадратичному закону

$$F_{\text{сопр}} = k_2 v^2, \tag{3.34}$$

а при очень больших относительных скоростях и по кубическому. Коэффициент трения k_2 зависит от свойства жидкости (газа), размеров, формы и состояния поверхности самого тела.

Вопросы для самопроверки

1. Какое трение называют сухим и какое — жидким?

2. Что означает сила трения покоя? Как эту силу можно измерить на опыте? Какие значения может принимать эта сила?

3. Объясните механизм образования силы трения покоя. Поясните, почему с ростом внешней силы сила трения покоя автоматически увеличивается до такого значения, при котором внешняя сила оказывается уравновешенной. Поясите, почему сила трения покоя направлена по касательной к поверхности контакта. Как направлена полная сила реакции поверхности, на которой лежит тело (рис. 3.11)? От чего зависит наклон полной силы реакции и каков предельный угол этого наклона?

4. Что такое «максимальная сила трения покоя»? Какие процессы протекают на соприкасающихся поверхностях, когда сила трения покоя достигает максимального значения? Поясните, почему максимальная сила трения покоя возрастает с увеличением нормального давления.

5. Сформулируйте закономерности, которым подчиняется максимальная сила трения покоя. Напишите закон Кулона. От чего зависит коэффициент трения покоя ($\mu_п$)? Может ли μ быть больше 1?

6. Как можно определить коэффициент трения покоя, пользуясь наклонной плоскостью? Выведите формулу $\mu_п = \operatorname{tg}\alpha$, где α — угол наклона плоскости, называемый «углом трения». Какую силу испытывает наклонная плоскость? Нарисуйте график зависимости силы трения, действующей на тело, от угла наклона плоскости в пределах от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

7. При угле наклона плоскости, равном «углу трения», соскальзывание происходит рывками. Объясните это с точки зрения взаимодействия неровностей. Как можно объяснить скрип дверных петель?

8. Поясните, какую роль выполняет максимальная сила трения покоя при ускорении электропоезда и при его торможении. Поясните, как передается движение от ремня к шкиву в ременной передаче. Как деформируется сам ремень и какое значение имеет эта деформация?

9. Приведите примеры полезного и вредного проявления силы трения покоя. Как эта сила сказывается на работе измерительных приборов? В чем состоит явление застоя и чем определяется ширина области застоя? Придумайте опыт, иллюстрирующий явление застоя.

10. Как пояснить возникновение скольжения и силы трения скольжения? Как наглядно представить себе, почему сила трения скольжения убывает с увеличением относительной скорости движения.

11. Поясните, почему трение скольжения сопровождается нагреванием трущихся тел, а трение покоя нет.

12. Почему при очень хорошем качестве обработки поверхности сила трения скольжения становится больше, чем при плохом качестве? Что такое слипание? В чем состоит холодная сварка металлов и как она осуществляется?

13. Нарисуйте приблизительный график зависимости силы трения скольжения от скорости при различных нормальных давлениях. Поясните, почему при торможении трамвая (или другого колесного экипажа) по мере умень-

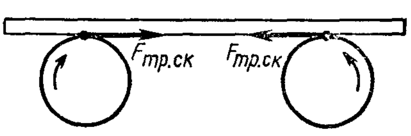


Рис. 3.16

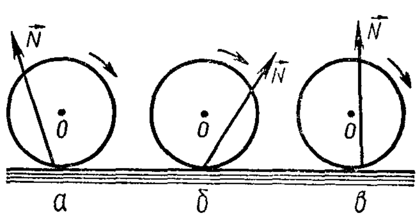


Рис. 3.17

шения скорости движения водитель должен ослаблять тормоза? Какой вид приобретает график, если считать силу трения скольжения не зависящей от скорости?

14. Опишите движение стержня, опирающегося на два вращающихся цилиндра (рис. 3.16).

15. Покажите все силы, которые действуют на брусок, соскальзывающий с наклонной плоскости: а) равномерно; б) ускоренно. В обоих случаях покажите силы, действующие на наклонную плоскость.

16. Что называют трением качения? Напишите закон Кулона для трения качения и поясните, от каких факторов зависит коэффициент трения качения.

17. Как объясняется появление силы трения качения? Какую роль при этом играют пластичность тел и явление последействия? Могла ли возникнуть сила трения качения, если бы катящееся тело и поверхность были абсолютно упругими (считать, что абсолютно упругие тела мгновенно восстанавливают свою форму)?

18. Выведите формулу $F_К = \mu_К \frac{N}{R}$ и покажите, что $\mu_К = s$ (где s — смещение точки приложения силы тяжести).

19. На рисунке 3.17 показаны направления силы реакции плоскости качении. Докажите, что случаи *а* и *б* невозможны. (Указание. Нужно учитывать момент относительно оси цилиндра, создаваемый силой реакции $\vec{N}$.)

20. Покажите все силы, которые действуют на шар, скатывающийся без скольжения по наклонной плоскости, а затем движущийся по горизонтальной поверхности. Покажите силы, которые действуют на шар при скольжении по наклонной плоскости (без вращения).

21. Покажите, как надо поставить опыт со скатыванием шарика по наклонной плоскости, чтобы можно было определить из этого опыта силу трения качения. Найдите связь $\mu_К$ с углом наклона плоскости. Покажите, что если шарик скатывается равномерно, то угол, который образуют силы реакции плоскости с нормалью к этой плоскости, равен углу наклона плоскости.

22. Что называют жидким (вязким) трением? Как зависит сила вязкого трения от скорости? Нарисуйте график. Напишите закон для силы вязкого трения и поясните, от чего зависит коэффициент вязкого трения.

23. Опишите, как будет происходить движение шарика, брошенного с высоты или осторожно опущенного в мензурку, наполненную глицерином. Изобразите действующие на шарик силы в разные моменты времени его движения в жидкости.

24. Какие силы называют силами сопротивления? Как они зависят от скорости? Нарисуйте график. Напишите закон для силы сопротивления и поясните, от каких факторов зависит коэффициент силы сопротивления.

25. Опишите движение парашютиста. Какие силы действуют на него в разные моменты падения? Опишите движение космического корабля при посадке после его входа в плотные слои атмосферы. Какие силы действуют на корабль в разные моменты падения? В какие моменты перегрузка будет наибольшей?

Раздел IV
ДИНАМИКА И СТАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Занятие 8
ВТОРОЙ ЗАКОН НЬЮТОНА И ДВЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ

Основная задача динамики состоит в том, чтобы по заданным силам определить траекторию и закон движения данной материальной точки. Эта задача решается с помощью второго закона Ньютона. Поэтому второй закон Ньютона называют основным законом динамики материальной точки. Зная начальные условия (положение и скорость точки в начальный момент) и закон действующих сил, можно однозначно предсказать положение и скорость материальной точки в любой последующий момент времени. Так в классической механике отображается в математической форме причинная связь явлений, объективно существующая в макроскопическом мире. В микромире причинная связь явлений носит другой характер; ее математическое описание дается квантовой механикой.

Второй закон Ньютона позволяет решить и обратную задачу: по известной траектории и известному закону движения точки можно установить, какие силы действуют на точку и как они изменяются в пространстве и во времени.

Классическим примером решения обратной задачи из истории физики является задача о нахождении действующих на планеты сил по известным траекториям планет и известным законам их движения, сформулированным Кеплером. Эта задача привела Ньютона к открытию закона всемирного тяготения.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕЙСТВУЮЩИХ СИЛ ИЗ ЗАКОНА ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Как известно, закон движения точки может быть задан в естественной, векторной или координатной формах. В соответствии с этим и подходы к решению обратной задачи будут несколько различаться. Рассмотрим их для каждого случая отдельно. Но начнем с определения силы при естественном способе описания движения.

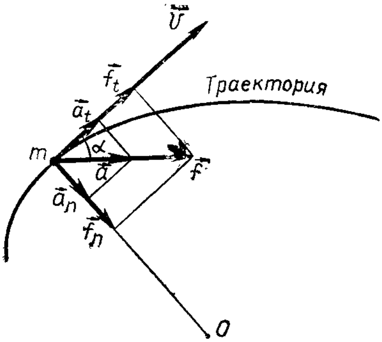


Рис. 4.1

Криволинейное и прямолинейное движение. Из закона движения материальной точки по криволинейной траектории $s = s(t)$ вычисляют тангенциальное, нормальное и полное ускорения:

$$\vec{a}_t = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{\tau},$$

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R}\vec{n} = \frac{1}{R}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\vec{n},$$

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n,$$

где $\vec{\tau}$ и $\vec{n}$ — единичные векторы, направленные соответственно по касательной и нормали к траектории (последний — в сторону центра кривизны); R — радиус кривизны траектории в заданной ее точке (см. рис. 4.1).

Если известна масса m движущейся материальной точки, то по второму закону Ньютона нетрудно определить и действующую силу:

$$\vec{f} = m\vec{a} = m\vec{a}_t + m\vec{a}_n = \vec{f}_t + \vec{f}_n,$$

где $\vec{f}_t$ и $\vec{f}_n$ — составляющие полной силы $\vec{f}$ по двум взаимно перпендикулярным направлениям $\vec{\tau}$ и $\vec{n}$. Составляющая $\vec{f}_t$ изменяет скорость по модулю, а составляющая $\vec{f}_n$ изменяет ее по направлению.

В случае прямолинейного движения $\vec{f}_n = 0$, а $\vec{f}_t = \vec{f} = \frac{d^2s}{dt}\vec{\tau}$. Если же точка движется по криволинейной траектории, например равнопеременно по закону $s = s_0 + v_0t + \frac{a_tt^2}{2}$, то $f_t = ma_t = \text{const}$, а $f_n = \frac{mv^2}{R}$ будет изменяться, так как v и R зависят от положения точки на траектории. Будет меняться и угол α, который вектор $\vec{f}$ образует с вектором скорости

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a_n}{a_t} = \frac{a_n}{\text{const}}.$$

Движение точки по окружности. Это наиболее важный частный случай криволинейного движения. Он отличается от общего случая только тем, что нормальная составляющая силы f_n теперь зависит лишь от скорости движения v, поскольку $R = \text{const}$. При движении точки по окружности нормальная составляющая силы не только перпендикулярна к скорости, но и направлена все время к одной и той же точке пространства — к центру окружности. Поэтому ее называют центростремительной силой и обозначают через $f_{ц.с}$. Результирующая (полная) сила $\vec{f} = \vec{f}_{ц.с} + \vec{f}_t$ при неравномерном движении ($v \neq \text{const}$) образует с вектором скорости $\vec{v}$ угол $\alpha \neq 90°$ (рис. 4.2), который, вообще говоря, не остается постоянным.

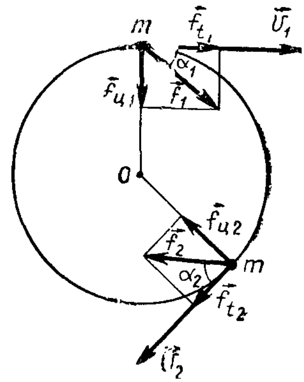


Рис. 4.2

Если движение точки по окружности задано законом изменения угловой координаты $\varphi = \varphi(t)$, где φ — угол поворота радиус-вектора $\vec{R}$, определяющего положение точки на окружности в момент времени t, то тангенциальная и нормальная составляющие силы запишутся так:

$$\vec{f}_t = m\vec{a}_t = m\beta R\vec{\tau}, \quad f_t = m\beta R, \tag{4.1}$$

$$\vec{f}_{ц.с} = m\vec{a}_{ц.с} = m\omega^2 R\vec{n}, \quad f_{ц.с} = m\omega^2 R, \tag{4.2}$$

где ω и β вычисляются из закона движения:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \quad \beta = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Из записи центростремительной силы через угловые характеристики (4.2) видно, что при равномерном движении точки по окружности ($\omega = \text{const}$) модуль центростремительной силы пропорционален радиусу окружности.

Природа центростремительных сил. Приведенная выше формула для центростремительной силы (4.2) ничего не говорит о происхождении этой силы, ее природе.

Центростремительная сила появляется в результате взаимодействия движущегося тела (точки) с другими реальными телами. Получила она специальное название не потому, что имеет какую-то особую природу, а исключительно из-за той роли, какую она выполняет при движении точки по окружности. Сила любой природы (или равнодействующая нескольких сил), если только она все время перпендикулярна скорости движения, является центростремительной.

Центростремительными не могут быть силы трения скольжения, ибо они направлены против движения и, следовательно, перпендикулярными к скорости быть не могут. Рассмотрим несколько примеров.

1. *Центральные силы.* Эти силы, независимо от их природы, выполняют роль центростремительных сил, если они перпендикулярны скорости движущегося тела. Так, гравитационная сила

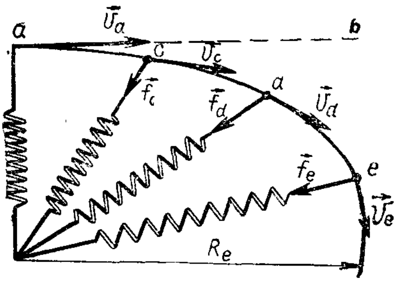


Рис. 4.3

является центростремительной для искусственного спутника Земли, движущегося по круговой орбите; центростремительной будет и кулоновская сила для электрона, обращающегося вокруг ядра по круговой орбите.

Если центральная сила не перпендикулярна скорости (а это зависит от начальных условий), то она вызовет движение материальной точки по некруговой орбите (эллипсу, параболе, гиперболе).

Круговые движения тел играют исключительно важную роль в практической деятельности человека. Нет такой машины, в которой бы не использовалось круговое движение. В образовании центростремительных сил, обусловливающих круговое движение частей машины, первостепенное значение приобретают силы упругости, силы тяжести или их сочетание. Возможны случаи, когда роль центростремительной силы выполняют сила трения покоя, гидростатическая или гидродинамическая сила.

2. *Силы упругости.* Разберем простой опыт. На горизонтальной поверхности стола лежит тело (шар) массой m, которое способно двигаться по поверхности стола без трения. К телу прикреплена пружина, другой конец которой (рис. 4.3) закреплен на поверхности стола. Толчком сообщим телу скорость $\vec{v}_a$ в направлении, перпендикулярном оси пружины.

В отсутствие пружины тело двигалось бы по прямой a, b с постоянной скоростью. Однако пружина будет отклонять тело от этой траектории. За малый промежуток времени после начала движения тело переместится в точку c, которая отстоит от центра несколько дальше, чем начальная точка a. В результате пружина немного растянется. Возникнет сила упругости, которая действует на тело в сторону центра. Вследствие этого скорость тела изменится и по направлению, и по модулю (модуль скорости уменьшится, ибо угол между $\vec{f}_c$ и $\vec{v}_c$ тупой). За малый промежуток времени тело, сохраняя новую скорость, переместится почти по прямой и попадет в точку d. Пружина при этом растянется еще больше. Сила упругости $\vec{f}_d$ возрастает, отчего скорость тела изменится еще больше по направлению и модулю. Наконец, тело достигнет точки e, в которой модуль силы упругости приобретает значение

$$f_e = m\frac{v_e^2}{R_e},$$

где R_e — расстояние точки e от центра. Дальше пружина растягиваться не будет, а тело начнет двигаться по окружности радиуса R_e.

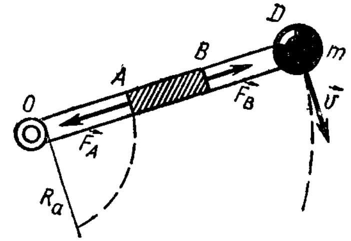


Рис. 4.4

Если повторять опыты, сообщая каждый раз телу различную (по модулю) начальную скорость, мы заметим, что, чем больше по модулю начальная скорость, тем больше растягивается пружина (больше радиус окружности) и, следовательно, больше центростремительная сила, т. е. мы качественно убеждаемся в справедливости зависимости $f_{ц.\,с} \sim R$.

Если в описанном выше опыте заменить пружину стержнем, то он также окажется растянутым, хотя это растяжение будет небольшим. Какой будет деформация растяжения: однородной или неоднородной?

Рассмотрим небольшой участок стержня AB (рис. 4.4). Будем считать, что тело движется по окружности с постоянной скоростью и установилась стационарная деформация. На выделенный участок в неподвижной системе отсчета действуют силы упругости со стороны соседних частей стержня: $\vec{F}_A$ — сила упругости, возникшая в части OA стержня, и $\vec{F}_B$ — сила упругости части BD. Так как рассматриваемый участок AB совершает равномерное движение по окружности радиуса R_A (участок AB мал, и его можно принять за материальную точку), то равнодействующая сила $\vec{F}_{AB} = \vec{F}_A + \vec{F}_B$ должна быть направлена к центру O и являться для участка AB центростремительной силой.

Модуль равнодействующей силы равен $F_{AB} = F_A - F_B$. Отсюда следует, что $F_A > F_B$, а это значит, что силы упругости и растяжение распределены по стержню неодинаково: они возрастают по мере приближения к центру O.

Если массой стержня пренебречь, то деформацию можно считать одинаковой по всей длине. Когда неоднородность деформации не учитывается, говорят, что «тело укреплено на тонкой невесомой нити». Если деформации малы и их можно не учитывать, то говорят, что «тело укреплено на невесомой и нерастяжимой нити». По той же причине, по какой растянут стержень, оказывается растянутым и само прикрепленное к стержню тело. Так что, когда тело принимается за материальную точку, мы, естественно, пренебрегаем его деформацией. А между тем эта деформация имеет принципиаль-

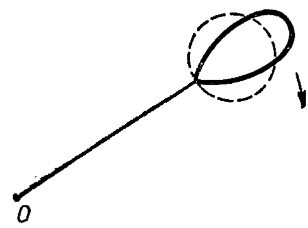


Рис. 4.5

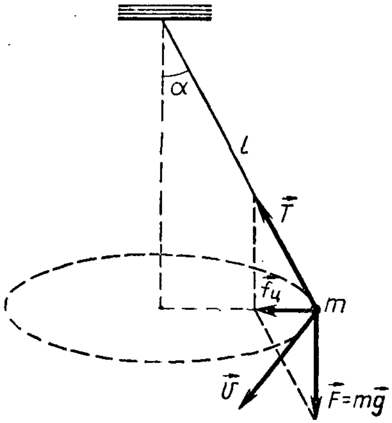


Рис. 4.6

ное значение: именно благодаря деформации тела возникают упругие силы, которые оказывают согласно третьему закону Ньютона противодействие стержню.

Деформацию (растяжение) вращающегося на нити тела можно наблюдать на растяжении надувного (декоративного) шара. Для этого его надо несильно заполнить воздухом и быстро вращать на короткой нити (рис. 4.5).

Деформации твердых тел очень малы и незаметны для глаза.

3. *Центростремительная сила как равнодействующая сил упругости и силы тяжести.* На тонкой нерастяжимой нити подвешен шарик (материальная точка), который совершает движение по окружности в горизонтальной плоскости (рис. 4.6). Центростремительная сила $\vec{f}_{ц.\,с}$ является результирующей действующих на шарик силы тяжести и силы упругости нити T

$$\vec{f}_{ц.\,с} = m\vec{g} + \vec{T}. \tag{4.3}$$

4. Центростремительной силой может быть *сила трения покоя.* Это имеет место при взаимодействии колеса автомашины с дорогой в случае поворота машины на горизонтальном участке. Так как сила трения покоя не может превосходить некоторого максимального значения, то при крутых поворотах (или большой скорости движения на повороте), она не обеспечивает нужной центростремительной силы, и машину «заносит».

Перейдем теперь к определению действующих сил при векторном и координатном способах описания движения материальной точки.

При векторном способе описания движения задается векторная функция

$$\vec{r} = \vec{r}\,(t). \tag{4.4}$$

Ускорение точки определяется формулой

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \tag{4.5}$$

а действующая на точку сила — формулой

$$\vec{f} = m\vec{a} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \tag{4.6}$$

Векторная запись силы (4.6) малопригодна для практических расчетов. Поэтому при расчете сил обычно переходят от векторной к координатной форме записи.

Каждую векторную запись (4.4), (4.5), (4.6) можно представить в декартовых координатах в виде трех скалярных уравнений (проекции векторных равенств на координатные оси).

Рассмотрим в качестве примера плоское движение, заданное уравнениями:

$$x = 0,$$

$$y = y_0 + v_y t,$$

$$z = z_0 + v_z t + \frac{a_z' t^2}{2},$$

где $v_y = \text{const}$ и $a_z' = \text{const}$. По координатным функциям определяем ускорения:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = 0, \quad a_z = \frac{d^2z}{dt^2} = a_z'.$$

Полная сила будет равна:

$$\vec{f} = m\vec{a}_z.$$

Ясно, что эта сила параллельна оси z.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАКОНА ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ ПО ЗАДАННЫМ СИЛАМ

Роль начальных условий. Следует отметить, что однозначное определение закона движения материальной точки массой m по известной силе возможно при условии, что известны положение и скорость движения точки в начальный момент времени ($t=0$). Это так называемые начальные условия. В том, что знание начальных условий необходимо, убеждает следующий простой пример. Пусть на свободное тело действует постоянная по модулю и направлению сила тяжести $\vec{F}_т$. Выясним, как будет двигаться тело. Если больше никаких данных нет, то определенно сказать, как оно будет двигаться, невозможно. Оно может двигаться вертикально вниз или сначала вертикально вверх, а затем — вниз, по вытянутой или сжатой параболе, и т. д. Вид траектории будет зависеть от начальной скорости $\vec{v}_0$. Если $v_0 = 0$, то движение происходит по вертикали. В случае, когда скорость $\vec{v}$ направлена под углом к горизонту, движение происходит по параболе и т. д.

Интегрирование уравнения (4.6) в общем виде, когда сила задана как функция t, $\vec{r}$, $\vec{v}$, — довольно сложная математическая задача. Мы рассмотрим лишь простейший случай, когда на тело действует сила, постоянная по модулю и направлению ($\vec{f} = \text{const}$).

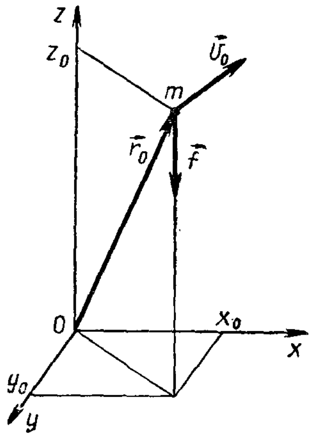


Рис. 4.7

Выберем инерциальную (покоящуюся) систему отсчета с началом координат в точке O (рис. 4.7). Направим ось z декартовой системы координат параллельно действующей силе. Проектируя векторное уравнение (4.6) и начальные векторы $\vec{r}_0$ и $\vec{v}_0$ на оси координат, получим:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=0, \quad m\frac{d^2y}{dt^2}=0, \quad m\frac{d^2z}{dt^2}=-f,$$

$$x=x_0, \quad y=y_0, \quad z=z_0,$$

$$v_x=v_{x0}, \quad v_y=v_{y0}, \quad v_z=v_{z0}.$$

Проинтегрируем первое уравнение системы. Для этого предварительно представим его в следующем виде:

$$m\frac{dv_x}{dt}=0.$$

Умножая на dt и сокращая на m, получим:

$$dv_x=0,$$

откуда

$$v_x=C_1,$$

т. е. проекция скорости по оси x есть постоянная величина во все моменты времени, в том числе и при $t=0$. Следовательно, $C_1=v_{0x}$. Таким образом,

$$v_x=v_{0x}.$$

Аналогично получаем:

$$v_y=v_{0y}.$$

Интегрирование третьего уравнения системы дает:

$$\int dv_z=-\frac{1}{m}\int f\,dt+C_3,$$

$$v_z=-\frac{f}{m}t+C_3.$$

Из начального условия находим:

$$C_3=v_{0z}.$$

Таким образом, для проекций скорости на оси имеем:

$$\begin{aligned} v_x&=v_{0x},\\ v_y&=v_{0y},\\ v_z&=v_{0z}-\frac{f}{m}t. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Теперь полученные уравнения (4.7) проинтегрируем еще раз. Учитывая, что $v_x = \frac{dx}{dt}$, $v_y = \frac{dy}{dt}$, $v_z = \frac{dz}{dt}$, получим:

$$x = \int v_{0x}\,dt + C_4,$$
$$y = \int v_{0y}\,dt + C_5,$$
$$z = \int \left(v_{0z} - \frac{f}{m}t\right) dt + C_6.$$

Так как v_{0x}, v_{0y}, v_{0z} — постоянные величины, их можно вынести за знаки интегралов:

$$\begin{aligned} x &= v_{0x}t + C_4, \\ y &= v_{0y}t + C_5, \\ z &= v_{0z}t - \int \frac{f}{m} t\,dt + C_6 = v_{0z}t - \frac{ft^2}{2m} + C_6. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Постоянные интегрирования определяются из условия, что при $t = 0$, т. е. в начальный момент времени, $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$. Подставляя начальные данные в (4.8), получим:

$$C_4 = x_0, \quad C_5 = y_0, \quad C_6 = z_0.$$

Окончательно уравнения движения в координатной записи будут выглядеть так:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_{0x}t, \\ y &= y_0 + v_{0y}t, \\ z &= z_0 + v_{0z}t - \frac{ft^2}{2m}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Применим полученный результат к задаче о свободном движении тела в поле тяготения Земли.

Пусть тело брошено под углом α к горизонту из начала координат (рис. 4.8) со скоростью $\vec{v}_0$, лежащей в плоскости x, z. Согласно этим данным начальные условия запишутся так:

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0, \; v_{0x} = v_0 \cos\alpha,$$
$$v_{0y} = 0, \; v_{0z} = v_0 \sin\alpha.$$

Из (4.9) получаем уравнения движения:

$$x = v_0 t \cos\alpha,$$
$$y = 0,$$
$$z = v_0 t \cdot \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

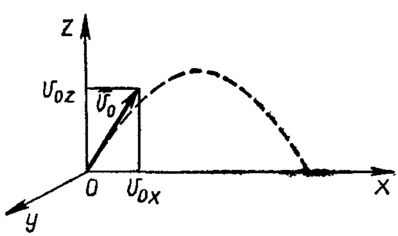


Рис. 4.8

Исключая t, **найдем** уравнение траектории:

$$z = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

Это парабола со смещенной вершиной. Отметим, что вид параболы не зависит от массы движущегося тела.

3. НЕСВОБОДНОЕ ДВИЖЕНИЕ

До сих пор мы предполагали, что тело, на которое действует сила, свободно, т. е. его движение ничем (никакими связями) не ограничивалось. В этом случае расчет движения состоит в определении вида траектории и закона движения. Это, в общем случае, довольно сложная задача.

При несвободном движении траектория задается связями и поэтому в ряде случаев известна. Остается найти только закон движения. Задача, таким образом, упрощается, хотя имеет и свои трудности.

При решении этой задачи применяется следующий подход. Принимают, что тело и в этом случае движется свободно, но в систему сил, действующих на него, включают все силы: как активные ($\vec{F}$), вызывающие движение, так и пассивные ($\vec{R}$), каковыми являются силы реакции связей. Поэтому уравнение движения принимает вид:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m\vec{a} = \vec{F} + \vec{R}. \qquad (4.10)$$

При его решении используются начальные условия:

$$\vec{r} = \vec{r}_0, \quad \vec{v} = \vec{v}_0 \text{ при } t = 0. \qquad (4.11)$$

Рассмотрим случай, когда связь обусловливает плоское криволинейное движение тела. Естественно, кривизна в каждой точке траектории известна из геометрии связи. Будем считать, что реакция связи $\vec{R}$ в общем случае не перпендикулярна к связи (т. е. имеется трение). Спроецируем векторное уравнение (4.10) на касательную и нормаль к траектории в некоторой (произвольной) точке (рис. 4.9):

$$ma_t = F_t - R_t, \qquad (4.12)$$

$$ma_n = F_n - N. \qquad (4.13)$$

Начальные условия задаются теперь относительно некоторой точки на траектории:

$$s = s_0, \quad v = v_0 \text{ при } t = 0.$$

Составляющая $R_t = F_{тр}$ является силой трения; она зависит от состояния поверхности связи и трущейся поверхности движущегося тела[1]. Уравнение (4.12), записанное в дифференциальной форме (s — дуговая координата)

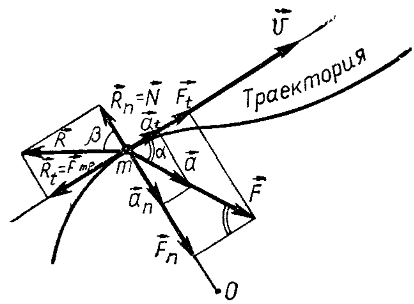


Рис. 4.9

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = F_t - F_{тр}, \quad (4.14)$$

(где $F_t > F_{тр}$) позволяет при первом интегрировании определить по известным F_t и $F_{тр}$ закон изменения скорости $v = v(t)$, а при повторном интегрировании — закон движения по траектории $s = s(t)$.

Сила F_t может зависеть от времени t, координаты s или скорости v; она может зависеть и от всех этих параметров вместе.

Что касается силы трения $F_{тр}$, то в случае сухого трения она приблизительно постоянна ($F_{тр} = \mu N$), а в случае жидкого трения она пропорциональна скорости или квадрату скорости.

Если сила $F_t = \text{const}$, а $F_{тр} = \mu N$, то уравнение (4.14) интегрируется достаточно просто. Первый интеграл дает зависимость скорости v от времени t:

$$v = \frac{1}{m}(F_t - \mu N)t + C_1, \quad C_1 = v_0.$$

Второй интеграл дает закон движения:

$$s = \int\left[\frac{1}{m}(F_t - \mu N)t + v_0\right]dt + C_2 = \frac{F_t - \mu N}{m}\frac{t^2}{2} + v_0 t + C_2.$$

Уравнение (4.13) связывает нормальное ускорение с проекциями сил на нормаль. Величину $a_n = \frac{v^2}{R}$ можно считать известной, так как R задается связями, а v — вычисляют из первого уравнения (4.12). Следовательно, соотношение (4.13), которое можно записать в форме

$$\frac{mv^2}{R} = F\sin\alpha - N, \quad (4.15)$$

позволяет, если это нужно, определить нормальную составляющую силы реакции связи.

Если связь гладкая, то $F_{тр} = 0$ и сила реакции нормальна к связям. В этом случае $F_t = F\cdot\cos\alpha$, $F_n = F\sin\alpha$, и система

---

[1] От состояния поверхностей зависит сила трения, а следовательно, и угол β (рис. 4.9). Так, если поверхности гладкие, то $F_{тр} = 0$ и $\beta = 0$.

уравнений движения запишется так:

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=F\cos\alpha, \tag{4.16}$$

$$\frac{mv^2}{R}=F\sin\alpha-N. \tag{4.17}$$

Из уравнения (4.16) видно, что при гладких связях закон движения тела по траектории зависит только от активной силы (точнее, от ее тангенциальной составляющей). Уравнение же (4.17) служит для определения реакции связи. Обычно из-за трудности интегрирования уравнения движения по траектории (4.14) или (4.16) в курсе общей физики решают задачи в основном на отыскание сил реакции. В ряде случаев решение таких задач не требует предварительного интегрирования уравнения движения по траектории (4.14), ибо нужная скорость v может быть определена косвенным путем на основе теорем об изменении импульса или кинетической энергии тела. Нередко скорость v просто задается условиями задачи.

Вопросы для самопроверки

1. Как формулируются прямая и обратная задачи динамики точки? Какую при этом роль выполняет второй закон Ньютона? Почему его называют основным уравнением динамики? Что представляет собой уравнение движения? Что такое закон движения?

2. Опишите последовательность действий при определении силы, если известен закон прямолинейного движения материальной точки. Можно ли определить силу, если известен закон изменения скорости? Пусть, например, скорость меняется по закону $\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{b}t$. Чему равна сила, если известно, что масса тела m?

3. Опишите последовательность действий при расчете силы, если задан закон движения точки по криволинейной траектории. Как направлена тангенциальная составляющая силы и какова ее роль? Как направлена нормальная составляющая силы? Изменяет ли она модуль скорости?

4. При несвободном движении точки нормальная составляющая появляется как сумма проекций на нормаль активных сил и сил реакции связи. Как же появляется нормальная составляющая, если тело под действием силы тяжести движется свободно по криволинейной траектории?

5. Разберите случай полета снаряда, выпущенного под углом к горизонту. Покажите в различных точках траектории полную силу, ее нормальную и тангенциальную составляющие. Какие из этих сил меняются и как? Какие остаются неизменными?

6. Разберите движение точки по эллипсу, вызванное центральной силой. Покажите на рисунке полную силу, ее нормальную и тангенциальную составляющие в различных точках траектории. Будет ли нормальная составляющая направлена к одной и той же точке пространства? Какова роль тангенциальной составляющей на отдельных участках траектории? На каких участках эта сила является ускоряющей, а на каких — замедляющей?

7. Покажите, что при движении точки по окружности нормальная составляющая силы направлена все время к центру окружности. Как будет изменяться по модулю эта составляющая, если точка движется по окружности замедленно (ускоренно)?

8. Как направлена полная сила при неравномерном движении точки по окружности? Как найти угол, образуемый этой силой с вектором скорости? Может ли этот угол быть больше 90°?

9. Точка массой m движется по окружности радиуса R с угловым ускорением β. Можно ли по этим данным определить полную силу, действующую на точку?

10. Точка массы m движется по окружности радиуса R по закону $s = s_0 + bt + \frac{bt^2}{2}$. Найдите полную силу как функцию времени. При каком условии полная сила будет постоянной? Как она при этом направлена?

11. При равномерном движении точки по окружности на нее должна действовать сила, направленная все время к центру окружности. Опишите опыт, который бы наглядно показывал существование такой силы.

12. Приведите примеры, когда центростремительной силой является сила гравитационного взаимодействия, электрическая сила, магнитная сила. Приведите примеры, когда роль центростремительной силы выполняет сила упругости растяжения или сжатия, равнодействующая сил упругости и силы тяжести, сила трения покоя. Поясните, почему сила трения скольжения не может быть центростремительной силой. Зачем на поворотах одну сторону дороги делают выше другой?

13. Поясните, почему деформируется нить (стержень, пружина), удерживающая тело, движущееся по окружности. Почему при этом нить деформируется неодинаково по всей длине? Показать, что деформация больше в местах, расположенных ближе к оси вращения.

14. Поясните, почему на поворотах корпус автомашины деформируется (скашивается). Уменьшится ли «скашивание», если профиль дороги имеет наклон к горизонту?

15. Опишите порядок расчета силы, действующей на точку, если задан закон движения в векторной и координатной форме.

16. В чем состоит основная задача динамики? Что такое «начальные условия»? Какова их роль в определении закона движения точки? Приведите пример, поясняющий, что при одной и той же действующей силе закон движения точки и вид траектории будет существенно зависеть от начальных условий.

17. Определите натяжение нити конического маятника (рис. 4.6). Почему нельзя считать, что $T = mg \cos \alpha$?

Занятие 9

ВТОРОЙ ЗАКОН НЬЮТОНА В ОБЩЕЙ ФОРМЕ. ИМПУЛЬС. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

1. ОБЩАЯ ФОРМУЛИРОВКА ВТОРОГО ЗАКОНА НЬЮТОНА ИМПУЛЬС ТЕЛА

Второй закон Ньютона, записанный в форме

$$m\vec{a} = \vec{f},$$

предполагает, что масса материальной точки постоянна.

Однако в природе и технике встречаются такие случаи, когда масса тела в процессе движения изменяется.

Изменение массы может происходить вследствие отделения от тела или присоединения к нему других тел (частиц). Например, масса ракеты при запуске убывает (и довольно значительно) по мере отделения от нее продуктов сгорания топлива. По той же причине, но в меньшей степени, уменьшается масса самолета, парохода, автомашины во время их движения. Возможны также случаи, когда масса, наоборот, возрастает в процессе движения. Так, масса скатывающегося с горы снежного кома нарастает вследствие прилипания снега.

Если изменение массы движущегося тела относительно невелико, то ее можно с известным приближением считать постоянной. Тогда закон движения тела устанавливается из уравнения $m\vec{a}=\vec{f}$.

Поясним, как от частной записи закона можно прийти к общей[1]. Запишем второй закон Ньютона:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{f}. \tag{4.18}$$

Так как массу тела считаем постоянной, то m можно ввести под знак дифференцирования:

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt}=\vec{f}. \tag{4.19}$$

Полученное уравнение при $m=\text{const}$ полностью эквивалентно уравнению (4.18). Однако, несмотря на эквивалентность, выражение (4.19) имеет иной, более глубокий смысл вследствие появления в нем новой физической величины $m\vec{v}$, играющей в физике исключительно важную роль.

Физическую величину, измеряемую произведением массы тела на скорость его движения, называют импульсом тела или просто импульсом[2] и обозначают через $\vec{p}$:

$$\vec{p}=m\vec{v}. \tag{4.20}$$

Импульс **тела (материальной точки) есть вектор, направленный в сторону скорости** $\vec{v}$.

Единица измерения импульса устанавливается из соотношения $p=mv$. В системе СИ за единицу измерения импульса принимается импульс, которым обладает тело массой в 1 кг, движущееся со скоростью 1 м/с. Эту единицу называют «метр-килограмм на секунду» (м·кг/с).

Используя понятие импульса, можно второй закон Ньютона записать так:

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{f}. \tag{4.21}$$

До сих пор мы полагали, что масса тела постоянна. В этом случае можно записать следующую цепочку равенств:

$$\Delta\vec{p}=\Delta(m\vec{v})=m(\Delta\vec{v})=m(\vec{v}_2-\vec{v}_1)=m\vec{v}_2-m\vec{v}_1=\vec{p}_2-\vec{p}_1. \tag{4.22}$$

---

[1] Это не есть вывод. Вывода закона не существует. Закон — результат обобщения опыта.

[2] Старое название — *количество движения.*

Вследствие постоянства массы импульсы $\vec{p}_2$ и $\vec{p}_1$ имеют разные значения только благодаря различию конечной и начальной скоростей.

Но импульс может измениться не только за счет изменения скорости, но и за счет изменения массы тела:

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = m_2\vec{v}_2 - m_1\vec{v}_1, \tag{4.23}$$

где m_1, m_2 — массы тела соответственно в начальный и конечный моменты времени.

Обобщение второго закона Ньютона состоит в том, что выражение (4.21), полученное в предположении, что масса постоянна, считается справедливым и для тел с переменной массой; при этом принимается, что изменение импульса может происходить не только за счет изменения скорости, но и за счет изменения массы.

Таким образом, второй закон Ньютона в общей форме имеет следующий вид:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{f} \quad \text{или} \quad \frac{d\,(m\vec{v})}{dt} = \vec{f}, \tag{4.24}$$

где m — не обязательно постоянная величина.

Читается закон так: **изменение импульса тела за секунду в данный момент равно приложенной силе и происходит по направлению той прямой, по которой действует эта сила.**

Или короче: **первая производная по времени от импульса тела равна приложенной силе.**

Величайшей прозорливостью Ньютона явилось то, что он, обобщая опытные данные, смог подметить общее, а именно: действующая сила выражается через изменение некоей характерной для тела величины $m\vec{v}$, названной им «количеством движения». Введение в физику этого понятия оказалось чрезвычайно плодотворным. Справедливость закона (4.24) в общем случае подтверждается тем, что все следствия, вытекающие из него, подтверждаются опытом, практикой. Если масса тела постоянна, то, вынося ее в (4.24) за знак дифференцирования, получим известный нам для тел постоянной массы закон (4.18).

Если же масса непостоянна, то из (4.24) следует.

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\,\frac{dm}{dt} = \vec{f}.$$

Отсюда, если учесть, что $\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}$, получаем:

$$m\vec{a} = \vec{f} - \vec{v}\,\frac{dm}{dt}.$$

А это означает, что произведение массы тела на ускорение $(m\vec{a})$ теперь не равно силе и в общем случае не направлено по линии действия силы, как это было в случае постоянной массы.

Задача о движении тела переменной массы, как видим, более сложная, чем задача о движении тела постоянной массы. Мы ею займемся на следующем занятии.

2. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Закон сохранения в общем виде. Из общей формулировки второго закона Ньютона следует, что в случае отсутствия сил (или равенства нулю равнодействующей)

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=0. \tag{4.25}$$

Но если изменение некоторой величины **равно нулю**, значит, сама величина является постоянной:

$$\vec{p}=\text{const}.$$

Мы пришли к закону сохранения импульса материальной точки: **в отсутствие сил импульс материальной точки сохраняется неизменным по модулю и направлению.**

Для тел постоянной массы это означает, что в отсутствие сил скорость тела сохраняется.

Координатная запись второго закона Ньютона. Сохранение импульса по координатным осям. Проецируя векторное уравнение (4.24) на оси координат, придем к трем скалярным уравнениям:

$$\frac{dp_x}{dt}=f_x,\quad \frac{dp_y}{dt}=f_y,\quad \frac{dp_z}{dt}=f_z. \tag{4.26}$$

Если действующая сила равна нулю ($f=0$), то это значит, что и все проекции этого вектора тоже равны нулю ($f_x=f_y=$ $=f_z=0$). В этом случае из (4.26) следует, что

$$\frac{dp_x}{dt}=0,\quad \frac{dp_y}{dt}=0,\quad \frac{dp_z}{dt}=0.$$

Отсюда получаем, что $p_x=\text{const}$, $p_y=\text{const}$, $p_z=\text{const}$, т. е. все составляющие импульса $\vec{p}$ по координатным осям сохраняют свои значения.

Но может получиться, что сила $\vec{f}$ имеет только одну отличную от нуля составляющую, например $\vec{f}_x=\vec{f}$ (сила $\vec{f}$ направлена по оси x). Тогда уравнения (4.26) принимают вид:

$$\frac{dp_x}{dt}=f,\quad \frac{dp_y}{dt}=0,\quad \frac{dp_z}{dt}=0.$$

Это значит, что изменяется составляющая импульса лишь по той оси, вдоль которой действует сила, а составляющие импульса по осям, вдоль которых не действуют силы, сохраняются.

3. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ ИМПУЛЬСА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Из второго закона Ньютона в общей форме следует, что

$$d\vec{p}=\vec{f}\,dt. \tag{4.27}$$

Произведение силы на время ее действия называют *импульсом силы* (специального обозначения эта величина не имеет). Единица импульса силы имеет наименование ньютон-секунда. Размерность импульса силы совпадает с размерностью импульса тела. В системе СИ за единицу измерения импульса силы принимается импульс, возникающий в результате действия постоянной силы в 1Н в течение 1 с.

Предположим, что сила $\vec{f}$ направлена по оси x. Тогда проекции импульса p_y, p_z будут постоянными, а проекция $p_x=p$ изменяется в соответствии с законом

$$dp=f\,dt. \tag{4.28}$$

В случае, когда $p_y=p_z=0$ (материальная точка движется вдоль оси x прямолинейно), соотношение (4.28) определяет изменение полного импульса за время dt. Определим изменение импульса прямолинейного движения точки за конечный промежуток времени от начального момента до момента t. Для этого разобьем этот промежуток времени на малые интервалы Δt_i так, чтобы внутри каждого интервала силу f_i можно было считать постоянной, и найдем изменение импульса за каждый такой интервал:

$$\Delta p_i=f_i\cdot\Delta t_i.$$

Складывая затем все изменения импульса Δp_i, получим изменение импульса за весь промежуток времени:

$$p_2-p_1\approx\sum f_i\cdot\Delta t_i.$$

Это равенство будет точным в пределе при $\Delta t_i\to 0$.

Если $f=f(t)$ является известной функцией t, то на графике этой функции (рис. 4.10) произведение $f_i\cdot\Delta t_i$ изобразится площадью малого прямоугольника. Сумма $\Sigma f_i dt$ изобразится на том же графике в виде площади ступенчатой фигуры. В пределе, когда число элементов Δt_i стремится к бесконечности, сумма перейдет в определенный интеграл:

$$\sum_i f_i\cdot\Delta t_i\to\int_0^t f\,dt,$$

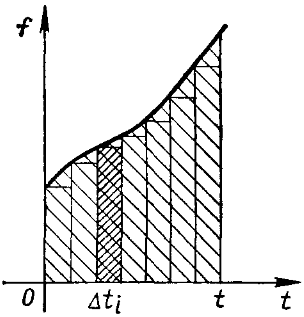


Рис. 4.10

который на графике (рис. 4.10) изобразится в виде площади фигуры, ограниченной сверху графиком $f = f(t)$.

Итак, точное значение изменения импульса тела определяется формулой

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_0^t f\,dt, \qquad (4.29)$$

или, считая массу постоянной,

$$mv_2 - mv_1 = \int_0^t f\,dt.$$

В общем случае, когда направление силы не остается постоянным, изменение импульса выражается векторным равенством

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_0^t \vec{f}\,dt. \qquad (4.30)$$

Соотношения (4.29) и (4.30) называют теоремой об изменении импульса тела. Эта теорема утверждает, что изменение импульса тела за конечный промежуток времени равно суммарному импульсу силы за тот же промежуток. Соотношение (4.29) показывает, что при заданном законе изменения силы $f = f(t)$ можно подсчитать изменение импульса за каждый конечный промежуток времени. Так, если сила постоянна, то

$$p_2 - p_1 = ft,$$

т. е. изменение импульса тела равно импульсу постоянной силы за время t.

Теорема об изменении импульса часто используется для решения обратной задачи: по изменению импульса тела за конечный промежуток времени определить среднюю за этот промежуток силу $f_{ср}$. Это особенно важно в тех случаях, когда необходимо оценить силу, закон изменения которой неизвестен.

Согласно известной в математике теореме о среднем значении подынтегральной функции

$$\int_0^t f\,dt = f_{ср}\int_0^t dt = f_{ср}t.$$

Учитывая это и используя формулу (4.29), найдем:

$$f_{ср} = \frac{p_2 - p_1}{t}. \qquad (4.32)$$

Рассмотрим пример. Из собственного опыта многие знают, что человек может пройти по тонкому льду, если он очень быстро переставляет ноги. Подошва ноги человека, идущего по льду, находится в контакте со льдом некоторый промежуток времени Δt, который зависит от быстроты шага. За этот промежуток на лед действует импульс силы $P \cdot \Delta t$ (где P — вес человека). Хотя вес и большой, но за счет того, что промежуток времени Δt мал, импульс будет небольшим. Он вызовет небольшое изменение количества движения льда, находящегося непосредственно под ступней:

$$P \cdot \Delta t = mv_2 - mv_1 = mv_2.$$

Скорость перемещения льда v_2 оказывается небольшой, и за время контакта Δt поверхность льда под подошвой прогибается настолько мало, что лед не разрушится: возникшие при этом силы упругости не дадут льду уйти вниз.

Пренебрегая небольшим перемещением льда под подошвой, можно сказать, что силы упругости льда сообщат подошве такой же импульс Δp, но противоположного направления. Средняя сила реакции льда, действующая на подошву, равна:

$$f_{ср} = \frac{\Delta p}{\Delta t}.$$

Средняя сила реакции льда за время τ одного шага (т. е. за промежуток времени между двумя последовательными соприкосновениями подошвы со льдом) будет несколько меньше, так как $\tau > \Delta t$:

$$f'_{ср} = \frac{\Delta p}{\tau}.$$

Если шаги делать быстро (τ мало), то можно достичь равенства $f'_{ср} = P$. Тогда средняя сила реакции льда уравновешивает действующую на человека силу тяжести. В принципе при очень быстрой ходьбе можно пройти и по поверхности воды, а не только льда. Но необходимая для этого скорость ходьбы оказывается недостижимой, что делает ходьбу по воде неосуществимой.

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте второй закон Ньютона в самой общей форме. В чем отличие этой формулировки от формулировки, выражаемой уравнением $m\vec{a} = \vec{f}$?

2. В тексте приводятся рассуждения, поясняющие переход от частной к общей формулировке второго закона Ньютона. В каком месте этих рассуждений сделано обобщающее допущение и в чем оно состоит? Чем доказывается правильность этого допущения?

3. Приведите примеры, когда масса движущегося тела изменяется. Покажите, что для тела с изменяющейся массой произведение $m\vec{a}$ не равно действующей силе и не направлено (в общем случае) в сторону этой силы. Укажите случай, когда произведение $m\vec{a}$ и при изменяющейся массе направлено в сторону действующей силы.

4. Что называют импульсом тела? В каких единицах измеряется импульс тела?

5. Что называют импульсом силы? Как подсчитывается импульс силы за конечный промежуток времени, когда сила не изменяется и когда она изменяется во времени?

Как изображается импульс силы за конечный промежуток времени на графике f, t? Как связан импульс меняющейся силы, взятый за конечный промежуток времени, со средним значением силы в этом промежутке? Покажите на графике f, t импульс переменной силы, выраженный через среднюю силу.

6. Запишите связь изменения импульса тела с импульсом силы в дифференциальной форме (для бесконечно малого промежутка времени). Напишите ту же связь в интегральной форме, т. е. для конечного промежутка времени. В чем состоит теорема об изменении импульса тела?

7. Сформулируйте закон сохранения импульса материальной точки.

8. Сформулируйте закон сохранения для составляющей импульса. Может ли быть так, чтобы импульс изменился, а его составляющие по двум взаимно перпендикулярным направлениям (или только по одному направлению) оставались неизменными? Как в этом случае действует сила?

9. Как использовать теорему об изменении импульса тела за конечный промежуток времени при расчете среднего значения силы в этом промежутке. Приведите график периодически изменяющейся силы и покажите на этом графике среднюю силу $f_{ср}$.

10. Почему массивное тело реагирует лишь на среднее значение периодически изменяющейся силы, а тело очень малой массы отвечает на все особенности изменения силы?

11. Два поезда движутся равномерно: один — по прямому горизонтальному пути, второй — по искривленному пути. Будет ли в обоих случаях импульс неизменным? Подсчитайте изменение импульса за секунду во втором случае. Необходимыми данными задайтесь сами. Как направлен в этом случае вектор $\frac{d\vec{p}}{dt}$ и вектор $\Delta\vec{p}$? Как направлены эти векторы при неравномерном движении поезда по прямому и криволинейному пути? Какое направление имеют в этих случаях импульсы?

12. Железнодорожный состав проходит под неподвижным желобом, по которому в открытые вагоны ссыпается уголь, падающий в вагоны вертикально. Будет ли изменяться импульс состава в следующих случаях: а) до начала ссыпания угля и во время ссыпания поезд двигался с выключенными двигателями (трением пренебречь); б) поезд двигался с включенными двигателями, причем машинист принимал все меры, чтобы при загрузке скорость поезда поддерживалась постоянной? Какое значение имеет в этой задаче оговорка, что уголь падает в вагоны вертикально? Как бы изменились ответы на все поставленные вопросы, если бы уголь ссыпался в вагоны по желобу, наклоненному в сторону движения поезда? по желобу, наклоненному в противоположную сторону?

Раздел V
ДИНАМИКА СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

Всякую механическую систему можно представить схематически в виде системы материальных точек, взаимодействующих между собой. Если взаимное расположение материальных точек изменяется, то систему называют *изменяемой*. В противном случае — *неизменяемой*. Примером неизменяемой системы может служить твердое тело. В этом разделе мы изучим изменяемые системы. Выводы, которые будут получены для таких систем, будут справедливы и для неизменяемых систем. Однако неизменяемые системы имеют свою специфику, о чем мы будем говорить в связи с изучением механики твердого тела.

Занятие 10
ПРИМЕНЕНИЕ ЗАКОНОВ НЬЮТОНА К СИСТЕМЕ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

Можно ли описать движение системы в целом? Именно в целом, ибо описать движение каждой точки, зная действующие внутренние и внешние силы, в принципе не представляет труда.

Однако описывать движение системы через движение каждой ее точки, во-первых, слишком громоздко, во-вторых, такое описание не раскрывает особенностей поведения системы как целого.

Рассматривая систему материальных точек как целое, мы должны прежде всего ввести понятия импульса, а затем попытаться связать его с силами, действующими на систему.

1. ИМПУЛЬС СИСТЕМЫ

Пусть имеется система из N взаимодействующих материальных точек. Выберем инерциальную систему отсчета с началом в точке O (рис. 5.1). В выбранной системе отсчета, которую

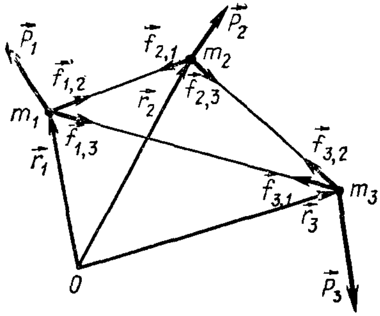


Рис. 5.1

считаем неподвижной, материальные точки имеют импульсы $\vec{p}_1, \vec{p}_2 \ldots$.

Назовем импульсом системы геометрическую сумму импульсов всех материальных точек, входящих в нее:

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots + \vec{p}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i. \tag{5.1}$$

Определяя таким образом импульс системы, мы допускаем, что импульс обладает свойством аддитивности: импульс всей системы равен сумме импульсов ее отдельных частей. Справедливость такого допущения доказывается тем, что все вытекающие из него следствия подтверждаются опытом [1].

Из принятого определения импульса системы (5.1) следует, что изменение импульса системы за секунду будет равно сумме изменений за секунду импульсов всех точек системы:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{p}_i}{dt}. \tag{5.2}$$

2. СУММА ВНУТРЕННИХ СИЛ СИСТЕМЫ

Не вдаваясь в детали устройства системы, можно, опираясь лишь на третий закон Ньютона, вполне строго доказать, что сумма всех внутренних сил системы равна нулю.

Для системы из двух материальных точек это утверждение доказывается просто. Так как по третьему закону Ньютона

$$\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21},$$

то

$$\vec{f}_{12} + \vec{f}_{21} = 0, \tag{5.3}$$

т. е. сумма внутренних сил равна нулю.

Полученный результат можно обобщить на систему, состоящую из N материальных точек. Запишем суммы внутренних сил, действующих на каждую точку системы.

---

[1] Можно показать, что аддитивность импульса и массы вытекает из основных свойств пространства: однородности и изотропности. Эти величины перестают быть аддитивными, если скорость движения тел становится соизмеримой со скоростью света (при этом изменяются свойства самого пространства).

Для первой точки

$$\vec{f}_{12}+\vec{f}_{13}+\ldots+\vec{f}_{1N}=\sum_{j=1}^{N}{}'\vec{f}_{1j},$$

для второй точки

$$\vec{f}_{21}+\vec{f}_{23}+\ldots+\vec{f}_{2N}=\sum_{j=1}^{N}{}'\vec{f}_{2j},$$

. . . .

для N-ой точки

$$\vec{f}_{N1}+\vec{f}_{N2}+\ldots+\vec{f}_{N,N-1}=\sum_{j=1}^{N}{}'\vec{f}_{Nj}.$$

Учитывая, что $\vec{f}_{ij}=\vec{f}_{ji}$, после сложения получим:

$$\sum_{i=1}^{N}(\vec{f}_{i1}+\vec{f}_{i2}+\ldots+\vec{f}_{iN})=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}{}'\vec{f}_{ij}=$$
$$=(\vec{f}_{12}+\vec{f}_{21})+(\vec{f}_{13}+\vec{f}_{31})+\ldots. \quad (5.4)$$

Отметим, что в полученной сумме $\sum\limits_{i=1}^{N}{}'\vec{f}_{ij}$ штрих означает, что в ней отсутствуют члены, для которых $j=i$. Пары сил, стоящие в скобках, согласно третьему закону Ньютона равны по модулям и противоположно направлены. Поэтому сумма в каждой скобке равна нулю. Следовательно, равна нулю и полная сумма внутренних сил системы.

3. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЫ

На каждую точку замкнутой системы действуют только внутренние силы. Так, на i-ю материальную точку действуют силы $\vec{f}_{i1}, \vec{f}_{i2}, \ldots, \vec{f}_{iN}$ (кроме $\vec{f}_{ii}$). Под действием этих сил материальная точка получает изменение импульса, которое будет связано с действующими силами вторым законом Ньютона:

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt}=(\vec{f}_{i1}+\ldots+\vec{f}_{iN})=\sum_{j}^{N}{}'\vec{f}_{ij}. \quad (5.5)$$

Изменение импульса всей системы согласно (5.2) будет равно сумме изменений импульсов его точек:

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=\sum_{i=1}^{N}\frac{d\vec{p}_i}{dt}=\sum_{i=1}^{N}(\vec{f}_{i1}+\vec{f}_{i2}+\ldots+\vec{f}_{in})=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}{}'\vec{f}_{ij}=0,$$

ибо сумма всех внутренних сил системы равна нулю. Итак,

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=0,$$

откуда

$$\vec{P}=\vec{p}_1+\vec{p}_2+\ldots+\vec{p}_N=\overrightarrow{\text{const}}. \quad (5.6)$$

Мы пришли к закону сохранения импульса системы: **импульс замкнутой системы материальных точек есть величина постоянная, или, другими словами, в отсутствие внешних сил сумма импульсов всех точек системы остается постоянной, какие бы изменения внутри системы ни происходили.** Это значит, что в процессе взаимодействия частицы системы лишь обмениваются импульсами, оставляя полный импульс системы неизменным.

Поскольку выбор инерциальной системы отсчета произволен, то значение постоянной в уравнении (5.6) будет неодинаковым в разных системах отсчета. В частности, можно выбрать такую инерциальную систему отсчета, в которой эта постоянная равнялась бы нулю. Ниже мы покажем, что начало координат такой системы отсчета совпадает с центром масс системы.

Следует обратить внимание на то, что закон сохранения импульса системы явился прямым следствием третьего закона Ньютона. Так как действие равно противодействию в любой момент времени в процессе взаимодействия частей системы (в этом состоит особенность ньютоновских сил!), то сумма импульсов частей системы также будет иметь одно и то же значение во все моменты времени. Однако допущение о ньютоновском характере сил взаимодействия не всегда выполняется на практике, так как не всегда можно считать, что действия тел друг на друга передаются мгновенно. В действительности воздействия передаются не мгновенно, но с конечной скоростью, не превышающей скорость света. Так, что в некоторый момент времени силы взаимодействия f_{12} и f_{21} могут быть и не равны друг другу. Но тогда не будет постоянной сумма импульсов системы. Однако можно показать, что сумма импульсов до взаимодействия тел будет в точности равна сумме импульсов тел после взаимодействия даже в том случае, когда в процессе самого взаимодействия суммарный импульс не сохраняется. Таким образом, закон сохранения импульса для начальных и конечных стадий взаимодействия является самостоятельным законом природы, а не следствием законов Ньютона.

4. ЦЕНТР МАСС СИСТЕМЫ

В курсе аналитической геометрии вводится понятие *центра масс* (ЦМ) системы N материальных точек, массы которых $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_N$, как некой точки пространства, положение которой относительно начала координат определяется радиус-вектором $\vec{R}_{\text{ЦМ}}$, определяемым формулой

$$\vec{R}_{\text{ЦМ}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i}. \qquad (5.7)$$

Это соотношение эквивалентно трем координатным соотношениям (рис. 5.2):

$$x_{ЦМ} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i}, \quad y_{ЦМ} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i y_i}{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i},$$

$$z_{ЦМ} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i z_i}{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i}.$$

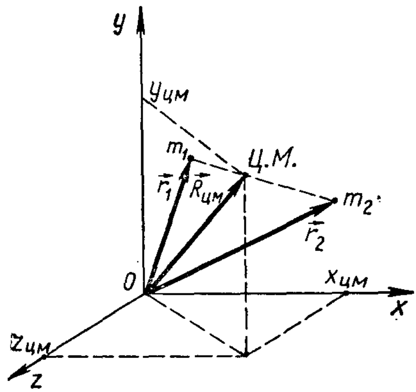


Рис. 5.2

В процессе движения материальных точек их радиус-векторы $\vec r_i$, а следовательно, и радиус-вектор центра масс $\vec R_{ЦМ}$ будут изменяться. Первая производная от $\vec R_{ЦМ}$ по времени дает скорость перемещения центра масс:

$$\vec v_{ЦМ} = \frac{d\vec R_{ЦМ}}{dt} = \frac{m_1 \frac{d\vec r_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec r_2}{dt} + \ldots}{\sum m_i} = \frac{m_1 \vec v_1 + m_2 \vec v_2 + \ldots}{\sum m_i} = \frac{\vec p_1 + \vec p_2 + \ldots}{\sum m_i}.$$

Итак,

$$\vec v_{ЦМ} = \frac{\vec P}{m}, \tag{5.8}$$

где $\vec P = \sum\limits_{i=1}^{N} \vec p_i$ — момент импульса системы, $m = \sum\limits_{i=1}^{N} m_i$ — масса системы. Заметим, что отсюда вытекает аддитивность массы.

Если определить из равенства (5.8) импульс системы, то получим:

$$\vec P = \vec p_1 + \vec p_2 + \ldots + \vec p_N = \vec v_{ЦМ} m, \tag{5.9}$$

т. е. **импульс системы материальных точек равен импульсу, который имел бы центр масс, если бы в нем была сосредоточена вся масса системы.** Это кратко выражают так: **импульс системы равен импульсу центра масс.**

Так как для замкнутой системы импульс остается постоянным:

$$\vec p_1 + \vec p_2 + \ldots + \vec p_N = \vec v_{ЦМ} m = \overrightarrow{\text{const}}, \tag{5.10}$$

то центр масс замкнутой системы движется равномерно и прямолинейно ($\vec v_{ЦМ} = \overrightarrow{\text{const}}$). По этой причине центр масс назван центром инерции.

Мы пришли в сущности к обобщению закона инерции на случай системы из произвольного числа материальных точек.

Из соотношений (5.7) и (5.9) видно, что если начало координат (см. рис. 5.2.) поместить в центр масс (система отсчета при этом останется инерциальной, так как центр масс движется равномерно и прямолинейно), то $\vec{R}_{ЦМ}=0$, $\vec{v}_{ЦМ}=0$. Следовательно,

$$\vec{P}=\vec{p}_1+\vec{p}_2+\ \dots\ +\vec{p}_N=0.$$

Значит, центр масс есть точка пространства, относительно которой полный импульс замкнутой системы равен нулю.

Таким образом, можно выбрать координатную систему, относительно которой полный импульс равен нулю. В этой координатной системе центр масс замкнутой системы будет неподвижен при любых изменениях внутри системы. Например, если центр масс пушки и снаряда до выстрела покоился относительно земли, то он будет неподвижным и после выстрела: снаряд и сама пушка получат равные импульсы в противоположные стороны.

Отметим еще, что если начало координат поместить в центре масс ($R_{цм}=0$), то из соотношений (5.7) получается равенство

$$m_1\vec{r}_1+\ \dots\ +m_N\vec{r}_N=0, \tag{5.11}$$

которое означает, что **сумма произведения масс материальных точек на их радиус-векторы относительно центра масс равна нулю.**

5. ОБОБЩЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ИМПУЛЬСОВ ДЛЯ СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

Если система из N точек незамкнута, то на ее точки, кроме внутренних сил f_{ij}, действуют еще и внешние силы $\vec{F}_i$. Так, на материальиую точку номера i действует сумма сил

$$\sum_{j=1}^{N}{}'\,\vec{f}_{ij}+\vec{F}_i. \tag{5.12}$$

Для точки i-го номера мы можем записать второй закон Ньютона

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt}=\sum_{j=1}^{N}{}'\,\vec{f}_{ij}+\vec{F}_i, \tag{5.13}$$

связывающий изменение импульса точки с действующими на нее силами. Как известно, изменение импульса системы определяется суммой (5.2):

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=\sum_i\frac{d\vec{p}_i}{dt}.$$

Подставляя сюда вместо $\frac{d\vec{p}_i}{dt}$ соотношение (5.13), получим:

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=\sum_i^N\left(\sum_j^{N}{}'\vec{f}_{ij}+\vec{F}_i\right)=\sum_i^N\sum_j^{N}{}'\vec{f}_{ij}+\sum_i^N\vec{F}_i.$$

Так как сумма всех внутренних сил, действующих на систему, равна нулю, то

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=\sum_i\vec{F}_i=\vec{F}, \tag{5.14}$$

где $\vec{F}$ — сумма всех действующих на систему внешних сил. Мы получили уравнение импульсов для системы: **производная по времени от полного импульса системы материальных точек равна сумме всех действующих на систему внешних сил.** Таким образом, **импульс системы изменяется только под действием внешних сил, внутренние же силы никакого влияния на импульс системы не оказывают.**

Векторная форма записи уравнения импульсов эквивалентна трем скалярным уравнениям по координатным осям декартовой системы:

$$\frac{dP_x}{dt}=F_x,\quad \frac{dP_y}{dt}=F_y,\quad \frac{dP_z}{dt}=F_z. \tag{5.15}$$

Отметим три важных следствия, вытекающих из уравнения импульсов (5.14) или (5.15).

1. **Если сумма всех действующих на систему сил равна нулю, то система ведет себя как замкнутая, т. е. импульс системы остается неизменным.** Импульсы отдельных точек могут в процессе их движения изменяться, но изменения этн компенсируют друг друга. Так, молекулы газа испытывают со стороны стенок сосуда действие. Это внешние силы. Но действия стенок со всех сторон одинаковы. Поэтому средний импульс всех молекул остается неизменным.

2. Если составляющая внешней силы по некоторой оси равна нулю, то будет сохраняться и проекция импульса на эту ось. Например, если $\vec{F}_x=0$, то $P_x=\sum_i p_{ix}=\text{const}$.

Часто на лекциях по физике демонстрируют закон сохранения импульса системы на примере выстрела из пушки. Однако этот опыт иллюстрирует не общий закон, а лишь сохранение проекции импульса на горизонтальное направление, так как только в этом направлении не действуют силы (сопротивлением пренебрегают, сила тяжести действует по вертикали).

3. Изменение импульса системы за промежуток времени от момента O до момента τ равно:

$$\Delta\vec{P}=\int_0^\tau \vec{F}\,dt. \qquad (5.16)$$

Здесь $\Delta\vec{P}=\vec{P}_2-\vec{P}_1$ (где $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ — импульсы системы в начальный и конечный моменты времени).

Если промежуток времени τ невелик, то силу $\vec{F}$ можно считать в этом промежутке постоянной. Вынося постоянную за знак интеграла, получим:

$$\vec{P}_2-\vec{P}_1=\vec{F}\tau. \qquad (5.17)$$

Из этого следует, что при очень малом τ произведение $\vec{F}\tau$ мало и импульс системы в промежутке времени τ с известным приближением можно считать постоянным $\vec{P}_2\approx\vec{P}_1$. Такая ситуация встречается на практике очень часто. Например, если два шара сталкиваются в воздухе, то эту систему нельзя считать замкнутой, так как на шары действуют внешние силы: сила тяжести и сопротивление воздуха. Однако изменение импульса системы за короткое время соударения τ будет очень малым. Поэтому можно суммарные импульсы системы до удара и после удара считать одинаковыми. Вне этого промежутка времени τ импульс системы изменяется в соответствии с законом (5.14).

Так как суммарный импульс можно выразить через импульс центра масс (см. выражение 5.14), то уравнение импульсов для системы точек преобразуется к виду:

$$m\frac{d\vec{v}_{\text{ЦМ}}}{dt}=\sum\vec{F}_i=\vec{F},\ m\vec{a}_{\text{ЦМ}}=\sum\vec{F}_i=\vec{F}, \qquad (5.18)$$

где m — масса системы; $\vec{a}_{\text{ЦМ}}$ — ускорение центра масс системы. Отсюда видно, что *центр масс системы движется как материальная точка с массой, равной массе системы, на которую действуют все приложенные внешние силы.* С другой стороны, соотношение (5.18) показывает, что *сумма всех действующих на систему сил определяет ускорение центра масс системы*, но ничего не говорит о том, как движутся отдельные материальные точки.

Изменить движение центра масс могут только внешние силы. Если внешних сил нет или их сумма равна нулю, то центр масс движется равномерно и прямолинейно (или покоится).

Вопросы для самопроверки

1. Приведите примеры, когда реальные объекты можно рассматривать как системы материальных точек, и укажите природу сил взаимодействия между точками. Может ли быть такая система, в которой точки не взаимодействуют между собой? Приведите примеры. Справедливы ли для таких

систем законы динамики, полученные для систем взаимодействующих точек? Что называют импульсом системы материальных точек? Какое делают допущение, определяя импульс системы как сумму импульсов всех входящих в нее материальных точек? Чем оправдывается такое допущение? Система представляет собой газ, заключенный в неподвижном баллоне; чему равняется полный импульс системы?

2. Система состоит из 20 точек. Сколько внутренних сил действует на каждую из точек? Напишите в общем виде сумму сил, действующих на точку i-го номера, если всего точек в системе N.

3. Докажите, опираясь на третий закон Ньютона, что в замкнутой системе сумма внутренних сил равна нулю.

4. Сформулируйте закон сохранения импульса системы материальных точек. Поясните, какими рассуждениями можно прийти к этому закону. От чего зависит полный импульс $\Sigma\vec{P}_i$ системы? Где нужно выбрать начало координат, чтобы полный импульс системы был равен нулю? Приведите примеры, которые бы показывали проявление закона сохранения импульса системы. Покажите, что для незамкнутых систем импульс может сохраняться неизменным относительно некоторых направлений. Что это за направления?

5. Покажите, что закон сохранения импульса является следствием третьего закона Ньютона.

6. Что такое центр масс системы? Можно ли центр масс определить как такую точку пространства, относительно которой импульс системы равен нулю?

7. Сформулируйте закон сохранения импульса системы через скорость движения центра масс системы.

8. Сформулируйте второй закон Ньютона для системы материальных точек; напишите его в виде формулы. Поясните, почему в изменении импульса системы играют роль только внешние силы. Скажется ли на движении центра масс отсутствие в системе внутренних сил? Запишите закон сохранения импульса в виде трех скалярных уравнений и сформулируйте следствия из них. Сформулируйте этот закон через ускорение центра масс. Может ли центр масс системы находиться в таком месте, где нет никакой материальной точки? Можно ли сумму внешних сил, действующих на систему, называть равнодействующей?

Занятие 11

РЕАКТИВНОЕ ДВИЖЕНИЕ. ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

1. ПРИНЦИП РЕАКТИВНОГО ДВИЖЕНИЯ

Под реактивным движением понимают движение тел, возникающее при отделении от тела части его массы с некоторой относительной скоростью.

Представим себе, что мы находимся на открытой тележке (или лодке), нагруженной камнями. Предположим, что пол горизонтален, колеса имеют пренебрежимо малую массу и движутся без трения. Возьмем камень и бросим его назад. В результате тележка совсем содержащимся на ней приобретает некоторую скорость, направленную вперед. Движение тележки можно рассматривать как проявление закона сохранения горизонтальной составляющей импульса системы. Часть системы (камень) в результате действия внутренних сил получила некоторый импульс в одну сторону, другая часть (тележка) — получает точно такой же импульс в противоположную сторону.

Нас интересует только движение тележки. Поэтому тележку в данном случае удобно рассматривать как незамкнутую систему, на которую действует внешняя сила со стороны отделяющегося камня — реакция камня (во время бросания рука человека действует на камень, а камень по третьему закону Ньютона действует на руку с той же по модулю силой, но направленной в противоположную сторону). Силу реакции отбрасываемого камня, а в общем случае отбрасываемого тела или частицы называют *реактивной силой.*

Таким образом, движение тележки, появившееся при бросании камня, мы объяснили как результат действия реактивной силы. При одиночном броске реактивная сила кратковременна. Если бросать один камень за другим непрерывно, то тележка будет испытывать реактивную силу, пульсирующую во времени. В этом случае имеет смысл говорить о среднем значении реактивной силы. По мере выбрасывания камней масса тележки уменьшается. Нетрудно видеть, что чем чаще выбрасывать камни, тем большей будет средняя реактивная сила, но тем быстрее будет уменьшаться и масса тележки. Реактивная сила, таким образом, зависит от быстроты уменьшения массы. Очевидно, величина реактивной силы зависит также от относительной скорости отбрасываемых камней. Например, если камни бросать с нулевой относительной скоростью (т. е. выпускать из рук, не сообщая им импульса), то тележка никакой реактивной силы испытывать не будет. Реактивная сила в рассматриваемом примере пульсирует. Однако ее можно сделать и постоянной, если отбрасывание вещества производить не порциями, а непрерывно. Это достигается в современных ракетах тем, что выбрасывается непрерывным потоком газ — продукт сгорания специального топлива.

Мы рассмотрели пример, когда реактивная сила появилась как результат о т д е л е н и я от тела части его массы. Надо отметить и другую возможность: реактивная сила может появиться и в результате п р и с о е д и н е н и я к телу движущихся масс. В этом случае масса тела увеличивается. Например, если в покоящуюся лодку бросить камень, она сдвинется в направлении полета камня. Бросая камни один за другим, мы создадим пульсирующую реактивную силу, действующую на лодку в направлении движения камней. Очевидно, реактивная сила этого вида также связана со скоростью изменения массы тела и относительной скоростью движения присоединяемых частиц.

Отметим одну существенную особенность динамики реактивного движения: реактивная сила действует на тело, масса которого постоянно изменяется (уменьшается или увеличивается).

Вопросами движения таких тел занимается специальный раздел механики — динамика точки переменной массы.

2. ВЫВОД ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕАКТИВНОЙ СИЛЫ. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

Пусть в инерциальной системе отсчета K (рис. 5.3) движется тело, которое в момент времени t имело массу $m(t)$, скорость $\vec{v}$, импульс $\vec{P}_1$. За промежуток временн от t до $t+\Delta t$ от этого тела (назовем его основным) отделилась со скоростью v_1 частица массой m'. Массу отделившейся частицы можно выразить через разность конечной и начальной массы основного тела $m(t+\Delta t)-m(t)=\Delta m$. Так как разность Δm отрицательна (ибо масса основиого тела убывает), а m' есть величина положительная, то $m'=-\Delta m$. В результате масса основного тела станет $m-m'$ или $m+\Delta m$, а скорость $\vec{v}_2=\vec{v}+\Delta\vec{v}$.

Будем считать, что система *основное тело — отделившаяся частица* является незамкнутой; на нее действуют внешние силы $\vec{F}$ (например, сила тяжести). Согласно второму закону Ньютона, обобщенному для системы точек, изменение импульса системы за промежуток времени Δt равно импульсу внешней силы за тот же промежуток времени:

$$\vec{P}_2-\vec{P}_1=\vec{F}\cdot\Delta t. \tag{5.19}$$

Импульсы системы до и после отделения частицы соответственио равны:

$$\vec{P}_1=m\vec{v},$$

$$\vec{P}_2=(m-m')(\vec{v}+\Delta\vec{v})+m'\vec{v}_1=(m+\Delta m)(\vec{v}+\Delta\vec{v})-\Delta m\vec{v}_1. \tag{5.20}$$

Соотношение (5.19) запишется так:

$$m\cdot\Delta\vec{v}+(\vec{v}-\vec{v}_1)\cdot\Delta m-\Delta m\cdot\Delta\vec{v}=\vec{F}\cdot\Delta t. \tag{5.21}$$

Считая массу Δm очень малой (а тогда и $|\Delta\vec{v}|$ будет очень малым), мы в уравнении (5.21) можем пренебречь членом $\Delta m\cdot\Delta\vec{v}$ как величиной второго порядка малости. В результате имеем:

$$m\Delta\vec{v}+(\vec{v}-\vec{v}_1)\cdot\Delta m=\vec{F}\cdot\Delta t.$$

Поделим все члены этого равенства на Δt и перейдем к пределу при $\Delta t\to 0$ (при этом будем предполагать, что масса основного тела изменялась непрерывно). После перенесения второго слагаемого в правую часть мы получим:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=(\vec{v}_1-\vec{v})\frac{dm}{dt}+\vec{F}, \tag{5.22}$$

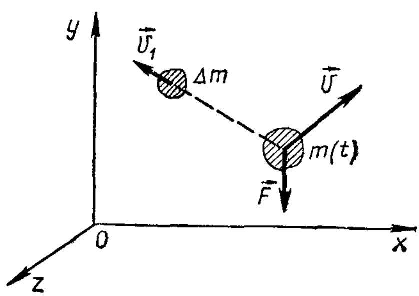


Рис. 5.3

где m — мгновенное значение массы основного тела. Справа в уравнении (5.22) стоит сумма внешней силы $\vec{F}$ и силы, появившейся в результате непрерывного отделения массы от основного тела. Эта вторая и есть реактивная сила. Разность $\vec{v}_1 - \vec{v} = \vec{W}$ имеет смысл скорости отделяемых частиц по отношению к основному телу (относительная скорость). Таким образом, формула для реактивной силы принимает вид:

$$\vec{\Phi} = \vec{W}\frac{dm}{dt}. \tag{5.23}$$

Полученная формула справедлива как в случае отделения частиц, так и в случае их присоединения.

При отделении частиц реактивная сила направлена противоположно относительной скорости отделяемых частиц $\vec{W}$ $\left(\text{ибо } \frac{dm}{dt} < 0\right)$. При присоединении частиц, наоборот, направление реактивной силы совпадает с направлением $\vec{W}$ $\left(\text{так как } \frac{dm}{dt} > 0\right)$.

Если от основного тела ежесекундно отделяется масса $\frac{dm_1}{dt}$ при относительной скорости $\vec{W}_1$ и присоединяется масса $\frac{dm_2}{dt}$ при относительной скорости $\vec{W}_2$, то общая реактивная сила Φ, действующая на основное тело, определяется так:

$$\vec{\Phi} = \vec{\Phi}_1 + \vec{\Phi}_2 = \vec{W}_1\frac{dm_1}{dt} + \vec{W}_2\frac{dm_2}{dt}. \tag{5.24}$$

В частном случае, когда $\left|\frac{dm_1}{dt}\right| = \frac{dm_2}{dt} = \mu_0$, **т. е. присоединяемая** масса равна отделяемой, имеем:

$$\vec{\Phi} = (\vec{W}_2 - \vec{W}_1)\,\mu_0. \tag{5.25}$$

Реактивная сила в этом случае определяется разностью относительных скоростей присоединяемых и отделяемых частиц и секундным расходом массы μ_0. Характерно, что масса основного тела остается при этом неизменной. Это пример того, как реактивная сила может существовать при неизменной массе тела. Это возможно только при наличии двух процессов: присоединения и отделения частиц. Если $\vec{W}_2 = \vec{W}_1$, то, как видно из (5.25), реактивная сила обращается в нуль.

Вернемся к соотношению (5.22). Это соотношение представляет собой уравнение движения точки переменной массы, которое впервые было получено Мещерским[1] в 1897 г.

[1] И. В. Мещерский (1859—1935) — профессор Петербургского (а затем Ленинградского) политехнического института.

Уравнение движения точки переменной массы в общем случае имеет вид:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{\Phi}+\vec{F}, \tag{5.26}$$

где Φ — реактивная сила, определяемая в зависимости от конкретных условий соотношениями (5.23), (5.24) или (5.25). Проанализируем уравнение движения (5.26) для частного случая отделения (или присоединения) частиц.

Если абсолютная скорость отделяемых частиц $\vec{v}_1=0$ (т. е. $\vec{W}=-\vec{v}$), то уравнение (5.26) примет вид:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=-\vec{v}\frac{dm}{dt}+\vec{F},$$

откуда

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt}=\vec{F}.$$

Таким образом, уравнением движения точки переменной массы является второй закон Ньютона в общей его форме.

Если относительная скорость отделяемых частиц равна нулю ($\vec{v}_1-\vec{v}=0$), то уравнение (5.26) переходит в общую форму второго закона Ньютона для тела постоянной массы:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F}.$$

Однако здесь m — переменная величина.

Движение ракет. Формула Циолковского. Уподобляя ракету точке переменной массы, можно уравнение ее движения записать в форме (5.26) (случай отделения частиц). Для ракет относительная скорость отделяемых частиц (продуктов сгорания топлива) есть величина постоянная (она зависит только от температуры сгорания). Под $\vec{F}$ следует понимать сумму внешних сил, действующих на ракету: силы тяжести, силы сопротивления воздуха (а иногда в эту сумму включают и силы инерции). Чтобы найти закон движения ракеты, нужно уравнение движения проинтегрировать дважды. При этом внешние силы должны быть заданы как некоторые функции координат.

Мы не будем решать задачу в общем виде. Ограничимся только частным, но очень важным случаем, когда движение ракеты происходит под действием только реактивной силы (внешние силы отсутствуют). Уравнение движения ракеты для этого случая имеет вид:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{W}\frac{dm}{dt}. \tag{5.27}$$

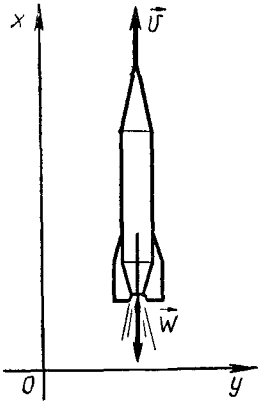


Рис. 5.4

Направим ось x по оси ракеты (рис. 5.4). В проекции на эту ось уравнение (5.27) запишется так:

$$m\frac{dv}{dt} = -W\frac{dm}{dt}. \qquad (5.28)$$

Минус в правой части появился потому, что вектор $\vec{W}$ направлен в сторону отрицательных значений x (проекция этого вектора на ось x отрицательна). Сокращая на dt и разделяя переменные, получим:

$$dv = -W\frac{dm}{m}.$$

Интегрируя правую и левую части равенства и учитывая, что $W = \mathrm{const}$, получим:

$$v = -W\ln m + C, \qquad (5.29)$$

где C — постоянная интегрирования. Для ее определения мы используем начальные условия: при $t = 0$ скорость $v = 0$ и масса $m = m_0$. Подставляя эти данные в (5.29), получим $C = W\ln m_0$. Таким образом, скорость ракеты изменяется по закону

$$v = -W\ln m + W\ln m_0$$

или

$$v = W\ln\frac{m_0}{m}, \qquad (5.30)$$

где m_0 — начальная масса ракеты (ракеты + топливо); m — конечная масса ракеты. Если топливо использовано полностью, то m — масса конструкции ракеты.

Формула (5.30) была получена Циолковским[1] в 1903 г. и носит его имя. Из нее следует, что конечная скорость, приобретаемая ракетой в отсутствие внешних сил, прямо пропорциональна относительной скорости отделяющихся частиц и натуральному логарифму отношения начальной и конечной масс ракеты. Конечная скорость не зависит от того, по какому закону происходит изменение массы ракеты; важны лишь начальное и конечное значения ее массы. На рисунке 5.5 показан график зависимости начальной массы ракеты от требуемой конечной скорости. Из графика видно, что начальная масса резко возрастает с увеличением конечной скорости, что

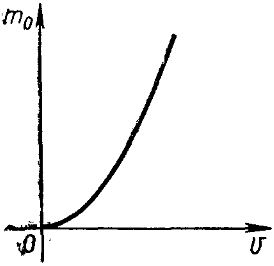


Рис. 5.5

[1] К. Э. Циолковский (1857—1935) — русский ученый, основоположник учения о космических полетах.

представляет собой главную трудность при изготовлении космических ракет, способных достигать больших скоростей.

Оценим максимально достижимую конечную скорость ракеты.

Максимальное значение W определяется максимально допустимой температурой сгорания смеси и может составить $W \approx \approx 3$ км/с. Максимальное значение отношения $\frac{m_0}{m_1}$ определяется прочностью материала. При современном состоянии техники конструкция не может иметь массу, меньшую 10% от общей массы (конструкция + топливо). Так что максимальное значение $\frac{m_0}{m_1} \approx 10$. Поэтому

$$v_{\text{макс}} = 3 \ln 10 \approx 3 \cdot 2{,}8 \lg 10 \approx 7 \frac{\text{км}}{c}.$$

Таким образом, даже в идеальном случае (отсутствие тяготения) невозможно достичь первой космической скорости $v_{\text{I}} = 8$ км/с и, следовательно, невозможно осуществить запуск искусственного спутника Земли. Но мы знаем, что спутники создаются и, более того, при помощи ракет достигают и второй космической скорости $v_{\text{II}} = 11{,}2$ км/с. Как же это делается?

Идею получения космических скоростей при помощи ракет высказал впервые Циолковский. Он предложил использовать так называемые многоступенчатые ракеты. Сущность этой идеи состоит в том, что вместо одной ракеты используются несколько «насаженных» одна на другую. Вначале работают двигатели первой ракеты (первой ступени). Когда горючее этой ракеты полностью израсходуется, ракета отделяется от остальной массы и в этот момент начинают работать двигатели второй ракеты (второй ступени). Потом отделяется и эта ракета и включаются двигатели третьей ракеты (ступени) и т. д.

Для запуска искусственных спутников Земли и космических кораблей в настоящее время используют трехступенчатые ракеты.

Из формулы (5.30) интегрированием по t получим закон движения ракеты:

$$x(t) = x_0 + W \int \ln \frac{m_0}{m(t)} dt,$$

где x_0 — начальное положение ракеты.

Отсюда видно, что закон движения $x(t)$ зависит от закона изменения массы (расход горючего во времени). Но, хотя закон расхода горючего и определяет закон движения ракеты, конечная скорость зависит только от отношения $\frac{m_0}{m}$. Обычно на практике осуществляют такие два закона изменения массы:

$$m(t) = m_0(1 - \alpha t),$$

$$m(t) = m_0 e^{-\alpha t},$$

где $\alpha > 0$.

3. РЕАКТИВНЫЕ ДВИГАТЕЛИ

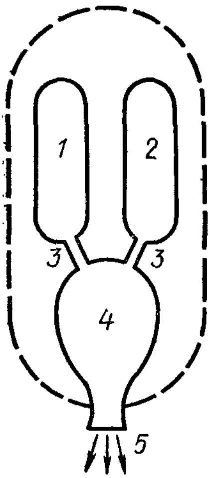


Рис. 5.6

В космическом пространстве реактивный двигатель является единственным, который может обеспечить управляемое движение. Применение реактивных двигателей на самолетах и в некоторых наземных видах транспорта (судах на подводных крыльях и др.) обусловлено тем, что именно реактивные двигатели способны обеспечить максимальную скорость движения.

Реактивные двигатели делятся на два основных класса: ракетные и воздушно-реактивные. В ракетных двигателях (рис. 5.6) горючее (бак *1*) и окислитель (бак *2*) подаются насосами *3* в камеру сгорания *4*; продукты сгорания (газ) вытекают из камеры сгорания через специальное отверстие — сопло *5*. Появляется реактивная сила

$$\vec{\Phi} = \vec{W}\frac{dm}{dt},$$

которая зависит от секундного расхода горючего и окислителя, а также от температуры сгорания (скорости $\vec{W}$). Сужение сопла служит для увеличения скорости истечения газов.

В ракетах может использоваться и твердое топливо, содержащее в себе как горючее, так и окислитель.

Воздушно-реактивные двигатели работают по принципу одновременного присоединения и отделения частиц. Поэтому реактивная сила определяется формулой (5.24).

Двигатели этого вида делятся на два типа: турбореактивные и прямоточные.

Схема турбореактивного двигателя показана на рисунке 5.7. В носовой части расположен компрессор, засасывающий и сжимающий воздух, который затем поступает (как окислитель) в камеру сгорания. Жидкое горючее подается в камеру сгорания

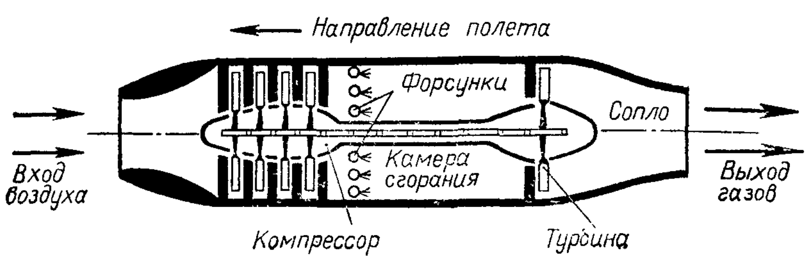


Рис. 5.7

с помощью специальных форсунок. Раскаленные газы (продукты сгорания и воздух), выходя через сопло, вращают газовую турбину, приводящую в действие компрессор. Реактивная сила двигателя представляет собой сумму двух составляющих:

$$\vec{\Phi} = \vec{\Phi}_{\text{вых}} + \vec{\Phi}_{\text{вход}},$$

где $\vec{\Phi}_{\text{вых}}$ — реактивная сила газов, истекающих из выходного сопла, а $\vec{\Phi}_{\text{вход}}$ — реактивная сила воздуха, засасываемого во входное сопло. Эти силы имеют противоположные направления; сила $\vec{\Phi}_{\text{вых}}$ направлена в сторону движения всей конструкции.

Массы засасываемого воздуха и выбрасываемых газов приблизительно одинаковы, так как массой горючего можно пренебречь по сравнению с массой воздуха. Следовательно, реактивная сила будет определяться формулой (5.25):

$$\Phi = (W_2 - W_1)\,\mu_0,$$

где μ_0 — масса воздуха, поступающего в двигатель за секунду. По этому же принципу работают водно-реактивные двигатели, которыми снабжаются некоторые речные суда.

Прямоточный воздушно-реактивный двигатель не имеет компрессора и газовой турбины (рис. 5.8). Воздух засасывается и сжимается исключительно вследствие движения самолета. Поэтому этот двигатель в отличие от турбореактивного не создает тяги, если самолет неподвижен.

Прямоточные воздушно-реактивные двигатели применяются, как правило, на сверхзвуковых самолетах наряду с двигателями других типов, необходимых для создания первоначальной скорости.

По сравнению с ракетными воздушно-реактивные двигатели имеют следующие преимущества: а) они не нуждаются в специальном окислителе; б) реактивная сила в них создается в основном за счет того же воздуха, который засасывается спереди, что приводит к экономии топлива.

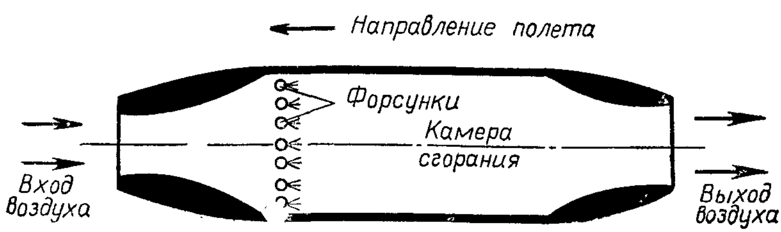


Рис. 5.8

Вопросы для самопроверки

1. Какое движение называют реактивным? Под действием какой силы оно происходит? Как возникает реактивная сила в случае отделения и присоединения частиц? (Поясните на простом примере).

2. Выведите формулу для реактивной силы в случае присоединения частиц. Напишите формулу для реактивной силы, обусловленной: а) отделением частиц; б) присоединением; в) одновременным присоединением и отделением частиц. Разберите вопрос о направлении этих сил. По какой из этих формул надо рассчитывать силу тяги винтового двигателя?

3. Напишите уравнение движения точки переменной массы: а) в общем случае; б) для случая отделения частиц от основного тела; в) для случая присоединения частиц. Проанализируйте уравнение движения в случае отделения частиц.

4. Выведите формулу Циолковского, поясните, почему нельзя достичь космических скоростей при помощи одноступенчатой ракеты. В чем состоит преимущество многоступенчатых ракет перед одноступенчатыми?

5. В чем состоит принцип действия реактивных двигателей: а) ракетного; б) воздушно-реактивного, турбореактивного и прямоточного? В чем состоит преимущество воздушно-реактивных двигателей перед ракетными? В каких случаях ракетный двигатель незаменим?

6. Объясните различие в природе силы, удерживающей мяч в вертикальной струе воды, и силы, удерживающей парящую ракету.

7. Прикладывает ли человек, толкающий механическую сенокосилку, дополнительное усилие в связи с тем, что скошенная трава падает на лоток, прикрепленный к косилке?

8. Будет ли увеличиваться скорость ракеты, если скорость истекающих газов относительно земли меньше скорости самой ракеты и вытекающие из сопла газы летят вслед за ракетой?

Раздел VI

РАБОТА И ЭНЕРГИЯ

ВВЕДЕНИЕ

Окружающий нас мир находится в постоянном изменении, или, как говорят, в движении.

Наиболее простым, часто наблюдаемым видом движения материи является механическое перемещение тел в пространстве. Существуют и другие виды движения материи: тепловое движение, т. е. беспорядочное движение атомов и молекул вещества, изменения электромагнитных полей, внутриатомные и внутриядерные явления. Все они относятся к физическим формам движения.

Кроме физических форм движения, наука различает химические, биологические и др., в которые физические формы входят как составные части. Предметом естествознания является изучение движения материи во всех ее формах.

Многовековой опыт человека показывает, что движение материи одной формы может переходить в движение другой формы. Так, механическое движение может перейти в беспорядочное движение молекул тела, т. е. в тепловую форму движения. В некоторых случаях тепловое движение, наоборот, может частично перейти в упорядоченное движение тела, т. е. в механическое. Известно, что электрический ток вызывает нагревание проводников. Этот факт говорит о переходе электрической формы движения материи в тепловое движение. Известно также, что атомные электростанции представляют собой устройства, в которых внутриядерная форма движения материи превращается (через ряд промежуточных форм) в электрическую. Можно было бы привести много других примеров, но уже из сказанного видно, что различные формы движения материи взаимно связаны между собой и могут переходить одна в другую, что некоторые из этих переходов используются человеком в его практической деятельности. Если некоторая форма движения материи переходит в какую-то иную форму, то это должно означать, что движение материи одной формы количественно уменьшилось, а движение другой формы — количественно увеличилось. В связи с этим уместны следующие вопросы: как оценить движение материи какой-либо формы с количественной стороны? Будет ли убыль движения (материи) одной формы равна приросту движения другой формы? Как подсчитать, какое количество движения материи одной формы перешло в движение другой формы?

Мерой движения является физическая величина, называемая энергией. Установив меру движения материи, можно сравнивать между собой в количественном отношении движения материи различных форм, подобно тому как при помощи меры инертности — массы — мы сравниваем между собой инертность различных по природе тел. Мера движения — энергия — является величиной скалярной. Можно установить и единицу измерения энергии. Тогда количественно движение данной формы описывается числом этих единиц.

Не сразу ученые смогли найти выражения (формулы) для количественного подсчета энергии той или иной формы.

Так, Гельмгольцем[1] в 1874 г. было впервые установлено, что энергия поступательно движущегося тела (механическая форма движения) вычисляется по формуле $\frac{mv^2}{2}$. Другими учеными были установлены формулы для подсчета энергии беспорядочного (теплового) движения молекул вещества, энергии электромагнитного поля и т. д.

На многочисленных специально поставленных опытах и путем анализа наблюдаемых в природе явлений было показано, что при переходе движения материи из одной формы в другую убыль энергии, связанной с движением одной формы, в точности равна приросту энергии, обусловленной движением другой формы. В этом состоит один из основных законов природы — закон сохранения энергии.

Так как энергия — мера движения, то закон этот имеет глубокий философский смысл: движение материи (в общем смысле этого слова) неуничтожимо и не может возникнуть из ничего. Материя и движение неразделимы. Основным положением материалистической философии является признание того, что движение материи вечно, что формы движения материи разнообразны и что процессы, протекающие в природе, сопровождаются переходом одной формы движения материи в другую форму. Это положение постоянно подтверждается новейшими открытиями как в области макромира, так и в области микромира (мира атомов и элементарных частиц).

