CONVERGENCE PROBLEMS OF ORTHOGONAL SERIES

by

Prof. G. ALEXITS

Technical university, Budapest member of the
Hungarian academy of sciences

AKADÉMIAI KIADÓ

BUDAPEST, 1961

Г. Алексич

ПРОБЛЕМЫ СХОДИМОСТИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

Перевод с английского

А. В. ЕФИМОВА

Под редакцией

П. Л. УЛЬЯНОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

МОСКВА 1963

Венгерский академик Г. Алексич является признанным специалистом в теории функций действительного переменного. Предлагаемая вниманию читателя его монография освещает современное состояние теории суммируемости и сходимости ортогональных рядов. Наряду с известным материалом книга содержит новейшие результаты из указанной теории.

Последовательное и подробное изложение делает книгу доступной для первоначального чтения. Предполагается лишь, что читатель знаком с основами теорий интегралов Лебега и Лебега — Стильтьеса. Вместе с тем имеющийся в книге свежий материал, а также постановка ряда проблем представят большой интерес и для специалистов — математиков.

Редакция литературы по математическим наукам

ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Мы предлагаем вниманию советского читателя монографию известного венгерского математика Г. Алексича. Она вышла в Будапеште сначала на немецком, а вскоре с некоторыми исправлениями и добавлениями на английском языке. Русский перевод книги Г. Алексича осуществлен с учетом всех изменений, внесенных автором во второе издание.

Современная теория ортогональных рядов является одной из важных областей метрической теории функций. Бурный рост московской математической школы был наиболее тесно связан с интенсивными исследованиями в метрической теории функций, методы которой впоследствии проникли во многие математические теории. Поэтому естественно, что советским математикам (Н. Н. Лузину, А. Н. Колмогорову, Д. Е. Меньшову и др.) принадлежит честь открытия многих фундаментальных результатов из теории тригонометрических и ортогональных рядов.

Из основных монографий особенно следует отметить книгу С. Качмажа и Г. Штейнгауза «Теория ортогональных рядов», которая написана в 1935 г. и переведена на русский язык в 1958 г. Так как в последнее десятилетие наблюдается активное оживление в работе по теории ортогональных рядов, то выход в свет книги Г. Алексича, в которой представлены как классические, так и новейшие (что особенно важно) результаты из теории сходимости и суммируемости ортогональных рядов, является, несомненно, полезным и своевременным. Эта монография вместе с книгой С. Качмажа и Г. Штейнгауза, несомненно, будет способствовать дальнейшему развитию теории ортогональных рядов.

О конкретном содержании книги Г. Алексича можно судить по ее оглавлению. Понятно, что автор отвел много места исследованиям венгерских математиков. В частности, им широко изложены новые и интересные результаты К. Тандори. Хорошо представлены автором и многие важные результаты, полученные учеными различных стран мира. Так, например, довольно подробно изложены фундаментальные работы Д. Е. Меньшова.

Тем не менее в книге отсутствует изложение некоторых важных исследований, относящихся к основной теме монографии. Так, автор даже не упомянул, что Н. Н. Лузиным впервые был построен почти всюду расходящийся тригонометрический ряд (с коэффициентами, сходящимися к нулю) и что этот результат был потом обобщен В. Орличем на произвольные полные ортонормированные системы. Автор совсем прошел мимо исследований Н. К. Бари, относящихся к устойчивости тех или иных свойств ортогональных рядов. Правда, подобных пропусков важных результатов немного.

При редактировании книги мы сделали ряд подстрочных примечаний, которые или поясняют изложение автора, или же исправляют некоторые неточности доказательств.

В некоторых местах исправления внесены непосредственно в текст.

П. Л. Ульянов

ПРЕДИСЛОВИЕ

Вопросы сходимости и суммируемости общих ортогональных рядов — это, быть может, наиболее ярко выраженная область применения понятий интеграла Лебега и интеграла Лебега—Стильтьеса. Многие полученные здесь результаты, несмотря на их общность, позволяют судить о наиболее характерных особенностях сходимости ортогональных рядов значительно глубже, чем теоремы, доказанные в ряде специальных случаев (в том числе и для классических ортогональных рядов). Так, например, теорема Меньшова—Радемахера о сходимости общих ортогональных рядов обеспечивает сходимость почти всюду некоторых рядов Фурье с нерегулярными лакунами, в то время как теоремы о сходимости, полученные специально для рядов Фурье, не дают возможности ответить на этот вопрос в указанных случаях. Более того, проблемы сходимости ортогональных рядов тесно связаны со многими другими областями анализа, в частности с теорией вероятностей. Можно даже утверждать, что многие теоремы из теории ортогональных рядов и из теории вероятностей являются, собственно говоря, одними и теми же математическими фактами, только по-разному сформулированными.

Широкая область применения и глубина теории сходимости ортогональных рядов оправдывают систематическое изложение этой теории. Хотя задача такого рода была хорошо выполнена в известной книге Качмажа и Штейнгауза, однако со времени ее появления прошло уже 25 лет, и с тех пор в этой теории получено много новых красивых и важных результатов. Это обстоятельство позволяет нам надеяться, что настоящая книга не будет воспринята как излишняя.

Мы попытались дать представление о современном состоянии теории сходимости и суммируемости общих ортогональных рядов и вместе с тем указать на ее связь с соответствующими вопросами классических разложений. Мы не будем затрагивать ряд других важных проблем, которые не относятся к вопросам сходимости, как, например, вопросы, связанные с теоремой Юнга—Хаусдорфа или с теоремой Пэли.

Основные утверждения, приведенные в этой книге, изложены с подробными доказательствами, которые требуют от читателя лишь знакомства с важнейшими фактами теории функций действительного переменного и теории рядов Фурье. Исключение представляют только места, набранные мелким шрифтом, где приводятся теоремы с полным или неполным доказательством или даже совсем без доказательства, указания на нерешенные проблемы, замечания к объяснениям основного текста и т. п. Касаясь происхождения отдельных теорем, мы старались не ограничиваться ссылками на источники, где эти теоремы впервые сформулированы в наиболее общей форме, а приводили указания и на старую литературу, в которой выступают основные идеи доказательств этих теорем.

Как в отношении формы, так и в отношении содержания мы многим обязаны монографии Качмажа и Штейнгауза, книге Сегё по ортогональным полиномам и хорошо известному труду Зигмунда по тригонометрическим рядам, новое, сильно расширенное издание которого мы здесь, к сожалению, использовать не смогли. Очень полезным для нас оказалось написанное Р. Гутером и П. Ульяновым добавление к русскому переводу книги Качмажа и Штейнгауза (1958). Я рад воспользоваться случаем выразить свою искреннюю и сердечную благодарность моим коллегам Б. Надю и К. Тандори за их самоотверженные хлопоты и чрезвычайно ценную помощь при издании этой книги. Их замечания, советы и помощь во многом способствовали улучшению книги. Благодарю также издательство Венгерской Академии наук и книжное издательство «Сегеда» за тщательное оформление книги.

Г. Алексич

Будапешт, январь 1960 г.