Чтобы определить, какое количество энергии перешло из одной формы в другую, нужно подсчитать энергию тела (системы) до перехода и энергию, оставшуюся после того, как часть ее перейдет в другую форму, и взять разность этих энергий. Эту разность энергий принято называть работой.

[1] Герман Гельмгольц (1821—1894) — немецкий физик и физиолог.

Энгельс определил работу так: «...работа — это изменение формы движения, рассматриваемое с его количественной стороны». И далее: «...основным условием всякой физической работы является качественное изменение, перемена формы»[1]. Здесь имеется в виду перемена формы движения материи.

Когда электрический ток нагревает проводник, происходит переход электрической формы движения в тепловую, при этом совершается работа, которую можно подсчитать либо по тому, сколько израсходовано электрической энергии, либо по тому, насколько нагрелось тело, т. е. насколько возросла энергия беспорядочного движения атомов проводника. В ряде случаев работу можно подсчитать и другим способом, если известна сила взаимодействия между телами (системами), обменивающимися энергией. Например, если лежащий на столе брусок толкнуть, он будет скользить по поверхности стола. Однако через некоторое время в результате действия тормозящей силы трения скольжения брусок остановится; при этом механическая форма движения бруска (поступательное движение) перейдет в беспорядочное движение молекул бруска и стола в колебательное движение частиц окружающей среды (воздуха), воспринимаемые нами в виде звука. Совершаемая при этом работа (согласно определению этого понятия) может быть подсчитана двумя способами: а) по убыли кинетической энергии бруска; б) по увеличению температуры бруска и стола с учетом энергии звуковой волны. Однако эту же работу можно подсчитать через силу трения и путь, пройденный бруском до остановки. Все виды расчета дают один и тот же результат. Поэтому в тех случаях, когда известны силы взаимодействия, очень удобно подсчитывать работу по силе, так как этот способ не требует знания того, в какие формы переходит движение данного вида.

В заключение отметим, что энергия и работа имеют одну и ту же единицу измерения.

Занятие 12

РАБОТА. МОЩНОСТЬ. ЭНЕРГИЯ

1. РАБОТА

Работа постоянной силы. Чтобы работа, подсчитанная через действующую на тело силу, отвечала тем представлениям о работе и энергии, которые изложены выше, ее, как показывает опыт, надо подсчитывать по следующей формуле:

$$\Delta A = F \cdot \Delta l \cos \alpha, \tag{6.1}$$

где F — действующая на тело сила, постоянная по величине и направлению; Δl — путь, пройденный телом по прямой; α — по-

[1] Энгельс Ф. Диалектика природы.— Маркс К. и Энгельс Ф. Соч., т. 20, 1961, с. 419, 420.

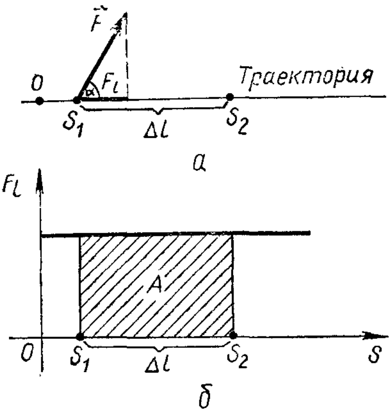


Рис. 6.1

стоянный угол, образованный вектором $\vec{F}$ с перемещением $\vec{\Delta l}$ (рис. 6.1, *а*). Нетрудно проверить, что формулу для работы (6.1) можно записать в виде скалярного произведения двух векторов

$$\Delta A = (\vec{F} \cdot \Delta\vec{l}). \qquad (6.2)$$

Учитывая, что произведение $F \cos \alpha = F_l$ есть проекция силы на направление перемещения, можно формулу для работы представить еще и так:

$$\Delta A = F_l \cdot \Delta l. \qquad (6.3)$$

Проекция постоянной силы на направление перемещения представится на графике $F_l(l)$ в виде прямой, параллельной оси абсцисс. Работа этой силы на пути Δl изобразится на том же графике площадью прямоугольника, заштрихованного на рисунке 6.1, *б*.

Работа имеет алгебраический знак, определяемый знаком $\cos \alpha$. Она положительна, если сила образует с перемещением острый угол, и отрицательна, если этот угол тупой.

Из формулы работы (6.1) следует, что сила, перпендикулярная перемещению (скорости), работы не производит. Если сила совпадает по направлению с перемещением (скоростью), то $\cos \alpha = 1$ и работа определяется так:

$$\Delta A = F \cdot \Delta l.$$

Последнее соотношение используется для установления единицы измерения работы.

В системе СИ за единицу работы принимается джоуль (Дж); 1 Дж есть работа, совершаемая на пути в 1 м постоянной силой в 1 Н, действующей в направлении перемещения.

В системе СГС за единицу работы принимается эрг (эрг); 1 эрг есть работа силы в 1 дин на пути в 1 см (при условии совпадения силы с направлением перемещения).

Работа переменной силы. Если траектория движения не прямолинейна, а сила не является постоянной (рис. 6.2), то при расчете работы надо весь путь l разбить на такие малые элементы, чтобы каждый из них можно было считать прямолинейным, а силу на нем постоянной. Тогда работу на элементарном участке пути Δl можно подсчитать по формуле (6.1):

$$\Delta A_i = F_i \cdot \Delta l_i \cos \alpha_i = F_{l,i} \cdot \Delta l_i.$$

Полная работа будет равна сумме работ по всем элементарным участкам от точки *1* до точки *2*

$$A \approx \sum_i \Delta A_i = \sum_i F_{l,\,i} \cdot \Delta l_i. \qquad (6.4)$$

На графике $F_l(l)$ эта работа представится в виде площади ступенчатой фигуры (рис. 6.3); площадь одной ступени равна работе силы F_i на участке Δl_i. В пределе (при бесконечном увеличении числа элементов) сумма перейдет в определенный интеграл, и полная работа будет равна:

$$A = \int_1^2 F_l\,dl, \text{ или } A = \int_1^2 \vec{F}\,d\vec{l}, \qquad (6.5)$$

где $F_l\,dl = \vec{F}\,d\vec{l}$ есть работа силы F на элементе пути dl.

Графически работа изобразится в виде площади фигуры, ограниченной сверху графиком $F_l = f(l)$, снизу осью абсцисс, а по бокам — вертикальными прямыми (рис. 6.4).

Рассчитаем для примера работу силы, изменяющейся пропорционально смещению точки:

$$F = kx,$$

где k — некоторая постоянная. График силы $F = f(x)$ есть прямая, проходящая через начало координат (рис. 6.5). Работа на пути от $x = 0$ до $x = x_0$ представится площадью заштрихованного треугольнака и она, следовательно, равна

$$A = \frac{1}{2} x_0 k x_0 = \frac{k x_0^2}{2}.$$

Этот же результат получим путем интегрирования:

$$A = \int_0^x F\,dx = k \int_0^x x\,dx = \frac{k x_0^2}{2}.$$

Такую работу совершает, например, внешняя сила, растягивающая пружину или стержень статически (т. е. настолько медленно, что в каждый момент времени $F = -F_{\text{упр}}$).

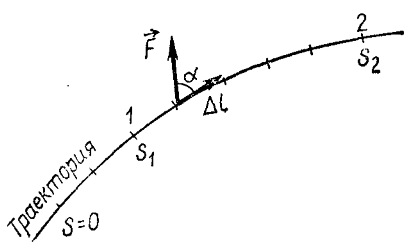


Рис. 6.2

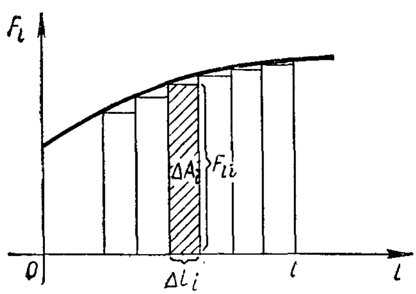


Рис. 6.3

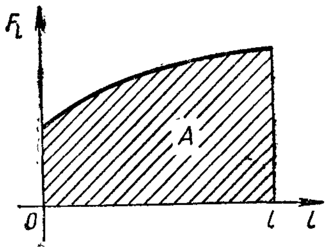


Рис. 6.4

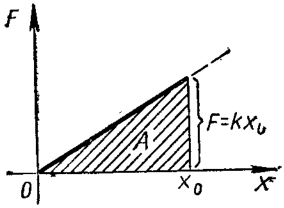


Рис. 6.5

Работа силы упругости при растяжении на Δl равна:

$$A = \int_0^{\Delta l} F_{\text{упр}}\, dx = -k\int_0^{\Delta l} x\, dx = -\frac{k(\Delta l)^2}{2}.$$

Отсюда видно, что она пропорциональна квадрату растяжения. Отрицательный знак работы указывает, что сила направлена противоположно смещению точки приложения силы.

Если на точку действует несколько сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3 \ldots$, то работа полной силы (т. е. равнодействующей $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots$ при перемещении на $d\vec{r}$) будет:

$$dA = \vec{F}\, d\vec{r} = \vec{F}_1\, d\vec{r} + \vec{F}_2\, d\vec{r} + \ldots,$$

т. е. она равна сумме работ на этом перемещении сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2 \ldots$.

Таким образом мы приходим к выводу, что работа обладает свойством **аддитивности** по отношению к системе действующих сил.

2. МОЩНОСТЬ

На практике работу совершают машины[1].

Одна и та же работа может быть совершена как за большой промежуток времени, так и за очень малый. Для практики бывает важно знать, быстро или медленно производится та или иная работа. Поэтому наряду с понятием работы вводят физическую величину, характеризующую быстроту, с которой совершается работа. Эту величину называют мощностью.

Если за время Δt машина совершит работу ΔA, то по определению средняя мощность $\mathscr{P}_{\text{ср}}$ равна:

$$\mathscr{P}_{\text{ср}} = \frac{\Delta A}{\Delta t},$$

а мгновенная мощность P будет

$$\mathscr{P} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{dA}{dt}. \qquad (6.6)$$

Если мгновенная мощность задана как некоторая функция времени $\mathscr{P} = \mathscr{P}(t)$, то можно определить и работу, совершенную

[1] То есть устройства (преобразователи), в которых одна форма движения материи переходит в другую или другие формы. Например, электродвигатель — устройство для преобразования электромагнитной формы движения материи в механическую форму.

машиной за конечный промежуток времени от момента $t = t_1$ до момента $t = t_2$. Для этого умножим выражение (6.6) на dt и проинтегрируем по t в указанных пределах:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}\, dt. \qquad (6.7)$$

Если мощность во времени постоянна ($\mathcal{P} = \text{const}$), то интегрирование дает:

$$A = \mathcal{P}(t_2 - t_1) = \mathcal{P} \cdot \Delta t. \qquad (6.8)$$

Отсюда получаем определяющее уравнение для установления единицы мощности:

$$\mathcal{P} = \frac{A}{\Delta t}.$$

В системе СИ за единицу измерения мощности принимается ватт (Вт); 1 Вт есть такая мощность, при которой за 1 с совершается работа в 1 Дж (1 Вт = 1 Дж/с).

В системе СГС за единицу мощности принимается 1 эрг/с — мощность, при которой за 1 с совершается работа в 1 эрг.

Используются также кратные единицы мощности: гектоватт (гВт), киловатт (кВт) и мегаватт (МВт):

$$1\,\text{гВт} = 10^2\,\text{Вт},$$
$$1\,\text{кВт} = 10^3\,\text{Вт},$$
$$1\,\text{МВт} = 10^6\,\text{Вт}.$$

В некоторых случаях еще применяют старую единицу мощности — лошадиную силу (л. с.): 1 л. с. = 735 Вт.

Мощности, развиваемые машинами, колеблются от долей ватта до мегаватт (реактивные двигатели). Мощность, развиваемая человеком, составляет около 70 Вт; мощность муравья 10^{-5} Вт.

Мощность, как и работу, можно подсчитать через силу, с которой устройство действует на данное тело. Так как $dA = \vec{F}\, d\vec{r}$ (где $d\vec{r}$ — перемещение тела), то для мгновенной мощности получим:

$$\mathcal{P} = \frac{dA}{dt} = \vec{F}\, \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\vec{v}. \qquad (6.9)$$

Таким образом, механическая мощность, развиваемая какой-либо машиной, равна скалярному произведению силы на скорость перемещения тела, к которому приложена сила. Если направление силы совпадает с направлением скорости, то

$$\mathcal{P} = Fv, \qquad (6.10)$$

т. е. мощность равна произведению силы на скорость движения тела.

Мощность машины можно, таким образом, повышать как за счет увеличения силы, так и за счет увеличения скорости движения. Например, мощность мотоцикла больше мощности, которую может развивать одна лошадь. Но мотоцикл не может везти за собой тяжело нагруженную телегу, как это делает лошадь, потому что мощность его велика не за счет большой силы тяги, а за счет скорости движения. У лошади мощность меньше, но зато сила тяги во много раз превосходит силу тяги мотоцикла, а скорость движения намного уступает скорости мотоцикла.

3. РАБОТА СИЛЫ И КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ

Движение под действием постоянной силы. Пусть равнодействующая всех сил, приложенных к материальной точке массой m, постоянна и параллельна скорости движения (движение прямолинейно). В этом случае тело получает ускорение в соответствии со вторым законом Ньютона (рис. 6.6):

$$F_{\text{полн}} = ma. \qquad (6.11)$$

За промежуток времени от момента t_1 до момента t_2 точка, двигаясь равноускоренно, пройдет путь $\Delta l = s_2 - s_1$. При этом сила совершит работу

$$\Delta A = F_{\text{полн}} \cdot \Delta l.$$

Скорость тела увеличится с v_1 до v_2. Как известно из кинематики, эти скорости связаны соотношением

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a(s_2 - s_1) = 2a \cdot \Delta l. \qquad (6.12)$$

Умножим (6.11) на путь Δl:

$$F_{\text{полн}} \cdot \Delta l = ma \cdot \Delta l.$$

В правую часть этого равенства вместо Δl подставим его выражение, полученное из (6.12). Мы придем к соотношению:

$$F_{\text{полн}} \cdot \Delta l = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}, \qquad (6.13)$$

или

$$\Delta A = T_2 - T_1. \qquad (6.14)$$

Это значит, что работа постоянной равнодействующей силы на пути Δl выражается как разность значений величины $T = \frac{mv^2}{2}$ в начальный и конечный моменты движения. Поэтому величина

$$T = \frac{mv^2}{2} \qquad (6.15)$$

представляет собой кинетическую энергию тела.

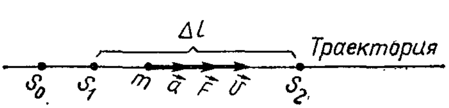


Рис. 6.6

Выражение (6.14) показывает, что кинетическая энергия материальной точки возросла с величины T_1 до величины T_2. Но это возрастание произошло за счет убыли какой-то иной формы энергии в количестве ΔA. Но какой? На этот вопрос можно определенно ответить, если известна природа действующей силы. Например, если движение точки обусловлено «световым давлением», то кинетическая энергия точки возросла за счет убыли электромагнитной энергии.

Следует отметить, что в (6.13) под силой $F_{\text{полн}}$ понимается именно полная сила, т. е. равнодействующая всех приложенных к точке сил. Это видно из того, что (6.13) получено из уравнения второго закона Ньютона, в котором под силой понимают именно равнодействующую. Если об этом «забыть» и применить формулу (6.13) к произвольно выбранной силе, то можно прийти к недоразумению. В самом деле, если мы подсчитаем работу по той силе, которую мы прикладываем, скажем, к ящику, чтобы переместить его по земле с постоянной (малой) скоростью на расстояние Δl, то окажется, что эта работа не равна нулю, ибо $\Delta l \neq 0$, $\cos\alpha \neq 0$. Но ведь прироста кинетической энергии ящик не получает! Прирост кинетической энергии тела определяется только полной силой.

В случае с ящиком полная сила (по горизонтали) равна нулю, так как она слагается из двух равных и противоположных по направлению сил: силы тяги и силы трения. Согласно соотношению (6.13) в этом случае кинетическая энергия не должна измениться. Этот же результат можно объяснить и так: приложенная внешняя сила (сила тяги) и сила трения совершают равные по модулям, но противоположные по знаку работы. Если в примере с ящиком полная сила отлична от нуля (положительна), то и кинетическая энергия ящика возрастает. Но при этом отрицательная работа силы трения покажет, сколько энергии перешло в тепловую форму.

Движение под действием переменной силы. Покажем, что формула $\Delta A = T_2 - T_1$ справедлива в общем случае, когда сила не постоянна и не параллельна скорости.

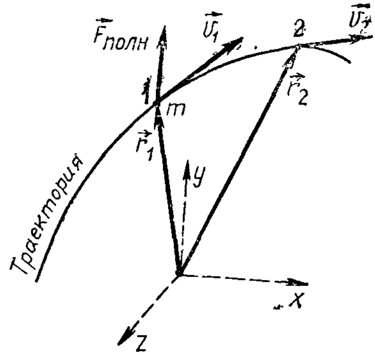


Рис. 6.7

Пусть на материальную точку массой m действует сила $F_{\text{полн}}$, изменяющаяся по модулю и направлению (рис. 6.7). За время от момента t_1 до момента t_2 тело под действием силы переместится из положения *1* в положение *2*. Скорость изменится от

$\vec{v}_1$ до $\vec{v}_2$. *При этом работа силы* $\vec{F}_{\text{полн}}$ равна

$$A = \int_1^2 \vec{F}_{\text{полн}}\, d\vec{r}. \tag{6.16}$$

Здесь интеграл берется по траектории движения точки от положения, отмечаемого радиус-вектором $\vec{r}_1$ до положения, отмечаемого радиус-вектором $\vec{r}_2$. Запишем второй закон Ньютона:

$$\vec{F}_{\text{полн}} = m \frac{d\vec{v}}{dt}. \tag{6.17}$$

Умножим скалярно обе части этого равенства на элементарное перемещение $d\vec{r}$:

$$\vec{F}_{\text{полн}}\, d\vec{r} = m \frac{d\vec{v}}{dt}\, d\vec{r}, \tag{6.18}$$

или

$$\vec{F}_{\text{полн}}\, d\vec{r} = m\, d\vec{v}\, \frac{d\vec{r}}{dt} = m\vec{v}\, d\vec{v}. \tag{6.19}$$

Но

$$\vec{v}\, d\vec{v} = \frac{1}{2} d(\vec{v}^2) = \frac{1}{2} d(v^2).$$

Поэтому

$$\vec{F}_{\text{полн}}\, d\vec{r} = d\left(\frac{mv^2}{2}\right).$$

Полная работа при перемещении точки из положения *1* в положение *2* будет равна:

$$\int_1^2 \vec{F}_{\text{полн}}\, d\vec{r} = \int_1^2 d\left(\frac{mv^2}{2}\right), \tag{6.20}$$

или

$$\Delta A = \int_1^2 \vec{F}_{\text{полн}}\, d\vec{r} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = T_2 - T_1, \tag{6.21}$$

что и требовалось доказать.

Формулы (6.13) и (6.21), связывающие изменение кинетической энергии тела с работой полной силы, называют *теоремой об изменении кинетической энергии.* Эти формулы часто используются при решении задач на отыскание закона изменения скорости и закона движения точки, если, конечно, интеграл $\int_1^2 \vec{F}_{\text{полн}}\, d\vec{r}$ вычисляется.

4. РАБОТА СИЛЫ И ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ТЕЛА

В механике (и физике вообще) большое значение имеет так называемая потенциальная энергия тела (точнее, системы взаимодействующих тел). Поясним это на примере.

Переместим равномерно с очень малой скоростью брусок по поверхности стола на расстояние l, поднимем тело на высоту h, растянем пружину на величину x (рис. 6.8). Во всех этих случаях $\vec{F}_{\text{полн}} = 0$. Поэтому кинетическая энергия тел не изменяется, а работа приложенной внешней силы $\vec{F}_{\text{внеш}}$ в каждом отдельном случае покрывает работу противоположно направленной силы (силы трения, силы тяжести или силы упругости).

Работа сил трения показывает, сколько энергии (какого-либо вида) переходит в тепловую форму, т. е. эта энергия не может быть использована для перевода бруска обратно в первоначальное положение. Чтобы перевести брусок в первоначальное положение, нужно приложить внешнюю силу, но уже в обратном направлении.

Однако поднятое тело или растянутая пружина сами собой возвращаются в первоначальное состояние. Это происходит под действием внутренних сил системы: силы тяжести, действующей на тело, или силы упругости пружины. Сила тяжести и сила упругости совершают при этом по модулю точно такую же работу, какую совершила внешняя сила при поднятии тела или растяжении пружины (без изменения кинетической энергии).

Таким образом, поднятое тело или растянутая пружина обладают запасом энергии, измеряемой той работой, которая совершена внешними силами, чтобы перевести тело (пружину) из одного положения (состояния) в другое без изменения кинетической энергии. Эта энергия измеряется также работой, которую могут совершить внутренние силы при переходе тела (пружины) в первоначальное положение.

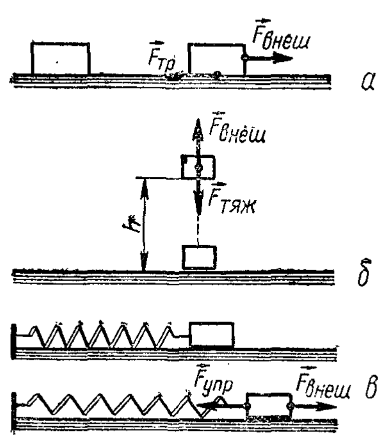


Рис. 6.8

Запасенную поднятым телом или растянутой пружиной энергию называют *потенциальной.*

Потенциальная энергия поднятого тела зависит от высоты, т. е. расположения его относительно другого тела (Земли), с которым оно взаимодействует по закону гравитации.

Потенциальная энергия растянутой пружины зависит от взаимного расположения частиц (атомов), взаимодействующих между собой.

Таким образом, общее определение потенциальной энергии можно дать в следующем виде: *потенциальная энергия — это энергия, зависящая от взаимного расположения взаимодействующих тел или частей одного и того же тела, измеряемая той работой, которая совершается внешними силами, чтобы перевести систему без изменения кинетической энергии из одного состояния в другое с новым взаимным расположением тел или частей тела.*

5. РАСЧЕТ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ

Потенциальная энергия поднятого тела в однородном поле тяготения. Выберем произвольно нулевой уровень, от которого будем вести отсчет высоты. Тело массой m поднимаем равномерно с очень малой скоростью ($\vec{F}_{внеш} = -\vec{F}_{тяж} = -m\vec{g}$) из положения *1* в положение *2* по произвольному пути, показанному на рисунке 6.9 сплошной линией. Разобьем весь путь на малые элементы горизонтальными прямыми. Работа на элементе пути Δl равна:

$$\Delta A = F_{внеш} \cdot \Delta l \cos \alpha = mg \cdot \Delta l \cos \alpha.$$

Так как $\Delta l \cos \alpha = \Delta h$, то

$$\Delta A = mg \cdot \Delta h.$$

Полная работа внешней силы при перемещении тела из положения *1* в положение *2* будет:

$$A = \sum mg \cdot \Delta h = mg \sum \Delta h = mg (h_2 - h_1).$$

Это можно записать так:

$$A = mgh_2 - mgh_1. \qquad (6.22)$$

Полученное соотношение показывает, что работа внешней силы (при $\vec{F}_{внеш} = -\vec{F}_{тяж}$) зависит только от положения начальной и конечной точек перемещения относительно нулевого уровня, и, следовательно, эта работа не зависит от формы траектории. Запишем (6.22) так:

$$A = U_2 - U_1,$$

где U_2 и U_1 — *потенциальная энергия* тела на высотах h_2 и h_1 соответственно (потенциальная энергия тела в конечном и начальном положениях).

Потенциальную энергию U_2 и U_1 мы можем записать так:

$$U_2 = mgh_2 + U_0,$$
$$U_1 = mgh_1 + U_0, \qquad (6.23)$$

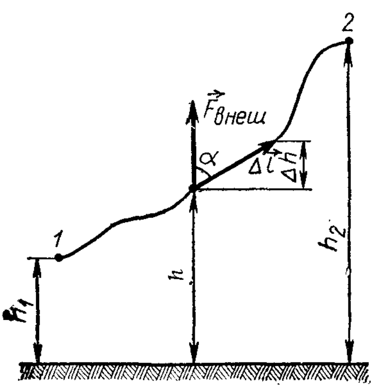


Рис. 6.9

где U_0 — некоторая постоянная величина, имеющая размерность энергии. Постоянная U_0 никакого влияния на работу перемещения не оказывает. Она лишь показывает, что потенциальная энергия поднятого тела может быть определена с точностью до некоторой постоянной. Эта постоянная имеет смысл — потенциальной энергии тела на нулевом уровне ($h = 0$), который выбирается произвольно. Обычно принимают, что на уровне $h = 0$ потенциальная энергия тела равна нулю ($U = 0$). При этом, используя соотношение (6.23), получаем: $U_0 = 0$. Таким образом, постоянную U_0 можно принять равной нулю, если договориться, что на нулевом уровне потенциальная энергия равна нулю. Тогда общая формула для потенциальной энергии в однородном гравитационном поле Земли будет:

$$U = mgh.$$

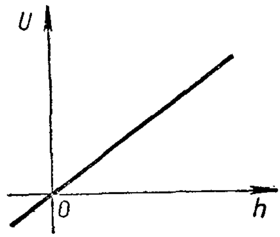


Рис. 6.10

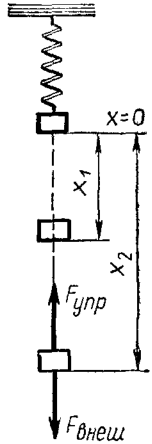


Рис. 6.11

График этой функции показан на рисунке 6.10. Потенциальная энергия может быть как положительной, так и отрицательной (для уровней ниже нулевого). Напомним, что кинетическая энергия всегда положительна.

Потенциальная энергия растянутой пружины или стержня. Пусть пружина уже растянута на величину x_1. Растянем ее еще до величины x_2 (рис. 6.11). Будем считать, что сила упругости подчиняется закону Гука и $F_{\text{внеш}} = -F_{\text{упр}} = kx$. Работа внешней силы, как было показано, измеряется площадью трапеции (см. рис. 6.12):

$$A = \frac{kx_2 + kx_1}{2}(x_2 - x_1) = \frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2}. \qquad (6.24)$$

Таким образом, работа внешней силы по растяжению пружины зависит только от значений конечного и начального растяжений пружины. Выражение для работы (6.24) можно записать и так:

$$A = U_2 - U_1,$$

где $U_1 = \frac{kx_1^2}{2}$, $U_2 = \frac{kx_2^2}{2}$ — потенциальная энергия пружины в начальном и конечном состояниях соответственно.

Так что общая формула для потенциальной энергии растянутой (или сжатой) пружины имеет вид:

$$U = \frac{kx^2}{2}, \qquad (6.25)$$

где x — растяжение. При этом принимается, что при $x = 0$ потенциальная энергия равна нулю. График зависимости потенциальной энергии пружины от растяжения (и сжатия) имеет вид, представленный на рисунке 6.13.

Плотность энергии деформированного стержня. Для стержня жесткость k выражается так:

$$k = \frac{ES}{l},$$

где S и l — первоначальные сечения и длина стержня. Подставляя это выражение в формулу (6.25) и умножая числитель и знаменатель правой части на l, получим:

$$U = \frac{E\left(\frac{x}{l}\right)^2}{2} Sl. \qquad (6.26)$$

Если учесть, что $\frac{x}{l} = \varepsilon$ есть относительное удлинение, а $Sl = V$ — начальный объем стержня, то можно формулу (6.26) переписать так:

$$U = \frac{E\varepsilon^2}{2} V. \qquad (6.27)$$

Потенциальная энергия растянутого (сжатого) стержня пропорциональна его объему. Выражение

$$w = \frac{E\varepsilon^2}{2} \qquad (6.28)$$

обозначает объемную плотность энергии, т. е. энергию, приходящуюся на единицу объема деформированного стержня.

Потенциальная энергия в поле центральных сил. Не ограничивая общности, мы приведем рассуждения на примере центрального гравитационного поля. Пусть гравитационное поле создает-

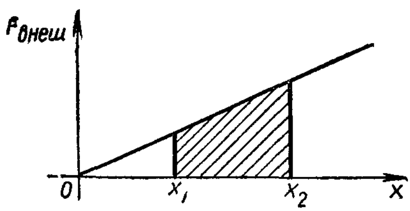


Рис. 6.12

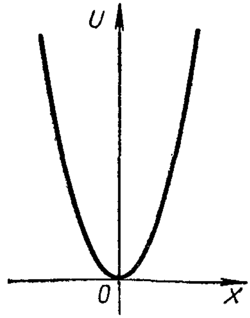


Рис. 6.13

ся телом массы M, помещенном в начале отсчета (рис. 6.14). Подсчитаем работу силы $\vec{F}_{\text{внеш}}$ при перемещении пробного тела массой m из положения 1 в положение 2 без изменения кинетической энергии тела ($F_{\text{внеш}} = -F_{\text{грав}}$). Работа на элементе пути dl равна:

$$dA = F_{\text{внеш}}\, dl \cos\alpha = F_{\text{внеш}}\, dr,$$

ибо $dl \cos\alpha = dr$ (см. рис. 6.14).

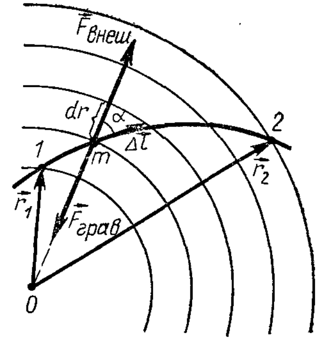


Рис. 6.14

Полная работа внешней силы определяется формулой

$$A = \int_{r_1}^{r_2} F_{\text{внеш}}\, dr. \qquad (6.29)$$

Но $F_{\text{внеш}} = \gamma \frac{mM}{r^2}$. Поэтому полная работа внешней силы равна

$$A = \gamma mM \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \gamma mM \left(-\frac{1}{r}\right)_{r_1}^{r_2},$$

или

$$A = -\gamma \frac{mM}{r_2} - \left(-\gamma \frac{mM}{r_1}\right). \qquad (6.30)$$

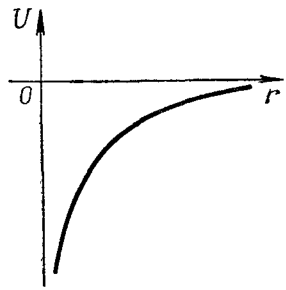


Рис. 6.15

Таким образом, работа оказалась равной разности значений величины $-\gamma \frac{mM}{r}$ в конечном и начальном положениях пробного тела. От формы пути эта работа не зависит.

Представим работу в виде разности потенциальной энергии тела в конечном и начальном состояниях системы:

$$A = U_2 - U_1.$$

Понятно, что потенциальную энергию пробного тела можно определить лишь с точностью до некоторой постоянной U_0, которая на значение работы никакого влияния не оказывает:

$$U_2 = -\gamma \frac{mM}{r_2} + U_0, \quad U_1 = -\gamma \frac{mM}{r_1} + U_0. \qquad (6.31)$$

Очевидно, что $U_1 \to U_0$ при $r_1 \to \infty$. Следовательно, U_0 есть потенциальная энергия пробного тела на бесконечном удалении от тела, создающего поле. Обычно величину U_0 условно принимают равной нулю.

В этом случае, как следует из (6.31), потенциальная энергия тела будет отрицательной:

$$U = -\gamma \frac{mM}{r}. \tag{6.32}$$

Она равна той работе, которую совершают внешние силы при перемещении тела массой m без изменения кинетической энергии из бесконечности в данную точку поля[1]. Работа отрицательна, так как угол между силой и перемещением тупой, и $\cos\alpha < 0$.

График зависимости потенциальной энергии от расстояния приведен на рисунке 6.15.

Замечание. Из рассмотренных примеров видно, что абсолютное значение потенциальной энергии в данной точке на самом деле не имеет физического смысла: физический смысл имеет разность энергий между двумя точками, равная работе, совершающейся при перемещении тела между этими точками.

Относительной величиной является и кинетическая энергия, так как скорость имеет относительное значение, зависящее от выбора системы отсчета. Существенное значение имеет не абсолютное значение кинетической энергии, а только ее изменение, проявляющееся при совершении работы.

6. КОНСЕРВАТИВНЫЕ СИЛЫ И СВЯЗЬ ИХ С ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИЕЙ

Мы рассмотрели работу внешней силы в однородном поле Земли, при растяжении пружины и, наконец, в центральном гравитационном поле. Во всех этих случаях работа не зависит от формы пути, а значение ее определялось только разностью потенциальных энергий в конечном и начальном положениях:

$$A = U_2 - U_1. \tag{6.33}$$

Силы, работа которых не зависит от формы траектории, называют *консервативными.* Работа таких сил по замкнутому пути равна нулю. Отсюда следует, что сила тяжести ($F_{\text{тяж}}$), сила упругости ($F_{\text{упр}}$) и сила гравитационного взаимодействия ($F_{\text{грав}}$) являются консервативными силами.

Работа внешних сил на элементарном перемещении $d\vec{l}$ равна

$$\Delta A = \vec{F}_{\text{внеш}} \cdot \Delta\vec{l} = F_{\text{внеш}} \cdot \Delta l \cos\alpha = F_{\text{внеш}} \cdot \Delta n, \tag{6.34}$$

где $\Delta n = \Delta l \cos\alpha$ — проекция перемещения на направление силы. Согласно (6.33) эта работа равна изменению потенциаль-

---

[1] Можно также сказать, что *потенциальная энергия равна той работе, которую совершают внутренние силы системы (силы гравитации) при перемещении тела массой m из данной точки поля в бесконечность.*

ной энергии:

$$F_{\text{внеш}} \cdot \Delta n = \Delta U.$$

Поскольку в рассматриваемых примерах $\vec{F}_{\text{внеш}} = -\vec{F}_{\text{конс}}$, то работа консервативных сил противоположна по знаку работе внешних сил:

$$F_{\text{конс}} \cdot \Delta n = -\Delta U.$$

Отсюда получаем искомую связь:

$$F_{\text{конс}} = -\frac{\Delta U}{\Delta n},$$

или

$$F_{\text{конс}} = -\frac{dU}{dn}; \tag{6.35}$$

где Δn (или dn) — элемент длины в направлении действия силы, т. е. в направлении наиболее резкого[1] изменения потенциальной энергии.

Таким образом, значение консервативной силы равно взятому с противоположным знаком изменению потенциальной энергии на единицу длины, отсчитанному в сторону наиболее резкого изменения (роста) потенциальной энергии; знак минус в (6.35) указывает на то, что $F_{\text{конс}}$ направлена в сторону убывания потенциальной энергии. Так, потенциальная энергия гравитационного поля определяется формулой:

$$U = -\gamma \frac{mM}{r^2}.$$

Отсюда гравитационная сила, являющаяся консервативной, может быть выражена так:

$$F_{\text{грав}} = -\frac{dU}{dn} = -\frac{dU}{dr} = -\gamma \frac{mM}{r^2}.$$

Знак минус означает, что сила тяжести направлена в сторону уменьшения r, т. е. к центру сил.

Замечания. 1. Работа консервативных сил всегда связана с изменением потенциальной энергии системы. Если работа этих сил положительна, то изменение потенциальной энергии системы отрицательно (потенциальная энергия системы уменьшается). Наоборот, при отрицательной работе консервативных сил потенциальная энергия системы возрастает.

2. Если $F_{\text{внеш}} > F_{\text{конс}}$, то $F_{\text{полн}} = F_{\text{внеш}} - F_{\text{конс}} \neq 0$ и, следовательно, тело будет приобретать кинетическую энергию. Однако и в этом случае работа консервативных сил по-прежнему будет связана с изменением потенциальной энергии системы. Следовательно, работа внешней силы идет на изменение потенциальной энергии системы и на изменение кинетической энергии движущегося тела.

---

[1] Величину $\frac{dU}{dn}$ называют *градиентом* изменения U.

7. ПОТЕНЦИАЛ ПОЛЯ ТЯГОТЕНИЯ

Кроме векторной (силовой) характеристики поля, существует еще скалярная (энергетическая) характеристика, называемая потенциалом.

Пробное тело массой m, будучи помещенным на расстоянии r от центра поля, обладает потенциальной энергией

$$U = -\gamma \frac{mM}{r}.$$

Назовем потенциальную энергию пробного тела единичной массы потенциалом поля в данной точке. Обозначив потенциал через φ, можно записать:

$$\varphi = \frac{U}{m} = -\gamma \frac{M}{r}. \qquad (6.36)$$

Таким образом, потенциал в некоторой точке центрального гравитационного поля обратно пропорционален расстоянию этой точки от центра поля [1].

Работа сил тяготения между двумя точками поля равна:

$$A_{\text{тяг}} = -(U_2 - U_1) = m(\varphi_1 - \varphi_2). \qquad (6.37)$$

Отсюда можно выяснить физический смысл потенциала. Пусть $r_2 \to \infty$. Тогда из (6.37) следует, что

$$A_{\text{тяг}} = m\varphi_1.$$

Отсюда

$$\varphi_1 = \frac{A_{\text{тяг}}}{m}. \qquad (6.38)$$

Таким образом, *потенциал в данной точке равен работе, которую совершает сила тяготения при удалении тела единичной массы из данной точки в бесконечность* (эта работа отрицательна, так как угол между силой и перемещением равен 180°).

Силовое поле, в каждой точке которого имеется определенный потенциал, называют потенциальным. Мы видим, что в потенциальном поле работа сил этого поля (консервативных сил) не зависит от формы траектории и по замкнутому пути она равна нулю. Если для неизвестного поля удается показать, что работа сил поля по замкнутому пути равна нулю, т. е.

$$\oint \vec{F} d\vec{l} = 0, \qquad (6.39)$$

мы заключаем, что поле является потенциальным и каждой его

---

[1] Нетрудно показать, что напряженность гравитационного поля связана с потенциалом соотношением $G = -\frac{d\varphi}{dr}$.

точке соответствует определенный потенциал φ; работа сил поля при перемещении единичной массы между точками поля 1 и 2 равна разности потенциалов и не зависит от формы пути:

$$A_{1,2} = \varphi_1 - \varphi_2.$$

Вопросы для самопроверки

1. Что выражает собой энергия и работа по определению Энгельса? Всегда ли работу в широком смысле этого слова можно выразить через силу и путь?

2. Как подсчитывается работа постоянной силы? Чему равна работа центростремительной силы? Чему равна работа силы, действующей на тело, которое движется по окружности неравномерно?

3. Как подсчитывается работа переменной силы? Как изображаются элементарная и полная работа на графике зависимости силы (ее тангенциальной составляющей) от пути? Подсчитайте работу растяжения ангармонической пружины ($F_{упр} = -kx^3$). Подсчитайте работу в однородном гравитационном поле и центральном гравитационном поле.

4. Что называют мощностью? Как по заданной мощности определить работу? Выведите формулу $P = \vec{F}\vec{v}$. Каков физический смысл этой формулы?

5. Какими единицами измеряется работа и мощность в системах СИ и СГС? Сформулируйте определения этих единиц и найдите связь между ними.

6. Какие силы называются консервативными? Перечислите, какие из известных вам сил являются консервативными? Поясните, почему сила трения скольжения неконсервативная сила. Что можно сказать о силе трения покоя? Опираясь на определение, покажите, что гравитационная и упругая силы являются консервативными силами.

7. Что называют кинетической энергией тела? Каким образом можно прийти к выводу, что кинетическая энергия подсчитывается по формуле $T = \frac{mv^2}{2}$? Какими единицами измеряется кинетическая энергия?

8. Докажите теорему об изменении кинетической энергии и поясните, почему эта теорема верна лишь для равнодействующей всех сил, приложенных к телу. Доказательство приведите отдельно для постоянной и переменной сил.

9. Что называют потенциальной энергией? От чего она зависит? Поясните, почему потенциальная энергия может быть установлена только с точностью до некоторой постоянной. Как выбирается эта постоянная? От чего она зависит? Как подсчитывается потенциальная энергия? Какими единицами она измеряется?

10. Выведите связь работы силы с изменением потенциальной энергии. Работу всякой ли силы можно выразить через разность потенциальных энергий?

11. Выведите формулу, связывающую консервативную силу с потенциальной энергией (для гравитационной силы и силы упругости).

12. Нарисуйте графики зависимости потенциальной энергии тела от расстояния в однородном и центральном гравитационных полях, а также график потенциальной энергии растянутой (сжатой) пружины в функции растяжения.

13. Гравитационные силы в каждой точке могут быть охарактеризованы двумя величинами: напряженностью поля и потенциалом. Сформулируйте определения этих величин. Какова связь между ними?

14. Чему равна работа, необходимая для перемещения тела массой $m = 1$ кг на расстояние в 10^5 км от поверхности Земли в радиальном направлении? Чему равна потенциальная энергия тела после такого перемещения?

15. Чему равна кинетическая и потенциальная энергия Луны в поле Земли? Каков алгебраический знак полной энергии?

16. Тело массой m поднимается медленно по наклонной плоскости на высоту h. Найдите работу внешней силы (силы тяги), работу силы тяжести, работу силы трения и работу силы нормальной реакции. Коэффициент трения равен μ.

17. На катере массой $m = 10^3$ кг установлен двигатель мощностью $P = 40$ кВт. Коэффициент пропорциональности между силой сопротивления и скоростью равен 150 Нс/м. Определить максимальную скорость, которую может приобрести катер.

18. Чему равна кинетическая энергия тела, упавшего с высоты $h = 1$ км, если его начальная скорость равна нулю?

Занятие 13

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ. ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ КРИВЫЕ. СТАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

1. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ ДЛЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ В КОНСЕРВАТИВНОМ ПОЛЕ. ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ КРИВЫЕ

Полная энергия тела в поле консервативных сил. Если тело находится под действием только консервативной силы, то работа этой силы, являющейся в то же время полной силой, равна, с одной стороны, убыли потенциальной энергии

$$A_{\text{конс}} = -\Delta U,$$

а с другой стороны, она равна приросту кинетической энергии

$$A_{\text{конс}} = \Delta T.$$

Таким образом, приравнивая правые части, получаем:

$$\Delta T = -\Delta U,$$

или

$$\Delta (T + U) = 0.$$

Отсюда

$$T + U = E = \text{const}. \tag{6.40}$$

Это означает, что *сумма кинетической и потенциальной энергии тела (его полная механическая энергия) в поле консервативных сил есть величина постоянная при всех перемещениях тела в этом поле.* Этот результат называют законом сохранения полной механической энергии тела в поле консервативных сил.

Пример. Пусть тело массой m свободно падает без начальной скорости с высоты h_1. Его полная энергия в верхней точке равна $E_1 = mgh_1$, а в нижней $E_2 = \frac{mv_2^2}{2}$. В промежуточных точках

$$E = \frac{mv^2}{2} + mgh = \text{const}.$$

В постоянстве E можно убедиться простым расчетом. Поскольку $v^2 = 2g(h_1 - h)$, то

$$\frac{mv^2}{2} = mg(h_1 - h).$$

Для полной энергии можно записать:

$$E = \frac{mv^2}{2} + mgh = mg(h_1 - h) + mgh = mgh_1 = \text{const}.$$

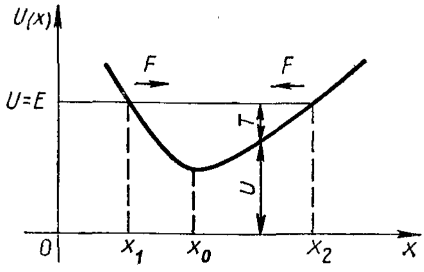


Рис. 6.16

Потенциальные кривые и характер движения в поле консервативных сил. Ограничимся случаем одномерного движения, когда положение точки и ее потенциальная энергия зависят только от одной координаты, например x. Если на тело действует только консервативная сила, то полная энергия является постоянной:

$$E = \frac{mv^2}{2} + U(x) = \text{const}. \tag{6.41}$$

Так как кинетическая энергия тела не может принимать отрицательных значений, то при движении тела вдоль оси X должно выполняться неравенство: $E - U(x) \geqslant 0$, или $U(x) \leqslant E$. Это означает, что тело может находиться только в тех местах оси X, в которых потенциальная энергия не превосходит полной энергии. Если приравнять эти энергии, получим уравнение

$$U(x) = E,$$

из которого определяются граничные положения тела на оси x.

Для наглядного суждения о характере движения материальной точки с энергией E пользуются графиками потенциальной энергии тела — графиками функции $U(x)$.

Пусть, например, потенциальная энергия зависит от координаты x по закону, графически представленному на рисунке 6.16. Чтобы найти границы движения точки с энергией E, проведем параллельно оси x прямую $U = E$. Эта прямая пересекает график $U(x)$ в двух точках с абсциссами x_1 и x_2. Так как материальная точка при своем движении может находиться только в тех местах, для которых $U(x) \leqslant E$, то она должна находиться на оси X между точками x_1 и x_2. В область правее x_2 и левее x_1 тело с энергией E попасть не может.

В точках x_1 и x_2 потенциальная энергия $U(x)$ равна полной энергии E. Поэтому в этих точках кинетическая энергия (а следовательно, и скорость тела) равна нулю. В точке x_0 (рис. 6.16) потенциальная энергия имеет наименьшее значение. Следовательно, в этой точке кинетическая энергия тела наибольшая. На рисунке 6.16 вертикальными стрелками показаны значения U

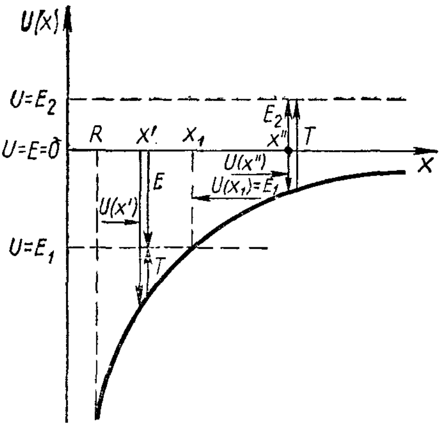


Рис. 6.17

и T для произвольного значения x. Из рисунка видно, что по мере приближения к точке x_2 (или x_1) потенциальная энергия растет ($U \to E$), а кинетическая энергия убывает ($T \to 0$).

Из соотношения $F_{конс} = -\frac{dU}{dx}$ следует, что, когда тело находится справа от x_0, на него действует сила, направленная влево (т. е. к x_0), а когда тело находится слева от x_0, на него действует сила, направленная вправо (т. е. опять же к x_0). Ясно, что тело совершает колебания около положения x_0 с периодом, равным удвоенному промежутку времени, необходимому для перехода тела из x_1 в x_2.

Движение тела по радиальной линии в центральном гравитационном поле Земли. Потенциальная энергия тела массой m на расстоянии x от центра Земли выражается формулой

$$U = -\gamma \frac{Mm}{x}.$$

График функции $U(x)$ представлен на рисунке 6.17 (где R — радиус Земли). Потенциальная энергия отрицательна при всех $x \geqslant R$ и стремится к нулю при $x \to \infty$. Если тело имеет полную энергию E_1, то оно может двигаться только в области между $x = R$ и $x = x_1$, т. е. от поверхности Земли до некоторой высоты $h = x_1 - R$. При этом его полная энергия $E_1 = U + T$ отрицательна. На рисунке 6.17 вертикальными стрелками показаны энергии E, U и T в момент, когда тело находилось на высоте $h < x_1 - R$. По мере движения тела вверх (в сторону возрастания x) стрелка, изображающая кинетическую энергию T, укорачивается и обращается в нуль при $x = x_1$. Потенциальная же энергия возрастает и при $x = x_1$ — тело обладает только потенциальной энергией: $U = E_1$. Вообще для любой конечной отрицательной энергии тело может подняться от центра Земли только на конечную высоту. При положительной энергии E_2 тело может удалиться от Земли на бесконечно большую «высоту», т. е. покинуть Землю. На бесконечном расстоянии от Земли такое тело будет обладать кинетической энергией $T_\infty = E_2$. Для точки $x'' < \infty$ показаны стрелками $E_2, U(x'')$, T. Из рисунка видно, что если $x'' \to \infty$, то $U(x'') \to 0$ и $T \to E_2$.

Если тело обладает полной энергией $E_0 = 0$, то, как видно из графика, приведенного на рисунке 6.17, оно удалится в бесконечность (т. е. покинет Землю), но кинетическая энергия его в бесконечности будет равна нулю ($T_\infty = 0$). Так как в бесконечности обращается в нуль и потенциальная энергия, то согласно закону сохранения полной энергии имеем:

$$E = U(R) + T(R) = U_\infty + T_\infty = 0, \tag{6.42}$$

где $U(R)$ и $T(R)$ — значения потенциальной и кинетической энергии на поверхности Земли, а U_∞ и T_∞ — значения этих энергий в бесконечности. Из равенства (6.42) следует:

$$T_R = -U_R,$$

или

$$\frac{mv^2}{2} = -\left(-\gamma\frac{Mm}{R}\right). \tag{6.43}$$

Отсюда определяется минимальная скорость, которую нужно сообщить телу, чтобы оно покинуло Землю. Это так называемая *вторая космическая скорость*; она не зависит от массы тела и определяется из (6.43):

$$v_{II} = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}} \approx 11{,}2\,\frac{\text{км}}{\text{с}}. \tag{6.44}$$

По смыслу наших рассуждений скорость v_{II} должна быть направлена по радиусу. Если это так, то тело будет удаляться от Земли по радиусу (система отсчета связана с центром Земли и неподвижными звездами). Однако можно показать, что направление скорости не имеет значения. Важно лишь, чтобы она не была направлена к поверхности Земли, так как в этом случае тело столкнется с нею. При произвольном направлении $\vec{v}_{II}$ движение тела (в той же системе отсчета) будет происходить по параболе. Напомним, что *первая космическая скорость* $v_I = \sqrt{\frac{\gamma M}{R}} \approx 8$ км/с и $v_{II} = \sqrt{2}\,v_I$. Для того чтобы тело могло покинуть солнечную систему (преодолеть солнечное притяжение), ему необходимо сообщить так называемую *третью космическую скорость*, которая в системе отсчета *центр Солнца — неподвижные звезды* имеет значение

$$v_{III} = \sqrt{\frac{2\gamma M_C}{R_{C\text{-}З}}} \approx 36{,}8\,\frac{\text{км}}{\text{с}}, \tag{6.45}$$

где M_C — масса Солнца; $R_{C\text{-}З}$ — радиус орбиты Земли. Но относительно Земли, которая сама имеет орбитальную скорость $v_0 = 30$ км/с, третья космическая скорость равна $v_{III} = 16{,}8$ км/с.

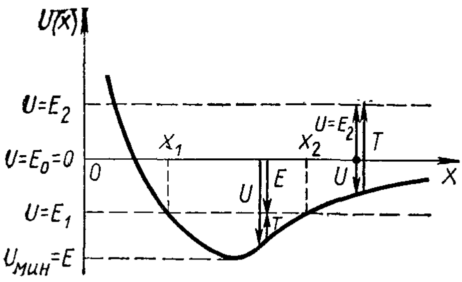


Рис. 6.18

Радиальное движение атома (частицы) в потенциальном поле другого атома. Один из атомов примем за неподвижный. С ним свяжем начало отсчета расстояния между атомами. График потенциальной энергии взаимодействия двух атомов в функции расстояния между ними (x) представлен на рисунке 6.18. Из графика видно, что при полной энергии $E = U_{\text{мин}}$ рассматриваемый атом находится в покое (на дне потенциальной ямы). При $E = E_1 < 0$ рассматриваемый атом относительно неподвижного атома совершает периодические движения между точками с координатами x_1 и x_2 (рис. 6.18). При $E = 0$ данный атом удаляется от неподвижного атома на бесконечно большое расстояние (покидает его). В бесконечности кинетическая энергия атома равна нулю ($T_\infty = 0$).

При $E = E_2 > 0$ атом также удалится в «бесконечность», но в этом случае $T_\infty = E_2$.

Таким образом, система атомов (например, кристалл) перестает быть неизменяемой, если $E \geqslant 0$. А это зависит от кинетической энергии (если она мала, то $E = U + T < 0$, ибо $U < 0$). Кинетическая энергия атомов кристалла зависит от температуры. Следовательно, повышая температуру, можно достичь такого ее значения, при котором кристалл начнет разрушаться (плавиться).

2. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ ДЛЯ СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

Мы уже знаем, что полная энергия материальной точки, движущейся в постоянном во времени поле консервативных сил, не изменяется. Но силовое поле создается какими-то телами. Для того чтобы поле было постоянным во времени, эти тела должны быть неподвижными. Таким образом, выражение

$$E = U + T = \text{const} \tag{6.46}$$

представляет собой закон сохранения энергии для того частного случая, когда данная материальная точка движется, а все остальные, с которыми она взаимодействует, неподвижны.

Справедлив ли закон сохранения механической энергии для систем, в которых все взаимодействующие тела находятся в движении? Да, справедлив, если в этой системе действуют только консервативные силы.

Рассмотрим изолированную систему из N материальных точек (рис. 6.19) с массами $m_1, m_2, \ldots, m_N$, между которыми действуют только консервативные силы. Запишем для каждой материальной точки второй закон Ньютона:

$$
\begin{aligned}
m_1\frac{d\vec{v}_1}{dt} &= \vec{F}_{12}+\vec{F}_{13}+\ \ldots\ +\vec{F}_{1N}=\sum_{j=1}^{N}{}' \vec{F}_{1j}=\vec{F}_1 \text{ при } j\neq 1,\\
m_2\frac{d\vec{v}_2}{dt} &= \vec{F}_{21}+\vec{F}_{23}+\ \ldots\ +\vec{F}_{2N}=\sum_{j=1}^{N}{}' \vec{F}_{2j}=\vec{F}_2 \text{ при } j\neq 2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
m_N\frac{d\vec{v}_N}{dt} &= \vec{F}_{N1}+\vec{F}_{N2}+\ldots+\vec{F}_{N,\,N-1}=\sum_{j=1}^{N}{}' \vec{F}_{Nj}=\vec{F}_N \text{ при } j\neq N.
\end{aligned}
\qquad (6.47)
$$

Здесь $\vec{F}_{ij}$ — консервативная сила, действующая на точку i-го номера со стороны точки j-го номера. Полная сила, действующая на точку i со стороны всех остальных точек системы, равна

$$\vec{F}_i=\sum_{j=1}^{n}{}' F_{ij}$$

при $j\neq i$.

Пусть за время dt точки системы переместились соответственно на $d\vec{r}_1, d\vec{r}_2, \ldots$ (см. рис. 6.19). Умножим каждое уравнение (6.47) скалярно на соответствующее перемещение и учтем, что $\frac{d\vec{v}_i}{dt}d\vec{r}_i=\vec{v}_i\,d\vec{v}_i$. Тогда

$$
\begin{aligned}
m_1(\vec{v}_1\,d\vec{v}_1)-\vec{F}_1\,d\vec{r}_1&=0,\\
&\ldots\ldots\\
m_N(\vec{v}_N\,d\vec{v}_N)-\vec{F}_N\,d\vec{r}_N&=0.
\end{aligned}
\qquad (6.48)
$$

Так как $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_N$ — консервативные силы, то работа каждой такой силы, взятая с обратным знаком, равна изменению потенциальной энергии соответствующей материальной точки в силовом поле всех остальных точек. Так, работа силы $\vec{F}_i$ при перемещении точки i-го номера на $d\vec{r}_i$ равна:

$$-\vec{F}_i\,d\vec{r}_i=dU_i,$$

где dU_i — изменение потенциальной энергии i-й материальной

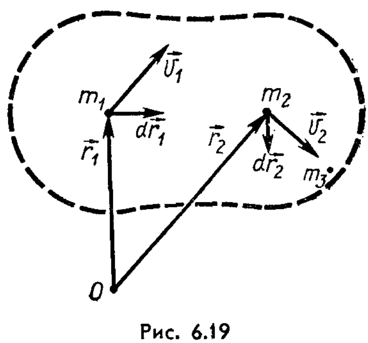


Рис. 6.19

точки. Учитывая это, а также то, что

$$m\vec{v}_i\, d\vec{v}_i = d\left(\frac{m\vec{v}_i^{\,2}}{2}\right) = d\left(\frac{mv_i^2}{2}\right) = dT_i,$$

можно систему (6.48) записать так:

$$\begin{aligned} &dT_1 + dU_1 = 0, \\ &\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ &dT_N + dU_N = 0. \end{aligned} \tag{6.49}$$

Сложив эти уравнения, получим:

$$\sum_i^N dT_i + \sum_i^N dU_i = 0.$$

Вынесем знак дифференциала за знак суммы [1]:

$$d\left(\sum_i^N T_i + \sum_i^N U_i\right) = 0. \tag{6.50}$$

Сумма $\sum_i T_i = T$, очевидно, обозначает кинетическую энергию системы, а сумма $\sum_i U_i = U$ — потенциальную энергию системы (энергию взаимодействия всех точек системы между собой).

Учитывая это, можно соотношение (6.50) записать так:

$$d(T + U) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$T + U = E = \text{const}. \tag{6.51}$$

Мы получили закон сохранения механической энергии для системы материальных точек. **Полная энергия (сумма кинетической и потенциальной энергии) изолированной системы, в которой действуют только консервативные силы, есть величина постоянная, какие бы механические изменения не происходили внутри системы.** Это означает, что если система переходит из состояния *1* в состояние *2*, то ее энергия сохраняется:

$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2 = \text{const}.$$

Рассмотрим теперь *незамкнутую систему.* В такой системе на каждую материальную точку, кроме внутренних консервативных сил $\vec{F}_i$, могут действовать и внешние консервативные или неконсервативные силы $\vec{\Phi}_i$. Уравнение движения для точки i-го номера примет вид:

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{F}_i + \vec{\Phi}_i, \tag{6.52}$$

[1] Эта операция возможна только в том случае, если dT_i и dU_i обозначают полные дифференциалы функции, что и имеет место в данном случае.

Здесь $\vec{F}_i$ есть сумма всех сил, действующих на i-ую точку со стороны всех остальных точек:

$$\vec{F}_i = \sum_j{}' \vec{F}_{ji} \quad \text{при} \quad j \neq i.$$

Система уравнений (6.52) теперь запишется так:

$$dT_i + dU_i = \vec{\Phi}_i \, d\vec{r}_i = \delta A_i \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n), \tag{6.53}$$

где δA_i — элементарная работа внешней силы $\vec{\Phi}_i$[1] при перемещении i-й точки на $d\vec{r}_i$. Сложив все уравнения системы (6.53), получим:

$$\sum_i dT_i + \sum_i dU_i = \sum_i \delta A_i. \tag{6.54}$$

Вынесем в левой части знак дифференциала за знак суммы, а сумму работ в правой части обозначим через δA:

$$\delta A = \sum_i \delta A_i.$$

Тогда

$$d\left(\sum_i T_i + \sum_i U_i\right) = \delta A,$$

или

$$d(T + U) = \delta A, \tag{6.55}$$

где T и U — соответственно кинетическая и потенциальная энергия системы; δA — суммарная работа всех внешних сил, когда каждая точка смещается на величину $d\vec{r}_i$. Другими словами, δA есть работа внешних сил, вызывающая переход системы из одного состояния в другое, бесконечно близкое.

Так как $T + U = E$ есть полная механическая энергия системы, то соотношение (6.55) примет вид:

$$dE = \delta A. \tag{6.56}$$

Это значит, что **если система переходит из одного состояния с энергией E_1 в другое состояние с энергией E_2, то изменение энергии системы $E_2 - E_1$ равно работе A, совершенной при этом внешними силами:**

$$E_2 - E_1 = A. \tag{6.57}$$

В этом состоит закон сохранения энергии для незамкнутых систем. Из (6.57) видно, что при $A > 0$ энергия системы возрастает, а при $A < 0$ энергия системы убывает.

---

[1] Так как силы Φ_i могут быть неконсервативными, то их работа в общем случае не может быть выражена через изменение потенциальной энергии, т. е. как дифференциал потенциальной функции: $\Phi_i dr_i \neq dU_i$. Следовательно, $\Phi_i dr_i$, вообще говоря, не является дифференциалом. Именно поэтому элементарную работу мы обозначаем через δA, а не через dA.

Если в *изолированной* системе, кроме консервативных сил, между телами действуют силы трения, то, поскольку работа их не может быть учтена как изменение потенциальной энергии системы, их можно формально рассматривать как внешние силы $\vec{\Phi}_i$. В этом случае мы придем к соотношению (6.57), в котором A обозначает работу сил трения. Так как работа сил трения отрицательна (силы трения образуют с вектором перемещения угол 180°), то **полная механическая энергия замкнутой системы, в которой действуют силы трения, с течением времени уменьшается.**

Конечно, механическая энергия при этом не исчезает бесследно: она лишь переходит в другую форму — во внутреннюю энергию тел. Однако только опыт доказывает, что увеличение внутренней энергии в замкнутой системе в точности равно убыли полной механической энергии системы. Поэтому, опираясь только на опыт, можно сформулировать закон сохранения энергии в самом общем виде: **энергия никогда не исчезает и не появляется из ничего; она лишь превращается из одного вида в другой.**

Следует подчеркнуть, что закон сохранения энергии в его общей формулировке есть сугубо опытный закон. Из него следует как частный случай закон сохранения энергии для замкнутых систем, в которых действуют лишь консервативные силы. Но для таких систем можно закон сохранения механической энергии получить как следствие законов Ньютона (см. вывод соотношений (6.51) и (6.57)). Однако в общем случае закон сохранения энергии является самостоятельным законом природы, и из законов динамики его вывести нельзя.

3. СТАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Статика — часть механики, изучающая условия равновесия (в данном случае материальной точки).

Виды равновесия. Положение равновесия характеризуется тем, что скорость материальной точки и сумма действующих на нее сил равны нулю. Если отклонить материальную точку от положения равновесия незначительно, то силы, действующие на точку, могут измениться, а их сумма может оказаться неравной нулю. В зависимости от того, как изменяется сумма сил, различают три вида равновесия.

Если сумма сил (или просто сила), возникающая при отклонении тела (точки) от положения равновесия, такова, что она возвращает тело в положение равновесия, то такое равновесие называют *устойчивым*. Оно может сохраняться сколь угодно долго, ибо случайные малые толчки, которым подвержено любое реальное тело, не уведут тело из этого состояния.

Если сила, появляющаяся при отклонении, будет и дальше удалять тело от положения равновесия, то равновесие называют *неустойчивым*.

Если при смещении тела из положения равновесия силы не возникают, равновесие называют *безразличным*.

Пример. Муфта на изогнутом стержне скреплена с пружиной (рис. 6.20). Если стержень имеет форму дуги окружности радиуса OA с центром в точке O, то положение муфты в любом месте стержня соответствует безразличному равновесию ($\vec{F}_{\text{упр}} + \vec{R} = 0$). Если стержень изогнут так, что он целиком лежит внутри окружности радиуса OA (линия *1*), то равновесие муфты в положении A будет неустойчивым, так как при смещении муфты в сторону возникает равнодействующая $\vec{F}$, стремящаяся удалить муфту от первоначального положения. Если стержень изогнут так, что он лежит вне окружности радиуса OA (линия *2* или *3*), положение A будет теперь устойчивым, так как при смещении муфты (в положение *II*) возникает равнодействующая $\vec{F}$, возвращающая муфту в исходное положение.

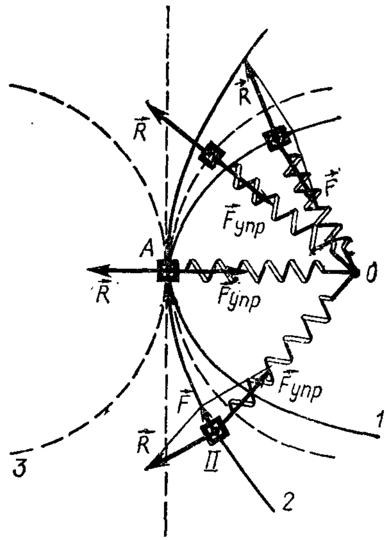


Рис. 6.20

Потенциальная энергия тела при различных видах равновесия. Нетрудно видеть, что устойчивому равновесию муфты на изогнутом стержне *2* соответствует минимум потенциальной энергии, так как растяжение пружины для этого положения меньше, чем при других близких положениях. Таким образом, *если тело (материальная точка) находится в положении, которому отвечает минимум потенциальной энергии, то это есть положение устойчивого равновесия. Если же тело находится в положении, которому отвечает максимум потенциальной энергии, то это есть положение неустойчивого равновесия.*

Если известен закон, по которому изменяется потенциальная энергия тела $U = U(x)$ в постоянном поле консервативных сил, то по виду графика этой функции можно установить те места (координаты x), в которых тело будет в устойчивом или неустойчивом равновесии. Для потенциальной кривой, изображенной на рисунке 6.21, положения с координатами x_1 и x_3 отвечают неустойчивому равновесию, а положение x_2 — устойчивому. Это можно проверить.

Если вывести тело из положения равновесия в точке x_1 вправо, то производная $\frac{dU}{dx}$, имеющая смысл тангенса угла на-

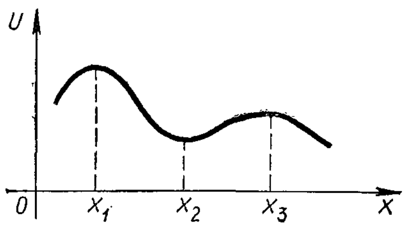


Рис. 6.21

клона касательной к оси X, получит отрицательный знак, а сила $F = -\frac{dU}{dx}$ — положительный. Положительный знак силы означает, что она направлена в сторону роста координаты x. Если тело сместить из положения x_1 влево, то $\frac{dU}{dx}$ примет положительный знак, а сила — отрицательный. Это означает, что сила направлена в сторону отрицательных x. Мы видим, что при смещении тела из x_1 в любую сторону возникают силы, которые будут удалять тело от равновесия. Значит, положение, соответствующее координате x_1, есть положение неустойчивого равновесия. Нетрудно показать, что положение x_2 есть положение устойчивого равновесия.

Пример. Найдем положение устойчивого равновесия груза, подвешенного на пружине. Потенциальная энергия груза состоит из двух слагаемых: энергии $U_{\text{упр}} = \frac{kx^2}{2}$, обусловленной упругой деформацией пружины и энергией $U_{\text{грав}} = -mgx$ (ось x направлена вниз), обусловленной гравитационным взаимодействием. Полная энергия системы равна

$$U = U_{\text{упр}} + U_{\text{грав}},$$

или

$$U = \frac{kx^2}{2} - mgx.$$

Отсюда, приравнивая производную нулю

$$\frac{dU}{dx} = kx - mg = 0,$$

получаем уравнение, из которого находим координату положения устойчивого равновесия:

$$x = \frac{mg}{k}.$$

Условия длительного пребывания тела в заданном положении. В механике нередко возникает задача: найти такие положения, в которых тело может находиться длительное время. В реальных условиях на всякое тело действуют случайные толчки разной интенсивности. Появление этих толчков для тел, находящихся в комнате, связано с колебаниями почвы и стен здания, вызванными движением транспорта, порывами ветра и другими причинами.

Поэтому длительное пребывание тела в положении неустойчивого равновесия невозможно. Длительность пребывания тела в положении устойчивого равновесия существенно зависит от силы случайных толчков. Так, при слабых толчках в положении x_2 (рис. 6.21) тело может находиться сколь угодно долго. Но если толчки столь сильные, что способны вывести тело из потенциальной ямы, то тело в положении (x_2) не может находиться длительное время.

Вопросы для самопроверки

1. В чем состоит закон сохранения механической энергии материальной точки, движущейся в консервативном поле? Поясните, как получается соотношение $T + U = E = \text{const}$. Планета движется по эллипсу; будет ли E оставаться постоянным? Как меняется кинетическая энергия планеты?

2. Как по графику потенциальной энергии установить характер движения этого тела? Что называют потенциальным барьером? Нарисуйте график потенциальной энергии: а) для тела в однородном поле тяготения; б) для тела в центральном поле; в) для положительного и отрицательного зарядов в поле положительного заряда; г) для тела, подвешенного на пружине; д) для математического маятника; е) для шарика, падающего и ударяющегося о стальную плиту.

3. Как изменится график потенциальной энергии тела, если его массу увеличить вдвое (рассмотреть случаи однородного и центрального гравитационных полей)? Как по графику потенциальной энергии тела единичной массы (потенциальная кривая) построить график потенциальной энергии тела массы m?

4. Нарисуйте график потенциальной энергии тела в поле тяготения Земли и поясните, как по этому графику и заданной энергии тела E найти кинетическую энергию. Как изменяется кинетическая энергия при удалении тела от Земли? Что при этом происходит с потенциальной энергией? Какую минимальную энергию $E_{\text{мин}}$ нужно сообщить телу, находящемуся на поверхности Земли, чтобы оно покинуло Землю? Рассчитайте вторую космическую скорость. Что произойдет с телом, если ему сообщить энергию, бо́льшую $E_{\text{мин}}$? Покажите на графике, приведенном на рисунке 6.17, кинетическую энергию тела для случая, когда $E > E_{\text{мин}}$.

Какую минимальную скорость необходимо сообщить телу на экваторе в восточном направлении, чтобы оно покинуло Землю?

5. Что называют первой, второй и третьей космическими скоростями? Почему эти скорости не зависят от массы тела? Может ли тело двигаться вокруг Земли со скоростью меньше, чем v_1? По какой траектории будет двигаться тело относительно центра Земли, если оно получило вторую (третью) космическую скорость в направлении радиуса от центра Земли? Какой вид примет траектория, если начальная скорость v_{II} была перпендикулярна радиусу Земли? Рассчитайте третью космическую скорость относительно центра Земли. Рассчитайте вторую и третью космические скорости для тела, находящегося на Луне: а) относительно центра Луны; б) относительно поверхности Луны.

6. Рассчитайте скорость, необходимую для ухода звезды из галактики, если звезда находится на краю галактики. Галактика имеет сферическую форму радиуса 10^{19} м и содержит 10^{10} звезд массой 10^{31} кг каждая. Распределение звезд равномерно по всему объему.

7. Как построить график потенциальной энергии тела в поле двух точечных масс? Какой вид имеет такой график для тела в гравитационном поле Земли и Луны? Покажите на этом графике, какую минимальную энергию должно иметь тело на Земле, чтобы оно могло попасть на Луну? Какая при этом кинетическая энергия должна быть сообщена телу?

8. Нарисуйте график потенциальной энергии атома в поле другого (неподвижного) атома и объясните, почему он имеет именно такую форму.

Как движется атом с энергией E в поле неподвижного атома, если $U_{мин} < E < 0$? если $E > 0$? Может ли энергия E быть меньше $U_{мин}$?

9. Сформулируйте и запишите закон сохранения механической энергии для замкнутой системы: а) в которой действуют только консервативные силы; б) в которой действуют неконсервативные силы. Сформулируйте закон сохранения механической энергии для незамкнутой системы. Докажите простым расчетом, что полная механическая энергия свободно падающего тела есть величина постоянная. То же докажите для энергии тела, подвешенного на пружине.

Тело массой в 1 кг поднимают на высоту 1 м. Какую при этом совершают работу, если: а) подъем происходит медленно с постоянной малой скоростью; б) с ускорением 2 м/с^2?

10. Сколько и какие виды равновесия известны для материальной точки? Приведите примеры различных видов равновесия. Как меняется потенциальная энергия около положения равновесия? Каковы условия длительного пребывания точки в положении устойчивого равновесия?

Занятие 14

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ И ИМПУЛЬСА

1. УДАР ШАРОВ

При соударении шаров силы взаимодействия довольно резко изменяются с расстоянием между центрами масс и весь процесс взаимодействия протекает в очень малом пространстве и в очень короткий промежуток времени. Такое взаимодействие называют *ударом.*

Различают два вида ударов. Если шары являются телами абсолютно упругими, то удар называют *абсолютно упругим* (или просто *упругим*). Если же шары (или хотя бы один из них) являются телами абсолютно неупругими, удар называют *абсолютно неупругим* (или просто *неупругим*). Абсолютная упругость и абсолютная неупругость тел, а значит, и классификация ударов по этому признаку являются идеализацией. На самом деле всякий удар тел (шаров) является, строго говоря, неупругим. Однако в одних случаях его с известным приближением можно считать абсолютно упругим, в другом — абсолютно неупругим. Мы рассмотрим только центральный удар (удар, который происходит по линии, соединяющей центры шаров).

Абсолютно неупругий удар. Удар этого типа можно наблюдать на двух восковых или свинцовых шарах, подвешенных на нитях одинаковой длины (рис. 6.22). После того как отклоненный шар A ударится о покоящийся шар B, оба они начнут двигаться вместе. Угол отклонения двух шаров α_2 будет меньше первоначального угла α_1 отклонения шара A.

Процесс соударения протекает следующим образом. Как только шары A и B придут в соприкосновение, начнется их деформация, в результате которой возникнут силы сопротивления (вязкое трение), затормаживающие шар A и ускоряющие шар B. Так как эти силы пропорциональны скорости изменения деформации (т. е. относительной скорости движения шаров), то по мере уменьшения относительной скорости они убывают и обращаются в нуль, как только скорости шаров выравнятся. С этого момента шары, «слившись», движутся вместе.

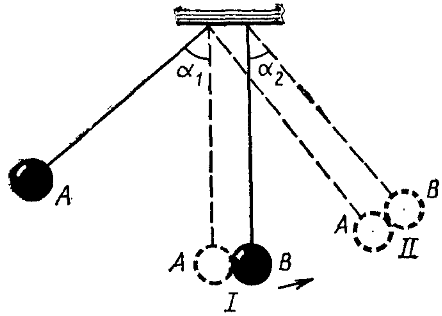


Рис. 6.22

Рассмотрим задачу о центральном ударе неупругих шаров количественно. Будем считать, что на соударяющиеся шары никакие третьи тела не действуют[1]. Тогда шары образуют замкнутую систему, в которой применимы законы сохранения энергии и импульса. Однако силы взаимодействия между шарами неконсервативные. Поэтому к этой системе применим закон сохранения энергии в форме (6.57). Для системы двух шаров этот закон запишется так:

$$E' - E = A, \tag{6.58}$$

где A — работа внутренних неупругих (неконсервативных) сил; E и E' — полная энергия двух шаров соответственно до и после удара, состоящая из кинетической энергии обоих шаров и потенциальной энергии их взаимодействия между собой[2]:

$$E = T_1 + T_2 + U, \quad E' = T_1' + T_2' + U'. \tag{6.59}$$

Так как до и после удара шары не взаимодействуют, то $U = U' = 0$ и соотношение (6.58) примет вид:

$$(T_1' + T_2') - (T_1 + T_2) = A, \tag{6.60}$$

или

$$\frac{(m_1 + m_2)\,v'^2}{2} - \left(\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}\right) = A, \tag{6.61}$$

где m_1, m_2 — массы шаров; v_1, v_2 — их скорости до удара; v' — скорость шаров после удара. Поскольку $A < 0$, то равенство (6.60) показывает, что кинетическая энергия системы уменьшилась. Деформация и нагревание шаров (увеличение энергии теплового движения молекул) произошли за счет убыли кинетической энергии.

---

[1] Это ограничение можно снять, если рассматривать систему шаров только в промежутке времени, за который происходил удар.

[2] Если считать, что шары взаимодействуют еще с Землей, то в потенциальную энергию U и U' войдет энергия и этого взаимодействия, которая, однако, за время удара изменится очень мало, так что $U - U' \approx 0$.

Для определения конечной скорости $\vec{v}'$ следует воспользоваться законом сохранения импульса

$$(m_1 + m_2)\vec{v}' = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2. \tag{6.62}$$

Так как удар центральный, то все векторы скорости лежат на одной прямой. Принимая эту прямую за ось X и проектируя векторное уравнение (6.62) на эту ось, получим скалярное уравнение, в котором скорости имеют алгебраический знак (положительный, если они направлены в стороны положительных значений x). Из этого уравнения находим:

$$v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \tag{6.63}$$

Отсюда видно, что если шары до удара двигались в одну сторону, то после удара они будут двигаться в ту же сторону. Если же шары до удара двигались навстречу друг другу, то после удара они будут двигаться в ту сторону, куда двигался шар, имевший больший импульс.

Подставим v' из (6.63) в равенство (6.61):

$$\frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_1 - v_2)^2 = A. \tag{6.64}$$

Таким образом, работа внутренних неконсервативных сил при деформации шаров (энергия, перешедшая в тепловую форму) пропорциональна квадрату относительной скорости шаров.

Практическое использование неупругого удара. Неупругий удар двух тел используется на практике для различных целей: для изменения формы тел, например при штамповке, ковке, чеканке и т. д.; для перемещения тел в сопротивляющейся среде, например при забивании свай, гвоздей и др. В этих случаях обычно одно из соударяющихся тел покоится. Полагая в формуле (6.64) $v_2 = 0$, т. е. считая, что покоится тело массой m_2, мы получим соотношение:

$$A = \frac{m_1 m_2 v_1^2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} T_1. \tag{6.65}$$

Число $\nu = \frac{m_2}{m_1 + m_2} < 1$ показывает, какая часть энергии T_1 расходуется на деформацию. Оставшаяся часть энергии $(1 - \nu)\,T_1$ переходит, следовательно, в кинетическую энергию обоих тел. Эта энергия расходуется затем на преодоление сил сопротивления среды, если тела после удара будут двигаться в среде, оказывающей сопротивление движению.

Чем больше ν, тем больше энергии ударяющего тела расходуется на деформацию и тем меньше ее остается в виде кинетической энергии тел после удара. Отсюда следует, что если нужно энергию ударяющего тела использовать для деформации, то масса покоящегося тела должна быть много больше массы движущегося тела ($m_2 \gg m_1$). В этом случае $\nu \approx 1$ и работа по деформации $A \approx T_1$. Вот почему тело, которое подвергается деформации, помещают на очень массивную наковальню. Если энергию T_1 движущегося тела требуется использовать для перемещения второго тела в сопротивляющейся среде, то масса второго тела должна быть, наоборот, много меньше массы ударяющего тела ($m_2 \ll m_1$). В этом случае $1-\nu \approx 1$ и практически вся кинетическая энергия ударяющего тела переходит в кинетическую энергию обоих тел. По этой причине масса молотка во много превосходит массу гвоздя, а масса копровой бабы больше массы забиваемой сваи (попробуйте забить гвоздь легкой дощечкой!).

Абсолютно упругий удар. Абсолютно упругий удар протекает в два этапа. Первый этап — от начала соприкосновения шаров до выравнивания их скоростей — протекает так же, как и при абсолютно неупругом ударе, с той лишь разницей, что силы взаимодействия (как силы упругости) зависят только от величины деформации и не зависят от скорости ее изменения. Пока скорости шаров не сравнялись, деформации будут нарастать, а с ними будут нарастать и силы взаимодействия, замедляющие один шар и ускоряющие другой. В момент, когда скорости шаров сравниваются, силы взаимодействия будут наибольшими. С этого момента начинается второй этап упругого удара: деформированные тела действуют друг на друга в том же направлении, в каком они действовали до выравнивания скоростей. Поэтому то тело, которое замедлялось, будет продолжать замедляться, а то тело, которое ускорялось, будет продолжать ускоряться до тех пор, пока деформации полностью не исчезнут. При восстановлении первоначальной формы тел весь запас потенциальной энергии вновь переходит в кинетическую энергию шаров. Таким образом, при абсолютно упругом ударе тела не изменяют своей внутренней энергии (не нагреваются). Это положение принимают в качестве более общего определения абсолютно упругого соударения: *соударение, не сопровождающееся изменением внутренней энергии тел, называют упругим.*

Будем считать, что два соударяющихся шара образуют замкнутую систему, в которой внутренние силы являются консервативными. В этом случае работа консервативных сил (силы упругости) приводит к увеличению потенциальной энергии взаимодействующих тел. Закон сохранения энергии для такой системы будет иметь вид:

$$T_1 + T_2 + U = T_1' + T_2' + U',$$

где T_1 и T_2 — кинетические энергии шаров в произвольный момент времени t (в процессе удара), а U — потенциальная энергия системы в этот же момент, равная суммарной потенциальной энергии деформации шаров ($U = U_1 + U_2$); T_1', T_2', U' — значения тех же величин, но в другой момент времени t'.

Если момент времени t соответствует началу соударения, то $U_1 = U_2 = U = 0$ (тела еще не деформированы); если t' соответствует концу соударения, когда шары полностью восстановили свою форму, то $U_1' = U_2' = U' = 0$.

Запишем законы сохранения энергии и импульса именно для этих двух моментов времени:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2}, \tag{6.66}$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'. \tag{6.67}$$

(Закон сохранения импульса записан в проекции на ось, совпадающей с линией удара.)

Первое уравнение выражает тот факт, что при абсолютно упругом ударе суммарная кинетическая энергия шаров до и после удара остается неизменной.

Следует подчеркнуть, что уравнения (6.66), (6.67) записаны для замкнутой системы, но для двух очень близких моментов времени, ибо длительность удара весьма мала. Поэтому они с известным приближением будут справедливы и для незамкнутой системы двух шаров, если, конечно, силы со стороны третьего тела малы в сравнении с силами взаимодействия шаров (такие силы за короткий промежуток времени не могут заметно изменить импульс и кинетическую энергию шаров). Например, по этой причине соударение двух свободных шаров в воздухе вполне можно описать формулами (6.66), (6.67), хотя система шаров и не является замкнутой, так как на каждый шар действует внешняя сила — сила тяжести.

Решим систему уравнений (6.66), (6.67) относительно v_1' и v_2'. Для этого перепишем ее в следующем виде:

$$\begin{aligned} m_1 (v_1^2 - v_1'^2) &= m_2 (v_2'^2 - v_2^2), \\ m_1 (v_1 - v_1') &= m_2 (v_2' - v_2). \end{aligned} \tag{6.68}$$

Полагая $v_1 - v_1' \neq 0$ и $v_2' - v_2 \neq 0$, поделим первое уравнение на второе:

$$v_1 + v_1' = v_2' + v_2. \tag{6.69}$$

Решая систему из уравнения (6.69) и второго уравнения (6.68), получаем [1]:

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2) v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad v_2' = \frac{(m_2 - m_1) v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}. \tag{6.70}$$

---

[1] Мы при этом теряем одно решение: $v_1' = v_1$, $v_2' = v_2$; при анализе системы (6.68) его надо учитывать.

Здесь скорости имеют положительный знак, если они совпадают с положительным направлением оси, и отрицательный — в противном случае.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Пусть полный импульс системы равен нулю:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2' = 0. \tag{6.71}$$

Это имеет место, когда удар рассматривается относительно центра масс. В этом случае

$$v_1' = \frac{m_2(v_2 - v_1)}{m_1 + m_2}, \quad v_2' = -\frac{m_1(v_2 - v_1)}{m_1 + m_2},$$

или, учитывая, что $m_2v_2 = -m_1v_1$ и $m_2v_2' = -m_1v_1'$, получим:

$$v_1' = \frac{m_2v_2 - m_2v_1}{m_1 + m_2} = \frac{-m_1v_1 - m_2v_1}{m_1 + m_2} = -v_1,$$

$$v_2' = -\frac{m_1v_2 - m_1v_1}{m_1 + m_2} = -\frac{m_1v_2 + m_2v_2}{m_1 + m_2} = -v_2.$$

Таким образом скорости и импульсы шаров при ударе изменяют только знак. Шары, движущиеся навстречу друг другу, отталкиваются обратно с теми же по модулям скоростями, какие они имели относительно центра масс до удара.

2. Пусть теперь один шар до удара покоится ($v_2 = 0$). Тогда из (6.70) получаем:

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2}, \quad v_2' = \frac{2m_1v_1}{m_1 + m_2}. \tag{6.72}$$

Ясно, что второй шар будет двигаться после удара в ту же сторону, куда двигался первый шар до удара. Скорости v_1' и v_2' зависят от соотношения масс соударяющихся шаров.

3. Если масса второго шара много больше массы первого шара $m_2 \gg m_1$, или $\frac{m_1}{m_2} \to 0$, то из (6.70) следует, что

$$v_1' = \frac{\left(\frac{m_1}{m_2} - 1\right)v_1 + 2v_2}{\frac{m_1}{m_2} + 1} \approx -v_1 + 2v_2, \tag{6.73}$$

$$v_2' = \left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right)v_2 + 2\frac{m_1}{m_2}v_2 \approx v_2 + 2\frac{m_1}{m_2}v_1 \approx v_2. \tag{6.74}$$

Отсюда видио, что независимо от того, как двигались шары, скорость тяжелого шара практически не изменяется. Скорость же легкого шара изменяется.

Если легкий шар догоняет тяжелый (т. е. $v_1 > v_2$ и обе скорости положительны), то

$$v_1' = -v_1\left(1 - 2\frac{v_2}{v_1}\right).$$

Но так как $2\frac{v_2}{v_1} < 2$ и, следовательно, $\left|1 - 2\frac{v_2}{v_1}\right| < 1$, то $|v_1'| < v_1$. Это значит, что легкий шар отскакивает от тяжелого с меньшей по модулю скоростью; направление этой скорости зависит от знака разности $1 - 2\frac{v_2}{v_1}$. Следовательно, при ударе легкий шар теряет часть кинетической энергии, передавая ее второму шару $(v_2' \approx v_2)$. Такая ситуация возникает при расширении газа в цилиндре с движущимся поршнем. Молекулы при ударе о движущийся массивный поршень теряют энергию (поршень совершает работу против внешних сил), и температура газа понижается.

2. Если легкнй шар движется навстречу тяжелому, то после удара кинетическая энергия легкого шара возрастает. В самом деле, когда $v_1 > 0$ и $v_2 < 0$, мы из соотношения (6.73) получаем:

$$v_1' \approx - v_1 - 2|v_2| = -(v_1 + 2|v_2|).$$

Таким образом, легкий шар отскакивает от тяжелого с большей скоростью и большей кинетической энергией.

Когда поршень сжимает газ, соударение молекул с поршнем происходит при условии встречного движения. Поэтому энергия молекул после удара возрастает, и газ нагревается.

3. Если массивный шар покоится ($v_2 = 0$), то из соотношений (6.87) получаем:

$$v_1' = -v_1, \quad v_2' = 0. \tag{6.75}$$

Это очень важный результат. Он показывает, что если некоторое тело массой m_1 ударяется абсолютно упруго о другое тело, масса которого m_2 бесконечно велика (по отношению к m_1), то ударившееся тело отскакивает без изменения модуля скорости и, следовательно, без изменения кинетической энергии (кинетическая энергия не передается другому телу). Примером такого удара может служить удар стального шарика о наковальню. В этом нетрудно убедиться на опыте.

Бросив шарик в подвешенную наковальню, мы увидим, что удар шарика практически не сдвинет наковальню. Легко представить себе обратную картину. Шар большой массы налетает на покоящийся шар очень малой массы, в результате соударения малый шар придет в движение, а тяжелый практически не изменит своей скорости (и кинетической энергии). Этот случай получается из соотношений (6.73) при $m_2 \ll m_1$.

4. Если массы соударяющихся шаров одинаковы ($m_1 = m_2$) и один из шаров покоится, то из соотношений (6.73) и (6.74) следует, что

$$v_1' = v_2, \quad v_2' = v_1.$$

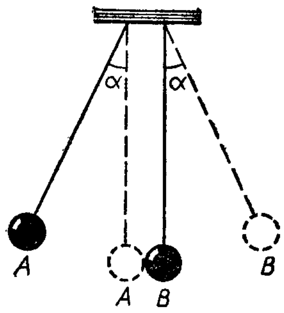


Рис. 6.23

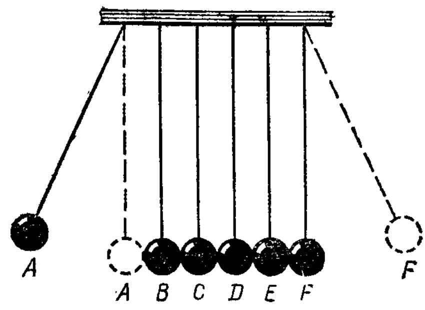


Рис. 6.24

Это значит, что шары одинаковой массы обмениваются скоростями. В этом легко убедиться на следующем опыте. Два одинаковых упругих шара подвешивают на нитях равной длины. Шар A (рис. 6.23) отклоняют на некоторый угол α и отпускают; ударившись о шар B, он остановится, а шар B отклонится на такой же угол α. Пусть на перекладине подвешено несколько одинаковых шаров (рис. 6.24). Отклоним один крайний шар A и отпустим его. Ударившись о шар B, он остановится; шар B получит импульс первого шара и сразу передаст его шару C; тот, в свою очередь, шару D и так далее. Последний шар этой цепочки получит импульс и отклонится на угол α. Результат опыта таков: левый шар цепочки, ударившись о цепочку шаров, вызывает отклонение правого шара цепочки на тот же угол, на который был отклонен сам. Если отклонить два левых шара цепочки, они вызовут после удара отклонение двух правых шаров.

2. ЭНЕРГИЯ ОТДАЧИ ПРИ ДЕЛЕНИИ ТЕЛА НА ЧАСТИ

К взаимодействию типа центрального удара относятся такие явления, как разрыв снаряда в полете, распад движущейся микрочастицы на две части и т. д. Удар, как указывалось, состоит из двух этапов: а) сближения соударяющихся тел до такого взаимного положения, при котором относительная скорость тел становится равной нулю (скорости тел одинаковы); б) удаление тел друг от друга под действием внутренних сил. Удар можно рассматривать, начиная с момента, когда относительная скорость сблизившихся тел равна нулю, т. е. рассматривать только второй этап. Законы сохранения импульса и энергии в этом случае примут вид:

$$(m_1 + m_2)\, v = m_1 v_1' + m_2 v_2', \tag{6.76}$$

$$U + \frac{(m_1 + m_2)\, v^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2}, \tag{6.77}$$

где U — энергия взаимодействия тел в момент их относительного покоя; v — скорость обоих тел в этот момент; v'_1, v'_2 — скорости тел в момент времени, тогда взаимодействие между телами прекратилось (когда удар закончился и $U' = 0$). Зная потенциальную энергию взаимодействия U и скорость тел v в начальный момент, можно найти скорости каждого тела в конце взаимодействия. Легко видеть, что взаимодействие, например, снаряда и пушки или частей, на которые распадается элементарная частица, можно рассматривать как второй этап абсолютно упругого удара, и применить при расчете конечных скоростей разлетающихся тел или частиц уравнения (6.76), (6.77). При этом U будет обозначать энергию, освобождающуюся при сгорании взрывчатки (энергию взрывчатки), или энергию связи частей в распадающейся частице.

Пример. Рассмотрим, как может быть найдена кинетическая энергия снаряда и пушки после выстрела, если до выстрела пушка находилась в покое ($v = 0$). Масса пушки m_2 и масса снаряда m_1 считаются известными.

Система уравнений (6.76)—(6.77) запишется так:

$$m_1 v'_1 = -m_2 v'_2, \tag{6.78}$$

$$2U = m_1 v'^2_1 + m_2 v'^2_2. \tag{6.79}$$

Выразив скорость v'_1 из уравнения (6.78) и подставив найденное выражение в уравнение (6.79), получим:

$$2U = m_1 \frac{m_2^2 v'^2_2}{m_1^2} + m_2 v'^2_2,$$

или

$$U = \frac{m_2 v'^2_2}{2}\left(\frac{m_2}{m_1} + 1\right) = \frac{m_2 v'^2_2}{2}\left(\frac{m_2 + m_1}{m_1}\right).$$

Решая это уравнение относительно кинетической энергии пушки, приходим к выражению:

$$\frac{m_2 v'^2_2}{2} = U \frac{m_1}{m_2 + m_1}.$$

Отсюда видно, что кинетическая энергия пушки составляет некоторую часть $\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)$ от энергии U взрывчатки, причем

$$\frac{m_1}{m_2 + m_1} < 1.$$

Пушка получит при выстреле тем меньше энергии, чем больше ее масса.

Определим скорость v_2' из уравнения (6.78) и подставим в уравнение (6.79), а затем выразим кинетическую энергию снаряда $\frac{m_1 v_1'^2}{2}$:

$$\frac{m_1 v_1'^2}{2} = U \frac{m_2}{m_2 + m_1}. \tag{6.80}$$

Кинетическая энергия снаряда также составляет от U некоторую часть:

$$\mu = \frac{m_2}{m_2 + m_1} = \frac{1}{1 + \frac{m_1}{m_2}}. \tag{6.81}$$

Из (6.80) и (6.81) видно, что выгодный для практики случай полного обращения энергии взрывчатки в кинетическую энергию снаряда недостижим (для этого масса пушки должна была бы быть бесконечной). Для более рационального использования энергии взрывчатки необходимо выполнить условие: $m_2 \gg m_1$.

Все это можно выразить и другими словами: чем больше скорость отдачи пушки, тем меньше кинетическая энергия снаряда, и, наоборот, чем меньше скорость отдачи пушки, тем больше энергия снаряда при одной и той же энергии взрывчатки.

Явление, аналогичное выстрелу пушки, наблюдается в микромире. Ядра некоторых радиоактивных элементов (например, изотоп железа $^{57}_{26}Fe$), переходя из возбужденного состояния в невозбужденное, излучают квант («снаряд») очень большой частоты (гамма-квант). Энергия перехода U делится между ядром и квантом света подобно тому, как энергия взрывчатки распределяется между снарядом и пушкой. Вследствие явления отдачи энергия гамма-кванта будет меньше энергии перехода U. Это подтверждается экспериментами, проводимыми со свободными ядрами, т. е. ядрами, не входящими в состав твердых тел или больших молекул. Сравнительно недавно (в 1960 г.) немецкий физик Мёссбауэр показал, что ядра могут излучать гамма-кванты без отдачи. При этом вся энергия перехода ядра из возбужденного в невозбужденное состояние передается только гамма-фотону (это явление получило название *эффекта Мёссбауэра*). Излучение без отдачи возможно для ядер, входящих в крупные молекулы или твердые тела. В этих условиях излучающее ядро крепко связано с другими ядрами молекулы или твердого тела и образует с ними по существу одно тело, масса которого в сравнении с массой гамма-фотона очень велика. В этих условиях энергия гамма-фотона практически равна энергии перехода ядра из возбужденного в невозбужденное состояние.

Атомы тоже излучают фотоны, но гораздо меньшей частоты. Масса атома во много раз превышает массу снаряда-фотона. Поэтому излучение атомов происходит практически без отдачи.

Если излучающее ядро вместе с твердым телом, в которое оно входит, движется с некоторой скоростью v, то энергия излученного гамма-фотона вследствие эффекта Допплера будет больше энергии перехода U, если излучение произошло в сторону движения, и меньше U, если фотон испущен против движения тела. Измеряя энергию фотонов и зная, какими ядрами они испускаются, т. е. зная U, можно довольно точно определить скорость движения тела. И наоборот, по заданной скорости движения тела, измеряя энергию фотона, можно определить энергию перехода U ядра из возбужденного в невозбужденное состояние. Так познают особенности строения самих ядер.

Задача. Шар массой $m = 2$ кг движется со скоростью $v_1 = 10$ м/с и ударяется абсолютно неупруго о покоящийся шар такой же массы. Считая удар центральным, найдите работу деформации шаров. С какой скоростью должны двигаться оба шара навстречу друг другу, чтобы при ударе совершалась та же деформация?