ГЛАВА 1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ. ПРИМЕРЫ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

§ 1. Ортогональность, ортогонализация, ортогональные ряды

Мы будем рассматривать ортогональные ряды на произвольном замкнутом интервале $[a, b]$, называемом *интервалом ортогональности*. Этот интервал всегда будем считать конечным; вопросами, которые относятся к бесконечным интервалам ортогональности, мы в дальнейшем заниматься не будем[1]. Через (a, b) обозначаем, как обычно, открытый интервал с концами в точках a и b, далее, через $[a, b)$ или $(a, b]$ будем иногда обозначать интервал, полуоткрытый справа или соответственно слева.

Понятие ортогональности мы вводим с помощью интеграла Стильтьеса—Лебега. Пусть $\mu(x)$ — положительная, ограниченная, монотонно возрастающая на интервале ортогональности $[a, b]$ функция, производная которой $\mu'(x) \geqslant 0$ обращается в нуль только на нуль-множестве (в смысле Лебега). Вещественная функция $f(x)$ называется L_μ-*интегрируемой*, если она μ-измерима и

$$\int_a^b |f(x)|\, d\mu(x) < \infty.$$

Предположение, что $\mu'(x)$ обращается в нуль только на нуль-множестве, не является необходимым для определения интеграла Стильтьеса—Лебега; однако в дальнейшем мы будем придерживаться этого предположения, с тем чтобы

[1] На бесконечных интервалах рассматривают лишь две весьма частные ортогональные системы: систему полиномов Лагерра и систему полиномов Эрмита. Теорию этих полиномов см. в книге: Сегё Г., Ортогональные многочлены, М., 1962.

всякое множество μ-меры нуль являлось в то же время множеством меры нуль в смысле Лебега.

Без нашего предположения не всякое множество μ-меры нуль имеет меру Лебега нуль. Если же $\mu'(x)$ обращается в нуль только на нуль-множестве (в смысле Лебега), то можно обозначить через $\alpha(x)$ абсолютно непрерывную часть от $\mu(x)$, а через N — произвольное множество с μ-мерой $m_\mu(N)$ равной нулю. Тогда имеем:

$$0 = m_\mu(N) = \int_N d\mu(x) \geqslant \int_N d\alpha(x) = \int_N \alpha'(x)\, dx.$$

Так как $\alpha'(x) = \mu'(x) > 0$ почти всюду на N, то последний интеграл может обратиться в нуль только в том случае, когда множество N является нуль-множеством в смысле Лебега. Стало быть, в этом случае μ-нуль-множество является также и нуль-множеством в смысле Лебега. Поэтому в дальнейшем под выражением «почти всюду» мы будем понимать «всюду на интервале ортогональности, за исключением нуль-множества в смысле Лебега».

Если $\mu(x)$ абсолютно непрерывна и $\varrho(x) = \mu'(x)$, то для L_μ-интегрируемой функции $f(x)$ справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)\, d\mu(x) = \int_a^b f(x)\varrho(x)\, dx.$$

В этом случае мы говорим, что $f(x)$ есть $L_{\varrho(x)}$-*интегрируемая функция* и называем $\varrho(x)$ *весовой функцией* или *функцией распределения.* Если же $\varrho(x) \equiv 1$, то, как обычно, функцию $f(x)$ называем L-*интегрируемой функцией.*

Функция $f(x)$ называется L^2_μ- или $L^2_{\varrho(x)}$-*интегрируемой,* если она L_μ- или $L_{\varrho(x)}$-интегрируема и удовлетворяет неравенству

$$\int_a^b f^2(x)\, d\mu(x) < \infty \quad \text{или} \quad \int_a^b f^2(x)\varrho(x)\, dx < \infty \quad \text{соответственно.}$$

Мы говорим об L^2-*интегрируемой* функции, если $\varrho(x) \equiv 1$.

Конечная или счетная бесконечная система $\{\varphi_n(x)\}$ из L^2_μ-интегрируемых функций называется *ортогональной по мере*

$\mu(x)$ или, когда это не ведет к недоразумениям, просто *ортогональной*, если

$$\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)\, d\mu(x) = 0 \qquad (m \neq n), \tag{1}$$

причем ни одна из функций $\varphi_n(x)$ не является нулевой. Система $\{\varphi_n(x)\}$ называется *ортонормированной*, если, кроме условия ортогональности, справедливы соотношения

$$\int_a^b \varphi_n^2(x)\, d\mu(x) = 1 \qquad (n = 0, 1, \ldots). \tag{2}$$

Любую ортогональную систему $\{\psi_n(x)\}$ можно преобразовать в ортонормированную с помощью умножения ее членов на постоянные множители, выбранные подходящим образом. Действительно, так как ни одна из функций $\psi_n(x)$ не является нулевой, то функции

$$\varphi_n(x) = \frac{\psi_n(x)}{\left\{ \int_a^b \psi_n^2(x)\, d\mu(x) \right\}^{1/2}}$$

существуют и, очевидно, образуют систему, ортонормированную по мере $\mu(x)$. Если, в частности, $\mu(x) = x$, т. е. $\mu'(x) = \varrho(x) \equiv 1$, то $\{\varphi_n(x)\}$ является обычной ортонормированной системой.

Предположение о счетности ортонормированной системы не является необходимым. Именно, как показал Ф. Рисс [1], любое множество L_μ^2-интегрируемых функций, попарно различные элементы которого φ и ψ удовлетворяют условию

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\, d\mu(x) = 0,$$

всегда конечно или счетно. Так как этот факт не имеет значения для вопросов сходимости, то в определении ортогональности мы сохраним требование счетности системы.

Легко дать общий способ построения различных ортогональных систем. Для этого воспользуемся следующим понятием: система функций $\{f_n(x)\}$ называется *линейно независимой* на $[a, b]$, если из условия

$$\sum_{k=0}^{n} a_k f_k(x) = 0 \quad \text{для} \quad \mu\text{-почти всех} \quad x \in [a, b]$$

вытекают равенства $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$. Любая ортогональная система $\{\varphi_n(x)\}$ линейно независима. В самом деле, если для μ-почти всех $x \in [a, b]$ имеем

$$\sum_{=0}^{n} a_k \varphi_k(x) = 0,$$

то, умножая это равенство на $\varphi_k(x)$ и интегрируя, в силу ортогональности системы $\{\varphi_n(x)\}$, получим

$$a_k \int_a^b \varphi_k^2(x)\, d\mu(x) = 0,$$

откуда $a_k = 0$ для любого k. Справедливо и обратное, а именно мы покажем, как из произвольной линейно независимой системы функций можно построить ортонормированную систему:

1.1.1. *Если $\{f_n(x)\}$ — система линейно независимых на $[a, b]$ L_μ^2-интегрируемых функций, то можно построить такую ортонормированную систему $\{\varphi_n(x)\}$, что каждая из $\varphi_n(x)$ является линейной комбинацией функций $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_n(x)$.*