Решение. Из закона сохранения импульса системы двух шаров находим скорость u шаров после удара:

$$mv_1 = 2mu, \qquad u = \frac{v_1}{2} = 5\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Из закона сохранения энергии для системы с неконсервативными внутренними силами (неупругая деформация) найдем работу деформации A:

$$A = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{2mu^2}{2} = \frac{mv_1^2}{4},$$

$$A = \frac{2 \cdot 10^2}{4} = 50\ \text{Дж}.$$

Это составляет половину от кинетической энергии движущегося шара. Если шары движутся навстречу друг к другу с равными скоростями v, то общий импульс системы равен нулю. После удара шары остановятся и их кинетическая энергия полностью перейдет в работу деформации

$$A = \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = mv^2.$$

Отсюда

$$v = \sqrt{\frac{A}{m}} = 5\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Замечание. Мы видим, что абсолютные скорости шаров во втором случае меньше, чем в первом в два раза. Кроме того, во втором случае вся кинетическая энергия расходуется на деформацию, тогда как в первом случае на деформацию расходовалась лишь половина. Это принимают во внимание при создании искусственных соударений для возбуждения частиц. Энергетически выгоднее возбуждать частицы (скажем, протоны) встречным потоком, чем направлять поток протонов на неподвижную мишень (содержащую протоны). При встречном соударении вся кинетическая энергия протонов переходит в возбуждение. При заданной энергии возбуждения частицы каждого потока нужно разгонять до меньших энергий, чем в случае удара о неподвижную мишень. Это особенно существенно, когда скорости разгоняемых частиц соизмеримы со скоростью света (релятивистский эффект).

Вопросы для самопроверки

1. По какому признаку делятся удары тел на абсолютно упругие и абсолютно неупругие? Как эти понятия обобщаются на случай удара частиц?

2. Опишите процесс неупругого соударения. Поясните, почему при соударении одно тело замедляется, а другое ускоряется. Какие силы возникают при контакте двух шаров и от чего они зависят?

3. Выведите формулы для конечной скорости шаров при центральном абсолютно неупругом ударе и проанализируйте ее. Выведите формулу для работы неупругих сил при центральном неупругом ударе шаров и проанализируйте ее. Что нужно сделать, чтобы вся кинетическая энергия ударяющегося тела пошла на деформацию тела? Для чего наковальню делают массивнее молота?

4. Опишите, что происходит с телами при абсолютно упругом соударении. На какие два этапа делится процесс соударения? Как изменяется потенциальная и кинетическая энергия тел в процессе соударения?

5. Выведите формулы для подсчета конечных скоростей при центральном абсолютно упругом ударе. Рассмотрите различные случаи. При каком условии ударяющее тело отскакивает от ударяемого без потери кинетической энергии? Какой импульс при этом получает ударяемое тело?

6. Выведите формулу для подсчета кинетической энергии снаряда после выстрела. В чем состоит эффект Мёссбауэра?

7. Обычно для шаров работа внутренних сил $A < 0$. При соударении же частиц может быть $A > 0$. Что это означает?

Раздел VII

ИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА И ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ. ЭЛЕМЕНТЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКИ

Занятие 15

ИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА И ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ ГАЛИЛЕЯ. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГАЛИЛЕЯ

1. ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Как уже отмечалось, все системы отсчета можно разбить на два класса: инерциальные и неинерциальные. Для кинематического описания движения данного тела пригодна любая система отсчета. Свободу выбора системы отсчета можно назвать кинематическим принципом относительности, который имеет формальный характер и не связан с существом физических законов. Мы увидим ниже, что и динамическое описание движения можно производить относительно любой системы отсчета (как инерциальной, так и неинерциальной). Однако описание движения приобретает наиболее простую форму только в инерциальных системах отсчета.

Но дело не только в этом. Как показывают многочисленные наблюдения, инерциальные системы отсчета обладают одним важным физическим (а не формальным) свойством: во всех инерциальных системах отсчета (и только в них!) все физические процессы протекают одинаковым образом. Это утверждение получило название *принципа относительности*. Принцип относительности можно сформулировать и так: **во всех инерциальных системах отсчета законы физики имеют одинаковую математическую форму.** Отсюда следует, что, установив физический закон в одной инерциальной системе отсчета, можно его применять без всяких изменений в любой другой инерциальной системе. Между тем если установлен закон в одной неинерциальной системе, то применить его без изменения в другой неинерциальной системе уже нельзя. Поскольку одно и то же явление протекает одинаково во всех инерциальных системах, то принцип относительности есть утверждение, что никакими физическими опытами, проводимыми внутри данной инерциальной системы, нельзя установить, покоится система отсчета или движется равномерно и прямолинейно, т. е. **отличить инерциальные системы отсчета друг от друга невозможно в принципе.**

Принцип относительности в приведенных выше формулировках был установлен сравнительно недавно (на рубеже XX в.).

Он явился обобщением так называемого механического принципа относительности, установленного Галилеем в результате многочисленных механических опытов, проведенных им в различных инерциальных системах отсчета.

2. ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ ГАЛИЛЕЯ

В современной формулировке принцип относительности Галилея читается так: **во всех инерциальных системах отсчета одни и те же механические явления протекают одинаковым образом, и никакими механическими опытами, проводимыми внутри данной инерциальной системы отсчета, невозможно установить, покоится система отсчета или движется равномерно и прямолинейно.**

Галилей очень образно иллюстрирует свой принцип на примере явлений, протекающих в каюте вначале покоящегося, а затем движущегося корабля [1].

То, что все механические явления протекают в движущихся и покоящихся системах совершенно одинаково, доказывает, что во всех инерциальных системах действует один и тот же основной закон динамики — второй закон Ньютона, который и обусловливает при одинаковых начальных условиях одинаковое протекание процесса в разных системах. Это означает, что второй закон Ньютона должен иметь одинаковую математическую запись во всех инерциальных системах отсчета (различие может быть только в обозначениях переменных).

Можно, например, рассматривать свободное падение тела в каюте равномерно движущегося корабля как относительно системы отсчета, связанной с каютой, так и относительно системы отсчета, связанной с берегом. В обеих системах отсчета движение тела подчиняется одному и тому же закону Ньютона. Однако начальные условия движения в этих системах отсчета неодинаковы. В системе «каюта» начальная скорость равна нулю; в системе же «берег» она равна скорости движения корабля относительно берега. Поэтому не удивительно, что одно и то же явление в разных системах будет восприниматься по-разному: прямолинейным — в системе «каюта» и криволинейным — в системе «берег». Но это различие обусловлено не тем, что в этих системах отсчета действуют разные законы динамики, а лишь тем, что для одного и того же явления в этих системах отсчета по-разному выглядят начальные условия.

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГАЛИЛЕЯ

Как показать, что форма математической записи законов механики не изменяется при переходе от координат в одной инерциальной системе отсчета к координатам в другой? Для этого

[1] Галилео Галилей. Диалоги о двух главнейших системах мира. М., 1948, с. 146—147.

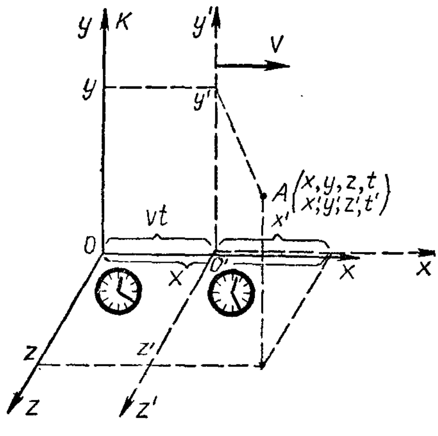


Рис. 7.1

необходимо, прежде всего, установить формулы перехода от координат x, y, z и времени t, заданных в одной инерциальной системе отсчета (K), к координатам x', y', z' и времени t' в другой системе отсчета (K'), движущейся равномерно и прямолинейно относительно первой.

Вид этих формул можно непосредственно усмотреть из рисунка 7.1, на котором K — покоящаяся система отсчета, а K' — система, движущаяся относительно K с постоянной скоростью V в направлении оси X. Допустим, что отсчет времени по часам той и другой системы начался с того момента, когда начала координат обеих систем совпадали. Повседневный опыт убеждает в том, что, если скорость V много меньше скорости света c ($V \ll c$), одинаковые часы в обеих системах отсчета будут показывать одинаковое время. Другими словами, время в обеих системах отсчета течет одинаково:

$$t = t'. \tag{7.1}$$

Если точка A в системе K имеет пространственные координаты x, y, z, то, как это следует из рисунка 7.1, ее координаты в системе K' будут:

$$x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \tag{7.2}$$

или (в векторной записи)

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{V}t, \tag{7.3}$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор точки A в системе K, а $\vec{r}\,'$ — радиус-вектор той же точки в системе K'. Если известны координаты точки в системе K', то координаты в системе K находятся так:

$$x = x' + Vt, \quad y = y', \quad z = z', \tag{7.4}$$

или

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{V}t.$$

Уравнения (7.1) и (7.2) или (7.1) и (7.4) называют преобразованиями Галилея.

До Эйнштейна и Пуанкаре преобразования Галилея считались самоочевидными и пригодными для любых скоростей движения тел и систем отсчета[1]. Они отвечали сложившимся тогда представлениям о пространстве и времени, выраженным в следующих словах Ньютона[2]: «Абсолютное пространство по самой своей сущности, безотносительно к чему бы то ни было внешнему, остается всегда одинаковым и неподвижным... Абсолютное истинное время само по себе и по самой своей сущности без всякого отношения к чему либо внешнему, протекает равномерно и иначе называется длительностью».

Таким образом, согласно воззрениям Ньютона, бытовавшее среди ученых вплоть до XX в. пространство и время существуют сами по себе, независимо друг от друга и независимо от материальных тел. Конечно, это был метафизический взгляд. В современной физике такая точка зрения отрицается. Установлено, что не существует абсолютного пространства и абсолютного времени, оторванного от материальных объектов. Наоборот, пространство и время взаимно связаны, а их свойства, определяемые объектами, могут изменяться при переходе от одной инерциальной системы к другой. На неотделимость пространства и времени от материальных объектов (материи) указывал Энгельс, когда говорил, что пространство и время — формы существования материи.

Соотношение (7.1) в преобразованиях Галилея выражает ньютоновскую концепцию абсолютного времени, одинакового для всех систем отсчета и для всех точек пространства. Соотношение (7.2) выражает ньютоновскую идею абсолютного пространства, не изменяющегося при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Последнее видно из того, что отрезок x', измеренный в движущейся системе отсчета K', определяется в то же время как разность двух отрезков (x и Vt), замеренных в неподвижной системе отсчета K. Таким образом, предполагается, что отрезок $O'x'$ имеет одинаковую длину, независимо от того, в какой системе отсчета (K или K') он измеряется.

Ньютоновское пространство представляет собой трехмерное многообразие, подчиняющееся геометрии Евклида. Геометрия Евклида, в свою очередь, является математической абстракцией пространственных свойств твердого тела, которыми оно обладает в состоянии покоя или при равномерном прямолинейном движении со скоростью $V \ll c$ (где c — скорость света).

4. СЛЕДСТВИЯ ИЗ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ГАЛИЛЕЯ

Из преобразований Галилея, в которых, по-существу, содержатся ньютоновские представления о пространстве и времени,

[1] В то время большие скорости элементарных частиц не были известны. Иначе ученые обнаружили бы расхождение теории с опытом.

[2] Слова Ньютона приводятся здесь по переводу А. Н. Крылова «Математических начал натуральной философии». См.: Крылов А. Н. Соч., т. VII. М., 1927.

должны вытекать следствия, хорошо известные из повседневного опыта. Рассмотрим некоторые из них.

Одновременность и длительность событий. Из соотношений $t = t'$ следует, что два события, одновременные в системе K', будут одновременными и в системе K. Очевидно, и длительность одного и того же события одинакова во всех инерциальных системах отсчета. Длительность и одновременность событий носит в механике Ньютона абсолютный характер.

Преобразование скоростей. Пусть даны компоненты скорости тела в системе K':

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad v'_y = \frac{dy'}{dt'}, \quad v'_z = \frac{dz'}{dt'}.$$

Чтобы узнать, как изменятся эти соотношения при переходе к системе K, нужно вместо x', y', z' и t' подставить их значения из (7.2) и (7.1). Учитывая, что $dt' = dt$, мы получим:

$$v'_x = \frac{d}{dt}(x - Vt) = \frac{dx}{dt} - V = v_x - V,$$

$$v'_y = v_y, \quad v'_z = v_z,$$

или (в векторной форме):

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} - \vec{V}, \quad \vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}. \tag{7.5}$$

Таким образом, скорость тела $\vec{v}$ в системе отсчета K отличается от скорости того же тела в системе K' на величину $\vec{V}$ (скорость движения системы K' относительно системы K). Принято называть $\vec{v}'$ относительной, $\vec{v}$ абсолютной и $\vec{V}$ переносной скоростями. Таким образом, правило (7.5) векторного сложения скоростей (правило параллелограмма) вытекает из ньютоновского представления об абсолютности пространства и времени.

Преобразования ускорений. Пусть даны компоненты ускорения в системе K':

$$a'_x = \frac{d^2x'}{dt'^2}, \quad a'_y = \frac{d^2y'}{dt'^2}, \quad a'_z = \frac{d^2z'}{dt'^2}.$$

Подставляя вместо x', y', z' их значения из (7.2) и учитывая, что $dt' = dt$, найдем:

$$\begin{gathered} a'_x = \frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{dv'_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt} - V\right) = \frac{d^2x}{dt^2} = a_x, \\ a'_y = a_y, \quad a'_z = a_z. \end{gathered} \tag{7.6}$$

или (в векторной форме):

$$\vec{a}' = \vec{a}.$$

Ускорение, в отличие от скорости, носит абсолютный характер: ускорение одного и того же тела одинаково во всех инерциальных системах отсчета.

Преобразование массы тела. Ньютоновская механика исходит из очевидного (подтвержденного на опыте при $v \ll c$) положения о том, что масса тела не зависит от системы отсчета, в которой рассматривается движение тела. Во всех инерциальных системах отсчета масса одного и того же тела одинакова и не зависит от скорости движения тел:

$$m' = m. \tag{7.7}$$

Преобразование силы. Силы в ньютоновской механике — результат взаимодействия тел. Обычно силы могут зависеть от расстояния между телами (или частицами одного и того же тела), от относительной скорости движения взаимодействующих тел и времени. Но расстояние и время не изменяются при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Не изменяется и скорость движения тел друг относительно друга (относительная скорость). Поэтому и сила взаимодействия между телами не изменяется при переходе от одной инерциальной системы отсчета (K') к другой (K):

$$\vec{F}' = \vec{F}. \tag{7.8}$$

Другими словами, во всех инерциальных системах отсчета сила взаимодействия между заданными телами имеет одно и то же значение.

Преобразование основного закона динамики. Основной закон динамики (второй закон Ньютона) в неподвижной системе отсчета записывается так:

$$m\vec{a} = \vec{F}. \tag{7.9}$$

При переходе к движущейся системе отсчета K' входящие в (7.9) величины остаются неизменными:

$$\vec{F} = \vec{F}', \qquad m = m', \qquad \vec{a} = \vec{a}'. \tag{7.9$'$}$$

Поэтому второй закон Ньютона в системе K' примет вид:

$$m'\vec{a}' = \vec{F}', \tag{7.10}$$

который в силу (7.9′) полностью совпадает с математической записью этого закона в системе K.

Закон Ньютона имеет, таким образом, абсолютный характер. А это означает, что во всех инерциальных системах механические явления протекают одинаковым образом, что и подтверждается на опыте при $v \ll c$.

Инвариантность. Физические величины и физические законы, не изменяющиеся при переходе от одной инерциальной системы к другой, называют *инвариантными* (неизменяющимися) к преобразованиям Галилея.

Введя понятие инвариантности, мы можем сказать: чтобы тот или иной закон не изменил своей формы при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой и, таким образом, удовлетворял принципу относительности Галилея, он должен быть инвариантным к преобразованию Галилея. Этим устанавливается важная роль, отводимая преобразованиям как инструменту, позволяющему установить правильность того или иного закона. Если данный закон инвариантен к преобразованиям Галилея [1], то он правильный (в рамках ньютоновской механики). В противном случае закон является ошибочным и подлежит уточнению или изменению.

Вопросы для самопроверки

1. В чем состоит принцип относительности? В чем состоит принцип относительности Галилея?

2. Напишите преобразования Галилея и поясните, как они получаются. Какую роль играют ньютоновские представления о пространстве и времени? Пользуясь преобразованием Галилея, получите закон сложения скоростей. Как преобразуются ускорение и сила, импульс и момент импульса, кинетическая, потенциальная и полная энергия при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, движущейся по отношению к первой со скоростью $\vec{V}$?

3. Какие величины (и законы) называют инвариантными к преобразованиям Галилея? Покажите инвариантность к преобразованиям Галилея законов Ньютона, законов сохранения импульса и момента импульса, закона сохранения механической энергии. Докажите инвариантность закона Гука и закона всемирного тяготения.

Занятие 16

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛОРЕНЦА. ЭЛЕМЕНТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛОРЕНЦА

Все известные законы механики инвариантны к преобразованиям Галилея. Но будут ли другие физические законы инвариантны к этим преобразованиям? Согласно принципу относительности в широком смысле все законы физики должны быть инвариантны к преобразованиям Галилея. Иначе одни и те же физические явления будут по-разному протекать в различных инерциальных системах отсчета.

К фундаментальным законам физики относятся законы электродинамики, выражаемые уравнениями Максвелла. Простая проверка показывает, что уравнения Максвелла не инвариантны к преобразованиям Галилея. Такой неожиданный результат поверг физиков на рубеже XX в. в недоумение. Создалась сложная

[1] Позже увидим, что в релятивистской механике правильность закона устанавливается инвариантностью к преобразованиям Лоренца.

проблема, которая поставила ученых перед выбором между тремя возможностями: а) отказаться от уравнений Максвелла, считая их неправильными; б) отбросить принцип относительности; в) считать преобразования Галилея неточными и заменить их другими.

Эйнштейн в 1905 г. и независимо от него Пуанкаре показали, что следует остановиться на последней возможности, признавая справедливость и уравнений Максвелла и принципа относительности в его широком понимании. Новые преобразования координат для двух инерциальных систем должны быть такими, чтобы они оставляли инвариантными (неизмененными по форме) уравнения Максвелла. Так как из уравнений Максвелла вытекает, что свет является электромагнитной волной, распространяющейся в вакууме со скоростью $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, то из инвариантности этих уравнений должно следовать постоянство скорости света во всех инерциальных системах отсчета. Отметим, что постоянство скорости света и независимость ее от направления распространения в различных инерциальных системах отсчета было подтверждено в целом ряде экспериментов.

При выводе новых преобразований Эйнштейн исходил из двух постулатов[1]:

1. Физические законы одинаковы во всех инерциальных системах отсчета, и, следовательно, математическая форма записи законов[2] должна быть инвариантна к преобразованиям.

2. Скорость света в вакууме одинакова во всех инерциальных системах отсчета и не зависит от направления его распространения и движения источника и приемника.

Постоянство скорости света не согласуется с преобразованием Галилея. В самом деле, если скорость света в системе отсчета K' (рис. 7.1) равна c, то в системе K согласно преобразованию Галилея она должна равняться $c + V$. Оставаясь на позициях ньютоновской механики, невозможно понять, почему $c + V$ должно равняться c.

Чтобы это понять, нужно отрешиться от привычных ньютоновских представлений об абсолютности пространства и времени. Заслуга Эйнштейна и состоит в том, что он первый на простых и убедительных физических рассуждениях пришел к выводу об изменяемости свойств пространства и времени, о зависимости их от движения материальных объектов, с которыми связываются инерциальные системы отсчета[3]. Эта ломка привычных представлений о пространстве и времени наряду с другими открытиями привела в свое время к «кризису» в физике.

---

[1] Эти постулаты являются основой специальной теории относительности Эйнштейна. Все особенности этой теории заключены в уравнениях преобразования.

[2] Имеется в виду всех законов, а не только законов механики.

[3] Это новое учение о пространстве и времени названо Эйнштейном *специальной теорией относительности.*

Сущность этого «кризиса» и пути его преодоления были рассмотрены В. И. Лениным в его труде «Материализм и эмпириокритицизм».

Итак, искомые преобразования должны отличаться от галилеевских. Иначе скорость света не будет одной и той же в разных системах отсчета. В то же время эти преобразования должны при определенных условиях переходить в галилеевские. Исходя из двух упомянутых выше постулатов, Эйнштейн получил новые преобразования, которые имеют следующий вид (обозначения по рис. 7.1):

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - Vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, & x &= \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ y' &= y, & y &= y', \\ z' &= z, & z &= z', \\ t' &= \frac{t - \dfrac{Vx}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}, & t &= \frac{t' + \dfrac{Vx'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \end{aligned} \qquad (7.11)$$

где V — скорость относительного движения инерциальных систем отсчета K' и K, c — скорость света в вакууме, а $\beta = \frac{V}{c}$.

Соотношения (7.11) называют преобразованиями Лоренца, в честь голландского физика Г. А. Лоренца, который впервые их получил, исходя из других (не совсем правильных) предпосылок.

Обратим внимание на два чрезвычайно важных обстоятельства.

1. В формулах преобразования Лоренца время также подвергается преобразованиям. Этот факт выражает высказанную ранее мысль об относительности времени, о зависимости его не только от выбора системы отсчета, но и от координат.

2. В формулах преобразования время выступает как равноправная — четвертая координата. Это означает, что пространство и время в новой теории неразделимы. (Напомним, что в ньютоновской механике пространство и время существуют независимо друг от друга.)

Нетрудно видеть, что при $\frac{V}{c} \ll 1$ (т. е. когда $V \ll c$) преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея. Этим самым показывается, что преобразования Галилея, а следовательно, и вся ньютоновская механика справедливы только для малых скоростей движения тел и систем отсчета. Новая теория указывает на приближенность ньютоновской механики и в то же время дает точную оценку границ применимости классической механики.

2. ПРОСТРАНСТВО И ВРЕМЯ В СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Разберем некоторые важные особенности пространства и времени, вытекающие из преобразований Лоренца.

Относительность одновременности. В ньютоновской механике события, одновременные в одной какой-либо инерциальной системе отсчета, будут одновременными во всех других инерциальных системах. Посмотрим, как обстоит дело в специальной теории относительности. Пусть в движущейся системе K' в точках x'_1 и x'_2 одновременно (в момент t') произошло два события (например, зажглись две лампочки). Эти события в неподвижной системе отсчета K будут происходить в разные моменты времени t_1 и t_2 (см. четвертое уравнение правого столбца системы (7.11)):

$$t_1 = \frac{t' + \frac{x'_1 V}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad t_2 = \frac{t' + \frac{x'_2 V}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

ибо $x'_1 \neq x'_2$.

Итак, в специальной теории относительности два события, одновременные в одной системе отсчета, будут восприниматься неодновременными в другой системе.

Относительность продолжительности событий. Эффект замедления времени. Пусть в движущейся системе отсчета K' в неподвижной точке x' произошло событие длительностью $\Delta t' = t'_2 - t'_1$, где t'_1 и t'_2 — моменты начала и конца события (по часам, покоящимся в системе отсчета K'). Наблюдатель в неподвижной системе K отметит по часам своей системы начало и конец события в моменты t_1 и t_2, которые будут связаны с моментами t'_1 и t'_2 соотношениями (7.11):

$$t_1 = \frac{t'_1 + \frac{x' V}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad t_2 = \frac{t'_2 + \frac{x' V}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Отсюда длительность события $\Delta t = t_2 - t_1$ в системе отсчета K равна

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{7.12}$$

т. е. событие представляется более длительным, чем в системе K' (эффект замедления времени). Итак, длительность одного и того же события неодинакова в разных инерциальных системах отсчета. Событие имеет наименьшую длительность в системе отсчета, в которой точка, где произошло событие, и часы неподвижны.

Относительность длины. Пусть в движущейся системе отсчета K' вдоль оси X' покоится отрезок (скажем, линейка) длиной $\Delta l' = x_2' - x_1'$. Здесь x_1' и x_2' — координаты начала и конца отрезка, отмеченные в системе отсчета K' в один и тот же момент времени t' (или в разные моменты t_1' и t_2' — это значения не имеет, так как линейка в системе K' покоится). Принято длину отрезка называть собственной длиной, если измерение проведено в системе отсчета, в которой отрезок покоится (ее обозначают через l_0). В нашем случае $\Delta l' = l_0$. Какова будет длина того же отрезка, если измерить ее в системе отсчета K?

Для наблюдателя в системе отсчета K отрезок будет двигаться со скоростью V. Чтобы измерить длину движущегося отрезка, наблюдатель в системе K должен в один и тот же момент времени t (по часам своей системы) отметить на оси X положение концов движущегося отрезка. Отметки эти нужно сделать именно в один и тот же момент времени, так как концы постоянно смещаются вдоль оси X. Пусть этими отметками будут соответственно x_1 и x_2. Но координаты x_1 и x_2 связаны с координатами x_1' и x_2' соотношениями:

$$x_1' = \frac{x_1 - Vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x_2' = \frac{x_2 - Vt}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

Отсюда

$$x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Введя обозначение $x_2 - x_1 = l$ и учитывая, что $x_2' - x_1' = l_0$, получим:

$$l = l_0\sqrt{1-\beta^2}. \tag{7.13}$$

Таким образом, наблюдатель в системе K находит, что длина движущегося отрезка в $\sqrt{1-\beta^2}$ раз меньше его собственной длины, измеренной в системе, где этот отрезок покоится.

Наблюдатель в системе K обобщит этот факт следующим образом: **в любой движущейся относительно него инерциальной системе отсчета все отрезки укорачиваются в направлении движения системы и тем значительнее, чем больше скорость, с какой движется эта система.**

Преобразование скоростей (релятивистское правило сложения скоростей). Пусть тело в системе отсчета K' обладает скоростью u', направленной по оси X' (и X):

$$u' = \frac{dx'}{dt'}.$$

В системе отсчета K скорость этого тела равна

$$u = \frac{dx}{dt}.$$

Выясним, каково соотношение между скоростями u и u'.

Рассматривая производную $\frac{dx}{dt}$ как отношение дифференциалов dx к dt и выражая эти дифференциалы из соотношений (7.11)

$$dx = \frac{dx' + V\,dt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad dt = \frac{dt' + \frac{V\,dx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

найдем:

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + V\,dt'}{dt' + \frac{V}{c^2}\,dx'} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + V}{1 + \frac{V}{c}\frac{dx'}{dt'}}.$$

Учитывая, что $\frac{dx'}{dt'} = u'$, можно это выражение переписать так:

$$u = \frac{u' + V}{1 + \frac{u'V}{c^2}}. \qquad (7.14)$$

Таким образом, абсолютная скорость u не равна сумме относительной u' и переносной V скоростей, как это имело бы место в ньютоновской механике (правило параллелограмма для скоростей здесь уже не имеет места). Однако при условии $\frac{u'V}{c^2} \ll 1$ мы получим приближенную классическую формулу:

$$u \approx u' + V.$$

Из соотношения (7.14) видно, что абсолютная скорость u не может превышать скорость света c ни при каких условиях. В самом деле, пусть $u' = c$, тогда

$$u = \frac{c + V}{1 + \frac{cV}{c^2}} = \frac{c + V}{c + V}\,c = c.$$

При $u' = 0{,}9\,c$ и $V = 0{,}8\,c$ имеем:

$$u = \frac{0{,}9c + 0{,}8c}{1 + \frac{0{,}9 \cdot 0{,}8c^2}{c^2}} = \frac{1{,}7}{1{,}72}\,c < c.$$

Занятие 17

ЭЛЕМЕНТЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ДИНАМИКИ

ВВЕДЕНИЕ

Любая физическая теория должна быть построена таким образом, чтобы ее основные законы были инвариантны к преобразованиям Лоренца. Выясним, инвариантен ли к преобразованиям Лоренца основной закон механики — второй закон Ньютона.

Простая проверка показывает, что нет. А это значит, что механические явления в системах отсчета, движущихся друг относительно друга со значительными скоростями, будут протекать по-разному, что противоречит принципу относительности. В чем же дело? А дело в том, что, как и преобразования Галилея, второй закон Ньютона — приближенный закон, справедливый лишь при малых скоростях движения тел и систем отсчета. Его следует уточнить, т. е. придать ему такую форму записи, которая была бы инвариантна к преобразованиям Лоренца.

Изменение основного закона не может не сказаться на всей механике. Новая механика, согласующаяся с преобразованиями Лоренца, получила название релятивистской. Некоторые особенности релятивистской кинематики мы уже разобрали (относительность одновременности, изменение временных и пространственных масштабов, сложение скоростей и т. д.). Обратимся теперь к релятивистской динамике.

1. ЗАКОН НЬЮТОНА В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ФОРМЕ

Эйнштейн показал, что второй закон Ньютона

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F} \tag{7.15}$$

инвариантен к преобразованиям Лоренца, если импульс тела в инерциальной системе отсчета определить следующим образом:

$$\vec{p}=\frac{m_0\vec{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, \tag{7.16}$$

где $\vec{u}$ — скорость тела в избранной системе отсчета; m_0 — масса покоящегося в этой системе отсчета тела (масса покоя); c — скорость света в вакууме. Кроме того, как показывает опыт, при переходе от системы K к системе K', движущейся относительно системы K с постоянной скоростью u в направлении оси X (рис. 7.1), компоненты силы должны преобразовываться по следующим формулам:

$$F'_x=F_x,$$

$$F'_y=\frac{F_y}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}},$$

$$F'_z=\frac{F_z}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}.$$

Несохранение силы при переходе к другой инерциальной системе отсчета обусловлено тем, что длины отрезков и промежутки времени, от которых зависят силы, сами изменяются.

Таким образом, второй закон Ньютона в релятивистской форме имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right)=\vec{F}. \quad (7.17)$$

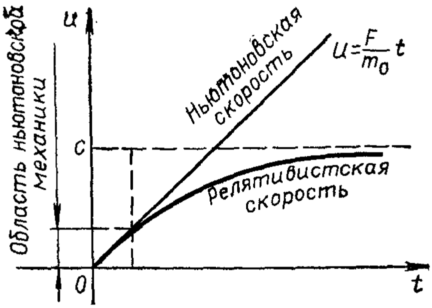


Рис. 7.2

Релятивистский закон изменения скорости. Чтобы найти, как изменяется скорость тела при действии на него постоянной силы, параллельной скорости, нужно проинтегрировать релятивистское уравнение движения (7.17). Запишем это уравнение в такой форме (с учетом параллельности $\vec{F}$ и $\vec{u}$):

$$d\left(\frac{m_0 u}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}\right)=F\,dt.$$

После интегрирования получаем:

$$\frac{m_0 u}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}=Ft+G.$$

Если при $t=0$ положить $u=0$, то для постоянной интегрирования получим: $G=0$. Решая уравнение относительно u, найдем:

$$u=\frac{\frac{F}{m_0}t}{\sqrt{1+\left(\frac{\frac{F}{m_0}t}{c}\right)^2}}. \quad (7.18)$$

Отсюда видно, что релятивистский закон изменения скорости не совпадает с ньютоновским $\left(u=\frac{F}{m_0}t\right)$. На рисунке 7.2 приведен график функции $u(t)$ для ньютоновской и релятивистской зависимости. Согласно релятивистскому закону скорость нарастает медленнее и никогда не превосходит скорости света, что находится в согласии с требованием теории относительности. Из графика видно, что ньютоновский закон изменения скорости справедлив только для начальных моментов времени, т. е. при условии $\frac{F}{m_0}t \ll c$.

2. РЕЛЯТИВИСТСКИЙ ИМПУЛЬС И МАССА

Второй закон Ньютона принимает инвариантную форму, если импульс определить соотношением (7.16). Нетрудно видеть, что импульс в ньютоновской механике $p_{\text{ньют}} = m_0 u$ совпадает с релятивистским (7.17) только при выполнении условия $\frac{u^2}{c^2} \ll 1$, т. е. при малых скоростях движения. Входящую в выражение (7.17) величину

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \tag{7.19}$$

где m_0 — масса покоящегося тела, надо рассматривать как релятивистскую массу, т. е. массу тела, движущегося со скоростью u. Очевидно, что при $u \to 0$ релятивистская масса стремится к массе покоя: $m \to m_0$. Масса покоя m_0 есть инвариантная величина, одинаковая для всех систем отсчета, в которых тело находится в покое. Релятивистское возрастание массы с увеличением скорости многократно проверялось на опытах с электронами, протонами и другими частицами, разгоняемыми в ускорителях; кроме того, эта зависимость подтверждается на опытах по соударению различных элементарных частиц. График зависимости $m(u)$ приведен на рисунке 7.3.

Величину

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

можно разложить по формуле бинома Ньютона:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4 + \ldots .$$

Если $\beta \ll 1$, то в разложении можно ограничиться только первыми двумя членами и выражение (7.19) примет вид:

$$m = m_0\left(1 + \frac{1}{2}\beta^2\right) = m_0 + \frac{m_0\beta^2}{2} = m_0 + \frac{m_0 u^2}{2}\,\frac{1}{c^2}. \tag{7.20}$$

Масса m движущегося тела равна массе покоя m_0, сложенной с некоторой массой $m_{\text{движ}}$, зависящей от кинетической энергии тела:

$$m_{\text{движ}} = \frac{T}{c^2}.$$

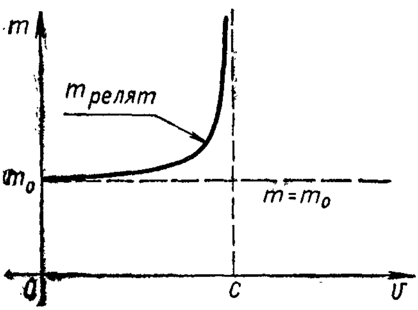


Рис. 7.3

Так же как в ньютоновской механике, масса и в релятивистской механике есть мера инертности. Однако инертность тела не остается постоянной, а возрастает с ростом скорости движения (рис. 7.3). Физически это означает, что чем больше скорость движения, тем «труднее» изменить эту скорость. При скорости, приближающейся к скорости света, инертность тела настолько сильно возрастет, что дальнейшее увеличение скорости становится невозможным. Возрастанием массы к бесконечности при $u \to c$ и объясняется недостижимость скорости света.

3. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ЭНЕРГИЯ. СВЯЗЬ МАССЫ И ЭНЕРГИИ

Пусть на свободное тело с массой покоя m_0 действует полная сила $\vec{F}$. Подсчитаем работу этой силы.

Элементарная работа на перемещении $d\vec{l}$ равна:

$$dA = \vec{F}\, d\vec{l},$$

где $\vec{F}$ определяется (7.17).

Опуская выкладки, запишем выражение для работы:

$$A = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + G, \qquad (7.21)$$

где u — скорость тела; G — постоянная интегрирования, а $\beta = \frac{u}{c}$. Мы предполагали, что изменения массы покоя m_0 не происходит. Поэтому можно считать, что работа A полной силы идет исключительно на сообщение телу кинетической энергии:

$$A = T = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + G. \qquad (7.21')$$

Постоянную G определим из условия, что при $u = 0$ кинетическая энергия тела также равна нулю ($T = 0$). Из соотношения (7.21′) получаем:

$$G = -m_0 c^2.$$

Тогда формула для кинетической энергии принимает вид:

$$T = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - m_0 c^2, \qquad (7.22)$$

или, если ввести релятивистскую массу $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$:

$$T = mc^2 - m_0 c^2. \qquad (7.22')$$

Кинетическая энергия выступает как разность энергий, которыми обладает тело в состоянии движения и в состоянии покоя. Движущееся тело обладает энергией, которая зависит от релятивистской массы. Мы приходим к выводу: в каком бы состоянии тело ни находилось, оно обладает полной релятивистской энергией

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = m_0 c^2 + T. \qquad (7.23)$$

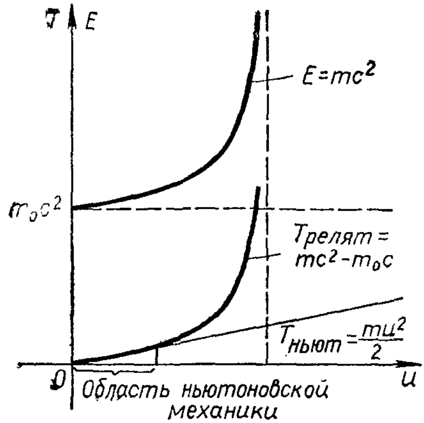


Рис. 7.4

На рис. 7.4 приведены графики зависимости E и T от скорости движения.

Если тело покоится ($u=0$), то его энергия равна

$$E_0=m_0c^2. \tag{7.24}$$

Наличие энергии покоя (7.24) позволяет рассматривать всякое тело как некий резервуар потенциальной энергии, которая может обратиться в любые другие виды энергии. При этом не имеет никакого значения внутреннее строение тела: оно может быть простым (элементарная частица) или сложным (атом; кристалл; система тел, образующих сложный механизм).

Каков смысл формулы (7.24)?

Эта формула указывает максимальную энергию, которая может быть получена от тела с массой покоя m_0, если это тело целиком преобразуется в материальный объект, лишенный массы покоя, т. е. в электромагнитное излучение тела.

Этот закон указывает, таким образом, на принципиальную возможность перехода энергии, связанной с веществом, в энергию, связанную с излучением, и обратно. Другими словами, формула (7.24) указывает на принципиальную возможность перехода материальных объектов в виде вещества, имеющего массу покоя, в материальные объекты в виде излучения, не имеющего массы покоя, (и обратно) при количественном сохранении энергии.

Классическим примером такого прямого перехода является реакция соединения электрона с позитроном (двух частиц с одинаковыми массами покоя), в результате которой электрон и позитрон перестают существовать, превращаясь в электромагнитное излучение, причем энергия излучения в точности равна суммарной энергии покоя двух частиц (предполагается, что частицы не имеют кинетической энергии).

Примером обратного перехода является образование пар *электрон — позитрон* из квантов электромагнитного излучения.

В излучение могут обращаться любые частицы при взаимодействии с античастицами: протона с антипротоном, нейтрона с антинейтроном, атома с антиатомом и т. д. Однако в нашем мире античастиц нет (иначе мы бы не существовали!). Поэтому полностью обратить потенциальную энергию покоя, скажем, одного килограмма песка (или урана), в энергию излучения мы не можем. Этому препятствует закон сохранения общего числа протонов и нейтронов (именно тех частиц, из которых состоят ядра всех известных нам атомов вещества).

Но частичное обращение энергии покоя $E_0 = m_0c^2$ в энергию излучения (или другие виды энергии) вполне возможно. Если тело (система) с массой покоя m_0 выделило энергию ΔE, то у тела после этого масса покоя должна уменьшиться на Δm, причем по-прежнему энергия покоя должна быть связана с массой покоя соотношением:

$$E_0 - \Delta E = (m_0 - \Delta m)\, c^2 = m_0c^2 - \Delta m\, c^2.$$

Отсюда следует, что $\Delta E = \Delta mc^2$.

Величина Δm называется *дефектом массы.* Она показывает, на сколько уменьшится масса покоя тела, если оно отдало энергию ΔE, или, наоборот, на сколько увеличится масса покоя тела (системы), если оно поглотило энергию ΔE.

Например, поглощая солнечные лучи, тело приобретает некоторое количество энергии ΔE. При этом его масса покоя возрастает на величину $\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}$. Или, сжимая пружину, мы сообщаем ей дополнительную энергию $\Delta E = \frac{kx^2}{2}$ (где x — сжатие), отчего масса покоя пружины увеличивается на $\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}$. Если сблизить два положительно заряженных тела, то их суммарная масса покоя возрастает на величину $\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}$ (где ΔE — увеличение потенциальной энергии системы, равное работе, затраченной на преодоление сил отталкивания). Можно привести и другие примеры. Однако следует отметить, что во всех приведенных примерах и им подобных изменение массы покоя настолько мало в сравнении с массой тела, что оно не может быть обнаружено экспериментально.

Релятивистская кинетическая энергия. Выразим релятивистскую кинетическую энергию T из равенства (7.23):

$$T = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - m_0c^2.$$

Когда скорость тела невелика $\left(\frac{u}{c} \ll 1\right)$, можно выражение $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ разложить по формуле бинома Ньютона

$$\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{u^4}{c^4} + \ \ldots$$

и ограничиться первыми двумя членами разложения

$$T = m_0\left(1 + \frac{u^2}{2c^2}\right) - m_0c^2 = \frac{m_0u^2}{2}.$$

А это обычная (нерелятивистская) формула кинетической энергии.

Мы видим, что обычная формула для кинетической энергии оказывается справедливой лишь при малых скоростях. Точное же значение T при любых скоростях (при $m_0 = \mathrm{const}$) рассчитывается по релятивистской формуле (7.22′).

4. СВЯЗЬ ЭНЕРГИИ С ИМПУЛЬСОМ

Энергия тела и его импульс связаны с релятивистской массой $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}$ соотношениями

$$E = mc^2,$$

$$\vec{p} = m\vec{u},$$

где u — скорость тела. Возведем оба равенства в квадрат, после чего второе умножим на c^2:

$$E^2 = m^2c^4,$$

$$p^2c^2 = m^2u^2c^2.$$

Вычтя из первого уравнения второе, получаем:

$$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right),$$

или

$$E^2 - p^2c^2 = \frac{m_0^2c^4\left(1 - \dfrac{u^2}{c^2}\right)}{1 - \dfrac{u^2}{c^2}} = m_0^2c^4.$$

Мы получили искомую связь энергии с импульсом:

$$E^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4. \tag{7.25}$$

Масса покоя m_0 и скорость света в вакууме c имеют во всех инерциальных системах неизменные значения. Эти величины инвариантны к преобразованиям Лоренца. Что касается энергии E и импульса p, то эти величины, вообще говоря, изменяются при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Но, как следует из (7.25), разность $E^2 - p^2c^2$ сохраняется во всех системах отсчета. Таким образом, величина $E^2 - p^2c^2$ инвариантна к преобразованиям Лоренца. В этом состоит важная особенность найденной связи между E^2 и p^2c^2.

Выразим из (7.25) релятивистскую энергию E:

$$E=\sqrt{p^2c^2+m_0^2c^4}. \qquad (7.26)$$

Отсюда следует, что релятивистской энергией обладают и такие тела (материальные объекты), которые не имеют массы покоя ($m_0=0$). В настоящее время известны две такие частицы: фотон и нейтрино. Энергия этих частиц равна

$$E=pc, \qquad (7.27)$$

а импульс

$$p=\frac{E}{c}. \qquad (7.28)$$

Это означает, что поток фотонов (свет), а также поток нейтрино должны оказывать давление. Давление света было измерено Лебедевым.

5. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ И ИМПУЛЬСА ДЛЯ ЗАМКНУТЫХ СИСТЕМ

В релятивистской механике следует различать два вида систем: системы, в которых тела не взаимодействуют, и системы, в которых они взаимодействуют.

Для систем первого вида полная релятивистская энергия и импульс ввиду их аддитивности будут равны суммам релятивистских энергий и импульсов отдельных тел:

$$E=\sum_{i=1}^{N}E_i=\sum_{i=1}^{N}\frac{m_{0i}c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}=\sum_{i=1}^{N}\sqrt{p_i^2c^2+m_{0i}^2c^2}=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}(m_{0i}c^2+T_i), \qquad (7.29)$$

$$\vec{p}=\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i=\sum_{i=1}^{N}\frac{m_{0i}\vec{u}_i}{\sqrt{1-\beta_i^2}}, \qquad (7.30)$$

где $\beta_i=\frac{u_i}{c}$, а N — число тел, составляющих систему.

Поскольку тела не взаимодействуют, скорости отдельных тел и их релятивистская энергия будут постоянны. Поэтому постоянными будут также полная энергия и полный импульс системы.

Если же система состоит из N взаимодействующих тел, то оказывается невозможным записать выражение для полной энергии системы, так как невозможно записать потенциальную энергию взаимодействия, когда тела движутся, а взаимодействие между ними распространяется с конечной скоростью c.

Однако если взаимодействие носит характер соударения, то выражения для энергии системы и импульса можно записать для тех моментов времени, когда взаимодействие еще не начиналось или уже окончилось, т. е. до соударения или после соударения.

Так как система замкнута, то ни энергия, ни импульс системы изменяться не будут:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{m_{0i}c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{u_i}{c}\right)^2}} = \sum_{i=1}^{N^*} \frac{\overset{*}{m}_{0i}c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{u_i}{c}\right)^2}}, \tag{7.31}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{m_{0i}\vec{u}_i}{\sqrt{1-\left(\frac{u_i}{c}\right)^2}} = \sum_{i=1}^{N^*} \frac{\overset{*}{m}_{0i}\overset{*}{\vec{u}}_i}{\sqrt{1-\left(\frac{\overset{*}{u}_i}{c}\right)^2}}. \tag{7.32}$$

Здесь звездочкой * отмечены величины, которые относятся к моменту после соударения. Заметим, что число тел в системе до и после соударения может быть различным ($N \neq N^*$). Это наблюдается при взаимодействии частиц микромира.

Обратим внимание еще на следующее. Так как энергия и масса связаны между собой соотношением $E = mc^2$, то из закона сохранения энергии (7.31) следует и закон сохранения массы (и обратно). Таким образом, если в ньютоновской механике законы сохранения энергии и массы являются независимыми законами, то в релятивистской механике имеется лишь один закон — *закон сохранения энергии-массы.*

Пример соударения двух тел (частиц). Будем считать, что массы покоя соударяющихся тел могут после удара изменяться, а число частиц остается неизменным. Запишем закон сохранения энергии в следующем виде:

$$(m_{01}c^2 + T_1) + (m_{02}c^2 + T_2) = (m^*_{01}c^2 + T^*_1) + (m^*_{02}c^2 + T^*_2).$$

Сгруппируем члены:

$$(T_1 + T_2) - (T^*_1 + T^*_2) = [(m^*_{01} - m_{01}) + (m^*_{02} - m_{02})]\, c^2 =$$
$$= (\Delta m_{01} + \Delta m_{02})\, c^2 = \Delta m c^2. \tag{7.33}$$

Таким образом,

$$(T_1 + T_2) - (T^*_1 + T^*_2) = \Delta m c^2,$$

где Δm — изменение массы покоя системы (дефект массы). Из полученного соотношения следует:

а) если $\Delta m > 0$, то

$$T_1 + T_2 > T^*_1 + T^*_2,$$

т. е. если масса покоя (энергия покоя) системы увеличивается, то это происходит за счет убыли кинетической энергии системы;

б) если масса покоя уменьшается ($\Delta m < 0$), то

$$T_1 + T_2 < T^* + T^*_2,$$

т. е. кинетическая энергия системы возрастает за счет убыли энергии покоя системы.

Раздел VIII

НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

Неинерциальными называют такие системы отсчета, в которых не выполняются законы Ньютона. Не выполняется закон инерции, ибо в таких системах отсчета тело, на которое не действуют другие тела, не сохраняет своего состояния покоя или равномерного прямолинейного движения. Не выполняется второй закон Ньютона, так как тело может иметь ускорение, не испытывая действия со стороны другого тела. Наконец, не выполняется и третий закон Ньютона, ибо тело, испытывая действие некоторой силы инерции, не оказывает противодействия (нет тела, к которому должно быть приложено это противодействие).

Системы отсчета, движущиеся равномерно и прямолинейно относительно инерциальной системы, являются инерциальными.

Неинерциальными же будут все те системы отсчета, которые движутся с ускорением относительно какой-либо инерциальной системы. Различают два вида неинерциальных систем отсчета: системы, движущиеся относительно инерциальной системы отсчета поступательно с постоянным или переменным ускорением, и системы, вращающиеся с постоянной или переменной угловой скоростью относительно некоторого центра или некоторой оси.

Произвольное движение системы всегда можно представить в виде суммы указанных двух движений.

Занятие 18

НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА, ДВИЖУЩИЕСЯ ПОСТУПАТЕЛЬНО

1. СИЛЫ ИНЕРЦИИ

Начнем с разбора следующего примера. На горизонтальном прямолинейном участке железнодорожного пути находится железнодорожный вагон. На полу вагона лежит неподвижный шар (рис. 8.1), могущий перемещаться на полу без трения. Выбе-

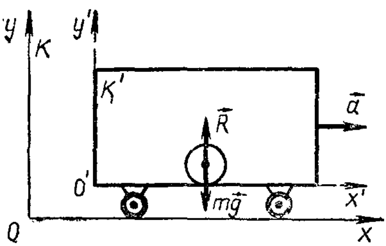


Рис. 8.1

рем две системы отсчета: одну систему (K) свяжем с поверхностью земли, а другую (K') — со стенками вагона. Систему отсчета, связанную с землей, можно с известным приближением (см. ниже) считать инерциальной. Система же, связанная с вагоном, будет инерциальной только тогда, когда вагон покоится или движется равномерно и прямолинейно.

Рассмотрим «поведение» шара относительно систем K и K'.

Вагон покоится. В этом случае шар неподвижен в обеих системах отсчета. Наблюдатели, находящиеся в системах K и K', объяснят покой шара одинаковым образом в соответствии с первым законом Ньютона: шар находится в покое, так как сумма действующих на него сил (сила тяжести и сила реакции пола) равна нулю.

Вагон движется с ускорением $\vec{a}$. В этом случае наблюдатели, находящиеся в системах отсчета K и K' воспримут движение шара по-разному. Наблюдатель в системе K отметит, что шар в полном согласии с законами Ньютона покоится, так как между шаром и полом вагона трения нет; нет и причин для изменения состояния покоя шара. Изменение относительного расстояния между шаром и стенкой вагона наблюдатель в системе K объяснит тем, что вагон уходит, а шар остается на месте. Этому наблюдателю будет понятно и то, что если вагон движется с ускорением $\vec{a}$, то движение шара относительно стен вагона (в системе K') будет происходить с тем же ускорением, но направленным в противоположную сторону. Это ускорение, естественно, будет одинаково для всех тел независимо от их массы. Наблюдатель, находящийся в системе K' (в вагоне), отметит, что в этой системе шар движется с ускорением a'. Если он измерит это ускорение, то обнаружит, что оно по модулю равно ускорению вагона a (об ускорении вагона ему может сообщить, например, по радио наблюдатель с земли). Заменяя шар другими телами, также способными перемещаться по полу без трения, наблюдатель в системе K' придет к выводу (который был очевиден и наблюдателю в системе K), что ускорение тел не зависит от их массы; оно одинаково для всех тел и равно ускорению, с которыми движется система отсчета K', взятому с обратным знаком:

$$\vec{a}' = -\vec{a},$$

где $\vec{a}'$ — ускорение, измеренное в системе K'; $\vec{a}$ — ускорение самой системы K' относительно инерциальной системы K.

(Это справедливо только для рассматриваемого случая, когда сумма ньютоновских сил равна нулю.)

Исходя из законов Ньютона, наблюдатель в системе K' скажет, что на шар массой m действует сила, равная $m\vec{a}'$, и начнет искать тело, которое своим действием создает эту силу. Однако такого тела он, естественно, не найдет. Тогда наблюдатель в системе K' придет к заключению, что в этой системе отсчета не выполняются законы Ньютона: не выполняется закон инерции, ибо шар не сохраняет состояния покоя или равномерного прямолинейного движения, хотя никакие тела на него не действуют; шар имеет ускорение, которое не вызвано силой в ньютоновском понимании. Таким образом, наблюдатель в системе отсчета K' отнесет эту систему к классу неинерциальных.

Из разобранного примера видно, что, находясь внутри системы отсчета и наблюдая за поведением свободных тел (тел, для которых сумма действующих на них ньютоновских сил равна нулю), можно установить, к какому классу относится данная система отсчета: к классу инерциальных или к классу неинерциальных систем. Более того, измеряя ускорение свободного тела, можно даже установить, с каким ускорением и в какую сторону движется данная система отсчета относительно некоторой (заданной) инерциальной системы. Напомним, что никакими опытами, проведенными внутри инерциальной системы, нельзя установить, движется или покоится эта система.

Силы инерции. Было бы неудобно создавать для неинерциальных систем отсчета другую механику, отличную от ньютоновской. Поэтому вполне логично поставить такой вопрос: нельзя ли внести такие дополнения или изменения в механику Ньютона, чтобы сделать выполнимыми основные законы динамики и в неинерциальных системах? Оказывается, это сделать можно. Нужно только расширить понятие силы: считать, что в неинерциальных системах отсчета, кроме обычных (ньютоновских) сил, на все тела действуют еще такие, не совсем обычные силы, которые не вызваны взаимодействием тел друг с другом, а являются результатом ускоренного движения самой системы отсчета. Эти силы, получившие название *сил инерции*, способны оказывать на тела динамическое и статическое действие, подобно обычным ньютоновским силам.

Учитывая это, наблюдатель, находящийся в системе отсчета K' (рис. 8.1), объяснит ускоренное движение шара как результат действия на шар силы инерции.

В данном примере сумма ньютоновских сил (сила тяжести и сила реакции пола) равна нулю. Поэтому наблюдатель в системе K' запишет для шара второй закон Ньютона в обычной форме:

$$m\vec{a}' = \vec{F}_{\text{ин}}. \tag{8.1}$$

Пользуясь этим уравнением, наблюдатель, зная силу $\vec{F}_{ин}$ и начальные условия, сможет установить закон движения шара.

Остается выяснить, как подсчитывается сила инерции.

Если сумма ньютоновских сил равна нулю, шар в системе K' движется с ускорением $\vec{a}'$, которое равно по модулю и противоположно по направлению ускорению самой системы K' относительно инерциальной системы K:

$$\vec{a}' = -\vec{a}.$$

Умножим обе части этого равенства на массу шара m. Сравнивая полученное выражение с выражением (8.1), найдем, что

$$\vec{F}_{ин} = -m\vec{a}. \tag{8.2}$$

Таким образом, мы получили следующее правило: *в ускоренно движущейся системе отсчета на все тела действует сила инерции, равная произведению массы тела на ускорение* системы отсчета, взятому с противоположным направлением.

Если система отсчета движется с постоянным ускорением, то сила инерции постоянна. Если же система движется с изменяющимся ускорением, то и сила инерции непостоянна; ее мгновенное значение определяется соотношением (8.2).

Обратим внимание на одну важную особенность силы инерции: эта сила пропорциональна массе тела, на которое она действует. Это роднит силу инерции с силой тяжести. Как и сила тяжести, сила инерции относится к категории *массовых сил*, оказывающих свое действие на каждый элемент тела.

2. СВОЙСТВА СИЛ ИНЕРЦИИ

Хотя силы инерции и не вызваны действием тел друг на друга, они для наблюдателя, находящегося в ускоренно движущейся системе отсчета, вполне реальны. В их реальности мы убеждаемся на собственном опыте каждый раз, когда, будучи пассажирами какого-либо транспорта, испытываем ее действие в момент резкого торможения или рывка вперед. В эти моменты мы ощущаем силу, которая заставляет нас наклониться вперед или назад. Ощущение этой силы напоминает ощущение веса. И это происходит потому, что силы инерции, как и вес, — массовые силы; они действуют на все элементы нашего тела.

Для наблюдателя, находящегося на земле, т. е. в инерциальной системе отсчета, сил инерции не существует. Отклонение тел при торможении или рывке вперед он объясняет в соответствии с первым законом Ньютона — стремлением тел сохранять свое состояние движения или покоя.

Можно поставить в движущейся с ускорением системе отсчета K' и другие опыты, которые покажут реальность сил инерции, не связывая это с личным ощущением наблюдателя.

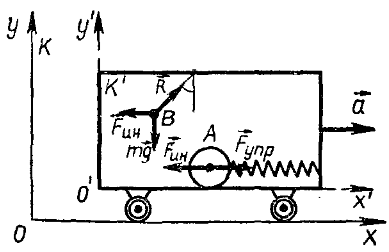


Рис. 8.2

Обратимся вновь к ускоренно движущемуся вагону. Если наблюдатель, находящийся в вагоне (системе K'), присоединит шар A к легкой («невесомой») пружине, скрепленной с передней стенкой вагона, а шар B подвесит к потолку на тонкой («невесомой») нити (рис. 8.2), то он отметит, что оба шара через некоторое время после начала ускоренного движения будут неподвижны. При этом пружина окажется растянутой на некоторую величину ($\Delta x'$), а нить — отклоненной от вертикали на некоторый угол α. Но пружина может растянуться, а подвешенное тело может отклониться от вертикали только в том случае, если на шары действуют реальные силы. Этими силами в ускоренно движущемся вагоне являются силы инерции. Мы видим, что силы инерции, как и обычные ньютоновские силы, могут вызывать деформацию тел, отклонение подвешенных тел от вертикали. Они «делают» все то, что «делают» обычные силы.

Наблюдатель в системе «земля» объяснит растяжение пружины тем, что шар в его системе движется с ускорением $\vec{a}$, а для этого нужна сила. Этой силой является сила упругости растянутой пружины. Отклонение шара B от вертикали он объяснит тем, что для ускоренного движения тела B нужна сила, которая появится как результирующая силы натяжения нити и силы тяжести, действующей на шар.

3. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Уравнения движения в неинерциальных системах отсчета имеют такой же вид, как и в инерциальных, только в сумму действующих на тело сил входят наряду с ньютоновскими и силы инерции:

$$m\vec{a}' = \sum \vec{F}_{\text{ньют}} + \vec{F}_{\text{ин}},$$

или

$$m\vec{a}' = \sum \vec{F}_{\text{ньют}} - m\vec{a}, \qquad (8.3)$$

где $\vec{a}$ — ускорение системы отсчета.

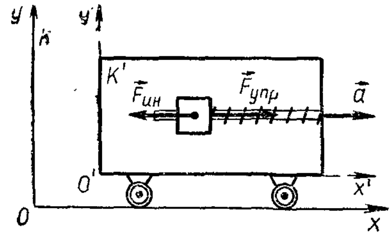


Рис. 8.3

Пример 1. К боковой стенке вагона (рис. 8.3) прикреплен стержень, по которому с малым трением может перемещаться муфта массой m, скрепленная с той же стенкой пружиной, имеющей коэффициент упругости K. Найдите ускорение вагона, если пружина растянулась на величину $\Delta x'$ и муфта при этом находится в покое.

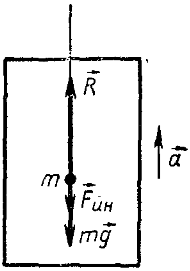


Рис. 8.4

Решение. Условие равновесия в движущемся вагоне запишется так:

$$\vec{F}_{\text{ин}} + \vec{F}_{\text{упр}} = 0,$$

или

$$\vec{F}_{\text{ин}} = -\vec{F}_{\text{упр}}$$

В проекциях на прямую, вдоль которой действуют силы, получим:

$$ma = k \cdot \Delta x'.$$

Отсюда

$$a = -\frac{k}{m} \cdot \Delta x'.$$

На этом принципе работает экселерометр — прибор для измерения ускорения самолета, автомобиля и т. д.

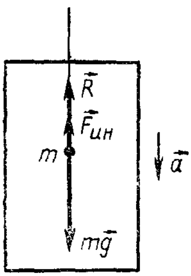


Рис. 8.5

Пример 2. К потолку лифта подвешен груз массой m. Определите натяжение нити в момент времени, когда лифт движется вверх (вниз) с ускорением a.

Решение. Пусть лифт движется вверх. В системе отсчета, связанной с лифтом, тело покоится. Поэтому сумма всех действующих на него сил равна нулю (рис. 8.4):

$$\vec{R} + m\vec{g} + \vec{F}_{\text{ин}} = 0,$$

где $\vec{R}$ — сила натяжения нити.

Проецируя векторное равенство на прямую, вдоль которой действуют силы (на ось x, направленную вверх), получим:

$$R - mg - F_{\text{ин}} = 0.$$

Так как $F_{\text{ин}} = ma$, то

$$R = m(g + a),$$

т. е. сила натяжения нити больше веса груза в неподвижном лифте.

Если лифт движется вниз (рис. 8.5), то:

$$R + F_{\text{ин}} - mg = 0.$$

Отсюда

$$R = m(g - a).$$

В этом случае сила натяжения нити меньше веса груза в неподвижном лифте.

В частности, если лифт падает свободно ($a = g$), то натяжение нити равно нулю. Если лифт движется вниз с ускорением $a > g$, то груз будет прижиматься к «потолку» кабины.

4. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Известно, что в ньютоновской механике закон сохранения импульса системы материальных точек справедлив для замкнутых систем. Выполняется ли указанный закон в неинерциальных системах отсчета?

Чтобы получить замкнутую систему тел, надо было бы включить в эту систему и то тело, которое порождает силу инерции. Но такого тела нет. Поэтому ни одна система тел в ускоренно движущейся системе отсчета не может быть замкнутой. Отсюда следует неприменимость закона сохранения импульса в неинерциальной системе отсчета.

5. ПОЛЕ СИЛ ИНЕРЦИИ

Силы инерции, действующие в неинерциальной системе отсчета, образуют силовое поле. Очевидно, для систем, движущихся поступательно, поле сил инерции будет однородным. Такое поле образуется, например, в системе отсчета, связанной с ускоренно движущимся вагоном. Поле сил инерции будет во всех точках пространства и вне вагона, если это пространство рассматривать в системе K'.

Однако в движущемся вагоне, кроме поля сил инерции, существует также поле сил тяжести, которое можно считать однородным ввиду незначительных размеров вагона по сравнению с Землей. На рисунке 8.6 оба поля показаны пунктирными стрелками. В соответствии с принципом суперпозиции[1] оба поля накладываются одно на другое и образуют новое, результирующее поле, которое действует на точку массой m с силой

$$\vec{F} = \vec{F}_{тяж} + \vec{F}_{ин} = m(\vec{g} - \vec{a}). \quad (8.4)$$

На рис. 8.6 результирующее поле показано сплошными стрелками.

Наблюдатель, находящийся в вагоне, воспримет результирующее поле как измененное поле тяготения.

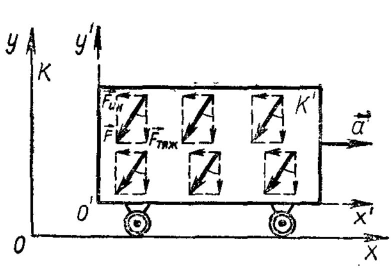


Рис. 8.6

---

[1] Этот принцип в отношении инерциального поля и поля сил тяжести доказывается опытом.

Вопросы для самопроверки

1. Какие системы отсчета называют неинерциальными? В чем состоит обобщение понятия силы, когда переходят к неинерциальным системам отсчета? Какие силы называют силами инерции и какие — ньютоновскими? Чем они различаются и что у них общее? Как изменяются силы инерции и ньютоновские силы при переходе от одной неинерциальной системы отсчета к другой?

2. По какому правилу подсчитывается сила инерции в неинерциальной системе отсчета движущейся поступательно? Как направлена эта сила? Совершает ли сила инерции работу? Будет ли эта сила консервативной? Можно ли складывать силы инерции с ньютоновскими силами?

3. Напишите уравнение движения (второй закон Ньютона) для тела в неинерциальной системе отсчета.

4. В вагоне, движущемся горизонтально с ускорением a, висит на нити длиной l груз m. Найдите угол, который образует нить с вертикалью при условии, что груз покоится относительно стен вагона. Определите также силу натяжения нити. Объясните, почему угол не зависит от длины нити. Зависит ли абсолютное (относительное) удлинение нити от ее первоначальной длины?

5. Объясните, почему в неинерциальных системах отсчета не выполняются законы сохранения механической энергии и импульса. Как в этом случае следует записывать закон сохранения механической энергии для системы материальных точек? Укажите в неинерциальной системе отсчета направления, относительно которых сохраняется импульс системы.

6. Какими особенностями обладает поле сил инерции? Какова напряженность этого поля? В чем родство поля сил инерции с полем тяготения? Различимы ли эти поля для наблюдателя, находящегося в неинерциальной системе? В чем состоит принцип суперпозиции полей сил инерции и тяготения и как он проявляется в неинерциальных системах? Чему равна напряженность результирующего поля в неинерциальной системе отсчета?

Занятие 19

ВРАЩАЮЩАЯСЯ СИСТЕМА ОТСЧЕТА

Связывая систему отсчета с вращающимся телом, получим вращающуюся систему отсчета. Поскольку вращающиеся системы суть системы, движущиеся относительно инерциальной с некоторым (радиальным) ускорением, то в них должны также действовать силы инерции. Нахождение сил инерции в общем случае представляет собой сложную задачу. Поэтому мы ограничимся только частным случаем, когда система вращается относительно неподвижной (инерциальной системы) с постоянной угловой скоростью. В отличие от случая поступательного движения системы, рассмотренного выше, во вращающейся системе отсчета проявляются два рода сил инерции: *центробежные* силы, определяемые только положением тела в системе отсчета и не зависящие от скорости тела в этой системе, и *кориолисовы* силы, которые, наоборот, зависят от скорости движения тела, но не зависят от его положения в системе отсчета. На покоящееся во вращающейся системе отсчета тело действует только центробежная сила, на движущееся тело — и центробежная и кориолисова. С действием этих сил можно ознакомиться на примере аттракциона «карусель». Кому приходилось кататься на карусели, хорошо помнят действие силы, стремящейся выбросить человека наружу. По личному ощущению покоящийся на карусели наблюдатель может заметить, что эта сила направлена по радиусу к периферии, а модуль ее тем больше, чем дальше наблюдатель находится от оси вращения. Кому приходилось ходить по полу вращающейся карусели, знает, как трудно удержаться в равновесии. Эта трудность возникает из-за того, что на движущегося человека, кроме центробежной силы, направленной по радиусу, действует еще одна сила — сила кориолиса, которая, будучи перпендикулярна направлению движения человека, «валит» его на бок и, чтобы не упасть, он должен идти, «переплетая» ноги. Но разберем подробнее обе эти силы.

1. ЦЕНТРОБЕЖНАЯ СИЛА ИНЕРЦИИ И ЕЕ СВОЙСТВА

Центробежная сила. Обратимся к следующему эксперименту. На стержне, способном вращаться в горизонтальной плоскости, около одного своего конца (точка O на рисунке 8.7) посажена муфта A, скрепленная (невесомой) пружиной с центром O. Муфта может перемещаться по стержню без трения. Опишем движение муфты и состояние пружины относительно двух систем отсчета: неподвижной (она же инерциальная) x, y (K) и вращающейся x', y' (K'), скрепленной осью x' со стержнем. Когда стержень неподвижен относительно инерциальной системы отсчета, то муфта в обеих системах отсчета K и K' покоится, а пружина находится в нерастянутом состоянии, что согласуется с законами Ньютона. Если же стержень приведен в равномерное вращение с угловой скоростью ω, оба наблюдателя (в системах K и K') отметят растяжение пружины на величину $\Delta x'$. Но объяснят они это по-разному. Наблюдатель в инерциональной системе объяснит растяжение пружины тем, что в начальные моменты времени (когда стержень только начал вращаться) муфта получает импульс $\vec{P}_a$ в направлении, перпендикулярном стержню (рис. 8.8).

Этот импульс, согласно закону инерции, муфта стремит-

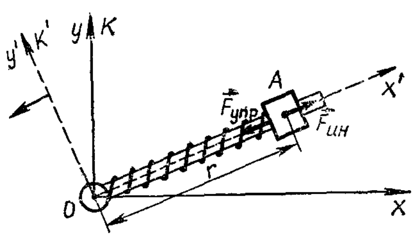


Рис. 8.7

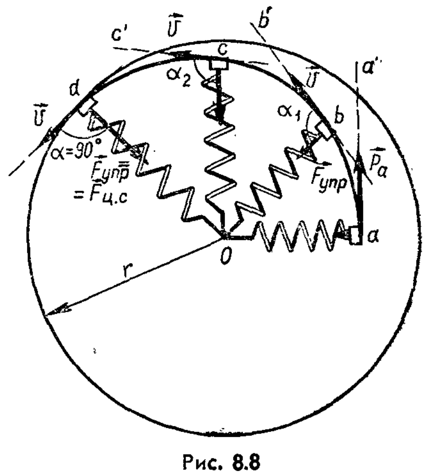


Рис. 8.8

ся сохранить, перемещаясь по прямой aa'. Удаление муфты от центра и, следовательно, растяжение пружины приводит к появлению силы, направленной к центру (под углом $\alpha_1 > 90°$ к вектору скорости муфты). Появившаяся сила $F_{упр}$ изменит направление движения, и муфта попадет в точку b. Двигаясь далее по прямой bb', муфта удалится от центра еще больше, что приведет к увеличению растяжения пружины и возрастанию силы $F_{упр}$ ($\alpha_2 > 90°$, но $\alpha_2 < \alpha_1$). Под действием силы $F_{упр}$ направление движения муфты изменяется более резко, и муфта попадет в точку c. Вскоре наступит момент, когда угол α станет равным $90°$ (точка d), а сила упругости достигнет такого значения, которое необходимо для обеспечения равномерного движения муфты массой m по окружности радиуса r:

$$F_{упр} = F_{ц.\,с} = m\omega^2 r.$$

Таким образом, для наблюдателя в системе отсчета K муфта начнет двигаться по окружности, так как на нее действует сила, перпендикулярная скорости и направленная к центру O.

Для наблюдателя в системе отсчета K' стержень находится в покое. Растяжение пружины этот наблюдатель объяснит тем, что с началом вращения стержня на муфту стала действовать некоторая сила, стремящаяся удалить ее от центра; но удаляясь от центра, муфта растягивает пружину. Наблюдатель в системе отсчета K' может установить, что появившаяся сила не является результатом взаимодействия муфты с каким-либо телом системы и поэтому она по природе своей принадлежит к силам инерции, обусловленным ускоренным движением самой системы отсчета. Установившееся состояние покоя муфты в системе отсчета K' наблюдатель в этой системе объяснит тем, что сила упругости пружины в конце концов уравновесит действие силы инерции:

$$\vec{F}_{ин} = -\vec{F}_{упр}. \tag{8.5}$$

Так как в инерциальной системе отсчета сила упругости пружины выполняет роль центростремительной силы ($\vec{F}_{упр} = \vec{F}_{ц.\,с}$), то из (8.5) получаем:

$$\vec{F}_{ин} = -\vec{F}_{ц.\,с}. \tag{8.6}$$

Сила инерции направлена от центра вращения системы наружу. Это и послужило поводом называть ее центробежной. Поскольку центростремительная сила определяется соотношением $\vec{F}_{ц.\,с} = -m\omega^2\vec{r}$ (где ω — угловая скорость движения материальной точки по окружности радиуса r; $\vec{r}$ — радиус-вектор, соединяющий центр вращения с движущейся точкой), то центробежная сила в системе отсчета, в которой это тело покоится, будет определяться таким равенством:

$$\vec{F}_{ц.\,б} = m\omega^2\vec{r}. \tag{8.7}$$

Однако величины ω и $\vec{r}$ приобретают иной смысл: ω — угловая скорость вращения системы отсчета, а $\vec{r}$ — радиус-вектор, соединяющий центр вращения с покоящейся в системе отсчета K' точкой, в нашем примере — муфтой. Выражение (8.7) является наиболее общим определением центробежной силы: *центробежная сила пропорциональна массе тела*[1], *квадрату угловой скорости вращения системы отсчета и расстоянию точки от оси вращения.*

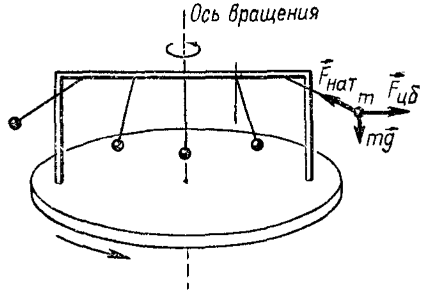


Рис. 8.9

Зависимость центробежной силы от расстояния материальной точки до оси вращения (формула 8.7) можно наглядно проиллюстрировать на опыте, смысл которого ясен из рисунка 8.9. На шарик, подвешенный к стойке, укрепленной на вращающемся диске, действуют в системе отсчета K' три силы. Отклонение шарика от вертикали обусловлено действием центробежной силы. Очевидно, чем больше эта сила, тем больше угол α отклонения шарика от вертикали.

2. КОРИОЛИСОВЫ СИЛЫ ИНЕРЦИИ

Проявление кориолисовых сил в некоторых опытах. Возьмем диск, могущий вращаться около вертикальной оси, и проведем на нем радиальную прямую от центра к точке A (рис. 8.10, a). Запустим вдоль этого направления шарик со скоростью v_0 (трение отсутствует). Если диск не вращается, то шарик будет двигаться вдоль прочерченной линии со скоростью v_0. Если же диск привести в равномерное вращение, то движение шарика будет восприниматься различными наблюдателями по-разному. Для наблюдателя, находящегося на земле, шарик по-прежнему движется прямолинейно с той же скоростью, ибо ввиду отсутствия трения не возникает причин к изменению скорости шарика (диск проходит под шариком, не увлекая его). Для наблюдателя, находящегося на диске, движение шарика будет криволинейным с возрастающей скоростью v' относительно диска. Для этого наблюдателя шарик отклонится от первоначального положения вправо (рис. 8.10) и придет в точку B. Положение точки B зависит от начальной скорости v_0 (при данной угловой скорости вращения диска). Если v_0 велико, то за время движения шарика от оси к краю диска последний повернется на малый угол

[1] Во вращающейся системе отсчета центробежные силы образуют силовое поле, которое, однако, будет неоднородным.

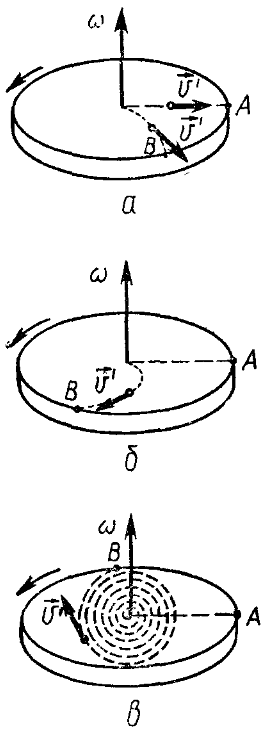


Рис. 8.10

(рис. 8.10, *а*) и точка *B* окажется вблизи точки *A*. Если скорость шарика v_0 невелика, то за время движения шарика от оси к краю диска диск повернется на значительный угол (рис. 8.10, *б*) или успеет сделать несколько оборотов (рис. 8.10, *в*). В этом случае вращающийся наблюдатель увидит, что шарик движется вокруг центра по раскручивающейся спирали. Но известно, что движение тела по криволинейной траектории возникает только тогда, когда действующая на тело сила имеет составляющую, направленную нормально к вектору скорости. Поэтому наблюдатель, находящийся на диске, объяснит криволинейность движения шарика тем, что на шарик перпендикулярно к его скорости действует какая-то сила, которая, однако, не вызвана взаимодействием шарика с каким-либо телом. Это — сила инерции, названная кориолисовой силой[1].

Измерение сил Кориолиса на опыте. На горизонтально расположенном диске (рис. 8.11) в радиальном направлении укреплен угольник (*c*), вдоль которого при помощи специального приспособления, не показанного на рисунке, по поверхности диска перемещается с заданной скоростью прямоугольной брусок *а*. Брусок скреплен пружинами с тонкой пластиной *б*, касающейся вертикальной грани угольника. Если усилием руки сместить брусок *а* к пластине *б*, то скрепляющие их пружины сожмутся и будут оказывать обратное действие, пока не уравновесят приложенную к бруску силу. Приложенную к бруску силу можно, таким образом, оценить по сокращению пружины или по изменению расстояния между бруском *а* и пластиной *б*. Можно соорудить соответствующее рычажное устройство, регистрирующее изменение расстояния между бруском и пластинкой, проградуированное в единицах силы. Такой прибор (силометр) будет измерять силу, приложенную к бруску в направлении сжатия пружины (перпендикулярно радиальной линии). Предположим, что у нас имеется такое устройство. Если диск не вращается и брусок *а* неподвижен, то пружины будут недеформированы и прибор покажет, что в направлении сжатия пружины никакие силы на брусок не действуют. Приведем диск во вращение с угловой скоростью ω. Если брусок во вра-

---

[1] Гаспар Кориолис (1792—1835) — французский физик, открывший теоретически в 1831—1835 гг. этот вид сил инерции.

щающейся системе отсчета неподвижен, то опыт покажет, что пружины по-прежнему не деформированы, т. е. на брусок и в этом случае силы не действуют. Специальным устройством приведем брусок в равномерное движение вдоль угольника от центра диска к периферии. Опыт покажет, что пружины теперь окажутся сжатыми. Это означает, что во вращающейся системе при движении бруска в радиальном направлении на него действует сила, перпендикулярная скорости бруска $\vec{v}'$. Это сила инерции, ибо нет такого тела, которое бы оказывало на брусок действие, приводящее к сжатию пружины. Речь идет о кориолисовой силе, так как ее появление обусловлено движением бруска относительно диска. Производя измерение силы Кориолиса при помощи упомянутого силомера, наблюдатель во вращающейся системе установит, что величина этой силы пропорциональна массе бруска m, относительной скорости движения бруска $\vec{v}'$, угловой скорости вращения системы ω:

$$f_{\text{кор}} = 2mv'\omega. \tag{8.8}$$

Опыт показывает также, что сила Кориолиса $\vec{f}_{\text{кор}}$ лежит в плоскости диска: она перпендикулярна векторам $\vec{v}'$ и $\vec{\omega}$ и направлена в сторону, определяемую векторным произведением $[\vec{v}'\vec{\omega}]$. В самом деле, $\vec{f}_{\text{кор}}$ направлена вправо. В эту сторону будет направлен и вектор, составленный в виде произведения $[\vec{v}'\vec{\omega}]$.

Таким образом, вращающийся вместе с диском наблюдатель запишет для силы Кориолиса следующее выражение:

$$\vec{f}_{\text{кор}} = 2m[\vec{v}'\vec{\omega}]. \tag{8.9}$$

В отличии от (8.8) оно содержит информацию не только о модуле силы, но и ее направлении.

Наблюдатель, находящийся в системе отсчета «земля», объяснит сжатие пружины тем, что при вращении диска угольник действует на брусок, увлекая его во вращательное движение с той линейной скоростью, какую имеют точки угольника, примыкающие к бруску.

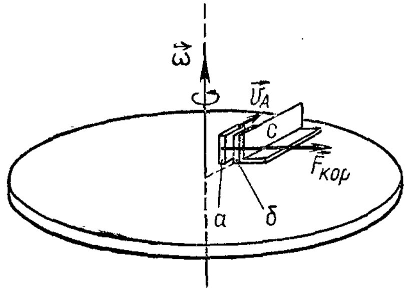


Рис. 8.11

Как показывает опыт и теория, формула (8.9) выражает силу Кориолиса для любого возможного движения тела во вращающейся системе отсчета, а не только в случае радиального движения. Из формулы видно, что $\vec{f}_{кор}$ перпендикулярна и вектору угловой скорости $\vec{\omega}$ вращения системы отсчета и вектору относительной скорости $\vec{v}'$. Причем, если векторы $\vec{v}'$ и $\vec{\omega}$ параллельны, сила Кориолиса обращается в нуль. Это ясно из формулы (8.9), записанной в скалярной форме:

$$f_{кор} = 2mv'\omega \sin\alpha,$$

где α — угол между векторами $\vec{v}'$ и $\vec{\omega}$.

Ускорение Кориолиса. Чтобы понять, каким образом появляется сила Кориолиса, рассмотрим кинематику движения бруска (см. рис. 8.11). Пусть в некоторый момент времени t брусок находился в положении A (рис. 8.12). Скорость его в неподвижной системе отсчета имеет две составляющие: переносную $v_{пер} = v_1 = \omega R$, которая перпендикулярна радиусу, и относительную $v_{отн} = v'$, параллельную радиусу. За время dt прямая, вдоль которой движется брусок, повернется на угол $d\varphi = \omega dt$, а брусок сместится вдоль этой прямой и окажется в положении B. В результате обе составляющие получат по два приращения (рис. 8.12): $dv_\perp = v_1\, d\varphi = \omega R\, d\varphi$, $dv_\| = \omega\, dR = \omega v' dt$, $dv'_\perp = v'\, d\varphi$ и $dv'_\|$. Приращение $dv'_\|$ определяется характером движения вдоль радиуса. Таким образом, приращение $d\vec{v}$, которое получает за время dt скорость $\vec{v}$, можно представить как векторную сумму четырех приращений. Разделив приращение $d\vec{v}$ на dt, получим для ускорения бруска в неподвижной системе отсчета четырех слагаемых:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}_\perp + \vec{a}_\| + \vec{a}'_\perp + \vec{a}'_\|. \tag{8.10}$$

Слагаемое $a_\perp = \dfrac{dv_\perp}{dt} = R\omega \dfrac{d\varphi}{dt} = \omega^2 R = a_{ц.\,с}$ есть известное нам центростремительное ускорение.

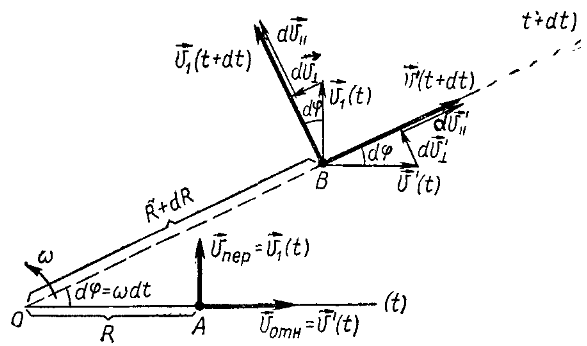


Рис. 8.12

Слагаемое $a'_{\parallel} = \frac{dv'_{\parallel}}{dt} = a'$ есть относительное ускорение, т. е. ускорение бруска во вращающейся системе отсчета.

Слагаемые $\vec{a}_{\parallel}$ и $\vec{a}'_{\perp}$ перпендикулярны относительной скорости v' и в сумме дают ускорение, называемое кориолисовым:

$$a_{\text{кор}} = a_{\parallel} + a'_{\perp} = \omega v' \frac{dt}{dt} + v' \frac{d\varphi}{dt} = 2\omega v', \tag{8.11}$$

или, учитывая направления,

$$\vec{a}_{\text{кор}} = 2[\vec{\omega}\vec{v}']. \tag{8.12}$$

Это ускорение сообщают бруску силы упругости сжатия пружин (см. рис. 8.11). Сила Кориолиса как сила инерции направлена противоположно кориолисову ускорению $\vec{a}_{\text{кор}}$:

$$\vec{f}_{\text{кор}} = -m\vec{a}_{\text{кор}} = -2m[\vec{\omega}\vec{v}'], \tag{8.13}$$

или, меняя местами векторные сомножители,

$$\vec{f}_{\text{кор}} = 2m[\vec{v}'\vec{\omega}]. \tag{8.14}$$

Итак, кориолисова сила, как и кориолисово ускорение, обусловлена изменениями переносной скорости $\vec{a}_{\parallel}$ по модулю и относительной скорости $\vec{a}'_{\perp}$ по направлению.

5. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА

Из соотношений 8.10 и 8.11 видно, что ускорение тела в неподвижной системе отсчета имеет три составляющие. На рисунке 8.13, *а* представлен случай, когда тело движется от центра вращения, а на рисунке 8.13, *б* — случай, когда тело движется к центру (ускорение $\vec{a}'$ принято неизменным):

$$\vec{a} = \vec{a}_{\text{ц.с}} + \vec{a}' + \vec{a}_{\text{кор}}. \tag{8.15}$$

Умножив все члены этого равенства на массу тела, найдем силу:

$$\vec{F} = m\vec{a} = \vec{f}_{\text{ц. с}} + m\vec{a}' + m\vec{a}_{\text{кор}}. \tag{8.16}$$

Все составляющие силы $\vec{F}$, а значит, и сама эта сила являются ньютоновскими силами, ибо система отсчета инерциальная. Из

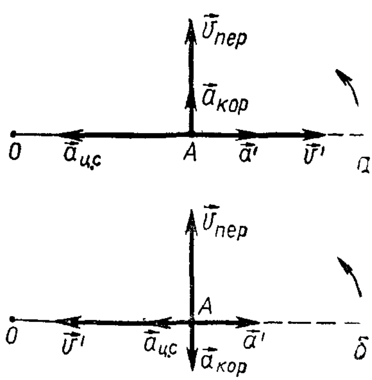


Рис. 8.13

равенства (8.16) имеем:

$$m\vec{a}' = \vec{F} - \vec{f}_{\text{ц. с}} - m\vec{a}_{\text{кор}}. \qquad (8.17)$$

Во вращающейся (неинерциальной) системе отсчета

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{f}_{\text{ц. б}} + \vec{f}_{\text{кор}}. \qquad (8.18)$$

Это и есть уравнение движения тела во вращающейся системе отсчета. Таким образом, для составления уравнения движения тела в равномерно вращающейся системе отсчета нужно учитывать не только ньютоновские силы ($\vec{F}$), но и все силы инерции (центробежные и кориолисовы).

4. ЗЕМЛЯ КАК НЕИНЕРЦИАЛЬНАЯ (ВРАЩАЮЩАЯСЯ) СИСТЕМА ОТСЧЕТА

Относительно инерциальной системы отсчета[1] Земля совершает суточное вращение около оси с угловой скоростью

$$\omega = 2\pi\,\frac{\text{рад}}{\text{сут}} = 7{,}3 \cdot 10^{-5}\,\frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

По этой причине связанная с Землей система отсчета будет неинерциальной. В этой системе приобретают вполне реальное значение центробежные и кориолисовы силы инерции. Выясним, в чем проявляется действие этих сил.

Проявление центробежных сил. Центробежные силы оказывают влияние на силу тяжести, ускорение свободного падения и вес тел. Кроме того, действие их оказывает влияние также и на форму самой Земли.

Ускорение свободного падения. Тело массой m на поверхности Земли испытывает действие двух массовых сил: силы тяготения

$$F_{\text{тяг}} = \gamma\,\frac{M_{З}m}{R_{З}} = mg_0$$

и центробежной силы

$$F_{\text{ц. б}} = ma_{\text{ц. б}} = m\omega^2 r,$$

где r — расстояние тела от оси вращения.

На рисунке 8.14 показаны обе силы на широте φ. Равнодействующая этих сил, называемая силой тяжести, равна

$$\vec{F}_{\text{тяж}} = \vec{F}_{\text{тяг}} + \vec{F}_{\text{ц. б}}. \qquad (8.19)$$

[1] В качестве таковой может служить система, у которой начало координат совмещено с центром Земли, а оси координат направлены на удаленные звезды.

Если тело свободно, оно получит ускорение g_φ и

$$\vec{F}_{\text{тяж}} = m\vec{g}_\varphi.$$

Поэтому

$$m\vec{g}_\varphi = m\vec{g}_0 + m\vec{a}_{\text{ц. б}}.$$

Следовательно, наблюдаемое ускорение свободного падения на широте φ равно:

$$\vec{g}_\varphi = \vec{g}_0 + \vec{a}_{\text{ц. б}}. \qquad (8.20)$$

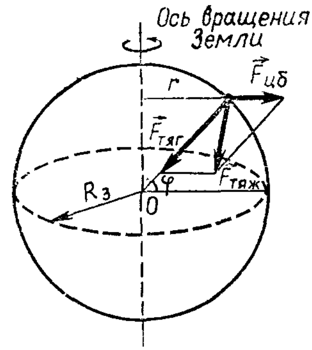


Рис. 8.14

Таким образом, ускорение свободного падения (рис. 8.15) не направлено к центру Земли и не равно тому ускорению g_0, которое имело бы тело, если бы Земля не вращалась. Наибольшее различие между g_φ и g_0 имеется на экваторе:

$$g_\varphi - g_0 = R_з\omega^2 = 0{,}034\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Оно составляет приблизительно $^1/_{300}$ от наблюдаемого ускорения на средних широтах (9,81 м/с^2). Из расчета видно, что вектор $\vec{a}_{\text{ц. б}}$ на рисунке 8.15 сильно преувеличен и что направление $\overleftarrow{g}_\varphi$ очень мало отличается от направления вектора $\vec{g}_0$. Если пренебречь этим отклонением, то можно вычислить величину g_φ. Проецируя $\vec{a}_{\text{ц. б}}$ на продолжение радиуса и вычитая эту проекцию из g_0, получим:

$$g_\varphi = g_0 - a_{\text{ц. б}} \cos\varphi.$$

Так как $a_{\text{ц. б}} = \omega^2 r = \omega^2 R_з \cos\varphi = 0{,}034 \cos\varphi$, то

$$g_\varphi = g_0 - 0{,}034 \cos^2\varphi. \qquad (8.21)$$

Вес тела на поверхности Земли. По определению весом называют силу, с которой тело действует на подвес или опору, удерживающие тело от падения. Вес, следовательно, есть сила упругости, ибо взаимодействие тела с опорой осуществляется через силы упругости. Однако вес тела можно выразить через силу тяготения и центробежную силу. Мы видели, что на покоящееся тело действует сила $\vec{F}_{\text{равн}} = \vec{F}_{\text{тяг}} + \vec{F}_{\text{ц.б}}$. С такой же силой покоящееся тело действует на удерживающую его опору. Поэтому вес тела $\vec{P}$ на поверхности Земли равен:

$$\vec{P} = \vec{F}_{\text{тяг}} + \vec{F}_{\text{ц. б}}. \qquad (8.22)$$

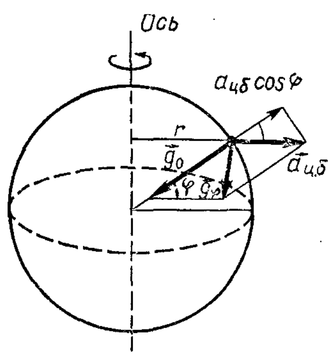


Рис. 8.15

Вес тела отличается от действующей на него силы тяготения $\vec{F}_{тяг}$ как по модулю, так и по направлению (хотя и незначительно). Поскольку $\vec{F}_{ц.б}$ зависит от географической широты, то и вес тела будет зависеть от широты. Вес тела можно представить в виде произведения массы на ускорение свободного падения:

$$\vec{P} = m\vec{g}_{\varphi}.$$

Эта формула верна лишь в том случае, когда тело и опора неподвижны относительно земли. Если же тело и опора движутся с некоторым ускорением $\overleftarrow{a}$, то вес тела не будет равен $m\vec{g}_{\varphi}$. Действительно, в движущейся с ускорением $\vec{a}$ системе отсчета на тело действуют, кроме сил тяготения, силы инерции, связанные с вращением Земли ($\vec{F}_{ц.б}$ и $\vec{F}_{кор}$), и силы инерции $\vec{F}_{ин.пост}$, обусловленные поступательным движением системы отсчета K':

$$\vec{F}_{ин.пост} = -m\vec{a}.$$

Результирующая этих сил равна:

$$\vec{F}_{рез} = \vec{F}_{тяг} + \vec{F}_{ц.б} + \vec{F}_{кор} + \vec{F}_{ин.пост}.$$

С такой силой тело, покоящееся в системе отсчета K', действует на удерживающую опору. Тогда

$$\vec{P} = \vec{F}_{рез}.$$

Учитывая, что

$$\vec{F}_{тяг} + \vec{F}_{ц.б} = m\vec{g}_{\varphi},$$

получаем:

$$\vec{P} = m\vec{g}_{\varphi} + \vec{F}_{кор} - m\vec{a}. \tag{8.23}$$

Таким образом, вес тела в системе отсчета, движущейся относительно земли с ускорением, отличается от произведения $m\vec{g}_{\varphi}$, т. е. от веса тела на поверхности земли.

Если сила Кориолиса невелика (при малой скорости движения тела относительно земли), то ее можно не учитывать. Тогда

$$\vec{P} = m\vec{g}_{\varphi} - m\vec{a} = m(\vec{g}_{\varphi} - \vec{a}) = m\vec{g}^{*}, \tag{8.24}$$

где $\vec{g}^{*}$ — напряженность результирующего поля сил тяготения и инерции в системе отсчета K'.

Формула (8.23) определяет вес тела в самом общем случае, а формула (8.24) — при условии, что силой Кориолиса можно пренебречь. Для величины g_{φ} берут среднее значение ускорения свободного падения $g_{\varphi} = g = 981$ см/с. Формула (8.24) справедлива для опоры или подвеса любого вида.

Перегрузки и невесомость. Если модуль веса тела $|\vec{P}|$ в (8.24) превосходит вес тела, покоящегося на земле (mg), то говорят, что внутри движущейся системы отсчета (например, самолета или космического корабля) установилось состояние перегрузки. Количественно перегрузка n выражается так:

$$n = \frac{|\vec{P}|}{mg} = \frac{|m\vec{g} - m\vec{a}|}{mg}.$$

Десятикратная ($n = 10$) кратковременная перегрузка является пределом для человека (тренированного космонавта). Допустимое значение длительных перегрузок меньше. Имеющиеся для человека ограничения в перегрузках создают серьезные затруднения в использовании космических пилотируемых кораблей для исследования других (даже самых близких) звездных систем. Чтобы космонавт мог в течение своей жизни (60 лет) достигнуть самой близкой к нам звезды α-Центавра, удаленной от Земли на расстояние, равное четырем световым годам, космический корабль должен как можно быстрее набрать скорость, соизмеримую со скоростью света. Расчет показывает, что необходимое для этого ускорение создает такую перегрузку, которую человек не сможет вынести, если не будут разработаны специальные защитные меры.

Если система отсчета (космический корабль, например) движется с ускорением $\vec{a} = \vec{g}$, то вес тела согласно (8.24) равен нулю ($\vec{P} = 0$), т. е. тело в этом случае не действует на опору; значит, напряженность результирующего поля сил гравитации и сил инерции в движущейся системе равна нулю ($g^* = 0$). Такое состояние и называют состоянием невесомости. Внешним проявлением этого состояния является отсутствие веса у тел. Однако дело не только в этом. При невесомости все тела находятся в особом, недеформированном состоянии. Это обусловлено тем, что в условиях невесомости нет ни массовых сил ($\vec{g}^* = 0$), ни сил реакции со стороны опоры, т. е. тех сил, которые создают деформацию покоящихся тел.

Для наблюдателя, находящегося в неподвижной (инерциальной) системе отсчета, все тела внутри ракеты и сама ракета или космический корабль свободно «падают» с одинаковым ускорением $\vec{g}$. Именно поэтому они находятся друг относительно друга в покое и не оказывают давления друг на друга. По этой же причине частицы одного и того же тела не смещаются относительно друг друга и тело не деформируется. Таким образом, чтобы в ракете была невесомость, она должна двигаться свободно с ускорением $\vec{g}$.

Этим способом создают «бассейн» невесомости при тренировках космонавтов. Просторный самолет сначала разгоняют до

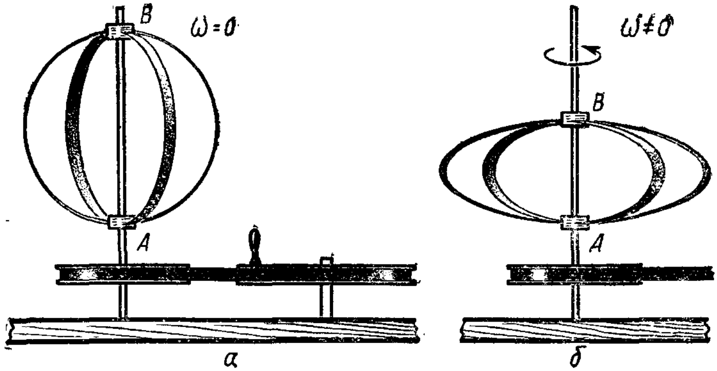


Рис. 8.16

максимально допустимой скорости $\vec{v}_0$, образующей с горизонтом некоторый угол α, а затем выключают двигатели. При этом самолет совершает свободный полет по кривой, близкой к параболе. Отличие от параболы обусловлено наличием сопротивления воздуха. Чтобы движение происходило точно по параболе, двигатели выключают не полностью: они должны создавать тягу, которая компенсирует сопротивление воздуха. Так удается получить невесомость в течение малого промежутка времени.

Деформация Земли. На вращающейся Земле центробежная сила действует не только на тело, лежащее на Земле, но и на каждую частицу самой Земли. Действие этих сил привело к тому, что Земля оказалась деформированной, сжатой у полюсов. Сжатие шарообразного тела у полюсов можно проиллюстрировать на следующей модели. Два круговых обруча из тонких полосок стали насажены на вертикальный стержень (рис. 8.16, *а*). В нижней части обручи скреплены со стержнем. В верхней (*В*) они свободно могут скользить по стержню. Если привести обручи во вращение, то под действием центробежных сил они сожмутся в направлении оси вращения (рис. 8.16, *б*).

В результате сплюснутости Земли ее полярная ось почти на $^1/_{300}$ долю короче диаметра экватора. А это приводит к тому, что и сила тяготения вблизи поверхности Земли становится зависящей от широты: она наибольшая на полюсе и наименьшая на экваторе. Поэтому фактическая зависимость g_φ от φ будет более сложной, чем это выражено соотношением (8.21), в котором ускорение g_0, сообщаемое телу силой тяготения, принималось не зависящим от широты. Измерения на различных широтах привели к следующей эмпирической формуле:

$$g_\varphi = (9{,}832 - 0{,}052 \cdot \cos^2 \varphi). \qquad (8.25)$$

Здесь g_φ выражается в метрах на секунду в квадрате (м/с^2). Поправочный член достигает наибольшей величины при $\varphi = 0$, т. е. на экваторе, и достигает значения 0,052 м/с^2. Ввиду малости этой величины ее влиянием в ряде случаев можно пренебрегать. При расчетах часто берут значение g_φ на уровне моря для широты $\varphi = 45°$ ($g_{45°} = 9{,}81$ м/с^2).

Проявление сил Кориолиса. На любое тело, движущееся по поверхности Земли, действует кориолисова сила

$$\vec{F}_{\text{кор}} = 2m\,[\vec{v}'\vec{\omega}].$$

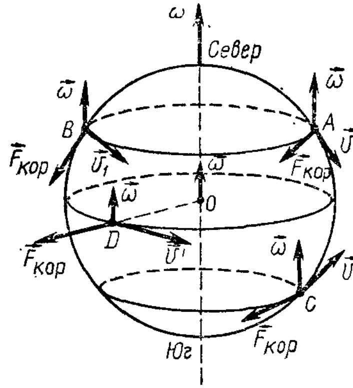


Рис. 8.17

На рисунке 8.17 показаны силы Кориолиса для различных движений. В точке A тело движется с севера на юг. На него действует сила Кориолиса $\vec{F}_{\text{кор}}$, направленная на запад — в п р а в о относительно направления $\vec{v}'$. Если бы тело двигалось с юга на север, то $\vec{F}_{\text{кор}}$ была бы направлена на восток — снова вправо относительно $\vec{v}'$. В точке B, находящейся также в с е в е р н о м полушарии, тело движется на восток, а кориолисова сила направлена на юг — опять вправо относительно $\vec{v}'$. В точке C, находящейся в ю ж н о м полушарии, сила Кориолиса направлена в л е в о относительно скорости $\vec{v}'$.

Если тело движется на экваторе и с юга на север или с севера на юг, то $\vec{F}_{\text{кор}} = 0$, так как $\vec{\omega} \parallel \vec{v}'$. Если же тело на экваторе движется с запада на восток (точка D), то сила Кориолиса направлена вертикально вверх; при движении с востока на запад эта сила направлена вертикально вниз. Таким образом, силы Кориолиса в северном полушарии Земли стремятся сместить движущееся тело вправо, а в южном полушарии — влево по отношению к скорости движения тела $\vec{v}'$. По этой причине в северном полушарии правые берега рек более размытые, чем левые, а в южном полушарии, наоборот, более размыты левые берега; в северном полушарии бо́льшую нагрузку испытывает правый рельс железной дороги, а в южном — левый рельс.

Силы Кориолиса оказывают действие на движущиеся корабли и самолеты. Они особенно значительны для самолетов, движущихся с большими скоростями, для ракет, спутников Земли и т. д.

Кориолисовы силы оказывают отклоняющее действие на воздушные течения в атмосфере и водные течения в океанах. Эти силы вызывают поворот плоскости колебания маятника (опыт Фуко).

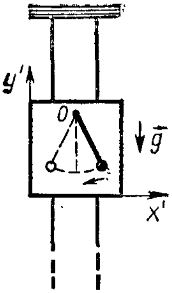


Рис. 8.18

Вопросы для самопроверки

1. Какие силы инерции действуют во вращающейся системе отсчета? Какую силу называют центробежной? Как вычисляется эта сила? Каково ее направление? Зависит ли сила Кориолиса от скорости движения тела во вращающейся системе?

2. Что называют полем центробежных сил? Почему это поле неотличимо от поля гравитации? Когда наложение поля центробежных сил на поле гравитации приводит к состоянию невесомости? Чем характерно это состояние?

3. Какие силы инерции называют кориолисовыми? Приведите примеры, показывающие действие кориолисовых сил. Как вычисляется кориолисова сила? Поясните причиину появления сил Кориолиса. Почему кориолисова сила отсутствует, если тело движется параллельно оси вращения системы? Поясните появление силы Кориолиса для тела, движущегося во вращающейся системе отсчета K' по окружности с центром, расположенным на оси вращения системы отсчета.

4. Какие силы инерции проявляются на Земле? Что такое вес тела? Какова природа этой силы? Напишите формулу связи веса тела с силами инерции для системы, движущейся иа Земле поступательно с некоторым ускорением.

5. Поясните, по каким причинам ускорение свободного падеиия зависит от широты места. Какова эта зависимость?

6. Так как сила Кориолиса перпендикулярна к скорости $\vec{v}'$, оиа никакой работы не совершает. Объясните, почему же в таком случае правые берега рек размываются, а правый рельс железной дороги изиашивается больше, чем левый? За счет какой энергии происходит работа по разрушению берегов и рельсов?

7. В чем проявляется состояние невесомости и когда оно возникает? Почему в состоянии невесомости свободные (в движущейся системе) тела не деформируются? Будет ли состояние невесомости внутри самолета, совершающего свободный полет с выключенными двигателями?

8. В космическом корабле, движущемся с выключенными двигателями, имеется состояние невесомости. Почему оно исчезает, когда корабль входит в атмосферу Земли? Нарисуйте примерный ход графиков изменения со временем скорости и ускорения космического корабля, совершающего посадку, а также ход графика изменеиия силы инерции и иапряженности результирующего поля сил тяготения и сил инерции внутри корабля. На каком участке траектории наблюдается перегрузка?

9. Для демонстрации состояния невесомости в свободно падающей системе используют вертикально расположенный деревянный щит, могущий свободно падать вдоль направляющих проводов, натянутых между потолком и полом комнаты. На щите подвешивают маятник длиной l (рис. 8.18). Когда щит неподвижеи, маятиик колеблется около отвесной линии. В тот момент, когда маятник достигает своего наибольшего отклонения, щит отпускают, и он начинает свободно падать. С этого момента в системе отсчета «щит» наступает невесомость. При этом действующая на маятник сила тяжести исчезает, исчезает и сила упругости растяжения иити маятника (нить несколько укоротится). Маятник во время падения щита ие колеблется. Это и означает, что в падающей системе установилась невесомость.

Но что происходит, если экспериментатор отпустит щит в тот момент, когда колеблющийся маятник находился в нижнем положении? Как будет вести себя маятник и как в этом поведении можио усмотреть, что в системе «щит» установилась невесомость?

Раздел IX
МЕХАНИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Абсолютно твердым называют такое тело, взаимное расположение частиц которого остается неизменным. Понятно, что такое тело не должно деформироваться. В дальнейшем мы для краткости будем называть его просто твердым телом. Понятие абсолютно твердого тела представляет собой некоторую идеализацию, которая тем ближе подходит к реальному твердому телу, чем меньше последнее способно деформироваться.

Твердые тела удобно рассматривать как систему материальных точек. Это дает возможность применить к нему результаты, полученные для произвольной системы материальных точек.

Однако, благодаря неизменяемости расстояния между частицами, твердое тело обладает особыми свойствами, вследствие чего механику твердого тела выделяют в самостоятельный раздел.

Механика твердого тела, как и механика материальной точки, подразделяется на кинематику, динамику и статику.

Занятие 20
КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Можно показать, что любое движение твердого тела может быть сведено к совокупности двух простейших движений: поступательного и вращательного, к рассмотрению которых мы и приступим.

1. ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Поступательным называют такое движение, при котором тело перемещается параллельно самому себе. При таком движении любая прямая (именно любая), мысленно проведенная в теле, будет перемещаться параллельно самой себе. Поступательное движение может быть прямолинейным и криволинейным, равномерным и неравномерным. Например, движение железнодорожного вагона на прямолинейном участке пути будет прямолинейным поступательным движением; оно может быть равномерным, ускоренным и т. д.

Движение кабины известного аттракциона «колесо обозрения» («чертово колесо») является поступательным движением по окружности.

Криволинейным поступательным будет движение лыжника-спортсмена во время прыжка с трамплина. Мастерство прыгуна состоит именно в том, чтобы как можно дольше сохранять во время полета поступательный характер движения своего тела.

При поступательном движении все точки тела имеют одинаковую скорость и одинаковое ускорение.

Для кинематического описания поступательного движения тела достаточно описать движение какой-либо точки. Обычно описывают движение центра масс тела.

2. ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Вращательным называют такое движение, при котором все точки твердого тела движутся по окружностям, центры которых расположены на одной прямой, называемой осью вращения. Конечно, предполагается, что вращение рассматривается в некоторой определенной системе отсчета. Если в этой системе отсчета ось вращения неподвижна, то говорят, что тело вращается около неподвижной оси. Очевидно, все точки, находящиеся на оси вращения, будут в данной системе неподвижны. Если ось вращения в выбранной системе сама движется, то говорят, что тело вращается около движущейся оси. Например, вращение цилиндра, катящегося по плоскости (рис. 9.1), можно рассматривать относительно покоящейся системы отсчета K, связанной с плоскостью качения, или относительно поступательно движущейся системы K', жестко связанной с осью цилиндра. В системе отсчета K вращение тела происходит относительно оси цилиндра, которая сама перемещается в пространстве. В системе же K' ось вращения (ось цилиндра) неподвижна.

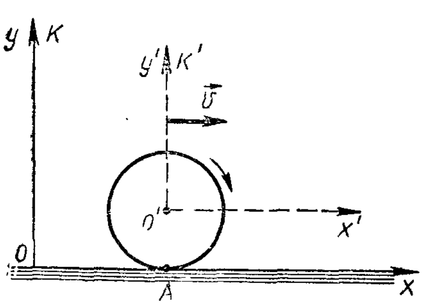


Рис. 9.1

Для сложных движений вводится понятие мгновенной оси вращения. Мгновенная ось представляет собой совокупность точек тела[1], имеющих в данный момент (а не вообще!) скорость, равную нулю, относительно основной (неподвижной)

[1] Иногда мгновенная ось вращения может находиться вне тела.

системы отсчета K. Положение мгновенной оси вращения в системе K с течением времени изменяется: но в каждый отдельный момент ось неподвижна. Это возможно, если положение оси вращения меняется относительно самого тела. В примере с цилиндром (рис. 9.1) мгновенной осью является совокупность точек, в которых цилиндр касается плоскости (на рис. 9.1 это прямая, проходящая через точку A перпендикулярно чертежу). Движение цилиндра в данный момент времени есть простое вращение его около мгновенной оси. Очевидно, что в другой момент времени в соприкосновение с плоскостью придут другие точки цилиндра, а это значит, что мгновенная ось будет проходить через другие точки движущегося цилиндра. В дальнейшем ось вращения пройдет через новые точки цилиндра и т. д.

При неподвижной оси вращения все точки твердого тела движутся по окружностям, расположенным в плоскостях, перпендикулярных к оси вращения. Известно, что движение точки по окружности может быть описано как линейными характеристиками (дуговой координатой s, линейной скоростью $\vec{v}$, линейным ускорением $\vec{a}$), так и угловыми (углом поворота φ, угловой скоростью $\vec{\omega}$ и угловым ускорением $\vec{\beta}$).

Так как линейные кинематические характеристики движения точек зависят от их расстояния до оси вращения, то они не могут служить характеристиками вращательного движения тела как целого. С другой стороны, угловые характеристики (φ, $\vec{\omega}$, $\vec{\beta}$) для всех точек твердого тела должны быть одинаковы, иначе точки сместились бы по отношению друг к другу, что для абсолютно твердого тела невозможно. Таким образом, угол поворота φ, угловая скорость $\vec{\omega}$ и угловое ускорение β, взятые для какой-либо одной точки, будут в то же время характеризовать вращение тела как целого.

3. СЛОЖЕНИЕ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Твердое тело может участвовать сразу в нескольких движениях. Мы ограничимся рассмотрением двух частных случаев.

Сложение поступательного и вращательного движений. Пусть твердое тело в системе отсчета K' вращается около неподвижной оси с угловой скоростью ω', а сама система K' движется поступательно относительно покоящейся системы отсчета K со скоростью $\vec{v}_0$. Найдем характер результирующего движения тела, считая, что ось вращения перпендикулярна поступательной скорости.

Примером такого движения может служить катящийся по плоскости цилиндр (рис. 9.2). В этом случае все точки цилиндра будут двигаться в вертикальных плоскостях, параллельных

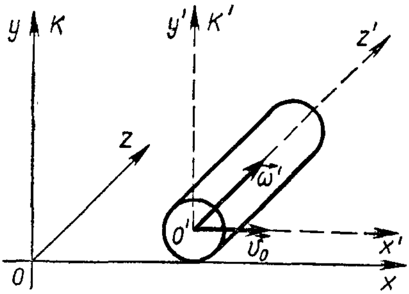


Рис. 9.2

координатной плоскости x, y. Движение твердого тела, при котором все его точки движутся параллельно какой-либо неподвижной плоскости, называют плоскопараллельными. Итак, рассматриваемое движение есть плоскопараллельное.

Если цилиндр радиуса R движется без скольжения, то за один оборот цилиндра его ось переместится на расстояние $l = 2\pi R$. За малый промежуток времени Δt он переместится на расстояние

$$\Delta l = \omega' \cdot \Delta t\, R.$$

Поэтому скорость поступательного движения выразится так:

$$v_0 = \frac{\Delta l}{\Delta t} = \omega' R = v_{\text{цм}}. \qquad (9.1)$$

Отсюда видно, что она связана с угловой скоростью вращения ω' в системе отсчета K'. Если движение цилиндра происходит со скольжением, то никакой связи между v_0 и ω' нет, эти величины могут принимать любые значения, не зависящие друг от друга.

В системе отсчета K' точки цилиндра имеют относительные скорости $v' = \omega' R$, направленные по касательным к их траектории (окружности радиуса R на рис. 9.3, *а*). В системе отсчета K скорость $v_{\text{общ}}$ каждой точки равна сумме двух скоростей:

$$\vec{v}_{\text{общ}} = \vec{v}\,' + \vec{v}_0.$$

Для всех точек касания цилиндра с плоскостью мы получим $\vec{v}_{\text{общ}} = 0$ (рис. 9.3, *б*). Таким образом, линия касания цилиндра

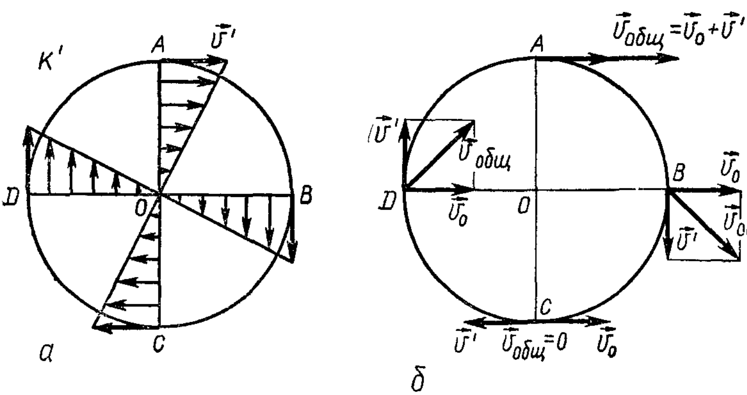


Рис. 9.3

с плоскостью является мгновенной осью вращения. Следовательно, результирующее движение представляет собой вращение около мгновенной оси. С какой угловой скоростью происходит это вращение? Рассмотрим точку, находящуюся на оси цилиндра (рис. 9.4). Абсолютная скорость этой точки $\vec{v}_{общ} = \vec{v}_0$. В системе отсчета K эта точка совершает вращение около мгновенной оси. Поэтому ее скорость $v_0 = \omega_{мгн} R$ (где R — расстояние точки от мгновенной оси вращения). Сравнивая это соотношение с (9.1), найдем: $\omega_{мгн} = \omega'$. Но если одна точка твердого тела совершает круговое движение около мгновенной оси с угловой скоростью ω', то и все другие точки должны двигаться по окружностям около этой оси с той же скоростью; иначе взаимное расстояние между точками изменялось бы.

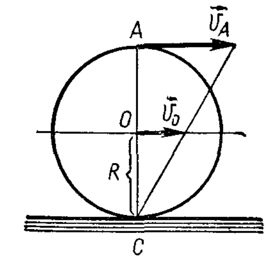


Рис. 9.4

Сложение двух вращательных движений. Рассмотрим предварительно такой опыт: по поверхности неподвижного конуса катится без скольжения другой (меньший) конус так, как показано на рисунке 9.5. При качении малый конус будет вращаться относительно оси, совпадающей с его геометрической осью OO', с которой связана система отсчета K'; одновременно весь конус поворачивается относительно оси симметрии неподвижного конуса (с этой осью связана система отсчета K). Таким образом, при качении малый конус совершает два вращения: около оси OO' (относительное движение) и около оси OO вместе с системой отсчета K' (переносное движение). Так как качение происходит без скольжения, то линия касания конусов является мгновенной осью вращения малого конуса. Таким образом, результирующее движение малого конуса представляет собой последовательность бесконечно малых вращений вокруг мгновенных осей, расположенных на боковой поверхности неподвиж-

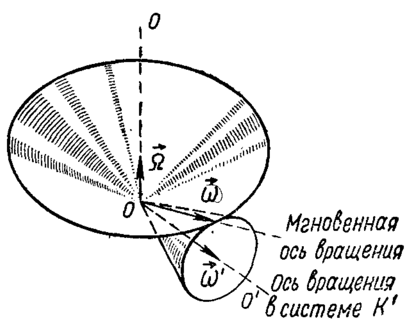


Рис. 9.5

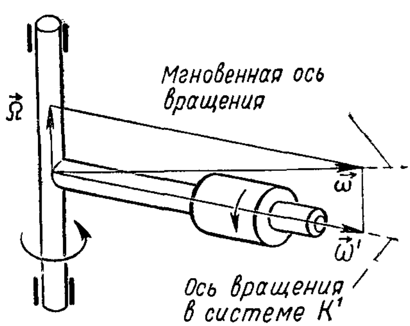


Рис. 9.6

ного конуса. Угловая скорость результирующего вращения конуса как целого связана с угловыми скоростями составляющих вращений векторным соотношением

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}' + \vec{\Omega}.$$

Сложение двух вращательных движений поясним на следующем примере (рис. 9.6). Пусть твердый цилиндр вращается вокруг собственной оси с угловой скоростью $\vec{\omega}'$ и в то же время вращается около вертикальной оси с угловой скоростью Ω (в этом случае, говорят, что тело прецессирует около вертикальной оси; $\vec{\Omega}$ — угловая скорость прецессии). Результирующее движение цилиндра есть последовательность бесконечно малых вращений около мгновенных осей с угловой скоростью $\vec{\omega} = \vec{\omega}' + \vec{\Omega}$.

Мгновенная ось может и не проходить через цилиндр. Но если она проходит через цилиндр, то, во всяком случае, в разные моменты времени через разные его точки. В пространстве мгновенная ось описывает поверхность конуса (в нашем примере — почти развернутого конуса).

Итак, если тело совершает вращения вокруг двух пересекающихся осей, то результирующее движение есть вращение около мгновенной оси с угловой скоростью, равной геометрической сумме угловых скоростей двух вращений. Этот результат легко обобщается на случай большего числа вращений: если твердое тело одновременно участвует в n вращениях с мгновенными скоростями $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \ldots, \vec{\omega}_n$ вокруг осей, пересекающихся в одной точке O, то результирующее движение будет также вращением с угловой скоростью $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \ldots + \vec{\omega}_n$ около мгновенной оси, проходящей через точку O. И обратно, мгновенное вращение твердого тела всегда можно представить как сумму мгновенных вращений вокруг нескольких пересекающихся осей, в частности около трех координатных осей (x, y, z):

$$\vec{\omega} = \vec{i}\omega_x + \vec{j}\omega_y + \vec{k}\omega_z = \vec{\omega}_x + \vec{\omega}_y + \vec{\omega}_z,$$

где $\vec{\omega}_x, \vec{\omega}_y, \vec{\omega}_z$ — мгновенные угловые скорости вращений тела около осей, совпадающих в данный момент соответственно с осями x, y, z, а ω_x, ω_y, ω_z — проекции вектора $\vec{\omega}$ на координатные оси.

Степени свободы. Итак, любое движение твердого тела можно представить как совокупность поступательного и вращательного движений. Поступательное движение можно представить как сумму независимых поступательных движений по трем координатным осям, а вращение тела — как сумму вращательных движений около этих осей. Таким образом, свободное движение тела состоит из независимых трех поступательных и трех вращательных движений. Всего, таким образом, шесть независимых движений.

Принято число независимых движений, из которых составляется движение твердого тела, называть числом степеней свободы. Свободное тело имеет 6 степеней свободы. Тело, вращающееся около неподвижной (закрепленной) оси, имеет одну степень свободы. Катящийся по рельсам цилиндр, например, имеет две степени свободы (одну — поступательного и одну — вращательного движений). Скользящий по поверхности стола брусок имеет три степени свободы: две — поступательного и одну — вращательного движений (вращение может происходить относительно оси, перпендикулярной плоскости скольжения).

Вопросы для самопроверки

1. Из каких простых движений слагается движение твердого тела? Какое движение называют поступательным? Может ли поступательное движение быть криволинейным? Приведите примеры.

2. Какие физические величины характеризуют кинематику поступательного движения твердого тела? Чем они отличаются от аналогичных величин в кинематике точки?

3. Что называют вращательным движением? Какие различают оси вращения? Что такое мгновенная ось вращения? Остается ли мгновенная ось неподвижной в теле? Приведите примеры мгновенных осей.

4. Какие кинематические величины характеризуют вращение твердого тела относительно закрепленной оси? Дайте определение угловой скорости и углового ускорения. Как направлены эти векторы для тела с закрепленной осью? Как они связаны с линейными величинами ($\vec{v}$ и $\vec{a}$)? Как направлены векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{\beta}$ для тела с движущейся осью вращения?

5. Какое движение получается в результате сложения поступательного и вращательного движений цилиндра, катящегося по горизонтальной поверхности без скольжения? Покажите, что в этом случае угловая скорость вращения цилиндра около мгновенной оси равна угловой скорости вращения около оси, совпадающей с геометрической осью цилиндра. Какое движение тела называют плоскопараллельным?

6. По какому правилу складываются два вращательных движения около двух (пересекающихся) осей? Могут ли быть оси закрепленными? Приведите примеры сложения вращательных движений.

7. Что называют числом степеней свободы твердого тела? Сколько степеней свободы имеет материальная точка? Сколько степеней свободы имеют две (три) материальные точки, жестко скрепленные между собой? Сколько степеней свободы имеет брусок, скользящий по поверхности?

Занятие 21

ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА, ИМЕЮЩЕГО НЕПОДВИЖНУЮ ОСЬ. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ОКОЛО НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

1. МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ ВРАЩЕНИЯ

Если тело имеет неподвижную ось, т. е. закрепленную в неподвижных подшипниках, то при любой системе действующих сил тело может вращаться лишь около этой оси. Но не всякая

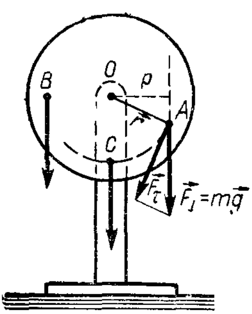


Рис. 9.7

сила может вызвать вращение. Например, сила, параллельная оси ($\vec{F}_{\parallel}$) не вызовет вращения; она лишь стремится сдвинуть тело вдоль оси и в конечном счете уравновешивается реакцией подшипников. Но вот сила, находящаяся в плоскости, препендикулярной к оси, может при некоторых условиях вызвать вращение. Выясним эти условия на опыте с диском, который может вращаться около горизонтальной оси z (точка O на рис. 9.7). В точке A диска прикрепим груз массой m. Сила $\vec{F}_{\perp}=m\vec{g}$ лежит в плоскости диска. Опыт покажет, что диск под действием силы $\vec{F}_{\perp}$ начнет поворачиваться по часовой стрелке. Если груз поместить на другую сторону диска (в точке B), то вращение будет происходить в противоположную сторону. Когда же сила $\vec{F}_{\perp}$ будет приложена в точке C, лежащей на вертикали, которая проходит через ось, вращение не возникнет. Если ввести понятие *момента силы* $\vec{M}_z$ относительно оси вращения в виде векторного произведения

$$\vec{M}_z=[\vec{r}\vec{F}_{\perp}], \tag{9.2}$$

где $\vec{r}$ — вектор, соединяющий в плоскости действия силы ось с точкой приложения силы $\vec{F}_{\perp}$, то станет понятным, что вращение вызывают только такие силы $\vec{F}_{\perp}$, момент которых относительно оси вращения z не равен нулю.

Вектор $\vec{M}_z$ считается направленным по оси вращения в сторону, определяемую правилом векторного произведения или правилом правого винта: если вращать головку винта, ориентированного вдоль оси z, в направлении действия силы, то поступательное движение его укажет направление момента $\vec{M}_z$.

В случае, когда на тело действуют несколько сил, результирующий момент равен векторной сумме моментов отдельных сил. Но так как все эти векторы направлены по одной оси z, то векторная сумма может быть заменена алгебраической. При этом надо считать положительными те моменты, которые вызывают вращение тела по часовой стрелке, и отрицательными, если они вызывают вращение против часовой стрелки. Модуль момента силы согласно (9.2) равен:

$$M_z=rF_{\perp}\sin\alpha=pF_{\perp},$$

где величину $p=r\sin\alpha$ называют *плечом силы* $\vec{F}_{\perp}$ (это кратчайшее расстояние между осью вращения и направлением действия силы $\vec{F}_\perp$). Для вектора момента силы можно записать следующую формулу:

$$\vec{M}_z = [\vec{p}\vec{F}_\perp]. \qquad (9.2')$$

С другой стороны, (9.2) можно записать и так:

$$M_z = rF_\perp \sin\alpha = rF_\tau, \qquad (9.3)$$

где $F_\tau = F_\perp \sin\alpha$ проекция силы $\vec{F}_\perp$ в направлении, перпендикулярном вектору $\vec{r}$ (эта составляющая направлена по касательной к окружности, по которой движется точка приложения силы $\vec{F}_\tau$). Величину $\vec{r}$ называют в этом случае плечом силы $\vec{F}_\tau$. Из (9.3) следует еще одно векторное выражение для момента силы $\vec{M}_z$:

$$\vec{M}_z = [\vec{r}\vec{F}_\tau]. \qquad (9.3')$$

Из изложенного видно, что вектор момента силы $\vec{F}_\perp$ можно представить тремя способами:

$$\vec{M}_z = [\vec{r}\vec{F}_\perp] = [\vec{p}\vec{F}_\perp] = [\vec{r}\vec{F}_\tau]. \qquad (9.4)$$

Если на тело действует сила, ориентированная произвольно, то ее следует разложить на две составляющие: составляющую, параллельную оси (она момента не создает), и составляющую $\vec{F}_\perp$, лежащую в плоскости, перпендикулярной оси z. (Эта составляющая создает момент $\vec{M}_z = [\vec{p}\vec{F}_\perp]$.) Можно, конечно, разложить силу и на три составляющие: по оси z, по радиусу $\vec{r}$ (они не создают момента) и составляющую $\vec{F}_\tau$, перпендикулярную $\vec{r}$ и лежащую в плоскости, перпендикулярной оси z; последняя создает момент $\vec{M}_z = [\vec{r}\vec{F}_\tau]$.

З а м е ч а н и е. Произведение произвольно ориентированной силы $\vec{F}$ на вектор $\vec{r}$, соединяющий точку приложения силы с осью вращения (любой ее точки O), дает вектор $\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}]$, перпендикулярный плоскости, в которой лежат $\vec{r}$ и $\vec{F}$. Этот вектор называют моментом силы относительно центра O. Он вообще не совпадает с осью вращения. Составляющая этого вектора на ось вращения z и есть момент силы относительно оси: $\vec{M}_z = [\vec{r}\vec{F}]_z$. Можно показать, что $[\vec{r}\vec{F}]_z = [\vec{r}\vec{F}_\tau] = [\vec{p}\vec{F}_\perp]$.

Пара сил. Две антипараллельные силы одинаковой величины, приложенные к разным точкам, но направленные не по одной прямой, называют *парой сил*. Пара не имеет равнодействующей и представляет собой самостоятельный динамический элемент.

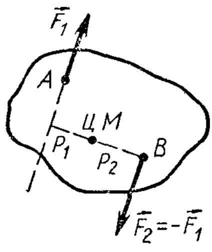


Рис. 9.8

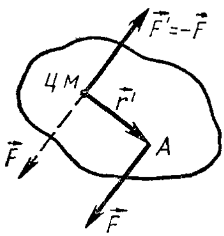


Рис. 9.9

Пример. В одной плоскости некоторого свободного тела (рис. 9.8) в точках A и B приложены силы, составляющие пару. Поскольку сумма сил равна нулю, центр масс тела будет неподвижен (или будет двигаться равномерно и прямолинейно). Значит пара сил может вызвать движение, при котором центр масс неподвижен. Это — вращение вокруг оси, проходящей через центр масс и перпендикулярной плоскости пары. Сила $\vec{F}_1$ создает момент $M_1 = p_1 F_1$, направленный за чертеж. Сила $\vec{F}_2$ создает момент $M_2 = p_2 F_2$, направленный в ту же сторону. Общий момент — момент пары сил равен:

$$M = M_1 + M_2 = p_1 F_1 + p_2 F_2 = \\ = F_1 (p_1 + p_2) = F_1 l$$

(здесь учтено, что обе силы одинаковы по модулю: $F_1 = F_2$).

Расстояние l между направлением действия сил называют плечом пары. Таким образом, момент пары равен произведению модуля одной из сил на плечо пары. Момент пары не зависит от точек приложения пары (при данном l). Эти точки могут, например, лежать по одну сторону от центра масс.

Действие силы, приложенной к свободному телу. Всякую силу, приложенную к твердому телу в произвольной точке A, можно заменить совокупным действием такой же силы, приложенной к центру масс, и пары, момент которой равен моменту исходной силы относительно центра масс. Докажем это.

Пусть на тело действует сила $\vec{F}$ в точке A (рис. 9.9). Если к центру масс параллельно силе $\vec{F}$ приложить две равные и противоположные силы $\vec{F}$ и $\vec{F}'$, то этим мы ничего не изменим. Но после этого можно считать, что к центру масс приложена сила $\vec{F}$ и на тело, кроме того, действует пара сил $\vec{F}$ и $\vec{F}'$, приложенная в точках A и ЦМ. Момент этой пары равен

$$\vec{M}' = [\vec{r}'\vec{F}].$$

А это как раз и есть момент исходной силы $\vec{F}$ относительно центра масс.

2. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ОКОЛО НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

Тело произвольной формы с закрепленной в подшипниках осью $O'O'$ (ось z на рис. 9.10) мысленно разобьем на малые элементы (точки) массой Δm_i. Все эти элементы при вращении тела около неподвижной оси z будут двигаться по окружностям, расположенным в плоскостях, перпендикулярных к оси. Обозначим радиусы этих окружностей через r_i. Предположим, что на каждый элемент тела действует внешняя сила $\vec{F}_i$ и сила внутреннего происхождения[1] $\vec{f}_i$. Так как движение элементов тела происходит по плоским окружностям с тангенциальным ускорением $a_{\tau i}$, то значение имеют не сами силы $\vec{F}_i$ и $\vec{f}_i$, а только их составляющие $\vec{F}_{\tau i}$, $\vec{f}_{\tau i}$, направленные по касательным к этим окружностям.

Запишем для элемента i-го номера второй закон Ньютона (в проекции на касательную к окружности):

$$F_{\tau i} + f_{\tau i} = \Delta m_i a_{\tau i}. \qquad (9.5)$$

Умножая обе части этого равенства на радиус r_i окружности, описываемой элементом массы, и вводя вместо тангенциального угловое ускорение β, одинаковое для всех элементов ($a_{\tau i} = \beta r_i$), получим:

$$r_i F_{\tau i} + r_i f_{\tau i} = \beta \cdot \Delta m_i r_i^2.$$

Но $r_i F_{\tau i} = M_{zi}$ есть вращательный момент внешней силы, а $r_i f_{\tau i} = M_{zi}^{\text{внут}}$ — момент внутренней силы.

Суммируя вращающие моменты, приложенные ко всем элементарным массам, составляющим тело, и учитывая, что сумма моментов внутренних сил равна нулю, получим:

$$M_z = \beta \sum \Delta m_i r_i^2, \qquad (9.6)$$

где $M_z = \sum M_{zi}$ — суммарный момент внешних сил, приложенных к телу.

Произведение массы материальной точки на квадрат ее расстояния от оси вращения

$$\Delta m_i r_i^2$$

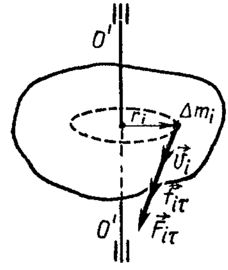


Рис. 9.10

[1] Фактически внешние силы могут действовать не на все элементы тела, но тогда для некоторых элементов $\vec{F}_i = 0$ и движение этих элементов вызывается действием только внутренних сил $\vec{f}_i$ (упругого происхождения). Внутренние силы действуют на каждый элемент тела.

называют *моментом инерции материальной точки относительно этой оси* и обозначают через I_{zi}:

$$\mathcal{I}_{zi} = \Delta m_i r_i^2.$$

Для данного тела и заданной оси вращения сумма

$$\sum \Delta m_i r_i^2 = \sum \mathcal{I}_{zi} = \mathcal{I}_z \tag{9.7}$$

есть величина постоянная; ее называют *моментом инерции тела относительно заданной оси z.*

Таким образом, *моментом инерции тела относительно некоторой оси называют сумму моментов инерции (относительно той же оси) всех материальных точек, составляющих тело.* Очевидно, в системе СИ единицей момента инерции является 1 кг·м^2.

Используя понятие момента инерции, можно выражению (9.6) придать следующий вид:

$$M_z = \beta \mathcal{I}_z. \tag{9.8}$$

Его можно записать в векторной форме. Поскольку $\mathcal{I}_z$ — величина положительная, то векторы $\vec{M}_z$ и $\vec{\beta}$ будут коллинеарными:

$$\vec{M}_z = \vec{\beta} \mathcal{I}_z. \tag{9.9}$$

Соотношение (9.8) или (9.9) называют основным уравнением динамики вращательного движения твердого тела около неподвижной оси.

Соотношение (9.9) ввиду его сходства с уравнением $\vec{F} = m\vec{a}$ называют также вторым законом Ньютона для вращательного движения. Этот закон формулируется так: **произведение момента инерции тела на его угловое ускорение относительно некоторой оси равно результирующему моменту относительно той же оси всех внешних сил, приложенных к телу.**

Уравнение (9.9) пердполагает, что $\mathcal{I}_z$ со временем не изменяется. Поэтому его можно записать так:

$$\vec{M}_z = \mathcal{I}_z \frac{d\vec{\omega}_z}{dt} = \frac{d}{dt} (\mathcal{I}_z \vec{\omega}_z). \tag{9.10}$$

Произведение

$$\mathcal{I}_z \vec{\omega}_z = \vec{L}_z \tag{9.10'}$$

называют *моментом импульса тела относительно оси z.* Таким образом, **момент импульса тела относительно данной оси равен**

произведению момента инерции тела на угловую скорость вращения относительно той же оси[1].

Учитывая (9.10′) можно основное уравнение (9.10) динамики вращательного движения переписать так:

$$\vec{M}_z = \frac{d\vec{L}_z}{dt}. \qquad (9.11)$$

Скорость изменения момента импульса тела относительно некоторой оси равна результирующему моменту относительно той же оси всех внешних сил, приложенных к телу.

Изменение момента импульса тела $\vec{L}_z$ может происходить не только за счет изменения угловой скорости ω_z, но и за счет изменения момента инерции тела $\mathcal{J}_z$:

$$\Delta\vec{L}_z = \mathcal{J}_2\vec{\omega}_2 - \mathcal{J}_1\vec{\omega}_1.$$

Поэтому в самой общей форме основной закон динамики вращательного движения записывается в виде уравнения (9.11), в котором, однако, момент инерции тела не считается неизменным.

3. АНАЛОГИЯ МЕЖДУ УРАВНЕНИЯМИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО И ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЙ

Сопоставим формулы:

$$m\vec{a}_z = \vec{F}_z \quad \text{и} \quad \mathcal{J}_z\vec{\beta}_z = \vec{M}_z,$$
$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}_z) = \vec{F}_z \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt}(\mathcal{J}_z\vec{\omega}_z) = \vec{M}_z.$$

Их формальное сходство очевидно. Поэтому от формул, описывающих поступательное движение по оси z (левый столбец), можно перейти к формулам вращательного движения (правый столбец) и обратно простой заменой величин:

$$\begin{aligned} m &\leftrightarrow \mathcal{J}_z, \\ \vec{a}_z &\leftrightarrow \vec{\beta}_z, \\ \vec{v}_z &\leftrightarrow \vec{\omega}_z, \\ \vec{F}_z &\leftrightarrow \vec{M}_z, \\ m\vec{v}_z &\leftrightarrow \mathcal{J}_z\vec{\omega}_z. \end{aligned} \qquad (9.12)$$

---

[1] Можно показать, что момент импульса $\vec{L}_z$ относительно оси есть составляющая на ось z полного момента импульса тела (т. е. момента относительно точки, лежащей на оси вращения). Если момент импульса $\vec{L}_i$ материальной точки относительно центра O равен $\vec{L}_i = [\vec{r}_i\vec{p}_i]$ (где $\vec{p}_i = m_i\vec{v}_i$ — импульс точки), а $\vec{r}_i$ — вектор, соединяющий центр O с точкой, то момент импульса тела относительно точки O будет $\vec{L} = \Sigma\vec{L}_i$, а проекция этого вектора на ось z равна: $\vec{L}_z = |\Sigma\vec{L}_i|z = J_z\vec{\omega}_z$.

Поступательное движение	Вращательное движение около неподвижной оси
1. Масса m	1. Момент инерции J
2. Сила $\vec{F}$	2. Момент силы $\vec{M}$
3. Импульс тела $\vec{p} = m\vec{v}$	3. Момент импульса $\vec{L} = J\vec{\omega}$
4. Второй закон Ньютона $$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F},$$ $$m\vec{a} = \vec{F}$$	4. Второй закон Ньютона для вращательного движения $$\frac{d}{dt}(\mathcal{J}\vec{\omega}) = \vec{M},$$ $$\mathcal{J}\vec{\beta} = \vec{M}$$
5. Кинетическая энергия $$T = \frac{mv^2}{2}$$	5. Кинетическая энергия вращения $$T = \frac{\mathcal{J}\omega^2}{2}$$
6. Работа силы в общем случае $$A = \int_0^l \vec{F}\, d\vec{l}$$	6. Работа момента силы в общем случае $$A = \int_0^\varphi \vec{M}\, d\vec{\varphi}$$
7. Работа постоянной силы, параллельной скорости $$A = Fl$$	7. Работа постоянного момента силы (при неподвижной оси момент силы параллелен угловой скорости) $$A = M\varphi$$
8. Мощность $$N = Fv$$	8. Мощность $$N = M\omega$$
9. Работа полной силы равна $$A = \int_1^2 \vec{F}_{\text{полн}}\, d\vec{l} = \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{m_1 v_1^2}{2} = \Delta T$$ изменению кииетической энергии тела	9. Работа полного момента равна $$A = \int_1^2 \vec{M}_{\text{полн}}\, d\vec{\varphi} = \frac{\mathcal{J}_2\omega_2^2}{2} - \frac{\mathcal{J}_1\omega_1^2}{2} = \Delta T_{\text{вращ}}$$ изменению кииетической энергии вращения
10. Работа консервативной силы равна изменению потенциальной энергии:	10. Работа момента консервативной силы равна изменению потенциальной энергии:
а) в поле тяготения $$A = \int_{h_1}^{h_2} \vec{F}_{\text{тяг}}\, d\vec{l} = -(mgh_2 - mgh_1) = -\Delta U;$$	а) в поле тяготения $$A = \int_{h_1}^{h_2} \vec{F}_{\text{тяг}}\, d\vec{l} = -(mgh_{2,\,\text{цм}} - mgh_{1,\,\text{цм}}) = -\Delta U$$ ($h_{\text{цм}}$ — высота центра масс);

Поступательное движение	Вращательное движение около неподвижной оси
б) в поле сил упругости $F_{\text{упр}} = -kx$ (деформации растяжения или сжатия) $A = \int_{l_1}^{l_2} \vec{F}_{\text{упр}}\, d\vec{l} = -\left(\frac{kl_2^2}{2} - \frac{kl_1^2}{2}\right) = -\Delta U$	б) в поле сил упругости $M_{\text{упр}} = -D\varphi$ (деформации кручения) $A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \vec{M}_{\text{упр}}\, d\vec{\varphi} = \left(\frac{D\varphi_2^2}{2} - \frac{D\varphi_1^2}{2}\right) = -\Delta U$

Таким образом, при вращательном движении тела относительно неподвижной оси роль массы выполняет момент инерции тела относительно оси вращения, роль ускорения — угловое ускорение, роль силы — момент силы относительно оси вращения, роль импульса — момент импульса относительно оси вращения, роль скорости — угловая скорость, роль координаты x — угловая координата φ.

Но если сходны уравнения движения, то сходны и их интегралы. Так, при постоянной силе $\vec{F}_z$ законом движения тела по координате z (второй интеграл уравнения движения) является выражение

$$z = z_0 + v_{0z}t + \frac{a_z t^2}{2}, \tag{9.13}$$

а законом изменения скорости (первый интеграл) — выражение:

$$v_z = v_{0z} + a_z t. \tag{9.14}$$

Аналогичные интегралы имеет уравнение для вращательного движения. Однако их можно получить и из (9.13) и (9.14) формальной заменой линейных величин угловыми по схеме (9.12):

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_{0z}t + \frac{\beta_z t^2}{2},$$

$$\omega_z = \omega_{0z} + \beta_z t.$$

Формальной заменой величин можно получить формулы для кинетической энергии, работы, мощности и другие применительно к вращательному движению.

Таблицу кинематических величин, приведенную в разделе I, мы можем теперь дополнить таблицей 9.1 динамических величин.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется моментом импульса тела относительно оси? Покажите, что момент импульса относительно оси равен $\vec{L}_z = \omega_z \vec{J}_z$. Дайте определение момента инерции тела относительно оси.

2. Что называют моментом силы относительно оси? Покажите, что момент силы относительно оси z направлен по этой оси, а его модуль определяется формулой $M_z = pF_\perp$ или формулой $M_z = rF_\tau$. Что обозначают символы $F_\perp$, F_τ? Что является плечом силы $F_\perp$? плечом силы F_τ?

3. Чему равен момент силы, параллельной оси вращения? Покажите, что момент силы относительно оси z можно представить векторным произведением: $\vec{M}_z = [\vec{r}\vec{F}_\perp]$ или $M_z = [\vec{P}\vec{F}_\perp]$ (где $\vec{r}$ радиус-вектор, соединяющий в плоскости силы точку оси с точкой приложения силы). Почему, если на тело с неподвижной осью вращения действуют несколько моментов сил, векторное суммирование можно заменить алгебраическим? Покажите, что все силы реакции подшипников не создают моментов относительно оси вращения.

4. Выведите основной закон динамики вращательного движения твердого тела около неподвижной оси.

5. Сопоставляя $J\vec{\beta} = \vec{M}$ с законом Ньютона $m\vec{a} = \vec{F}$, укажите, в чем состоит аналогия и каковы ее следствия.

Занятие 22

МОМЕНТ ИНЕРЦИИ ТЕЛА И ЕГО ВЫЧИСЛЕНИЕ. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ

1. СВОЙСТВО МОМЕНТА ИНЕРЦИИ

1. Момент инерции тела относительно оси z определяется выражением (9.7)[1]:

$$\mathcal{J} = \sum \Delta m_i r_i^2. \qquad (9.15)$$

Эта сумма, а следовательно, и момент инерции существуют независимо от того, вращается тело около оси или нет. Однако проявляется момент инерции только тогда, когда на тело начинает действовать момент внешних сил относительно этой оси. Значение момента инерции сказывается на угловом ускорении тела. Чем больше момент инерции, тем меньше (при прочих равных условиях) угловое ускорение. Здесь наблюдается полная аналогия момента инерции с массой. Тело обладает массой независимо от того, движется оно или нет. Но проявляется масса тогда, когда на тело начинает действовать сила. Чем больше масса тела, тем меньше его ускорение (при неизменной силе).

2. Сумму в выражении (9.15) можно представить так:

$$\mathcal{J} = \sum_{1}^{N} \Delta m_i r_i^2 = \sum_{1}^{k} \Delta m_i r_i^2 + \sum_{k+1}^{N} \Delta m_i r_i^2 = \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2. \qquad (9.16)$$

---

[1] Здесь и далее индекс z у момента инерции опущен.

Отсюда следует, что момент инерции есть величина аддитивная. Это означает, что момент инерции тела равен сумме моментов инерции его частей.

Из (9.16) вытекает интересный способ вычисления момента инерции тел, имеющих вырезы. Например, момент инерции диска с круговым вырезом (рис. 9.11) относительно оси z будет равен разности между моментом инерции сплошного диска и моментом инерции удаленной (отсутствующей) части.

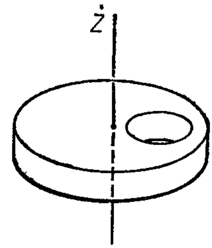


Рис. 9.11

3. Для сплошного тела формула $\mathcal{J}=\sum \Delta m_i r_i^2$ является приближенной, но тем более точной, чем на большее число элементов Δm_i разбивается тело. В пределе, когда тело разбивается на бесконечно большое число бесконечно малых элементов массой dm, сумма переходит в интеграл по элементам тела:

$$\mathcal{J}=\int r^2\, dm.$$

4. С перенесением оси момент инерции тела изменяется. Если ось переносится так, что расстояния r_i возрастают, то и момент инерции возрастает, и наоборот.

2. ТЕОРЕМА ШТЕЙНЕРА О ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ОСЯХ

Момент инерции тела $\mathcal{J}$ относительно произвольной оси равен моменту инерции $\mathcal{J}_0$ относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, сложенному с произведением массы тела m на квадрат расстояния a между осями:

$$\mathcal{J}=\mathcal{J}_0+ma^2. \qquad (9.17)$$

Одно из доказательств этой теоремы мы рассмотрим ниже.

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ НЕКОТОРЫХ ТЕЛ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ЦЕНТР МАСС

Момент инерции однородного обруча относительно оси, перпендикулярной к плоскости обруча и проходящей через его центр. Будем считать толщину обруча $\Delta r \ll R$ (рис. 9.12) и разобьем обруч на малые элементы Δm_i. Момент инерции относительно оси выразится так:

$$\mathcal{J}=\sum \Delta m_i r_i^2=\sum \Delta m_i R^2=mR^2. \qquad (9.18)$$

Он равен произведению массы обруча на квадрат радиуса. Такой же формулой будет определяться момент инерции тонкой трубы[1].

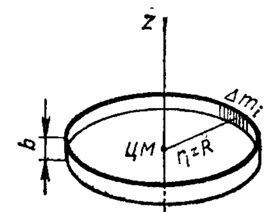


Рис. 9.12

[1] Трубу можно представить как систему сложенных друг с другом обручей.

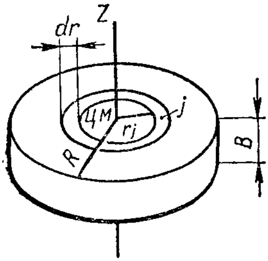


Рис. 9.13

Момент инерции однородного диска относительно оси, перпендикулярной к плоскости диска и проходящей через центр масс. В данном случае центр масс совпадает с центром диска. Разобьем диск на систему обручей. На рисунке 9.13 показан один обруч радиуса r_j и толщиной dr. Обозначим массу j-го обруча через Δm_j. Тогда момент инерции этого обруча

$$\Delta\mathcal{J}_j = \Delta m_j r_j^2,$$

а момент инерции диска —

$$\mathcal{J}_0 \cong \sum \Delta\mathcal{J}_j.$$

Для нахождения точного значения $\mathcal{J}_0$ нужно разбить диск на бесконечное число бесконечно тонких обручей, а сумму заменить интегралом. Обозначим момент инерции бесконечно тонкого обруча радиуса r через $d\mathcal{J}_0 = dmr^2$ (где dm — масса обруча). Выразим массу обруча через плотность материала ρ и размеры обруча:

$$dm = \rho b\, dr \cdot 2\pi r,$$

где $bdr \cdot 2\pi r$ — объем обруча. Тогда

$$d\mathcal{J}_0 = 2\pi\rho b r^3\, dr.$$

Отсюда находим момент инерции диска

$$\mathcal{J}_0 = \int_0^R 2\pi\rho b r^3\, dr = 2\pi\rho b \int_0^R r^3\, dr = 2\pi\rho b\,\frac{R^4}{4} = \pi\rho b\,\frac{R^4}{2}.$$

Но произведение $\rho(\pi R^2)b = m$ есть масса диска. Поэтому

$$\mathcal{J}_0 = \frac{mR^2}{2}. \qquad (9.19)$$

Таким образом, момент инерции диска относительно указанной оси равен половине произведения массы диска на квадрат его радиуса. Понятно, что формулой (9.19) определяется и момент инерции сплошного цилиндра относительно его собственной оси.

Момент инерции стержня относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через центр масс. Разобьем стержень на малые элементы Δm_i (рис. 9.14). Момент инерции относительно оси z равен:

$$\mathcal{J}_0 \approx 2\sum \Delta m_i r_i^2.$$

Здесь суммирование ведется по элементам одной половины (левой). Если сечение стержня ΔS, плотность материала ρ, то $\Delta m_i = \rho \cdot \Delta S \cdot \Delta r$.

Следовательно,

$$\mathcal{J}_0 \cong 2 \sum \rho \cdot \Delta S \cdot \Delta r \cdot r_i^2 = $$
$$= 2\rho \cdot \Delta S \sum r_i^2 \cdot \Delta r.$$

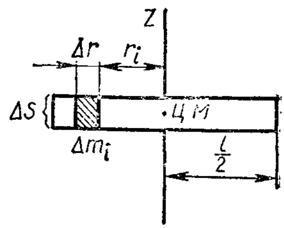


Рис. 9.14

В пределе, когда стержень разбиваем на бесконечно большое число бесконечно малых элементов, операция суммирования переходит в интегрирование:

$$\mathcal{J}_0 = 2\rho \cdot \Delta S \int_0^{l/2} r^2\,dr = 2\rho \cdot \Delta S \frac{r^3}{3}\Bigg|_0^{l/2} = \frac{\rho \cdot \Delta S\, l^3}{12}.$$

Введя массу стержня $m = \rho \cdot \Delta S l$, получаем:

$$\mathcal{J}_0 = \frac{ml^2}{12}. \tag{9.20}$$

Таким образом, момент инерции однородного стержня любого сечения относительно оси, перпендикулярной к стержню и проходящей через его центр (т. е. середину), равен $^1/_{12}$ произведения массы на квадрат длины.

Момент инерции шара относительно любой оси, проходящей через центр, равен $^2/_5$ от произведения массы на квадрат радиуса (даем без вывода):

$$\mathcal{J}_0 = \frac{2}{5} mR^2. \tag{9.21}$$

4. ТЕОРЕМА О МОМЕНТЕ ИНЕРЦИИ ПЛОСКИХ ТЕЛ

Момент инерции плоского тела относительно произвольной оси, перпендикулярной плоскости тела, равен сумме моментов инерции этого тела относительно двух взаимно перпендикулярных осей, лежащих в плоскости тела и пересекающихся с осью z.

Для доказательства теоремы рассмотрим тело произвольной формы, ложащее в плоскости чертежа (рис. 9.15). Пересечение оси с плоскостью тела отметим точкой O. Будем пользоваться декартовой прямоугольной системой координат, у которой плоскость xOy совпадает с плоскостью тела. Разобьем тело на малые элементы массой Δm_i. Момент инерции тела относительно оси z равен:

$$\mathcal{J}_z = \sum \Delta m_i r_i^2.$$

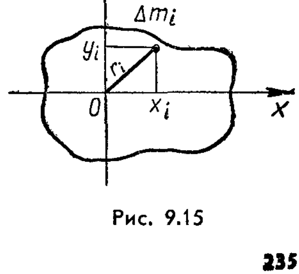


Рис. 9.15

Так как $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2$, то

$$\mathcal{J}_z = \sum \Delta m_i x_i^2 + \sum \Delta m_i y_i^2 = \mathcal{J}_x + \mathcal{J}_y,$$

что и доказывает теорему.

Для примера вычислим момент инерции диска относительно оси, совпадающей с диаметром.

Согласно доказанной теореме имеем:

$$\mathcal{J}_z = \mathcal{J}_x + \mathcal{J}_y.$$

Так как диск симметричен относительно диаметра, то $\mathcal{J}_x = \mathcal{J}_y = \mathcal{J}$, поэтому

$$\mathcal{J}_z = 2\mathcal{J}.$$

Следовательно,

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2}\mathcal{J}_z = \frac{1}{2}\left(\frac{mR^2}{2}\right) = \frac{mR^2}{4}. \qquad (9.22)$$

Таким образом, момент инерции диска относительно диаметра в два раза меньше, чем относительно оси, перпендикулярной к плоскости диска и проходящей через ее центр. Зная момент инерции относительно диаметра, нетрудно, используя теорему Штейнера, найти момент инерции относительно параллельной оси, отстоящей от первой на расстоянии a:

$$\mathcal{J}' = \frac{mR^2}{4} + ma^2.$$

Если $a = R$, то

$$\mathcal{J}' = \frac{mR^2}{4} + mR^2 = \frac{5}{4}mR^2.$$

5. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ТЕЛА

Разобьем тело на малые элементы массой Δm_i и обозначим скорость i-го элемента через v_i. Тогда кинетическая энергия i-го элемента будет равна $\frac{\Delta m_i v_i^2}{2}$. Кинетическая же энергия T всего тела слагается из энергий отдельных его элементов и поэтому запишется так:

$$T_{\text{вращ}} = \sum \frac{\Delta m_i v_i^2}{2}.$$

Пусть тело вращается около неподвижной оси z (см. рис. 9.10), тогда $v_i = \omega r_i$ (где r_i — расстояние элемента от оси вращения). Учитывая это, получим:

$$T_{\text{вращ}} = \sum \frac{\omega^2 \cdot \Delta m_i r_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2}\sum \Delta m_i r_i^2.$$

По определению величина $\sum \Delta m_i r_i^2 = \mathcal{J}_z$ есть момент инерции тела относительно оси вращения z. Поэтому

$$T_{\text{вращ}} = \frac{\mathcal{J}_z \omega^2}{2}. \tag{9.23}$$

Итак, **кинетическая энергия вращающегося тела равна половине произведения момента инерции тела относительно оси вращения на квадрат угловой скорости.**

6. ПОЛНАЯ КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ДВИЖУЩЕГОСЯ ТЕЛА

Если тело не закреплено и совершает какое-то сложное движение, то его кинетическая энергия выражается формулой

$$T = \sum \frac{m_i v_{i\,\text{абс}}^2}{2}, \tag{9.24}$$

где: m_i — масса i-ой частицы, $v_{i\,\text{абс}}$ — скорость этой частицы в неподвижной системе отсчета. Так как движение тела (в данный момент) можно представить как сумму поступательного движения со скоростью $\vec{v}_{\text{ЦМ}}$ и вращательного движения с угловой скоростью $\vec{\omega}$ около мгновенной оси вращения, проходящей через центр масс, то абсолютная скорость частиц будет складываться из переносной скорости, равной $\vec{v}_{\text{ЦМ}}$, и относительной $\vec{v}_i'$ (скорости частиц в системе K', движущейся поступательно вместе с центром масс).

В системе K' точки движутся по окружностям около мгновенной оси вращения. Поэтому $v_i' = \omega r_i'$. Следовательно,

$$\vec{v}_{i\,\text{абс}} = \vec{v}_{\text{ЦМ}} + \vec{v}_i'.$$

Подставляя это выражение в (9.24), находим:

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i v_{\text{ЦМ}}^2 + \frac{1}{2} \sum m_i v_i'^2 + \sum m_i \vec{v}_{\text{ЦМ}} \vec{v}_i'.$$

Учитывая, что $\Sigma m_i = m$ (масса тела), а $\vec{v}_i' = \dfrac{d\vec{r}_i'}{dt}$, получим:

$$T = \frac{1}{2} m v_{\text{ЦМ}}^2 + \frac{1}{2} \sum m_i v_i'^2 + \frac{d}{dt} \left(\sum m_i \vec{r}_i \right) \vec{v}_{\text{ЦМ}}. \tag{9.25}$$

Первое слагаемое выражает кинетическую энергию поступательного движения тела; второе — кинетическую энергию вращательного движения относительно оси, проходящей через центр масс; третье слагаемое равно нулю, так как для центра масс сумма $\sum m_i \vec{r}_i' = 0$.

Учитывая, что $v_i' = \omega r_i'$ (где r_i' — расстояние частицы от мгновенной оси вращения z), можно второе слагаемое записать так:

$$T_{\text{вращ}} = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum \frac{m_i \omega^2 r_i'^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_i r_i^2 = \frac{\omega^2 \mathcal{I}_z}{2},$$

где $\mathcal{I}_z$ — момент инерции тела относительно оси z. Итак, полная кинетическая энергия движущегося тела массой m слагается из кинетической энергии поступательного движения и кинетической энергии вращения около оси, проходящей через центр масс:

$$T = \frac{m v_{\text{ЦМ}}^2}{2} + \frac{\mathcal{I}_z \omega^2}{2}. \tag{9.26}$$

Если тело движется в поле тяготения (в поле консервативных сил), то справедлив закон сохранения энергии:

$$\frac{m v_{\text{ЦМ}}^2}{2} + \frac{\mathcal{I}_z \omega^2}{2} + mgh_{\text{ЦМ}} = \text{const},$$

или

$$T + U = \text{const}.$$

Для подсчета полной кинетической энергии нужно знать, во-первых, положение мгновенной оси (от нее зависит $\mathcal{I}$) и, во-вторых, угловую скорость вращения ω. Определение этих величин в общем случае затруднительно, так как положение оси в теле может меняться. Однако в частном случае плоского движения эта задача упрощается, ибо ось вращения сохраняет постоянное направление в теле.

7. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ШТЕЙНЕРА

Пусть тело вращается с угловой скоростью ω около оси z, не проходящей через центр масс. В этом случае кинетическая энергия равна:

$$T = T_{\text{вращ}} = \frac{\mathcal{I}_z \omega^2}{2}, \tag{9.27}$$

где $\mathcal{I}_z$ — момент инерции относительно заданной оси z.

Вращение тела с угловой скоростью ω около заданной оси z можно рассматривать как результат сложения двух движений: вращения с той же угловой скоростью ω около оси z_0, параллельной заданной и проходящей через центр масс, и поступательного движения со скоростью $\vec{v}_{\text{ЦМ}}$ в направлении, перпендикулярном к оси z.

Кинетическую энергию тела можно представить в виде суммы кинетической энергии поступательного движения (определяемой скоростью $v_{ЦМ}$) и кинетической энергии вращения около оси z_0:

$$T = \frac{mv_{ЦМ}^2}{2} + \frac{\mathcal{J}_0 \omega^2}{2}, \qquad (9.28)$$

где $\mathcal{J}_0$ — момент инерции тела относительно оси z_0.

Скорость движения центра масс $v_{ЦМ}$ (и следовательно, мгновенная скорость поступательного движения) определяется из условия, что эта точка, как все остальные, вращается около заданной оси z с угловой скоростью ω. Если a есть расстояние центра масс от оси, то $v_{ЦМ} = a\omega$. Подставляя это в выражение (9.28) и вынося ω^2 за скобку, получим:

$$T = \frac{1}{2}(ma^2 + \mathcal{J}_0)\,\omega^2.$$

Сравнивая эту формулу с выражением (9.27), мы приходим к следующему равенству

$$\mathcal{J}_z = \mathcal{J}_0 + ma^2,$$

что и требовалось доказать.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется моментом инерции тела относительно оси?

2. Поясните, откуда следует, что момент инерции тела равен сумме моментов инерции отдельных его частей. Как это положение можно использовать для вычисления момента инерции тел сложной формы?

3. Сколько моментов инерции может иметь данное тело? Что произойдет с моментом инерции, если ось переместить параллельно самой себе, удаляясь от тела? Из множества параллельных осей чем характерна та, относительно которой момент инерции минимален?

4. Сформулируйте и выведите теорему Штейиера.

5. Выведите формулу для подсчета момента инерции диска относительно трех осей: перпендикуляриой плоскости диска и проходящей через центр масс; совпадающей с диаметром; совпадающей с линией, параллельной диаметру и касательной к окружности диска. Как найти момент инерции диска относительно оси, проходящей через центр масс, но не перпендикулярной плоскости диска?

6. Выведите формулу для кинетической энергии тела, вращающегося около неподвижиой оси. В чем состоит основная идея вывода? Можно ли этот вывод применить к произвольной системе точек? Где при выводе используется особенность твердого тела как неизменяющейся системы точек?

7. Покажите, что полиая кинетическая энергия движущегося шара состоит из кинетической энергии его поступательного движения и кинетической энергии вращения около оси, проходящей через центр масс. Качение без скольжеиия цилиндра по горизонтальной поверхности можно рассматривать: а) как одиовременное участие в поступательном движеиии и вращении около оси, совпадающей с его геометрической осью; б) как поворот около мгиовенной оси (линии контакта цилиндра с поверхностью). Покажите, что кинетические энергии цилиндра, подсчитанные на основе каждого из этих подходов, одинаковы.

Занятие 23

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА. СВОБОДНОЕ ВРАЩЕНИЕ ТЕЛА

1. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА ТЕЛА, ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ОКОЛО ЗАКРЕПЛЕННОЙ ОСИ

Из основного уравнения динамики вращательного движения

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{I}_z\vec{\omega}_z) = \vec{M}_z$$

следует, что если на тело никакие внешние силы не действуют или действуют такие силы, результирующий момент которых относительно оси z равен нулю, то момент импульса тела относительно этой оси будет величиной постоянной:

$$\mathcal{I}_z\vec{\omega}_z = \text{const}. \tag{9.29}$$

В этом состоит *закон сохранения момента импульса тела*, вращающегося около неподвижной оси. Если момент инерции тела не изменяется (что имеет место для абсолютно твердых тел), то из (9.29) следует постоянство угловой скорости $\vec{\omega}_z$. Однако, если тело не абсолютно твердое или если оно состоит из отдельных частей, способных под действием внутренних сил перемещаться друг относительно друга, момент инерции тела может изменяться и угловая скорость уже не будет постоянной.

Как показывает соотношение (9.29), уменьшение (увеличение) момента инерции тела в некоторое число раз должно сопровождаться увеличением (уменьшением) угловой скорости тела во столько же раз. Качественно этот вывод можно наблюдать в опыте Жуковского со стулом, укрепленным на горизонтальной платформе, которая может вращаться с очень малым трением вокруг вертикальной оси. Опыт проводится так: экспериментатор берет в руки тяжелые гири (или гантели) и садится на стул, а ноги ставит на платформу. Затем вытягивает руки с грузом как можно дальше от себя в сторону (рис. 9.16), после чего второй человек сообщает платформе, а вместе с ней и экспериментатору некоторое вращение (не очень быстрое). Во время вращения экспериментатор подносит руки к груди (рис. 9.16); скорость его вращения при этом резко возрастает; если он вновь разведет руки в стороны, угловая скорость снова

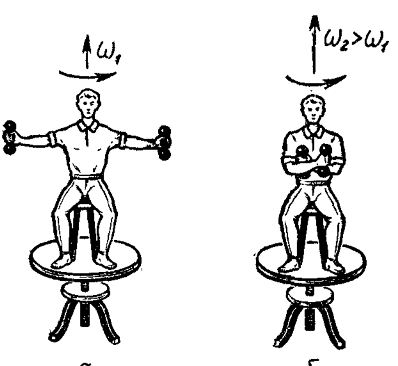


Рис. 9.16

уменьшится. Наблюдаемый эффект объясняется тем, что при сгибании рук к груди экспериментатор уменьшает момент инерции системы, состоящей из его тела и грузов. При разгибании рук момент инерции системы возрастает. Изменением момента инерции своего тела для получения быстрых вращений пользуются фигуристы, балерины, акробаты. Так, фигурист, желая сообщить своему телу быстрое вращение около вертикальной оси, во время начального толчка отбрасывает в сторону руки и, затем, прижимая руки к телу и соединяя ноги, он уменьшает момент инерции своего тела относительно вертикальной оси, в результате чего резко увеличивается угловая скорость его вращения. Или акробат при выполнении прыжка сальто-мортале подпрыгивает вверх и вперед (или назад) и быстро собирается «в комок», в результате чего момент инерции тела уменьшается, а полученная при прыжке угловая скорость вращения около горизонтальной оси, проходящей через центр тяжести акробата, резко увеличивается. Перед концом прыжка акробат снова выпрямляется, отчего скорость вращения уменьшается, и он спокойно встает на ноги.

2. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА И КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ

О причине изменения кинетической энергии вращающегося тела при изменении его момента инерции. Сопоставим формулу для кинетической энергии вращающегося тела $T = \frac{\mathcal{J}_z \omega^2}{2}$ с формулой закона сохранения момента импульса $\mathcal{J}_z \vec{\omega} = \text{const}$. Нетрудно усмотреть, что при изменении момента инерции тела кинетическая энергия вращения не остается постоянной. Так, если в результате уменьшения момента инерции в два раза угловая скорость увеличилась в два раза, то кинетическая энергия также увеличится в два раза. Это происходит: а) за счет работы внутренних сил (работа мускулов экспериментатора в опыте со стулом Жуковского); б) за счет работы внешних сил, направление которых проходит через ось вращения (такие силы не создают вращательного момента). Это можно подтвердить с помощью установки, изображенной на рисунке 9.17, где грузы передвигаются по вращающемуся стержню при помощи нитей, выходящих наружу через трубку, расположенную по оси

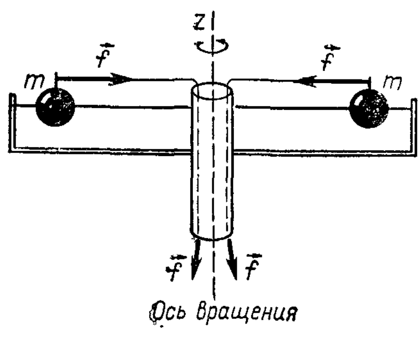


Рис. 9.17

вращения. Чтобы передвинуть грузы ближе к оси, нужно преодолеть центробежную силу (которая при этом, кстати, не остается постоянной).

Таким образом, внутренние силы (или внешние — в опыте, показанном на рис. 9.17) совершают работу, равную работе центробежных сил, взятой с обратным знаком (движение грузов во вращающейся системе K' может быть сколь угодно медленным, и изменением кинетической энергии в этой системе можно пренебречь). Подсчет работы внутренних сил приводит к формуле

$$A_{\text{вн}} = -A_{\text{ц. б}} = \frac{\mathcal{I}_1\omega_1^2}{2} - \frac{\mathcal{I}_2\omega_2^2}{2}.$$

Эта работа в точности равна разности кинетической энергии вращающихся грузов в системе отсчета K в конечном и начальном положениях.

Если грузы перемещаются от центра к периферии, механическая энергия переходит в иные формы и, в частности, может перейти в тепловую (внутреннюю энергию вращающихся тел) или выходит из системы через нити, как в опыте, представленном на рисунке 9.17.

Роль сил Кориолиса. Когда мы говорим, что с уменьшением момента инерции угловая скорость вращения должна увеличиваться в соответствии с законом сохранения момента импульса, мы этим еще не раскрываем механизма явления. Если вы спросите у экспериментатора, находившегося на стуле Жуковского, что он испытывал во время вращения, подтягивая руки к груди, он скажет, что ощущал вполне реальные силы, действовавшие на его руки так, как если бы кто их толкал извне в направлении вращения. При разводе рук действие происходило в другую сторону (против вращения). Внешних сил, конечно, не было. Силы, которые испытывал экспериментатор, имеют инерциальное происхождение и обусловлены движением грузов по вращающейся системе. Это кориолисовы силы:

$$\vec{F}_{\text{кор}} = 2m\,[\vec{v}'\vec{\omega}],$$

где m и v' — масса и скорость перемещающихся грузов во вращающейся системе; ω — угловая скорость вращения самой системы (например, стула Жуковского).

Если грузы перемещаются по радиусу, то $\vec{F}_{\text{кор}}$ действует перпендикулярно радиусу, находясь в плоскости, перпендикулярной к оси вращения.

3. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА СИСТЕМЫ ТЕЛ

Если система незамкнута, но действующие силы образуют относительно оси x момент $\vec{M}_x = 0$, то момент импульса системы относительно этой оси остается постоянным:

$$\vec{L}_x = \vec{L}_{1x} + \vec{L}_{2x} + \ldots = \text{const}, \quad (9.30)$$

где $\vec{L}_{ix}$ — момент импульса i-й части системы.

Если система замкнута, то составляющие момента импульса системы относительно всех координатных осей будут неизменными; будет неизменным и полный момент импульса системы.

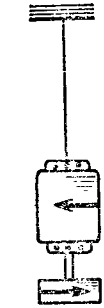


Рис. 9.18

Закон сохранения момента импульса проявляется во всех устройствах, которые содержат вращающиеся части: в электродвигателях, вертолетах, самолетах, автомобилях и т. д.

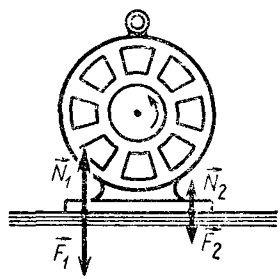


Рис. 9.19

Пример 1. Подвесим электродвигатель так, чтобы нить подвеса являлась продолжением оси ротора (рис. 9.18). В таком виде двигатель представляет собой систему, для которой момент внешних сил (сил тяжести) относительно оси ротора равен нулю. По этой причине момент импульса системы относительно этой оси будет неизменным при любых взаимодействиях между ротором и статором. Так, если до включения тока статор и ротор находились в покое ($\vec{L}_{\text{общ}} = 0$), то после включения они начнут вращаться в разные стороны. При этом общий момент импульса по-прежнему будет равен нулю ($L_{\text{общ}} = L_{\text{рот}} - L_{\text{стат}} = \mathcal{I}_{\text{рот}}\omega_{\text{рот}} - \mathcal{I}_{\text{стат}}\omega_{\text{стат}} = 0$). Это и понятно, так как силы взаимодействия между ротором и статором — внутренние силы; они не могут изменить момента импульса всей системы в целом.

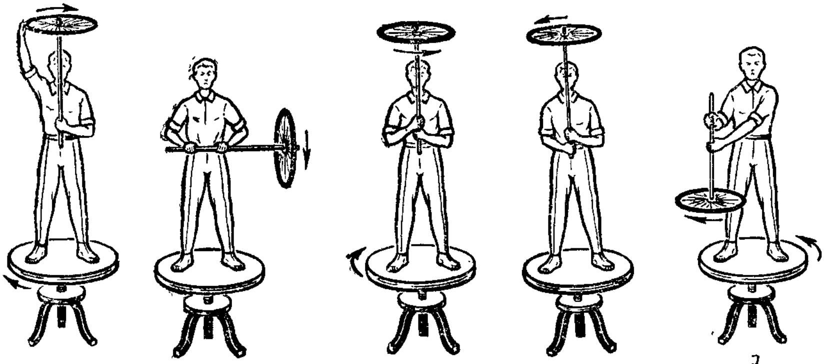
Другое дело, когда статор укреплен на фундаменте и вращаться не может (рис. 9.19). Тогда при включении тока реакция фундамента создает момент внешних сил относительно оси двигателя, он и изменяет общий момент импульса системы (ротор вращается, а статор покоится). Происходит это так. Как только включили ток, появилось два равных и противоположно направленных момента внутренних сил. Один из них действует на ротор, другой — на статор. Момент, действующий на статор, стремится повернуть его около оси двигателя, что приводит к увеличению давления на фундамент с одной стороны оси двигателя и уменьшению давления — с другой (рис. 9.19). Силы реакции фундамента $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ создают внешний вращающий момент, действующий на статор. Из рисунка 9.19 видно, что ротор вращается именно в ту сторону, в которую действует внешний момент. Когда установится постоянная угловая скорость, момент импульса уже не изменяется. Поэтому момент внешних сил исчезает (давление на фундамент по обе стороны от оси становится одинаковым). Всякое изменение угловой скорости вращения ротора связано с появлением дополнительных сил реакции фундамента. Фундамент, таким образом, участвует в работе двигателя. Этим и объясняется, почему фундамент делают массивным, а станину двигателя скрепляют с ним жестко.

Пример 2. Рассмотрим автомобиль, который условно представим в виде системы из двух тел: колес ведущей пары и кузова; оба тела могут вращаться около одной общей оси — оси ведущей пары.

Из опыта известно, что, когда машина трогается с места или набирает скорость, она как бы «оседает» на задние колеса. Когда же машина останавливается, она «оседает» на передние колеса. Оседание машины связано с проявлением закона сохранения момента импульса системы. В то мгновение, когда происходит изменение угловой скорости колес ведущей пары, т. е. появляется дополнительный момент импульса ведущей пары, возникает такой же по модулю, но противоположиый по направлению момент импульса кузова относительно оси пары. Кузов поворачивается около этой оси, что и приводит к его оседанию. Резкое торможение на переднюю пару колес может привести к перевертыванию машины «вверх колесами».

Пример 3. Рассмотрим еще один опыт с платформой Жуковского. Пусть на платформе находится экспериментатор и держит в руках колесо (рис. 9.20). Система, состоящая из экспериментатора и колеса, может вращаться как целое около вертикальной оси, параллельной оси платформы. На эту систему внешние моменты относительно оси ее вращения не действуют (трением пренебрегаем). Поэтому момент импульса всей системы относительно этой оси должен сохраняться. Если экспериментатор начнет раскручивать колесо с вертикально расположенной осью, то сам он начнет вращаться в сторону, противоположную направлению вращения колеса (рис. 9.20, *а*). При этом сумма момента импульса $\vec{L}_э$ экспериментатора и момента импульса $\vec{L}_к$ колеса равна нулю ($\vec{L}_э + \vec{L}_к = 0$).

Предположим теперь, что покоящийся экспериментатор держит ось уже раскрученного колеса горизонтально (рис. 9.20, *б*). При этом момент импульса всей системы относительно вертикальной оси равен нулю. Он должен остаться нулевым и тогда, когда экспериментатор повернет ось колеса и расположит ее вертикально (рис. 9.20, *в*). А это значит, что сам экспериментатор должен прийти во вращение вокруг вертикальной оси с такой угловой скоростью, чтобы $\vec{L}_э + \vec{L}_к = 0$.



а *б* *в* *г* *д*

Рис. 9.20

Если покоящемуся на платформе экспериментатору передать раскрученное колесо с вертикально расположенной осью (рис. 9.20, *г*), то общий момент импульса системы относительно вертикальной оси будет равен моменту импульса колеса ($\vec{L}_{общ} = \vec{L}_к$). Он будет оставаться неизменным и тогда, когда экспериментатор начнет поворачивать ось колеса. При повороте оси колеса составляющая момента импульса колеса относительно вертикальной оси будет уменьшаться, вследствие чего экспериментатор и платформа начнут вращаться так, что сумма момента импульса экспериментатора с платформой и проекция момента импульса колеса на вертикальную ось остается неизменной. Если, например, экспериментатор повернет ось колеса на 180° (рис. 9.20, *г*, *д*), то момент импульса экспериментатора приобретет значение, равное удвоенному первоначальному моменту импульса колеса, так что

$$\vec{L}_{общ} = \vec{L}_э - \vec{L}_к = 2\vec{L}_к - \vec{L}_к = \vec{L}_к.$$

П р и м е р 4. Внутри космического корабля размещают три небольших маховика, вращающихся около трех взаимно перпендикулярных осей. При свободном полете на корабль не действуют моменты внешних сил. Поэтому после остановки двигателей полный момент импульса системы будет сохраняться. Изменяя соответствующим образом скорости вращения трех маховиков, можно остановить вращение корабля (если оно возникло в момент выключения двигателей) или изменить его ориентацию в пространстве.

4. СВОБОДНЫЕ ОСИ ВРАЩЕНИЯ. ГЛАВНЫЕ ОСИ И ГЛАВНЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ. ПОЛНЫЙ МОМЕНТ ИМПУЛЬСА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Свободной осью называют такую ось вращения тела, положение которой в пространстве сохраняется в отсутствие воздействия на нее каких-либо внешних сил. Что такие оси существуют, поясним на следующем примере.

Вокруг оси вращается тело в форме гантели (рис. 9.21). Во вращающейся системе отсчета на гантель действуют центробежные силы $f_{ц.б}$, стремящиеся повернуть ось гантели и, следовательно, ось вращения. Только благодаря действию подшипников (внешних сил) ось остается неподвижной.

А если гантель расположена горизонтально (рис. 9.22) и ось проходит через ее центр масс, то центробежные силы не создают вращающего момента и ось вращения гантели в отсутствие воздействия каких-либо сил извне остается неподвижной.

Свободная ось должна обязательно проходить через центр масс тела, так как в противном случае со стороны подшипников должны действовать силы, заставляющие центр масс (как материальную точку массой m) двигаться по окружности.

Опыт и теория показывают, что для любого тела существуют три взаимно перпендикулярные свободные оси, пересекающиеся в центре масс. Эти оси обладают следующим свойством: момент инерции тела относительно одной из них максимален, относительно второй — минимален, а относительно третьей он имеет промежуточное значение.

Три взаимно перпендикулярные оси, обладающие этим свойством, называют главными осями инерции. (Свободные оси совпадают с ними.) Моменты инерции тела относительно этих осей называют главными моментами инерции; их обозначают через I_1, I_2, I_3.

У однородного параллелепипеда (рис. 9.23) главными осями инерции будут оси A, B, C, проходящие через центр масс параллелепипеда перпендикулярно граням (как видно из рис. 9.23, наибольший момент инерции будет относительно оси A).

У тела с осевой симметрией (например, однородного цилиндра, показанного на рис. 9.24) ось симметрии является, оче-

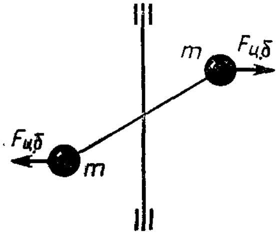


Рис. 9.21

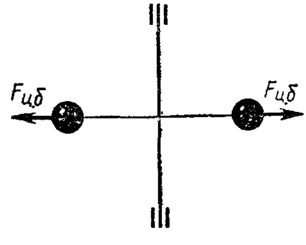


Рис. 9.22

видно, одной из главных осей; две другие оси — это любые взаимно перпендикулярные прямые, проходящие через центр масс и лежащие в плоскости, перпендикулярной к оси симметрии.

Очевидно, что для тела с осевой симметрией два из трех главных моментов одинаковы, третий — отличен от них. У шара одинаковы все три главных момента инерции.

Вращение около свободной оси. Если тело вращается около одной из свободных осей (например, около оси z) и на него не действуют никакие внешние силы, то согласно закону сохранения момента импульса имеем:

$$\vec{L}_z = I_z \vec{\omega}_z = \overrightarrow{\text{const}}.$$

Отсюда следует, что тело сохраняет угловую скорость вращения как по модулю, так и по направлению. Сохранение вектором ω_z постоянного направления означает, что ось вращения оказывается неподвижной без всяких опор. Отсюда и возникло ее название *свободная ось.*

Теория показывает, что устойчивое вращение тело получает около таких свободных осей, относительно которых момент инерции максимален или минимален. Вращение около свободной оси, относительно которой момент инерции тела имеет промежуточное значение, неустойчиво. При малейшем случайном отклонении оси вращения возникают силы, которые увеличивают возникшее отклонение.

Это можно проиллюстрировать на следующем опыте. Возьмем прямоугольную коробку (рис. 9.23), грани которой окрашены в разные цвета. Коробка имеет три оси симметрии A, B, C, которые и являются ее главными осями инерции, или свободными осями. Моменты инерции коробки относительно этих осей таковы: $I_A > I_B > I_C$. Легко подбросить коробку, сообщив ей усилием пальцев вращение около оси A (I_A = макс) или около оси C (I_C = мин). Это вращение легко наблюдается, так как одна грань коробки все время остается обращенной к наблюдателю, который отличает ее по цвету. Но все попытки подбросить коробку так, чтобы она вращалась вокруг оси B, будут безуспешными; наблюдатель всегда будет видеть вперемежку

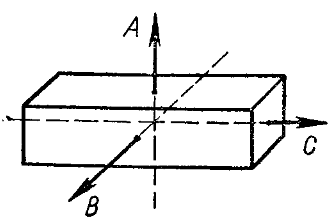


Рис. 9.23

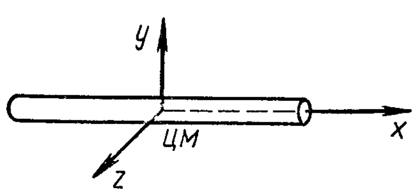


Рис. 9.24

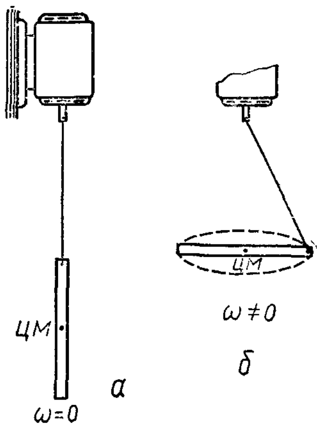


Рис. 9.25

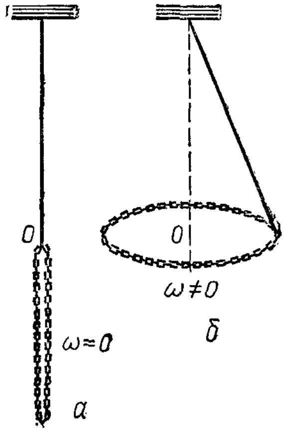


Рис. 9.26

то один, то другой цвет, а это значит, что коробка при вращении качается. Вращение в этом случае не является устойчивым.

Если на вращающееся тело действуют какие-либо внешние силы, то устойчивым вращение будет только относительно оси, имеющей наибольший момент инерции. Это можно показать на следующих опытах.

Опыт со стержнем. К вертикально расположенной оси электродвигателя прикреплен на нити металлический цилиндр (рис. 9.25, *а*). После включения двигателя цилиндр начнет вращаться около свободной оси с наименьшим моментом инерции. Затем наблюдатель увидит, как цилиндр, вращаясь, закачается. «Качка» со временем все увеличивается, пока цилиндр не примет горизонтальное положение (рис. 9.25, *б*). В горизонтальном положении цилиндр вращается устойчиво, без качки. Ось вращения при этом проходит через центр масс перпендикулярно к цилиндру и является, таким образом, свободной осью, относительно которой момент инерции имеет наибольшее значение. При вращении цилиндра около этой оси нить уравновешивает силу тяжести и сообщает ему небольшой вращательный момент, уравновешивающий момент сил сопротивления воздуха.

Опыт с цепочкой. К оси двигателя вместо стержня подвесим замкнутую цепочку (рис. 9.26, *а*). Вскоре после начала вращения цепочка «расправится» и примет вид кольца, расположенного в горизонтальной плоскости (рис. 9.26, *б*). Именно этой форме соответствует наибольший момент инерции цепочки относительно вертикальной оси.

Аналогичные опыты можно поставить и с другими телами. Но во всех случаях перемена оси вращения в теле связана с действием внешних сил. В описанных опытах внешний момент обусловлен действием нити; в других случаях он может порождаться силами трения или какими-либо иными силами.

Рассмотренные опыты показывают, что тело, будучи раскрученным внешними силами около оси, не совпадающей со свободной осью, «находит» свободную ось. Это свойство используется в технике быстроходных машин, таких, как паровые турбины, делающих до 30 000 об/мин. Для быстроходных машин очень важно, чтобы вращение происходило около свободной оси; иначе возникают громадные силы, действующие со стороны вращающейся части на ось и, следовательно, на подшипники машины. Так как при самом тщательном изготовлении машины нельзя добиться, чтобы центр масс вращающейся части в точности попадал на ось вращения (которая задается подшипниками), то для компенсации используют гибкие или самоцентрирующиеся валы. Если вал не очень жесткий, а его ось близка к свободной оси ротора машины, то при достаточно большой скорости вращения вал изгибается так, что вращение подвижной части устанавливается вокруг свободной оси ротора.

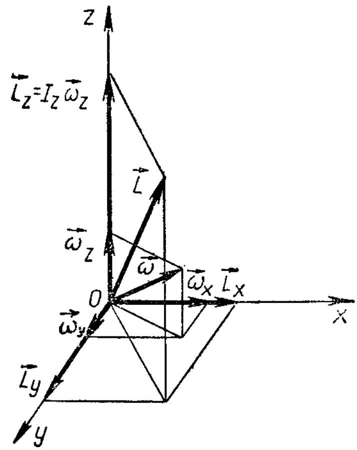


Рис. 9.27

Полный момент импульса твердого тела. Выберем систему координат xyz таким образом, чтобы оси координат совпадали с главными осями инерции, т. е. со свободными осями. Обозначим главные моменты инерции через I_x, I_y, I_z (рис. 9.27). Поскольку свободная ось в отсутствие внешних сил неподвижна, к ней применимо выражение для момента импульса, полученное нами для закрепленных (неподвижных) осей:

$$\vec{L}_z = I_z\vec{\omega}_z. \quad (9.31)$$

Пусть тело вращается вокруг оси, не совпадающей ни с одной из свободных осей. Тогда вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ можно разложить на три составляющие по координатным осям:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_x + \vec{\omega}_y + \vec{\omega}_z. \quad (9.32)$$

Согласно соотношению (9.31) произведения угловых скоростей на соответствующие моменты инерции дадут составляющие полного вектора момента импульса $\vec{L}$ на соответствующие оси:

$$I_x\vec{\omega}_x = \vec{L}_x, \quad I_y\vec{\omega}_y = \vec{L}_y, \quad I_z\vec{\omega}_z = \vec{L}_z.$$

Следовательно, полный момент импульса запишется так:

$$\vec{L} = I_x\vec{\omega}_x + I_y\vec{\omega}_y + I_z\vec{\omega}_z. \qquad (9.33)$$

Он приложен в точке пересечения осей, т. е. в центре масс. Сопоставляя это выражение с (9.32), мы приходим к заключению, что вектор полного момента импульса не совпадает с вектором $\vec{\omega}$, т. е. не направлен по оси вращения, но образует с нею некоторый угол.

Напомним, что выражение (9.33) получено нами в предположении, что оси координат совпадают с главными осями инерции. Если это условие не соблюдено, то связь полного момента импульса с угловой скоростью (ее составляющими) получается более сложной.

Вращение свободного тела около оси, не совпадающей со свободной осью. Если ось вращения не совпадает со свободной осью, то она уже не будет неподвижной. Само вращение свободного тела около таких осей приобретает сложный характер. Исследование этого вопроса в общем случае связано с большими математическими трудностями. Поэтому мы ограничимся разбором простейшего случая — вращения симметричного волчка $(I_x = I_y \neq I_z)$.

Пусть такой волчок был раскручен внешними силами около оси A (рис. 9.28), не совпадающей со свободной осью (осью симметрии волчка).

Очевидно, что полный момент импульса волчка $\vec{L}$ не совпадает с осью вращения A. Сам же вектор $\vec{L}$ описывает в пространстве конус. У вращающегося волчка различают три характерные оси: *ось вращения* A, вдоль которой направлена угловая скорость $\vec{\omega}$; *ось волчка* z; *ось импульсов* (линия, по которой направлен вектор $\vec{L}$). В рассматриваемом случае все эти оси не совпадают друг с другом[1]. Когда вращение происходит относительно оси A, ось импульсов и ось волчка описывают около оси A конусы.

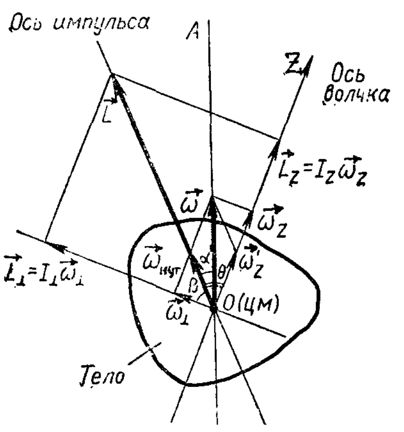


Рис. 9.28

Если раскрученное таким образом тело мы предоставим самому себе, (т. е. снимем внешние силы), то вектор $\vec{L}$ согласно закону сохранения момента им-

[1] Все три оси сливаются в одну, если волчок вращается вокруг свободной оси.

пульса будет оставаться неизменным, а ось импульсов станет неподвижной. Это приведет к тому, что ось вращения A сама начнет вращаться около оси импульсов, и движение волчка примет сложный характер. Его можно рассматривать как результат сложения двух движений: вращения с угловой скоростью $\vec{\omega}'_z$ около оси волчка и вращения с угловой скоростью $\vec{\omega}_{нут}$ около оси импульсов. Угловая скорость результирующего вращения около мгновенной оси A равна $\vec{\omega} = \vec{\omega}'_z + \vec{\omega}_{нут}$. При этом сама мгновенная ось прецессирует (поворачивается) около неподвижной оси импульсов с угловой скоростью $\vec{\omega}_{нут}$. Очевидно, с такой же скоростью прецессирует и ось волчка. Таким образом, движение свободного симметричного волчка, называемое нутацией или свободной регулярной прецессией, состоит в том, что мгновенная ось A (и ось волчка) описывает конус — конус нутации — вокруг неподвижной в пространстве оси импульсов. Найдем угловую скорость нутации (частоту нутации) $\vec{\omega}_{нут}$. Из рисунка 9.28 видно, что

$$\omega_\perp = \omega_{нут} \cos\beta,$$

$$L_\perp = L \cos\beta.$$

Отсюда

$$\omega_{нут} = \frac{L}{L_\perp}\omega_\perp.$$

Но так как $L_\perp = I_\perp \omega_\perp$, то окончательно получаем:

$$\omega_{нут} = \frac{L}{I_\perp}.$$

Частота нутации оси волчка равна отношению полного момента импульса к моменту инерции $I_\perp$ волчка относительно оси, перпендикулярной z.

Если ось импульса близко расположена к оси волчка[1], то приближенно можно считать $L = L_z = I_z\omega_z$. Тогда частота нутации выразится так:

$$\omega_{нут} = \frac{I_z}{I_\perp}\omega_z. \tag{9.34}$$

Отношение $\frac{I_z}{I_\perp}$ для обычных волчков приблизительно равно единице (в общем случае оно может изменяться от нуля до 2). Следовательно, частота нутации соизмерима с угловой скоростью вращения волчка вокруг собственной оси (она поэтому достаточно велика). Это является характерной особенностью нутации.

---

[1] Это будет в том случае, когда ω будет достаточно велико.

Примером разделения осей благодаря внутреннему перераспределению масс служит Земля. Земля представляет собой в первом приближении сплюснутый в направлении полюсов шар. Его можно рассматривать как симметричный волчок, ось z которого совпадает с главной осью, имеющей наибольший момент инерции I_z.

Если предположить, что когда-то мгновенная ось вращения (ось A на рисунке 9.28) и ось моментов совпадали с осью Земли (т. е. с главной осью), то вращение Земли в то время было устойчивым, т. е. совершалось без нутации. Но в результате вулканической деятельности могло произойти перераспределение масс (изменение моментов инерции I_z и $I_\perp$), что привело к отделению оси Земли от мгновенной оси вращения и оси импульсов, а следовательно, и к возникновению нутации мгновенной оси вокруг оси импульсов. Ось импульсов можно считать неподвижной в системе отсчета, связанной с центром масс Земли и неподвижными звездами, так как гравитационный момент, действующий на Землю со стороны Солнца и Луны, мал и им можно пренебречь[1]. Так как ось импульсов близка к оси Земли (разделение осей незначительно), то для подсчета частоты нутации можно воспользоваться формулой (9.34). Из-за сплющенности Земли $\frac{I_z}{I_\perp} = \frac{301}{300}$. Угловая скорость вращения Земли равна $\omega_z = 2\pi$ сут$^{-1}$. Поэтому

$$\omega_{\text{нут}} = \frac{301}{300} 2\pi \text{ сут}^{-1}.$$

Не связанный с Землей наблюдатель смог бы обнаружить вращение земной оси вокруг вектора $\vec{L}$ с такой угловой скоростью. Для земного наблюдателя из этой величины нужно вычесть угловую скорость суточного вращения Земли $\omega_z = 2\pi$ сут$^{-1}$. Тогда частота нутации для земного наблюдателя будет равна $\omega'_{\text{нут}} = \omega_{\text{нут}} - \omega_z = \frac{2\pi}{300}$ сут$^{-1}$. Период нутации составит $T = 30$ сут. Наблюдаемый в действительности период нутации равен $T = 420$ сут, что объясняется деформируемостью Земли во время вращения[2]. Наблюдения на полюсах Земли показали, что полюсы (точки пересечения оси Земли с ее поверхностью) описы-

---

[1] Вследствие неоднородности гравитационного поля ЦТ и ЦМ Земли не совпадают. Поэтому сила притяжения к Солнцу (Луне) создает относительно центра масс вращающий момент, который, однако, мал, так как расстояние между центром тяжести и центром масс невелико.