Строим систему $\{\varphi_n(x)\}$ последовательно. Прежде всего положим

$$\varphi_0(x) = \frac{f_0(x)}{\sqrt{\int_a^b f_0^2(x)\, d\mu(x)}}.$$

Затем выбираем не обращающиеся одновременно в нуль постоянные c_{10} и c_{11} так, чтобы

$$c_{10} + c_{11} \int_a^b f_1(x)\varphi_0(x)\, d\mu(x) = 0.$$

Из линейной независимости функций $f_0(x)$ и $f_1(x)$ или из вытекающей отсюда линейной независимости $\varphi_0(x)$ и $f_1(x)$ следует, что функция $\psi_1(x) = c_{10}\varphi_0(x) + c_{11}f_1(x)$ не является нулевой и, как видно из этого равенства, $\psi_1(x)$ и $\varphi_0(x)$ ортогональны. Теперь в результате нормирования $\psi_1(x)$ мы определим с точностью до знака функцию

$$\varphi_1(x) = \frac{\psi_1(x)}{\sqrt{\int\limits_a^b \psi_1^2(x)\, d\mu(x)}}.$$

Далее, выбираем три одновременно не обращающиеся в нуль постоянные c_{20}, c_{21} и c_{22} так, чтобы выполнялись равенства

$$c_{20} + c_{22}\int\limits_a^b f_2(x)\varphi_0(x)\, d\mu(x) = 0,$$

$$c_{21} + c_{22}\int\limits_a^b f_2(x)\varphi_1(x)\, d\mu(x) = 0.$$

Аналогично предыдущему, из линейной независимости функций $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ и $f_2(x)$ следует, что функция $\psi_2(x) = c_{20}\varphi_0(x) + c_{21}\psi_1(x) + c_{22}f_2(x)$ не нулевая и, принимая во внимание равенства, определяющие c_{20}, c_{21}, c_{22}, легко убеждаемся в ортогональности $\psi_2(x)$ к $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$; после этого $\varphi_2(x)$ получается нормированием $\psi_2(x)$. Продолжая шаг за шагом этот процесс, мы получим систему $\{\varphi_n(x)\}$ той же мощности, что и $\{f_n(x)\}$. Нетрудно подсчитать, что функция $\varphi_n(x)$ с точностью до знака определяется рекуррентной формулой:

$$\varphi_n(x) = \frac{f_n(x) - \sum\limits_{k=0}^{n-1} \varphi_k(x)\int\limits_a^b f_n(t)\varphi_k(t)\, d\mu(t)}{\left\{\int\limits_a^b \left[f_n(x) - \sum\limits_{k=0}^{n-1}\varphi_k(x)\int\limits_a^b f_n(t)\varphi_k(t)\, d\mu(t)\right]^2 d\mu(x)\right\}^{1/2}}. \qquad (3)$$

Этот способ, с помощью которого функции $\varphi_n(x)$ можно эффективно представить как линейные комбинации функций $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_n(x)$, мы называем *общим способом ортогонализации*.

Общий способ ортогонализации предложен Е. Шмидтом [I]. Этот способ часто применяется при построении различных ортогональных систем.

Ряд $\sum c_n\psi_n(x)$, образованный формально из функций ортогональной системы $\{\psi_n(x)\}$ и из действительных чисел $c_0, c_1, \ldots$, называется *ортогональным*. Если, же по аналогии с коэффициентами Фурье, коэффициенты c_n представляются в виде

$$c_n = \frac{1}{\left\{\int\limits_a^b \psi_n^2(x)\, d\mu(x)\right\}^{1/2}} \int\limits_a^b f(x)\psi_n(x)\, d\mu(x),$$

то ряд $\sum c_n\psi_n(x)$ называется *ортогональным разложением функции* $f(x)$ и это соотношение обозначается следующим образом:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n\psi_n(x). \tag{4}$$

Числа $c_0, c_1, \ldots$ в этом случае называют *коэффициентами разложения функции* $f(x)$. Часто употребляемые выражения «*ряд Фурье*» и «*коэффициенты Фурье*» мы будем использовать специально для разложения по тригонометрической ортогональной системе

$$\{1;\ \cos nx, \sin nx\} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Между ортогональным разложением и ортогональным рядом имеется существенное различие. Например, частичные суммы разложения (4)

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k(x)$$

отличаются от частичных сумм всех других ортогональных рядов, образованных из $\{\varphi_n(x)\}$, следующим свойством минимальности:

1.1.2. *Пусть $f(x)$ есть L_μ^2-интегрируемая функция, а $\{\varphi_n(x)\}$ — произвольная ортонормированная система. Тогда среди всех линейных выражений вида*

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\varphi_k(x)$$

интеграл

$$I(S_n) = \int_a^b [f(x) - S_n(x)]^2 \, d\mu(x)$$

достигает своего наименьшего значения при $S_n(x) = s_n(x)$.

Непосредственно из ортонормальности выводим

$$I(S_n) = \int_a^b f^2(x)\, d\mu(x) - 2\sum_{k=0}^{n} a_k c_k + \sum_{k=0}^{n} a_k^2 =$$

$$= \int_a^b f^2(x)\, d\mu(x) + \sum_{k=0}^{n} (a_k - c_k)^2 - \sum_{k=0}^{n} c_k^2 .$$

Стоящее справа выражение имеет минимум тогда и только тогда, когда средний член обращается в нуль, т. е. когда $a_k = c_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, а это и означает, что $S_n(x) = s_n(x)$.

Важное свойство коэффициентов разложения L^2_μ-интегрируемой функции выражается неравенством Бесселя

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\, d\mu(x). \tag{5}$$

Доказательство этого неравенства вытекает непосредственно из очевидного соотношения

$$0 \leqslant \int_a^b [f(x) - s_n(x)]^2\, d\mu(x) = \int_a^b f^2(x)\, d\mu(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k^2 .$$

Из неравенства Бесселя сразу же получаем следующую теорему:

1.1.3. *Коэффициенты разложения* c_n *любой* L^2_μ-*интегрируемой функции стремятся к нулю при* $n \to \infty$.

Как видно из следующей теоремы, это свойство коэффициентов разложения очень важно для сходимости ортогональных рядов:

1.1.4. *Если ортонормированная система* $\{\varphi_n(x)\}$ *ограничена* μ-*почти всюду* (*т. е.* $|\varphi_n(x)| \leqslant M$ *для всех* n *и для* μ-*почти* *всех x), то условие $a_n \to 0$ необходимо для сходимости почти всюду ортогонального ряда $\sum a_n \varphi_n(x)$.*

Из предположения сходимости почти всюду следует, что $a_n \varphi_n(x) \to 0$ почти всюду. По известной теореме Егорова[1] можем считать, что $a_n \varphi_n(x) \to 0$ равномерно на множестве A, дополнение которого B имеет как угодно малую μ-меру $\varepsilon > 0$. Тогда из равномерной сходимости выводим соотношение

$$\lim_{n \to \infty} a_n \int_A \varphi_n^2(x)\, d\mu(x) = 0.$$

Кроме того, так как $|\varphi_n(x)| \leqslant M$, то для достаточно малого $\varepsilon > 0$, имеем

$$\int_A \varphi_n^2(x)\, d\mu(x) = \int_a^b \varphi_n^2(x)\, d\mu(x) - \int_B \varphi_n^2(x)\, d\mu(x) \geqslant 1 - M^2\varepsilon > \frac{1}{2}.$$

Поэтому заключаем, что $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

Теорема 1.1.2 доказана Грамом [1], которому был уже известен принцип ортогонализации. Теорема 1.1.4 доказана[2] Траншерелем [1]. В этой теореме существенно предположение ограниченности системы $\{\varphi_n(x)\}$. В самом деле, рассмотрим на интервале $[0, 1]$ систему функций

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n(n+1)} & \text{для} \quad x \in \left(\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}\right], \\ 0 & \text{для остальных} \quad x \in [0, 1]. \end{cases}$$

Очевидно, что $\{\varphi_n(x)\}$ является ортонормированной системой. Если выбрать коэффициенты a_n произвольно (не исключая даже случай $a_n \to \infty$), то ряд $\sum a_n \varphi_n(x)$ будет все-таки сходиться на всем интервале $[0, 1]$. Действительно, если x точка из $(0, 1]$, то x принадлежит одному и только одному интервалу $\left(\dfrac{1}{k+1}, \dfrac{1}{k}\right]$. Поэтому

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_k \varphi_k(x) = a_k \sqrt{k(k+1)},$$

и, стало быть, ряд $\sum a_k \varphi_k(x)$ сходится на $[0, 1]$.

---

[1] См., например: Рисс Ф. и Надь Б., Лекции по функциональному анализу, М., 1954, стр. 108.

[2] Эта теорема была также доказана в 1912 г. Приваловым И. И. (*Матем. сб.*, **29** (1914), стр. 182—185). — *Прим. ред.*

§ 2. Пространство L_μ^2. Теорема Рисса—Фишера. Полные ортогональные системы

Множество всех L_μ^2-интегрируемых функций можно превратить в метрическое пространство, которое обозначается через L_μ^2 или через $L_\mu^2(a, b)$, если нужно обратить внимание на интервал $[a, b]$ определения функций. Каждая L_μ^2-интегрируемая функция $f(x)$ и все функции, которые отличаются от $f(x)$ самое большее на μ-нуль-множестве, образуют в совокупности единственную точку $f \in L_\mu^2$. *Расстояние* между двумя точками $f \in L_\mu^2$ и $g \in L_\mu^2$ определяется формулой

$$\|f-g\| = \left\{\int_a^b [f(x)-g(x)]^2\, d\mu(x)\right\}^{1/2}.$$

Оно удовлетворяет общепринятым аксиомам расстояния: 1) $\|f-g\| = \|g-f\| \geqslant 0$; 2) $\|f-g\| = 0$ равносильно тому, что $f(x) = g(x)$ μ-почти всюду; 3) если f, g и h — три точки из L_μ^2, то справедливо неравенство $\|f-g\| \leqslant \|f-h\| + \|h-g\|$. Свойства 1) и 2) следуют непосредственно из введенного нами определения расстояния, в то время как 3) является следствием неравенства Шварца:

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\, d\mu(x) \leqslant \left\{\int_a^b f^2(x)\, d\mu(x) \int_a^b g^2(x)\, d\mu(x)\right\}^{1/2}. \qquad (6)$$

Докажем сначала неравенство (6). Положим

$$A = \int_a^b f^2(x)\, d\mu(x), \qquad B = \int_a^b |f(x)g(x)|\, d\mu(x), \qquad C = \int_a^b g^2(x)\, d\mu(x).$$

Так как для любого действительного числа z справедливо соотношение

$$Az^2 + 2Bz + C = \int_a^b [z|f(x)| + |g(x)|]^2\, d\mu(x) \geqslant 0,$$

то отсюда заключаем, что $AC - B^2 \geqslant 0$, а это как раз и есть неравенство Шварца (6).

Непосредственно из (6) выводится неравенство

$$\left\{\int_a^b [f(x)+g(x)]^2\,d\mu(x)\right\}^{1/2} \leqslant \left\{\int_a^b f^2(x)\,d\mu(x)\right\}^{1/2} + \left\{\int_a^b g^2(x)\,d\mu(x)\right\}^{1/2}.$$

Если в этом неравенстве мы напишем $f(x) - h(x)$ вместо $f(x)$ и $h(x) - g(x)$ вместо $g(x)$, то оно примет вид

$$\|f-g\| \leqslant \|f-h\| + \|h-g\|,$$

а это равносильно свойству 3), т. е. L_μ^2 действительно является метрическим пространством.

Отдельные точки $f \in L_\mu^2$ можно также рассматривать как векторы, выходящие из «нулевой точки» $\varphi(x) \equiv 0$ пространства L_μ^2. Тогда число $\|f\|$ выражает длину вектора $f \in L_\mu^2$. Скалярное произведение (f, g) двух векторов из L_μ^2 определяется равенством

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x)\,d\mu(x).$$

Можно показать, что число (f, g) удовлетворяет общепринятым аксиомам скалярного произведения.

Понятие ортогональности в векторном пространстве L_μ^2 имеет простой наглядный смысл: именно условие ортогональности (1) означает, что скалярное произведение (φ_m, φ_n) двух различных векторов из системы $\{\varphi_n\}$ равно нулю. По аналогии с векторами в пространстве Евклида это означает, что векторы этой системы расположены ортогонально друг другу. Если $\{\varphi_n\}$ — ортонормированная система, то ее элементы являются ортогональными единичными векторами.

Дальнейшие свойства пространства L_μ^2 и ортогональных систем из L_μ^2 получаются из следующей, крайне важной для теории сходимости ортогональных рядов теоремы Фату[1]:

1.2.1. *Обозначим через $\{f_n(x)\}$ последовательность положительных L_μ-интегрируемых функций, которая сходится*

[1] Вопросы, относящиеся к этой теореме и к теории L_μ^2-пространства, см. в книге Рисс Ф. и Надь Б., Лекции по функциональному анализу, М., 1954, стр. 49 и 66—91.

μ- почти всюду к функции $f(x)$. Если существует такая постоянная C, что

$$\int_a^b f_n(x)\,d\mu(x) \leqslant C \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

то предельная функция $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ также L_μ-интегрируема и справедливо неравенство

$$\int_a^b f(x)\,d\mu(x) \leqslant C.$$

В теории сходимости ортогональных рядов большую роль играет следующая теорема Б. Леви:

1.2.2. *Если $\{f_n(x)\}$ — монотонно возрастающая последовательность L_μ-интегрируемых функций, таких, что*

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,d\mu(x)\right| \leqslant C \qquad (n = 0, 1, \ldots),$$

то предельная функция $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ также L_μ-интегрируема и справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,d\mu(x) = \int_a^b f(x)\,d\mu(x).$$

В частности, если L_μ-интегрируемые функции $u_0(x), u_1(x), \ldots$ $\ldots, u_n(x), \ldots$ удовлетворяют условию

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b |u_n(x)|\,d\mu(x) < \infty,$$

то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ сходится (абсолютно) почти всюду.

Монотонно возрастающая последовательность $\{f_n(x) - f_0(x)\}$ имеет предельную функцию $f(x) - f_0(x)$ и удовлетворяет условию $f_n(x) - f_0(x) \geqslant 0$. Из наших предположений вытекает неравенство

$$\int_a^b [f_n(x) - f_0(x)]\, d\mu(x) \leqslant \lim_{n\to\infty} \int_a^b [f_n(x) - f_0(x)]\, d\mu(x) \leqslant$$
$$\leqslant C + \int_a^b |f_0(x)|\, d\mu(x).$$

Отсюда, в силу 1.2.1, мы получаем оценку

$$\int_a^b [f(x) - f_0(x)]\, d\mu(x) \leqslant \lim_{n\to\infty} \int_a^b [f_n(x) - f_0(x)]\, d\mu(x).$$

Но из условия $f(x) - f_0(x) \geqslant f_n(x) - f_0(x)$ следует противоположное неравенство. Таким образом, доказано соотношение

$$\int_a^b [f(x) - f_0(x)]\, d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b [f_n(x) - f_0(x)]\, d\mu(x),$$

которое эквивалентно нашему утверждению. Если теперь положить $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} |u_k(x)|$, то вторая часть теоремы 1.2.2 следует из только что доказанной первой части.