[2] Тот факт, что нутация Земли с течением времени не затухает, несмотря на трение между перемещающимися слоями, можно объяснить только постоянным действием причин, приводящих к появлению нутации. Эти причины полностью не установлены. (Возможно, это перемещение огромных масс воздуха в атмосфере, воды в океанах и т. п.)

вают на поверхности Земли окружности радиусом около 4 м (а это указывает на близость оси импульса к земной оси). В действительности фигуры, описываемые полюсами на поверхности Земли, не представляют собой точных окружностей, а имеют более сложный вид, что указывает на постоянное и сложное перемещение масс на Земле.

5. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА. СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Считая твердое тело системой материальных точек, можно записать уравнение движения центра масс:

$$m\vec{a}_{\text{цм}} = \sum \vec{F}_i, \tag{9.35}$$

где $\Sigma\vec{F}_i$ — сумма всех внешних сил, приложенных к телу.

В инерциальной системе отсчета приложенные силы создают относительно произвольно выбранных осей координат вращающие моменты, которые связаны с изменением момента импульса относительно соответствующих осей соотношениями[1]:

$$\sum \vec{M}_{ix} = \frac{d\vec{L}_x}{dt}, \quad \sum \vec{M}_{iy} = \frac{d\vec{L}_y}{dt}, \quad \sum \vec{M}_{iz} = \frac{d\vec{L}_z}{dt}. \tag{9.36}$$

Суммирование составляющих моментов относительно осей дает момент $\sum(\vec{M}_{ix} + \vec{M}_{iy} + \vec{M}_{iz}) = \sum \vec{M}_i = \vec{M}$ относительно начала координат. Вектор $\vec{L} = \vec{L}_x + \vec{L}_y + \vec{L}_z$ также приложен в начале координат (в общем случае они не совпадают).

В результате суммирования равенств (9.36) получим так называемое уравнение моментов относительно выбранного центра (начала координат):

$$\sum \vec{M}_i = \frac{d\vec{L}}{dt}. \tag{9.37}$$

Уравнения (3.35), (3.37) являются основными уравнениями динамики движения твердого тела. Одно из этих уравнений описывает движение центра масс тела, другое — вращение тела около центра моментов (вернее, около оси, проходящей через этот центр). Если центр моментов выбрать совпадающим с центром масс тела и в качестве осей координат взять свободные

---

[1] При этом связь $\vec{L}_x$ с ω_x имеет, как указывалось, простую форму ($\vec{L}_x = \vec{\omega}_x I_x$) только для осей, совпадающих со свободными. В других случаях связь эта сложнее. Однако эта связь нам не понадобится.

оси, то момент импульса можно будет выразить через главные моменты инерции:

$$\vec{L} = I_x \vec{\omega}_x + I_y \vec{\omega}_y + I_z \vec{\omega}_z.$$

Это значительно упрощает расчеты.

Из уравнений движения (9.35), (9.37) вытекает, что тело будет в равновесии, если оно в данный момент не движется поступательно ($\vec{v}_{\text{ц. м}} = 0$), не вращается ($\vec{L} = 0$), не имеет ускорения ($\vec{a}_{\text{ц. м}} = 0$) и момент его импульса не изменяется ($\vec{\dot{L}} = \text{const} = 0$). А это значит, что для равновесия тела недостаточно, чтобы оно находилось в покое; необходимо еще, чтобы сумма сил, действующих на тело, была равна нулю и чтобы была равна нулю сумма моментов этих сил относительно любого произвольно выбранного центра:

$$\sum \vec{F}_i = 0, \quad \sum \vec{M}_i = 0.$$

Этим условиям эквивалентны шесть скалярных уравнений:

$$\sum F_{ix} = 0, \quad \sum F_{iy} = 0, \quad \sum F_{iz} = 0,$$
$$\sum M_{ix} = 0, \quad \sum M_{iy} = 0, \quad \sum M_{iz} = 0,$$

согласно которым должны равняться нулю алгебраические суммы сил по каждой из координатных осей и суммы моментов этих сил относительно координатных осей (оси выбираются произвольно). Для твердого тела, как и для материальной точки, различают три вида равновесия: устойчивое, неустойчивое и безразличное.

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте закон сохранения момента импульса тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Расскажите, как этот закон используется фигуристами и акробатами. Опишите опыт со стулом Жуковского. Подсчитайте работу (в общем виде), которую совершает экспериментатор, подтягивая грузы к груди.

2. Дайте определение полного момента импульса системы и сформулируйте закон его сохранения.

3. Какое вращение тела называют свободным? Чем различаются свободное вращение тела около свободной оси и вращение относительно оси, не являющейся свободной? Брошенная за конец палка (например, городошная) вращается; поясните, почему она вращается и вокруг какой оси, как эта ось движется в пространстве.

4. Какое тело называют симметричным волчком? Докажите, что при свободном вращении симметричного волчка вокруг оси, не совпадающей ни с одной его свободной осью, геометрическая ось волчка описывает конус (нутация оси). Как при этом движется мгновенная ось? Оцените частоту нутации. Поясните нутацию оси Земли и оцените ее частоту.

5. Сформулируйте основные законы динамики твердого тела. Поясните, как получается уравнение моментов.

6. Сформулируйте условия равновесия твердого тела.

Занятие 24

ГИРОСКОП. ВЫНУЖДЕННАЯ ПРЕЦЕССИЯ ОСИ ГИРОСКОПА. ГИРОСКОПИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ

Согласно второму закону Ньютона $\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F}$ изменение импульса тела $d\vec{p}$ направлено в сторону действия силы $\vec{F}$: если сила $\vec{F}\parallel\vec{p}$, то и $d\vec{p}\parallel\vec{p}$; если же $\vec{F}\perp\vec{p}$, то $d\vec{p}\perp\vec{p}$.

Аналогичные соотношения имеют место и для вращательного движения. Из уравнения моментов $\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M}$ (относительно определенного центра) следует, что $d\vec{L}$ направлено в сторону действия момента силы $\vec{M}$. Если момент $\vec{M}$ направлен вдоль вектора $\vec{L}$, то и $d\vec{L}$ будет направлен по $\vec{L}$. В случае, когда $\vec{M}$ перпендикулярен $\vec{L}$, вектор $d\vec{L}$ также перпендикулярен $\vec{L}$. Этим замечанием мы воспользуемся при объяснении свойств гироскопа.

1. ГИРОСКОП

Гироскопом называют симметричное тело, которое быстро вращается около собственной оси, являющейся одной из свободных осей. Гироскоп — это быстро вращающийся симметричный волчок.

Чтобы выяснить характер движения оси гироскопа [1], обычно прибегают к упрощениям, суть которых состоит в следующем. Полагают, что угловая скорость ω собственного вращения волчка достаточно велика, а угловая скорость Ω прецессии, наоборот, достаточно мала ($\Omega \ll \omega$). При этих условиях (рис. 9.29) мгновенная угловая скорость волчка около мгновенной оси равна

$$\vec{\omega}_{\text{мгн}}=\vec{\omega}'_z+\vec{\Omega}\approx\vec{\omega}'_z\approx\vec{\omega}.$$

Таким образом, можно считать, что при наличии прецессии мгновенная угловая скорость волчка в каждый момент времени равна угловой скорости его собственного вращения и направлена вдоль оси волчка. Другими словами, можно считать мгновенную ось и ось волчка совпадающими.

При этих допущениях угловая скорость $\omega_\perp$ вращения волчка относительно оси, перпендикулярной к оси симметрии, будет

---

[1] Дело в том, что уравнение $\vec{M}=\frac{d\vec{L}}{dt}$ описывает изменение момента импульса $\vec{L}$ гироскопа и положение оси импульсов. На практике важна не ось импульсов, а ось гироскопа, ибо ось импульсов может изменять свое положение в теле гироскопа.

много меньше ω (см. рис. 9.29). Поэтому полный момент импульса прецессирующего волчка относительно мгновенной оси запишется так:

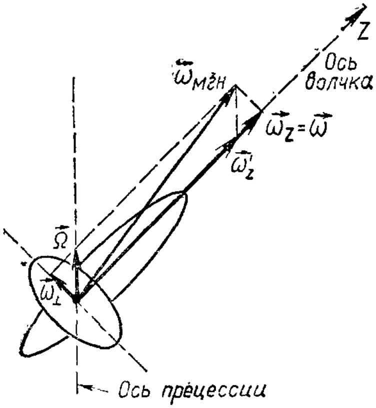


Рис. 9.29

$$\vec{L}=I_z\vec{\omega}_z+I_x\vec{\omega}_x+I_y\vec{\omega}_y=$$
$$=I_z\vec{\omega}+I_\perp\vec{\omega}_\perp\approx I_z\vec{\omega}. \quad (9.38)$$

Это значит, что полный момент импульса можно считать равным моменту импульса собственного вращения волчка относительно геометрической оси и направленным вдоль этой оси (I_z — момент инерции относительно оси волчка). Итак, при большой скорости собственного вращения и выполнении условия $\Omega \ll \omega$ все три оси волчка приблизительно совпадают. Отсюда следует, что движение оси волчка будет совпадать с движением оси импульса (т. е. с движением вектора $\vec{L}$), определяемым соотношением $\vec{M}=\dfrac{d\vec{L}}{dt}$.

Свойства гироскопа. Обратимся к гироскопу, изображенному на рисунке 9.30. Ось волчка закреплена в раме на конце горизонтального вала, на другом конце которого помещен противовес. Центр тяжести всей системы (точка O) находится на острие вертикального стержня и система получается уравновешенной, т. е. может находиться в равновесии при любой ориентации вала. Раскрутим волчок вокруг его собственной оси z, а вал расположим горизонтально.

Будем считать, что условия, упрощающие задачу, выполнены: все три оси волчка совпадают. Момент импульса $\vec{L}=I_z\vec{\omega}$ очень велик и направлен по оси волчка. Повесим на ось вала

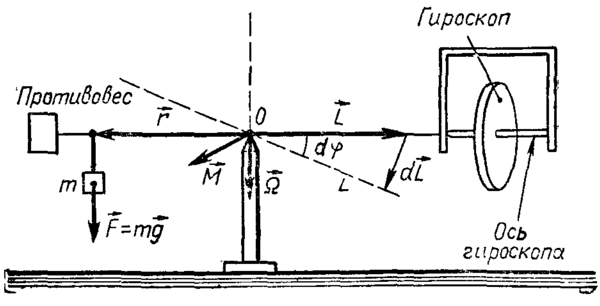


Рис. 9.30

перегрузок массой m, т. е. подействуем на вал установки (а следовательно, и на ось волчка) силой $\vec{F} = m\vec{g}$, направленной вертикально вниз. Момент этой силы относительно оси O равен $\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}]$. Этот момент перпендикулярен вертикальной плоскости и проходит через неподвижную точку O; он лежит в горизонтальной плоскости и направлен (по рисунку) к читателю. Момент $\vec{M}$ стремится повернуть вал установки в вертикальной плоскости. Но вал повернется (после некоторого короткого процесса стабилизации) в горизонтальной плоскости. Это видно из того, что $d\vec{L}$ направлен в сторону $\vec{M}$:

$$d\vec{L} = \vec{M}\,dt. \tag{9.39}$$

Таким образом, $d\vec{L}$ (как и $\vec{M}$) перпендикулярен к оси волчка и расположен в горизонтальной плоскости. Отсюда следует, что через промежуток времени dt вектор полного момента импульса (при принятых упрощениях — и ось гироскопа!) окажется повернутым в горизонтальной плоскости на угол $d\varphi$. При новом положении оси волчка вектор $\vec{M}$ вновь перпендикулярен к ней. Поэтому ось волчка снова повернется и т. д. Легко видеть, что ось волчка (как и вектор $\vec{L}$) начнет вращаться около вертикальной оси (оси прецессии), которая параллельна действующей силе $\vec{F}$. Очевидно, что вектор $\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}]$ поворачивается вместе с осью волчка, так как вместе с осью поворачивается и плоскость, в которой лежат векторы $\vec{r}$ и $\vec{F}$. Из рассмотренного примера видно, что ось прецессии параллельна направлению внешней силы. Так объясняется прецессия. Поскольку в рассматриваемом случае вал установлен горизонтально, ось волчка описывает не конус, а плоскую поверхность. (Если бы вначале вал был установлен под углом к горизонту, то ось описывала бы конус.)

Угловая скорость прецессии находится следующим образом. При малом dt угол $d\varphi$ также мал. Поэтому отрезок dL (см. рис. 9.30) можно рассматривать как дугу, опирающуюся на угол $d\varphi$:

$$dL = L\,d\varphi. \tag{9.40}$$

Сопоставляя (9.40) с (9.39) (записанного в скалярной форме), получим:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{L},$$

или

$$\Omega = \frac{M}{I_z\omega}, \tag{9.41}$$

где $\Omega = \frac{d\varphi}{dt}$ — угловая скорость поворота оси гироскопа, т. е. угловая скорость прецессии.

На установке, приведенной на рисунке 9.30, легко проиллюстрировать зависимость Ω от внешнего момента M. Для этого надо переместить точку подвеса груза m вдоль вала, т. е. изменить плечо силы.

Можно проиллюстрировать и влияние кратковременных ударов по оси волчка. Сильно раскрученный волчок имеет неподвижную ось (груз снят с вала установки). Ударив по валу установки деревянной палочкой, мы увидим, что ось начнет дрожать. Это является следствием возникновения нутации.

Возникновение нутации объясняется тем, что удар (внешний момент $\vec{M}$) смещает ось импульсов на угол $d\varphi$ и совпадавшие три характерные оси разъединяются. Ось гироскопа начинает вращаться вокруг нового положения оси импульсов, т. е. возникает нутация. Однако, поскольку угол $d\varphi$ мал, а угловая скорость нутации $\omega_{нут}$ велика (соизмерима с угловой скоростью собственного вращения), нутация воспринимается как дрожание оси. Действие сил трения быстро гасит нутацию, и все три оси сливаются в одну (с осью импульсов в новом ее положении). Таким образом, удар по оси быстро вращающегося волчка приводит в конечном счете к повороту оси волчка на угол $d\varphi$. Этот угол согласно формуле (9.41) равен

$$d\varphi = \frac{M\,dt}{L} = \frac{M\,dt}{I_z\omega}.$$

Он обратно пропорционален угловой скорости собственного вращения (момент $\vec{M}$ может иметь произвольные направления, и поэтому угол поворота оси не обязательно лежит в горизонтальной плоскости). Чем больше ω, тем меньше $d\varphi$ и, следовательно, тем устойчивее ось вращения (труднее кратковременной силе отклонить ее от первоначального положения). Однако длительное действие даже небольшого момента может вызвать отклонение оси (в результате прецессии) на значительный угол. Этим свойством быстро вращающегося волчка (гироскопа) пользуются в навигационных приборах (гироскопический компас, искусственный гироскопический горизонт).

Снимая и вешая перегрузок, легко показать одно замечательное свойство гироскопа — безинерционность прецессионного движения. Прецессия мгновенно прекращается, как только снимается перегрузок m (отключается действие момента $\vec{M}$). Это свойство не совсем обычно. Мы знаем, что, если $\vec{M}$ направлен вдоль оси вращения, тело приобретает угловое ускорение относительно этой оси и угловая скорость вращения изменяется постепенно. После того как прекращается действие внешней силы, тело обычно продолжает вращаться по инерции с угловой скоростью, какую оно имело в момент снятия силы. Когда же момент внешних сил действует перпендикулярно моменту импульса (перпендикулярно оси гироскопа), вызванное этим моментом прецессионное движение не обладает инерцией. Момент внешних сил создает угловое ускорение оси гироскопа, которое при принятых упрощениях может быть найдено из соотношения (9.37):

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(I_z\vec{\omega}) = I_z\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I_z\vec{\beta}.$$

Вектор углового ускорения $\vec{\beta}$ направлен (как и вектор $\vec{M}$) перпендикулярно угловой скорости собственного вращения и характеризует изменение угловой скорости по направлению. Когда $\vec{M}$ становится равным нулю, угловое ускорение также обращается в нуль. При этом вектор угловой скорости перестает изменять свое направление и ось волчка останавливается.

2. ГИРОСКОПИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ И ГИРОСКОПИЧЕСКИЕ СИЛЫ

Гироскопический эффект. Снова обратимся к установке, показанной на рисунке 9.30. Если рассмотреть не момент сил, а саму силу $\vec{F} = m\vec{g}$, то на первый взгляд покажется довольно странным, что вал установки (в данном случае ось волчка) не поворачивается в вертикальной плоскости (около точки O), как это следовало бы ожидать и как это действительно наблюдается при нераскрученном гироскопе, а поворачивается в горизонтальной плоскости. Это странное поведение оси волчка получило название гироскопического эффекта.

Таким образом, гироскопический эффект состоит в том, что ось быстро вращающегося волчка при действии на нее силы смещается не в направлении силы, а перпендикулярно ей. Такое поведение оси волчка в случае установившейся прецессии выше было объяснено на основе закона $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ (при этом вектор $\vec{M}$ считался направленным перпендикулярно к вектору $\vec{L}$).

Гироскопические силы. На рисунке 9.31 показан случай установившейся прецессии. Во вращающейся системе отсчета x', y', z' (K') ось волчка неподвижна. Но на нее действует ньютоновская сила $\vec{F}$ (вес груза), создающая как в неподвижной, так и в подвижной системах вращающий момент $\vec{M}$, значение модуля которого связано с угловой скоростью прецессии Ω соотношением (9.41). Неподвижность оси волчка в системе K' означает, что в этой системе, кроме момента $\vec{M}$ ньютоновских сил, должен действовать равный по модулю, но противоположный по направлению момент $\vec{M}'$ инерциального происхождения. Пояс-

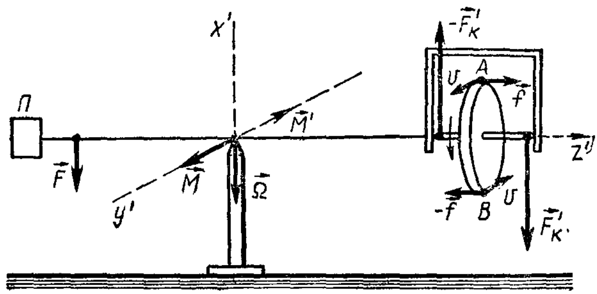


Рис. 9.31

ним, как возникает этот момент. В системе K' все точки вращающегося волчка испытывают действие кориолисовой силы. Так, на точку A массой Δm действует кориолисова сила

$$\vec{f}_{кор} = 2\,\Delta m\,[\vec{v}\vec{\Omega}],$$

где $\vec{v}$ — линейная скорость точки A в системе K'; $\vec{\Omega}$ — угловая скорость вращения системы K'. Сила $\vec{f}_{кор}$ перпендикулярна к векторам $\vec{v}$ и $\vec{\Omega}$. Если в данный момент времени ось волчка лежит в плоскости рисунка, то $\vec{v}$ перпендикулярен этой плоскости, а вектор кориолисовой силы, наоборот, лежит в этой плоскости, имея направление, указанное на рисунке. Точка B волчка, симметричная с точкой A, испытывает действие кориолисовой силы, направленной в противоположную сторону.

Легко видеть, что распределение кориолисовых сил, действующих на точки вращающегося волчка, будет иметь вид, представленный на рисунке 9.32. В результате создается пара сил ($\vec{F}'_к$ и $-\vec{F}'_к$), действующая на ось волчка, а следовательно, и на вал установки так, как показано на рисунке 9.31.

Момент M' этой пары стремится повернуть вал установки около неподвижной точки O в вертикальной плоскости (в плоскости пары) по ходу стрелки часов (см. рис. 9.31). Внешний же момент стремится повернуть вал той же плоскости против хода стрелки часов. При установившейся прецессии оба момента уравновешивают друг друга, и поэтому в системе K' ось волчка неподвижна. Итак, во вращающейся системе отсчета на ось волчка действует момент $\vec{M}'$ инерциального происхождения, равный по модулю и противоположный по направлению моменту $\vec{M}$, создающему прецессию. Если, кроме момента (M'), никакие другие моменты на волчок не действуют, то ось волчка в системе K' будет поворачиваться по ходу стрелки часов около оси момента M' (ось y' на рисунке 9.31; эта ось поворачивается вместе с системой K').

В этом легко можно убедиться на опыте с установкой, приведенной на рисунке 9.30. Снимем груз m. Вал установки (при раскрученном волчке) расположим горизонтально. Затем палочкой будем действовать на вал в горизонтальном направлении, пытаясь вызвать его вращение в горизонтальной плоскости. Мы заметим, что вал, поддавшись немного действию палочки, начнет поворачиваться не в горизонтальной, а в вертикальной плоскости. Объясняется это тем, что, как только под действием палочки возникло вращение оси волчка в горизонтальной плоскости (вынужденная прецессия с угловой скоростью $\vec{\Omega}$), в системе K' появится момент сил инерции, стремящийся повернуть ось в вертикальной плоскости.

Наблюдая за направлением поворота вала при различных направлениях действия палочки, мы придем к правилу, сформулированному впервые Н. Е. Жуковским: *момент сил инерции стремится кратчайшим путем установить ось быстро вращающегося волчка параллельно оси вынужденной прецессии так, чтобы векторы* $\vec{L}$ и $\vec{\Omega}$ (*или* $\vec{\omega}$ и $\vec{\Omega}$) *совпадали по направлению.*

Это правило можно наглядно проиллюстрировать на опыте. Возьмем установку, показанную на рисунке 9.30 (но без груза m). Предварительно раскрутив волчок, поместим ее на неподвижный горизонтальный столик, который может вращаться около вертикальной оси (рис. 9.33). Приведя затем столик во вращеиие, мы заметим, что вал установки сам повернется и примет вертикальное положение: векторы $\vec{L}$ и $\vec{\omega}$ станут параллельными вектору угловой скорости $\vec{\Omega}$ вращения столика. Момент сил инерции, действие которого здесь наблюдается, принято называть *гироскопическим моментом*, а сами силы инерции $\vec{F}'_к$ и $-F'_к$ (см. рис. 9.31), создающие этот момент, — гироскопическими силами.

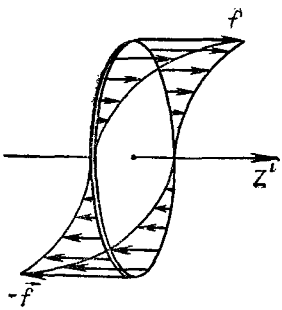


Рис. 9.32

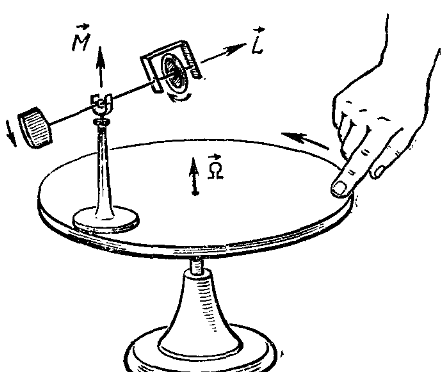


Рис. 9.33

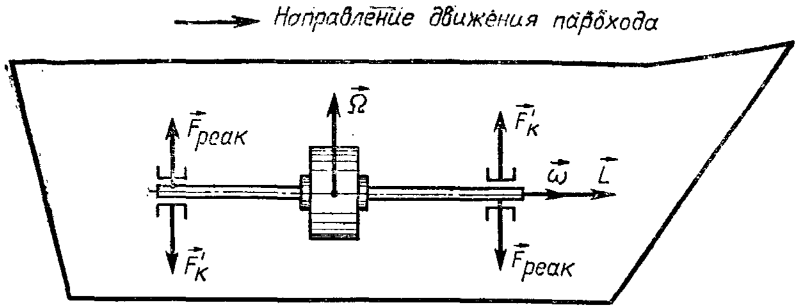


Рис. 9.34

Гироскопические силы в отсутствие других сил поворачивают неукрепленную ось быстро вращающегося волчка в сторону, определяемую *правилом Жуковского*. Но если ось волчка укрепить в подшипниках, то при вынужденной прецессии гироскопические силы действуют на ось, а ось волчка давит на подшипники, вызывая со стороны последних соответствующую реакцию. Силы, с которыми ось волчка давит на подшипники, являются ньютоновскими (силы упругости). Они наблюдаются не только во вращающейся, но и в покоящейся (инерциальной) системе отсчета [1].

Если рассматривать вынужденную прецессию относительно покоящейся системы отсчета, мы увидим, что на ось волчка действуют только ньютоновские силы ($\vec{F}$ и $-\vec{F}$) со стороны подшипников, которые и создают момент $\vec{M}$, необходимый, чтобы вызвать прецессию оси волчка с угловой скоростью $\vec{\Omega}$. В этой же системе отсчета по третьему закону Ньютона ось волчка действует на подшипники с такими же по модулю, но противоположно направленными силами $\vec{F}'$ и $-\vec{F}'$.

Гироскопические силы проявляются в различных технических устройствах, в которых имеются быстро вращающиеся части (пароходная турбина, турбины (или винты) самолета и т. д.). Если, например, пароходная турбина вращается с угловой скоростью $\vec{\omega}$ вокруг горизонтальной оси, расположенной вдоль корабля (рис. 9.34), то, когда пароход будет делать левый разворот с угловой скоростью $\vec{\Omega}$, с ним будет поворачиваться и вал турбины и при этом возникнут гироскопические силы $\vec{F}'_к$ и $-\vec{F}'_к$, которые стремятся повернуть ось турбины в вертикальное положение так, чтобы вектор $\vec{\omega}$ стал параллелен век-

[1] Иногда именно эти силы называют гироскопическими. Гироскопические силы в нашем понимании — это силы инерции, и наблюдаются они только в неинерциальных (вращающихся) системах отсчета.

тору Ω. Действие этих сил уравновесится реакцией подшипников. При резких разворотах (а особенно при качках судна) гироскопические силы могут быть очень большими; это может привести к разрушению подшипников, поломке вала турбины.

Отметим, что подшипники, приняв на себя нагрузку от вала, будут давить на корпус корабля, в результате чего кормовая часть корабля погрузится в воду глубже, чем носовая. При правом развороте глубже, наоборот, погружается носовая часть корабля. В результате наклона корабля возникает гидростатический момент, который уравновешивает действие подшипников (в конечном счете — действие гироскопического момента). Аналогичная картина наблюдается и на самолете, осуществляющем разворот в горизонтальной плоскости. Его нос либо «зарывается», либо поднимается кверху. В этом случае уравновешивание гироскопического момента происходит за счет аэродинамических сил (за счет действия соответствующих рулей).

Действие гироскопических сил мы наблюдаем и в опыте с платформой Жуковского. Разбирая закон сохранения момента импульса системы, мы объясняли, что экспериментатор, находящийся на невращающейся платформе и держащий в руках раскрученное колесо, придет во вращение, если он повернет ось крутящегося колеса из горизонтального в вертикальное положение (см. рис. 9.20, *б*, *в*). Теперь мы можем объяснить вращение экспериментатора. Как только экспериментатор начнет поворачивать ось колеса в вертикальной плоскости (вокруг горизонтальной оси), возникнут гироскопические силы, стремящиеся повернуть ось колеса вокруг вертикальной оси. Эти силы действуют на руки человека и заставляют его поворачиваться вокруг вертикальной оси.

3. ВИДЫ ГИРОСКОПОВ

Если гироскоп закреплен так, что на него не действуют моменты внешних сил, то он называется свободным (центр масс лежит точно на оси гироскопа). Вектор $\vec{L}$ при этом не прецесси-

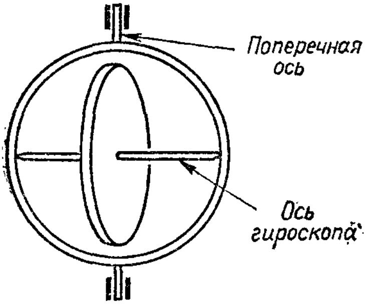


Рис. 9.35

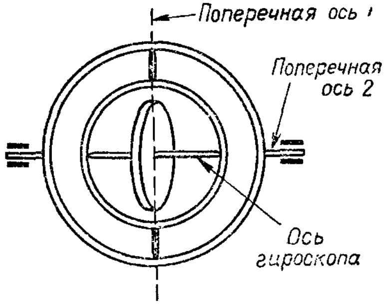


Рис. 9.36

рует. Неизменное направление вектора $\vec{L}$ может использоваться как указатель фиксированного направления в пространстве. В действительности же ввиду наличия трения и неточной центровки направление вектора $\vec{L}$ постепенно изменяется. Поэтому гироскоп может служить указателем направления только в течение ограниченного промежутка времени, который тем короче, чем больше трение и хуже центровка.

Наряду со свободным гироскопом применяются также и несвободные. В этом случае моменты внешних сил вызывают прецессию.

Гироскопы делятся, кроме этого, на два типа: *двухстепенные* и *трехстепенные*. Ось двухстепенного гироскопа имеет ограниченное движение по отношению к основанию: она может вращаться только вокруг одной из поперечных осей (рис. 9.35).

Ось же трехстепенного гироскопа может вращаться вокруг двух поперечных осей. Для этого гироскоп крепится в кардановом подвесе (рис. 9.36).

Гироскопы нашли широкое применение в технике. Массивные гироскопы применяются в качестве стабилизаторов прямого действия (например, стабилизатор качки судов). Легкие гироскопы используются в качестве стабилизаторов непрямого действия; они выполняют роль чувствительного устройства, передающего сигналы двигателям, приводящим в действие соответствующие рули. На этом принципе основано их использование, в частности, в автопилотах.

Гироскопы широко применяются в навигационных приборах: гироскопические компасы, гирогоризонты, указатели поворотов и т. д.

Вопросы для самопроверки

1. Приведите пример симметричного волчка с одной неподвижной точкой. Где расположена неподвижная точка у свободного волчка?

2. При выполнении какого условия свободного вращения волчка все три характерные оси совпадают? Поясните, почему действие внешних сил «разводит» оси быстро вращающегося волчка. Поясните, почему под действием момента внешних сил, перпендикулярного оси импульсов, эта ось начинает совершать вынужденную прецессию. Как связана угловая скорость прецессии с моментом сил? С какой угловой скоростью прецессируют ось симметрии волчка и мгновенная ось вращения?

3. Перечислите свойства быстро вращающегося волчка и объясните их.

4. В чем состоит гироскопический эффект и как его объяснить? Где применяется этот эффект?

5. Какие силы называют гироскопическими и какова их природа? Приведите примеры использования гироскопических сил.

6. Что называют гироскопами? Чем отличается двухстепенный гироскоп от трехстепенного?

Раздел X
МЕХАНИКА ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

ВВЕДЕНИЕ

Жидкости и газы по своим свойствам существенно отличаются от твердых тел. Если твердое тело при неизменных внешних условиях обладает определенными объемом и формой, то жидкое тело обладает лишь определенным объемом, не имея собственной формы, а газы не имеют ни собственного объема, ни собственной формы. Кроме того, твердое тело обладает упругостью к малой деформации любого вида, в то время как жидкости упруги только к деформации всестороннего сжатия и растяжения [1], а газы — только к деформации всестороннего сжатия.

Коэффициент сжимаемости $\varkappa = \frac{\Delta V}{Vp}$ для обычных жидкостей очень мал и при комнатной температуре имеет значение порядка $10^{-11}\,\frac{\text{см}^2}{\text{дин}}$; для газов при атмосферном давлении и постоянной температуре $\varkappa \approx 10^{-6}\,\frac{\text{см}^2}{\text{дин}}$.

Важно отметить, что жидкие и газообразные тела не проявляют упругих свойств к деформации сдвига (модуль сдвига равен нулю). Это означает, что при параллельном смещении одного слоя жидкости (газа) относительно другого не возникают силы упругости, пропорциональные относительному смещению слоев [2], которые вернули бы сдвинутый слой в первоначальное положение. Отсутствие таких сил обусловливает особую подвижность слоев (и частиц) жидкости, именуемую текучестью. Внутреннее трение между слоями в той или иной степени уменьшает текучесть жидкости, но не уничтожает ее совсем.

Отсутствие в покоящейся жидкости сил, направленных по касательной к сдвинутым слоям, означает также, что если два

---

[1] Жидкость может быть подвергиута растяжению только в специальиых условиях, ио в задачах механики эти условия обычно не возникают.

[2] Возникают лишь силы внутреннего трения (силы вязкости), пропорциональные относительной скорости движения слоев, но это силы иной природы.

слоя жидкости взаимодействуют между собой, то сила взаимодействия должна обязательно быть перпендикулярна к слоям. Отсюда следует, что любой объем, выделенный внутри жидкости, взаимодействует с остальной жидкостью (или со стенками сосуда) через ограничивающую его поверхность таким образом, что силы взаимодействия обязательно перпендикулярны к этой поверхности (или к стенкам сосуда).

Реальные газы и жидкости обладают сжимаемостью и внутренним трением (вязкостью). При изучении движения одновременный учет этих свойств сильно усложняет задачу. Поэтому для выяснения общей (приближенной) картины движения жидкости (или газа) пользуются моделью, называемой *идеальной жидкостью*.

Идеальной называют такую жидкость, которая не имеет вязкости и несжимаема. Полученные для такой жидкости выводы применимы к реальным газам и жидкостям только для тех явлений, в которых сжимаемость и вязкость проявляются слабо. Но эти выводы будут резко расходиться с опытом в тех случаях, когда вязкость и сжимаемость имеют первостепенное значение (образование вихрей, обтекание тел газовым потоком со сверхзвуковой скоростью и т. д.). В этих случаях теорию явления нужно строить с учетом вязкости и сжимаемости.

Занятие 25

СТАТИКА ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

1. РАВНОВЕСИЕ ЖИДКОСТИ

Основная задача гидростатики состоит в определении давления внутри покоящейся жидкости. Условия равновесия жидкости не столь просты, как условия равновесия твердого тела. Твердое тело находится в равновесии, если результирующая сила и результирующий момент сил, приложенных к нему со стороны внешних тел, равны нулю. Когда же речь идет о жидкости, то из-за особой ее подвижности различные ее части могут находиться в относительном движении. Поэтому условием равновесия жидкости как целого является равновесие каждой ее части.

Рассмотрим часть жидкости, заключенную в объеме ΔV (рис. 10.1). На эту часть действуют два рода сил: во-первых, массовые (объемные) силы тяжести. Их результирующая равна $\vec{F}_{тяж} = \rho\vec{g}\Delta V$ (где ρ — плотность жидкости) и приложена в центре тяжести (ЦТ) выделенного объема[1]. Во-вторых, к выделенному объему жидкости приложены поверхностные силы, действующие со стороны остальной части жидкости пер-

[1] Для малого объема жидкости центр тяжести совпадает с центром масс.

пендикулярно к поверхности, ограничивающей объем ΔV. Обозначим результирующую поверхностных сил через $\vec{F}_{\text{пов}}$. Выделенный объем жидкости будет находиться в равновесии, если равны нулю сумма действующих сил

$$\vec{F}_{\text{тяж}} + \vec{F}_{\text{пов}} = 0$$

и сумма моментов этих сил относительно центра масс

$$\vec{M}_{\text{тяж}} + \vec{M}_{\text{пов}} = 0.$$

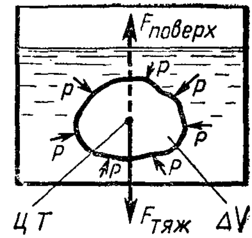


Рис. 10.1

Из первого условия находим, что результирующая поверхностных сил по модулю равна действующей на объем жидкости ΔV силе тяжести и направлена вертикально вверх:

$$\vec{F}_{\text{пов}} = -\vec{F}_{\text{тяж}}.$$

Так как $\vec{F}_{\text{тяж}}$ приложена к центру масс, то момент этой силы равен нулю ($M_{\text{тяж}} = 0$). Следовательно, $M_{\text{пов}} = 0$. А это означает, что точка приложения результирующей $F_{\text{пов}}$ поверхностных сил совпадает с центром масс (или центром тяжести) выделенного объема жидкости. Таким образом, выделенный объем жидкости находится в равновесии, если результирующие массовых и поверхностных сил равны между собой по модулю, противоположно направлены и приложены к одной и той же точке — центру тяжести рассматриваемого объема жидкости.

2. ЗАКОНЫ ПАСКАЛЯ И АРХИМЕДА

Вернемся к рисунку 10.1. При сжатии жидкости внутри нее возникает давление P, которое при равновесии подчиняется закону Паскаля[1]: **давление в любом месте внутри покоящейся жидкости (или газа) одинаково по всем направлениям; внешнее давление передается жидкостью (и газом) одинаково по всему объему.**

Приведем здесь также формулировку известного из школьного курса физики закона Архимеда[2]: **на всякое погруженное в жидкость (или газ) тело действует выталкивающая (архимедова) сила, равная весу жидкости, вытесненной этим телом, и приложенная к центру тяжести (или центру масс) вытесненного телом объема жидкости.**

Архимедова сила есть результат неодинакового давления жидкости на разные участки поверхности погруженного тела: давление, которое жидкость оказывает на нижние части тела,

[1] Блез Паскаль (1626—1666) — французский математик и физик.

[2] Архимед (287—212 до н. э.) открыл этот закон в связи с поставленной ему задачей определить содержание золота в короне, без повреждения последней.

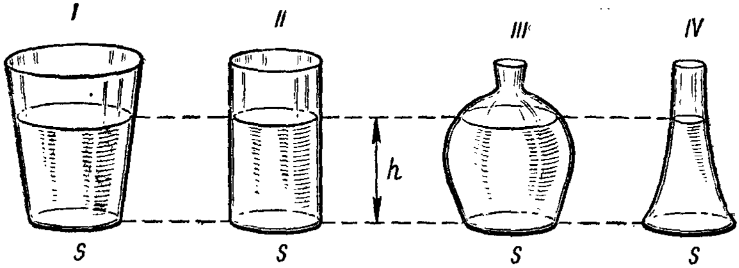


Рис. 10.2

больше давления на верхние части. При этом весьма существенным является замкнутость поверхности соприкосновения тела с жидкостью. Если поверхность не замкнута, то закон Архимеда не имеет места.

Вопросы для самопроверки

1. Что общего между жидкостью и газом и что их различает? Чем отличаются мехаиические свойства жидкостей и газов от свойств твердого тела?

2. К каким видам деформации газ и жидкость проявляют упругие свойства? В чем состоит свойство текучести?

3. Каков порядок величины коэффициента всестороинего сжатия для жидкостей, газов и твердых тел?

4. Поясните физическую причину возникновеиия давления внутри жидкости при ее сжатии (весом пренебречь). Может ли давление виутри жидкости быть отрицательным? Что это означает? Может ли давление быть отрицательным внутри газа? Какова природа давления внутри газа?

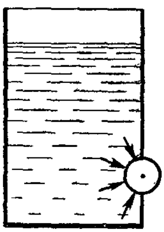


Рис. 10.3

5. Чем отличаются условия равновесия жидкости от условий равновесия твердого тела? Покажите, что если в покоящейся жидкости мысленно выбрать объем, ограиичениый иекоторой поверхностью, то независимо от размеров и формы этой поверхности результирующая всех поверхностных сил: 1) равна весу жидкости в выбраиием объеме; 2) иаправлена вверх; 3) приложена в центре тяжести выделеиного объема.

6. Сформулируйте закон Паскаля. Опишите принцип действия гидравлического пресса.

7. Как изменяется давление жидкости (и газа) с увеличением глубины погружеиия?

8. На рисунке 10.2 изображены четыре сосуда с одинаковыми по площади доньями. Докажите, что: 1) давление на дно во всех сосудах одинаково; 2) сила давления на дно в сосуде *II* равна весу жидкости, в сосуде *I* и *III* она меиьше веса, а в сосуде *IV* больше веса жидкости, находящейся в сосуде.

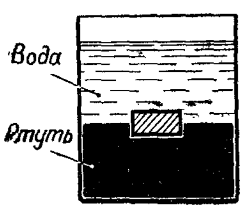


Рис. 10.4

9. Какова сила давления воды на боковую стенку сосуда, имеющего форму прямоугольного ящика?

10. В чем состоит закон Архимеда? Какова величина архимедовой силы, как она направлена и где находится точка ее приложения? Как появление силы Архимеда связано с законом Паскаля? Исходя из закона Паскаля

рассчитайте выталкивающую силу для тела в форме параллелепипеда. Будет ли изменяться архимедова сила с увеличением глубины погружения тела, которое полностью находится в жидкости? Проанализируйте этот вопрос, полагая, что тело обладает большей сжимаемостью, чем жидкость. Как направлена и чему равна по модулю архимедова сила во вращающейся жидкости и в жидкости, движущейся вместе с сосудом поступательно с постоянным ускорением?

11. Чему равна архимедова сила в сосуде с водой, вращающемся с узловой скоростью ω, если плотность воды ϱ_1, плотность погруженного тела $\varrho_2 < \varrho_1$?

12. Если в стенке сосуда поместить цилиндр (рис. 10.3), который может вращаться без трения вокруг своей оси, то, казалось бы, должна возникнуть продольная сила, под действием которой цилиндр должен начать вращаться. Однако этого не происходит (парадокс Жуковского). Почему?

13. На одной чашке уравновешенных весов находится стакан с водой. Как нарушится равновесие, если в стакан опустить (не касаясь дна) подвешенный на тонкой нити шарик?

14. В сосуде с ртутью плавает медный брусок, над которым налит слой воды (рис. 10.4). Покажите, что сила Архимеда равна суммарному весу воды и ртути, вытесненных бруском. Где находится точка приложения этой силы: выше или ниже центра тяжести бруска?

15. На поверхности воды плавает деревянный куб. Будет ли сила давления на нижнюю грань куба равна архимедовой?

Занятие 26

КИНЕМАТИКА ЖИДКОСТИ. ДИНАМИКА ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

1. КИНЕМАТИКА

Линии и трубки тока. Движение жидкости (или газа) можно в принципе описать, задавая движение каждой ее частицы. Однако такой метод практически неосуществим. Поэтому нужно ввести новые понятия и новые физические величины, которые бы характеризовали движение жидкости в целом, подобно тому как характеризуют вращение твердого тела угловая скорость и угловое ускорение.

В данный момент времени каждая частица в потоке жидкости имеет определенную скорость $\vec{v}$. Мысленно проведем в жидкости плавную линию так, чтобы в каждой ее точке мгновенная скорость частиц в один и тот же момент времени t была направлена по касательной. Назовем ее *линией тока*. Очевидно, что таких линий можно провести в жидкости бесконечно много. Условимся проводить их с такой густотой, чтобы число линий, пронизывающих площадку в 1 см^2, поставленную перпендикулярно к движению, было равно скорости движения частиц в этом месте. Тогда движение всей жидкости (в данный момент) можно графически изобразить при помощи этих линий (рис. 10.5), причем густота линий будет характеризовать скорость движения, а их искривление — направления движения частиц. Картина линий тока может изменяться со временем. Однако, если в каждой точке пространства, занимаемого потоком,

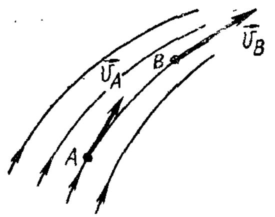


Рис. 10.5

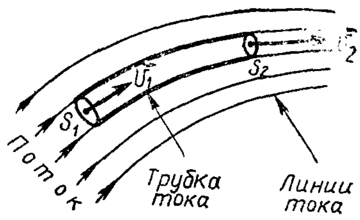


Рис. 10.6

скорость проходящих частиц сохраняется неизменной, положение и форма линий тока со временем не изменяется. Движение жидкости, при котором картина линий тока не изменяется, называют *установившимся* или *стационарным*. В противном случае движение называют *неустановившимся* или *нестационарным*. Нетрудно убедиться в том, что **при установившемся движении линии тока являются в то же время и траекториями частиц.**

Чтобы изучить установившееся движение всего потока жидкости, целесообразно мысленно разбить его на так называемые *трубки тока* и изучить движение в каждой такой трубке.

Трубкой тока называют мысленно выбранную часть потока, боковая поверхность которой составлена из линий тока (рис. 10.6). Сечение трубки тока выбирают достаточно малым, чтобы по всему сечению скорость движения частиц можно было считать одинаковой. Очевидно, частицы жидкости никогда не пересекают поверхность трубки.

Трубки тока можно наблюдать на опыте, если их подкрасить. Так, в потоке воздуха хорошо видна струйка (трубка тока), в которую введен дым, в потоке воды — струйка окрашенной жидкости и т. д.

Уравнение неразрывности при установившемся движении. Представим себе трубку тока с сечениями S_1 и S_2 (рис. 10.6). Пусть скорости течения жидкости в этих сечениях соответственно равны v_1 и v_2. Тогда масса жидкости, прошедшая за 1 с через первое сечение, равна

$$m_1 = \rho_1 v_1 S_1, \tag{10.1}$$

а масса жидкости, прошедшая через второе сечение,

$$m_2 = \rho_2 v_2 S_2, \tag{10.2}$$

где ρ_1 и ρ_2 — плотность жидкости в первом и во втором сечениях соответственно (жидкость предполагается сжимающейся).

Для установившегося движения массы m_1 и m_2 должны быть одинаковы, ибо в противном случае количество жидкости между сечениями S_1 и S_2 начало бы возрастать (или убывать)[1] и

[1] Постоянное убывание жидкости неминуемо приведет к разрыву.

течение перестало бы быть стационарным. Таким образом, для сжимаемой жидкости получаем соотношение:

$$\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 S_2 v_2. \tag{10.3}$$

Это *уравнение неразрывности для сжимаемой жидкости.*

Для несжимаемой жидкости ($\rho_1 = \rho_2 = \rho$) уравнение неразрывности потока упрощается:

$$v_1 S_1 = v_2 S_2. \tag{10.4}$$

Таким образом, форма трубки определяет распределение скоростей: скорость больше в тех местах, где трубка тока уже; она убывает в направлении расширения трубки тока. В ряде случаев в качестве трубки тока с известным приближением можно рассматривать русло реки или трубку, по которой перетекает жидкость. Строители плотин хорошо знают, как проявляется на практике уравнение неразрывности. В последние моменты перед окончательным перекрытием реки поток воды в узком месте настолько сильный, что свободно сносит многотонные бетонные глыбы, затрудняя этим работу по завершению перекрытия.

2. ДИНАМИКА ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Основной закон гидродинамики (уравнение Бернулли). Выделим внутри установившегося потока жидкости трубку тока настолько малого поперечного сечения, чтобы по всему сечению скорости v и давление p можно было считать постоянными. Внутри трубки выделим массу жидкости, ограниченную сечениями S_1 и S_2 (рис. 10.7), в которых скорости течения и давления равны соответственно v_1, v_2, p_1, p_2.

Найдем изменение полной энергии выделенной массы за малый промежуток времени Δt. За это время рассматриваемая масса жидкости продвинется вправо (по рисунку жидкость течет слева направо), в результате чего она будет ограничена сечениями S_1' и S_2'. Очевидно, часть жидкости, заключенная между сечениями S_1' и S_2, никаких изменений не претерпевает. Изменения состоят в том, что масса жидкости m между сечениями S_1 и S_1', обладавшая полной энергией

$$W_1 = \frac{mv_1^2}{2} + mgh_1,$$

как бы переместилась в положение $S_2 - S_2'$, и ее энергия в новом положении равна:

$$W_2 = \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2.$$

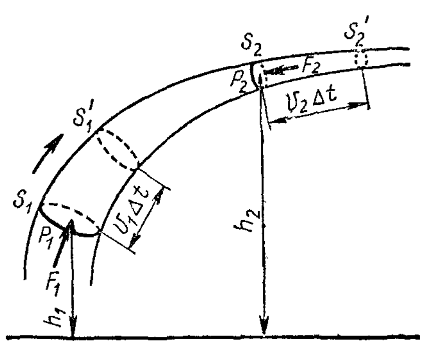


Рис. 10.7

Таким образом, при перемещении рассматриваемого объема жидкости из положения S_1, S_2 в положение S_1', S_2' полная энергия изменилась на величину

$$\Delta W = \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2 - \left(\frac{mv_1^2}{2} + mgh_1\right). \tag{10.5}$$

В соответствии с законом сохранения энергии найденное изменение полной энергии должно равняться (в отсутствие трения) работе ΔA внешних (по отношению к жидкости в объеме S_1, S_2) сил давления на сечения S_1 и S_2:

$$\Delta W = \Delta A. \tag{10.6}$$

Работа силы давления F_1 положительна; она равна:

$$\Delta A_1 = F_1 v_1 \cdot \Delta t = p_1 S_1 v_1 \cdot \Delta t.$$

Работа силы давления F_2 отрицательна (сила направлена против перемещения):

$$\Delta A_2 = -F_2 v_2 \cdot \Delta t = -p_2 S_2 v_2 \cdot \Delta t.$$

Полная работа внешних сил будет равна:

$$\Delta A = p_1 S_1 v_1 \cdot \Delta t - p_2 v_2 S_2 \cdot \Delta t.$$

Отсюда, учитывая уравнение неразрывности

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 = \Delta V,$$

где ΔV — объем рассматриваемой массы жидкости m, получаем:

$$\Delta A = p_1 \cdot \Delta V - p_2 \cdot \Delta V. \tag{10.7}$$

Объединяя формулы (10.5), (10.6), (10.7) и группируя слагаемые, приходим к равенству

$$\frac{mv_2^2}{2} + mgh_2 + p_2 \cdot \Delta V = \frac{mv_1^2}{2} + mgh_1 + p_1 \cdot \Delta V.$$

Поделив обе части этого равенства на ΔV и учитывая, что ρ — плотность жидкости, найдем:

$$\frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2 = \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_2.$$

Так как сечения S_1 и S_2 выбраны произвольно, то можно окончательно записать:

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = \text{const}. \tag{10.8}$$

Это и есть *уравнение Бернулли*[1], полученное им в 1738 г.

Как видно из приведенных рассуждений, уравнение Бернулли является следствием закона сохранения механической энергии

[1] Даниил Бернулли (1700—1782) — член Петербургской Академии наук.

и, следовательно, следствием второго закона Ньютона; оно справедливо для стационарного течения несжимаемой и невязкой жидкости. Это уравнение играет важную роль в динамике идеальной жидкости. Но и применение его к реальным жидкостям и газам позволяет установить общую картину распределения давления и скоростей при ламинарных течениях. Эта картина тем ближе к реальному распределению давлений и скоростей, чем меньше проявляется сжимаемость и вязкость.

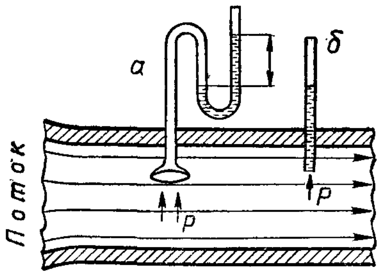


Рис. 10.8

Разберем физический смысл входящих в уравнение слагаемых. Прежде всего отметим, что все слагаемые имеют размерность давления. Слагаемое p обозначает давление внутри движущейся жидкости; его называют *статическим давлением*. В принципе статическое давление надо измерять с помощью манометра, неподвижного относительно текущей жидкости, т. е. с помощью манометра, перемещающегося вместе с жидкостью. Однако на практике статическое давление измеряют неподвижным манометром, мембрана которого или плоскость отверстия манометрической трубки (см. рис. 10.8) расположена параллельно линиям тока.

Статическое давление согласно (10.8) определяется соотношением

$$p = \mathrm{const} - \frac{\rho v^2}{2} - \rho g h. \qquad (10.8')$$

Если положить, что при $v = 0$ и $h = 0$ статическое давление $p = p_0$, то получим: $p_0 = \mathrm{const}$. Отсюда следует, что постоянная в уравнении Бернулли имеет смысл давления внутри покоящейся жидкости на уровне, принятом за начало отсчета. Таким образом, соотношение (10.8) показывает, что в текущей жидкости статическое давление p уменьшается с увеличением скорости потока и поднятием трубки тока над нулевым уровнем.

Слагаемое $\frac{\rho v^2}{2}$, называемое *динамическим давлением*, показывает, на какую величину уменьшилось давление внутри жидкости вследствие ее движения.

Слагаемое $\rho g h$ есть гидравлическое давление; оно показывает, насколько уменьшается статическое давление при поднятии трубки на высоту h.

Учитывая это, можно содержание уравнения Бернулли сформулировать так: **в установившемся движении идеальной жидкости полное давление, слагающееся из динамического, гидравлического и статического, одинаково для всех поперечных сечений трубки тока.**

Следствия из уравнения Бернулли. 1. Из (10.8′) следует, что, если скорость потока велика, давление внутри жидкости может оказаться отрицательным; при этом жидкость находится под действием растягивающих сил. Для идеальных (несжимаемых и нерастяжимых) жидкостей растягивающие напряжения, как и сжимающие, могут принимать любые значения. Однако реальные жидкости содержат взвешенные твердые частицы и растворенные газы. В большинстве случаев такие жидкости не способны воспринимать растягивающие усилия (отрицательные давления). Обычно давление в потоке не может стать ниже некоторого положительного значения p_k, близкого при обычных температурах к нулю [1]. В тех местах трубки тока, где давление доходит до этого значения, происходит нарушение непрерывности потока и образуется область, заполненная пузырьками, внутри которых находятся газ и пары жидкости. Это явление называют кавитацией. Возникновение кавитации можно трактовать как явление закипания жидкости при пониженном давлении. При дальнейшем понижении давления мелкие пузырьки объединяются и в потоке возникают большие полости — каверны, заполненные газом и парами жидкости. Возникновение кавитации существенно влияет на законы движения жидкости: уравнение Бернулли становится непригодным. Таким образом, если в ее потоке давление нигде не ниже p_k, то течение реальной жидкости подчиняется закону Бернулли [2].

Кавитация возникает вблизи минимальных сечений трубок, а также в поршневом насосе, когда давление за поднимающимся поршнем понижается до нуля. Кавитация имеет также место при обтекании различных тел потоком жидкости: подводных крыльев, гребных винтов и т. д.

Образование кавитации при обтекании тел не только ухудшает гидродинамические характеристики (например, подъемная сила подводных крыльев резко падает), но и вызывает разрушение обтекаемых тел. Образовавшиеся в области низких давлений пузырьки газа и пара перемещаются и попадают затем в область больших давлений. Здесь происходит их схлопывание, сопровождающееся значительным приращением местных давлений (до сотни атмосфер), передаваемых жидкостью (в виде ударной волны) во все направления, в том числе и на поверхность обтекаемых тел. В результате этого происходит разрушение поверхности обтекаемых тел. Кавитация обычно сопровождается вибрацией обтекаемых тел и сильным шумом, вызываемым беспорядочным схлопыванием пузырьков [3].

---

[1] Можно принять, что p_k равно давлению насыщенных паров жидкости при данной температуре.

[2] Это лишь одно из условий. Второе условие связано со значением числа Рейнольдса.

[3] Шум, возникающий в чайнике перед закипанием воды, обусловлен также схлопыванием случайно образовавшихся пузырьков. Только при температуре воды, соответствующей кипению, пузырьки становятся устойчивыми.

2. Если трубка тока расположена горизонтально, то $\rho g z$ постоянно и уравнение Бернулли примет вид:

$$p+\frac{\rho v^2}{2}=\text{const}. \qquad (10.9)$$

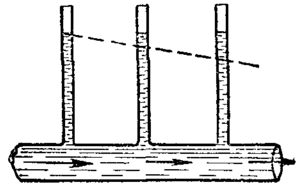


Рис. 10.9

Сумму, стоящую слева от знака равенства, называют *полным давлением*. Таким образом, **в любом месте горизонтально расположенной трубки тока полное давление остается неизменным.** Если трубка имеет еще и постоянное сечение, то скорость течения (в силу неразрывности струй) будет всюду одинакова, и, следовательно, статическое давление p должно быть неизменным по всей трубке. Например, если бы идеальная жидкость текла по трубе, имеющей отводы (манометрические трубки), то уровень жидкости во всех отводах был бы одинаковым (рис. 10.9). При течении реальных жидкостей уровень в отводах понижается в направлении течения. Значит, в реальных жидкостях давление вдоль горизонтально расположенной трубы неодинаково. Разность давления уравновешивает силы внутреннего трения.

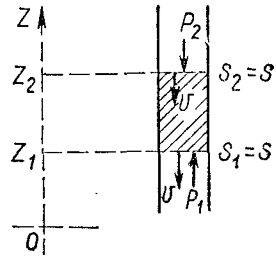


Рис. 10.10

3. Если трубка тока имеет постоянное сечение $S=\text{const}$, то в силу неразрывности потока скорость во всех сечениях будет одинаковой и уравнение Бернулли примет вид:

$$p+\rho g z=\text{const}. \qquad (10.10)$$

Сумму $p+\rho g z$ называют гидростатическим давлением. Таким образом, в трубке тока постоянного сечения гидростатическое давление одинаково по всей трубке, но статическое давление p неодинаково: оно больше для сечений, которые расположены ниже. Рассмотрим часть жидкости, заключенную между сечениями S_1 и S_2 верткально расположенной трубы (рис. 10.10). На эту часть жидкости действуют силы давления p_2S, p_1S и сила тяжести жидкости $F_{\text{тяж}}=mg(z_2-z_1)S$ (силы реакции стенок уравновешивают друг друга). Уравнение движения для выделенного объема с учетом направления действующих сил запишется так:

$$ma=p_1S-p_2S-F_{\text{тяж}}, \qquad (10.11)$$

где m и a — масса и ускорение выделенной части жидкости. Поскольку согласно уравнению Бернулли

$$p_1+\rho g z_1=p_2+\rho g z_2,$$

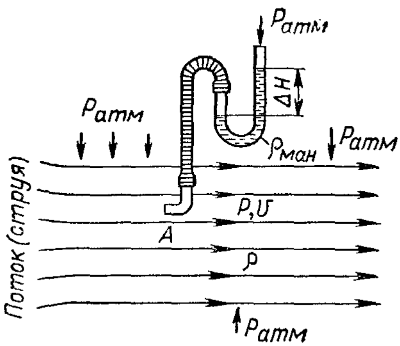


Рис. 10.11

то после группировки и умножения на S получим:

$$p_1S - p_2S = \rho g (z_2 - z_1) S.$$

Подставляем в (10.11), получим: $a = 0$.

Таким образом, идеальная жидкость течет по вертикальной трубе (вниз или вверх) равномерно потому, что сила тяжести (между определенными сечениями) уравновешивается разностью давлений. Для реальных жидкостей, обладающих вязкостью, эта разность давлений должна быть больше, нежели для идеальной жидкости, так как она должна уравновесить не только силу тяжести, но и трения.

Применение уравнения Бернулли. *1. Измерение полного давления внутри движущейся жидкости и газа. Трубка Пито.* Поместим в поток движущегося газа или жидкости манометрическую трубку (трубку Пито, см. рис. 10.11), срез которой перпендикулярен к потоку. В U-образной части манометрической трубки находится манометрическая жидкость с плотностью $\rho_{ман} > \rho$. Покажем, что разность уровней ΔH манометрической жидкости определяет полное давление внутри движущегося газа:

$$\Delta p = \rho_{ман} g \, \Delta H = p + \frac{\rho v^2}{2}.$$

Для этого выделим в потоке горизонтальную трубку тока, начинающуюся на срезе A и уходящую в бесконечность навстречу потоку. Пусть давление и скорость на большом удалении от среза A будут соответственно p и v. Такие же значения p и v будут в невозмущенной части потока около трубки Пито. На срезе A скорость равна нулю ($v_A = 0$). Запишем уравнение Бернулли для этих двух сечений трубки тока:

$$p + \frac{\rho v^2}{2} = p_A. \tag{10.12}$$

Отсюда видно, что в рассматриваемом случае измеряемое манометром давление p_A равно полному давлению в невозмущенном потоке.

2. Измерение скорости потока жидкости (трубка Прандтля). Комбинируя трубку Пито с манометрической трубкой, измеряющей статическое давление p (рис. 10.12), получим новый прибор, называемый трубкой Прандтля. Покажем, что прибор измеряет динамическое давление и может использоваться для определения скорости потока жидкости (или газа). Из рисунка

10.12 видно, что давление на жидкость в левом колене U-образной трубки равно $p_A = p + \frac{\rho v^2}{2}$, а в правом колене — p. Таким образом, по разности уровней ΔH манометрической жидкости можно судить о разности давлений в коленах:

$$\Delta p = \rho_{\text{ман}} g \, \Delta H = p_A - p,$$

или

$$\Delta p = \frac{\rho v^2}{2}. \qquad (10.13)$$

Отсюда видно, что показания прибора пропорциональны динамическому давлению внутри жидкости. Измерив манометром Δp, можно из (10.13) определить скорость течения жидкости:

$$v = \sqrt{\frac{2\,\Delta p}{\rho}}. \qquad (10.14)$$

Обычно трубке Прандля придают удобообтекаемую форму, изображенную на рисунке 10.13. В таком виде они используются на судах и самолетах как приборы для измерения скорости по отношению к воде и воздуху.

Истечение жидкости из отверстия. Рассматривая сосуд с отверстием внизу (рис. 10.14) как трубку тока, можно записать уравнение Бернулли для сечений S_1 и S_2:

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g z_1 = p_0 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g z_2, \qquad (10.15)$$

где p_0 — давление в струе, вытекающей из отверстия (оно равно атмосферному давлению, так как струя открыта); p_1 — давление над свободной поверхностью воды в сосуде. Скорость v_1 течения жидкости в сосуде мала и ее можно принять равной нулю ($v_1 \approx 0$).

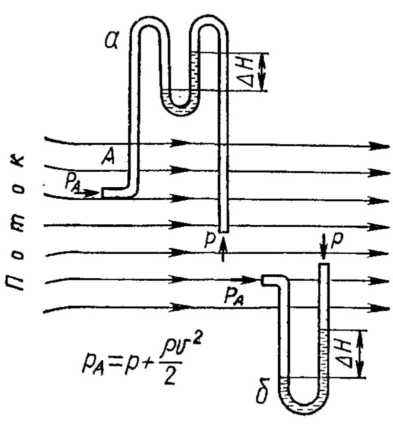


Рис. 10.12

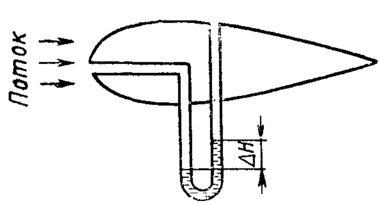


Рис. 10.13

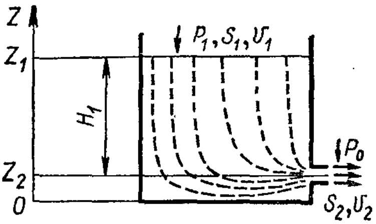


Рис. 10.14

Учитывая все это, можно уравнение (10.15) переписать так:

$$p_1 + \rho g z_1 = p_0 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g z_2.$$

Отсюда находим скорость v_2 истечения жидкости:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_0)}{\rho} + 2gH_1}. \quad (10.16)$$

Если $p_1 = p_0$, т. е. давление на свободной поверхности жидкости равно атмосферному, то

$$v_2 = \sqrt{2gH_1}. \quad (10.17)$$

Как известно, такую же скорость получит материальная точка, свободно падающая с высоты H_1 или соскальзывающая по криволинейной связи без трения. Выражение (10.17) носит название *формулы Торричелли.*

3. ИМПУЛЬС ЖИДКОСТИ И ГАЗОВ

Определить, как распределяется давление в сложном потоке жидкости, часто оказывается затруднительным. Не зная этого распределения, невозможно рассчитать силы, действующие со стороны жидкости на стенки трубы или на тела, находящиеся в потоке. Однако это затруднение в ряде случаев можно обойти, опираясь на теорему об изменении импульса жидкости (второй закон Ньютона).

Поясним сказанное на примерах.

1. Истечение жидкости из отверстия. Из сосуда через отверстие вытекает жидкость (рис. 10.14).

При этом внутри сосуда происходит перераспределение давлений в соответствии с законом Бернулли.

Если бы мы нашли распределение давлений в текущей жидкости, то смогли бы определить силу давления на любой элемент поверхности сосуда:

$$dF = p\, dS.$$

Векторным суммированием можно затем найти результирующую силу. Однако этот путь сложен. Рассчитать результирующую силу можно следующим обходным путем.

Как уже было показано, жидкость вытекает из отверстия со скоростью $v = \sqrt{2gH}$. Если площадь отверстия равна S, то масса вытекающей за время dt жидкости равна $\rho S v dt$, а уносимый ею импульс

$$dp = \rho S v^2\, dt = 2\rho S g H\, dt. \quad (10.18)$$

Следовательно, на вытекающую жидкость согласно второму закону Ньютона должна действовать сила

$$F = \frac{dp}{dt} = 2\rho SgH, \qquad (10.19)$$

направленная в сторону струи (горизонтально). Такая сила действует на жидкость со стороны сосуда[1]. По третьему закону Ньютона и жидкость действует на сосуд с равной, но противоположно направленной силой $\vec{F}' = -\vec{F}$. Таким образом, при свободном истечении[2] результирующая сил давления жидкости на стенки сосуда равна

$$F' = 2\rho SgH.$$

Если жидкость и сосуд рассматривать как замкнутую систему, то $\vec{F}$ и $\vec{F}'$ являются внутренними силами взаимодействия, которые не могут изменить общего импульса системы. Какой импульс получит вытекающая часть жидкости, такой же импульс, но в противоположную сторону получит сосуд с остальной жидкостью.

Силу F' называют силой реакции струи, а движение, вызванное этой силой, представляет собой реактивное движение.

2. Течение жидкости по изогнутой трубе. Подсчитаем результирующую сил давления на стенки трубы. Из общих соображений ясно, что на каждую частицу жидкости, движущуюся по криволинейной траектории, должна действовать некоторая сила, направленная к центру кривизны траектории. Для внутренних частиц эта сила обусловлена разностью давлений в направлении, перпендикулярном к линии тока. Очевидно, что в изогнутых трубах давление по площади поперечного сечения не может быть одинаковым: оно тем больше, чем дальше от центра кривизны линий тока находится соответствующая точка.

Необходимая для криволинейного движения разность давлений возникает в конечном счете вследствие давления стенок трубы на текущую жидкость (обусловленного деформацией). Результирующая всех сил давления, которое оказывают стенки трубы на жидкость, отлична от нуля и направлена в сторону вогнутости трубы. Очевидно, по третьему закону Ньютона жидкость будет оказывать на трубу равное и противоположное по направлению действие. Это действие есть результирующая сил давления жидкости на стенки трубы. Если бы было известно распределение давления жидкости вдоль стенок трубы, можно было бы теоретически подсчитать эту результирующую. Однако такой путь расчета сложен. Проще эта задача решается на основе теоремы об изменении импульса.

[1] Сила тяжести действует вертикально и не может изменить импульс жидкости в горизонтальном направлении.

[2] При этом давление над свободной поверхностью равно атмосферному.

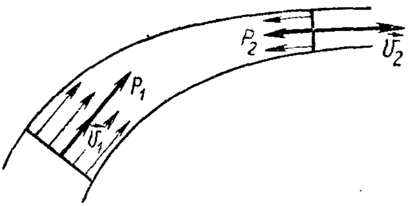


Рис. 10.15

В неподвижной изогнутой трубе (рис. 10.15) выделим объем жидкости, заключенный между сечениями S_1 и S_2. Будем считать течение установившимся, жидкость идеальной и невесомой. Примем скорость движения жидкости постоянной[1] по поперечному сечению трубы и обозначим через $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ скорости в сечениях S_1 и S_2 соответственно. Тогда за время Δt через сечение S_1 (рис. 10.15) втечет масса жидкости, равная $\rho S_1 v_1 dt$. Она принесет с собой импульс $\rho S_1 v_1 dt \vec{v}_1$. За это же время через сечение S_2 вытечет такая же масса: $\rho S_2 v_2 dt = \rho S_1 v_1 dt$, которая унесет импульс $\rho S_1 v_1 dt \vec{v}_2$, отличающийся от первого по модулю и направлению. Таким образом, часть жидкости, заключенная между сечениями S_1 и S_2, получит за промежуток времени dt изменение импульса

$$d\vec{P} = (\rho S_2 v_2 \vec{v}_2 - \rho s_1 v_1 \vec{v}_1)\, dt = \rho S_1 v_1 (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)\, dt.$$

Согласно второму закону Ньютона изменение импульса в единицу времени равно результирующей $\vec{F}$ всех сил, действующих на выделенный объем жидкости:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$$

или

$$\rho S_1 v_1 (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \vec{F}.$$

Так как весом жидкости мы пренебрегаем, то $\vec{F}$ есть результирующая всех сил, действующих на жидкость со стороны трубы. По третьему закону Ньютона результирующая сил, с которыми жидкость действует на трубу между сечениями S_1 и S_2, равна

$$\vec{F}' = -\vec{F} = \rho S_1 v_1 (\vec{v}_1 - \vec{v}_2). \qquad (10.20)$$

Здесь $\vec{F}'$ есть сила реакции текущей жидкости.

Задача. По трубе радиуса $R = 10$ см, изогнутой под углом $\alpha = 120°$ (рис. 10.16), течет вода. Ее расход $Q = v_1 S = 0{,}1$ м^3/с.

Определите результирующую сил давления на стенку трубы.

---

[1] Вообще скорость движения частиц жидкости неодинакова по поперечному сечению изогнутой трубы. Однако при малых сечениях (когда диаметр много меньше радиуса искривления трубы) этим различием можно пренебречь. В противном случае поток жидкости надо разбить на систему трубок тока с малыми сечениями.

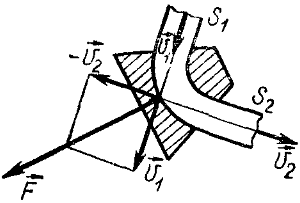


Рис. 10.16

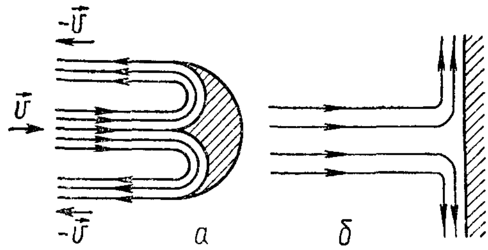


Рис. 10.17

Решение. Так как сечение трубы везде одинаково ($S_1 = S_2 = S$), то скорость течения воды в обоих сечениях также одинакова по модулю ($v_1 = v_2 = v$), но различается направлением. Учитывая, что $v_1 S = Q$, можно для результирующей силы записать:

$$\vec{F}' = \rho Q (\vec{v}_1 - \vec{v}_2),$$

или (для модуля этой силы):

$$|\vec{F}'| = \rho Q |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| = 2\rho Q v_1 \cos\frac{\alpha}{2} = 318\text{Н}.$$

Если труба изогнута под прямым углом, то $|\vec{F}'| = 448$ Н. Наибольшая сила реакции имеет место при изгибе трубы на 180°, т. е. когда труба меняет направление движения воды на противоположное:

$$|\vec{F}'| = \rho Q |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| = 2\rho Q v_1 = 636\text{Н}.$$

Формула (10.20) справедлива не только для трубы, но и вообще для любого тела, изменяющего направление движения струи сечением S. При этом сила реакции струи

$$\vec{F}' = \rho S_1 v_1 \vec{v}_1 - \rho S_1 v_1 \vec{v}_2 = \rho Q \vec{v}_1 - \rho Q \vec{v}_2 = m\vec{v}_1 - m\vec{v}_2 \quad (10.21)$$

выражается через изменение импульса жидкости, падающей на тело за 1 с. Эту силу легко подсчитать, если известна масса жидкости, протекающей за 1 с (расход Q), скорость и направление струи до и после падения на тело. Условием получения наибольшей силы реакции (когда тело неподвижно) является изменение направления струи на противоположное. Например, при падении струи на тело в форме желобка с рассекающим ребром[1] (рис. 10.17, *а*) давление в два раза больше, чем при падении той же струи на плоскую площадку (рис. 10.17, *б*).

---

[1] Такую форму придают, например, лопаткам колеса турбины, чтобы получить максимальную силу давления.

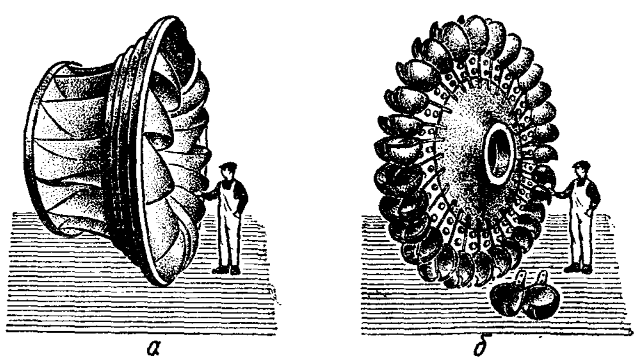
4. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭНЕРГИИ ТЕКУЩЕЙ ЖИДКОСТИ

Сила реакции текущей жидкости используется в паровых и водяных турбинах. Струя пара или жидкости, протекая по искривленным каналам (как бы по трубам) колеса турбины, изменяет направление своего движения и создает силы реакции, которые вызывают вращение колеса турбины (рис. 10.18, *а*). В других конструкциях (рис. 10.18, *б*) струя воды или пара ударяется о лопатки колеса турбины; изменяя направление своего движения, она создает силу реакции, приводящую колесо турбины во вращение. Лопаткам колес придают такую форму, чтобы струя под их действием изменяла в наибольшей степени направление своего движения (рис. 10.17, *а*); в этом случае возникает и наибольшая сила реакции. Однако, если тело, изменяющее направление движения струи, неподвижно, частицы жидкости (и весь поток) сохраняют кинетическую энергию, и движущаяся жидкость работы не производит (трение не учитывается).

Но если тело, с которым взаимодействует поток жидкости (лопатки турбины, например), движется, то струя, падающая на него со скоростью v_1, отклоняется от первоначального направления и стекает с него со скоростью $v_2 < v_1$ (тело движется в сторону струи). Если в секунду о движущуюся лопатку турбины ударяется масса жидкости m_1, то работа, совершаемая потоком ежесекундно, равна потере кинетической энергии жидкости за секунду:

$$A = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_2^2}{2}.$$

Работа, совершаемая потоком жидкости, зависит и от скорости движения лопаток турбины. Если лопатка движется со скоростью жидкости, то давление на нее со стороны жидкости



а *б*

Рис. 10.18

равно нулю[1] и работа равна нулю. Если лопатка неподвижна, то давление на нее будет наибольшим; но, поскольку лопатка не перемещается, работа равна нулю.

Можно показать, что работа, производимая потоком, будет наибольшей, когда лопатки турбины движутся со скоростью, равной половине скорости потока. Действительно, если лопатка движется со скоростью v, а сила реакции жидкости равна F, то работа $A(v) = Fv$ является функцией скорости. Силу реакции F можно подсчитать по изменению импульса жидкости в системе отсчета, относительно которой лопатка неподвижна. Очевидно, что в этой системе отсчета скорость потока до удара равна $v_1 - v$ (где v_1 и v — скорости потока и лопатки в неподвижной системе отсчета). Если лопатка изменяет направление струи на противоположное (условие наибольшей силы), то скорость потока после удара будет $-(v_1 - v)$. В рассматриваемой (подвижной) системе отсчета сила реакции струи согласно (10.21) равна:

$$F' = m(v_1 - v) - [-m(v_1 - v)] = 2m(v_1 - v).$$

Как ньютоновская сила, она не изменяется при переходе к неподвижной системе отсчета. Поэтому в неподвижной системе отсчета работа в единицу времени представится формулой:

$$A(v) = 2m(v_1 - v)\,v. \tag{10.22}$$

Приравнивая нулю производную по v (условие экстремума функции $A(v)$), найдем:

$$2m(v_1 - 2v) = 0.$$

Отсюда скорость движения лопатки $v = \frac{v_1}{2}$, что и требовалось доказать.

Обратим внимание на то, что при указанных условиях скорость потока жидкости в подвижной системе отсчета после удара равна:

$$-\left(v_1 - \frac{v_1}{2}\right) = -\frac{v_1}{2},$$

а в неподвижной системе она складывается из переносной скорости $v_{пер}$ (скорость движения лопатки) и относительной $v_{отн} = -\frac{v_1}{2}$:

$$v_2 = v_{пер} + v_{отн} = 0.$$

---

[1] Точнее, равно атмосферному, так как струя открыта, но на обратную сторону лопатки действует воздух с точно таким же давлением. Результирующая этих сил равна нулю.

Отсюда следует, что при указанной скорости лопаток вся кинетическая энергия потока расходуется на совершение работы, т. е. энергия движущейся жидкости используется полностью (КПД = 1). Однако на практике КПД установок меньше единицы и имеет значение от 0,75 до 0,95 в зависимости от их конструкции и мощности. Это уменьшение КПД объясняется невозможностью осуществить отражение потока с нулевой скоростью, а также вязкостью жидкости и различными потерями энергии в самих установках.

Описанным выше способом преобразуют на гидроэлектростанциях энергию естественных водных потоков (рек) в электрическую энергию. Для этого на одном валу с турбиной размещают ротор электрического генератора.

Вопросы для самопроверки

1. Какое движение жидкости называют установившимся? Что называют линией тока? Покажите, что при установившемся движении линия тока совпадает с траекторией движения частицы жидкости. Какое принято условие относительно густоты линий тока? В чем смысл этого условия?

2. Какой вид имеет уравнение неразрывности для сжимаемой и несжимаемой жидкости? Каковы следствия из этого уравнения? Из каких физических предпосылок вытекает уравнение неразрывности?

3. Напишите уравнение Бернулли и поясните смысл входящих в него членов. Выведите уравнение Бернулли, опираясь на второй закон Ньютона. Попробуйте вывести это уравнение на основе закона сохранения энергии.

4. Как можно измерить статическое давление p внутри движущейся жидкости, как устроена трубка Пито и какое давление с ее помощью измеряется? Как устроена трубка Прандтля и как с ее помощью можно измерить скорость потока?

5. Выведите формулу Торричелли для скорости истечения жидкости из отверстия в сосуде. Поясните, почему скорость частиц жидкости имеет такую же величину, как если бы они свободно падали с высоты H (см. рис. 10.14). Покажите, что при вытекании газа под большим давлением скорость истечения обратно пропорциональна квадратному корню из плотности.

6. Как можно выразить результирующую силу давления текущей жидкости на стенки изогнутой трубы через изменение импульса?

7. Пока отверстие закрыто пробкой (рис. 10.14), сила давления на пробку равна ϱgSH, а результирующая сила давления на стенки сосуда равна нулю. В отсутствие же пробки результирующая сила давления равна не ϱgSH, а $2\varrho gHS$, т. е. в два раза больше, чем давление на пробку. Объясните почему.

8. Реактивная сила струи (рис. 10.14) равна $F' = 2\varrho SgH$. С другой стороны, мы знаем, что реактивная сила выражается формулой $F' = \mu W$, где μ — масса частиц, отделяющихся от тела за секунду; W — скорость частиц относительно основного тела (например, ракеты). Покажите, что обе формулы дают одинаковый результат.

9. Формула реакции текущей жидкости на стенки изогнутой трубы справедлива для установившегося течения идеальной жидкости. Укажите, где при выводе этой формулы учитывалось, что жидкость идеальная и что движение установившееся.

10. Покажите, что сила реакции струи жидкости на лопатку турбины наибольшая, когда лопатка неподвижна. Подсчитайте, во сколько раз эта сила уменьшится, если лопатка будет двигаться (в сторону струи) со скоростью, равной половине скорости движения частиц струи. Покажите, что в этом случае работа силы реакции имеет наибольшее значение, а КПД = 1.

Занятие 27

ДИНАМИКА РЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ И ГАЗА

Реальные жидкости и газы обладают вязкостью и сжимаемостью. И если для жидкости более характерной чертой является вязкость, то для газа при достаточно большой скорости движения (более 70 м/с) определяющим свойством будет сжимаемость. Сжатие газа сопровождается нагреванием, поэтому полностью описать движение сжимаемого газа в рамках механики (не привлекая понятий из учения о теплоте) невозможно. По этой причине мы рассмотрим в основном движение жидкости и газа с учетом лишь внутреннего трения (вязкости).

Как указывалось, в некоторых случаях вязкостью жидкости (газа) можно пренебречь. Однако имеются такие явления, при описании которых вязкостью пренебрегать нельзя. Рассмотрим для примера явление обтекания шара горизонтальным потоком жидкости (вес жидкости во внимание не принимаем). На рисунке 10.19, *а* показаны линии тока в невозмущенном потоке, а на рисунке 10.19, *б* — линии тока в возмущенном потоке. «Возмущение» состоит в искривлении линий тока и их уплотнении в направлении AB (см. рис. 10.19, *б*).

Если не учитывать вязкости, то линии тока будут симметричны относительно плоскости AB, перпендикулярной к потоку, и плоскости CD, параллельной невозмущенному потоку[1].

Такую же симметрию будут иметь и трубки тока, непосредственно прилегающие к поверхности шара (на рис. 10.19, *б* эти трубки показаны штриховкой). Согласно уравнению Бернулли с такой же симметрией распределится и давление жидкости на поверхность шара. Давление на линии AB меньше, чем на линии CD, так как трубки тока вблизи линии AB сужены и скорость течения здесь больше, чем вблизи линии CD.

Ввиду симметричного распределения давления равнодействующая всех сил давления на поверхность шара равна нулю[2]. Мы приходим к выводу, что шар никакого давления со стороны обтекающей его жидкости не испытывает (парадокс Даламбера). Од-

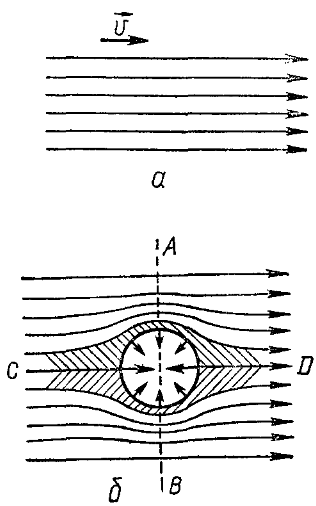


Рис. 10.19

[1] Симметрия имеет место только для невесомой жидкости.

[2] Если учесть вес жидкости, то равнодействующая окажется равной архимедовой силе, направленной вертикально вверх; сумма же горизонтальных составляющих сил давления и в этом случае равна нулю, и тело не будет увлекаться жидкостью.

нако непосредственный опыт показывает, что шар в потоке испытывает действие сил в направлении движения жидкости. Таким образом, пренебрежение вязкостью здесь недопустимо.

1. СИЛЫ ВЯЗКОСТИ. КОЭФФИЦИЕНТ ВЯЗКОСТИ

Силы вязкости, или силы внутреннего трения, возникают при относительном движении слоев жидкости (газа). Они приложены к слоям жидкости и действуют по касательной к ним. Два слоя, движущихся друг относительно друга, взаимодействуют вдоль поверхности раздела с равными по модулю и противоположными по направлению силами внутреннего трения. Физические причины появления таких сил различны для жидкостей и газов. В жидкостях эти силы обусловлены главным образом сцеплением между молекулами, принадлежащими разным слоям. В газах сцепление между молекулами мало, а их подвижность, наоборот, велика. Поэтому образование сил внутреннего трения в газах происходит в основном за счет обмена молекулами между движущимися слоями. Однако опыт показывает, что в жидкостях и газах силы внутреннего трения подчиняются одному и тому же закону. Поясним его на примере течения, при котором плоские слои движутся параллельно друг другу с разными скоростями.

Выделим в потоке два параллельных, равных по площади слоя, отстоящих друг от друга на Δz (рис. 10.20, *а*). Изменение скорости от слоя к слою с увеличением координаты z происходит по линейному закону[1] (рис. 10.20, *б*). Опыт показывает, что на каждый слой действует сила $\vec{F}$, пропорциональная площади слоев S и величине $\frac{\Delta v}{\Delta z}$, характеризующей быстроту изменения скорости слоев при переходе от слоя к слою, т. е. в направлении, перпендикулярном к слоям (по оси z):

$$F \sim S \frac{\Delta v}{\Delta z}.$$

Величину $\frac{\Delta v}{\Delta z}$ называют градиентом скорости.

[1] Этого всегда можно добиться, уменьшая расстояние между слоями.

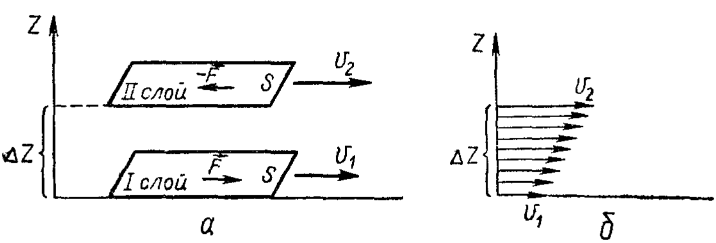


Рис. 10.20

Введя коэффициент пропорциональности η, переходим от пропорциональной зависимости к равенству (формуле Ньютона):

$$F = \eta S \frac{\Delta v}{\Delta z}. \tag{10.23}$$

Коэффициент пропорциональности η зависит, как всегда, от выбора единиц измерения величин, входящих в (10.23). Однако опыт показывает, что этот коэффициент зависит также от рода жидкости или газа и, следовательно, характеризует вязкие свойства жидкости или газа. Поэтому он называется *коэффициентом внутреннего трения* или *коэффициентом вязкости*, а иногда и просто *вязкостью*[1].

Единица измерения вязкости устанавливается из соотношения

$$\eta = \frac{F}{S\frac{\Delta v}{\Delta z}}. \tag{10.24}$$

Отсюда определение: за единицу вязкости в системе СИ принимается вязкость такой жидкости, в которой между двумя слоями площадью $S = 1$ м^2 при градиенте скорости $\frac{\Delta v}{\Delta z} = 1\ \frac{1}{\text{с}}$ возникает сила внутреннего трения F, равная 1 Н. Эту единицу называют ньютон-секунда на метр в квадрате. Аналогичным образом определяется единица измерения вязкости и в системе СГС, где оно имеет название — пуаз (в честь ученого Пуазейля).

Вязкость газов в сотни раз меньше вязкости жидкостей. Вязкость зависит от температуры: в жидкостях с повышением температуры вязкость уменьшается, в газах — увеличивается. Значения η для различных веществ приведены в таблице 10.1.

Таблица 10.1

Вещества	Коэффициент вязкости (в пуазах)		
	$t=0$ °C	$t=18$ °C	$t=99$ °C
Эфир	$0{,}29 \cdot 10^{-2}$	$0{,}25 \cdot 10^{-2}$	—
Вода	$1{,}80 \cdot 10^{-2}$	$1{,}10 \cdot 10^{-2}$	$0{,}29 \cdot 10^{-2}$
Ртуть	$1{,}70 \cdot 10^{-2}$	$1{,}60 \cdot 10^{-2}$	$1{,}20 \cdot 10^{-2}$
Глицерин	46	15	
Аргон	$2{,}10 \cdot 10^{-4}$	$2{,}21 \cdot 10^{-4}$	—
Воздух	$1{,}71 \cdot 10^{-4}$	$1{,}81 \cdot 10^{-4}$	$2{,}20 \cdot 10^{-4}$
Углекислый газ	$1{,}39 \cdot 10^{-4}$	$1{,}46 \cdot 10^{-4}$	$1{,}86 \cdot 10^{-4}$

[1] Точнее, *динамической вязкостью,* так как есть еще *кинематическая вязкость.*

Вернемся к формуле Ньютона (10.23). Если скорости слоев изменяются с расстоянием нелинейно, то вместо отношения $\frac{\Delta v}{\Delta z}$ нужно пользоваться его пределом:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta z} = \frac{dv}{dz}.$$

Тогда формула (10.23) примет вид:

$$F = \eta S \frac{dv}{dz}, \tag{10.25}$$

где F — сила внутреннего трения, действующая на некоторый слой жидкости площадью S, а $\frac{dv}{dz}$ — градиент скорости в непосредственной близости к этому слою.

Используя понятие касательного напряжения $\tau = \frac{F}{S}$, которое в рассматриваемом случае имеет смысл силы вязкости, действующей на единицу поверхности слоя, можно формулу (10.25) записать так:

$$\tau = \eta \frac{dv}{dz}. \tag{10.26}$$

Касательное напряжение $\tau = \frac{dF}{dS}$ в общем случае неодинаково в разных точках поверхности. Сила вязкости, действующая на элемент поверхности dS, равна $dF = \tau dS$. Поэтому полная сила вязкости может быть найдена так:

$$F = \int_S \tau \, dS.$$

Слоистое течение с градиентом скорости обычно возникает так. В результате молекулярного сцепления тонкий слой жидкости «прилипает» к поверхности твердого тела. И если это тело движется относительно жидкости, то вместе с ним движется и прилипший слой, который благодаря силам вязкого трения увлекает соседний слой, а тот в свою очередь — следующий слой и т. д. По мере удаления от поверхности тела в перпендикулярном направлении скорости слоев жидкости убывают, что и означает возникновение градиента скорости.

2. ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПО ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЕ. ФОРМУЛА ПУАЗЕЙЛЯ

При стационарном течении в трубе постоянного радиуса R все слои жидкости движутся равномерно. Однако скорости различных слоев различны. Слой, прилипший к стенкам трубы, неподвижен. Этот слой имеет форму цилиндрической трубки. Все другие слои жидкости представляют собой цилиндрические трубки, вставленные одна в другую, скорость движения которых возрастает по мере приближения к оси трубы.

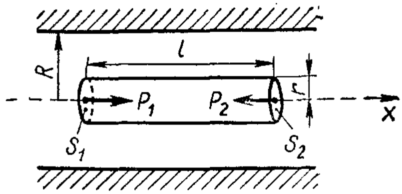


Рис. 10.21

Распределение скорости по сечению трубы. Выделим в потоке цилиндрический элемент жидкости длиной l, расположенный по оси трубы (рис. 10.21). На выделенный элемент, кроме силы тяжести, действуют еще со стороны окружающей жидкости силы нормального давления и силы внутреннего трения, касательные к боковой поверхности цилиндра. При стационарном течении сумма действующих сил равна нулю. Очевидно, что силы давления на боковую поверхность уравновешиваются силой тяжести, действующей на выделенный объем жидкости; силы же давления на основания цилиндра уравновешиваются силами внутреннего трения, касательными к его боковой поверхности. Если давление в некотором сечении трубы считать постоянным по всему сечению (т. е. пренебречь весом жидкости), то второе условие стационарности

$$\vec{F}_{1\,\text{давл}} + \vec{F}_{2\,\text{давл}} + \vec{F}_{\text{вязк}} = 0$$

запишется так (см. рис. 10.21):

$$p_1\pi r^2 - p_2\pi r^2 - \tau 2\pi r l = 0, \qquad (10.27)$$

где p_1 и p_2 — давление в сечении 1 и 2; τ — сила вязкости, приходящаяся на единицу поверхности [1]. Учитывая, что

$$\tau = -\eta \frac{dv}{dr}$$

(знак минус взят потому, что скорость течения слоя уменьшается с увеличением радиуса r), можно уравнение (10.27) записать так:

$$r(p_1 - p_2) + 2l\eta \frac{dv}{dr} = 0.$$

Отсюда

$$dv = -\frac{(p_1 - p_2)}{2l\eta} r\,dr,$$

что после интегрирования дает:

$$v = -\frac{(p_1 - p_2)}{4l\eta} r^2 + C.$$

[1] Эта величина постоянна по всей боковой поверхности выделенного цилиндра, так как по условию симметрии все частицы, равноудаленные от оси цилиндра, имеют одинаковую скорость.

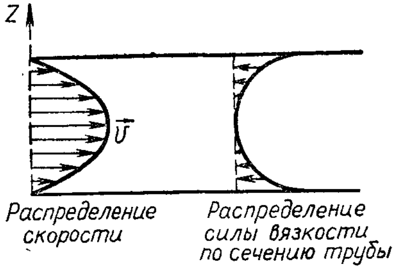


Рис. 10.22

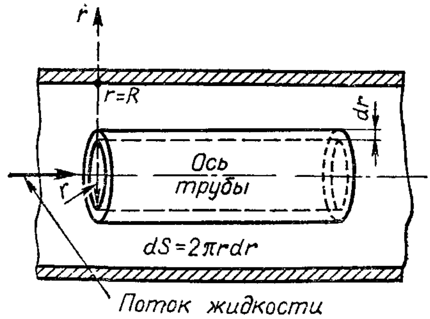


Рис. 10.23

Исходя из граничного условия, состоящего в том, что около стенок трубы ($r = R$) скорость частиц жидкости равна нулю, получаем для постоянной интегрирования следующее выражение:

$$C = \frac{p_1 - p_2}{4l\eta} R^2.$$

Таким образом, распределение скорости по сечению трубы будет определяться формулой

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4l\eta} (R^2 - r^2). \tag{10.28}$$

Отсюда видно, что изменение скорости вдоль радиуса сечения происходит по параболическому закону (рис. 10.22). Скорость жидкости максимальна на оси трубы, где она имеет значение

$$v_{\text{макс}} = \frac{p_1 - p_2}{4l\eta} R^2.$$

Из формулы (10.28) и графика распределения скорости видно, что градиент скорости имеет наибольшее значение у стенок трубы и наименьшее (нулевое) на оси. В соответствии с этим будут распределяться и силы вязкости τ (рис. 10.22).

Полный расход жидкости через сечение трубы. Выделим в жидкости цилиндрический слой радиуса r и толщиной dr (рис. 10.23). Расход жидкости для этого слоя равен:

$$dQ = v\,dS = v 2\pi r\,dr.$$

Для всего сечения расход можно найти путем интегрирования:

$$Q = \int_9^R dQ = \frac{2\pi (p_1 - p_2)}{4l\eta} \int_0^R (R^2 - r^2)\, r\,dr,$$

$$Q = \frac{\pi (p_1 - p_2)}{8l\eta} R^4. \tag{10.29}$$

Это и есть известная формула (закон) Пуазейля. Согласно этому закону при стационарном течении жидкости в цилиндрической трубе расход жидкости пропорционален четвертой степени радиуса (R^4) и перепаду давления, приходящемуся на единицу осевой длины трубы $\left(\frac{p_1 - p_2}{l}\right)$. Закон Пуазейля (10.23) дает возможность измерить коэффициент вязкости η жидкости путем определения ее расхода в цилиндрической трубе. На этом принципе основано действие вискозиметра Оствальда — прибора для измерения вязкости. Закон Пуазейля используется также в вакуумной технике при расчетах степени откачки воздуха.

По расходу Q можно найти среднюю скорость течения жидкости по трубе:

$$v_{\text{ср}} = \frac{Q}{S}.$$

Из соотношения (10.29) следует, что перепад давления в вязкой жидкости пропорционален средней скорости:

$$p_1 - p_2 = \Delta p = \frac{8l\eta}{R^2} v_{\text{ср}}. \qquad (10.30)$$

Для идеальной жидкости $\Delta p = 0$ и перепад давления от скорости не зависит.

Зависимость Δp от $v_{\text{ср}}$ для вязких жидкостей обусловлена тем, что с увеличением $v_{\text{ср}}$ возрастает градиент скорости, ибо у стенок трубы скорость течения равна нулю, а с ростом градиента скорости увеличиваются силы вязкого трения между всеми слоями жидкости.