Из 1.2.1 легко следует, что пространство L^2_μ полно в смысле теории множеств, т. е. любая фундаментальная последовательность Коши $\{f_n\}$ из L^2_μ имеет одну предельную точку. При этом $\{f_n\}$ называется *фундаментальной последовательностью Коши*, если $\|f_m - f_n\| \to 0$ при $m, n \to \infty$.

1.2.3. *Чтобы последовательность L^2_μ-интегрируемых функций $\{f_n(x)\}$ сходилась в смысле метрики L^2_μ к некоторой функции $f(x) \in L^2_\mu$, необходимо и достаточно выполнение условия $\|f_m - f_n\| \to 0$ при $m, n \to \infty$.*

Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Если при $m, n \to \infty$ выполняется условие $\|f_m - f_n\| \to 0$, то из последовательности $\{f_n\}$ выбираем подпоследовательность $\{f_{k_n}\}$ так, чтобы

$$\|f_{k_{n+1}} - f_{k_n}\| < \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Из неравенства Шварца (6) получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b |f_{k_{n+1}}(x) - f_{k_n}(x)|\,d\mu(x) \leqslant \{\mu(b) - \mu(a)\}^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \|f_{k_{n+1}} - f_{k_n}\| \leqslant$$
$$\leqslant \{\mu(b) - \mu(a)\}^{1/2},$$

а потому из теоремы 1.2.2 заключаем, что почти всюду существует предельная функция

$$f(x) = f_{k_0}(x) + \sum_{n=0}^{\infty} [f_{k_{n+1}}(x) - f_{k_n}(x)].$$

Далее из 1.2.1, принимая во внимание свойство 3) для расстояния, мы находим

$$\|f\| \leqslant \|f_{k_0}\| + \sum_{n=0}^{\infty} \|f_{k_{n+1}} - f_{k_n}\| \leqslant \|f_{k_0}\| + 1.$$

Стало быть, функция $f(x)$ также принадлежит L^2_μ и, очевидно, удовлетворяет условию $\|f - f_n\| \to 0$.

В этой теореме содержится сущность фундаментальной теоремы Рисса—Фишера, которую мы приведем в форме, наиболее употребительной в теории ортогональных рядов:

1.2.4. *Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — произвольная ортонормированная система, а $\{c_n\}$ — некоторая последовательность действительных чисел. Для того чтобы $\{c_n\}$ являлась последовательностью коэффициентов разложения некоторой L^2_μ-интегрируемой функции $f(x)$, необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 < \infty. \tag{7}$$

Причем, в случае выполнения (7) найдется такая функция $f(x) \in L^2_\mu$, что частичные суммы ее разложения $s_n(x)$ сходятся в метрике L^2_μ к функции $f(x)$.

Необходимость условия (7) следует из неравенства Бесселя (5). Обратно, если выполнено (7), то выберем возрастающую последовательность индексов $\{\nu_m\}$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\sum_{k=\nu_m+1}^{\nu_{m+1}} c_k^2 \leqslant \frac{1}{4^{m+1}}. \tag{8}$$

Тогда по теореме 1.2.3 функция

$$f(x) = s_{\nu_0}(x) + \sum_{m=0}^{\infty} [s_{\nu_{m+1}}(x) - s_{\nu_m}(x)]$$

является L_μ^2-интегрируемой. Так как, в силу (8), стоящий справа ряд можно почленно интегрировать, то из ортогональности системы $\{\varphi_k\}$ следует равенство

$$\int_a^b f(x)\, \varphi_k(x)\, d\mu(x) = c_k,$$

т. е. числа $c_0, c_1, \ldots$ являются коэффициентами разложения функции $f(x)$. Далее, согласно (8), для любого индекса n, заключенного между ν_m и ν_{m+1}, справедлива оценка

$$\|f - s_n\| \leqslant \|s_n - s_{\nu_m}\| + \sum_{j=m}^{\infty} \|s_{\nu_{j+1}} - s_{\nu_j}\| =$$

$$= \left\{\sum_{k=\nu_m+1}^{n} c_k^2\right\}^{1/2} + \sum_{j=m}^{\infty} \left\{\sum_{k=\nu_j+1}^{\nu_{j+1}} c_k^2\right\}^{1/2} \leqslant \frac{1}{2^{m+1}} + \sum_{j=m}^{\infty} \frac{1}{2^{j+1}} \to 0,$$

и теорема полностью доказана.

Полнота ортогональной системы. Если числа $c_0, c_1, \ldots$ удовлетворяют условию (7), то, в силу теоремы Рисса—Фишера, их можно рассматривать как «координаты» некоторой «точки» $f \in L_\mu^2$. Это, конечно, не означает, что имеется только одна «точка» в L_μ^2 с такими «координатами», так как пространство, построенное на векторах $\{\varphi_n\}$, не обязательно совпадает с пространством L_μ^2 (как, например, пространство, построенное на двух ортогональных векторах в трехмерном пространстве Евклида является лишь плоскостью). Но если пространство, построенное на векторах системы $\{\varphi_n\}$, совпадает с пространством L_μ^2, то систему $\{\varphi_n(x)\}$ можно рассматривать в некотором смысле полной. Дадим следующее определение: система функций $\{g(x)\}$ из L_μ^2 (не обязательно ортогональная или счетная) называется *полной*[1] (в L_μ^2), если существует только одна функция $f \in L_\mu^2$, для которой скалярные произ-

[1] Это определение некорректно, так как условие (7) автоматически влечет счетность системы $\{g(x)\}$. Поэтому за определение полной системы следует брать нижеследующее пояснение автора. — *Прим. ред.*

ведения

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\, g(x)\, d\mu(x)$$

совпадают с заданной системой чисел, удовлетворяющей условию (7). Иначе говоря, система $\{g(x)\}$ называется полной, если из равенства $(f, g) = 0$ для всех $g(x)$ следует, что функция $f(x)$ μ-почти всюду равна нулю. Простой признак полноты ортонормированной системы дается равенством Парсеваля:

$$\int_a^b f^2(x)\, d\mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2, \tag{9}$$

где $c_0, c_1, \ldots$ — коэффициенты разложения функции $f(x)$. А именно, имеет место следующая теорема:

1.2.5. *Чтобы ортонормированная система $\{\varphi_n(x)\}$ была полной, необходимо и достаточно выполнение равенства Парсеваля* (9) *для всех функций $f \in L^2_\mu$.*

Необходимость доказывается с помощью теоремы Рисса—Фишера, согласно которой имеется функция $F \in L^2_\mu$, удовлетворяющая условию $\|F - s_n\| \to 0$, где $s_n(x)$ означает n-ю частичную сумму разложения функции $f(x)$. Тогда из неравенств

$$\|F\| \leqslant \|s_n\| + \|F - s_n\| = \left\{\sum_{k=0}^{n} c_k^2\right\}^{\frac{1}{2}} + \|F - s_n\| \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

следует оценка $\|F\|^2 \leqslant \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k^2$, откуда, применяя неравенство Бесселя (5), получаем соотношение

$$\|F\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^2.$$

Так как, по предположению, система $\{\varphi_n(x)\}$ полна и числа $c_0, c_1, \ldots$ являются коэффициентами разложения как функции $F(x)$, так и функции $f(x)$, то $f(x) = F(x)$ μ-почти всюду. Поэтому

$$\|f\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^2,$$

т. е. справедливо равенство Парсеваля (9).