3. ЛАМИНАРНОЕ И ТУРБУЛЕНТНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ

Обратимся к следующему опыту. Через горизонтально расположенную стеклянную трубку пропускают воду, скорость течения которой регулируют напором. Для наблюдения за характером движения воды вводят внутрь потока струйку подкрашенной жидкости (рис. 10.24). Производя наблюдения при различных скоростях потока, можно заметить, что при небольших скоростях течения подкрашенная струйка сохраняется (не размывается) на всей длине трубки. Это говорит о том, что частицы жидкости не переходят из одного слоя в другой. Течение

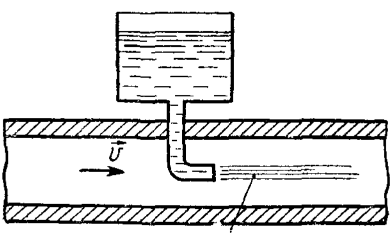


Рис. 10.24

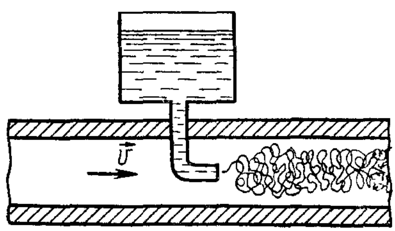


Рис. 10.25

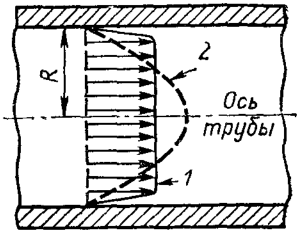


Рис. 10.26

является слоистым: слои жидкости скользят друг относительно друга, не перемешиваясь. Такое движение жидкости называют *ламинарным.*

Если увеличить скорость движения воды, то при достижении определенного ее значения подкрашенная струйка начнет размываться по всему сечению трубки (рис. 10.25), что указывает на возникновение перемешивания жидкости. Появляется новый вид движения, называемый *турбулентным.* Таким образом, для вязкой жидкости наблюдаются два вида движения: ламинарное и турбулентное.

Ламинарное движение. С примером ламинарного (слоистого) движения вязкой жидкости мы познакомились при выводе формулы Пуазейля. К ламинарному виду относится установившееся (стационарное) течение идеальной жидкости. Однако в идеальной жидкости между движущимися слоями не возникают силы внутреннего трения. Поэтому ламинарное течение остается таковым при любых скоростях. Силы внутреннего трения, возникающие между слоями реальной (вязкой) жидкости, оказывают существенное влияние на характер движения. Если эти силы невелики и средняя (по сечению трубки) скорость течения мала, то движение является ламинарным. При этом скорость слоев изменяется от оси трубки к стенкам по параболическому закону (рис. 10.22). Если же силы внутреннего трения достигают некоторой определенной величины, то их воздействие на слои жидкости настолько велико, что это приводит к нарушению слоистости течения и возникновению перемешивания. Механизм перехода от ламинарного к турбулентному движению мы разберем несколько ниже.

Турбулентное движение. Число Рейнольдса. Турбулентное движение не стационарно: скорость v и давление p в каждой точке колеблются около некоторых средних значений. Поэтому при турбулентном движении можно говорить лишь о средних (по времени) значениях скорости и давления в каждой точке сечения трубы. Изменение средней скорости в зависимости от расстояния от оси трубы имеет вид, представленный на рисунке 10.26 сплошной кривой *1* (пунктирной кривой *2* показано изменение скорости при ламинарном течении).

В результате перемешивания слоев жидкости средняя скорость практически одинакова по всему сечению. Только в очень тонком слое, примыкающем к стенкам трубы, сохраняется градиент скорости, который в этом случае намного больше градиента в этом же слое при ламинарном течении.

Формула Пуазейля неприменима для турбулентного движения. Для одного и того же перепада давления Δp расход жидкости Q при турбулентном движении меньше, чем при ламинарном. Это объясняется тем, что при турбулентном движении резко возрастают силы внутреннего трения, так как между стенкой и турбулентным потоком вследствие явления прилипания возникает очень тонкий слой с большим поперечным градиентом скорости. Увеличение внутреннего трения обусловлено еще и тем, что коэффициент вязкости η возрастает при переходе к турбулентному движению.

Исследуя вопрос о зарождении турбулентности при течении жидкости по трубам, Рейнольдс[1] установил, что характер течения зависит от значения безразмерной величины

$$Re = \frac{\rho v D}{\eta}, \qquad (10.31)$$

где ρ — плотность жидкости; η — вязкость; v — средняя по сечению трубы скорость потока; D — диаметр трубы.

Величину Re называют *числом Рейнольдса.* Опыт показывает, что при малых значениях Re течение жидкости (или газа) является ламинарным, а при больших — турбулентным. Значение числа Рейнольдса и соответствующее ему значение скорости v, характеризующее переход от ламинарного к турбулентному течению, называют *критическими* ($Re_{кр}$, $v_{кр}$). Изучая на опыте движение жидкости и газа по трубам в обычных условиях, установлено, что

$$Re_{кр} = \frac{\rho v_{кр} D}{\eta} = 2\,300. \qquad (10.32)$$

Это означает, что если для некоторого потока $Re < 2300$, то течение ламинарное; если $Re > 2300$ — течение турбулентное. Опыт показывает, что при Re, близком к $Re_{кр}$, ламинарное течение неустойчиво и очень чувствительно к разного рода факторам (резкие переходы в трубе, шероховатость стенок, вибрации и др.). Устраняя эти факторы, т. е. создавая специальные условия, можно добиться, что ламинарное течение сохранится вплоть до значения $Re = 10\,000$. Это явление получило название *затягивания ламинарного режима.* В настоящее время в связи с созданием длиниых линий газо- и нефтепроводов вопрос «затрагивания» приобретает большое практическое значение; так как силы внутреннего трения при ламинарном течении значительно меньше, чем при турбулентном, то при одном и том же расходе перекачка жидкости при ламинарном течении требует меньших перепадов давления и, следовательно, меньших затрат энергии.

Число Рейнольдса в общем случае. Динамическое подобие. Поток, обтекающий тело, также может быть или ламинарным, или турбулентным. При этом оказывается, что вид потока

---

[1] Осборн Рейнольдс (1842—1912) — английский физик.

по-прежнему зависит от числа Рейнольдса, но записанного в более общей форме:

$$Re = \frac{\rho v l}{\eta}, \tag{10.33}$$

где l — некоторый характерный размер тела (если применить (10.33) к трубе, то надо положить $l = D$).

Потоки жидкости с различными ρ, v, η, обтекающие тела различного масштаба, будут совершенно одинаковыми (динамически подобными), если число Re для потоков одинаково и тела имеют подобную форму. Это динамическое подобие используется при моделировании обтекания реальных объектов обтеканием уменьшенных моделей. Например, для выяснения особенностей обтекания воздухом спортивного самолета, имеющего скорость $u = 200$ км/ч, можно пользоваться моделью, уменьшенной в три раза. Но при этом модель нужно продувать воздухом со скоростью, которая определяется из равенства чисел Рейнольдса $Re_{\text{сам}} = Re_{\text{модель}}$:

$$\frac{\rho L u}{\eta} = \frac{\rho l v}{\eta}.$$

Отсюда

$$v = \frac{L}{l} u = 3 \cdot 200 = 600 \ \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

Обдувание моделей производится в специальных устройствах, называемых *аэродинамическими трубами.*

4. ВИХРЕВОЙ ХАРАКТЕР ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Как отмечалось, внешне потоки вязкой жидкости делятся на слоистые (ламинарные) и турбулентные. Более глубокое рассмотрение вопроса приводит к более тонким понятиям *невихревого* и *вихревого* движения, играющим важное значение при объяснении ламинарности и турбулентности, а также явления обтекания тел и возникновения подъемной силы крыла.

Если жидкость течет так, что ее частицы движутся только поступательно (т. е. без вращения), течение называют невихревым (или потенциальным). Невихревое движение подчиняется принципу суперпозиции, согласно которому наложение двух невихревых потоков дает результирующий поток также невихревой, в котором скорость движения какой-либо частицы жидкости определяется как геометрическая сумма скоростей, которые она имеет, участвуя в одном и другом движении.

Движение жидкости (газа) называют вихревым (непотенциальным), если каждый элемент жидкости, кроме поступательного движения, совершает еще и вращение около собственной оси. Выяснение сущности вихревого движения мы начнем с рассмотрения одиночного вихря.

Вихрь. Предположим, что в покоящуюся однородную вязкую жидкость неограниченного объема мы поместили круглый цилиндр радиуса r_0 бесконечной длины. Приведем цилиндр во вращение вокруг оси с угловой скоростью ω. Благодаря силам внутреннего трения окружающая цилиндр жидкость придет в слоистое движение с замкнутыми, круговой формы линиями тока (рис. 10.27). Скорость частиц жидкости в разных слоях будет неодинакова. Частицы прилипшего к цилиндру слоя жидкости, очевидно, имеют скорость $v_0 = \omega r_0$. По мере удаления слоя от оси цилиндра скорость частиц убывает и на бесконечности она обращается в нуль.

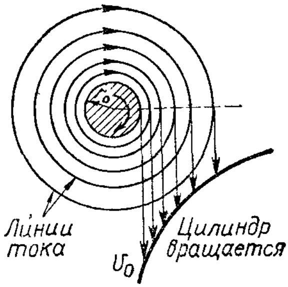


Рис. 10.27

Каков закон изменения скорости с увеличением расстояния? Опыт и теория показывают, что в данном случае скорость частиц убывает обратно пропорционально расстоянию от оси цилиндра. Таким образом, вращающийся цилиндр создает вокруг себя окружное движение жидкости, особенностью которого является невихревой характер (частицы движутся по замкнутым кривым не вращаясь). Интенсивность окружного движения определяется площадью сечения S цилиндра и угловой скоростью ω его вращения: $\Gamma = 2S\omega$.

Представим себе, что вместо твердого цилиндра вращается с той же угловой скоростью ω цилиндрический столб жидкости с сечением S. Очевидно, при такой замене твердого цилиндра жидким движение жидкости вне цилиндра сохраняет свой вид, т. е. остается окружным той же интенсивности $\Gamma = 2S\omega$. Столб жидкости (газа), вращающийся как твердое тело, т. е. так, что все его частицы имеют одну и ту же угловую скорость, называют *вихрем*, а величину $2S\omega$ — *интенсивностью вихря*. Ось вращения столба жидкости называют *осью вихря*. В окружающей жидкости вихрь создает окружное движение жидкости, интенсивность которого $\Gamma = 2S\omega$ равна интенсивности вихря.

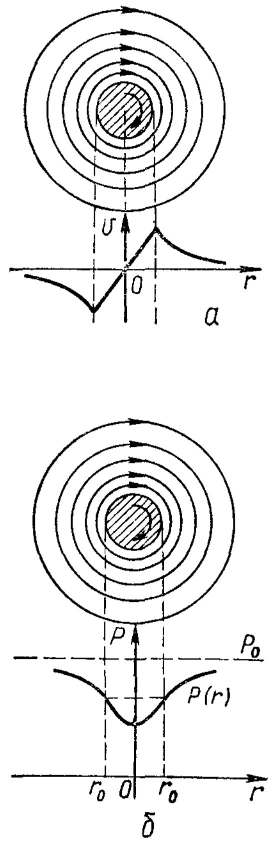


Рис. 10.28

На рисунке 10.28, *а* приведено распределение скорости частиц жидкости внутри и вне вихря. Внутри вихря скорость частиц пропорциональна, а вне вихря — обратно пропорциональна расстоянию от оси вихря.

Выясним, как распределяется давление внутри и вне вихря. Поскольку любая частица жидкости движется по окружности, то на нее должна действовать центростремительная сила. Очевидно, такой силой может быть только разность давлений, оказываемых жидкостью на боковую поверхность частицы. Отсюда следует, что давление жидкости должно увеличиваться по мере удаления от оси вихря.

Если обозначить через p_0 давление жидкости на бесконечном удалении от вихря, то распределение давления примет вид, изображенный на рисунке 10.28, *б*. Таким образом, наименьшее давление наблюдается вблизи оси вихря. Но пониженным давление будет как в области вихря, так и вне его. Эффекты сильных понижений давления у оси вихря наблюдаются в природе. Характерным примером являются смерчи. Под влиянием сильных разрежений в центре смерчей возникают течения, засасывающие пыль, воду и другие тела. Известны случаи, когда проходящий смерч срывал листья с деревьев, засасывал воду вместе с мелкими рыбами и уносил все предметы в другое место (нередко на большие расстояния).

Образование воронкообразного углубления на поверхности воды в ванне (над отверстием стока) объясняется появлением вихря и связанного с ним понижения давления.

Вихри начинаются и заканчиваются не внутри жидкости, а на границах раздела жидкости с другими телами. Вихри могут быть замкнутыми, в этом случае ось вихря — замкнутая кривая (рис. 10.29). Примером вихря с замкнутой осью является вихревое дымовое кольцо, получаемое иногда при выдохе табачного дыма курящим человеком. Замкнутый вихрь можно получить при помощи установки, изображенной на рис. 10.30. Дно коробки, имеющей форму барабана, затянуто перепонкой. Воздух внутри коробки подкрашен дымом. При ударе по мембране из отверстия выбрасывается струя подкрашенного воз-

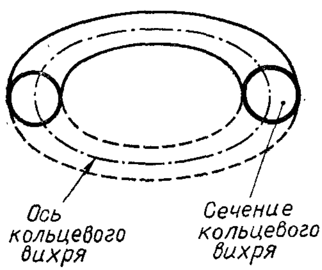


Рис. 10.29

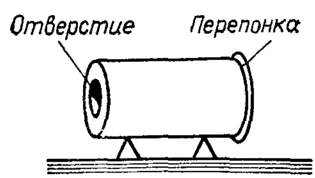


Рис. 10.30

духа. В момент прохождения воздуха через отверстие образуется вихрь с замкнутой осью. Вихревое кольцо хорошо видно. Оно может пролетать по комнате несколько метров и задуть, например, свечу и т. д. Однако вследствие внутреннего трения образовавшийся вихрь через некоторое время исчезнет. Очевидно, в идеальной жидкости возникший вихрь существовал бы вечно, а в вихревом движении участвовали бы одни и те же частицы. В реальной жидкости благодаря силам вязкости в вихревое движение вовлекаются все новые и новые частицы; вихрь как бы диффундирует из области, где он образовался, по всему пространству, а энергия вихря рассеивается (переходит в тепловую форму, т. е. в энергию беспорядочного движения молекул газа), и он прекращает свое существование.

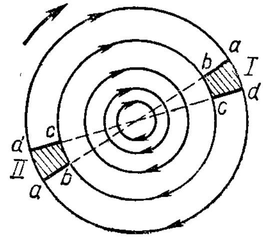


Рис. 10.31

Вихревой характер движения реальной жидкости в трубе. Ламинарный поток вязкой жидкости в трубе имеет вполне определенное распределение скоростей по сечению трубы (см. рис. 10.22). Можно показать, что такое распределение скоростей указывает на вихревой характер движения.

Весь поток заполнен *вихревыми нитями* [1], которые представляют собой (в сечении, перпендикулярном потоку) концентрические окружности, охватывающие ось трубы. Бесконечно малые частицы жидкости вращаются около вихревых нитей. Мы не наблюдаем этих микровращений, и воспринимаем движения жидкости в целом как слоистые. Однако микровращения могут при определенных условиях перейти в макровращения, т. е. в вихри конечного поперечного сечения S. Появление *макровихрей* приводит к движению нового качества, которое ранее названо нами турбулентным.

Так как макровихри возникают из микровихрей, то можно заключить, что вихревое движение уже таит в себе опасность появления макровихрей или турбулентного движения. Механизм перехода микровихрей в макровихри еще полностью не изучен. Но известно, что переход наблюдается, когда число Рейнольдса достигает определенного значения.

---

[1] *Вихревая нить* — бесконечно тонкий вихрь. Частицы жидкости, образующие бесконечно тонкий вихрь, вращаются около оси вихря. Если вся масса жидкости сплошь пронизана вихревыми нитями, то все частицы жидкости вращаются около собственных осей (нитей). В этом состоит сущность вихревого движения. Интересно отметить, что сам вихрь конечного сечения S представляет собой область вихревого движения. Это видно из того, что любой элемент, выбранный внутри вихря, за один оборот вихря совершает один оборот вокруг собственной оси (рис. 10.31).

Силы, возникающие при взаимодействии тела с жидкостью, согласно принципу относительности Галилея не зависят от того, движется ли тело, а жидкость покоится или движется жидкость, но тело покоится. Поэтому в дальнейшем мы не будем делать особый упор на то, *что́* именно движется.

Опыт показывает, что тела, движущиеся в реальной жидкости (или газе), испытывают *силу лобового сопротивления* (т. е. сопротивление движению), а при некоторых условиях и *подъемную силу*. Как появляются эти силы и какова их природа?

Как показал Прандтль[1], процессы, обусловливающие появление указанных сил, разыгрываются в слое жидкости, непосредственно примыкающем к поверхности тела, который получил специальное название *пограничного слоя*.

Пограничный слой. По определению, это слой жидкости, в котором скорость потока изменяется от нуля (на самой поверхности тела) до значения, равного скорости невозмущенного потока. Как показывает теория, толщина этого δ-слоя ориентировочно может быть оценена по формуле

$$\delta = \frac{l}{\sqrt{Re}}, \qquad (10.34)$$

где l — характерный размер тела; Re — число Рейнольдса. Пограничный слой зависит от скорости потока, свойств жидкости и от формы тела.

Толщина пограничного слоя обтекаемого тела уменьшается с увеличением числа Рейнольдса. Как показывает расчет, при $Re \geqslant 10^4$ толщина слоя становится меньше 0,01 размера тела. Таким образом, при больших числах Рейнольдса ($Re \geqslant 10^4$) можно говорить о пограничном слое, как о весьма тонком слое, окружающем тело. Вне этого слоя (где вязкость практически не проявляется) жидкость можно считать идеальной. Поэтому для объяснения некоторых явлений (например, появления подъемной силы) удобно рассматривать тело и прилегающий к нему тонкий пограничный слой как нечто целое (утолщенное тело), которое обтекается потоком идеальной жидкости (невихревым потоком).

В пограничном слое, как и при течении в трубе, режимы течения жидкости могут быть как ламинарными, так и турбулентными. Режим течения в пограничном слое определяет и характер силы взаимодействия тела с потоком. Так же, как и при движении жидкости в трубах, имеются характерные числа Рейнольдса, при которых в пограничном слое ламинарное течение переходит в турбулентное. Само явление перехода имеет много общего с явлением перехода ламинарного движения в турбулентное в трубах. При турбулентном пограничном слое на об-

---

[1] Людвиг Прандтль (1875—1953) — немецкий физик и механик.

текающей поверхности возникает очень тонкий ламинарный подслой (вследствие прилипания!), в котором имеется весьма большой поперечный градиент скорости, вызывающий появление значительных сил трения

$$\tau \sim \frac{dv}{dx},$$

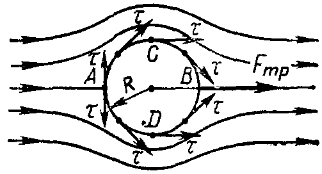


Рис. 10.32

Следовательно, с переходом ламинарного пограничного слоя в турбулентный резко возрастает сопротивление движению.

Сопротивление движению. Различают сопротивление трения и сопротивление давления.

Сопротивление трения. При небольших скоростях потока ($Re < 100$), когда в пограничном слое имеется ламинарный режим течения, жидкость плавно (безотрывно) обтекает тело; линии тока имеют такой же вид, как и при обтекании идеальной жидкостью. В качестве примера снова рассмотрим обтекание шара. Мы уже выяснили раньше (см. рис. 10.19), что при обтекании шара идеальной жидкостью результирующая сил давления на поверхность шара ввиду симметрии линий тока равна нулю. По этой же причине результирующая сил нормального давления на поверхность шара будет равна нулю и в случае ламинарного обтекания вязкой жидкостью.

Значит, сила, действующая на шар со стороны жидкости, является силой внутреннего трения, точнее, результирующей сил трения τdS, приложенных к каждому элементу поверхности шара. Напряжение τ зависит от градиента скорости, а последняя от толщины пограничного слоя. Пограничный слой имеет наименьшую толщину в точках C и D (рис. 10.32) и наибольшую — в точках A и B. Поэтому градиент скорости, а следовательно, и напряжения τ будут иметь наибольшие значения в точках C и D и наименьшее — в точках A и B (рис. 10.32). Очевидно, что результирующая $F_{тр}$ всех сил ввиду симметрии обтекания направлена по потоку. Сила трения $F_{тр}$ зависит только от вязкости η, относительной скорости v_0 (скорость невозмущенного потока) и радиуса шара R.

Вид функции можно установить из соображения размерности. Записав выражение для силы трения в общем виде

$$F_{тр} = k\eta^x v_0^y R^z, \tag{10.35}$$

определяем неизвестные x, y, z из равенства показателей степеней в формулах размерности левой и правой частей формулы (10.35). Размерность левой части равенства (10.35):

$$[F_{тр}] = LMT^{-2}. \tag{10.36}$$

Размерность правой части:

$$[\eta]^x\,[v_0]^y\,[R]^z = (L^{-x}M^xT^{-x})(L^yT^{-y})(L^z) = L^{-x+y+z}M^xT^{-x-y}. \quad (10.37)$$

Сравнивая (10.36) и (10.37), получаем систему уравнений:

$$-x+y+z=1,\quad x=1,\quad -x-y=-2.$$

Отсюда находим:

$$x=1,\quad y=1,\quad z=1.$$

Таким образом,

$$F_{\text{тр}} = k\eta v_0 R,$$

где k — безразмерный коэффициент. Точный расчет $F_{\text{тр}}$ (как суммы τ) показывает, что $k = 6\pi$.

В результате получаем формулу Стокса [1]:

$$F_{\text{тр}} = 6\pi\eta R v_0. \quad (10.38)$$

Действующая на шар сила вязкости пропорциональна коэффициенту вязкости, радиусу шара R и скорости относительного движения шара v_0. Формула Стокса (закон Стокса) говорит о линейной зависимости $F_{\text{тр}}$ от v_0. Это справедливо для тех значений v_0, при которых сохраняется плавное ламинарное обтекание.

Формула Стокса дает возможность определить установившуюся скорость падения шарика в вязкой жидкости. На этом принципе основывается один из методов определения коэффициента вязкости η. Если скорость $v_0 = \text{const}$, то (рис. 10.33)

$$mg = F_{\text{тр}} + F_{\text{арх}}.$$

Так как

$$m = \rho\,\frac{4}{3}\pi R^3 g,\quad F_{\text{арх}} = \rho'\,\frac{4}{3}\pi R^3 g$$

(где ρ, ρ' — плотности шарика и жидкости соответственно), то из (10.38) имеем:

$$v_0 = \frac{2(\rho-\rho')\,g}{9\eta}\,R^2.$$

Таким образом, скорость шарика пропорциональна квадрату его радиуса. При малых радиусах ($R \ll 1$) скорость весьма мала. Этим объясняются явления, связанные с образованием взвесей в газах и жидкостях очень мелких частиц (облака, туман, аэрозоли, гидрозоли). Наблюдение за скоростями падения заряженных микроскопических капелек масла в электрическом поле лежит в основе одного из методов определения заряда электрона (метод Милликена).

---

[1] Джордж Габриель Стокс (1819—1903) — английский математик и физик.

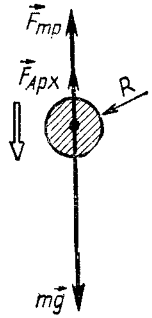


Рис. 10.33

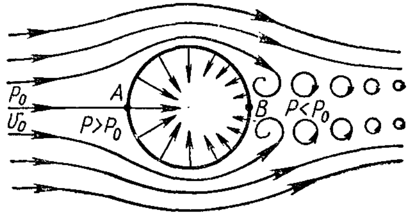


Рис. 10.34

Сопротивление давления. Опыт показывает, что при увеличении скорости потока наступает такой момент, когда картина обтекания тела резко изменяется; за телом появляются вихри, которые регулярно или нерегулярно отрываются от тела и уносятся потоком вдаль, образуя так называемую вихревую дорожку (рис. 10.34), растворяющуюся где-то вдалеке от тела; тело и вихревая дорожка обтекаются слоистым потоком.

При симметричной форме тела позади него образуются обычно два вихря с равными по модулю, но противоположными по направлению моментами импульса (в соответствии с законом сохранения момента импульса для замкнутой системы *тело — жидкость*).

Образовавшиеся вихри нарушают симметрию в распределении давления жидкости на поверхность цилиндра. Если в невозмущенном потоке давление равно p_0, то в области, занятой вихрем, оно меньше p_0 (см. рис. 10.34).

С другой стороны, в области, примыкающей к передней части цилиндра (точка A на рис. 10.39), давление жидкости согласно закону Бернулли равно $p_0+\frac{\rho v_0^2}{2}$, т. е. больше, чем в невозмущенном потоке. Следовательно, результирующая сил давления, распределенных по поверхности цилиндра, отлична от нуля и направлена вследствие симметрии по потоку. Это и есть сила сопротивления давления[1] $F_{\text{давл}}$. Так как разность давлений спереди и сзади цилиндра оценивается величиной $\frac{\rho v_0^2}{2}$, то следует ожидать, что и результирующая сила будет пропорциональна этой же величине, т. е. будет зависеть от плотности ρ жидкости и квадрата относительной скорости v_0. Очевидно, что результирующая сила $F_{\text{давл}}$ должна зависеть также от величины

[1] При некоторой форме обтекаемого тела эта сила может образовывать с потоком некоторый угол, как это имеет место в случае бумажного змея, плоскость которого наклонена к потоку.

области, занятой вихрями позади тела, которая в свою очередь определяется размерами тела. Таким образом, характерный размер тела также влияет на значения силы сопротивления $F_{давл}$. Введем в качестве характерного размера наибольшую площадь S сечения тела плоскостью, перпендикулярной к потоку — *миделево сечение*. Итак, $F_{давл}$ может зависеть от ρ, S, v_0. Записав эту зависимость в общем виде

$$F_{давл} = \frac{C_x}{2} \rho^x S^y v_0^z$$

и применяя описанный выше метод размерностей, найдем: $x = 1$, $y = 1$, $z = 2$.

Таким образом, приходим к следующему закону, которому подчиняется сила лобового сопротивления при наличии вихрей позади тела:

$$F_{давл} = C_x S \frac{\rho v_0^2}{2}. \tag{10.39}$$

Здесь C_x — безразмерный коэффициент, называемый *коэффициентом лобового сопротивления*. Он имеет одно и то же значение для всех тел одинаковой формы и одинаково ориентированных относительно потока, но не зависит от масштаба тел [1].

На рисунке 10.35 приведены значения c_x для тел различной формы ($Re = 10^3 - 10^4$). Тела имеют одинаковые миделевы сечения, поэтому силы лобового сопротивления будут пропорциональны C_x.

Из приведенных данных видно, что наименьшее значение C_x (а следовательно, и $F_{давл}$) имеет тело удобообтекаемой формы, наибольшее — диск. Пример с полусферами очень поучительный: он указывает, что основное влияние на величину лобового сопротивления оказывает форма не передней части тела, а задней, именно той, за которой образуются вихри. Поясним с качественной стороны причину образования вихрей и приведенную выше взаимосвязь между C_x и $F_{давл}$ от формы тела.

Когда частица пограничного слоя движется от точки B к точке M (рис. 10.36), она преодолевает силу вязкого трения

[1] На самом деле, C_x слабо зависит и от Re, так как при больших Re точка образования вихрей смещается к передней части тела и область завихренного движения позади тела увеличивается.

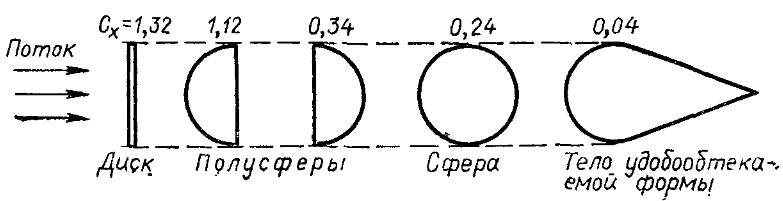


Рис. 10.35

и перепад давлений, ибо в точке M давление больше, чем в точке B. При небольшой скорости потока v_0 (точнее, небольшом Re) силы трения и перепад давления невелики и частица достигает точки M почти с такой же скоростью, которую она имела в точке A. Но при больших v_0 силы трения и перепад давления возрастают. Частица приходит в окрестность точки M с меньшей скоростью, что еще больше увеличивает перепад давлений. Геометрические размеры области повышенного давления постоянно нарастают, пограничный слой (область CDM) утолщается. Поступающие из точки B новые частицы уже не могут преодолеть сопротивление и где-то около точки C останавливаются и даже поворачивают назад. Утолщение слоя CD представляет собой зарождающийся вихрь. Нижняя часть этого слоя (точки C) движется влево, а верхняя (D), увлекаемая потоком, — вправо. Причем в верхней части непрерывно действуют силы трения, раскручивающие утолщение подобно тому, как раскручивается велосипедное колесо под легкими ударами руки, направленными по касательной к ободу.

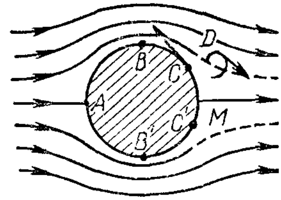


Рис. 10.36

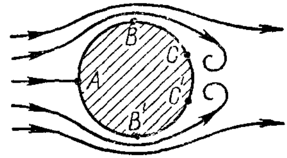


Рис. 10.37

Итак, образовавшееся утолщение быстро раскручивается и увеличивает свои размеры за счет соседних частиц. За телом в области CM возникает вихрь. Вследствие симметрии такой же вихрь (но с вращением в противоположную сторону) образуется и в области $C'M$. Картина обтекания приобретает вид, показанный на рисунке 10.37. Вихри обтекаются потоком, отчего они все больше раскручиваются, а затем тем же потоком отрываются от тела и уносятся вдаль. Вместо оторвавшихся вихрей появляются новые, и эта картина периодически или непериодически повторяется.

Образование вихря сопровождается отрывом пограничного слоя в точках C и C'. В этом случае точки C и C' называют *точками отрыва*, а само обтекание — *обтеканием с отрывом пограничного слоя.*

Описанная картина образования вихрей, конечно, очень приближенна, но она все же позволяет понять, почему силы лобового сопротивления зависят от скорости v_0 и от формы задней части обтекаемого тела. Уже из рисунка 10.37 видно, что, чем ближе точки C и C' к точкам B и B', тем бóльшая часть поверхности обтекаемого тела соприкасается с областью пониженного давления и тем, следовательно, больше будет сила лобового сопротивления. С увеличением v_0 градиент скорости в пограничном слое возрастает, возрастают и силы вязкого трения, в ре-

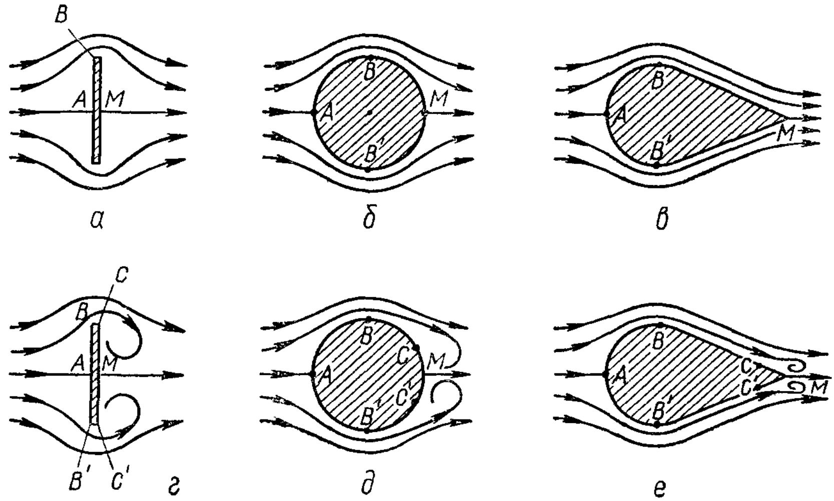


Рис. 10.38

зультате чего точка C, в которой происходит поворот частиц, сместится ближе к точке B. Область, заполненная вихрями, увеличивается, что приводит к увеличению и силы лобового сопротивления. Так качественно объясняется зависимость $F_{\text{давл}}$ от скорости.

Сравним обтекание диска, шара и тела каплеобразной формы. Картины ламинарного обтекания показаны на рисунке 10.38, *а*, *б*, *в*. Из рисунка видно, что диск наиболее резко деформирует линии тока, особенно в окрестности точки B. В окрестности этой точки в пограничном слое диска существуют громадные градиенты скорости, а следовательно, и большие силы трения. Поэтому точка C, где происходит остановка частиц, т. е. отрыв пограничного слоя, расположена совсем близко к точке B (рис. 10.38, *г*), вследствие чего вся задняя поверхность диска оказывается в контакте с областью пониженного давления. В этом случае сила лобового сопротивления наибольшая, какая только может быть у разных тел при данном потоке.

У шара градиент скорости около точки B в пограничном слое гораздо меньше, чем у диска, и поэтому точка C у шара находится от точки B дальше, чем у диска (рис. 10.38, *д*). Область, занятая вихрем у шара, оказывается меньше, чем у диска. Поэтому меньше и лобовое сопротивление. У тела каплеобразной формы градиент скорости в пограничном слое около точки B еще меньше, чем у шара, C расположена еще дальше от B (рис. 10.38, *е*). В результате только небольшая часть задней поверхности тела окажется в контакте с областью пониженного давления. Значит, сила лобового сопротивления для тела каплеобразной формы наименьшая.

В заключение отметим, что, кроме сил давления, на движущееся тело действуют и силы трения. Однако, поскольку силы трения пропорциональны скорости лишь в первой степени (тогда как $F_{давл} \sim v_0^2$), ими при значительных скоростях обычно пренебрегают.

6. ПОДЪЕМНАЯ СИЛА КРЫЛА САМОЛЕТА

Основы теории подъемной силы крыла самолета заложены Жуковским [1] в 1906 г. в его знаменитой работе «О присоединенных вихрях». Чтобы лучше разобраться в этом вопросе, предварительно рассмотрим так называемый *эффект Магнуса.*

Силы, действующие на вращающийся цилиндр. Эффект Магнуса. Известно, что вращающийся твердый цилиндр образует в неограниченной массе вязкой жидкости окружное невихревое движение (рис. 10.39, *а*) с интенсивностью $\Gamma = 2S\omega$ (где S и ω — площадь сечения и угловая скорость вращения цилиндра).

Но движущийся поступательно (невращающийся) с относительной скоростью v_0 цилиндр при малых v_0 обтекается ламинарным потоком, являющимся вне пограничного слоя также невихревым (рис. 10.39, *б*).

Если же цилиндр вращается и одновременно движется поступательно, то два окружающих его невихревых потока наложатся друг на друга и дадут результирующий поток обтекания (рис.10.39, *в*). В результирующем потоке скорость течения жидкости над цилиндром становится больше, чем под цилиндром. Поэтому, согласно закону Бернулли, давление жидкости на верхнюю часть цилиндра будет меньше, чем на нижнюю. Это приводит согласно условиям, показанным на рисунке 10.39, к возникновению вертикальной силы, называемой *подъемной силой* (эффект Магнуса [2]).

[1] Николай Егорович Жуковский (1847—1921) — русский ученый, автор многочисленных работ по аэродинамике, гидродинамике, гидравлике, астрономии и математике.

[2] Генрих Густав Магнус (1802—1870) — немецкий физик.

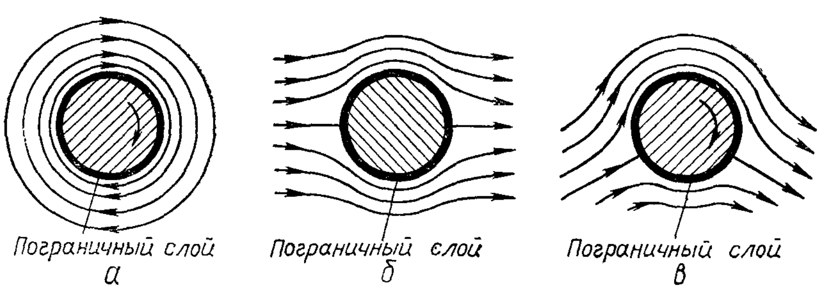


Рис. 10.39

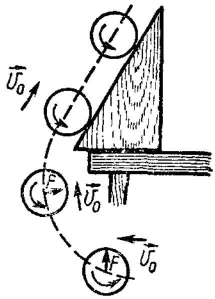


Рис. 10.40

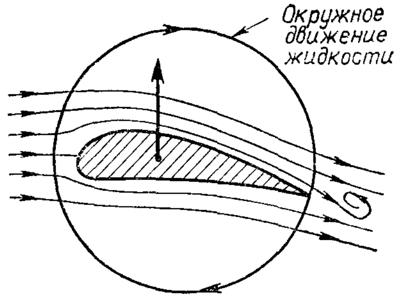


Рис. 10.41

Жуковский и независимо от него Кутт теоретически подсчитали величину этой силы на единицу длины цилиндра [1]:

$$F_{\text{под}} = \Gamma \rho v_0, \tag{10.40}$$

где Γ — интенсивность окружного движения вокруг цилиндра; ρ — плотность жидкости; v_0 — относительная скорость потока.

Важно подчеркнуть, что подъемная сила явилась результатом окружного движения жидкости и определяется его интенсивностью $\Gamma = 2S\omega$.

В эффекте Магнуса сила $\vec{F}_{\text{под}}$ перпендикулярна скорости потока $\vec{v}_0$. Чтобы найти направление этой силы, нужно вектор относительной скорости $\vec{v}_0$ повернуть на 90° в сторону, противоположную вращению цилиндра (см. рис. 10.40).

Эффект Магнуса можно наблюдать на опыте со скатывающимся легким цилиндром (рис. 10.40). После скатывания по наклонной плоскости центр масс цилиндра движется не по параболе, как двигалась бы материальная точка, а по линии, заворачивающей под стол.

Если заменить вращающийся цилиндр вихрем (вращающимся столбом жидкости) с интенсивностью $\Gamma = 2S\omega$, то сила Магнуса будет такой же. Таким образом, мы приходим к интересному и важному выводу: **на движущийся вихрь действует со стороны окружающей жидкости сила, перпендикулярная относительной скорости движения $\vec{v}_0$ и направленная в сторону, определяемую указанным выше правилом поворота вектора.**

Подъемная сила крыла. Механизм образования подъемной силы крыла самолета аналогичен механизму образования силы в эффекте Магнуса. Однако возникновение окружного движения объясняется совершенно иными причинами.

Благодаря асимметричной форме крыла (рис. 10.41), наличию острой задней кромки вследствие описанных выше процессов, протекающих в пограничном слое, за крылом образуется

[1] При расчете считалось, что цилиндр имеет бесконечную длину.

вихрь и притом один — *разгонный вихрь*. Разгонный вихрь обладает определенным моментом импульса. Однако момент импульса системы *крыло — воздух* должен оставаться постоянным (равным нулю), так как внешних моментов сил, действующих на систему, нет. Поэтому наряду с вихрем, образовавшимся позади крыла, должно возникнуть какое-то круговое движение воздуха, которое бы обладало одинаковым с вихрем моментом количества движения, но противоположного направления. Жуковский показал, что вместе с вихрем возникает окружное движение воздуха вокруг крыла.

Но известно, что окружное движение порождается вихрем. Отсюда следует, что само крыло нужно рассматривать как некий мнимый вихрь, движущийся вместе с крылом. Этот вихрь Жуковский назвал присоединенным. Но на движущийся вихрь (т. е. на крыло), как показано выше, должна действовать сила Магнуса, которая при горизонтальной ориентации крыла (см. рис. 10.41) будет подъемной силой $\vec{F}_{\text{под}}$. То, что $\vec{F}_{\text{под}}$ направлена вверх, вытекает из правила определения направления силы Магнуса. Но это видно также и из распределения скоростей потока над и под крылом. При окружном движении, показанном на рисунке 10.41, скорость течения воздуха над крылом больше, чем под крылом. Отсюда согласно закону Бернулли давление воздуха под крылом больше, чем над крылом, что и является причиной возникновения подъемной силы.

Итак, при обтекании крыла возникают два вихря: разгонный и присоединенный. Подъемную силу создает присоединенный вихрь, причем величина ее на единицу длины крыла самолета определяется формулой (10.40), в которой Г обозначает интенсивность присоединенного вихря. По теории Жуковского, интенсивность вихря для крыла, имеющего профиль, показанный на рисунке 10.42, определяется формулой:

$$\Gamma = \frac{1}{2} \pi \lambda v_0 \alpha,$$

где λ — длина *хорды* (расстояние по потоку от передней до задней кромки крыла); α — *угол атаки*.

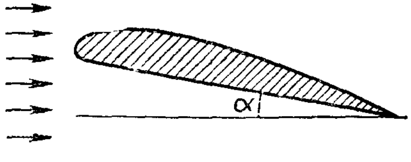


Рис. 10.42

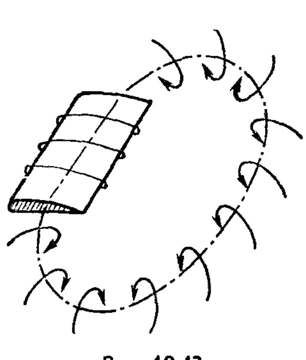


Рис. 10.43

Очевидно, что для бесконечно длинного крыла ось присоединенного вихря — бесконечная прямая. Но поскольку длина крыльев самолета конечна, то возникает так называемый *концевой эффект*, приводящий к тому, что присоединенный вихрь становится кольцевым (рис. 10.43), что несколько усложняет картину обтекания крыла [1].

Разгонный вихрь, едва образовавшись, отрывается от крыла и уносится потоком, на его месте появляется новый разгонный вихрь, а вместе с ним и новый присоединенный вихрь. Таким образом, окружное движение вокруг крыла постоянно сохраняется за счет отрыва разгонных вихрей.

Качество крыла. Вихрь позади крыла является причиной лобового сопротивления. Следовательно, одновременно с подъемной силой неизбежно возникает лобовое сопротивление. Техническая задача по определению профиля крыла сводится, таким образом, к установлению условий, при которых отношение $\frac{F_{\text{под}}}{F_{\text{лоб}}} = W$, называемое *качеством крыла*, становится наибольшим. Эта задача впервые была решена Жуковским.

При данном профиле качество крыла W зависит от угла атаки α. Так как сила лобового сопротивления $F_{\text{лоб}}$ и подъемная сила $F_{\text{под}}$ зависят от вихря, образовавшегося позади крыла, то они могут быть выражены по формулам сил сопротивления давления:

$$F_{\text{лоб}} = c_x S \frac{\rho v_0^2}{2}, \tag{10.41}$$

$$F_{\text{под}} = c_y S \frac{\rho v_0^2}{2}, \tag{10.42}$$

где c_x и c_y — коэффициенты соответственно лобового сопротивления и подъемной силы, которые зависят от формы профиля крыла (а не от его размеров) и угла атаки α.

Используя (10.41) и (10.42), находим:

$$W = \frac{F_{\text{под}}}{F_{\text{лоб}}} = \frac{c_y}{c_x}. \tag{10.43}$$

Для определения летных качеств крыла важно знать, как меняются одновременно обе величины c_x и c_y в зависимости от угла атаки. Эти данные получают на опыте при обдувании моделей в аэродинамической трубе. При заданном угле атаки замеряют силы $F_{\text{под}}$ и $F_{\text{лоб}}$ и по ним, используя гидродинамическое подобие, определяют c_x и c_y. Определив значения c_x и c_y для различных углов атаки α, строят график, называемый *по-*

[1] В связи с образованием кольцевого вихря позади крыла создается дополнительное пониженное давление, из-за чего увеличивается сопротивление движению. Сопротивление, вызванное образованием кольцевого вихря, называют *индуктивным*.

лярой крыла. По вертикальной оси откладывают c_y, а по горизонтальной — c_x. Вдоль кривой отмечают значения угла атаки (рис. 10.44). Из рисунка видно, что

$$W = \frac{c_y}{c_x} = \operatorname{tg}\beta.$$

Эта величина имеет наибольшее значение для прямой, проведенной из начала координат так, чтобы она касалась поляры. Для крыла профиля Жуковского максимум W наблюдается при отрицательном угле атаки ($\alpha = -0{,}8°$). Тот факт, что при отрицательных α существует подъемная сила, можно объяснить только появлением присоединенного вихря.

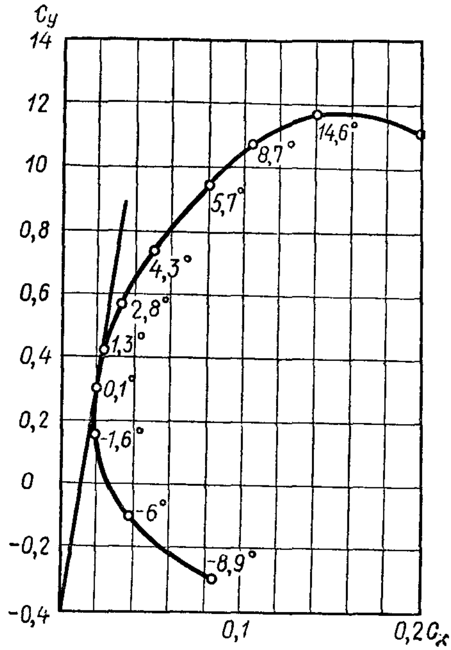


Рис. 10.44

До появления теории Жуковского бытовала концепция Ньютона, согласно которой подъемная сила рассматривалась как составляющая силы реакции потока на переднюю грань обтекаемого тела. Согласно представлениям Ньютона, сила реакции равна суммарному изменению импульса частиц, ударяющихся о переднюю поверхность тела. Так, частицы жидкости, ударившись о пластину, поставленную под углом α (рис. 10.45), отскакивают от нее, сообщая импульс пластине. Сумма импульсов всех частиц дает полную аэродинамическую силу $\vec{R}$, вертикальная составляющая которой будет подъемной силой, а горизонтальная — силой сопротивления. Из такого подхода следует, что при отрицательном угле атаки подъемная сила крыла самолета должна быть отрицательной. На самом же деле она положительная. Этот факт можно понять только с позиции теории Жуковского.

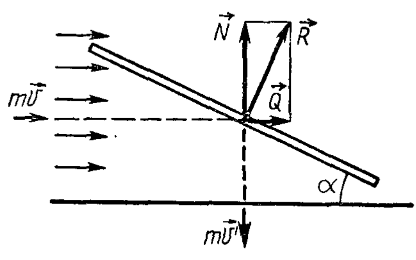


Рис. 10.45

7. ДВИЖЕНИЕ СО СВЕРХЗВУКОВЫМИ СКОРОСТЯМИ

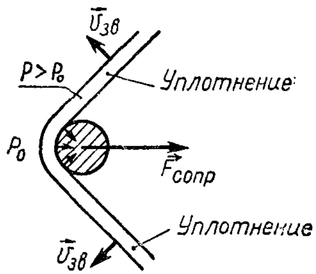


Рис. 10.46

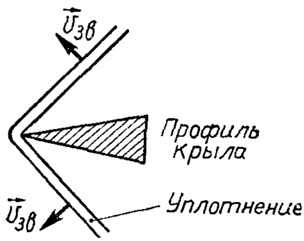


Рис. 10.47

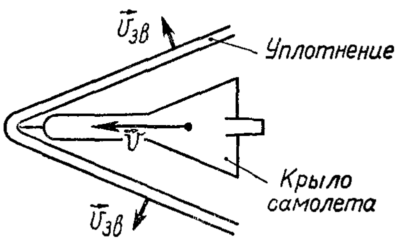


Рис. 10.48

Пока скорость тела значительно меньше скорости звука ($v \ll v_{зв}$), можно считать, что возмущение в среде, вызванное движением тела, распространяется мгновенно. Среду в этом случае можно рассматривать как несжимаемую. Движение тела в такой среде нами рассмотрено выше.

Если же скорость движущегося в среде тела приближается к скорости звука $v_{зв}$ в этой среде, начинает играть преобладающую роль не вязкость среды, а изменение ее плотности. Движущееся тело создает впереди себя уплотнение, которое распространяется в среде со скоростью звука и опережает тело.

При $v \gg v_{зв}$ (движение со сверхзвуковой скоростью) уплотнение[1] не может уйти от тела. Наоборот, движущееся тело толкает его перед собой и, таким образом, передняя его часть все время находится в контакте с областью большого давления. Это и создает силу сопротивления движению значительной величины (рис. 10.46).

Сила сопротивления F тем меньше, чем меньше площадь контакта тела с областью повышенного давления. По этой причине передняя кромка крыльев сверхзвуковых самолетов делается острой (рис. 10.47), а самим крыльям придают форму треугольника, направленного острым углом вперед; кроме того, на носовой части самолета располагают штырь, выдающийся далеко вперед (рис. 10.48).

Скачок уплотнения, образовавшийся перед телом (*ударная волна*), имеет форму конуса и движется со скоростью тела $\vec{v}$,

---

[1] Уплотнение в этом случае носит характер резкого скачка: скачком возрастают плотность, давление и температура. При удалении от скачка уплотнения эти величины постепенно убывают до значений, которые они имеют в невозмущенном потоке.

т. е. со сверхзвуковой скоростью[1]. Известное явление «хлопка» («выстрела»), воспринимаемое при пролетании сверхзвуковых самолетов, обусловлено прохождением ударной волны[2].

Отметим в заключение, что движение тела со скоростью v, близкой к $v_{зв}$, весьма неустойчиво. Поэтому на практике стараются интервал околозвуковых скоростей «проскочить» как можно скорее. Движение со скоростью $v > v_{зв}$ вновь обретает устойчивость. Однако, как видно из вышеизложенного, лобовое сопротивление при сверхзвуковых скоростях довольно велико (оно пропорционально v^3), и для поддержания этого движения требуются мощные двигатели. Очевидно, что сила лобового сопротивления будет меньшей, если движение происходит в верхних (разреженных) слоях атмосферы.

Вопросы для самопроверки

1. На рисунке 10.19, б стрелками показаны силы давления невязкой и невесомой жидкости на поверхность шара. Нарисуйте приблизительно картину распределения сил давления на шар для невязкой, но весомой жидкости. Объясните, почему распределение давления теперь не имеет симметрии относительно плоскости *CD*. Поясните, почему сумма горизонтальных составляющих всех сил давления на поверхность шара равна нулю. Какая симметрия в распределении давления имеет при этом значение?

2. На рисунке 10.19, б давление жидкости направлено к центру шара. Могут ли силы давления в некоторых точках быть направленными от центра?

3. Из формулы (10.29) следует, что при одинаковом перепаде давлений расход жидкости возрастает не пропорционально сечению, а пропорционально квадрату сечения. Как этот факт можно объяснить из физических соображений?

4. Исходя из природы сил внутреннего трения, объясните, почему с повышением температуры вязкость жидкости уменьшается, а вязкость газа увеличивается.

5. Формула Пуазейля (10.29) справедлива для любого радиуса трубки R, если только течение является ламинарным. Почему же в вискозиметрах используют трубки малого радиуса (капилляры)?

6. Какое движение жидкости называют невихревым? вихревым?

7. Какое движение называют окружным? Чем порождается окружное движение в вязкой жидкости?

8. Что такое вихрь? Каково распределение скоростей частиц внутри вихря и вне его? Каково распределение давления внутри и вне вихря? Получите теоретически распределение давления, приведенное на рисунке 10,28, б. Что называют осью вихря? Что такое кольцевой вихрь? Что называют вихревой нитью? Что называют интенсивностью вихря?

9. По какому правилу складываются окружные движения двух вихрей?

10. Что называют пограничным слоем? Чем определяется толщина пограничного слоя? Какую форму имеет пограничный слой около цилиндра при ламинарном обтекании? В каком месте этого слоя имеется наибольший градиент скорости?

---

[1] Перпендикулярно фронту уплотнение распространяется со скоростью звука.

[2] Обычно мы слышим двойной удар, так как от самолета до наблюдателя доходят две ударные волны: от носовой части и от крыльев.

11. На тело, движущееся в вязкой среде, действует сила лобового сопротивления. При каких условиях наблюдается сопротивление трения и сопротивление давления? Поясните возникновение силы трения, действующей на шар. Выведите формулу Стокса. С чем связано появление сил сопротивления давления? Поясните, как образуется вихрь позади обтекаемого тела. Какова при этом роль пограничного слоя (и вязкости)? Выведите формулу для сопротивления давления. Поясните, что такое коэффициент лобового сопротивления и от чего он зависит. Поясните, почему лобовое сопротивление давления у диска больше, чем у шара. Почему у симметричных тел возникают позади два вихря?

12. В чем состоит эффект Магнуса? Опишите механизм образования силы Магнуса. От чего зависит значение силы Магнуса? Сформулируйте правило, по которому определяется направление этой силы. Поясните, почему на вихрь, движущийся в жидкости (газе), действуют силы, перпендикулярные относительной скорости.

13. Опишите общую картину обтекания крыла самолета. Что называют разгонным и присоединенным вихрями? Поясните механизм образования разгонного вихря и укажите направление его вращения. По какой причине образуется присоединенный вихрь? Каково окружное движение присоединенного вихря? Объясните появление подъемной силы крыла самолета. Почему подъемная сила зависит от угла атаки? Как изменяется подъемная сила при увеличении угла атаки? Как при этом изменяется лобовое сопротивление? Что такое поляра крыла и как по ней определить угол атаки, при котором качество крыла W наибольшее?

14. Каковы особенности движения тел со сверхзвуковыми скоростями? Почему переднюю кромку крыльев сверхзвуковых самолетов делают острой? Почему капсуле космического корабля придают форму конуса? Какую форму имеет ударная волна, тянущаяся за движущимся телом?

15. Объясните, почему перед носовой частью движущегося по реке корабля возникает «бугор» воды, который сохраняется в течение всего времени движения. С какой скоростью должен двигаться корабль, чтобы этого «бугра» не было? Почему от прошедшего мимо корабля распространяется «волна», вызывающая качку находящихся на воде лодок и других судов? В чем сходство этой волны с ударной волной, возникающей при движении самолета со сверхзвуковой скоростью?

Раздел XI
МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

ВВЕДЕНИЕ

Среди бесконечного многообразия повторяющихся движений, с которыми приходится иметь дело, изучая физические явления, важную роль играют так называемые *периодические движения*, при которых данная материальная точка повторяет одно и то же движение много раз, затрачивая на каждое из них одинаковое время T, называемое *периодом*.

Периодические движения могут различаться как по форме траектории, так и по характеру самого движения. Простейшим видом криволинейного периодического движения является равномерное движение точки по окружности. Движение планет вокруг Солнца по эллипсам — пример периодического криволинейного движения, при котором скорость по модулю не остается постоянной. Криволинейным движением с изменяющейся по модулю скоростью является движение подвешенного на нити шарика, выведенного из положения равновесия.

Примером прямолинейного периодического движения может служить движение поршня в цилиндре двигателя внутреннего сгорания, движение электронного луча в осциллографической трубке, когда на него действует лишь поле горизонтальной «развертки», и т. д.

Из всех периодических движений важное место в физике и технике занимают колебания, т. е. такие движения, при которых материальная точка перемещается взад и вперед по отрезку прямой (или кривой) между крайними его точками (рис. 11.1). В зависимости от характера движения точки на отрезке колебания делятся на *гармонические* и *негармонические*. *Гармоническими называют колебания, при которых дуговая координата движущейся точки изменяется во времени по синусоидальному или косинусоидальному закону* (рис. 11.1):

$$s = s_0 \sin(\omega t + \varphi),$$
$$s = s_0 \cos(\omega t + \varphi). \qquad (11.1)$$

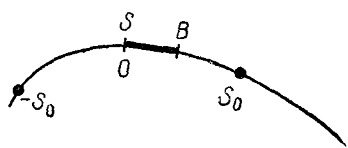


Рис. 11.1

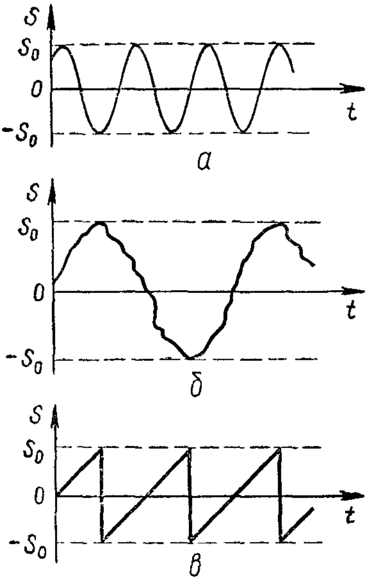


Рис. 11.2

Для гармонических колебаний график изменения дуговой координаты во времени имеет вид синусоиды или косинусоиды (рис. 11.2, *а*).

Все колебания, при которых дуговая координата изменяется по иному закону, будут негармоническими. На рисунках 11.2, *б*, *в* показаны графики $s(t)$ для двух видов негармонических колебаний.

Среди других видов колебаний гармонические занимают особое положение. Это обусловлено тем, что, как показал Фурье[1], любое периодическое движение (любое колебание) можно рассматривать как результат сложения конечного или бесконечного числа простых гармонических колебательных движений. Таким образом, гармоническое колебание представляет собой простейший вид колебательного движения, к которому может быть сведено любое сколь угодно сложное колебание.

Учение о гармонических колебаниях составляет основу более общего учения о колебаниях вообще. Мы будем изучать лишь гармонические колебания.

Занятие 28

КИНЕМАТИКА ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

1. ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИЕ ГАРМОНИЧЕСКОЕ КОЛЕБАНИЕ

Согласно определению гармоническим является колебание, при котором дуговая координата движущейся точки изменяется по закону (11.1). Нами приняты следующие обозначения: s — дуговая координата, характеризующая положение точки на траектории в момент времени t (начало отсчета выбрано в середине криволинейного участка между точками $-S_0$ и $+S_0$); S_0 — наибольшее отклонение точки от среднего положения, называемое *амплитудой колебания*; $(\omega t + \varphi)$ — аргумент синуса или косинуса, называемый *фазой гармонического колебания*; φ — *начальная фаза*; ω — постоянная для данного колебания

[1] Жан Батист Жозеф Фурье (1772—1837) — французский математик.

величина, называемая *циклической* (или *круговой*) *частотой* гармонического колебания.

Дуговая координата при указанном выборе начала отсчета еще называется *смещением* колеблющейся точки от среднего положения. Фаза зависит от времени и определяет положение (смещение S) и направление движения колеблющейся точки в момент t. Например, положение B (рис. 11.1) колеблющаяся точка проходит за один период дважды: первый раз — двигаясь в прямом и второй раз — двигаясь в обратном направлении. Хотя смещение S в обоих случаях одинаково, но фазы будут разными, ибо направления движения не совпадают. Начальная фаза определяет положение и направление движения точки в начальный момент времени ($t = 0$). Смысл циклической частоты выясняется из следующих рассуждений. Пусть в некоторый момент времени t_1 колеблющаяся точка находилась в положении B (рис. 11.1) и двигалась вправо. Этому положению отвечает фаза колебания $\omega t_1 + \varphi$. Так как движение является периодическим, то найдется такой момент времени $t_2 > t_1$, в который колеблющаяся точка вновь придет в данное положение, имея такое же, как в момент t_1, направление скорости. Минимальный промежуток времени, через который это произойдет, называют периодом колебания и обозначают через T. Итак, через промежуток времени T фаза колебания примет значение

$$(\omega t_2 + \varphi) = \omega(t_1 + T) + \varphi = \omega t_1 + \varphi + \omega T,$$

Так как положение колеблющейся точки, а значит, и ее координата s для моментов t_1 и t_2 одинаковы, то

$$s_0 \sin(\omega t_1 + \varphi) = s_0 \sin(\omega t_1 + \varphi + \omega T). \tag{11.2}$$

Отсюда следует, что

$$\omega T = 2\pi,$$

или

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \tag{11.3}$$

Величина $\frac{1}{T} = \nu$ обозначает число колебаний за одну секунду. Эту величину называют частотой гармонических колебаний[1]. Частоту ν измеряют в герцах (Гц). За 1 Гц принимают частоту такого колебания, при котором колеблющаяся точка за 1 с совершает одно колебание: 1 Гц $= 1\,\frac{1}{\text{с}}$. Соотношение (11.3) можно записать так:

$$\omega = 2\pi\nu. \tag{11.4}$$

[1] Иногда величину ν (чтобы ее отличить от циклической частоты ω) называют линейной частотой.

Циклическую частоту ω можно трактовать как число колебаний за 2π секунд.

Фазы колебания, отличающиеся на 2π, называют одинаковыми, так как им соответствуют одно и то же положение и одно и то же направление движения колеблющейся точки.

2. ПРЯМОЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И КОЛЕБАНИЯ, СОВЕРШАЕМЫЕ ПО ДУГЕ ОКРУЖНОСТИ. КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Если траектория колеблющейся точки представляет собой отрезок прямой, то колебания называют прямолинейными (или, что не совсем правильно, просто линейными). Направляя ось x вдоль этого отрезка и выбирая в качестве начала отсчета координаты x среднее положение колеблющейся точки, можно закон движения при гармоническом колебании записать так:

$$x = A\sin(\omega t + \varphi)$$

или

$$x = A\cos(\omega t + \varphi). \qquad (11.5)$$

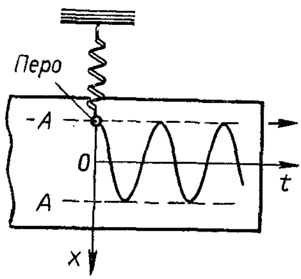


Рис. 11.3

Примером прямолинейного гармонического колебания служит колебание груза, подвешенного на пружине (рис. 11.3). Действительно, если к грузу прикрепить перо (с чернилами), слегка касающееся листа бумаги, то в процессе колебаний это перо запишет на передвигаемом листе кривую, в которой нетрудно опознать синусоиду. Синусоиду запишет и перо, укрепленное к колеблющемуся с небольшим размахом грузу, подвешенному на длинной нити (рис. 11.4).

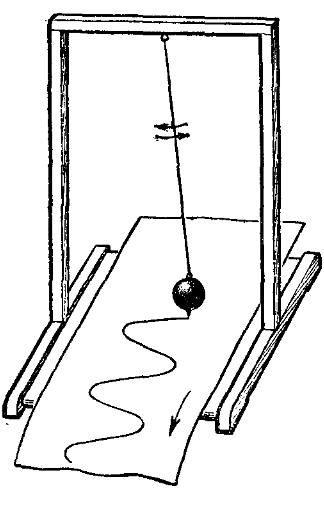


Рис. 11.4

Если траектория колеблющейся точки есть часть окружности радиуса R, то смещение s (рис. 11.5) и амплитуду s_0 можно выразить через радиус окружности R и угол отклонения α радиус-вектора $\vec{R}$:

$$s = R\alpha, \quad s_0 = R\alpha_0.$$

Тогда закон движения (11.1) запишется через угловые величины следующим образом:

$$\alpha = \alpha_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

или

$$\alpha = \alpha_0 \cos(\omega t + \varphi), \qquad (11.6)$$

где α_0 — угол наибольшего отклонения радиус-вектора $\vec{R}$.

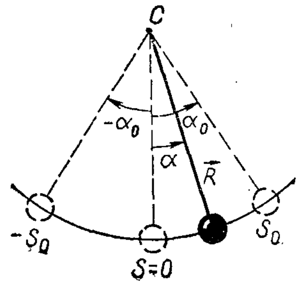


Рис. 11.5

Пусть твердое тело имеет неподвижную ось и вращается около нее попеременно, то в одну, то в другую сторону. Такой вид движения называют *крутильными колебаниями*. Каждая точка тела при этом совершает колебания по дуге окружности соответствующего радиуса. Если эти колебания точек гармонические, то движение их будет описываться с помощью угловых величин одним и тем же для всех точек уравнением (11.6), которое, таким образом, будет являться уравнением гармонических крутильных колебаний тела в целом. В этом случае α_0 есть амплитуда; ω — круговая частота; $\omega t + \varphi$ — фаза крутильных колебаний. Под α (и α_0) следует понимать поворот некоторой плоскости, связанной с телом, относительно другой плоскости, фиксированной в пространстве.

Примером крутильных колебаний служит движение маятника наручных часов. К крутильным относятся колебания твердого тела, имеющего точку подвеса, не совпадающую с центром тяжести тела. Если отклонить это тело, а затем предоставить его самому себе, оно начнет колебаться. При этом каждая его точка движется по дуге соответствующей окружности. Как будет показано ниже, колебания в этом случае можно считать гармоническими только при малых амплитудах.

3. СКОРОСТЬ И УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ КОЛЕБАНИИ

Пусть изменение смещения колеблющейся точки происходит по синусоидальному закону:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi). \qquad (11.7)$$

Производная от этой функции выражает скорость точки:

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \varphi) = v_0 \cos(\omega t + \varphi), \qquad (11.8)$$

где $v_0 = A\omega$ — амплитуда скорости.

Из соотношений (11.7) и (11.8) видно, что в те моменты времени, когда смещение точки равно нулю (синус равен нулю), скорость будет наибольшей (косинус равен единице) и, наоборот, в моменты времени, в которые смещение максимально, скорость обращается в нуль. Другими словами, скорость имеет

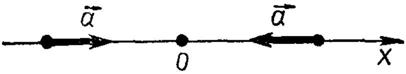


Рис. 11.6

наибольшее значение, когда точка проходит положение равновесия, и она обращается в нуль, когда точка достигает наибольшего отклонения. Это хорошо видно на примере колебаний математического маятника: маятник на мгновение останавливается в момент наибольшего отклонения: наибольшую скорость он имеет, когда проходит положение равновесия. Формулу (11.8) можно записать так:

$$v = v_0 \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right). \qquad (11.9)$$

Отсюда видно, что скорость v опережает по фазе смещение x на $\frac{\pi}{2}$, т. е. на четверть периода.

Если продифференцируем по времени выражение (11.8), то найдем закон изменения ускорения:

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) = -a_0 \sin(\omega t + \varphi), \qquad (11.10)$$

где $a_0 = A\omega^2 = v_0\omega$ — амплитуда ускорения.

Сопоставляя формулу (11.10) с выражением (11.7) для смещения, мы приходим к выводу, что ускорение и смещение одновременно обращаются в нуль и одновременно достигают наибольших значений.

Выражение (11.10) можно записать и в таком виде:

$$a = A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi + \pi).$$

Сравнивая эту формулу с (11.7), легко убедиться в том, что ускорение опережает по фазе смещение на π или на $^1/_2$ периода. Для краткости говорят: ускорение и смещение изменяются в противофазе. Это означает, что в тот момент, когда одна из этих величин достигает максимального значения (положительного амплитудного значения), другая достигает минимального значения (отрицательного амплитудного значения).

Поскольку $x = A\sin(\omega t + \varphi)$, то (11.10) можно записать так:

$$a = -\omega^2 x. \qquad (11.11)$$

Это значит, что **ускорение при гармоническом колебании пропорционально смещению и направлено к одной и той же точке — среднему положению.** Из рисунка 11.6 видно, что если x положительно, то a отрицательно, т. е. направлено к точке O, если же x отрицательно, то a положительно, т. е. опять направлено к точке O.

Рассуждая подобным образом, можно получить, что угловая скорость и угловое ускорение при крутильных колебаниях вида

$$\alpha = \alpha_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

будут соответственно равны:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \Omega = \alpha_0 \omega \cos(\omega t + \varphi),$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \beta = -\alpha_0 \omega^2 \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 \alpha.$$

4. СВЯЗЬ ГАРМОНИЧЕСКОГО КОЛЕБАНИЯ С ВРАЩЕНИЕМ РАДИУС-ВЕКТОРА

Пусть радиус-вектор $\overrightarrow{OC}$ (рис. 11.7) равномерно вращается около центра O с угловой скоростью ω. Через O проведем ось x и рассмотрим проекцию вектора $\overrightarrow{OC}$ на эту ось. Она равна:

$$x = |\overrightarrow{OC}| \cos\alpha. \tag{11.22}$$

Здесь угол α непрерывно изменяется:

$$\alpha = \varphi + \omega t,$$

где φ — угол между вектором $\overrightarrow{OC}$ и осью x в момент времени $t = 0$. Если обозначить модуль вектора $\overrightarrow{OC}$ через A, то (11.12) запишется так:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi).$$

Полученное выражение показывает, что гармоническое колебание можно рассматривать как проекцию вращающегося вектора, причем циклическая частота колебания равна угловой скорости вращения вектора, а амплитуда колебания — модулю вектора.

Очевидно, что одному обороту вектора $\overrightarrow{OC}$ соответствует одно колебание. Так как угловую скорость вращения можно выразить через число оборотов в секунду n

$$\omega = 2\pi n,$$

то и циклическую частоту можно выразить через число колебаний в секунду

$$\omega = 2\pi\nu.$$

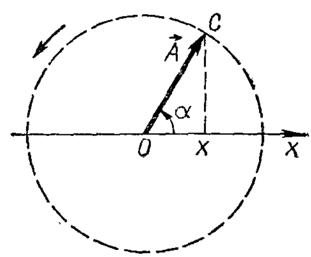


Рис. 11.7

5. СЛОЖЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ

Одна и та же точка может одновременно участвовать в двух (и более) движениях. Примером служит падение шарика, брошенного горизонтально. В этом случае можно рассматривать, что шарик совершает два взаимно перпендикулярных прямолинейных движения: равномерное по горизонтали и равнопеременное по вертикали. Одна и та же точка может участвовать в двух (и более) движениях колебательного вида. Например, подвешенный на длинной нити шарик можно поочередно заставить колебаться то в одной вертикальной плоскости, то в другой, перпендикулярной первой. Но можно заставить его колебаться одновременно в двух этих плоскостях. Для этого шарик, колеблющийся в одной плоскости, надо ударить молотком в направлении, перпендикулярном этой плоскости. Два колебания во взаимно перпендикулярных плоскостях «сложатся» и перед наблюдающим предстанет результирующее движение, которое в данном случае представляет собой движение шарика по эллипсу в горизонтальной плоскости.

Мы рассмотрим два случая сложения двух колебаний: а) когда оба колебания совершаются по одной прямой и б) когда они совершаются по взаимно перпендикулярным направлениям.

Сложение двух колебаний одного направления. Векторные диаграммы. *Сложение двух колебаний одинаковой частоты.* Складываемые колебания могут в общем случае иметь разные амплитуды A_1 и A_2 и разные начальные фазы φ_1 и φ_2:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1),$$
$$x_2 = A_2 \cos(\omega_2 + \varphi_2). \qquad (11.13)$$

Общее смещение x точки, участвующей одновременно в двух колебаниях, равно алгебраической сумме смещений x_1 и x_2:

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2). \qquad (11.14)$$

Пользуясь формулами тригонометрических преобразований, можно привести выражение (11.14) к виду

$$x = A \cos(\omega t + \varphi),$$

где A и φ — амплитуды и начальная фаза результирующего колебания.

Теперь выполним сложение колебаний (11.13) геометрически. Для этого представим колебания x_1 и x_2 как проекции вращающихся с угловой скоростью ω векторов $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$. Очевидно, что угол γ между вращающимися векторами $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$ с течением времени не изменяется, а величина его $\gamma = \alpha_2 - \alpha_1 = \omega t + \varphi_2 - (\omega t + \varphi_1) = \varphi_2 - \varphi_1$ равна разности начальных фаз составляющих колебаний. Поскольку угол γ постоянен, то достаточно рассмотреть положение векторов $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$ в какой-либо момент времени t (рис. 11.8).

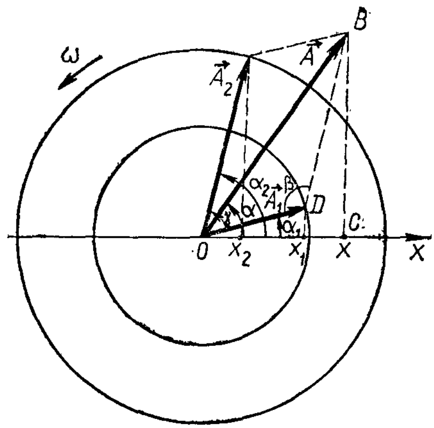


Рис. 11.8

Проекции векторов $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$ на ось x запишутся так:

$$x_1 = A_1 \cos \alpha_1 = A_1 \cos (\omega t + \varphi_1),$$

$$x_2 = A_2 \cos \alpha_2 = A_2 \cos (\omega t + \varphi_2).$$

Но сумма проекций двух векторов $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$ на некоторую ось равна проекции на ту же ось вектора $\vec{A}$, являющегося их геометрической суммой. Следовательно, результирующее колебание представляется в виде проекции вектора $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$, вращающегося с угловой скоростью ω, т. е.

$$x = A \cos \alpha.$$

Так как

$$\alpha = \omega t + \varphi,$$

где φ — угол, определяющий положение вектора $\vec{A}$ в момент времени $t = 0$, то

$$x = A \cos (\omega t + \varphi). \quad (11.15)$$

В момент $t = 0$ имеем: $\alpha_1 = \varphi_1$, $\alpha_2 = \varphi_2$, $\alpha = \varphi$.

Из рисунка 11.8 видно, что

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{BC}{OC} = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}. \quad (11.16)$$

Амплитуда результирующего колебания как модуль вектора $\vec{A}$ определится из косоугольного треугольника OBD (рис. 11.8):

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos \beta.$$

Но $\beta = 180° - \gamma = 180° - (\alpha_2 - \alpha_1)$. Поэтому

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos (\varphi_2 - \varphi_1). \quad (11.17)$$

Итак, в результате сложения двух гармонических колебаний одинаковой частоты, совершающихся по одной прямой, получается гармоническое колебание (11.15) той же частоты, происходящее вдоль той же прямой. Амплитуда A и начальная фаза φ результирующего колебания определяются соответственно через амплитуды и начальные фазы слагаемых колебаний по формулам (11.16) и (11.17).

Следует подчеркнуть, что амплитуда результирующего колебания A не изменяется во времени, но зависит от разности $\varphi_2 - \varphi_1$ начальных фаз[1] слагаемых колебаний. Так как $\cos(\varphi_2 - \varphi)$ не может быть больше $+1$ и меньше -1, то A не более суммы $A_1 + A_2$ и не менее модуля разности амплитуд $|A_1 - A_2|$.

Рассмотрим два частных случая, имеющих важное значение при объяснении интерференции волн.

1. Пусть $\varphi_2 - \varphi_1 = 2k\pi$ (где $k = 0, 1, 2, \ldots$). В этом случае $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = +1$, и формула (11.17) примет вид:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2,$$

или

$$A = A_1 + A_2.$$

Итак, если разность фаз слагаемых колебаний равна нулю или кратна 2π, то амплитуда результирующего колебания равна сумме амплитуд слагаемых колебаний.

2. Пусть теперь $\varphi_2 - \varphi_1 = (2k+1)\pi$ (где $k = 0, 1, 2 \ldots$). Так как при этом $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = -1$, то из (11.17) получаем:

$$A = |A_1 - A_2|.$$

Знак модуля поставлен потому, что амплитуда — величина положительная, тогда как разность $A_1 - A_2$ может быть и отрицательной.

Таким образом, если разность фаз слагаемых колебаний равна нечетному числу π, то амплитуда результирующего колебания равна абсолютному значению разности амплитуд слагаемых колебаний.

Сложение двух колебаний, имеющих разные частоты ω_1, ω_2. На векторной диаграмме, построенной для этого случая (рис. 11.8), векторы $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$ теперь вращаются с разными угловыми скоростями, в результате чего угол γ между ними с течением времени постоянно изменяется. Вследствие этого постоянно изменяются как модуль вектора $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$, так и его угловая скорость вращения ω. Таким образом, результирующее движение, представляемое проекцией вектора $\vec{A}$, не является гармоническим колебанием.

Биения. Рассмотрим специальный случай сложения двух колебаний одного направления и одинаковой амплитуды ($A_1 = A_2$), частоты которых очень мало отличаются друг от друга:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \quad x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2).$$

---

[1] Можно говорить просто от разности фаз, так как $(\omega t + \varphi_2) - (\omega t + \varphi_1) = \varphi_2 - \varphi_1$.

Из векторной диаграммы, построенной для этого случая, находим результирующее смещение как проекцию вектора $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$:

$$x = A\cos\alpha.$$

Так как $A_1 = A_2$, то вектор A в любой момент времени t делит угол γ пополам (рис. 11.8). Поэтому

$$\alpha = \alpha_1 + \frac{\gamma}{2} = \alpha_1 + \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2},$$

или

$$\alpha = \frac{\omega_1 t + \varphi_1 + \omega_2 t + \varphi_2}{2} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \varphi,$$

где $\varphi = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}$ — угол, определяющий положение вектора $\vec{A}$ в начальный момент времени ($t = 0$) и равный начальной фазе результирующего колебания. Не ограничивая общности, мы можем принять начальные фазы составляющих колебаний одинаковыми ($\varphi_1 = \varphi_2$). Тогда $\varphi = 0$ и $x = A\cos\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t$. Это значит, что результирующее колебание совершается с циклической частотой, равной полусумме циклических частот составляющих колебаний.

Амплитуда результирующего колебания не является постоянной. Из векторной диаграммы (см. рис. 11.8) находим:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cdot\cos\beta.$$

Так как $\beta = 180 - \gamma = 180 - (\alpha_2 - \alpha_1) = 180 - [(\omega_2 - \omega_1)t + (\varphi_2 - \varphi_1)]$, то, считая $\varphi_1 = \varphi_2$ и $A_2 = A_1$, получим:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\omega_2 - \omega_1)t = 2A_1^2[1 + \cos(\omega_2 - \omega_1)t] = 4A_1^2\cos^2\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t.$$

Отсюда

$$A = 2A_1\left|\cos\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right|. \qquad (11.18)$$

Абсолютное значение косинуса взято потому, что амплитуда A — величина существенно положительная, тогда как косинус может быть и отрицательным.

Известно, что абсолютное значение косинуса изменяется с периодом, равным π. Следовательно, период τ изменения амплитуды результирующего колебания измеряется тем же промежутком времени, за который аргумент косинуса изменится на π, т. е. τ определяется из условия

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\tau = \pi,$$

откуда

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}. \qquad (11.19)$$

Частота $\nu_б$ изменения амплитуды найдется так:

$$\nu_б = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi} = \nu_2 - \nu_1.$$

Она, следовательно, равна разности частот слагаемых колебаний. Итак, результирующее колебание имеет вид:

$$x = 2A\left|\cos\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right|\cos\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t. \qquad (11.20)$$

Так как по условию ω_2 близко к ω_1, то величина $\omega_б = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$ мала по сравнению с $\frac{(\omega_2 + \omega_1)}{2}$. Поэтому приближенно можно считать, что результирующее движение есть гармоническое колебание циклической частоты $\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ с медленно меняющейся амплитудой. Такие колебания называют *биениями*. Частоту $\nu_б$ изменения амплитуды называют *частотой биений.*

На рисунке 11.9 представлен график зависимости смещения от времени t для биений.

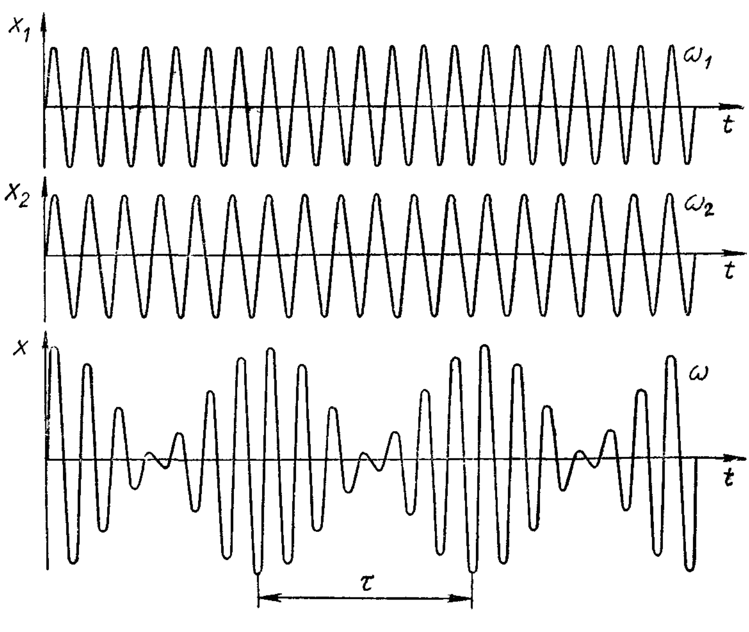


Рис. 11.9

Биения можно продемонстрировать на примере сложения колебаний от двух камертонов с близкими частотами. Возбудив одновременно оба камертона, мы будем воспринимать звук определенной частоты, но периодически то усиливающийся, то ослабляющийся.

Сложение двух взаимноперпендикулярных колебаний. Рассмотрим сначала случай, когда материальная точка одновременно участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, имеющих одинаковую циклическую частоту.

Пусть одно колебание происходит вдоль оси x, а другое — вдоль оси y:

$$\begin{aligned} x &= A\cos(\omega t + \varphi_1), \\ y &= B\cos(\omega t + \varphi_2). \end{aligned} \tag{11.21}$$

Определим уравнение траектории результирующего движения точки. Для этого из (11.21) надо исключить время t. Перепишем (11.21) в следующем виде:

$$\frac{x}{A} = \cos\omega t\cos\varphi_1 - \sin\omega t\sin\varphi_1, \tag{11.22}$$

$$\frac{y}{B} = \cos\omega t\cos\varphi_2 - \sin\omega t\sin\varphi_2. \tag{11.23}$$

Умножим (11.22) на $\cos\varphi_2$, а (11.23) на $\cos\varphi_1$. Вычтем из первого равенства второе:

$$\frac{x}{A}\cos\varphi_2 - \frac{y}{B}\cos\varphi_1 = \sin\omega t\sin(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Теперь умножим (11.22) на $\sin\varphi_2$, а (11.23) на $\sin\varphi_1$ и также вычтем из первого равенства второе:

$$\frac{x}{A}\sin\varphi_2 - \frac{y}{B}\sin\varphi_1 = \cos\omega t\sin(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Возведя в квадрат и складывая последние два равенства, получаем уравнение траектории:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 2\frac{xy}{AB}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1). \tag{11.24}$$

Отсюда видно, что траектория результирующего движения представляет собой эллипс. Таким образом, в результате участия точки в двух взаимно перпендикулярных колебаниях с одинаковой частотой ω получается в общем случае движение по эллипсу.

Ориентация этого эллипса по отношению к осям x, y зависит от разности фаз составляющих колебаний.

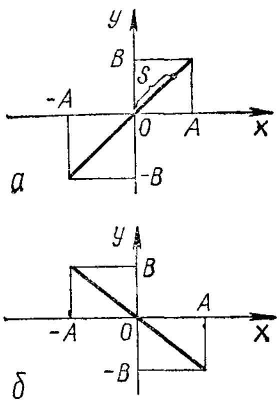


Рис. 11.10

Рассмотрим некоторые частные случаи:

1. Пусть разность фаз $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$. Уравнение траектории примет вид:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB} = 0,$$

или

$$\left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B}\right)^2 = 0.$$

Отсюда

$$y = \frac{B}{A} x. \qquad (11.25)$$

Это значит, что при разности фаз $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$ точка движется по прямой, проходящей через начало координат и образующей с осью x угол, тангенс которого равен отношению амплитуд $\frac{B}{A}$ (рис. 11.10, *а*). По указанной прямой точка совершает гармонические колебания с циклической частотой ω около начала координат. Действительно, положение точки на прямой задается дуговой координатой $s = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Учитывая, что $\varphi_2 = \varphi_1 = \varphi$, получим:

$$s = \sqrt{A^2 \cos^2(\omega t + \varphi) + B^2 \cos^2(\omega t + \varphi)} = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(\omega t + \varphi),$$

или

$$s = C \cos(\omega t + \varphi).$$

Отсюда видно, что точка совершает гармоническое колебание с циклической частотой ω и амплитудной $C = \sqrt{A^2 + B^2}$.

2. Пусть теперь разность фаз $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$. В этом случае уравнение траектории имеет вид:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{2xy}{AB} = 0, \qquad (11.26)$$

откуда

$$y = -\frac{B}{A} x.$$

Результирующее движение, как и в предыдущем случае, представляет собой гармоническое колебание с частотой ω, совершающееся около центра O по отрезку прямой, наклоненной к оси x под углом, большим $\frac{\pi}{2}$ (рис. 11.10, б).

3. Наконец, рассмотрим сложение колебаний, фазы которых φ_1 и φ_2 отличаются на $\frac{\pi}{2}$ или $3\frac{\pi}{2}$. В этом случае уравнение траектории принимает вид:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1. \qquad (11.27)$$

Как известно, это каноническая форма уравнения эллипса (оси координат совпадают с осями эллипса). Таким образом, при $\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, $3\frac{\pi}{2}$ точка движется по эллипсу, причем можно показать, что движение совершается по часовой стрелке, если $\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, и против хода стрелки, если $\varphi_2 - \varphi_1 = 3\frac{\pi}{2}$.

Интересно отметить, что при равенстве амплитуд составляющих колебаний эллипс (11.27) превращается в окружность радиуса $R = A = B$. Отсюда следует важный вывод: в результате сложения двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаний, имеющих одинаковые частоты ω и одинаковые амплитуды A, но сдвинутых по фазе на $\frac{\pi}{2}$ $\left(\text{или } 3\frac{\pi}{2}\right)$, получается равномерное движение по окружности радиуса A с угловой скоростью ω, происходящее по часовой стрелке или против хода стрелки часов.

Иными словами, в результате сложения двух взаимно перпендикулярных колебаний

$$x = A\cos\omega t,$$
$$y = A\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \tag{11.28}$$

или

$$\begin{aligned} x &= A\cos\omega t,\\ y &= -A\sin\omega t \end{aligned} \tag{11.29}$$

получается движение по окружности, уравнение которой имеет вид:

$$x^2 + y^2 = A^2.$$

Справедливо и обратное утверждение: любое равномерное движение, происходящее по окружности радиуса A по часовой стрелке (или против) с угловой скоростью ω, может быть разложено на два взаимно перпендикулярных гармонических колебания, представляемые формулами (11.28) или (11.29).

Из изложенного видно, что и движение по эллипсу может быть разложено на два взаимно перпендикулярных колебания, имеющие определенную разность фаз.

Итак, сложение двух взаимно перпендикулярных колебаний одной частоты приводит в общем случае к движению точки по эллипсу. В некоторых частных случаях эллипс может вырождаться в прямую или окружность.

Все это можно наглядно показать на опыте с маятником, представляющим тяжелый шар, подвешенный на длинной нити. Если находящийся в равновесии шар слегка ударить молотком в горизонтальном направлении, то он начнет колебаться вдоль линии удара. Если теперь по движущемуся шару еще раз ударить молотком в направлении, перпендикулярном к его движению, то этим маятник будет приведен во второе колебательное

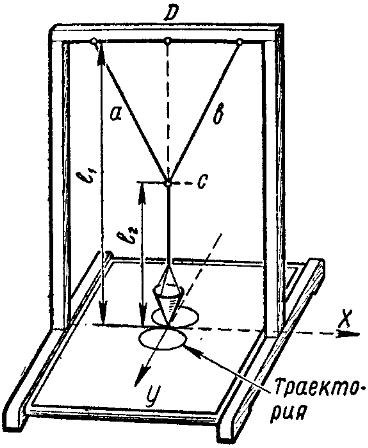


Рис. 11.11

движение, перпендикулярное первому. Между двумя этими колебаниями будет определенный сдвиг фаз, зависящий от выбора места для удара на траектории движения шара.

Если второй удар нанести в тот момент, когда шар проходил положение равновесия, то сдвиг фаз двух колебаний равен 2π или π и мы увидим, что шар будет колебаться вдоль линии, не совпадающей с линиями первого и второго ударов. Если же второй удар нанести в момент наибольшего отклонения шара от положения равновесия, то $\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ и шар при определенной силе удара начнет двигаться по окружности. Во всех других случаях второй удар молотка приводит шар в движение по эллипсу.

Разберем теперь сложение взаимно перпендикулярных колебаний р а з н о й ч а с т о т ы.

В этом случае в результате сложения колебаний появляются траектории более сложной формы, которые получили название *фигур Лиссажу*. Простейший прибор, позволяющий записывать траекторию результирующего движения, показан на рисунке 11.11. На двух тонких нитях подвешено конусообразное ведерко с песком, высыпающимся из отверстия. Нити a и b при помощи зажима c могут быть соединены вместе на любой высоте. Подвешенное ведерко с песком представляет собой маятник, который может колебаться в двух взаимно перпендикулярных плоскостях с разными частотами. Колебание в плоскости нитей a и b (вдоль оси x) происходит относительно точки c; период колебаний определяется длиной маятника l_2 (рис. 11.11). Колебания в перпендикулярной плоскости в направлении оси y происходят относительно точки D, а период их определяется длиной маятника l_1 (рис. 11.11). Таким образом, периоды колебаний по осям x и y неодинаковы. Можно подобрать место зажима c таким образом, чтобы за время одного колебания по оси y груз совершил два колебания по оси x. В этом случае траектория движения имеет вид, показанный на рисунке 11.11. Вид траектории в этом случае зависит также от разности фаз между составляющими колебаниями.

На рисунке 11.12 приведены траектории (фигуры Лиссажу) для других соотношений периодов слагаемых колебаний (разности фаз указаны на рисунке).

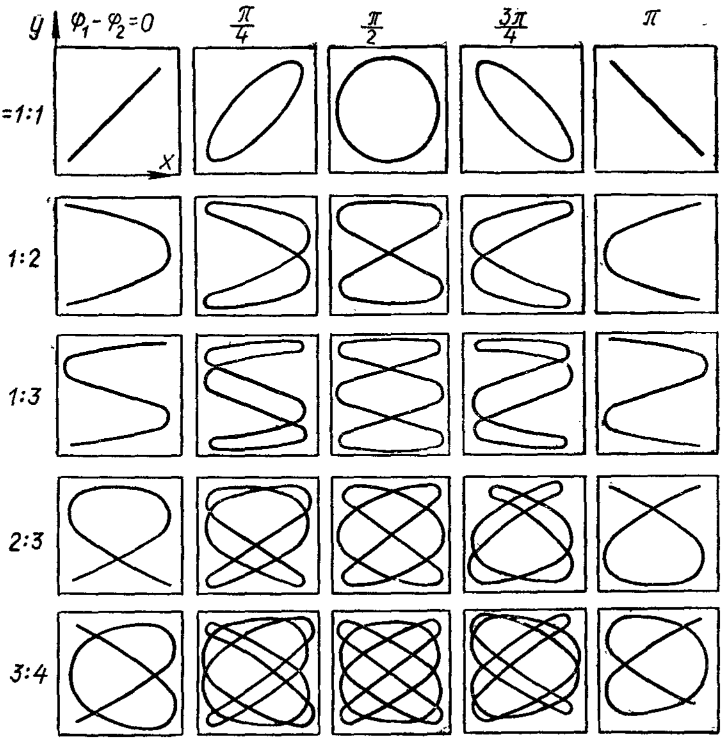


Рис. 11.12

Вопросы для самопроверки

1. Какие движеиия называются колебательными? Какие колебаиия называются гармоническими? негармоническими?

2. Перечислите физические величииы, характеризующие гармоническое колебательное движение. Что такое фаза колебания и что оиа определяет? Что определяет начальная фаза? Что такое частота колебаний ν и что такое циклическая (круговая) частота ω? Как связаны между собой величины ν и ω? Чему равна амплитуда, период и начальная фаза следующего колебаиия:

$$x = 0{,}6 \cos\left(\frac{2\pi}{12} t + \frac{\pi}{3}\right) ?$$

3. Какие колебания называются прямолинейными и какие криволинейными? Какие колебания называются крутильными? Напишите закон движения при крутильных колебаниях через угловые величины. Приведите примеры крутильиых колебаний.

4. Каковы амплитуды скорости и ускорения материальной точки, совершающей гармоническое колебание по следующему закону:

$$x = 8 \cos\left(\frac{2\pi}{0{,}2} t + \frac{\pi}{6}\right) ?$$

5. При каких условиях два гармонических колебаиия «погасят» друг друга полностью? частичио?

6. Даны два колебания:

$$x_1 = 3\cos\left(\frac{2\pi}{0,1}t + \frac{\pi}{3}\right),$$

$$x_2 = 5\cos\left(\frac{2\pi}{0,1}t + \frac{\pi}{3}\right).$$

Чем различаются эти колебания? Какова разность фаз между ними? Будет ли разность фаз равна разности начальных фаз? Чему будет равна амплитуда результирующего колебания, если эти два колебания сложить?

7. Что имеется в виду, когда говорят о связи гармонического колебания с вращательным движением радиус-вектора? Какую пользу приносит использование этой связи при рассмотрении вопроса о сложении колебаний?

8. Напишите общее выражение для амплитуды результирующего колебания, полученного при сложении двух колебаний одной частоты, совершающихся вдоль одной прямой. При каком условии амплитуда результирующего колебания будет равна сумме амплитуд составляющих колебаний? модулю их разности?

9. При сложении двух гармонических колебаний одинаковой частоты, отличающихся амплитудой и фазой, амплитуда результирующего колебания находится по формуле:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Умножив это равенство на $\frac{k}{2}$ (где k — коэффициент упругости), получим:

$$\frac{k}{2}A^2 = \frac{k}{2}A_1^2 + \frac{k}{2}A_2^2 + kA_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Поскольку первые два члена этого равенства представляют собой энергию колебаний первого и второго тел, то энергия $\frac{k}{2}A^2$ сложного колебания оказывается не равной сумме энергий составляющих колебаний, так как член $kA_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$ в общем случае не равен нулю. Означает ли это, что нарушается закон сохранения энергии?

10. Выведите уравнение движения при сложении двух колебаний, происходящих вдоль одной прямой и имеющих разные частоты $(\omega_1 \neq \omega_2)$, но одинаковые амплитуды. Начертите графики слагаемых и результирующего движения.

11. Какие колебания называются биениями? при каких условиях они получаются? Выведите формулу биений. Чему равна частота биений?

12. Какое движение совершает точка, если она одновременно участвует в двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаниях с одинаковыми частотами? При каких условиях траекторией движения будет прямая и при каких — окружность? При каких условиях движение по окружности будет происходить по часовой стрелке?

13. Что называют фигурами Лиссажу и как их можно получить на опыте? Можно ли по виду фигуры Лиссажу установить соотношение частот складываемых колебаний? Какая фигура получится при сложении двух колебаний одинаковой частоты?

Занятие 29

ДИНАМИКА ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

1. СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ТОЧКУ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ КОЛЕБАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ

Закон изменения сил и моментов сил. Рассмотрим одновременно прямолинейные и крутильные гармонические колебания.

Прямолинейные колебания

При прямолинейном гармоническом колебании ускорение тела (материальной точки) изменяется по закону

$$a = -\omega^2 x. \qquad (11.30)$$

Зная ускорение, нетрудно по второму закону Ньютона найти и силу. Для этого умножим обе части равенства (11.30) на массу тела m. Учитывая, что $ma = f$, получаем:

$$f = -m\omega^2 x = -kx, \qquad (11.31)$$

где

$$k = m\omega^2. \qquad (11.32)$$

Отсюда видно, что при прямолинейном гармоническом колебании на тело (материальную точку) действует сила, пропорциональная смещению x и направленная, как и ускорение, в сторону, противоположную смещению (в сторону положения *равновесия*).