Достаточность доказывается просто. Действительно, если все коэффициенты разложения функции $f \in L^2_\mu$ равны нулю, то из равенства Парсеваля следует, что $\|f\|^2 = 0$ и, как следствие, $f(x) = 0$ μ-почти всюду. Стало быть, система $\{\varphi_n(x)\}$ является полной.

Другая характеристика полной ортонормированной системы дается в следующей теореме:

1.2.6. *Для полноты ортонормированной системы $\{\varphi_n(x)\}$ в L^2_μ необходимо и достаточно, чтобы для каждого элемента $f(x)$ из плотного в L^2_μ множества E можно было образовать линейные комбинации*

$$S_{m_n}(x) = \sum_{k=0}^{m_n} a_k^{(n)} \varphi_k(x) \qquad (0 < m_n < m_{n+1})$$

такие, чтобы последовательность $\{S_{m_n}(x)\}$ сходилась в смысле метрики L^2_μ к функции $f(x) \in E$.

Необходимость условия теоремы, в силу 1.2.5, очевидна. Но легко видеть, что это условие также и достаточно. В самом деле, так как E плотно в L^2_μ, то для каждой $f \in L^2_\mu$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется $f_n \in E$ такая, что $\|f - f_n\| < \varepsilon$. Далее, по предположению, для любой $f_n \in E$ имеется $S_{m_n}(x)$ такая, что $\|f_n - S_{m_n}\| \leqslant 2\varepsilon$. Стало быть, $\|f - S_{m_n}\| < 2\varepsilon$. Поэтому из теоремы 1.1.2 вытекает оценка

$$\|f - s_{m_n}\| \leqslant \|f - S_{m_n}\| < 2\varepsilon,$$

где через $s_n(x)$ обозначены частичные суммы разложения $f(x)$. Следовательно,

$$\|f\| \leqslant \|s_{m_n}\| + \|f - s_{m_n}\| < \left\{\sum_{k=0}^{m_n} c_k^2\right\}^{1/2} + 2\varepsilon \to \left\{\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2\right\}^{1/2} + 2\varepsilon,$$

и, применяя неравенство Бесселя (5), получаем соотношение

$$\|f\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^2.$$

Таким образом, наше утверждение есть следствие из теоремы 1.2.5.

Полнота ортонормированной системы имеет также значение и для теории сходимости ортогональных разложений. Так, например, если разложение данной L^2_μ-интегрируемой функции $f(x)$ по надлежащей ортонормированной системе сходится почти всюду, то полнота уже гарантирует то, что сумма ряда представляет $f(x)$ почти всюду. Действительно, из полноты системы следует соотношение $\|f - s_n\| \to 0$, а потому, как и выше, имеется подпоследовательность частичных сумм $\{s_{i_n}(x)\}$, сходящаяся к $f(x)$ почти всюду. Итак, сумма ряда совпадает с $f(x)$ почти всюду. Это обстоятельство повышает значение того факта, что каждая ортогональная система может быть пополнена:

1.2.7. *Любая ортогональная система $\{\varphi_n(x)\}$ из L^2_μ может быть пополнена до ортогональной системы, полной в L^2_μ.*

Через G обозначим множество всех функций $g \in L^2_\mu$, которые ортогональны к функциям системы $\{\varphi_n(x)\}$. Очевидно, что объединение множеств $\{\varphi_n\} \cup G$ полно. Далее, пространство L^2_μ *сепарабельно*, т. е. L^2_μ содержит счетное всюду плотное подмножество. В самом деле, каждую функцию $f \in L^2_\mu$ можно сколь угодно хорошо приблизить в смысле метрики L^2_μ последовательностью непрерывных функций $\{f_n(x)\}$[1]. В силу теоремы Вейерштрасса, для каждой $f_n(x)$ и любого $\varepsilon_n > 0$ существует полином $P_n(x)$ с рациональными коэффициентами, удовлетворяющий условию $\|f_n - P_n\| < \varepsilon_n$. Это означает, что $\|f - P_n\| \leqslant \|f - f_n\| + \|f_n - P_n\| \to 0$, т. е. счетное множество полиномов с рациональными коэффициентами плотно в L^2_μ. Из сепарабельности пространства L^2_μ следует, что множество G содержит всюду плотную счетную часть $\{\psi_n\}$. Мы утверждаем, что $\{\varphi_n\} \cup \{\psi_n\}$ является полной системой в L^2_μ. Предположим противное. Тогда имеется $f \in L^2_\mu$ такая, что $(f, \varphi_n) = 0$, $(f, \psi_n) = 0$ для $n = 0, 1, \ldots$, и, тем не менее, существует $g \in G$, для которой $(f, g) \neq 0$. Учитывая, что система $\{\psi_n\}$ плотна в G, выберем из $\{\psi_n\}$ подпоследовательность $\{\psi_{k_n}\}$ так, чтобы $\|g - \psi_{k_n}\| \to 0$. Но тогда из неравенства Шварца (6) и из условия $(f, \psi_{k_n}) = 0$ следует соотношение

$$|(f, g)| = |(f, g - \psi_{k_n})| \leqslant \|f\| \cdot \|g - \psi_{k_n}\| \to 0,$$

а это противоречит предположению $(f, g) \neq 0$. Следовательно, система функций $\{\varphi_n\} \cup \{\psi_n\}$ является полной. Если теперь из системы $\{\psi_n(x)\}$ мы выбросим все линейно зависимые члены, то оставшаяся от $\{\varphi_n\} \cup \{\psi_n\}$ система будет полной. По теореме 1.1.1 из этой системы можно образовать ортонормированную систему, которая также является полной.

[1] См., например, Камке Э., Интеграл Лебега — Стильтьеса, М., 1959, стр. 219.

Теоремы этого параграфа являются классическими. Фундаментальные теоремы 1.2.3 и 1.2.4 доказаны почти одновременно и независимо друг от друга Ф. Риссом [2] и Е. Фишером [1]. Можно без преувеличения утверждать, что теорема Рисса—Фишера послужила отправной точкой для построения как общей теории ортогональных рядов, так и теории гильбертовых пространств и функционального анализа. Теорема 1.2.5 в общем случае доказана Фишером [1] и Стекловым [1], а для рядов Фурье была доказана ранее Фату [1]. Теоремы 1.2.6 и 1.2.7, по существу, установлены Е. Шмидтом [1].