Верно и обратное утверждение: если на тело (материальную точку), могущее двигаться по прямой, действует вдоль этой прямой сила f, пропорциональная смещению и направленная в сторону, противоположную смещению, то тело будет совершать прямолинейные гармонические колебания.

Силу, удовлетворяющую отмеченным условиям, называют *возвращающей*, а величину k — *коэффициентом возвращающей силы*. Если известен коэффициент возвращающей силы, то, пользуясь (11.32), можно найти циклическую частоту и период прямолинейных колебаний:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad (11.33)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \qquad (11.34)$$

Крутильные колебания

При крутильных гармонических колебаниях угловое ускорение тела изменяется по закону

$$\beta = -\omega^2 \alpha. \qquad (11.30)'$$

Зная угловое ускорение, нетрудно по второму закону Ньютона для вращательного движения найти и момент силы. Умножим обе части равенства (11.30)′ на момент инерции тела $\mathcal{I}$ относительно оси заданного вращения. Учитывая далее, что $\beta\mathcal{I} = M$, получим

$$M = -\mathcal{I}\omega^2 a = -Da, \qquad (11.31)'$$

где

$$D = \mathcal{I}\omega^2.$$

Отсюда видно, что при гармонических крутильных колебаниях на тело действует момент сил, пропорциональный углу поворота и направленный, как и угловое ускорение, в сторону, противоположную повороту (к положению равновесия).

Верно и обратное утверждение. Если на тело, вращающееся около заданной оси, действует относительно оси вращающий момент M, пропорциональный углу поворота и направленный в сторону, противоположную повороту, то тело будет совершать около заданной оси гармонические крутильные колебания. Момент, удовлетворяющий отмеченным условиям, называют *возвращающим*, а величину D — *коэффициентом возвращающего момента*.

Если известен коэффициент возвращающего момента, то, пользуясь (11.30)′, можно найти циклическую частоту и период крутильных колебаний:

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{\mathcal{I}}}, \qquad (11.33)'$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\mathcal{I}}{D}}. \qquad (11.34)'$$

Мы видим, что между формулами для частоты и периода прямолинейных и крутильных колебаний существует взаимнооднозначное соответствие.

Важно подчеркнуть, что период гармонических колебаний не зависит от амплитуды, пока не нарушается линейная зависимость между силой и смещением.

Природа возвращающих сил и возвращающих моментов сил. Существуют ли в природе силы, которые бы изменялись по закону $f = -kx$? Очевидно, что такими силами являются прежде всего силы упругости, возникающие в твердых телах при малых деформациях растяжения и сжатия. При малых деформациях кручения возникают, как известно, возвращающие моменты, пропорциональные углу «закручивания»: $M = -D\alpha$. Так как все тела, с которыми имеют дело на практике, обладают упругими свойствами, то силы упругости и моменты этих сил — самый распространенный вид возвращающих сил и моментов.

Однако, кроме сил упругости, существуют и другие силы, подчиняющиеся указанным законам.

Силы (моменты сил), которые подчиняются закону $f = -kx$ $(M = -D\alpha)$, *но не являются упругими, называют квазиупругими (как бы упругими), а величину* k *— коэффициентом квазиупругой силы* (D *— коэффициент квазиупругого момента*).

Итак, колебания материальной точки возникают под действием упругих или квазиупругих сил.

2. ПРИМЕРЫ КОЛЕБАНИЙ ПОД ДЕЙСТВИЕМ УПРУГИХ И КВАЗИУПРУГИХ СИЛ

1. На гладкой горизонтальной поверхности (рис. 11.13) лежит тело массой m, скрепленное с пружиной (масса пружины и трение не учитываются). При отклонении тела от положения равновесия на расстояние x пружина растягивается. Сила упругого растяжения $f = -kx$ возвращает тело в исходное положение. Так как трение отсутствует, то работа сил упругости перейдет в кинетическую энергию тела и тело вернется в исходное положение, имея некоторую скорость. Далее тело по инерции перейдет положение равновесия и начнет отклоняться в другую сторону, сжимая пружину. Нарастающая при этом сила упругого сжатия тормозит движение тела до полной его остановки, после чего процесс пойдет в обратном порядке. Так возникает гармоническое колебательное движение. Период колебания зависит от жесткости пружины и массы тела $\left(T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\right)$, но не зависит от амплитуды колебаний (пока не превосходит значе-

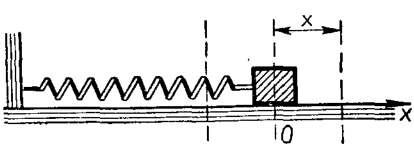


Рис. 11.13

ния, при котором нарушается закон Гука). Если трение отсутствует, колебания не ограничены во времени.

2. Пусть тело в виде коромысла с двумя грузами на концах подвешено на тонком невесомом стержне (проволоке) длиной l и радиуса R (рис. 11.14). Если находящееся в равновесии коромысло повернуть в горизонтальной плоскости на угол α, то в результате деформации кручения в стержне возникает возвращающий момент

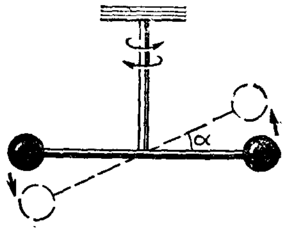


Рис. 11.14

$$M = -D\alpha, \qquad D = \frac{\pi N R^4}{2l}, \qquad (11.35)$$

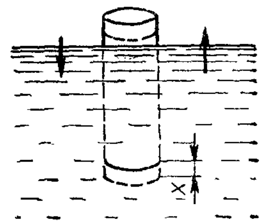


Рис. 11.15

где N — модуль сдвига материала стержня. Однако к моменту времени, когда коромысло возвратится в среднее положение, оно накопит кинетическую энергию вращения. Поэтому коромысло «проскочит» положение равновесия и «закрутит» стержень в другую сторону (трением пренебрегаем). Затем вращение начнется в обратную сторону. Таким образом, выведенное из положения равновесия коромысло будет совершать крутильные колебания около оси, совпадающей с осью стержня. Поскольку $M = -D\alpha$, то колебания будут гармоническими с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\mathcal{J}}{D}},$$

где $\mathcal{J}$ — момент инерции коромысла и грузов относительно оси вращения.

3. Рассмотрим еще колебания плавающего тела. При увеличении глубины погружения плавающего тела цилиндрической формы (рис. 11.15) на x выталкивающая сила увеличится на $F = -\rho g S x$ (минус указывает на то, что сила F направлена в сторону, противоположную направлению смещения тела; F и x имеют противоположные знаки). Поскольку для данного тела и данной жидкости произведение $\rho g S = k$ постоянно, то дополнительная сила пропорциональна смещению и противоположна ему по направлению ($F = -kx$), т. е. является квазиупругой силой. Под ее воздействием тело совершает гармоническое колебательное движение (поступательное) около положения равновесия с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho g S}}.$$

3. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ФИЗИЧЕСКИЙ МАЯТНИКИ

Являясь примером колебаний под действием квазиупругих сил, эти маятники имеют важное практическое значение, и поэтому мы рассмотрим их отдельно.

Математический маятник. Так называют систему, представляющую собой материальную точку, подвешенную на тонкой невесомой и нерастяжимой нити (рис. 11.16).

Будучи выведенной из положения равновесия, материальная точка совершает колебательное движение по дуге окружности радиуса l. Дуговая координата s, отсчитываемая от положения равновесия, определяет положение точки на траектории. Известно, что закон движения точки по криволинейной траектории определяется лишь тангенциальными составляющими действующих на точку сил. В данном случае на точку действует сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции нити $\vec{R}$. Последняя перпендикулярна к траектории; поэтому тангенциальная составляющая F будет зависеть только от силы тяжести mg и угла α отклонения маятника от среднего положения:

$$F = -mg\sin\alpha.$$

Если α выразить в радианах, то

$$\alpha = \frac{s}{l}.$$

Поэтому

$$F = -mg\sin\frac{s}{l}.$$

Знак минус указывает на то, что сила $\vec{F}$ направлена в сторону, противоположную смещению: когда маятник отклонен вправо, сила $\vec{F}$ направлена влево, и наоборот. Итак, в общем случае сила F, возвращающая точку в положение равновесия, пропорциональна не отклонению s, а величине $\sin\frac{s}{l}$. Поэтому в общем случае колебания маятника не являются гармоническими. Однако при малых углах отклонения ($\alpha < 5°$) можно с достаточным приближением записать:

$$F = -\frac{mg}{l}s = -ks,$$

где

$$k = \frac{mg}{l}.$$

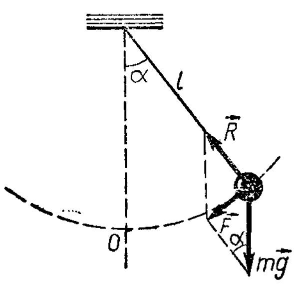


Рис. 11.16

Таким образом, при малых углах отклонения маятника тангенциальная сила пропорциональна отклонению s и направлена в сторону, противоположную направлению отклонения. Следовательно, эта сила является квазиупругой, а колебания маятника — гармоническими. Период колебания определяется формулой:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \qquad (11.37)$$

Период не зависит от массы математического маятника, так как квазиупругая сила сама пропорциональна массе.

Вычислим силу натяжения нити R. Уравнение движения в проекции на нормаль к траектории имеет вид:

$$\frac{mv^2}{l}=R-mg\cos\alpha.$$

Так как при малых углах $\cos\alpha\approx 1$, то

$$\frac{mv^2}{l}\approx R-mg.$$

Отсюда

$$R=m\left(\frac{v^2}{l}+g\right).$$

Следовательно, наибольшая сила реакции нити наблюдается в момент прохождения маятником положения равновесия, т. е. когда скорость подвешенной материальной точки максимальна; сила реакции будет наименьшей в момент максимального отклонения, когда скорость равна нулю.

В практике математический маятник осуществляется в виде металлического шара, подвешенного на длинной тонкой нити из материала с большой упругостью. Измеряя период колебаний и используя формулу (11.37), можно вычислить ускорение свободного падения в данном месте на земной поверхности. Этим методом впервые в истории физики было измерено g на разных широтах земного шара, в результате чего была установлена эмпирическая формула зависимости g от широты φ.

Физический маятник — это твердое тело, имеющее неподвижную ось вращения, не проходящую через его центр тяжести. Будучи выведенным из положения равновесия, тело совершает около оси крутильные колебания. Выясним, будут ли эти колебания гармоническими. Для этого найдем выражение для возвращающего момента. При отклонении тела на произвольный угол α (рис. 11.17) возвращающий момент равен

$$M=Fl=-mgl\sin\alpha \qquad (11.38)$$

(знак минус учитывает, что направление момента M противоположно направлению отклонения; l — расстояние центра масс от точки подвеса O).

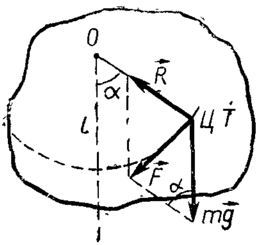


Рис. 11.17

Из (11.38) видно, что возвращающий момент в общем случае (при любых α) не пропорционален углу отклонения α. Поэтому в общем случае колебания физического маятника не будут гармоническими. Но при малых углах ($\alpha < 5°$) можно с достаточным приближением записать:

$$M = -mgl\alpha = -D\alpha, \qquad D = mgl.$$

При этих условиях возвращающий момент M пропорционален α и физический маятник совершает гармонические колебания, период которых определяется формулой:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\mathcal{J}}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{\mathcal{J}}{mgl}}, \qquad (11.39)$$

где $\mathcal{J}$ — момент инерции тела относительно оси вращения.

Формулу (11.39) часто используют в технике при опытном определении момента инерции тел по периоду их колебаний около заданной оси. Если в формуле (11.39) ввести обозначение

$$\frac{\mathcal{J}}{me} = l^*,$$

то получим выражение, совпадающее по форме с выражением для периода колебаний математического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l^*}{g}}. \qquad (11.40)$$

Величину l^* называют *приведенной длиной физического маятника.* Это есть длина такого математического маятника, который имеет такой же период колебания, что и данный физический маятник.

4. КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ И ИХ ЭНЕРГИЯ

Математический и физический маятники, груз, подвешенный на пружине, плавающее тело представляют собой примеры простейших механических систем, обладающих тем свойством, что, будучи выведенными из положения устойчивого равновесия и предоставленные затем самим себе, они совершают колебания. Системы такого рода называют *колебательными системами,* а совершаемые ими колебания — *собственными* [1].

Если силы трения отсутствуют, то собственные колебания называют *свободными.* Рассматривая различные колебательные системы, мы пренебрегали трением, поэтому найденные нами частоты относятся к свободным колебаниям.

[1] Кроме собственных колебаний, система может совершать и *вынужденные* колебания под действием внешней периодически изменяющейся силы.

Мы видели, что в каждом отдельном случае возвращающие (квазиупругие) силы определяются свойствами самой системы. Следовательно, свойствами системы определяется также и частота возникающих свободных колебаний.

Колебательная система, положение которой в каждый момент времени определяется одной-единственной координатой, называется системой с одной степенью свободы. Рассмотренные нами выше системы относятся именно к этому типу. Существуют также системы с двумя, тремя (и более) степенями свободы.

Всякую колебательную систему можно заменить моделью, состоящей из невесомой пружины жесткостью k и колеблющейся материальной точки массой m. Идеализированная система, в которой масса сосредоточена в одной ее части, а упругость — в другой, называется колебательной системой с сосредоточенными параметрами m и k. Параметры системы определяют частоту свободных колебаний. Но существуют системы и с распределенными параметрами, в которых масса и упругость распределены по всей системе. Примером может служить пружина, если не пренебрегать ее массой.

Энергия колеблющейся системы. Она слагается из кинетической энергии движущегося элемента системы, несущего массу, и потенциальной энергии упругой части системы, равной работе квазиупругой силы, взятой с обратным знаком.

Если колебание описывается формулой $x = A\sin(\omega t + \varphi)$, то кинетическая энергия системы равна

$$E_k = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi), \tag{11.41}$$

а потенциальная энергия

$$U = -\int_0^x (-kx)\,dx = \frac{kx^2}{2} = \frac{1}{2} kA^2 \sin^2(\omega t + \varphi),$$

или, учитывая, что $k = m\omega^2$,

$$U = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi). \tag{11.42}$$

Полная механическая энергия системы равна

$$E = E_k + U = \frac{1}{2} kA^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \tag{11.42'}$$

и оказывается не зависящей от положения системы.

Мы видим, что и кинетическая, и потенциальная энергии изменяются во времени, причем в те моменты, когда кинетическая энергия максимальна, потенциальная энергия обращается

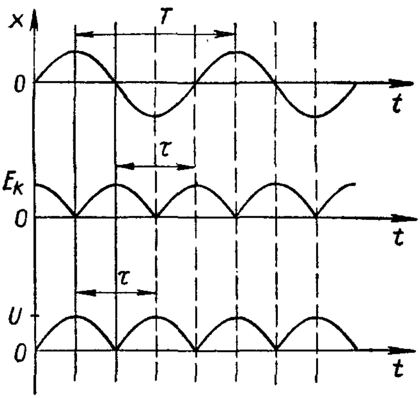


Рис. 11.18

в нуль, и наоборот (рис. 11.18). Физически это означает, что, когда система проходит положение равновесия, она имеет наибольшую скорость и, следовательно, наибольшую кинетическую энергию. В этот момент квазиупругие силы отсутствуют, поэтому потенциальная энергия равна нулю. При дальнейшем движении квазиупругие силы совершают отрицательную работу, вследствие чего кинетическая энергия уменьшается, а потенциальная энергия увеличивается. В момент наибольшего отклонения системы кинетическая энергия обращается в нуль, а потенциальная приобретает наибольшее значение. В процессе колебаний имеет место непрерывно повторяющийся переход кинетической энергии в потенциальную и обратно. В этом состоит отличительная особенность колебательных систем.

Следует обратить внимание на то, что период τ колебаний потенциальной и кинетической энергии вдвое меньше периода T колебаний самой системы (см. рис. 11.18).

Согласно формуле (11.42′) полная энергия системы пропорциональна квадрату частоты и квадрату амплитуды. Постоянство полной механической энергии является следствием того, что мы пренебрегаем неизбежными потерями механической энергии, обусловленными трением.

Если учесть трение, то полная механическая энергия системы с течением времени уменьшается. Собственные колебания в этом случае являются затухающими, они полностью прекращаются, когда механическая энергия системы полностью рассеется (перейдет в другие формы).

Затухающие колебания не являются, строго говоря, гармоническими, так как их амплитуда не постоянна. При затухающих колебаниях амплитуда убывает во времени, причем закон убывания зависит от характера сил трения. Затухающие колебания, вообще говоря, не являются и периодическим процессом, так как характеризующие их физические величины (смещение, скорость) не повторяются точно. В связи с этим к ним неприменим и термин *период*. О периоде затухающих колебаний можно говорить условно, понимая под этим промежуток времени между двумя последовательными максимальными отклонениями в одну и ту же сторону. Период собственных затухающих колебаний будет больше, чем период незатухающих (свободных) колебаний.

5. СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ

Изучение динамики гармонических колебаний мы начали с решения обратной задачи: по заданному закону движения системы $x = A\sin(\omega t + \varphi)$ было найдено, что на нее должна действовать сила

$$f = -m\omega^2 x = -kx.$$

Была также установлена связь между частотой колебаний и параметрами колебательной системы $\left(\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\right)$. Теперь мы обратимся к прямой задаче: определим закон движения по заданной силе. Для этого нам нужно составить уравнение движения и найти его решение.

Свободные колебания. В этом случае на движущийся элемент системы массой m действует лишь квазиупругая сила $f = -kx$. Согласно второму закону Ньютона уравнение движения (по оси x) имеет вид:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0. \qquad (11.43)$$

Деля обе части равенства на m и введя обозначение

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2, \qquad (11.44)$$

получим уравнение движения в виде линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \qquad (11.45)$$

в котором постоянный коэффициент (ω_0) зависит от параметров колебательной системы.

В курсе математики доказывается, что решением уравнения (11.45) является следующая функция от t:

$$x = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0), \qquad (11.46)$$

где A и φ_0 — две произвольные постоянные, для определения которых необходимо знать начальные условия (смещение x_0 и скорость v_0 в начальный момент времени $t = 0$). Это значит, что если на движущийся элемент системы массой m действует только упругая или квазиупругая сила $f = -kx$, то он совершает гармонические колебания с постоянной амплитудой A, частота которых $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ и период $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ определяются параметрами системы (m и k).

Затухающие колебания. Пусть теперь на систему, кроме квазиупругой силы, действует и сила трения. Рассмотрим один частный случай (но важный в практическом отношении), когда сила трения пропорциональна скорости движения:

$$f_{\text{тр}} = -rv \tag{11.47}$$

(знак минус указывает на то, что сила трения $\vec{f}_{\text{тр}}$ направлена противоположно скорости).

Известно, что такие силы возникают при движении тел в вязкой среде с малыми скоростями. Уравнение движения в этом случае принимает вид:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -rv - kx.$$

Перенося все члены в левую часть равенства и учитывая, что $v = \frac{dx}{dt}$, получим:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + r\frac{dx}{dt} + kx = 0.$$

Разделив все члены этого уравнения на m и обозначив

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2, \qquad \frac{r}{m} = 2\delta, \tag{11.48}$$

получим уравнение движения в следующем виде:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \tag{11.49}$$

Это также линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, зависящими от параметров системы и коэффициента трения r. Оно отличается от (11.45) наличием члена с первой производной от x. Заметим, что если $\delta = 0$, то (11.49) переходит в (11.45).

Уравнение (11.49) можно привести к уравнению гармонических колебаний вида (11.45). Применив подстановку $x = ze^{-\delta t}$, получим:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \left(\omega_0^2 - \delta^2\right)z = 0, \tag{11.50}$$

или, введя обозначение

$$\omega_0^2 - \delta^2 = \omega^2, \tag{11.51}$$

приводим уравнение (11.50) к виду:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \omega^2 z = 0. \tag{11.50$'$}$$

В уравнении (11.50)′ $\omega^2 > 0$ или $\delta^2 < \omega_0^2$, иначе колебаний не будет (ω мнимая). Решение уравнения (11.50)′ имеет вид:

$$z = A_0 \sin(\omega t + \varphi_0),$$

где A_0 и φ_0 — постоянные интегрирования.

Переходя к переменной x, получим:

$$x = A_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_0). \tag{11.52}$$

Это и есть решение уравнения (11.49).

Из соотношения (11.52) видно, что в результате совместного действия квазиупругих сил $f = -kx$ и сил трения $f_{тр} = -rv$ система совершает колебательное движение, амплитуда которого

$$A = A_0 e^{-\delta t} \qquad (11.53)$$

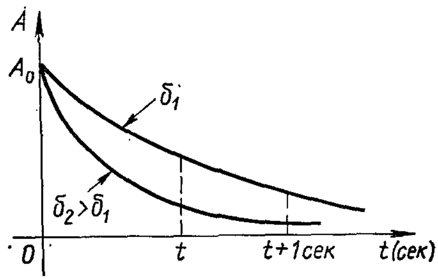


Рис. 11.19

убывает с течением времени по экспоненциальному закону; другими словами, в системе возникают затухающие колебания.

Частота. Частота ω затухающих колебаний, как это следует из (11.51), зависит не только от параметров системы (m, k), но и от коэффициента r, характеризующего силу вязкого трения. Ясно, что $\omega < \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, т. е. частота затухающих колебаний меньше частоты, которую бы имела система в отсутствие сопротивления (т. е. частоты свободных колебаний). Период же T затухающих колебаний больше периода T_0 свободных колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} > T_0.$$

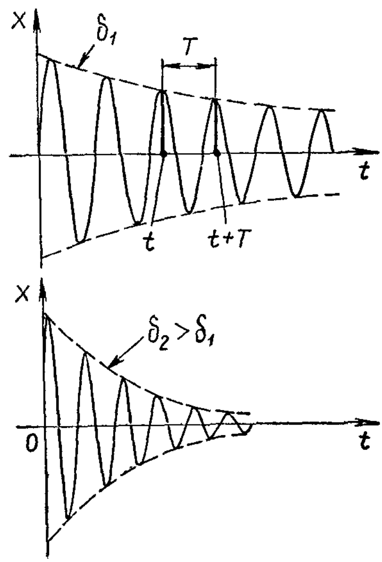


Рис. 11.20

Если δ мало, то период $T \approx T_0$. При $\delta^2 \to \omega_0^2$ частота уменьшается до нуля, а период возрастает до бесконечности. При $\delta^2 > \omega_0^2$ частота становится мнимой. Физически это означает, что при $\delta^2 \geqslant \omega_0^2$ колебаний не возникает: система, выведенная из положения равновесия, медленно (апериодически) возвращается в первоначальное положение.

Коэффициент затухания и логарифмический декремент затухания. На рисунке 11.19 приведены графики изменения амплитуды со временем для двух значений числа δ. Большему значению δ (большему r) соответствует более быстрый спад амплитуды. На рисунке 11.20 приведены графики изменения x для тех же двух значений δ. Из приведенных рисунков видно, что величина δ характеризует быстроту затухания колебаний. По этой причине δ называют *коэффициентом затухания*. Смысл этой величины как характеристики затухания можно установить из следующих рассуждений.

Возьмем отношение двух амплитуд, разделенных во времени интервалом в одну секунду (см. рис. 11.19):

$$\frac{A_t}{A_{t+1}} = \frac{A_0 e^{-\delta t}}{A_0 e^{-\delta(t+1)}} = e^{\delta}.$$

Логарифмируя, получим:

$$\ln \frac{A_t}{A_{t+1}} = \delta. \tag{11.54}$$

Так как $\delta = \frac{r}{2m} = \text{const}$ для данной системы, то выражение (11.54) показывает, что отношение двух амплитуд, разделенных интервалом в 1 с, всегда одно и то же.

Часто быстроту затухания характеризуют *логарифмическим декрементом затухания*, которым называется величина, равная натуральному логарифму двух последовательных амплитуд, разделенных промежутком времени, равным периоду (см. рис. 11.20). Обозначая логарифмический декремент затухания через θ, имеем:

$$\theta = \ln \frac{A_t}{A_{t+T}} = \delta T,$$

или

$$\theta = \delta T. \tag{11.55}$$

При слабом затухании, когда $I \approx I_0$, можно принять $\theta \approx \delta I_0$.

Таким образом, логарифмический декремент затухания в T раз больше, чем коэффициент затухания. Поскольку δ и T постоянны, то и $\theta = \text{const}$. А это означает, что отношение двух амплитуд, отстоящих во времени на один период, постоянно и не зависит от выбора момента времени t. Возьмем ли мы t в начале колебаний, когда амплитуды еще велики, или к концу, когда амплитуды малы, отношение A_t к A_{t+T} остается неизменным. Такая особенность в изменении амплитуды обусловлена принятым характером сил трения ($f_{\text{тр}} = -rv$).

Добротность колебательной системы. Энергетически колебательная система характеризуется *добротностью*. Под этим названием понимают увеличенное в 2π раз отношение полной энергии системы E к энергии W, рассеянной за период:

$$Q = 2\pi \frac{E}{W}. \tag{11.56}$$

Очевидно, чем меньше энергии рассеивается, тем больше добротность системы. В идеальном случае (при отсутствии потерь) добротность системы бесконечно велика.

Найдем связь добротности с логарифмическим декрементом. При затухающих колебаниях закон изменения смещения записывается так:

$$x = A_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Выражая время, входящее в показатель степени, через число колебаний в секунду N и учитывая (11.55), получим:

$$x = A_0 e^{-\delta NT} \sin(\omega t + \varphi_0) = A_0 e^{-\theta N} \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Выразим полную энергию системы в момент t через потенциальную энергию при наибольшем отклонении A:

$$E = \frac{kA^2}{2} = \frac{1}{2} kA_0^2 e^{-2\theta N} = E_0 e^{-2\theta N}, \tag{11.57}$$

где E_0 — энергия системы в начальный момент ($t = 0$).

Таким образом, полная энергия системы убывает по экспоненциальному закону.

Энергия W, рассеянная за период T, равна работе сил трения за период. Так как $dW = f_{\text{тр}}\, dx = -rvv\, dt$, то

$$W = -r \int_0^T v^2\, dt. \tag{11.58}$$

Скорость $v = \frac{dx}{dt}$ при затухающих колебаниях изменяется во времени по более сложному закону, чем при незатухающих колебаниях. Однако, если считать затухание слабым, можно приближенно принять, что скорость изменяется по гармоническому закону, т. е. так, как если бы амплитуда колебаний оставалась постоянной:

$$v = \frac{dx}{dt} = A_0 \omega e^{-\theta N} \cos(\omega t + \varphi).$$

Подставляя это выражение в (11.58), получим:

$$W = -r\omega^2 A_0^2 e^{-2QN} \int_0^T \cos^2(\omega t + \varphi_0)\, dt.$$

Так как затухание слабое, то $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \approx \omega_0$, и частоту ω, стоящую множителем перед интегралом, можно заменить частотой свободных колебаний ω_0. Кроме того,

$$\int_0^T \cos^2(\omega t + \varphi_0)\, dt = \frac{T}{2} \approx \frac{T_0}{2}.$$

Поэтому

$$W = \frac{1}{2} r\omega_0^2 A_0^2 T_0 e^{-2\theta N}.$$

Подставляя W и E в выражение (11.56), найдем искомую связь:

$$Q = 2\pi \frac{E}{W} = 2\pi \frac{k}{r\omega_0^2 T_0} = 2\pi \frac{k}{2\delta m\omega_0^2 T_0} = \frac{\pi}{\theta}.$$

Здесь учтено, что $r = 2\delta m$, $\frac{k}{m} = \omega_0^2$, $\delta T_0 = \theta$.

Таким образом, добротность обратно пропорциональна логарифмическому декременту.

Обычно условно считают, что колебания практически прекратились, если их энергия уменьшилась в 100 раз (амплитуда — в 10 раз). Приняв это определение и пользуясь формулой (11.57), получим выражение для расчета числа совершенных системой колебаний

$$\frac{E_0}{E} = 100 = e^{2\theta N}.$$

Отсюда

$$\ln 100 = 2\theta N,$$

или

$$N = \frac{\ln 100}{2\theta} = \frac{1}{\theta \lg e} = 0{,}74Q.$$

З а м е ч а н и е. В практике могут встретиться случаи, когда необходимо иметь малый коэффициент затухания. Например, в опытах Фуко по установлению факта вращения Земли важно, чтобы колебания маятника не успели затухнуть, пока Земля повернется на заметный угол. Уменьшить коэффициент затухания можно, например, за счет увеличения массы колеблющегося тела $\left(\delta = \frac{r}{2m}\right)$.

Малый коэффициент затухания δ целесообразно иметь в автоколебательных системах. В практике нередко возникают и обратные задачи: необходимо по возможности быстрее погасить возникшие колебания (например, колебание стрелки измерительного прибора, колебания кузова автомобиля, колебания судна и т. д.). Приспособления, позволяющие увеличить затухание колеблющейся системы, называют *демпферами* (или *амортизаторами*). Например, амортизатор автомашин представляет собой в первом приближении цилиндр, заполненный маслом (вязкой жидкостью), в котором может двигаться поршень, имеющий ряд мелких отверстий. Шток поршня соединен с кузовом, а цилиндр — с осью колеса. Возникшие колебания кузова быстро затухают, так как движущийся поршень встречает на своем пути большое сопротивление со стороны вязкой жидкости, заполняющей цилиндр.

6. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Вынужденными называют такие колебания, которые возникают в колебательной системе при действии на нее внешней периодически изменяющейся силы, называемой *вынуждающей силой*.

Разберем простейший случай возникновения вынужденных колебаний под действием силы, изменяющейся по закону синуса:

$$F_{\text{вын}} = F_0 \sin \omega_1 t, \qquad (11.59)$$

где F_0 — амплитуда вынуждающей силы (максимальное ее значение); ω_1 — циклическая частота колебаний этой силы.

Пусть система характеризуется параметрами k, m, r (трение вязкого типа). На систему действуют: возвращающая сила $f = -kx$, сила трения $f_{\text{тр}} = -rv$ и вынуждающая сила $F_{\text{вын}} = F_0 \sin \omega_1 t$. Уравнение движения принимает вид:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - rv + F_0 \sin \omega_1 t.$$

Разделив все члены этого уравнения на m и введя обычные обозначения $\left(\frac{k}{m} = \omega_0^2, \ \frac{r}{m} = 2\delta, \ \frac{F_0}{m} = f_0\right)$, получим следующее неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \sin \omega_1 t. \qquad (11.60)$$

Оно отличается от однородного уравнения (11.49) наличием члена, не зависящего от x.

Общее решение $x(t)$ такого уравнения равно сумме общего решения $x_1(t)$ уравнения без правой части и частного решения $x_2(t)$ неоднородного уравнения (11.60):

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t). \qquad (11.61)$$

Общее решение уравнения без правой части мы уже получили; это выражение (11.52). Оно соответствует собственным затухающим колебаниям системы. За достаточно большой промежуток времени собственные колебания практически затухнут и в (11.61) останется второе слагаемое.

Таким образом, функция $x = x_2(t)$, являясь частным решением (11.61), описывает вынужденные колебания системы. Будем ее искать в следующем виде:

$$x_2(t) = A \sin(\omega_1 t + \varphi),$$

где A и φ — неизвестные пока величины.

Вычисляя первую и вторую производную от x_2 по времени и подставляя их значения в дифференциальное уравнение (11.60), получим:

$$\left[\left(\omega_0^2 - \omega_1^2\right) A \cos\varphi - 2\,\delta\omega_1 A \sin\varphi - f_0\right] \sin\omega_1 t +$$
$$+ \left[2\,\delta\omega_1 A \cos\varphi + \left(\omega_0^2 - \omega_1^2\right) A \sin\varphi\right] \cos\omega_1 t = 0.$$

Это равенство должно выполняться при любом t, что возможно, если коэффициенты при синусе и косинусе равны нулю:

$$(\omega_0^2-\omega_1^2)A\cos\varphi-2\delta\omega_1 A\sin\varphi-f_1=0,$$
$$2\delta\omega_1 A\cos\varphi+(\omega_0^2-\omega_1^2)A\sin\varphi=0. \tag{11.62}$$

Из второго уравнения получаем:

$$\operatorname{tg}\varphi=-\frac{2\delta\omega_1}{\omega_0^2-\omega_1^2}. \tag{11.63}$$

Этому соотношению должно удовлетворять значение φ, чтобы $x_2(t)$ было полным решением. Для определения неизвестного A возведем оба уравнения (11.62) в квадрат и сложим. Решая полученное равенство относительно A, найдем:

$$A=\frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega_1^2)^2+4\delta^2\omega_1^2}}. \tag{11.64}$$

Итак, при действии на систему вынуждающей силы $F=F_0\sin\omega_1 t$ возникают вынужденные колебания

$$x=A\sin(\omega_1 t+\varphi). \tag{11.65}$$

Как видим, вынужденные колебания представляют собой гармонические колебания с амплитудой A той же частоты, какую имеет вынуждающая сила. Однако смещение x сдвинуто по фазе на φ относительно вынуждающей силы. Это означает, что в тот момент, когда вынуждающая сила достигает максимума, смещение не обязательно наибольшее: оно может быть, например, и равным нулю $\left(\text{если } \varphi=\frac{\pi}{2}\right)$.

Разберем подробнее вопрос об амплитуде и фазе вынужденных колебаний.

Амплитуда вынужденных колебаний. Резонанс. Из формулы (11.64) видно, что амплитуда зависит от соотношения частоты свободных колебаний (ω_0) к частоте вынуждающей силы (ω_1). Кроме того, амплитуда зависит также от F_0 и коэффициента затухания δ. На рисунке 11.21 приведена зависимость A от ω_1 для различных значений δ при одинаковых F_0 и m (резонансные кривые).

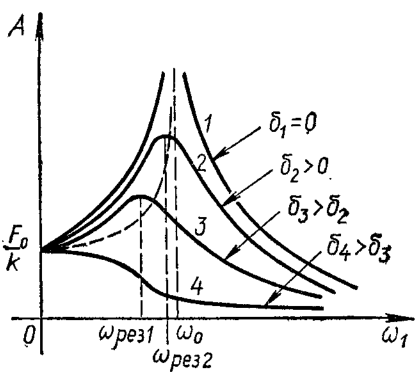


Рис. 11.21

При $\omega_1=0$ (постоянная сила) выражение (11.64) дает постоянное смещение $A=\frac{F_0}{m\omega_0^2}=\frac{F_0}{k}$ (надо иметь в виду, что это относится к установившемуся состоянию, когда собственные колебания уже практически затухли). При $\omega_1 \to \infty$ амплитуда, как видно из (11.64), асимптотически стремится к нулю ($A \to 0$). При некотором же промежуточном значении ω_1 амплитуда принимает максимальное (для данного δ) значение. *Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при определенном значении частоты вынуждающей силы носит название механического резонанса.* Частота вынуждающей силы, при которой наступает резонанс, называется *резонансной частотой*, а значение максимальной амплитуды называется *резонансной амплитудой*. Найдем резонансную частоту $\omega_{рез}$. Для этого нужно найти минимум выражения, стоящего под корнем в знаменателе формулы (11.64). Продифференцировав это выражение по ω_1 и приравняв нулю, получим:

$$-4\left(\omega_0^2 - \omega_1^2\right) + 8\delta^2 = 0,$$

откуда

$$\omega_1 = \omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}. \qquad (11.66)$$

Подставляя значение $\omega_{рез}$ в выражение (11.64), найдем резонансную амплитуду:

$$A_{рез} = \frac{F_0}{2m\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}. \qquad (11.67)$$

Мы видим, что и резонансная частота и резонансная амплитуда зависят от затухания δ системы. С уменьшением δ к нулю резонансная частота возрастает и стремится к частоте свободных колебаний системы ω_0. При этом резонансная амплитуда возрастает и при $\delta = 0$ обращается в бесконечность. Разумеется, на практике амплитуда бесконечной быть не может, так как в реальных колебательных системах всегда действуют силы сопротивления. Если система имеет малое затухание ($\delta \approx 0$), то приближенно можно считать, что резонанс наступает при частоте свободных колебаний ($\omega_{рез} \approx \omega_0$).

При больших значениях затухания резонансные явления исчезают. Амплитуда вынужденных колебаний монотонно уменьшается с увеличением ω_1 (кривая 4 на рис. 11.21).

Сдвиг фаз. Смещение и вынужденная сила сдвинуты по фазе на угол φ, определяемый соотношением (11.63).

На рисунке 11.22, *а* представлена зависимость $\operatorname{tg}\varphi$ от частоты ω_1 при $\delta = \text{const}$. Зная, как изменяется $\operatorname{tg}\varphi$, и используя график зависимости $\operatorname{tg}\varphi$ от φ (рис. 11.22, *б*), нетрудно найти изменение самого угла φ (сплошная линия на рисунке 11.22, *в*). Таким образом, при $\omega_1 < \omega_0$ смещение отстает по фазе (φ — отрицательно) от вынуждающей силы сначала незначительно, но при $\omega_1 \to \omega_0$ — все больше, и при $\omega_1 = \omega_0$ (резонанс, если δ невелико) сдвиг $\varphi = -\frac{\pi}{2}$. При $\omega_1 \gg \omega_0$ колебания смещения и

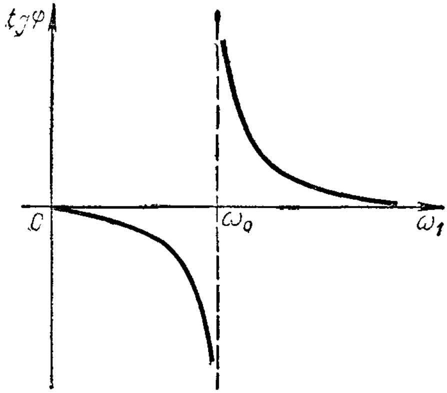


Рис. 11.22а

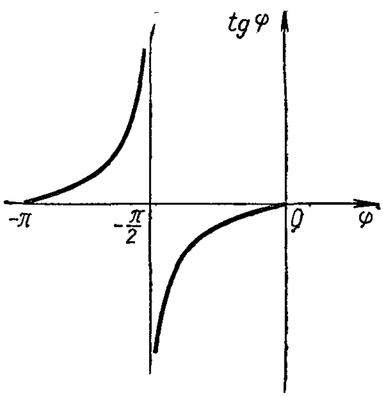


Рис. 11.22б

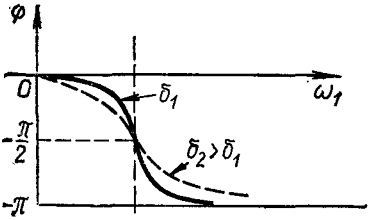


Рис. 11.22в

силы находятся в противофазе ($\varphi = -\pi$). На рисунке 11.22, *в* пунктиром приведена еще одна фазовая кривая, соответствующая большему значению затухания δ. Независимо от значения затухания сдвиг фазы при $\omega_1 = \omega_0$ имеет одно и то же значение $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

Может показаться странным, что максимальная амплитуда (резонанс) получается, когда разность фаз между смещением и силой равна $-\frac{\pi}{2}$, а не 0. Дело в том, что вынуждающая сила совершает над системой работу, которая зависит от сдвига фаз между скоростью движения и силой. Можно показать, что если сдвиг фаз между смещением и силой равен $-\frac{\pi}{2}$, то сдвиг фаз между скоростью и силой равен нулю. Это значит, что, когда скорость имеет наибольшую величину, сила также максимальна и направлена в сторону движения тела. Когда тело меняет направление движения, сила также изменяет направление и по-прежнему действует в сторону движения. А при этих условиях работа силы целиком идет на увеличение кинетической энергии тела и, следовательно, полной энергии системы. В результате амплитуда колебаний увеличивается и в конце концов достигает наибольшего значения. При наибольшей амплитуде совершаемая вынуждающей силой работа идет исключительно на покрытие потерь, связанных с действием сил трения. Вынуждающие силы совершают при резонансе наибольшую работу, которая целиком рассеивается (переходит в тепло).

Практическое значение резонанса. Вынужденные колебания и резонанс широко используются в технике, особенно в акустике, электротехнике, радиотехнике и других областях. Явление резонанса используют в тех случаях, когда из большого набора колебаний разной частоты хотят выделить колебания вполне определенной частоты. Резонанс используют и при измерении очень слабых периодически повторяющихся величин.

Однако в ряде случаев резонанс — нежелательное явление, так как может привести к большим деформациям и разрушению конструкций. Резонанс приходится учитывать при конструировании машин и различных сооружений.

Вращающиеся части машин, валы двигателей самолетов и кораблей невозможно абсолютно точно уравновесить. В результате они испытывают переменную нагрузку, совершая вынужденные колебания и вызывая вынужденные колебания всей системы (например, самолета). Различные части системы или система в целом могут прийти в резонанс с вынуждающей силой, что может привести к их разрушению или повреждению. Поэтому инженеры должны так конструировать ту или иную установку, чтобы не возникало резких резонансных явлений ни во всей установке, ни в ее отдельных частях.

7. АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Так как собственные колебания системы с течением времени затухают, то, чтобы поддерживать их при одной и той же амплитуде, необходимо рассеянную за период энергию возместить от внешнего источника. Поясним это на примере математического маятника (рис. 11.23). Отклоним маятник на небольшой угол α и отпустим. Через период маятник не вернется к прежнему положению. Вследствие потери энергии он остановится, не дойдя до первоначального положения ($\alpha_1 < \alpha$). В момент остановки толчком в правую сторону (рис. 11.23) сместим его до первоначального положения. Если такие толчки осуществлять каждый раз, когда маятник возвращается к первоначальному положению, амплитуда колебания будет оставаться неизменной. Очевидно, что если в тех же положениях маятника и в те же моменты времени создавать толчки в противоположную сторону (по рисунку 11.23 влево), то колебания системы будут, наоборот, затухать еще быстрее. Таким образом, время

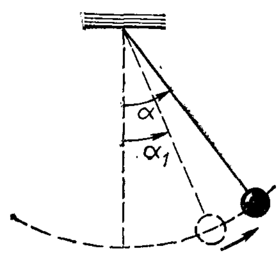


Рис. 11.23

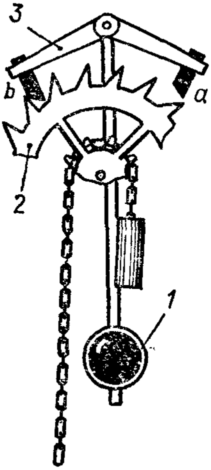


Рис. 11.24

действия внешней силы и ее направление должны быть строго согласованы с самими колебаниями.

Если это согласование осуществляет сама колебательная система и возмещение энергии происходит из постоянного (не колебательного) источника, то систему называют *автоколебательной*, а сам процесс — *автоколебаниями*. Чтобы автоколебательная система автоматически в нужные моменты времени сама подключала внешнюю постоянную силу, необходима определенная (механическая) связь колебательной системы с источником силы (энергии). Эта связь осуществляется различными способами. Примером автоколебательной системы являются часы с маятником, в которых маятник получает энергию от гири, поднятой на некоторую высоту.

В автоколебательной системе независимо от ее устройства должны быть три части: собственно колебательная система, источник энергии и устройство, управляющее поступлением энергии из источника. В качестве примера автоколебательной системы рассмотрим механизм маятниковых часов, получающих энергию от гири, поднятой на некоторую высоту. На валу, вращаемом гирей (рис. 11.24), укреплено *храповое колесо 2* (колесо с зубцами в виде прямоугольных треугольников). С зубцами этого колеса сцеплены зубцы согнутого равноплечного *рычага* 3, называемого анкером, который жестко скреплен с *маятником 1* и качается вместе с ним вокруг оси. При качании маятника зубцы анкера (то левый, то правый) попадают в промежуток между зубцами храпового колеса. Когда в промежуток попадает левый зубец анкера, он «запирает» храповое колесо. Но анкер поворачивается вместе с колеблющимся маятником, и зубец анкера выходит из промежутка, получая небольшой толчок (через скошенную площадку) от зубца храпового колеса. В это время ось храпового колеса под действием груза поворачивается и приводит в движение (через систему шестеренок) стрелки часов. Но затем в выемку попадает правый зубец анкера и вновь на некоторое время запирает храповое колесо. С поворотом маятника зубец анкера выходит из выемки и получает еще раз толчок от зубца храпового колеса. Процесс этот повторяется. Во время толчков маятник получает некоторую порцию энергии из запаса, которым обладает поднятая гиря. Механизм рассчитан так, что пополнение энергии маятника как раз покрывает потери энергии, обусловленные трением. Поэтому амплитуда колебаний маятника остается постоянной до тех пор, пока не израсходуется вся энергия гири.

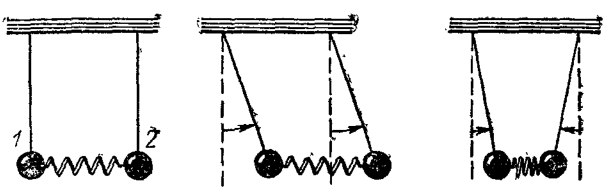
8. КОЛЕБАНИЯ СВЯЗАННЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим систему из двух одинаковых маятников, соединенных легкой пружиной (рис. 11.25, *а*). Маятники могут колебаться в вертикальной плоскости, проходящей через обе точки подвеса.

В отличие от одиночного маятника такая система имеет две собственные частоты. Та или иная из этих частот устанавливается в зависимости от способа возбуждения системы. Более низкая частота ω_1 получается при качании обоих маятников в одной фазе (рис. 11.25, *б*). Более высокая частота ω_2 при качании маятников в противофазе (рис. 11.25, *в*). То, что $\omega_2 > \omega_1$, объясняется тем, что возвращающая сила при колебаниях в противофазе больше, чем при колебаниях в одной фазе, за счет деформации связывающей пружины. Если упругость пружины невелика, то различие в частотах будет небольшим. Отметим, что разбираемая система обладает двумя степенями свободы (двумя координатами), так как ее положение в каждый момент времени определяется положением обоих маятников. Система с двумя степенями свободы обладает двумя собственными частотами[1], которые называются нормальными. Это означает, что при специальных способах возбуждения можно вызвать колебания маятников либо в одной фазе (с частотой ω_1), либо в противофазе (с частотой ω_2). Но при произвольном возбуждении возникают колебания того и другого типа и, следовательно, обе частоты появляются одновременно. Каждый маятник, таким образом, участвует в двух колебаниях, близких по частоте. А в этом случае, как мы знаем, результирующее колебание маятника представляет собой биения. Итак, при произвольном возбуждении системы из двух связанных маятников возникают биения. При этом частота колебаний маятников равна $\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, а частота биений (частота повторения максимума колебаний) равна разности частот: $\nu_{биен} = \nu_2 - \nu_1$.

Этот результат можно проиллюстрировать на опыте. Возбудим систему из двух связанных маятников (рис. 11.25) сле-

[1] Существует более общее утверждение: системы с n степенями свободы имеют n собственных (нормальных) частот.



а *б* *в*

Рис. 11.25

дующим образом: задерживая рукой маятник *1*, отклоним маятник *2* на некоторый угол, а затем одновременно отпустим оба маятника. Наблюдения показывают, что маятник *2* постоянно отдает энергию покоящемуся до этого маятнику *1* и раскачивает его до максимальной амплитуды. Сам же маятник *2* при этом останавливается. Затем маятники меняются ролями, и все начинается сначала.

Графики смещений колеблющихся маятников *1* и *2* показаны на рисунке 11.26. А это характерные кривые для колебаний типа биений. Из-за сил трения биения затухают со временем.

Поведение маятников в описанном опыте можно объяснить и как вынужденные колебания при резонансе. Отпущенный вначале в точке наибольшего отклонения маятник *2* (возбудитель) опережает на $\frac{\pi}{2}$ по фазе маятник *1* (резонатор). Упругая сила растяжения пружины является для маятника *1* той внешней силой, которая вызывает его вынужденные колебания. Так как при наибольшем отклонении маятника *2* пружина имеет наибольшую деформацию, то в начальный момент (и во все последующие моменты) смещение маятника *1* (резонатора) отстает по фазе от вынуждающей силы на $\frac{\pi}{2}$, что и является характерной особенностью резонанса. Частота изменения вынуждающей силы равна частоте собственных колебаний маятника *1*. Таким образом, налицо резонанс. При резонансе амплитуда вынужденных колебаний маятника *1* возрастает. Амплитуда же колебаний маятника *2* убывает, так как он испытывает со стороны пружины тормозящее действие. После того как маятник *2* (возбудитель) остановится, процесс пойдет в обратном порядке:

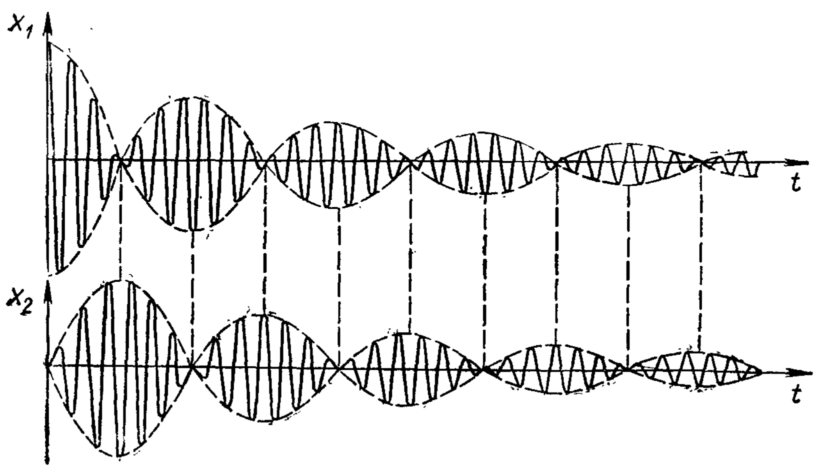


Рис. 11.26

маятник 2 станет резонатором, а маятник 1 — возбудителем.

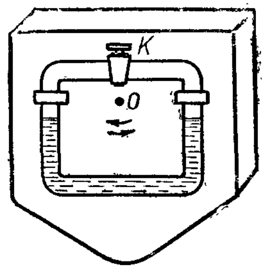


Рис. 11.27

Мы видим, что при резонансе резонатор довольно интенсивно отбирает энергию от возбудителя. Если у резонатора трение незначительно, то «отобранная» энергия идет на увеличение интенсивности его колебания: через некоторое время запасенная им энергия вновь вернется к возбудителю. Если же резонатор обладает значительным трением, то отобранная им от возбудителя энергия рассеивается и вновь к возбудителю практически не возвращается; колебания возбудителя резко затухают. Это явление используется на практике для гашения нежелательных колебаний системы. Так, для устранения боковой качки корабля на нем устанавливают сильно демпфированный [1] резонатор, выполненный в виде водяного столба в U-образной трубке, скрепленной с корпусом корабля. На рисунке 11.27 показана модель такой системы: доска, имеющая вид поперечного сечения корабля, подвешена в точке A как маятник; с доской скреплена U-образная трубка, колена которой связаны воздухопроводом с запирающим краном K. При закрытом кране K столб воды в U-образной трубке колебаться не может. Если при закрытом кране отклонить доску («корпус корабля») от положения равновесия и отпустить, то она вместе с U-образной трубкой будет колебаться с достаточно малым затуханием. Но стоит то же проделать при открытом кране, когда становятся возможными колебания жидкости в U-образной трубке, колебания доски (корпуса) быстро затухнут.

Этот же принцип используется в ракетах-носителях для устранения колебаний корпуса около центра масс, вызываемых неравномерностью работы двигателей при запуске. Жидкое топливо в соответствующих сосудах является той резонирующей системой, которая поглощает энергию колебаний корпуса.

Вопросы для самопроверки

1. Как направлена сила, вызывающая гармонические колебания точки? Существуют ли в природе силы, подчиняющиеся закону $F = -kx$? Какая сила называется квазиупругой? Приведите примеры квазиупругих сил. Какому закону должен подчиняться момент силы, чтобы он мог вызвать крутильные колебания тела? Как связаны частоты (и периоды колебаний) с коэффициентом возвращающей силы и коэффициентом возвращающего момента?

2. Приведите примеры колебаний под действием упругих сил. На пружине с жесткостью k колеблется гиря массой m. Как изменится период

[1] Например, благодаря поперечным перегородкам с системой малых отверстий.

колебаний, если взять гирю большей массы? если при прежней массе укоротить пружину?

3. Приведите примеры колебаний под действием квазиупругих сил. Чем определяется коэффициент возвращающей квазиупругой силы?

4. Какие колебательные системы называются математическим и физическим маятниками? Выведите формулы для периода колебаний маятников. Зависит ли период колебаний от амплитуды? Что называют приведенной длиной физического маятника? Почему период математического маятника не зависит от массы, а период физического маятника зависит от момента инерции? Какую выгоднее взять массу — малую или большую, если математический маятник используется для измерения ускорения свободного падения? Можно ли формулу для периода крутильных колебаний использовать для измерения момента инерции твердого тела?

5. Чему равна кинетическая и потенциальная энергии колебательной системы? Как они изменяются во времени? Чему равна полная энергия системы? В каких случаях она остается постоянной? Какое значение при этом имеет амплитуда колебаний?

6. Какие колебания называют затухающими? Что понимают под периодом затухающих колебаний? Почему период затухающих колебаний увеличивается с ростом затухания?

7. Какие колебания системы называются собственными и какие вынужденными? Какие колебания называются свободными? Составьте уравнение движения подвижного элемента колебательной системы в отсутствие сил трения. Что представляет собой решение этого уравнения? Чем определяются амплитуда, начальная фаза, частота и период свободных колебаний?

8. Составьте уравнение движения подвижного элемента колебательной системы в дифференциальной форме для случая, когда в системе действует сила трения, пропорциональная скорости. Что представляет собой решение этого уравнения? Из каких условий определяются постоянные интегрирования (амплитуда и начальная фаза)? Чем определяется частота затухающих колебаний? Что такое коэффициент затухания и как он связан с параметрами колебательной системы? Что называют логарифмическим декрементом затухания и как он связан с коэффициентом затухания?

9. Что называют добротностью колебательной системы? Выведите формулу, связывающую добротность с логарифмическим декрементом.

10. Какие колебания называются вынужденными? Составьте дифференциальное уравнение вынужденных колебаний. Поясните, как получают решение и каков его физический смысл. Чем определяется амплитуда вынужденных колебаний? Нарисуйте графики зависимости амплитуды от частоты вынуждающей силы при двух значениях коэффициента трения. Что называют резонансом? резонансной частотой? От чего зависит резонансная частота? Будет ли резонансная частота одинакова для одной и той же системы при различных затуханиях? Чем определяется сдвиг фазы между смещением и вынуждающей силой? Чему равен при резонансе сдвиг фаз между смещением и силой? между скоростью и силой? Какие системы называются автоколебательными? Приведите примеры автоколебательных систем.

11. Какие колебательные системы называются связанными системами? Что называют степенями свободы связанной системы? Сколько степеней свободы имеет система, состоящая из двух связанных математических маятников? Сколько собственных частот имеет такая система?

Раздел XII
МЕХАНИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ. АКУСТИКА

Занятие 30
МЕХАНИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

Первоначальное знакомство с механическими волнами мы начнем с волн на поверхности воды ввиду их особой наглядности. С помощью этих волн мы ознакомимся с некоторыми фактами, существенными для волн любого вида.

Волна на поверхности воды представляет собой чередующиеся *гребни* и *впадины*, перемещающиеся по поверхности с определенной скоростью v, называемой скоростью волны.

Расстояние между двумя соседними гребнями (или впадинами) в процессе распространения волны остается неизменным и является характерной величиной, называемой *длиной волны*[1] λ. Опыт показывает, что, хотя гребни и впадины движутся по поверхности воды, распространение волны не связано с переносом частиц жидкости (поплавок при прохождении волны колеблется лишь вверх и вниз и волной не увлекается)[2]. Опыт показывает также, что частота колебаний поплавка (а следовательно, и частиц жидкости под ним) целиком определяется частотой колебаний механической системы, вызывающей волну.

Если поверхность воды (или вообще среды) не ограничена, то образовавшиеся волны называют *бегущими*: они «бегут» от создающего их источника. Если внешняя сила, приложенная к неограниченной среде, изменяется гармонически, то вызванная ею волна называется *гармонической* или *синусоидальной*. Волны называют несинусоидальными, если вызывающая их сила изменяется по произвольному (негармоническому) закону. Примером несинусоидальной волны служит распространяющийся в среде (или на поверхности) импульс, вызванный кратковременным воздействием силы на некоторый участок среды. На примере волн на поверхности воды можно убедиться в том, что

---

[1] Ниже будет дано более строгое определенне этой величнны.

[2] Мы отвлекаемся от небольших колебаний поплавка в горизонтальном направлении. Эти колебания вызываются характерным движением частиц воды, о чем будет сказано ниже.

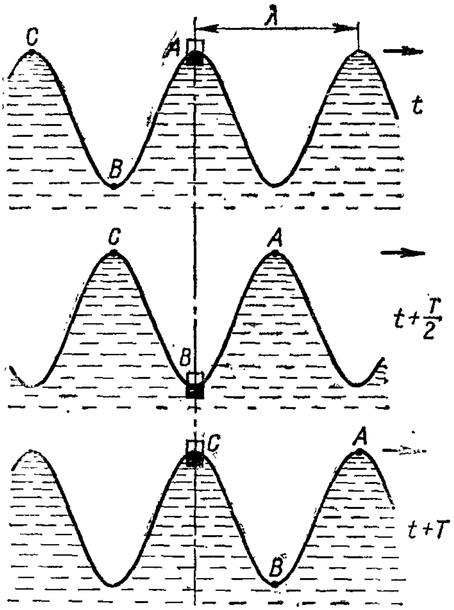


Рис. 12.1

скорость синусоидальной волны и скорость распространения импульса одинаковы. Поскольку импульс не содержит чередующихся гребней и впадин, то понятие длины волны к нему неприменимо. Длина волны — понятие, применимое лишь к синусоидальным волнам[1].

Синусоидальные волны характеризуются еще частотой волны ν, под которой понимают частоту колебаний частиц среды (частота колебаний поплавка на поверхности волны), амплитудой волны A, которая определяется амплитудой колебаний частиц (амплитуда колебаний поплавка), и, наконец, скоростью волны v. Три характеристики — v, λ, ν — связаны между собой так называемым дисперсионным уравнением:

$$v = \lambda\nu. \tag{12.1}$$

Действительно, за время, в течение которого поплавок совершит одно колебание, т. е. опустится с гребня во впадину и снова поднимется на гребень, под ним волна продвинется на расстояние λ (рис. 12.1). Поэтому

$$v = \frac{\lambda}{T},$$

или

$$\lambda = vT, \tag{12.2}$$

где T — время одного колебания поплавка (период колебания). Так как $T = \frac{1}{\nu}$, то из (12.2) получаем (12.1). Из (12.1) следует, что *длина волны измеряется тем расстоянием, на которое перемещается волновой процесс за время одного колебания частицы среды.*

Дисперсионное соотношение (12.1) справедливо для всех видов синусоидальных волн, независимо от их природы. В большинстве случаев скорость распространения механических волн

[1] Строго говоря, к бесконечно протяженным синусоидальным волнам.

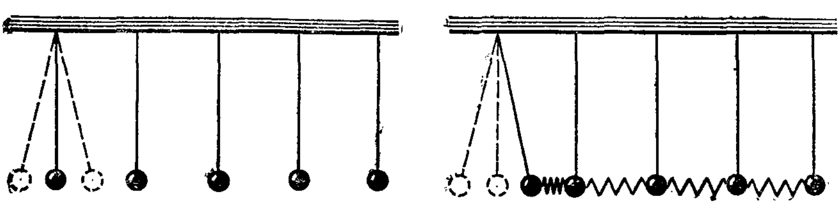
определяется лишь свойствами среды и от параметров волны не зависит. Это означает, что волны всех частот распространяются в данной среде с одной и той же скоростью. Но есть случаи, когда скорость волн зависит также и от частоты (или длины волны). Это, в частности, имеет место для поверхностных волн. Про такие волны говорят, что они обладают дисперсией. Тогда соотношение (12.1) имеет смысл не вообще, а для каждой частоты в отдельности. Если известны частота ν и скорость v_ν распространения волн данной частоты, то можно записать соотношение

$$\lambda_\nu = \frac{v_\nu}{\nu}. \qquad (12.3)$$

1. РАСПРОСТРАНЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ В ОДНОРОДНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ

Представим себе систему одинаковых, никак не связанных между собой маятников (рис. 12.2, *а*). Ввиду отсутствия связи колебания одного маятника (собственные или вынужденные) не могут передаваться другим маятникам. В такой системе процесс распространения колебаний невозможен. Чтобы колебания могли передаваться, маятники должны быть так или иначе связаны между собой. Пусть между маятниками имеется упругая связь, осуществляемая с помощью легкой пружины (рис. 12.2, *б*). Если в такой системе привести в колебание какой-либо маятник (например, крайний левый по рисунку 12,2, *б*), то он, сжимая и растягивая пружины, создает переменную упругую силу, которая приведет в колебание (с той же частотой) соседний маятник, тот, в свою очередь, — следующий маятник и т. д. По цепи упруго связанных маятников начнется процесс распространения колебаний от маятника к маятнику, причем, чем дальше находится маятник от начального (крайнего левого), тем позже он вступает в колебание. Каждый маятник колеблется около своего среднего положения, но частота колебаний у всех маятников одинакова: она задается частотой внешней силы.

Система упруго связанных одинаковых маятников представляет собой модель однородной упругой (одномерной) среды.



а *б*

Рис. 12.2

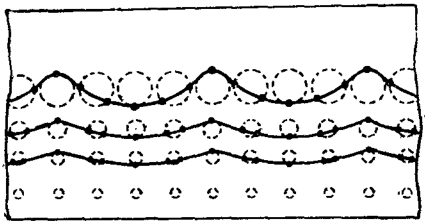


Рис. 12.3

Аналогичные процессы происходят в реальной упругой среде. Если в такой среде вызвать каким-либо способом колебание одной ее точки, то в результате упругих взаимодействий придут в колебательное движение соседние с ней частицы, которые, в свою очередь, вызовут колебания следующих частиц, и т. д.

Процесс распространения колебаний частиц в упругой среде называется волновым процессом или просто волной. Часто эту волну называют *упругой*, так как она обусловлена упругими свойствами среды [1].

Распространяющаяся (бегущая) волна постепенно вовлекает в колебательное движение все новые и новые частицы среды. *Граница, отделяющая колеблющиеся частицы от частиц среды, еще не начавших колебаться, называют фронтом волны.* В однородной и изотропной среде направление распространения волны перпендикулярно ее фронту.

Множество *точек, колеблющихся в одинаковых фазах, называют волновой поверхностью.* Фронт для синусоидальных волн является одной из его волновых поверхностей. Направление, в котором распространяется волна, называют лучом.

В неограниченной однородной среде волны могут быть *плоскими* (фронт — плоскость) и *сферическими* (фронт — сферическая поверхность).

Частицы среды, захваченные волновым процессом, колеблются, как маятники в рассмотренной выше модели, с одинаковой частотой. Каждая из них совершает колебания около своего среднего положения, т. е. волна не переносит частицы среды в направлении своего распространения.

В зависимости от направления колебаний частиц относительно направления распространения волны различают два вида волн: *продольные* и *поперечные.*

В продольной волне частицы среды колеблются вдоль направления распространения волны. В поперечной — частицы колеблются в направлениях, перпендикулярных к направлению распространения волны.

Волны на поверхности воды (и вообще на границе раздела жидкостей и газов) составляют особый вид волн: частицы среды совершают движение по кривым, близким к окружности, лежа-

---

[1] Отметим, что механические волны могут иметь и неупругую природу. К последним относятся волны на поверхности воды и вообще на поверхности раздела двух жидкостей, двух газов или жидкости и газа.

щим в вертикальных плоскостях. Радиус окружности наибольший у частиц, находящихся на поверхности; он уменьшается с увеличением глубины (рис. 12.3).

2. СКОРОСТЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН

Из модели, представленной на рисунке 12.2, *б*, видно, что скорость распространения колебаний маятников зависит от жесткости k пружины и массы m маятников. Действительно, если жесткость пружины бесконечно велика, то при выведении из положения равновесия одного маятника одновременно сдвинутся и все другие маятники. Это означает, что скорость распространения колебаний (волны) бесконечно велика. И наоборот, при жесткости пружины, равной нулю, колебания не передаются от маятника к маятнику, т. е. скорость волны равна нулю. Отсюда видно, что скорость волнового процесса тем больше, чем больше упругость пружин. Если при одних и тех же пружинах массу каждого маятника увеличить, то скорость волнового процесса уменьшится. Действительно, для одного и того же смещения (за данный промежуток времени) в случае большей массы нужна и бо́льшая сила, т. е. бо́льшая деформация пружины. Увеличение же деформации пружины означает, что первый маятник должен удалиться от положения равновесия дальше и затратить на это больше времени, чем в случае маятников малых масс.

В реальной среде скорость зависит от типа волны. В продольной волне, распространяющейся, например, в тонком упругом стержне, смещение частиц среды приводит к деформации сжатия и растяжения. Поэтому скорость распространения продольных волн будет определяться упругостью среды именно к этому виду деформации и, следовательно, будет зависеть от модуля Юнга E.

Установленная на модели зависимость скорости волны от массы колеблющихся частиц означает, что в случае сплошной среды скорость волнового процесса зависит от плотности среды ρ с увеличением плотности скорость волны должна уменьшаться. Количественное рассмотрение этой зависимости приводит к следующей формуле:

$$v_{\text{прод}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}\,. \tag{12.4}$$

В поперечных волнах смещение частиц среды приводит к деформации сдвига. Поэтому скорость распространения поперечных волн должна зависеть от упругих свойств среды к деформации сдвига, т. е. от модуля сдвига N. Точные расчеты показывают, что

$$v_{\text{попер}} = \sqrt{\frac{N}{\rho}}\,. \tag{12.5}$$

Поскольку модуль сдвига для жидкостей и газов равен нулю, то поперечные волны в этих средах распространяться не могут [1]. Что касается твердых тел, то в них могут распространяться как продольные, так и поперечные волны. Однако, поскольку для всех тел $E > N$, скорость продольных волн всегда больше скорости поперечных волн. На различии скоростей продольных и поперечных волн основан, например, один из методов определения места положения эпицентра землетрясения.

Скорость поперечных волн в натянутом шнуре или струне зависит от силы натяжения F и линейной массы струны μ (массы, отнесенной к единице длины):

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}. \qquad (12.6)$$

Из формул (12.4), (12.5) и (12.6) видно, что скорость упругих волн не зависит от частоты колебаний, а определяется исключительно упругими свойствами среды и ее плотностью. Если скорость волн одинакова для всех частот, то говорят, что волны не обладают дисперсией.

Исключение представляет случай, когда волны распространяются на поверхности жидкости (на границе раздела жидкости и газа). Скорость поверхностных волн в общем случае определяется следующим соотношением:

$$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{4\pi} + \alpha\frac{2\pi}{\rho\lambda}}, \qquad (12.7)$$

где g — ускорение свободного падения; λ — длина волны; α — коэффициент поверхностного натяжения; ρ — плотность жидкости. Если длина волны λ велика, можно вторым слагаемым под корнем в формуле (12.7) пренебречь (сказывается только сила тяжести — гравитационные волны). Тогда получаем:

$$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}.$$

Если же длина волны очень мала, можно пренебречь первым слагаемым (в этом случае определяющую роль играют силы поверхностного натяжения — капиллярные волны). Тогда

$$v = \sqrt{\alpha\frac{2\pi}{\rho\lambda}}.$$

Как общий случай, так и оба частных случая показывают, что поверхностные волны обладают дисперсией. Однако, если длина волны λ много больше глубины h (приливные волны), как показывает теория, скорость волны определяется формулой:

$$v = \sqrt{gh}.$$

---

[1] Волны на поверхности воды не являются упругими, и к ним приведенные рассуждения неприменимы.

В этом случае скорость волны не зависит от частоты ν. Приливные волны — единственный вид поверхностных волн, которые не обладают дисперсией.

3. УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОЙ (ИЛИ ОДНОМЕРНОЙ) БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ

Записать уравнение волны — это значит записать для каждой точки среды закон изменения смещения ξ как функцию времени. В общем виде закон $\xi = f(t, x, y, z)$ представляет собою функцию времени и трех пространственных координат. Временна́я зависимость определяется характером колебаний источника волны.

Мы остановимся на частном случае синусоидальной волны, у которой смещение ξ частиц зависит лишь от одной координаты x. Это означает, что волна распространяется вдоль оси x, а все точки среды, находящиеся в одной плоскости $x = b$ (рис. 12.4, a), имеют в данный момент времени одинаковое смещение от положения равновесия. В случае продольной волны плоскость (y, z) целиком смещается по оси x в ту или иную сторону на расстояние ξ. В случае же поперечной волны происходит смещение плоскости (y, z) в направлении, перпендикулярном к оси x. Волны такого типа называются плоскими; для них смещение $\xi = f(t, x)$ в общем виде представляет собой функцию двух переменных: t и x.

Следует отметить, что в одномерной среде (шнур, струна) волновой процесс также описывается функцией двух переменных t и x, если ось x направить вдоль шнура. Одна и та же формула $\xi = f(t, x)$ описывает и плоские волны и волны в одномерной среде.

Возьмем шнур и внешним воздействием заставим точку O (рис. 12.4, $б$) колебаться вдоль оси ξ, которая либо перпендикулярна оси x, либо параллельна ей, по закону

$$\xi = A \sin \omega t.$$

В результате по шнуру побежит волна.

Спустя некоторое время $\tau = \frac{x}{v}$, волновой процесс достигнет точки с координатой x и вовлечет ее в колебательное движение.

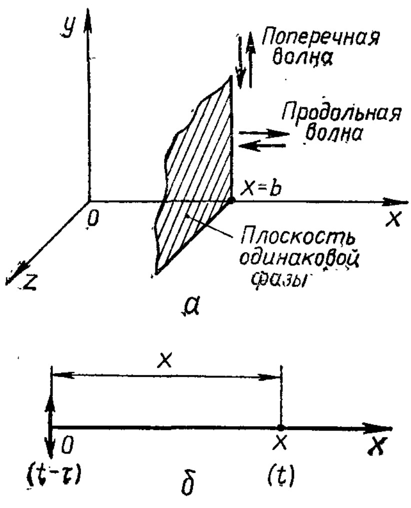


Рис. 12.4

Если пренебречь затуханием, то амплитуда колебаний точки x будет такой же, как и точкн O. Запишем математически колебание этой точки x. Очевидно, что в данный момент времени t точка x будет иметь такое же смещение ξ и такое же направление движения, какие имела точка O в более ранний момент $t' = t - \frac{x}{v}$. Поэтому — закон колебаний смещения точки x запишется так:

$$\xi = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{v}\right). \tag{12.8}$$

Полученное соотношение и есть уравнение синусоидальной одномерной (или плоской) волны, бегущей в сторону положнтельных значений координаты x. Уравнение волны, бегущей в сторону отрицательных x, имеет вид:

$$\xi = A \sin \omega \left(t + \frac{x}{v}\right). \tag{12.9}$$

Исследуем уравнение (12.8). Если принять $t = t_0$ фиксированным, то формула (12.8) отображает мгновенную картину смещений от положений равновесия всех точек шнура, до которых дошел волновой процесс. График функции $\xi = A \sin \omega \left(t_0 - \frac{x}{v}\right)$ имеет вид синусоиды (рис. 12.5, *а*).

Для поперечных волн этот график обозначает и действительное расположение частиц шнура в пространстве. Оно, как видим, характеризуется гребнями и впадинами. В следующий момент времени $t_0 + \Delta t$ гребни и впадины сместятся в сторону положительных x. Происходит непрерывное движение синусоиды вправо (рис. 12.5, *а*).

Для продольных волн график на рисунке 12.4, *а* не соответствует действительному положению в пространстве частиц шнура: он показывает только, насколько и в какую сторону сместилась каждая частица от своего равновесного положения в данный момент времени. Так, из графика, приведенного на рисунке 12.5, *б*, видно, что точка A сместилась на расстояние — ξ_1 влево, а точка B — на ξ_2 вправо. Действительное положение этих точек на шнуре показано на рисунке 12.5, *в* точками A' и B', соответственно.

В результате смещений точек в шнуре образуются сжатия и растяжения, которые так же, как и гребни и впадины, распространяются вдоль шнура в сторону положительных значений x.

Положим в формуле (12.8) фиксированным значением $x = x_0$:

$$\xi = A \sin \omega \left(t - \frac{x_0}{v}\right).$$

Отсюда видно, что точка с координатой x_0 колеблется около своего положения равновесия по синусоидальному закону, но

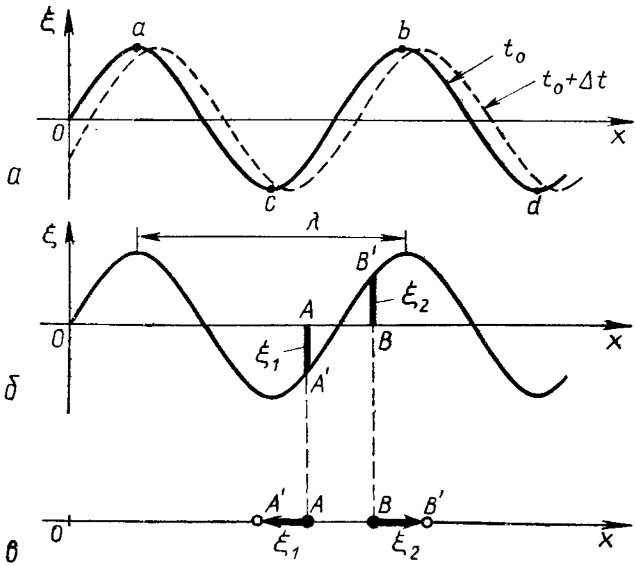


Рис. 12.5

колебания ее отстают по фазе от колебаний начальной точки O на $\varphi = \frac{\omega x_0}{v}$.

Уравнению бегущей волны (12.8) можно придать еще и следующие виды:

$$\xi = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{v}\right) = A \sin \left(\omega t - \frac{\omega}{v} x\right) =$$
$$= A \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{vT} x\right) = A \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x\right). \qquad (12.10)$$

Учитывая, что $\lambda = vT$, и введя обозначение $\frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda} = k$, получаем:

$$\xi = A \sin (\omega t - kx).$$

Величину $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ называют *волновым числом*, оно показывает, сколько длин волн укладывается на отрезке длиною 2π метров, или на какой угол изменится фаза колебания, если переместится на один метр в сторону распространения волн.

Запишем формулы для колебаний смещений двух фиксированных точек волны с координатами x_1 и x_2:

$$\xi_1 = A \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x_1\right),$$
$$\xi_2 = A \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x_2\right).$$

Разность фаз колебаний этих точек равна:

$$\delta = \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x_1\right) - \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x_2\right) = \frac{2\pi (x_2 - x_1)}{\lambda}.$$

Она зависит от взаимного расположения точек. В частности, если $x_2 - x_1 = \lambda$, то $\delta = 2\pi$. А это значит, что точки колеблются в одной фазе. Отсюда следует более общее определение длины волны: *длина волны есть наименьшее расстояние между двумя точками, колеблющимися в одинаковой фазе.* Подчеркиваем наименьшее, так как в одинаковой фазе колеблются все точки, удовлетворяющие условию $x_2 - x_1 = n\lambda$ (где $n = 1, 2, \ldots$).

Приведенное ранее определение длины волны (расстояние между соседними гребнями) является частным случаем общего определения.

4. ФАЗОВАЯ И ГРУППОВАЯ СКОРОСТИ ВОЛН

Уточним введенное ранее понятие скорости волны. В уравнении синусоидальной плоской волны $\xi = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{v}\right)$ зафиксируем какое-либо значение фазы:

$$\omega \left(t - \frac{x}{v}\right) = C. \qquad (12.11)$$

Это равенство выражает связь между временем t и той координатой x точки, в которой фаза имеет фиксированное значение. С течением времени положение точки изменяется: точка с фиксированной фазой как бы движется вдоль оси x. Найдем скорость движения этой точки, т. е. скорость, с какой перемещается фиксированная фаза. Для этого продифференцируем уравнение (12.11):

$$dt - \frac{1}{v} dx = 0.$$

Отсюда скорость движения фиксированной фазы равна:

$$\frac{dx}{dt} = v.$$

Таким образом, скорость волны v в выражении (12.8) есть скорость перемещения фазы, в связи с чем ее называют *фазовой скоростью* и обозначают через $v_{\text{фаз}}$.

Данное нами ранее определение скорости синусоидальной волны через перемещение гребня так же является определением фазовой скорости, ибо гребню соответствует определенная фаза. Перемещение гребня есть перемещение определенной фазы.

Для волн, не обладающих дисперсией, фазовая скорость не зависит от частоты. Поэтому, если имеется набор (группа) волн различных частот, все они будут двигаться с одной и той же скоростью и «пакет», или «горб», который они образуют в результате наложения, в процессе движения не изменяет своей первоначальной формы; он и движется с той же скоростью, что и составляющие его волны.

Для волн, обладающих дисперсией, «пакет» («горб»), составленный из группы волн различной частоты, будет по мере движения деформироваться («растекаться»), а скорость его движения не совпадет со скоростью ни с одной из слагаемых волн. В этом случае говорят о скорости перемещения максимума группы волн («пакета»). Ее называют *групповой скоростью* ($v_{гр}$).

На практике мы всегда имеем дело с группой волн, так как синусоидальных волн, бесконечных в пространстве и времени, в природе не существует. Не говоря уже об одиночном импульсе, всякая ограниченная во времени и пространстве синусоидальная волна представляет собой наложение большого числа бесконечных синусоидальных волн, т. е. представляет собой «пакет», скорость распространения которого является групповой скоростью. Таким образом, любая реальная волна распространяется с групповой скоростью. Только в среде, лишенной дисперсии, реальная волна распространяется со скоростью, совпадающей с фазовой скоростью бесконечных синусоидальных волн, результатом сложения которых она образована.

Получим аналитическое выражение для групповой скорости. Для простоты будем считать, что группа волн состоит всего из двух бесконечных синусоидальных волн: одной — с длиной волны λ и фазовой скоростью $v_ф(\lambda)$ и другой — с длиной волны $\lambda' = \lambda + d\lambda$ и фазовой скоростью[1]

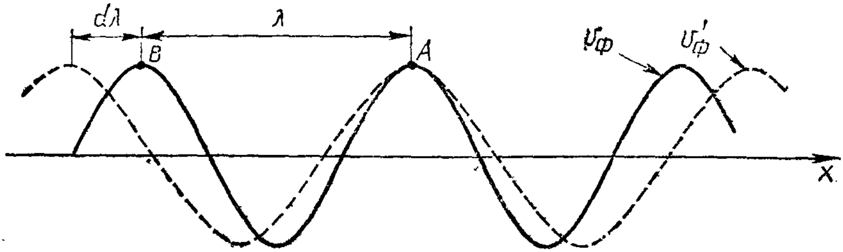
$$v'_ф(\lambda') = v_ф(\lambda + d\lambda) = v_ф(\lambda) + \frac{dv_ф}{d\lambda}d\lambda. \qquad (12.12)$$

Пусть в некоторый момент времени t горбы обеих волн сходятся в точке A (рис. 12.6, *а*). В этом месте расположен максимум группы волн. Предположим, что $v'_ф > v_ф$, тогда вторая волна обгоняет первую с относительной скоростью, равной разности $v'_ф - v_ф$. Через промежуток времени

$$\tau = \frac{d\lambda}{v'_ф - v_ф} \qquad (12.13)$$

вторая волна обгонит первую на $d\lambda$, в результате чего горбы обеих волн будут сходиться не в точке A, а в точке B. Таким образом, максимум группы волн окажется смещенным относительно первой волны назад на отрезок, равный λ. Следовательно скорость распространения максимума группы волн — групповая

[1] Применяем разложение функции $v_ф(\lambda + d\lambda)$ в ряд Тейлора и ограничиваемся двумя первыми членами.



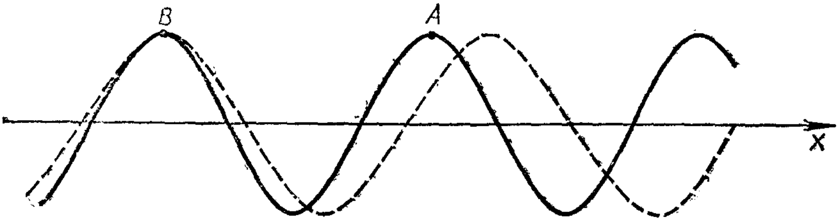


Рис. 12.6

скорость — относительно первой волны будет равна $\frac{\lambda}{\tau}$, а относительно среды групповая скорость будет меньше скорости распространения первой волны на величину $\frac{\lambda}{\tau}$:

$$v_{гр} = v_ф - \frac{\lambda}{\tau}.$$

Подставляя сюда вместо τ его выражение из (12.13) и учитывая выражение (12.12) для $v'_ф$, найдем:

$$v_{гр} = v_ф - \lambda \frac{dv_ф}{d\lambda}.$$

Из полученной формулы видно, что групповая скорость не совпадает с фазовой, причем, чем больше $\frac{dv_ф}{d\lambda}$, т. е. чем сильнее выражена зависимость фазовой скорости от длины волны, тем в большей мере групповая скорость отличается от фазовой. Как видно из полученной формулы, групповая скорость может быть как меньше, так и больше фазовой. Групповая скорость меньше фазовой, когда $\frac{dv_ф}{d\lambda} > 0$, т. е. когда более длинные волны распространяются быстрее коротких. Этот случай называют *нормальной дисперсией*.

Если же $\frac{dv_\text{ф}}{d\lambda} < 0$, т. е. более длинные волны распространяются медленнее коротких, то групповая скорость больше фазовой — *аномальная дисперсия.*

В случае, когда $\frac{dv_\text{ф}}{d\lambda} = 0$, т. е. когда дисперсия отсутствует, групповая и фазовая скорости совпадают ($v_\text{гр} = v_\text{ф}$).

В дальнейшем мы будем рассматривать в основном идеальный случай — бесконечную синусоидальную волну. Поэтому всюду (если это не оговорено особо) под скоростью волны будем понимать фазовую скорость.

5. МГНОВЕННОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СМЕЩЕНИЯ, СКОРОСТИ И УСКОРЕНИЯ ЧАСТИЦ СРЕДЫ, УЧАСТВУЮЩИХ В ВОЛНОВОМ ДВИЖЕНИИ. ОТНОСИТЕЛЬНОЕ СМЕЩЕНИЕ ЧАСТИЦ

Частицы среды, участвующие в волновом процессе, колеблются около своих положений равновесия. При этом все они имеют в заданный момент времени определенное смещение ξ, определенную скорость u и ускорение a. Найдем мгновенное распределение этих величин в пространстве.

Мгновенное распределение смещения задается уравнением волны при фиксированном t:

$$\xi = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{v}\right). \tag{12.14}$$

Скорость частицы, имеющей координату x, равна первой производной[1] по времени от смещения ξ (при $x = \text{const}$):

$$u = \frac{\partial \xi}{\partial t}.$$

Дифференцируя уравнение волны по t, считая x неизменным, получим:

$$u = \frac{\partial \xi}{\partial t} = A\omega \cos \omega \left(t - \frac{x}{t}\right). \tag{12.15}$$

Если в этом соотношении зафиксировать время t, то получим мгновенное распределение в пространстве скоростей частиц. Сопоставляя распределенне смещений с распределением скоростей для одного и того же момента времени (рис. 12.7), замечаем, что максимум скоростей приходится на те частицы среды, которые в данный момент проходят положение равновесия ($\xi = 0$).

---

[1] Чтобы подчеркнуть, что производная от $\xi(x, t)$ берется по одной переменной (в данном случае по t), пишут не $\frac{d\xi}{dt}$, а $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ и называют эту производную частной.

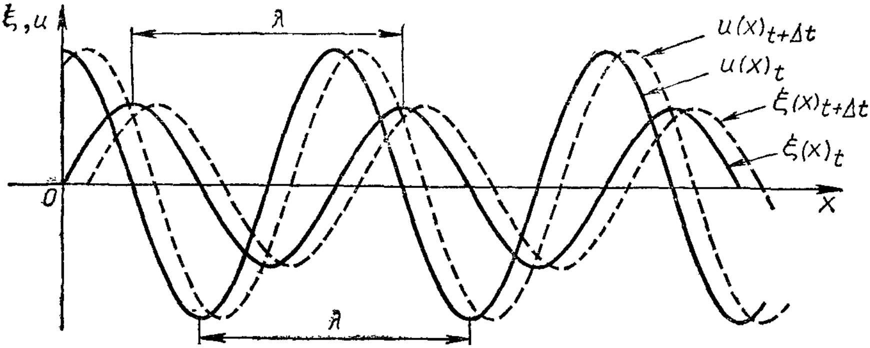


Рис. 12.7

И наоборот, скорости равны нулю для тех частиц, которые имеют в данный момент наибольшее отклонение. Другими словами, в каждый момент времени, как это хорошо видно на рисунке 12.7, мгновенное распределение скоростей сдвинуто в пространстве относительно *распределения смещений на* $\frac{\lambda}{4}$ *назад*, т. е. в сторону, противоположную направлению распространения волны. К моменту времени $t + \Delta t$ оба графика переместятся в сторону положительных x, сохранив, однако, неизменным относительный сдвиг на четверть волны. При волновом процессе происходит распространение по среде не только горбов и впадин смещения, но и горбов и впадин скоростей частиц (и, как увидим, — горбов и впадин распределения ускорений).

Если фиксировать определенную частицу среды ($x = x_0$), то из формул (12.14) и (12.15) можно сделать вывод, что скорость и смещение частицы изменяются во времени со сдвигом фаз в четверть периода (как это обычно имеет место для колеблющейся материальной точки).

Ускорение частиц среды представляется, как обычно, второй производной от смещения:

$$a = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -A\omega^2 \sin \omega \left(t - \frac{x}{v}\right) = -\omega^2 \xi. \qquad (12.16)$$

Отсюда следует, что мгновенное ускорение имеет наибольшее значение для тех точек, смещение которых в данный момент наибольшее. Однако, если смещение положительно, ускорение отрицательно, и наоборот (ускорение точки всегда направлено к положению равновесия). Графики мгновенных смещений и ускорений сдвинуты в пространстве на $\frac{\lambda}{2}$ (рис. 12.8). В процессе распространения волны в среде «горбы» ускорения, скорости и смещения движутся с общей для всех скоростью v (скорость волны).

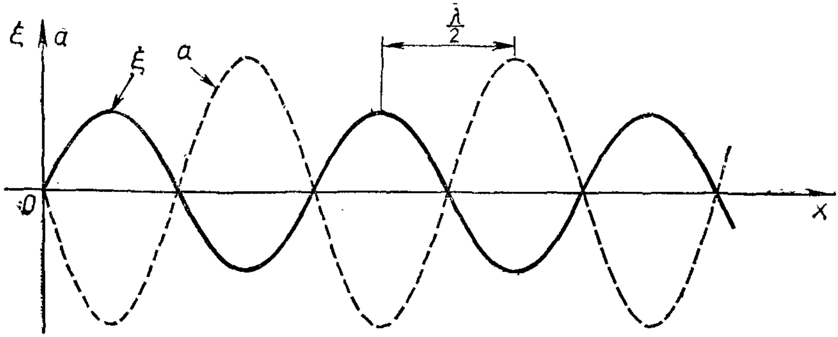


Рис. 12.8

Относительным смещением двух частиц называют отношение изменения расстояния между ними к расстоянию между положениями равновесия частиц. Поясним это понятие на примере продольной волны. Расстояние между двумя частицами x_1 и x_2 (рис. 12.9) в отсутствие волны было $\Delta x = x_2 - x_1$. Затем при прохождении волны оно в какой-то момент времени t стало

$$\Delta x' = x_2 + \xi_2 - (x_1 + \xi_2) = \Delta x + (\xi_2 - \xi_1) = \Delta x + \Delta\xi.$$

Изменение расстояния между частицами $\Delta x' - \Delta x = \Delta\xi$. Относительное смещение в данный момент времени t равно $\left(\frac{\Delta\xi}{\Delta x}\right)_t$, или в пределе $\frac{\partial\xi}{\partial x}$ (т. е. равно частной производной по переменной x).

Дифференцируя уравнение волны (12.14) по x, считая t неизменным, получим уравнение

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = -A\frac{\omega}{v}\cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right), \tag{12.17}$$

которое при фиксированном t выражает мгновенное распределение в пространстве относительных смещений частиц.

На рисунке 12.10 мгновенное распределение относительных смещений частиц сопоставляется с распределением смещения частиц для того же мгновения. График мгновенного распределения относительного смещения частиц сдвинут вперед (в сторону распространения волны) на $\frac{\lambda}{4}$ по отношению к графику распределения смещений. Из формул (12.14) и (12.17) и графи-

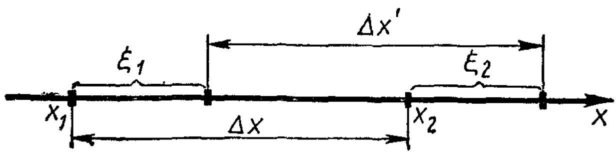


Рис. 12.9

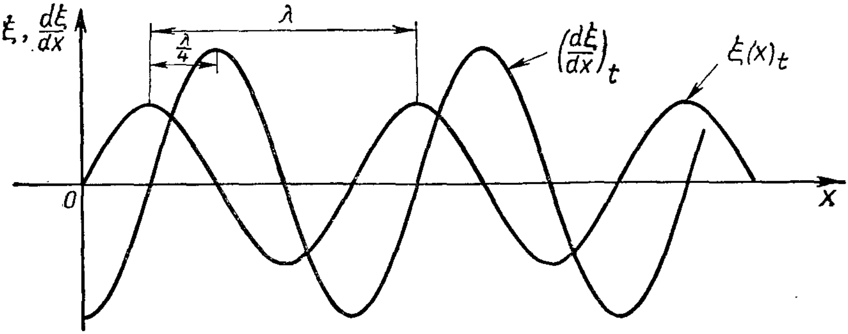


Рис. 12.10

ков, приведенных на рисунке 12.10, видно, что максимумы относительного смещения приходятся на те точки, которые в данный момент имеют смещение $\xi = 0$, т. е. проходят положение равновесия. И наоборот, относительное смещение между частицами равно нулю в тех точках, которые имеют в данный момент наибольшее смещение. При волновом процессе в среде распространяются «горбы» и «впадины» относительного смещения. «Горбам» (т. е. тем местам, для которых $\frac{\partial \xi}{\partial x} < 0$) соответствуют области сжатия, а «впадинам» $\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} > 0\right)$ — области растяжения.

Чтобы выяснить, почему в окрестности точек, имеющих $\xi = 0$, относительное смещение наибольшее, рассмотрим поперечную волну в шнуре. В поперечной волне график $\xi(t_0, x)$ определяет истинное положение частиц. Из рисунка 12.11 видно, что участок шнура длиной Δx при наличии волны вытягивается (до размеров $\Delta x'$) именно в окрестности тех точек, для которых $\xi = 0$. Для точек, имеющих наибольшее смещение, длина отрезка Δx практически не меняется; этот отрезок как бы поднят на гребень параллельно самому себе. Если наблюдать за фиксированным отрезком шнура Δx, можно заметить, что с те-

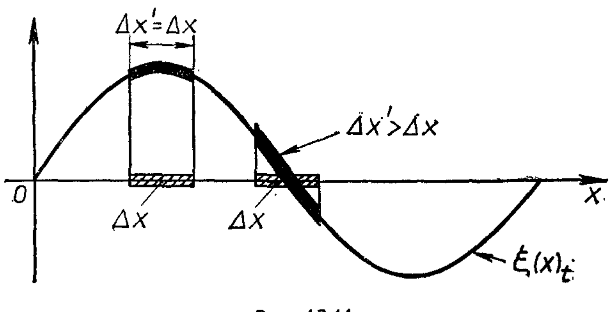


Рис. 12.11

чением времени он периодически растягивается и вновь приобретает первоначальную длину.

В продольной волне фиксированный отрезок Δx периодически растягивается и сжимается.

6. ЭНЕРГИЯ УПРУГОЙ ВОЛНЫ

В среде, в которой распространяется плоская продольная волна $\xi = A \sin\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$, мысленно выделим элементарный объем ΔV настолько малый[1], чтобы скорость движения и деформации во всех точках этого объема можно было считать неизменными и равными соответственно $\frac{\partial\xi}{\partial t}$ и $\frac{\partial\xi}{\partial x}$.

Выделенный объем будет обладать кинетической энергией

$$\Delta E_{к} = \frac{m}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2 = \frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)\cdot\Delta V, \qquad (12.18)$$

где $m = \rho\Delta V$ — масса вещества в объеме ΔV; ρ — плотность среды.

Подставив в (12.18) значение $\frac{\partial\xi}{\partial t}$ из (12.15), получим:

$$\Delta E_{к} = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2\cos^2\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\cdot\Delta V. \qquad (12.19)$$

Сопоставляя графики мгновенного распределения $\Delta E_{к}$ и ξ (рис. 12.12), убеждаемся в том, что максимумы кинетической энергии приходятся на те точки среды, которые в данный момент проходят положение равновесия ($\xi = 0$). Но как раз эти точки имеют и наибольшую скорость колебательного движения.

Выделенный объем обладает и потенциальной энергией ΔU упругой деформации, которая согласно (6.27) равна

$$\Delta U = \frac{E\varepsilon^2}{2}\cdot\Delta V, \qquad (12.20)$$

[1] Линейные размеры такого объема должны быть много меньше длины волны.

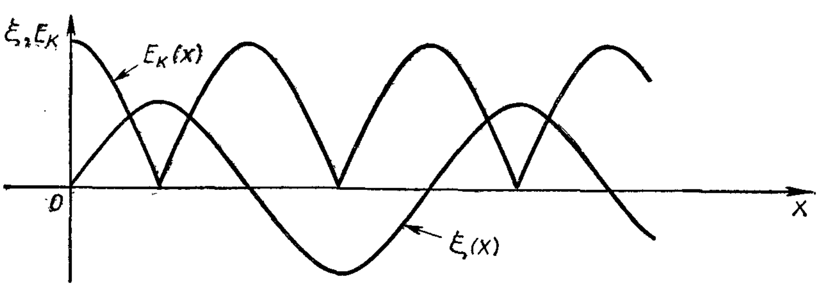


Рис. 12.12

где $\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x}$ — относительное удлинение (или сжатие), E — модуль Юнга.

Используя связь $v^2 = \frac{E}{\rho}$ и выражение для производной $\frac{d\xi}{dx}$ из (12.17), получим:

$$\Delta U = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 \cos^2 \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \cdot \Delta V. \qquad (12.21)$$

Таким образом, изменение потенциальной энергии во времени и в пространстве аналогично изменению кинетической энергии. Максимум потенциальной энергии приходится как раз на те области среды, в которых максимальна кинетическая энергия. Это характерная особенность бегущих волн. Ее можно наглядно пояснить на примере распространения поперечного импульса в шнуре (рис. 12.13). Участок шнура A, до которого дошел импульс, деформируется (вытягивается и изгибается) и одновременно приобретает наибольшую скорость вверх. По мере прохождения импульса участок шнура A (отмечен жирной линией) поднимается. При этом скорость и деформация его уменьшаются (рис. 12.13, *б*). На гребне (рис. 12.13, *в*) скорость и деформация обращаются в нуль. Всю энергию, которую получил участок в начальный момент, он передал другим частицам, в результате чего импульс и продвигается вперед.

Полная энергия выделенного объема в данный момент выражается так:

$$\Delta E = \Delta E_к + \Delta U = \rho A^2 \omega^2 \cos^2 \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \cdot \Delta V. \qquad (12.22)$$

Поделив все члены этого равенства на ΔV, получим выражение для мгновенной плотности энергии, т. е. для энергии, приходящейся в данный момент времени на единицу объема среды:

$$w = \frac{\Delta E}{\Delta V} = \rho A^2 \omega^2 \cos^2 \omega \left(t - \frac{x}{v} \right). \qquad (12.23)$$

Таким образом, мгновенная плотность энергии в различных точках пространства различна. Максимумы ее приходятся на те точки волны, которые в данный момент имеют нулевое смещение ($\xi = 0$). Кроме того, для фиксированной точки волны плотность энергии изменяется во времени пропорционально квадрату косинуса.

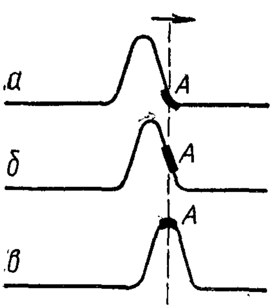


Рис. 12.13

Поскольку среднее значение квадрата косинуса равно 1/2, то среднее (по времени) значение плотности энергии в каждой точке волны определяется формулой:

$$w_{ср} = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2. \qquad (12.24)$$

Отсюда видно, что *средняя плотность энергии пропорциональна* плотности среды, квадрату амплитуды волны и квадрату частоты. Подобная зависимость имеет место не только для плоской волны, но и для других видов синусоидальных волн.

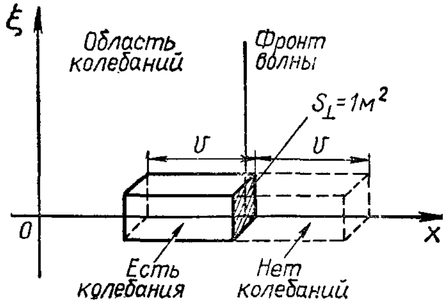


Рис. 12.14

Итак, при распространении волны среда получает дополнительный запас энергии. Значит волна переносит энергию от источника колебания ко все более удаленным участкам среды. Количество энергии, переносимой волной за одну секунду через некоторую поверхность S, называют потоком энергии Φ через эту поверхность. Поток энергии — скалярная величина, размерность которой совпадает с размерностью мощности.

Количество энергии, переносимое волной за одну секунду через площадку в один квадратный метр, расположенную перпендикулярно к направлению распространения волны, называют плотностью потока энергии. Подсчитаем эту величину.

Волна в результате своего прохождения через площадку $S = 1$ м переносит за 1 с такое количество энергии, какое содержится в параллелепипеде, изображенном сплошными линиями (рис. 12.14), а в нем содержится энергия, равная

$$j = w_{\text{ср}} v,$$

или

$$j = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 v. \tag{12.25}$$

Рассматривая фазовую скорость волны как вектор $\vec{v}$, направление которого совпадает с направлением распространения волны, мы придадим и плотности потока смысл векторной величины:

$$\vec{j} = \frac{1}{2} A^2 \omega^2 \vec{v}. \tag{12.26}$$

Вектор плотности потока энергии впервые введен Н. А. Умовым[1] в 1874 г. и называется его именем.

Зная вектор $\vec{j}$ в любой точке произвольной поверхности S, можно вычислить поток энергии через эту поверхность. Для это-

[1] Николай Алексеевич Умов (1846—1915) — выдающийся русский физик, основатель учения о движении энергии.

го поверхность разбивают на элементарные площадки dS и вводят понятие вектора $d\vec{S}$:

$$d\vec{S} = dS\vec{n},$$

где $\vec{n}$ — единичный вектор, нормальный к площадке dS.

Тогда поток энергии $d\Phi$ через элементарную площадку dS равен:

$$d\Phi = \vec{j}\,d\vec{S} = j\,dS\cos\alpha = j_n\,dS,$$

где $j_n = j\cos\alpha$ есть проекция вектора $\vec{j}$ на направление нормали к площадке.

Полный поток энергии находим интегрированием по поверхности:

$$\varphi = \int d\Phi = \int \vec{j}\,d\vec{S} = \int j_n\,dS.$$

7. ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ ВОЛН

Принцип суперпозиции (наложения) волн, установленный из опыта, состоит в том, что волны от разных источников, накладываясь друг на друга, не изменяют друг друга. Другими словами, распространение волны в данной среде не зависит от наличия в этой среде других волн. Простейшей иллюстрацией принципа суперпозиции является независимое распространение волн на поверхности воды от двух упавших капель.

Следствием этого принципа является то, что смещение частицы среды в любой момент времени равно геометрической сумме смещений, которые частица получает, участвуя в каждом из слагаемых волновых процессов.

Принцип суперпозиции, однако, не всегда имеет место. Он нарушается в тех случаях, когда суммарные смещения частиц настолько велики, что связанные с ними деформации превышают предел упругости материала среды и закон Гука нарушается. В этом случае среду нельзя рассматривать упругой. Подобная ситуация имеет место при распространении ударных волн, возникающих при взрывах. В дальнейшем мы будем рассматривать лишь волны малой амплитуды, для которых не будет нарушаться закон Гука (линейная зависимость между силами и деформациями). В этих случаях будет выполняться принцип суперпозиции.

Согласно принципу суперпозиции накладываться друг на друга без взаимного искажения могут волны любой формы. В результате наложения волн результирующее колебание каждой частицы среды также может происходить по любому сложному закону.

Явление *интерференции* состоит в таком наложении двух (и более) волн, которое приводит к стационарному (не зависящему от времени) усилению колебаний частиц среды в одних местах и ослаблению (или полному погашению) в других местах пространства. Если в некоторой упругой среде распространяются две волны, то каждая частица среды, через которую проходят обе волны, будет одновременно участвовать в двух независимых колебательных движениях, вызванных каждой волной. Результирующее движение частицы зависит от частот, амплитуд и начальных фаз составляющих колебаний. Однако если распространяющиеся волны имеют одинаковые частоты и если они в данной точке пространства вызывают колебания частицы вдоль одной и той же прямой, то возникает либо усиление колебаний, либо их ослабление (погашение), в зависимости от разности фаз составляющих колебаний.

В пространстве всегда найдутся такие точки, в которых разность фаз пришедших колебаний составит $2k\pi$ (где k — целое число). Следовательно, в этих точках будет устойчивое (неизменно продолжающееся все время) усиление колебаний частиц среды. Найдутся и такие точки, в которых разность фаз пришедших колебаний будет равна $(2k+1)\pi$. В таких точках пространства будет наблюдаться устойчивое ослабление колебаний частиц среды. В результате область пространства, в которой волны накладываются одна на другую, будет представлять собой чередование участков с усиленным колебанием частиц среды и участков, где колебания частиц ослаблены или частицы вовсе не колеблются.

Понятно, что интерференционная картина возникает только при наложении таких волн, которые имеют одинаковую частоту, постоянную во времени разность фаз в каждой точке пространства и создают в каждой точке пространства колебания вдоль одной прямой. Волны, удовлетворяющие этим трем условиям (и источники, их создающие), называют *когерентными.*

Простейший случай интерференции наблюдается при наложении бегущей и отраженной волн. Эти волны когерентны (для них выполняются все три условия когерентности). Наложение таких волн приводит к образованию так называемой *стоячей волны.*

8. СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

Смещение в стоячей волне. Запишем уравнения двух плоских волн, имеющих одинаковые частоты и амплитуды и распространяющихся в противоположных направлениях:

$$\xi_1 = A\sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right),\quad \xi_2 = A\sin\left(\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda}\right).$$

Суммарное смещение частицы среды с координатой x равно сумме смещений ξ_1 и ξ_2:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = A\left[\sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) + \sin\left(\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda}\right)\right],$$

или (после тригонометрических преобразований):

$$\xi = 2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\sin\omega t. \qquad (12.27)$$

Это и есть уравнение стоячей волны. Оно показывает, что в результате наложения прямой и обратной волн точки среды колеблются так, что все они одновременно проходят положение равновесия ($\sin\omega t = 0$) и все они одновременно достигают своих наибольших отклонений ($\sin\omega t = \pm 1$).

Можно было бы сказать, что частицы в стоячей волне колеблются в одной фазе. Однако в силу того, что множитель $\cos\frac{2\pi x}{\lambda}$ имеет алгебраический знак, частицы на самом деле колеблются либо в одной фазе, если для них $\cos\frac{2\pi x}{\lambda}$ имеет одинаковый знак, либо в противофазе, если $\cos\frac{2\pi x}{\lambda}$ имеет для них разные знаки. Для пояснения сказанного на рисунке 12.15 приведено распределение смещения частиц среды для различных последовательных моментов времени. В моменты времени t_1 и t_5 частицы имеют наибольшие отклонения (если иметь в виду поперечную волну в шнуре, то графики описывают истинное положение частиц в пространстве), при этом скорости их равны нулю. В момент t_3 частицы проходят положение равновесия; скорости их максимальны. Для моментов t_2 и t_4 показаны распределения смещений между наибольшим и нулевым смещением. На графике выбраны три точки с координатами x_1, x_2, x_3. Для каждого момента времени стрелками показаны скорости этих точек. Из графика видно, что точки x_1 и x_2 колеблются в противофазе, а точки x_1 и x_3 — в одной фазе. Размахи колебаний у разных точек различны. Так, точка *4* колеблется в пределах отрезка *а*, *б*. Амплитуда колебаний частиц в стоячей волне зависит от их координаты, но не зависит от времени:

$$A_0 = 2A\left|\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\right|. \qquad (12.28)$$

Здесь знак модуля поставлен потому, что амплитуда — сугубо положительная величина.

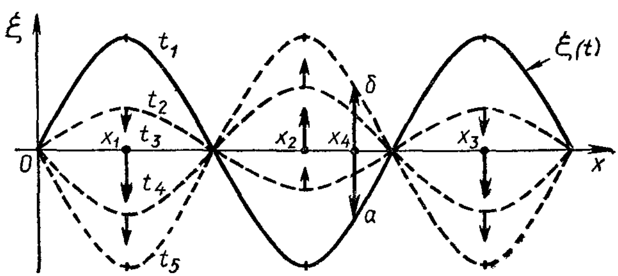


Рис. 12.15

В стоячей волне имеются такие точки, которые остаются все время неподвижными. Такие характерные точки называются *узлами* смещения. Положение их определяется из условия

$$A_0 = 2A\left|\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\right| = 0,$$

или

$$\cos\left|\frac{2\pi x}{\lambda}\right| = 0.$$

Это уравнение удовлетворяется при значениях аргумента $\frac{2\pi x}{\lambda} =$

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm\pi\left(k + \frac{1}{2}\right),$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots$. Отсюда

$$x = \pm\frac{\lambda}{2}\left(k + \frac{1}{2}\right).$$

Таким образом, точкн с координатами $x = \pm\frac{\lambda}{4}$, $\pm\frac{3\lambda}{4}$, $\pm\frac{5\lambda}{4}$, ... являются *узлами смещения.* Расстояние между двумя соседними узлами равно $\frac{\lambda}{2}$.

Точки волны, колеблющиеся с наибольшими амплитудами, называются *пучностями смещения.* Координаты этих точек определяются из условия

$$A_0 = 2A\left|\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\right| = 2A,$$

или

$$\cos\left|\frac{2\pi x}{\lambda}\right| = 1.$$

Это уравнение удовлетворяется при значениях аргумента $\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm k\pi$ (где $k = 0, 1, 2, \ldots$).
Отсюда получаем:

$$x = \pm k\frac{\lambda}{2}.$$

Таким образом, наибольшую амплитуду имеют точки с координатами $x = 0$, $\pm\frac{\lambda}{2}$, $\pm\frac{2\lambda}{2}$, ... Расстояние между двумя соседними пучностями равно $\frac{\lambda}{2}$. На рисунке 12.16 представлен график распределения амплитуды колебаний в стоячей волне (формула 12.28).

График стоячей волны, приведенный на рисунке 12.17, носит условный характер: на нем показано, в каких пределах колеблются различные точки среды, в которой образовалась стоячая волна. На этом графике хорошо видны узлы и пучности смещения.

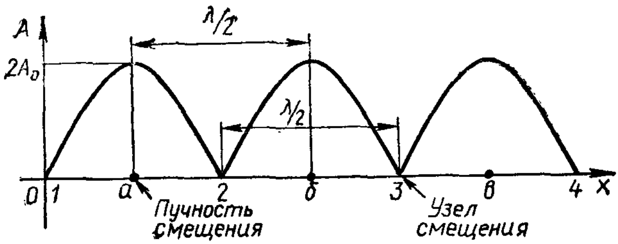


Рис. 12.16

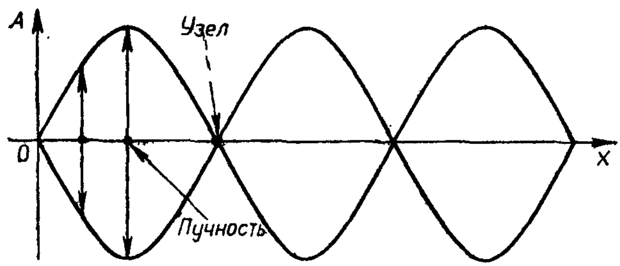


Рис. 12.17

Кинетическая и потенциальная энергия стоячей волны. Выделим в среде, где установилась продольная стоячая волна, элементарный объем ΔV, достаточно малый, чтобы можно было считать скорости колебательного движения частиц одинаковыми, а деформацию однородной. Выделенный объем обладает кинетической энергией

$$\Delta E_к = \frac{m}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 = \frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 \cdot \Delta V.$$

Так как для стоячей волны $\xi = 2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\sin\omega t$, то

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = 2A\omega\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\omega t.$$

Подставив это выражение в формулу для $\Delta E_к$, получаем:

$$\Delta E_к = 2\rho A^2\omega^2\left(\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\right)^2\cos^2\omega t \cdot \Delta V. \tag{12.28}$$

Отсюда видно, что кинетическая энергия, выделенного объема изменяется во времени, как квадрат косинуса, и что существуют такие точки волны, в которых кинетическая энергия равна нулю в любой момент времени $\left(\cos^2\frac{2\pi x}{\lambda} = 0\right)$. Эти точки называются *узлами кинетической энергии*. Они совпадают с узлами смещения. Точки, в которых $\Delta E_к$ имеет наибольшее значение

$\left(\cos^2\frac{2\pi x}{\lambda}=1\right)$, называются *пучностями кинетической энергии.* Такие точки совпадают с пучностями смещения.

Выделенный объем среды ΔV обладает и запасом потенциальной энергии

$$\Delta U=\frac{E\varepsilon^2}{2}\Delta V=\frac{E}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2\Delta V.$$

Подставляя сюда выражение

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=-\frac{4\pi A}{\lambda}\sin\frac{2\pi x}{\lambda}\sin\omega t$$

и учитывая, что $E=v^2\rho$, получаем:

$$\Delta U=\frac{1}{2}\rho v^2\frac{4A^2 4\pi^2}{\lambda^2}\sin^2\frac{2\pi x}{\lambda}\sin^2\omega t\cdot\Delta V.$$

Так как $v=\lambda\nu$, а $2\pi\nu=\omega$, окончательно

$$\Delta U=2\rho A^2\omega^2\sin^2\frac{2\pi x}{\lambda}\sin^2\omega t\cdot\Delta V. \qquad (12.29)$$

Из этого соотношения видно, что потенциальная энергия фиксированного объема также изменяется во времени, но уже по закону синуса в квадрате. В те моменты времени, когда кинетическая энергия равна нулю ($\cos\omega t=0$), потенциальная энергия достигает максимума ($\sin\omega t=1$). Это значит, что колебания кинетической и потенциальной энергии сдвинуты во времени на четверть периода $\left(\frac{T}{4}\right)$. Напомним, что в бегущей волне оба вида энергии изменяются в одной фазе.

Потенциальная энергия зависит не только от времени, но и от положения выделенного объема ΔV. Имеются такие точки стоячей волны, где потенциальная энергия равна нулю в любой момент времени $\left(\sin^2\frac{2\pi x}{\lambda}=0\right)$. Эти точки называются *узлами потенциальной энергии.* Существуют и *пучности потенциальной энергии* $\left(\sin^2\frac{2\pi x}{\lambda}=1\right)$. Сопоставляя (12.28) с (12.29), приходим к выводу, что узлы потенциальной энергии приходятся на пучности кинетической энергин. И наоборот, пучности потенциальной энергии совпадают с узлами кинетической энергии. На рисунке 12.18 показаны графики распределения амплитуд кинетической энергии $\left(\Delta E_{\text{к, ампл}}=2\rho A^2\omega^2\cos^2\frac{2\pi x}{\lambda}\cdot\Delta V\right)$ и потенциальной энергии $\left(\Delta U_{\text{ампл}}=2\rho A^2\omega^2\sin^2\frac{2\pi x}{\lambda}\cdot\Delta V\right)$.

Из графиков видно, что пучности кинетической энергии и пучности потенциальной энергии сдвинуты в пространстве на четверть длины волны $\left(\frac{\lambda}{4}\right)$.

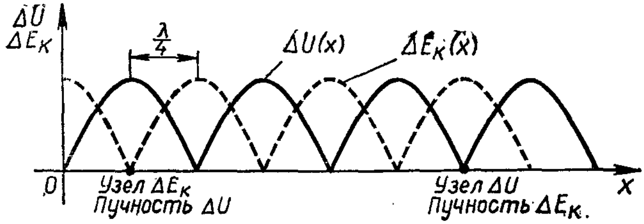


Рис. 12.18

Таким образом, в отличие от бегущих волн максимумы кинетической и потенциальной энергии разобщены не только во времени $\left(\text{на } \frac{T}{4}\right)$, но и в пространстве $\left(\text{на } \frac{\lambda}{4}\right)$.

Когда кинетическая энергия волны максимальна, ее потенциальная энергия равна нулю. Через четверть периода кинетическая энергия обращается в нуль, потенциальная энергия достигает максимума. Однако участки среды, где наблюдаются максимумы потенциальной энергии, отстоят на $\frac{\lambda}{4}$ от тех участков, где четверть периода назад была максимальна кинетическая энергия. В стоячей волне наблюдается периодически повторяющийся переход кинетической энергии в потенциальную и обратно, что в определенной степени аналогично переходам энергии в простой колебательной системе (например, математическом маятнике). В отличие от бегущих стоячие волны не переносят энергии. Действительно, кинетическая энергия через $\frac{T}{4}$ перейдет в потенциальную и переместится в пространстве на четверть волны, например в сторону положительных x. В следующую же четверть периода потенциальная энергия вновь перейдет в кинетическую и переместится в пространстве на $\frac{\lambda}{4}$ в противоположную сторону.

Таким образом, средний за каждый полупериод поток энергии через площадку, поставленную перпендикулярно оси x, будет равен нулю.

9. ИЗМЕНЕНИЕ ФАЗЫ ПРИ ОТРАЖЕНИИ ВОЛНЫ

Как уже отмечалось, стоячая волна образуется при отражении бегущей волны от границы среды. Изучим механизм отражения волн на примере отражения поперечного волнового импульса, бегущего по натянутому резиновому шнуру. Опыт показывает, что если конец шнура укреплен, то отражение от него происходит с перевертыванием импульса (рис. 12.19). Если же конец свободен (например, подвешен на тонкой невесомой

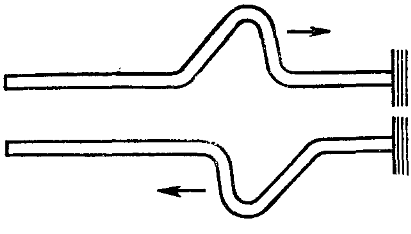


Рис. 12.19

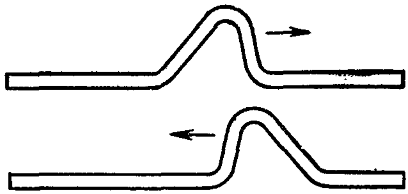


Рис. 12.20

нити), то отражение импульса происходит без перевертывания (рис. 12.20). Для синусоидальных волн это означало бы, что при отражении от закрепленного конца фаза волны скачком изменяется на угол π, а при отражении от свободного конца фаза волны не изменяется. Разберем, почему так происходит.

Когда волновой импульс подходит к закрепленному концу (0), точка A (рис. 12.21, *а*) растянутого участка OA шнура продолжает по инерции двигаться вверх. Однако точка O не может следовать за ней, поэтому участок OA некоторое время будет растягиваться еще больше, пока упругие силы не остановят точку A. С этого момента точка A под действием возросших сил упругости начнет двигаться вниз, пройдет положение равновесия (рис. 12.21, *б*) и вскоре достигнет наибольшего отклонения вниз (рис. 12.21, *в*), после чего снова начнет подниматься вверх. Такие же движения совершают и другие точки, расположенные как слева, так и справа от точки A. В результате импульс повернется выпуклостью вниз и побежит от закрепленного конца.

Если же импульс подходит к свободному концу шнура (шнур может лежать на гладкой горизонтальной поверхности), то растянутый участок OB (рис. 12.22) имеет возможность сжаться; это сжатие происходит в основном за счет движения точки O (точка B связана с большой массой шнура, находящегося слева от нее, и она поэтому менее подвижна). В результате конец O получает импульс, направленный вверх (положение *1* по рис. 12.22), и перемещается в этом направлении до тех пор, пока силы упругости не остановят его и не заставят двигаться вниз. Последовательные этапы образования отраженного импульса иллюстрируют положения *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6*.

Итак, существуют два вида отражения: с изменением фазы отраженной волны на π и без изменения фазы[1]. Первый слу-

[1] Мы имеем в виду два предельных случая. В общем случае отраженная волна на границе раздела двух сред может получить сдвиг по фазе φ, который заключен между нулем и π. Это зависит от конкретных условий отражения.

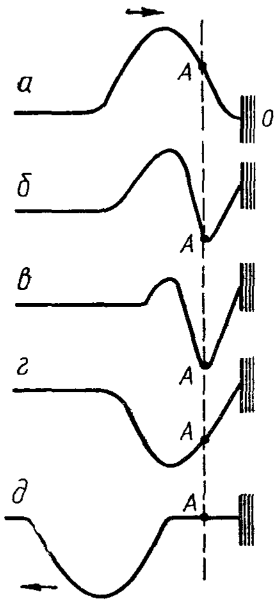


Рис. 12.21

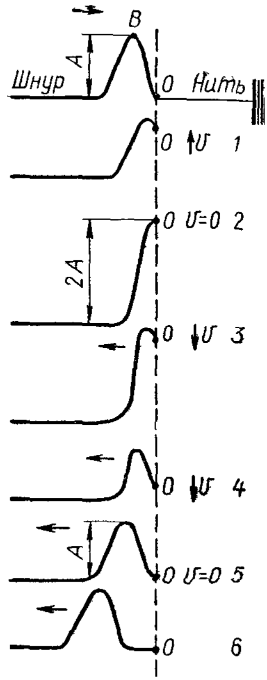


Рис. 12.22

чай наблюдается при отражении от закрепленных концов, второй — при отражении от свободных концов.

В результате наложения бегущей и отраженной волн возникает стоячая волна, которая характеризуется тем, что у закрепленного конца (шнура, струны и т. д.) появляется обязательно узел смещения (ибо точка O неподвижна), а у свободного конца — обязательно пучность смещения.

10. СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СПЛОШНОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ СРЕДЫ

Ограниченные среды (отрезок стержня с закрепленными или свободными концами, струна, пластина и т. д.) представляют собой колебательные системы с распределенными параметрами (бесконечным числом степеней свободы). Собственные колебания таких систем связаны с образованием в них стоячих волн, форма которых зависит от условий отражения на границах среды. Возбудить систему можно кратковременным воздействием на какую-либо ее часть (например, ударом, щипком и т. д.). В результате кратковременного воздействия образуется волновой импульс, который «побежит» от места своего образования во все доступные направления. Так как среда ограничена, то образовавшаяся волна, дойдя до границ среды, отразится и окажется как бы «запертой» внутри ограниченной системы. Прямые и отраженные волны, накладываясь, образуют стоячую волну, у которой положение узлов и пучностей существенно зависит от условий отражения на границе среды. Стоячие волны существуют в системе еще некоторое время после окончания внешнего воздействия. Длительность их существования зависит от потерь, связанных с гистерезисом и излучением энергии в окружающее пространство. Поскольку стоячие волны в этот промежуток существуют сами по себе (т. е. в отсутствие воздействия внешней силы), то связанные с ними колебания ограниченной системы (стержня, струны и т. д.) называют собственными. Собственные колебания системы, ввиду наличия потерь, являются затухающими.

Выше уже было отмечено, что система с n степенями свободы имеет n собственных частот. Так как сплошная ограниченная среда имеет бесконечно много степеней свободы (число колеблющихся точек бесконечно), то можно предположить, что такие системы должны иметь бесконечно много собственных частот.

Рассмотрим собственные колебания стержня, укрепленного с одного конца (рис. 12.23). Если ударом молотка возбудить в стержне продольные или поперечные волны (возбудить собственные колебания), то в нем установятся стоячие волны, причем на закрепленном конце обязательно будет узел смещения, на свободном — пучность. Это условие может быть удовлетворено бесконечным числом способов. Прежде всего оно удовлетворяется, если на длине стержня l уложится одна четверть длины волны (рис. 12.23, *а*). Оно также будет удовлетворяться, если на длине l уложится три четверти длины волны (рис. 12.23, *б*), пять четвертей (рис. 12.23, *в*) или в общем случае $(2n+1)$ четвертей длины волны (где $n = 0, 1, 2, \ldots$). Каждому случаю будет соответствовать своя частота колебания. Мы видим, что такой стержень имеет бесконечно много собственных частот. Для него справедливо соотношение

$$(2n+1)\frac{\lambda_n}{4} = l,$$

или

$$\lambda_n = \frac{4l}{2n+1}.$$

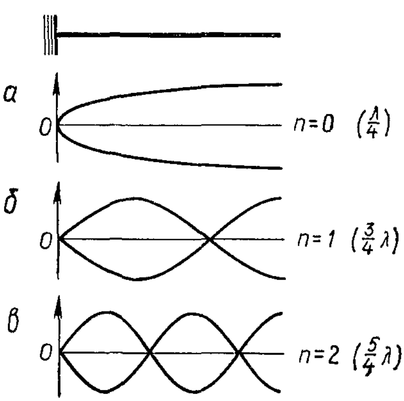


Рис. 12.23

Отсюда для частоты собственных колебаний стержня (в отсутствие дисперсии) получаем:

$$\nu_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{v\,(2n+1)}{4l}, \qquad (12.30)$$

где v — скорость распространения упругих волн в стержне.

При $n=0$ частота $\nu_0 = \frac{v}{4l}$. Эту частоту называют *основной* (в акустике — *основным тоном*), а все последующие (более высокие) — *гармониками* (или *обертонами*). Частоты гармоник, как видно из (12.30), кратны ν_0:

$$\nu_n = \nu_0\,(2n+1).$$

Так, частота первой грамоники $\nu_1 = 3\nu_0$, частота второй $\nu_2 = 5\nu_0$ и т. д.

Если стержень укрепить с двух концов (как струну), то длины волн и частоты собственных колебаний определяются из следующего соотношения (рис. 12.24):

$$k\frac{\lambda_k}{2} = l, \quad k = 1,\ 2, \ldots,$$

$$\nu_k = \frac{v}{\lambda_k} = \frac{v}{2l}k. \qquad (12.31)$$

Основная частота $\nu_1 = \frac{v}{2l}$ в два раза больше, чем при первом способе закрепления. Гармоники $\nu_к = k\nu_1$ кратны основной частоте.

При возбуждении стержня возникают колебания всех частот, амплитуды которых, как правило, убывают с увеличением номера гармоники. Однако распределение амплитуд между гармониками в значительной степени определяется способом возбуждения.

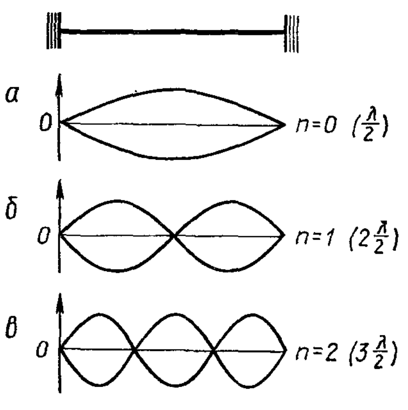


Рис. 12.24

Если возбуждение производится периодической силой, изменяющейся с частотой ν, равной частоте n-й гармоники, то система «отрезонирует» именно на эту частоту: колебания этой частоты будут иметь наибольшую амплитуду, а амплитуды других гармоник и основного тона будут пренебрежимо малы.

При возбуждении импульсом произвольной формы появляются гармоники всех частот потому, что импульс согласно теореме Фурье представляет собой суперпозицию гармонических колебаний бесконечно большого числа частот в интервале от $\nu = 0$ до $\nu = \infty$. Поэтому в импульсе всегда найдутся частоты, равные частотам как основного тока, так и всех обертонов.

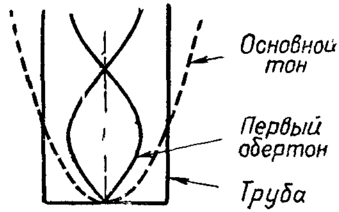


Рис. 12.25

Колебания струны аналогичны колебаниям стержня, укрепленного на двух концах. Только для струны надо иметь в виду, что скорость распространения волны определяется формулой $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$. Колебания столба воздуха в трубе (рис. 12.25) аналогичны колебаниям стержня, укрепленного на одном конце. На открытом конце трубы устанавливается пучность стоячей (продольной) волны. Колебания частиц воздуха на этом конце трубы вызывают колебания частиц окружающего воздуха, что приводит к образованию волн, удаляющихся от трубы. Труба, таким образом, становится источником волн в окружающей среде. Вследствие этого собственные колебания столба воздуха быстро затухают.

Стержень, струна, столб воздуха в трубе — это примеры одномерных колебательных систем. Узлы и пучности стоячих волн в таких системах представляют собой точки (струна) или плоскости, перпендикулярные к продольным осям систем (стержень, столб воздуха).

Собственные колебания пластин связаны с образованием двумерных стоячих волн, представляющих собой суперпозицию стоячих волн, устанавливающихся в направлении осей x и y (рис. 12.26). При этом узловые линии нередко принимают довольно сложную форму. Их можно наблюдать на следующем опыте.

В горизонтально расположенной, укрепленной в центре квадратной пластине возбуждают поперечные колебания, проводя смычком по ребру (рис. 12.26, *а*). Насыпанный на пластину песок «слетает» с тех участков, которые колеблются, и остается на частях, соответствующих узловым линиям, отчего эти линии становятся видными (хладниевы фигуры, рис. 12.26, *б*). Каждой гармонике, как видно из этого рисунка, соответствует свое число и своя форма узловых линий.

Если собственные частоты одномерных колебательных систем определяются натуральным рядом чисел n (или k), то для пластин собственные частоты определяются возможными сочетаниями двух таких рядов целых чисел m, n (где $m = 0, 1, 2, \ldots, n = 0, 1, 2, \ldots$)[1].

[1] Случай $m = n = 0$ исключается, так как он означает отсутствие стоячих волн, т. е. отсутствие колебаний.

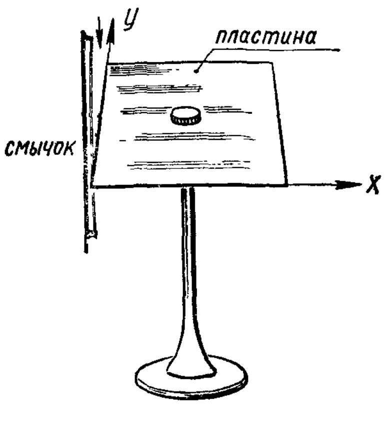


Рис. 12.26а

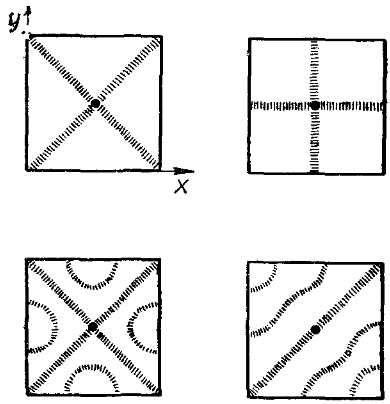


Рис. 12.26б

Всякое упругое тело произвольной формы также представляет собой колебательную (трехмерную) систему, имеющую, кроме основной (низшей) частоты, бесконечное число гармоник, частоты которых определяются набором троек чисел m, n, l (где $m = 0, 1, 2, \ldots$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $l = 0, 1, 2, \ldots$)[1].

Мы приходим к очень важному выводу, имеющему большое научное и практическое значение: любое тело, материал которого обладает упругими свойствами (это практически все тела, с которыми человек имеет дело), представляет собой колебательную систему, имеющую бесконечный набор собственных частот. Такие тела способны резонировать на частоты, совпадающие с основной частотой или частотой какой-либо гармоники.

На использовании этого свойства создаются приборы, служащие для частотного анализа того или иного звукового сигнала, приборы, предназначенные для усиления звука определенной частоты, и т. д. В инженерной практике это явление нередко играет отрицательную роль. Каждая инженерная конструкция, будь то мост, корпус самолета или какой-либо механизм, представляет собою колебательную систему, способную резонировать на внешние периодические воздействия определенных частот. Для предупреждения отрицательных последствий проектировщикам приходится всесторонне анализировать конструкцию. Задача осложняется тем, что резонировать может не только вся конструкция целиком, но и отдельные ее части (например, не только крыло самолета, но и его обшивка в том или ином месте).

[1] Случай $m = n = l = 0$ исключается.

11. ПРИНЦИПЫ ГЮЙГЕНСА И ГЮЙГЕНСА — ФРЕНЕЛЯ. ЗАКОНЫ ОТРАЖЕНИЯ И ПРЕЛОМЛЕНИЯ ВОЛН. ДИФРАКЦИЯ

В 1690 г. Гюйгенс[1] сформулировал принцип, позволивший объяснить распространение волны и известные из опыта законы отражения и преломления: *каждая точка фронта волны является самостоятельным источником сферических*[2] *вторичных волн, огибающая которых дает новое положение фронта волны.*

На рисунке 12.27 показано построение фронта волны для более поздних моментов времени в случае плоской и сферической волн. При построении огибающая сферических волн берется с той стороны от фронта волны, которая соответствует направлению распространения волны.

Принцип Гюйгенса не объясняет, почему нет волны в обратном направлении (огибающая сферических волн на левой стороне рисунка 12.27, *а*). Это объяснил Френель[3], присоединивший к принципу Гюйгенса положения о том, что *вторичные сферические волны, будучи когерентными, интерферируют между собой.* С добавлением Френеля принцип Гюйгенса именуют *принципом Гюйгенса — Френеля.*

В результате интерференции вторичных сферических волн амплитуда результирующих колебаний всюду равна нулю, кроме точек, находящихся на огибающей, построенной с учетом направления распространения волны.

Принцип Гюйгенса (и Гюйгенса — Френеля), основанный на опытах, представляет собой приближение, применение которого в некоторых частных случаях дает удовлетворительные результаты. Конечно, более точные результаты и строгое их объяснение возможно лишь на основе более глубокой теории (решения волнового уравнения).

Применение принципа Гюйгенса к объяснению явлений отражения и преломления волн. Рассмотрим плоскую волну, падающую на границу раздела двух сред (рис. 12.28). Обозначим скорости распространения волн в первой и второй средах соответственно через v_1 и v_2. Когда фронт падающей волны достигает

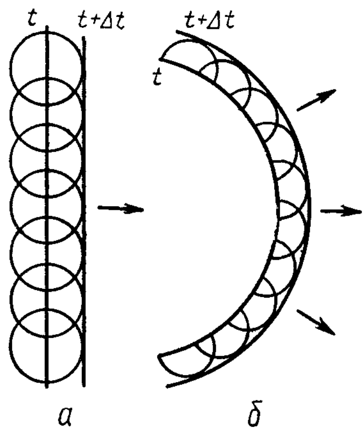


Рис. 12.27

[1] Христиан Гюйгенс (1629—1695) — голландский физик.

[2] Для однородной и изотропной среды.

[3] Огюстен Жан Френель (1786—1827) — французский физик.

границы раздела, каждая точка этой границы становится источником сферических волн, распространяющихся в средах с разными скоростями.

Волна, распространяющаяся от точки A, проходит за некоторое время t расстояние $AB = v_1 t$. За то же самое время отраженная волна, выходящая одновременно с первой, но из точки O, проходит такое же расстояние $OC = v_1 t$. Так как $AB = OB \sin\alpha$ и $OC = OB \sin\alpha_1$, то

$$\alpha_1 = \alpha,$$

т. е. угол отражения равен углу падения.

Рассмотрим теперь вопрос о направлении преломленной волны при $v_2 < v_1$. За время пока волна придет из точки A в B, преломленная волна распространится во второй среде из точки O в точку D. Из рисунка видно, что $OD = OB \sin\beta$, $AB = OB \sin\alpha$. Деля второе равенство на первое, получим:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{AB}{OD} = \frac{v_1 t}{v_2 t} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Таким образом, отношение синуса угла падения к синусу угла преломления равно отношению скорости волны в первой среде к скорости волны во второй среде.

Из рисунка 12.28 видно, что падающий, отраженный и преломленный лучи, а также перпендикуляр к границе двух сред в точке падения находятся в одной плоскости — плоскости падения (в нашем случае совпадающей с плоскостью рисунка).

Применение принципа Гюйгенса — Френеля к объяснению явления дифракции волн. Явление дифракции состоит в том, что волны огибают встречаемые на пути препятствия, если размеры

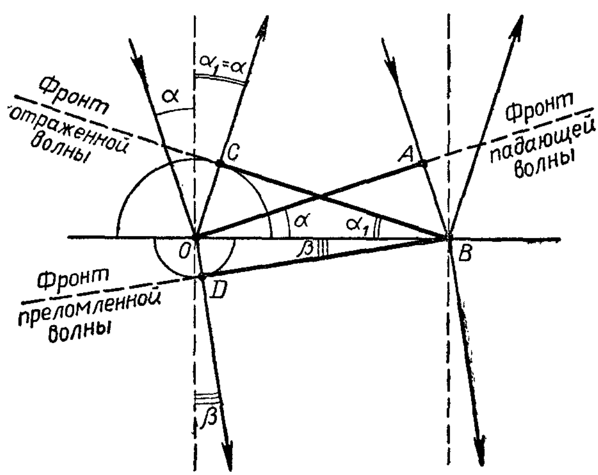


Рис. 12.28

последних соизмеримы с длиной волны. Отклонение от прямолинейности наблюдается и при прохождении волн через малые отверстия, размеры которых сравнимы с длиной волны: волна заходит в область тени. Согласно принципу Гюйгенса каждая точка открытой части фронта волны (рис. 12.29), являясь самостоятельным источником, излучает волны по всем направлениям, в том числе и в область тени. Таким образом, согласно принципу Гюйгенса дифракция на препятствии должна наблюдаться всегда. Однако опыт показывает, что это не так. Огибание имеет место лишь в случае, когда препятствие соизмеримо с длиной волны. Этот факт можно объяснить на основе принципа Гюйгенса — Френеля. При больших размерах препятствий наложение вторичных волн, распространяющихся в область тени, приводит к их полному взаимному «погашению». Но такого «погашения» не происходит, если размеры препятствия малы (по сравнению с длиной волны (здесь правильнее говорить о малых размерах препятствия по сравнению с расстоянием до точки наблюдения).

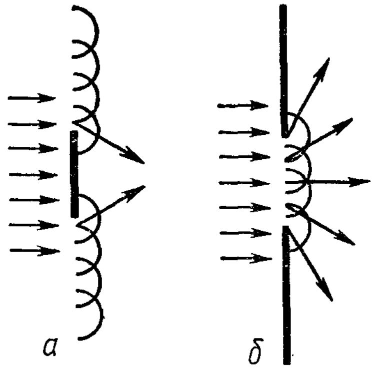


Рис. 12.29

Вопросы для самопроверки

1. Что называют механической волной? Какими свойствами должна обладать среда, чтобы в ней были возможны волны? Что такое бегущая волна? стоячая волна? Что такое синусоидальная волна?

2. Существуют ли, кроме поперечных и продольных, другие типы механических волн? Почему в жидкостях и газах поперечные волны невозможны?

3. Что называют скоростью волны? Как качественно объяснить зависимость скорости волны от модуля Юнга и плотности среды? Приведите формулы для скорости поперечной, продольной и поверхностной волн.

4. Что называют длиной волны? Напишите дисперсионное соотношение и поясните, как оно получается.

5. Что такое дисперсия волн? Какие из известных вам механических волн обладают дисперсией? Что такое нормальная дисперсия?

6. Что такое фронт волны? волновая поверхность? луч? Какие волны называются плоскими? сферическими? Какие волны называются одномерными? двумерными? трехмерными? Приведите примеры таких волн.

7. Выведите уравнение плоской волны. Нарисуйте график мгновенного смещения частиц среды в бегущей волне. Чему равно расстояние между двумя соседними точками волны, колеблющимися в одной фазе?

8. Покажите, что v в формуле плоской волны означает скорость распространения фазы колебания. Что называют фазовой и групповой скоростями? В каком случае обе скорости совпадают? Выведите соотношение связи между групповой скоростью и фазовой скоростью.

9. Нарисуйте графики мгновенных распределений смещения частиц, их скорости, ускорения в бегущей волне.

10. Что называется относительным смещением частиц? Нарисуйте графики смещения и относительного смещения частиц среды, в которой распространяется синусоидальная волна.

11. Поясните, почему в бегущей волне точкам, проходящим положение равновесия, соответствуют участки среды с наибольшей деформацией.

12. Напишите выражения для кинетической, потенциальной и полной энергии небольшого объема среды, в которой имеется бегущая синусоидальная волна. Нарисуйте графики мгновенного распределения кинетической, потенциальной и полной энергии.

13. Почему волна переносит энергию? Что называется потоком энергии? Плотностью потока энергии?

14. В чем состоит принцип суперпозиции и каковы границы его применимости?

15. Что называется интерференцией? Какие волны могут интерферировать? Перечислите условия когерентности волн (и источников).

16. Как образуются стоячие волны? Напишите формулу распределения смещений в стоячей волне. Что называется узлами и пучностями смещения? Совпадают ли в пространстве узлы смещения с узлами относительного смещения? Перечислите свойства, отличающие стоячую волну от бегущей. Почему стоячая волна не переносит энергии?

17. Как изменяется фаза волны при отражении от закрепленного и свободного концов стержня?

18. Почему собственные колебания сплошных ограниченных сред связаны с образованием стоячих волн (на примере колебания струны)? Сколько собственных частот имеет свободно колеблющаяся струна? Какая частота называется основной? Как связаны частоты гармоник с основной частотой? В каком случае у стержня длиной l основная частота ниже: когда он укреплен на двух концах или на одном конце?

19. Стальной стержень имеет длину $l = 50$ см. Определите основную частоту собственных колебаний стержня, когда он закреплен с одного конца и когда он закреплен в середине.

20. Как образуются фигуры Хладни?

21. Почему все упругие тела, независимо от их формы, способны совершать собственные колебания? Какое это имеет значение для инженерной практики?

22. В чем состоит принцип Гюйгенса? принцип Гюйгенса — Френеля? Объясните с помощью принципа Гюйгенса законы отражения и преломления волн. Почему, опираясь только на принцип Гюйгенса, нельзя объяснить дифракцию волн?

Занятие 31

АКУСТИКА

Распространяющиеся в воздухе упругие волны, достигнув человеческого уха, вызывают специфическое ощущение звука, если частота этих волн лежит в пределах от 20 до 20 000 Гц. Поэтому такие волны называют звуковыми. В узком смысле слова акустикой называют учение о звуке. Однако в настоящее время акустика занимается и теми механическими волнами, которые не воспринимаются ухом человека и могут распространяться не только в воздухе, но и в любой другой среде. Упругие волны с частотой, меньшей 20 Гц, называют **инфразвуком**; волны с частотой, превышающей 20 000 Гц, называют ультразвуком. Звуковые волны в жидкостях и газах могут быть только продольными.

1. СКОРОСТЬ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ

Скорость распространения продольных волн в упругой среде вычисляется по формуле:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \tag{12.32}$$

Модуль Юнга E определяется по деформации упругого стержня длиной l:

$$E = -\frac{p_n}{\varepsilon} = -\frac{p_n}{\frac{\Delta l}{l}},$$

где p_n — упругое напряжение в стержне, $\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon$ — относительное удлинение.

Для столба газа p_n должно быть заменено добавочным (избыточным) давлением Δp, вызывающим сжатие газа, а относительную линейную деформацию $\frac{\Delta l}{l}$ надо заменить относительной объемной деформацией $\frac{\Delta V}{V}$, так как столб газа сжимается лишь вдоль своей длины (вдоль направления распространения волны). Таким образом, для газа имеем:

$$E = -\frac{\Delta p}{\frac{\Delta V}{V}}. \tag{12.33}$$

При выводе формулы (12.32) молчаливо предполагалось, что сжатие и растяжение участков среды происходит изотермически. Для твердых тел ввиду их большой теплопроводности такое предположение вполне оправдано. Газы обладают гораздо худшей теплопроводностью, и поэтому участки сжатия (где происходит нагрев) и участки разряжения (охлаждение) не успевают обменяться теплом, что приводит к увеличению упругости газа. Правильнее полагать, что сжатие и разряжение газа происходит адиабатически, т. е. без обмена теплом. Найдем значение E по формуле (12.33) при адиабатическом сжатии газа. Запишем сначала (12.33) так:

$$E = -V\frac{\Delta p}{\Delta V},$$

Заменим приращения дифференциалами, получим:

$$E = -V\frac{dp}{dV}. \tag{12.34}$$

Производную $\frac{dp}{dV}$ вычислим из уравнения **Пуассона** для адиабатического процесса

$$pV^{\gamma} = \text{const}, \tag{12.35}$$

где $\gamma = \frac{c_p}{c_V}$ — отношение теплоемкости при постоянном давлении к теплоемкости при постоянном объеме.

Дифференцируя уравнение Пуассона по V, получим:

$$\frac{dp}{dV}V^{\gamma} + p\gamma V^{\gamma-1} = 0.$$

Отсюда

$$\frac{dp}{dV} = -\frac{\gamma p}{V}. \tag{12.36}$$

Подставляя это выражение в 12.34, получим:

$$E = \gamma p,$$

Теперь формула (12.32) для скорости звука примет вид:

$$v = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}. \tag{12.37}$$

Хотя в формуле присутствует давление p, тем не менее скорость звука не зависит от давления газа. Действительно, подставляя в (12.37) вместо p выражение, полученное из уравнения состояния идеального газа $pV = RT$ (где V — объем одного киломоля газа, T — абсолютная температура), и учитывая, что $\rho V = \mu$ есть молекулярный вес, приходим к следующей формуле для скорости звука в газе:

$$v = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}}. \tag{12.38}$$

Отсюда видно, что скорость звука не зависит от давления газа, но пропорциональна $\sqrt{T}$ (величины γ, R, μ — постоянные для данного газа).

2. ИЗБЫТОЧНОЕ ЗВУКОВОЕ ДАВЛЕНИЕ

Звук, распространяясь в газе (и жидкости), создает области сжатия и разряжения, в которых давление соответственно повышается и понижается на Δp по отношению к давлению p в невозмущенном газе. Величину Δp называют избыточным звуковым давлением. Для газа его можно получить из соотношения (12.36)

$$dp = -\frac{\gamma p}{V} dV,$$

где p — давление в невозмущенном газе; V — объем элементарного участка газа (малого по сравнению с длиной волны); $\gamma = \frac{c_p}{c_V}$. Очевидно, что относительное изменение объема $\frac{dV}{V}$ может быть заменено относительным смещением частиц $\frac{d\xi}{dx}$.

Тогда

$$dp = -\gamma p \frac{d\xi}{dx}. \qquad (12.39)$$

Дифференцируя по x уравнение плоской волны $\xi = A \sin\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$ и подставляя найденное выражение для производной $\frac{d\xi}{dx}$ в (12.39), получим:

$$dp = \frac{\gamma p A\omega}{v} \cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right),$$

Подставляя γp из формулы для скорости $\left(v = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}\right)$ и заменяя дифференциал dp приращением Δp, получим закон изменения избыточного давления в пространстве и во времени:

$$\Delta p = \rho v A \omega \cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right). \qquad (12.40)$$

Здесь множитель перед косинусом — амплитуда p_0 избыточного звукового давления:

$$p_0 = \rho v A \omega. \qquad (12.41)$$

Амплитуда избыточного звукового давления зависит как от характеристик среды (ρ, v), так и от характеристик самой волны (A, ω). Произведение

$$\rho v = R_a, \qquad (12.42)$$

зависящее только от свойств среды, называется *акустическим сопротивлением* (измеряется в акустических омах).

Поскольку $v \sim \frac{1}{\sqrt{\rho}}$, то акустическое сопротивление $R_a = \rho v$ пропорционально $\sqrt{\rho}$.

Используя понятие акустического сопротивления, можно выражение для амплитуды избыточного давления p_0 записать так:

$$p_0 = R_a A \omega. \qquad (12.43)$$

При переходе звука из одной среды в другую частота ω и амплитуда избыточного давления p_0 остаются неизменными. Но так как при этом акустическое сопротивление R_a изменяется, то должна изменяться и амплитуда A колебания частиц. Так, при переходе звука из менее плотной среды в среду более плотную амплитуда A уменьшается во столько раз, во сколько увеличивается акустическое сопротивление.

Вернемся к формуле (12.40) для избыточного звукового давления. Так как $A\omega \cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) = \frac{\partial\xi}{\partial t} = u$ есть скорость частиц среды, участвующих в волновом процессе, то формулу (12.40) можно записать так:

$$\Delta p = \rho v u = R_a u. \tag{12.44}$$

Таким образом, нзбыточное звуковое давление равно произведению акустического сопротивления среды на скорость колебательного движеиня частиц.

Изменение избыточного давления происходит в одной фазе с изменениями скорости частиц.

3. ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗВУКА

Звук может быть охарактеризован двумя системами физических величин: характеристиками, не зависящими от особенностей восприятия звука человеком (их можно назвать объективными), и такими, которые, наоборот, основываются на восприятии звука (их можно назвать субъективными). Конечно, между двумя системами характеристик существует определенная связь, хотя и не совсем простая.

Объективные характеристики звука. К ним относятся физические величины, которые описывают любой волновой процесс: 1) *частота звука* ν, измеряемая числом колебаний в секунду частиц среды, участвующих в волновом процессе (Гц); 2) *плотность потока энергии* (или *интенсивность звука*), измеряемая количеством энергии, переносимой звуковой волной за 1 с через площадку в 1 м^2, поставленную перпендикулярно направлению распространения волны $\left(\frac{\text{Дж}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}, \text{ или } \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}\right)$.

Интенсивность звука I пропорциональна квадрату частоты и квадрату амплитуды колебаний частиц среды и вычисляется по формуле:

$$I = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 v.$$

Этой формуле можно придать иной вид, используя понятия амплитуды избыточного давления (12.41) и акустического сопротивления:

$$I = \frac{1}{2} \frac{p_0^2}{R_a}. \tag{12.45}$$

Таким образом, *интенсивность звука прямо пропорциональна квадрату амплитуды избыточного давления и обратно пропорциональна акустическому сопротивлению.*

Спектральный состав звука указывает, из колебаний каких частот составлен данный звук и как распределены амплитуды между отдельными составляющими. Например, аккорд имеет линейчатый спектр, а шум — сплошной спектр.

Субъективные характеристики звука. К ним относятся высота тона, громкость, тембр.

Высота тона — это субъективная оценка частоты звука. Чем больше частота, тем выше тон воспринимаемого звука. Однако способность уха различать звуки по их частоте зависит от частоты. На рисунке 12.30 представлена полученная из опыта кривая зависимости относительного изменения частоты звука $\frac{\Delta\nu}{\nu}$, при котором человек отмечает изменение высоты тона от частоты. При малых и больших частотах изменение частоты звука должно быть значительным, чтобы ухо могло заметить изменение тона. Для частот от 1000 до 600 Гц (область наибольшей остроты уха) это относительное изменение частоты наименьшее $\left(\frac{\Delta\nu}{\nu} = 0{,}3\right)$.

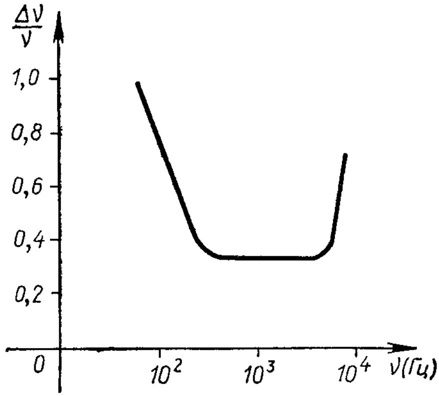


Рис. 12.30

Громкость является субъективной оценкой интенсивности звука. Восприятие интенсивности зависит от частоты звука. Может оказаться, что звук большей интенсивности одной частоты воспринимается нами как менее громкий, чем звук малой интенсивности другой частоты.

Опыт показывает, что для каждой частоты в области слышимых звуков ($20—20 \cdot 10^3$ Гц) имеется так называемый *порог слышимости.* Это минимальная интенсивность, меньше которой ухо не реагирует на звук. Кроме того, опытом установлено, что для каждой частоты имеется так называемый *порог болевых ощущений,* т. е. то значение интенсивности звука, которое вызывает боль в ушах. Повышение интенсивности звука выше порога болевых ощущений опасно для уха. Совокупность точек, отвечающих порогу слышимости, и точек, соответствующих порогу болевых ощущений, образуют на диаграмме (I, ν) две кривые (рис. 12.31), которые пунктиром экстраполированы до пересечения. Область, ограниченная этими кривыми, называется *областью слышимости.* Разговорная речь использует небольшую часть этой области (на рис. 12.31 эта часть отмечена штриховкой). Из диаграммы видно, что менее интенсивный звук, соответствующий точке A, будет восприниматься громче, чем звук более интенсивный, соответствующий точке B, так как точка A более удалена от порога слышимости, чем точка B.

Из диаграммы видно, что наше ухо может воспринимать звуки, различающиеся по интенсивности в 10^{13} раз! Ни один прибор, созданный руками человека, не имеет столь широкого

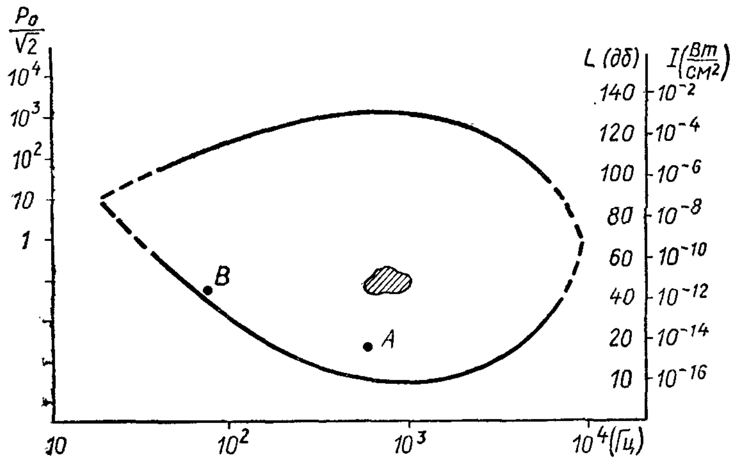


Рис. 12.31

диапазона изменения измеряемой величины. Опыт показывает, что субъективная оценка интенсивности звука — громкость — возрастает гораздо медленнее, чем сама интенсивность звука: при возрастании интенсивности звука в геометрической прогрессии громкость возрастает приблизительно в арифметической прогрессии, т. е. линейно. Поэтому громкость целесообразно определить как десятичный логарифм отношения интенсивности звука I к некоторой интенсивности I_0, принятой за исходную:

$$L = \lg \frac{I}{I_0}. \qquad (12.46)$$

В качестве исходной берут интенсивность $I_0 = 10^{-9} \frac{\text{эрг}}{\text{см}^2 \cdot \text{с}}$. Это интенсивность порога слышимости на частоте 1000 Гц. Громкость звука, соответствующая этой интенсивности, равна нулю (звук не воспринимается).

Единица громкости L называется *белом*. Обычно громкость звука выражают в децибелах (дб); эту дольную единицу еще называют *фоном* (фон):

$$1 \text{ бел} = 10 \text{ дб (фон)}.$$

Если громкость выражается в децибелах, то формула (12.46) записывается так:

$$L = 10 \lg \frac{I}{I_0}. \qquad (12.47)$$

Всему диапазону интенсивностей звука, воспринимаемых ухом от порога слышимости до порога болевых ощущений, соответствуют значения громкости от нуля до 130 дб. В таблице 12.3 приведены громкости некоторых типичных звуков.

Таблица 12.3

Звуки	Громкость (дб)	Интенсивность $\left(\frac{эрг}{см^2 \cdot с}\right)$
Тикание часов	20	10^{-7}
Шепот на расстоянии 1 м	30	10^{-6}
Тихий разговор	40	10^{-5}
Громкая речь	70	10^{-2}
Крик	80	10^{-1}
Шум самолетного двигателя (на расстоянии 3 м)	130	10^{4}

Тембр — субъективная оценка спектрального состава звука. Наиболее простым звуком является чистый тон (чистый звук). Под этим понимают слуховое ощущение, получаемое от простого гармонического (синусоидального) колебания. На рисунке 12.32 представлены спектр чистого тона и график смещения частиц в соответствующей волне в функции времени (такую форму будет иметь запись звука на экране осциллографа).

Более сложные звуки являются смесью тонов, результатом суперпозиции чистых тонов с частотами ν, 2ν, 3ν, ... Высота звука определяется основной частотой ν. Гармоники же (обертоны) с частотами 2ν, 3ν, ... создают тембр звука. Амплитуды A_2, A_3, ... гармоник, вообще говоря, меньше амплитуды A_1 основного тона, а фазы φ_2, φ_3, ... гармоник могут быть самыми произвольными:

$$\xi_n = A_n \sin(\omega_n t + \varphi_n),$$

где $\omega_n = n\omega_1$.

На рисунке 12.33 приведены записи колебаний для двух звуков с одинаковыми спектрами. Однако вследствие разных значений фаз φ_n гармоник формы результирующих колебания различны. Опыт показывает, что оба звука вызывают одинаковое звуковое ощущение. Это происходит потому, что ухо обладает замечательной способностью — оно не чувствительно

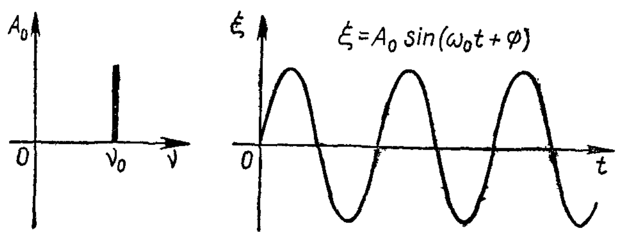


Рис. 12.32

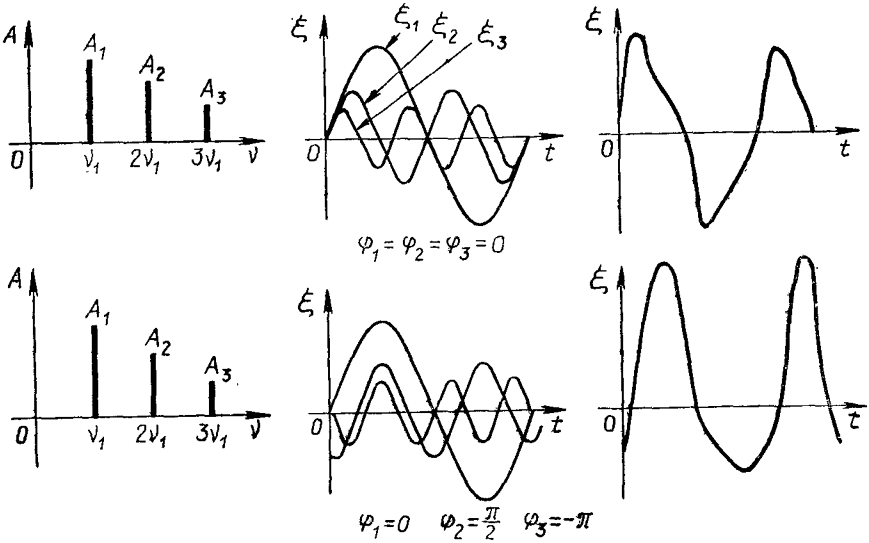


Рис. 12.33

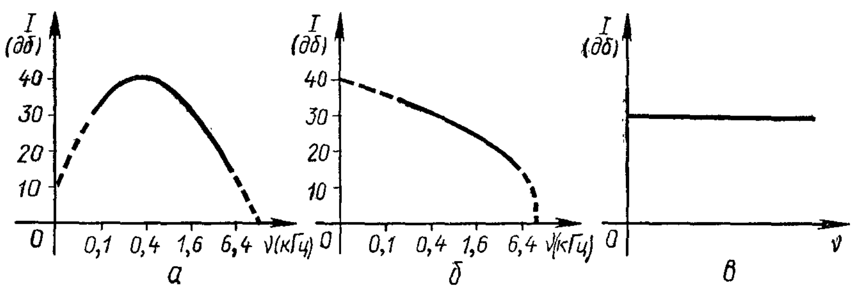


Рис. 12.34

к фазе колебания. Эту особенность уха экспериментально обнаружил Ом[1].

Аккорд — это одновременное звучание двух или нескольких чистых тонов. Он может вызывать приятное ощущение — *консонанс* или неприятное — *диссонанс.*

Шумы. Шумом называется апериодическая сложная смесь звуков, спектр которого в некотором интервале частот является непрерывным. На рисунке 12.34 приведены спектры некоторых характерных шумов: *а* — спектр говора большого числа людей; *б* — спектр шума в залах, фойе; *в* — спектр шума водопада,

[1] Георг Симон Ом (1789—1854) — немецкий физик; особенно известен работами в области электричества.

леса, моря. Шум может иметь некоторую тональность, определяемую частотой, которой соответствует максимальная амплитуда (громкий говор большого числа людей). Интересен следующий опыт. При ударе сухая дощечка издает шумящий звук. Однако этот звук имеет тональность, в чем нетрудно убедиться, если дощечки, длины которых подобраны определенным образом, бросать одну за другой на твердый (каменный) пол: в получающихся звуках слышится музыкальная гамма. На этом принципе основано действие музыкального инструмента — ксилофона.

4. ГОЛОСОВОЙ ТРАКТ ЧЕЛОВЕКА

Гласные и согласные. При разговоре или пении мы воспринимаем определенную гласную (например, звук «а»), независимо от того, на какой ноте (низкой или высокой) и кем (мужчиной или женщиной) она произносится. Как мы узнаем гласную? Выяснено, что каждой гласной (и звонкой согласной) соответствует определенный набор частот (*формантов*), положение которых в спектре звука не изменяется при произношении ее в низком или высоком регистре, а также при произношении ее различными людьми (басом, тенором и т. д.). Кроме формантов, имеется индивидуальный набор гармоник, свойственных голосу данного человека, придающий определенную окраску голосу и определенную тональность данной гласной. Глухие согласные обладают широкими непрерывными спектрами разнообразного состава. По характеру спектра мы и узнаем глухую согласную.

Голосовой тракт. При выдыхании воздух из легких сначала поступает в гортань (хрящевую трубку), а затем выходит через нос и рот. Выходящий из легких воздух проходит через *голосовые «связки»*, которые расположены в верхней части гортани и состоят из переплетенных между собой мышечных волокон. При создании согласных звуков речи типа «с», «ф» воздух проходит через голосовые связки беспрепятственно. При создании же гласных звуков и согласных типа «л», «н» выходящий из легких воздух возбуждает голосовые связки, которые начинают колебаться. Энергия колебаний голосовых связок распределена по целому спектру частот. Порожденный колеблющимися голосовыми связками звук проходит через резонансные полости горла, носа и рта, в которых происходит усиление формантных частот, и таким образом возникают понятные нам гласные звуки. Частота, на которой происходит усиление звука, определяется формой и размером резонансных областей, образующих голосовой тракт, что в свою очередь зависит от положения языка, губ, мягкого неба и положения нижней челюсти. Каждый произнесенный нами звук невероятно сложен как по частотному и энергетическому спектру, так и по длительности звучания отдельных частот. Несмотря на эту сложность, наш мозг в состоянии мгновенно распознать отдельные звуки речи (*фонемы*), из сочетания которых составляется слово.

5. ЗАТУХАНИЕ ЗВУКА

Воздух и другие реальные среды обладают вязкостью. Поэтому кинетическая энергия колеблющихся частиц среды постепенно рассеивается благодаря вязкому трению. Этим объясняется уменьшение переносимой волной энергии (интенсивности) по мере ее распространения; волна (звук) затухает. Опыт показывает, что убывание интенсивности I звука с расстоянием x происходит по экспоненциальному закону:

$$I = I_0 e^{-\alpha x},$$

где I_0, I — интенсивности звука соответственно при $x = 0$ и данном значении x; α — коэффициент поглощения.

Опыт показывает, что коэффициент поглощения α возрастает с увеличением кинематической вязкости среды.

По этой причине затухание звука в воздухе значительно больше, чем в воде. Опыт и теория показывают также, что α в большой степени зависит от частоты звука, возрастая с увеличением частоты. Это значит, что звуки, представляющие собой сумму волн различной частоты (например, гром), резкие вблизи источника своего возникновения, становятся по мере удаления от него более глухими и низкими, так как волны высоких частот быстро затухают. По этой причиие, например, мы плохо разбираем речь на больших расстояниях от говорящего, хотя и слышим ее довольно явственно (в результате поглощения высоких частот изменяются спектры формантов, а значит, и определяемые ими гласные звуки).

Отметим еще, что затухание α волн зависит также от теплопроводности среды (чем она больше, тем больше затухание).

Быстрота затухания звука является важной акустической характеристикой помещений (особенно концертных и театральных). Если затухание мало, то человек, находящийся в помещении, будет воспринимать как прямой звук (т. е. идущий непосредственно от источника), так и звук, многократно отразившийся от стен. Он воспринимает это как гул («гулкое» помещение). Если же затухание велико, то может оказаться, что не все находящиеся в помещении люди будут слышать звук (далеко стоящие слышат плохо). Очевидно, есть какое-то оптимальное значение — оно достигается тем, что при проектировании помещения учитывается его форма, поглощение звука людьмн, стенами помещения (точнее, их обшивкой) и т. д.

В студиях звукозаписи для избежания эха стены покрывают звукопоглощающим материалом.

6. ЭФФЕКТ ДОПЛЕРА

Когда источник и приемник звука неподвижны относительно среды, в которой распространяется звук, то частота колебаний, воспринятых приемником, будет равна частоте ν_0 колебаний источника. Скажется ли на восприятии звука (его частоты) движение источника или приемника? Доплер[1] в 1842 г. установил, что частота ν воспринимаемого звука зависит как от скорости движения источника (относительно среды), так и от скорости движения наблюдателя: она выше частоты ν_0 источника, если наблюдатель и источник сближаются, и ниже ν_0, если они удаляются. В этом состоит *эффект Доплера*. Выясним причину этого явления.

Для простоты положим, что приемник и источник движутся вдоль соединяющей их прямой. Скорость источника $v_и$ и скорость приемника $v_п$ (относительно среды) будем считать положительными, если источник и приемник сближаются, и отрицательными, если они удаляются.

Пусть наблюдатель (приемник) движется в сторону источника ($v_н > 0$), а источник неподвижен (рис. 12.35, *а*). Если бы наблюдатель покоился, то за 1 с через него прошло бы число волн, равное $f_1 = \frac{v}{\lambda}$ (где v — скорость звука в среде). Продвигаясь на λ, волна создает в приемнике одно колебание. Таким образом, воспринимаемая частота измеряется числом f длин волн λ, прошедших через приемник за 1 с. В данном случае $\nu_1 = f_1 = \frac{v}{\lambda} = \nu_0$, т. е. воспринимаемая частота равна частоте источника. Когда наблюдатель движется, он за 1 с пройдет путь, равный $v_н$; на этом пути дополнительно уложится $f_2 = \frac{v_н}{\lambda}$

[1] Христиан Доплер (1803—1853) — австрийский физик и астроном.

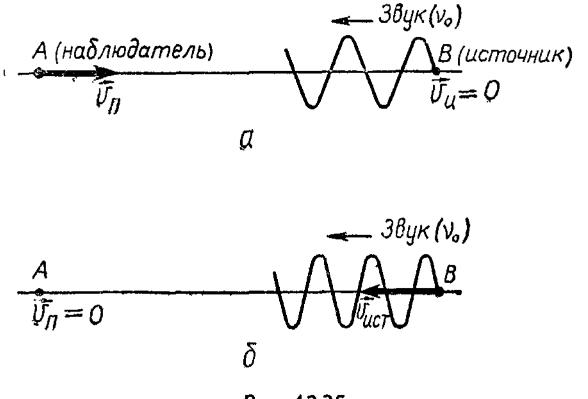


Рис. 12.35

волн. Таким образом, общее число волн, прошедших мимо наблюдателя, будет равно

$$f_1 + f_2 = \frac{v}{\lambda} + \frac{v_н}{\lambda} = \frac{v + v_н}{\lambda}.$$

Следовательно, частота воспринимаемого звука определяется так:

$$\nu_1 = f_1 + f_2 = \frac{v + v_н}{\lambda} = \frac{v}{\lambda}\left(1 + \frac{v_н}{v}\right) = \nu_0\left(1 + \frac{v_н}{v}\right). \qquad (12.48)$$

Таким образом, если $v_н > 0$ (наблюдатель приближается к источнику), то воспринимаемая частота больше частоты источника ($\nu_1 > \nu_0$), а при $v_н < 0$, т. е. когда наблюдатель удаляется, $\nu_1 < \nu_0$.

Рассмотрим теперь случай, когда наблюдатель неподвижен, а источник движется к наблюдателю со скоростью $v_и > 0$ (рис. 12.35, *б*). Если бы источник был неподвижен, то за время одного периода T_0 он испустил бы одну волну, которая бы прошла расстояние $\lambda = vT_0$. Движущийся же источник за время T_0 сам переместится на расстояние $s = v_и T_0$. Поэтому испускаемая волна как бы сократится до размера $\lambda_1 = \lambda - v_и T_0 = T_0(v - v_и)$. Такие сокращенные волны вызовут в приемнике колебания, частота которых равна числу длин волн, прошедших через приемник за 1с:

$$\nu_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{T_0(v - v_и)} = \frac{\nu_0}{\left(1 - \frac{v_н}{v}\right)}. \qquad (12.49)$$

Таким образом, воспринимаемая частота $\nu_1 > \nu_0$, если $v_и > 0$ (источник приближается к наблюдателю), и $\nu_1 < \nu_0$, если источник удаляется ($v_и < 0$).

Сопоставляя формулы (12.48) и (12.49), можно прийти к выводу, что при относительном сближении источника и приемника увеличение частоты будет неодинаковым и зависит от того, движется ли источник или наблюдатель [1].

Если и источник и наблюдатель движутся одновременно, то воспринимаемая частота будет определяться формулой:

$$\nu = \nu_0 \frac{1 + \frac{v_н}{v}}{1 - \frac{v_и}{v}}. \qquad (12.50)$$

При использовании этой формулы нужно учитывать указанное выше правило знаков для $v_и$ и $v_н$.

Мы рассмотрели случай, когда скорости направлены по прямой, соединяющей источник и наблюдателя. Если скорости $v_и$ и $v_н$ направлены не по такой прямой, то во все формулы, при-

[1] Это отличительная особенность эффекта Доплера для механических волн. Для световых волн изменение частоты зависит только от относительной скорости источника и приемника.

веденные выше, следует подставлять не сами скорости $v_и$ и $v_н$, а их составляющие на прямую, соединяющую источник и приемник.

Проиллюстрировать эффект Доплера можно с помощью свистка, вращающегося на длинном шланге в горизонтальной плоскости (по шлангу к свистку подается воздух). Свисток периодически то приближается к наблюдателю, то удаляется от него. В соответствии с этим высота тона воспринимаемого звука периодически то повышается, то понижается.

7. ИСТОЧНИКИ ЗВУКА

Источником звука может быть любое тело, в котором возбуждены собственные или вынужденные колебания звуковой частоты. Различают три вида источников.

1. *Источники, излучающие звук в результате свободных колебаний системы с распределенными параметрами.* К таким источникам относятся камертоны, колокола, пластины, стержни, а также струны, возбуждаемые ударом (рояль) или щипком (гитара, арфа и др.). Перечисленные источники имеют малое затухание [1], и получаемые от них звуки приближаются к чистым тонам (к синусоидному виду). Особо следует отметить камертон. При свободных колебаниях в нем устанавливается стоячая волна только основного тона (рис. 12.36). Форма камертона такова, что возбуждение в нем гармоник затруднительно. Особенность стоячей волны на камертоне состоит в том, что на «ножках» камертона колебания являются поперечными, а на основании — продольными.

2. *Автоколебательные системы.* К ним относятся, если говорить о музыкальных инструментах, смычковые и духовые инструменты, органные трубы, свистки.

Рассмотрим для примера, как возникают автоколебания струны у смычкового инструмента. При движении волоска смычка струна под действием силы трения покоя начнет удаляться от положения равновесия. Когда сила упругости деформированной струны превосходит силу трения покоя, струна отрывается от волоска, переходит на другую сторону от положения равновесия и в момент наибольшего отклонения снова захватывается смычком. Так, два раза за период струна получит пополнение энергии, что и обеспечивает колебания с неизменной амплитудой.

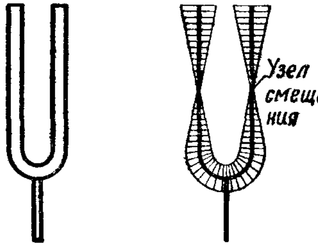


Рис. 12.36

[1] При значительном затухании колебания не будут синусоидными; они перестанут быть музыкальными и приобретут характер шума (щелчок, удар).

3. Системы, совершающие вынужденные колебания. Такие системы лишь воспроизводят колебания, к которым их вынуждают внешние периодические силы. Примером источников звука данного вида являются громкоговорители, мембраны граммофонов, сирены и т. д. В громкоговорителе основной частью служит диффузор; он колеблется с частотой тока, питающего звуковую обмотку прибора.

Колебания мембраны граммофона вызываются иглой, скользящей по бороздкам грампластинки. В сирене поток воздуха периодически прерывается вращающимся диском, имеющим ряд отверстий.

8. АКУСТИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС

Для увеличения интенсивности звука, производимого источником, используют объемные колебательные системы, настроенные в резонанс с источником. Например, камертон в руке звучит едва слышно (правда, зато и долго), но если его поставить на крышку настроенного на частоту камертона деревянного ящика с одним открытым концом, то звучание камертона значительно усиливается. При этом время звучания, естественно, сокращается. Струнные музыкальные инструменты содержат деревянные «ящики» — резонаторы. Сложная форма этих резонаторов обусловлена необходимостью обеспечить достаточно широкую полосу собственных частот инструмента: «ящик» должен резонировать более или менее одинаково на звуки всех частот, производимых струнами.

Объемные колебательные системы могут резонировать с источником не только на своей основной частоте, но и на частотах обертонов. Например, если над открытым концом цилиндрической вертикальной трубки, частично погруженной в воду, держать звучащий камертон, а трубку постепенно поднимать, то резонанс наступает при различной длине воздушного столба. Резонанс при большей длине воздушного столба и означает, что он произошел н а о б е р т о н е, так как основная частота столба воздуха с увеличением его длины уменьшается (частота камертона остается неизменной).

Акустический резонанс нашел применение при анализе частотного состава сложного звука.

Для этой цели Гельмгольц сконструировал набор объемных резонаторов. Входящие в состав сложного звука простые тона возбуждают те резонаторы, собственная частота которых совпадает с частотой данного тона. В настоящее время этот способ утратил свое значение в технике. Современные анализаторы спектра звука сначала преобразуют звуковые колебания в электрические, которые затем анализируются электрическими цепями.

В природе, однако, акустические анализаторы не утратили своего значения. Основной частью слухового органа является мембрана, размещенная в полости, заполненной жидкостью и содержащей несколько тысяч волокон, имеющих разные собственные частоты. В зависимости от частотного состава звука соответствующие волокна вследствие резонанса начинают колебаться, при этом нервные элементы на волокнах раздражаются и передают сигнал в мозг.

9. УЛЬТРАЗВУК

Ультразвук — механическая волна, частота которой превышает 20 000 Гц. На практике используются ультразвуки с частотой до 10^6 Гц и более. Чтобы получить такие частоты при помощи собственных колебаний стальной пластины, свободной на обоих концах, длина этой пластины при основном тоне должна быть порядка

$$l = \frac{v}{2\nu} = \frac{6 \cdot 10^3 \text{м/с}}{2 \cdot 10^6 1/\text{с}} = 3 \cdot 10^{-3}\,\text{м} = 3\text{мм}.$$

Собственные колебания такой пластины весьма слабы и быстро затухают. Для того чтобы пластина могла стать непрерывным источником ультразвука, нужно колебания в ней поддерживать внешней силой, меняющейся с частотой, равной частоте собственных колебаний. Тогда в результате резонанса амплитуда колебаний пластины может быть довольно значительной, а порождаемый ею в окружающей среде ультразвук — достаточно интенсивным. Но где взять такую силу?

Получение ультразвука. Для получения ультразвука используются три явления: *обратный пьезоэлектрический эффект, магнитострикция* и *электрострикция.*

Обратный пьезоэлектрический эффект состоит в том, что пластинка, вырезанная определенным образом из кристалла кварца (или другого *анизотропного* кристалла), под действием электрического поля сжимается или удлиняется в зависимости от направления поля. Если поместить такую пластину между обкладками плоского конденсатора, на которые подается переменное напряжение, то пластина придет в вынужденные колебания. Эти колебания приобретают наибольшую амплитуду, когда частота изменений электрического напряжения совпадает с частотой собственных колебаний пластины. Колебания пластины передаются частицам окружающей среды (воздуха или жидкости), что и порождает ультразвуковую волну.

Явление магнитострикции состоит в том, что ферромагнитные стержни (сталь, железо, никель и их сплавы) изменяют свои линейные размеры под действием магнитного поля, направленного по оси стержня. Поместив такой стержень в переменное магнитное поле (например, внутрь катушки, по которой течет переменный ток), мы вызовем в стержне вынужденные колебания, амплитуда которых будет особенно велика при резонансе. Колеблющийся торец стержня создает в окружающей среде ультразвуковые волны, интенсивность которых находится в прямой зависимости от амплитуды колебаний торца.

Некоторые материалы (например, керамики) обладают свойством изменять свои размеры в электрическом поле. Это явление, получившее название электрострикции, отличается (внешне) от обратного пьезоэлектрического эффекта тем, что изменение размеров зависит только от напряженности приложенного поля, но не зависит от его знака. К числу подобных материалов относятся титанат бария и титанат-цирконат свинца.

Преобразователи, в которых используются описанные выше явления, называют соответственно пьезоэлектрическими, магнитострикционными и электрострикционными. Последние нашли наибольшее применение в практике.

Для получения ультразвука применяются также специальные свистки, предназначенные для работы в воде (в море).

Регистрация ультразвука осуществляется приемным преобразователем, действие которого основано либо на прямом пьезоэлектрическом эффекте, либо на явлении, обратном электрострикции. При сжатии кварцевой пластины (или пластины из керамики) на ее параллельных плоскостях появляются разноименные заряды, т. е. создается разность потенциалов, которая зависит от сжимающегося давления. Действие кварцевого и электрострикционного керамического приемного преобразователя таково: звуковые волны оказывают переменное давление на поверхность пластины, что приводит к появлению на ее поверхности переменной разности потенциалов, которая и фиксируется электрической частью приемного устройства.

Применение ультразвука. Отметим два направления практического применения ультразвука.

Одно из них связано с использованием ультразвука большой интенсивности, который за счет побочных явлений может оказывать на материал разрушающее действие. Другое состоит в использовании ультразвука малой интенсивности с целью получения информации о среде, в которой распространяются ультразвуковые волны (звуковые локаторы, эхолоты и т. д.).

Применение ультразвука большой интенсивности. Во всех случаях, связанных с применением ультразвука большой интенсивности, важную роль играет эффект *кавитации.* Как известно, кавитацией называют образование в жидкости пузырьков (полостей), заполненных газом или паром. Ультразвуковые волны, проходя сквозь жидкость, создают области сжатия и разрежения. В последних возникает «отрицательное давление», приводящее к разрыву жидкости [1]. В образовавшейся полости нахо-

---

[1] В первом приближении можно считать, что разрыв жидкости происходит в тот момент, когда давление внутри нее становится равным давлению насыщенных паров при данной температуре.

дятся, как правило, воздух, проникший в нее в результате диффузии из окружающей жидкости, и пары жидкости. Если воздух в жидкости отсутствует, то полость заполняется только парами жидкости. Время жизни полости, или пузырька, очень мало, так как в волне вслед за разрежением быстро наступает сжатие и давление на пузырек со стороны окружающей жидкости резко возрастает (оно может превышать в несколько тысяч раз атмосферное давление), что приводит к схлопыванию полости. Когда полость схлопывается, образуются сильные ударные волны. Действие последних и используется на практике, например, для очистки от грязи различных предметов (ультразвуковая очистка). Деталь помещают в ванну, наполненную соответствующим растворителем, в который погружен излучатель ультразвука.

Способность ультразвука создавать кавитацию уменьшается с ростом частоты, так как за короткое время существования пониженного давления пузырьки не успевают образоваться (или их образуется мало). В настоящее время большинство ультразвуковых очистителей работает на частотах около 20 кГц.

Интенсивный ультразвук нашел применение для приготовления однородных смесей (гомогенизация) и, в частности, для получения эмульсий (краски, лаки, косметические средства, фармацевтические изделия, продукты детского питания, мази, приправы, соусы, плавленные сыры, маргарин, майонез, зубная паста и т. д.).

Интенсивный ультразвук нашел применение также при пайке алюминиевых деталей. Дело в том, что на воздухе алюминий быстро покрывается тонкой пленкой окисла, которая препятствует пайке и которую практически невозможно удалить с помощью флюсов. Вот здесь и пригодилась ультразвуковая чистка. Проходящие через ванну ультразвуковые волны вызывают кавитацию, которая снимает пленку окисла алюминия и обеспечивает тем самым сцепление соединяемых деталей с помощью припоя.

Ультразвук применяется также для сварки двух различных металлов.

Ультразвуковая (точечная) сварка применяется для соединения деталей полупроводниковых приборов (диодов и триодов). Ультразвук позволяет делать отверстия прямоугольной (и более сложной) формы в хрупких материалах (стекло, керамика) и в очень твердых материалах (карбиды, бориды, алмазы).

В ультразвуковой дрели, в отличие от пневматической, сверло не прямо воздействует на материал, а через влажный абразивный порошок. Механизм сверления, по-видимому, сводится к тому, что частички абразивного порошка под действием ультразвука бомбардируют материал и тем производят нужную обработку.

В медицине интенсивный ультразвук нашел применение, например, в лечении болезни Паркинсона (неконтролируемое подергивание головы и конечностей). Болезнь излечивается при ультразвуковом воздействии на некоторые глубинные участки мозга. Ультразвук, подобно пучку света, специальными линзами фокусируется на определенном участке мозга, поражая те клетки, которые являются причиной болезни, не оказывая при этом действия на соседние клетки.

Применение слабого ультразвука. Это ультразвуковая локация, позволяющая заглянуть как в глубь металла, так и внутрь человека. Ультразвуковая локация применяется на морских судах для обнаружения препятствий в воде (соиары) и исследования рельефа морского дна (эхолоты).

Пионером в области ультразвукового контроля (ультразвуковой дефектоскопии) был советский ученый С. Я. Соколов. В 1928 г. он предложил использовать метод ультразвуковой локации для обнаружения дефектов в металлических изделиях. Посылая в изделие ультразвуковые импульсы и принимая отраженные импульсы, можно не только обнаружить наличие дефекта, но установить его размер и месторасположение.

Ультразвуковые дефектоскопы применяются для обнаружения малейших трещин в железнодорожных рельсах, трещин в литье, ковке и т. п. Неожиданно эти приборы получили применение для определения упитанности крупного рогатого скота и свиней (определяется толщина жирового слоя под кожей).

В медицине слабый ультразвук нашел интересное применение в диагностике болезни могза. Большой интерес представляет для медицинской диагностики использование эффекта Доплера на ультразвуке. Когда волна отражается от движущегося объекта, частота отраженного сигнала изменяется (по отношению к частоте излучателя). При наложении первичного и отраженного сигналов возникают биения. Появление биений свидетельствует о том, что облучаемый объект движется. По частоте биений можно судить о скорости движения. В организме человека и животных имеется много движущихся объектов: текущая кровь, бьющееся сердце, движение кишечника, выделение желудочного сока и т. д. Эти движения и можно контролировать ультразвуковыми методами, основанными на использовании эффекта Доплера.

Применения ультразвука настолько многообразны, что рассказать о них в кратком обзоре не представляется возможным.

10. ИНФРАЗВУК

Звуковые волны, частота которых ниже 20 Гц, т. е. лежит за пределом слышимости, называют *инфразвуком.*

Инфразвуковая область частот еще мало изучена. Однако установлено, что в противоположность ультразвуку, инфразвук обладает высокой проникающей способностью. В атмосфере, например, он может распространяться на десятки тысяч километров. Обусловлено это, по-видимому, двумя причинами: во-первых, слабым поглощением атмосферой и, во-вторых, слабым рассеянием. Уменьшение рассеяния можно объяснить тем, что из-за большой длины волны инфразвука среда для него становится как бы более однородной.

Исследования последних лет показали, что как естественный, так и искусственный инфразвук оказывает сильное воздействие на состояние и поведение людей и животных.

В естественных условиях инфразвук порождается морскими волнами, ударяющимися о берег ($\nu = 0{,}05$ Гц), штормом, извержением вулканов ($\nu = 0{,}1$ Гц), землетрясениями, смерчами. Панический страх животных перед землетрясением или пробуждением вулкана можно объяснить действием инфразвука, порождаемого этими грозными явлениями природы. Имеется положительный опыт прогнозирования по инфразвуку приближения цунами — гигантских приливных волн, порождаемых подводными землетрясениями.

Источниками инфразвука могут служить объекты, созданные человеком: турбины, двигатели внутреннего сгорания, сталеплавильные печи и т. д.

Искусственно инфразвуковые волны с данной частотой создаются устройствами, напоминающими органные трубы или свистки. Так, органная труба длиной 24 м создает инфразвук с частотой 3,5 Гц.

Для обнаружения инфразвука и измерения его мощности обычные методы непригодны. Инфразвук очень низкой частоты можно обнаружить, например, чувствительными барометрами. Для фиксации инфразвука сравнительно высоких частот обычно используют микрофоны больших размеров. Вообще же индикаторы инфразвука довольно сложны, и мы на них здесь останавливаться не будем.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется звуком? Чем занимается акустика?

2. Выведите формулу для скорости звука в газах. Почему изменение объема газа в звуковой волне надо считать адиабатическим? В каком месте вывода формулы скорости звука используется это условие? Почему скорость звука не зависит от давления (ведь с увеличением давления упругость газа повышается)?

3. Рассчитайте скорость звука в кислороде, водороде при $t = 20°C$. По какой формуле надо рассчитывать скорость звука в жидкости? Рассчитайте скорость звука в воде при 0 °С.

4. Опишите известные вам способы измерения скорости звука. В каких пределах изменяется длина волны звука в воздухе (и в воде), если частота увеличивается от 20 до 20 000 Гц и от $2\cdot10^4$ до 10^6 Гц (ультразвук)?

5. Что называют избыточным звуковым давлением? Нарисуйте график мгновенного распределения избыточного давления в среде и сравните его с распределением смещения частиц, а также с распределением скорости частиц.

Как связано избыточное давление со скоростью движения частиц? Почему область наибольшего избыточного давления приходится на те точки, которые имеют наибольшую скорость движения (т. е. проходят через положение равновесия)?

6. Выведите формулу для амплитуды избыточного звукового давления. Что называется акустическим сопротивлением среды и как с этой величиной связана амплитуда избыточного давления?

7. Как объяснить, почему амплитуда избыточного давления должна быть одинакова с обеих сторон границы раздела двух сред? Как изменяется амплитуда колебаний частиц среды при переходе волны из среды более плотной в среду менее плотную? Как при этом изменится амплитуда скорости движения частиц?

8. Перечислите характеристики звука, не зависящие от особенностей восприятия его ухом? Что такое частота звука и интенсивность звука и какими единицами они измеряются? Что такое спектральный состав звука?

9. Запишите формулу связи интенсивности звука с амплитудой избыточного давления. Из этой формулы видно, что поскольку p_0 сохраняется неизменным, то при переходе звука из одной среды в другую его интенсивность должна измениться. Не противоречит ли это закону сохранения энергии?

10. Перечислите характеристики звука, основанные на слуховом восприятии. Что такое высота тона? В чем состоит особенность восприятия ухом частоты звука? Что такое громкость звука? В чем состоит особенность восприятия ухом интенсивности звука? По какому закону воспринимает ухо человека интенсивность звука? Что такое порог слышимости? Зависит ли порог слышимости от частоты воспринимаемого звука? На какие частоты приходится наибольшая чувствительность уха? Что такое порог болевого ощущения? Как он зависит от частоты? Нарисуйте диаграмму слышимости.

11. Как громкость звука связана с интенсивностью? Какую интенсивность звука берут за исходную при определении громкости? Какими единицами измеряется громкость? Как изменилась интенсивность звука, если громкость увеличилась на десять децибел? Покажите, что весь диапазон интенсивностей от 10^{-9} до 10^{4} эрг/(см$^{2}\cdot$с), при которых волна вызывает ощущение звука, соответствует значениям громкости от нуля до 130 дб.

12. Покажите, что диапазону громкости от нуля до 130 дб соответствуют амплитуды избыточного давления воздуха в пределах от $3\cdot10^{-4}$ до 1000 дин/см^{2}.

13. Произведите оценку амплитуды колебаний частиц среды (воздуха) при громкости нуль и 130 дб: а) для частоты $\nu=20$ Гц; б) для $\nu=20\,000$ Гц.

14. Произведите оценку амплитуды скорости частиц среды (воздуха) при громкости нуль и 130 дб. Покажите, что амплитуда скорости в противоположность амплитуде смещения не зависит от частоты.

15. Что такое чистый тон? Чем определяется тембр звука? Влияют ли на тембр воспринимаемого звука фазовые соотношения между отдельными гармониками? Что можно сказать в связи с этим о физическом принципе работы уха?

16. Что такое аккорд? шум? Чем отличаются их спектры? По какому признаку мы различаем гласные одну от другой? По каким признакам мы различаем тембр и высоту тона звуков?

17. Запишите закон затухания звуковой волны (убывание интенсивности звука). Получите из него закон убывания амплитуды волны.

18. В чем состоит эффект Доплера? Оцените разницу в воспринимаемых частотах для следующих случаев: а) источник движется к покоящемуся наблюдателю со скоростью 20 м/с; б) с той же скоростью движется наблюдатель к покоящемуся источнику.

19. Наблюдатель и источник движутся по соединяющей их прямой в одну сторону с одинаковыми скоростями w относительно среды. Как изменится частота воспринимаемого звука с увеличением скорости w? Вычислите скорость w_0, при которой наблюдатель перестанет воспринимать звук. Зависит ли значение w_0 от направления движения источника и наблюдателя?

20. Наблюдатель и источник неподвижны относительно земли, но воздух движется со скоростью w вдоль соединяющей их линии. Какую частоту будет воспринимать наблюдатель и будет ли она зависеть от направления ветра?

21. Перечислите виды источников звука. Поясните, почему собственная частота (основного тона) струны зависит не только от ее длины, но и от натяжения. Звук струны и органной трубы отличаются по спектру. Какой из этих звуков более богат обертонами? Струна в смычковом инструменте работает как автоколебательная система. Поясните, рассматривая взаимодействие смычка со струной, как достигается увеличение громкости звучания одной и той же ноты.

22. Если крикнуть около открытого рояля, то можно заметить, что некоторые струны начнут колебаться. Объясните, почему они начинают колебаться. Почему начинают колебаться именно некоторые струны? Начнут ли колебаться струны, если хлопнуть ладонями?

23. Что называют ультразвуком? Какими методами получают и фиксируют ультразвук? Оцените амплитуду избыточного давления для ультразвуковой волны ($\nu = 10^5$ Гц) интенсивностью в 1 Вт. Оцените при тех же условиях амплитуду колебаний частиц среды (воздух) и амплитуду скорости их движения. Перечислите области применения ультразвука. В каких практических применениях ультразвука используется кавитация? Объясните, почему ультразвук порождает кавитацию. Может ли кавитация порождаться ультразвуком очень высокой частоты?

24. Что называют инфразвуком? Какими методами можно получить и фиксировать инфразвук? Какие особенности характерны для распространения инфразвука (по сравнению с ультразвуком)? Инфразвук (как и ультразвук) вызывает вынужденные колебания тел, на которые он воздействует. Возможен ли здесь резонанс? Какие тела — массивные или легкие — будут резонировать на инфразвук? Может ли резонировать, например, стена?

ОГЛАВЛЕНИЕ

Раздел IV. ДИНАМИКА И СТАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Раздел V. ДИНАМИКА СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

Раздел VI. РАБОТА И ЭНЕРГИЯ

Раздел VII. ИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА И ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ. ЭЛЕМЕНТЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКИ

Раздел XII. МЕХАНИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ. АКУСТИКА

ИБ № 4083

Николай Васильевич Александров, Александр Яковлевич Яшкин

КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

Механика

Редактор *Г. Р. Лисенкер.* Художественный редактор *В. М. Прокофьев.*
Технический редактор *С. Н. Филатова.* Корректор *Т. Ф. Алексина*

Сдано в набор 13.07.77. Подписано к печати 15.05.78. 60×90[1]/16. Бумага типогр. № 1. Гарн. литер. Печать высокая. Усл печ. л. 26. Уч.-изд. л. 24,69. Тираж 57 000 экз. Заказ № 597. Цена 1 руб.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета Совета Министров РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано с матриц Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградской типографии № 2 имени Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29, в типографии им. Смирнова Смоленского облуправления издательств, полиграфии и книжной торговли, г. Смоленск, пр. им. Ю. Гагарина, 2. Заказ № 2973.