Если рассматривать разложения $\sum c_n \varphi_n(x)$ и $\sum d_n \varphi_n(x)$ функций $f \in L_\mu^2$ и $g \in L_\mu^2$ по полной ортонормированной системе $\{\varphi_n(x)\}$, то получается обобщенная форма равенства Парсеваля (9). В самом деле, применяя равенство Парсеваля сначала к сумме $f+g$, а затем к разности $f-g$ и вычитая, мы получаем равенство

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, d\mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, d_n.$$

Справедливость этого соотношения для всех функций $f \in L_\mu^2$ и $g \in L_\mu^2$ является, в силу 1.2.5, необходимым и достаточным условием для полноты ортонормированной системы $\{\varphi_n(x)\}$.

Теорема Пифагора утверждает, что квадрат длины вектора, выходящего из начала n-мерного евклидова пространства, равен сумме квадратов его проекций на координатные оси. Следовательно, если через $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ обозначим единичные векторы координатных осей, через $\|f\|$ — длину выходящего из начала вектора f и через (f, φ_k) — скалярное произведение f и φ_k, то теорема Пифагора выражается соотношением $\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (f, \varphi_k)^2$. Равенство Парсеваля $\|f\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (f, \varphi_k)^2$ есть обобщение теоремы Пифагора на бесконечномерное пространство L_μ^2. Таким образом, пространство L_μ^2 имеет до некоторой степени евклидовый характер.

Полнота тригонометрической системы. Через $\{1; \cos nx, \sin nx\}$ будем обозначать тригонометрическую ортогональную систему $1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots$ Важен тот факт, что система $\{1; \cos nx, \sin nx\}$ является полной. Можно дать различные доказательства полноты этой системы, многие из которых элементарны. Мы предпочтем доказательство, основанное на теореме Фейера, которая важна и сама по себе.

1.2.8. *Арифметические средние частичных сумм ряда Фурье*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

2π-периодической непрерывной функции $f(x)$ сходятся равномерно к функции $f(x)$.

Из элементарной теории рядов Фурье хорошо известно, что n-ю частичную сумму $s_n(x)$ ряда Фурье можно представить в форме

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(t-x)\right] dt =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\frac{\cos n(t-x) - \cos(n+1)(t-x)}{\sin^2\frac{t-x}{2}}\, dt.$$

Поэтому для n-х арифметических средних $\sigma_n(x)$ от частичных сумм $s_n(x)$ мы имеем выражение

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} s_n(x) = \frac{1}{2(n+1)\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\frac{\sin^2(n+1)\frac{t-x}{2}}{\sin^2\frac{t-x}{2}}\, dt.$$

Если положить здесь $f(t) \equiv 1$, то стоящий справа интеграл имеет значение 1, а потому, учитывая периодичность подинтегральной функции, находим

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi(n+1)}\int_0^{2\pi} |f(t) - f(x)|\,\frac{\sin^2(n+1)\frac{t-x}{2}}{\sin^2\frac{t-x}{2}}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi(n+1)}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)|\left(\frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt.$$

Интервал интегрирования $[-\pi, \pi]$ разобьем на три части, $[-\pi, -\delta]$, $[-\delta, \delta]$, $[\delta, \pi]$, с $\delta > 0$ настолько малым, чтобы для $t \in [-\delta, \delta]$ разность $|f(t+x) - f(x)|$ была бы меньше любого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$. Замечая, что для всех $t \in [-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$ подинтегральное выражение не превосходит величины

$$\frac{\max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 2\pi} |f(t+x) - f(x)|}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} = K(\delta),$$

для достаточно больших n получим оценку

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{K(\delta)}{n+1} + \frac{\varepsilon}{2\pi(n+1)} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} \right)^2 dt < 2\varepsilon,$$

которая соответствует утверждению 1.2.8.

Так как множество непрерывных функций периода 2π плотно в $L^2_\mu(0, 2\pi)$ и, следовательно, любая 2π-периодическая функция $f \in L^2_\mu(0, 2\pi)$ может быть как угодно хорошо приближена в смысле метрики L^2_μ непрерывными функциями, то полнота тригонометрической системы $\{1; \cos nx, \sin nx\}$ в $L^2_\mu(0, 2\pi)$ является непосредственным следствием из теорем 1.2.6 и 1.2.8.

Из полноты тригонометрической системы $\{1; \cos nx, \sin nx\}$ в $L^2_\mu(0, 2\pi)$ следует, что каждая из систем $\{1; \cos nx\}$ и $\{\sin nx\}$ полна в $L^2_\mu(0, \pi)$. В самом деле, любую непрерывную на $[0, \pi]$ функцию $f(x)$, для которой $f(0) = 0$, можно продолжить до непрерывной на $[-\pi, \pi]$ четной или нечетной функции с периодом 2π. По теореме Фейера 1.2.8 продолженная функция является пределом равномерно сходящейся последовательности арифметических средних ее ряда Фурье, т. е. пределом равномерно сходящейся последовательности косинус- или синус-полиномов. Так как множество непрерывных на $[0, \pi]$ функций $f(x)$ периода 2π, для которых $f(0) = 0$ плотно в $L^2_\mu(0, \pi)$, то полнота системы $\{1; \cos nx\}$ или $\{\sin nx\}$ есть следствие из 1.2.6.

Теорема 1.2.8 была доказана Фейером [1] и [2] уже в 1900 г. Она послужила толчком для развития современной теории сходимости рядов Фурье и в настоящее время является классической. Мы привели здесь ее доказательство только потому, что оно типично для теории сходимости рассматриваемых нами ниже сингулярных интегралов.

При доказательстве полноты тригонометрической системы можно было бы опираться не на теорему Фейера, а на теорему Дирихле—Жордана и сходимости рядов Фурье функций с ограниченной вариацией. Кроме того, доказательство полноты может быть получено из общей теоремы Реньи [1]. Для формулировки этой теоремы введем следующее определение: конечную или счетную бесконечную систему функций $\{f_n(x)\}$ назовем *максимальной на* $[a, b]$, если $[a, b]$ содержит такое μ-нуль-множество N, что для любых двух точек x_1 и x_2 из $[a, b] - N$ имеется по крайней мере один индекс n, для которого $f_n(x_1) \neq f_n(x_2)$. Теорема Реньи гласит:

Пусть $\{f_n(x)\}$ *— максимальная на* $[a, b]$ *система измеримых функций, ограниченных в совокупности. Тогда система произведений*

$$\{f_1^{m_1}(x) \cdot f_2^{m_2}(x) \ldots f_n^{m_n}(x)\} \qquad (m_k = 0, 1, \ldots; \ k = 1, 2, \ldots, n; \ n = 1, 2, \ldots)$$

полна в $L^2_\mu(a, b)$.

Если эту теорему применить к двучленной системе $\cos x$ и $\sin x$, то после удаления линейно зависимых членов получаем, что система функций $\{\cos^n x, \sin nx \cdot \cos^n x\}$ полна в $L^2_\mu(0, 2\pi)$, откуда легко следует полнота тригонометрической системы в $L^2_\mu(0, 2\pi)$.

§ 3. Ортогональные полиномы

Хотя по рекуррентной формуле (3) и можно образовывать самые различные ортонормированные системы, мы все же особо рассмотрим некоторые специальные ортонормированные системы, важные как в теоретических исследованиях, так и в приложениях. Одну из таких систем мы получим, если линейно независимую на интервале $[a, b]$ систему $\{x^n\}$ целых степеней переменной x ортогонализируем по мере $\mu(x)$ способом, описанным в 1.1.1, с помощью формулы (3). Тогда для $\varphi_n(x)$ получим полином степени n, знак которого определяем так, чтобы коэффициент при x^n (главный коэффициент) был положителен. Обозначим этот полином через $p_n(x)$ и систему $\{p_n(x)\}$ будем называть *ортонормированной по мере* $\mu(x)$ (или *относительно веса* $\varrho(x)$) *полиномиальной системой*. Это название можно обосновать следующей теоремой:

1.3.1. *Единственной ортонормированной по мере* $\mu(x)$ *системой* $\{\varphi_n(x)\}$, *в которой* $\varphi_n(x)$ *есть полином* n*-й степени с положительным главным коэффициентом, является система* $\{p_n(x)\}$.

Для доказательства этого мы заметим, что каждую степень x^k можно представить в виде

$$x^k = \beta_0 p_0(x) + \beta_1 p_1(x) + \ldots + \beta_k p_k(x),$$

а поэтому и полином n-й степени $\varphi_n(x)$ с помощью $p_k(x)$ может быть представлен в виде

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k p_k(x).$$

С другой стороны, полиномы $p_k(x)$ можно выразить линейно через полиномы $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x)$. Отсюда следует, что все полиномы $p_k(x)$ при $k < n$ ортогональны полиному $\varphi_n(x)$. Поэтому, умножая на $p_\nu(x)$ $(\nu < n)$ обе части равенства для $\varphi_n(x)$, интегрируя и учитывая ортогональность функций $p_\nu(x)$ и $\varphi_n(x)$ при любом $\nu = 0, 1, \ldots, n - 1$, получаем

$$\sum_{k=0}^{n} \gamma_k \int_a^b p_k(x) p_\nu(x)\, d\mu(x) = \gamma_\nu = \int_a^b \varphi_n(x) p_\nu(x)\, d\mu(x) = 0.$$

Стало быть $\gamma_0 = \gamma_1 = \ldots = \gamma_{n-1} = 0$, т. е. $\varphi_n(x) = \gamma_n p_n(x)$, и следовательно

$$1 = \int_a^b \varphi_n^2(x)\, d\mu(x) = \gamma_n^2 \int_a^b p_n^2(x)\, d\mu(x) = \gamma_n^2.$$

Таким образом, $\gamma_n = \pm 1$, а так как, по предположению, $\varphi_n(x)$ и $p_n(x)$ имеют положительные главные коэффициенты, то возможен только случай $\gamma_n = 1$, т. е. $\varphi_n(x) = p_n(x)$, и наше утверждение доказано.

Из теоремы Вейерштрасса и из 1.2.6 заключаем, что система полиномов полна в L_μ^2. Так как любой полином n-й степени можно представить как линейную комбинацию ортонормированных по мере $\mu(x)$ полиномов $p_0(x)$, $p_1(x), \ldots, p_n(x)$, то справедлива следующая теорема:

1.3.2. *Ортонормированная по мере $\mu(x)$ полиномиальная система $\{p_n(x)\}$ полна в L_μ^2.*

Ортонормированная по мере $\mu(x)$ полиномиальная система $\{p_n(x)\}$ обладает рядом интересных экстремальных свойств. Например, высказанное в 1.1.2 и справедливое для всех ортонормированных систем свойство минимальности в этом случае можно усилить следующим образом:

1.3.3. *На множестве всех полиномов $\Pi_n(x)$ степени не выше n интеграл*

$$\int_a^b [f(x) - \Pi_n(x)]^2 \, d\mu(x)$$

достигает своего минимума для полинома $\Pi_n(x) = s_n(x)$, где через $s_n(x)$ обозначена n-я частичная сумма разложения функции $f(x)$ по полиномам $p_n(x)$:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(x).$$

Так как $\Pi_n(x)$ можно представить в форме

$$\Pi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k p_k(x),$$

то утверждение теоремы следует непосредственно из 1.1.2.

В дальнейшем через α_n мы будем обозначать главный коэффициент многочлена $p_n(x)$, а через $\beta_k^{(n)}$ — его остальные коэффициенты, т. е.

$$p_n(x) = \alpha_n x^n + \beta_{n-1}^{(n)} x^{n-1} + \ldots + \beta_0^{(n)} \quad (\alpha_n > 0).$$

Нужно отметить, что среди всех полиномов n-й степени с главным коэффициентом α_n полином $p_n(x)$ наименее удален от нулевой точки в метрике пространства L_μ^2. Это можно высказать в виде следующего свойства минимальности системы:

1.3.4. *На множестве всех полиномов n-й степени с главным коэффициентом* 1 *интеграл*

$$\int_a^b \Pi_n^2(x) \, d\mu(x)$$

достигает своего минимума для полинома $\Pi_n(x) = \frac{p_n(x)}{\alpha_n}$.

Полином $\Pi_n(x)$ представим в виде линейной комбинации полиномов $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_n(x)$:

$$\Pi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k p_k(x).$$

Сравнивая главные коэффициенты в обеих частях этого равенства, мы видим, что $\gamma_n = \frac{1}{a_n}$. Применяя равенство Парсеваля, имеем

$$\int_a^b \Pi_n^2(x)\, d\mu(x) = \frac{1}{a_n^2} + \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k^2,$$

и стоящее справа выражение достигает минимума при $\gamma_0 = \gamma_1 = \ldots = \gamma_{n-1} = 0$ или, другими словами, при $\Pi_n(x) = \frac{p_n(x)}{a_n}$, как мы и утверждали.

В стороне от доказанных двух свойств минимальности стоит следующее свойство максимума системы $\{p_n(x)\}$:

1.3.5. *Точная верхняя грань значений квадратов $\Pi_n^2(x)$ всех полиномов $\Pi_n(x)$ степени не выше n, взятых в точке $x_0 \in [a, b]$ и удовлетворяющих условию*

$$\int_a^b \Pi_n^2(x)\, d\mu(x) \leqslant 1,$$

равна $\sum_{k=0}^{n} p_k^2(x_0)$.

Применяя неравенство Коши к разложению $\Pi_n(x)$ по системе полиномов $\{p_n(x)\}$, находим

$$\Pi_n^2(x) \leqslant \sum_{k=0}^{n} \gamma_k^2 \sum_{k=0}^{n} p_k^2(x),$$

а используя интегральное условие на $\Pi_n(x)$, выводим неравенство $\sum_{k=0}^{n} \gamma_k^2 \leqslant 1$; отсюда ясно, что величина $\sum_{k=0}^{n} p_k^2(x_0)$ является верхней гранью значений $\Pi_n^2(x_0)$. Кроме того, эта верхняя грань действительно достигается для полинома[1]

$$\Pi_n(x) = \frac{\sum_{k=0}^{n} p_k(x_0) p_k(x)}{\left\{\sum_{k=0}^{n} p_k^2(x_0)\right\}^{1/2}},$$

[1] Так как $p_0(x) = c > 0$, то знаменатель отличен от нуля в любой точке $x_0 \in [a, b]$.

который, как это нетрудно вывести из ортонормальности, удовлетворяет требуемому интегральному условию.

Формула Кристоффеля—Дарбу. Ортонормированные по мере $\mu(x)$ полиномы $p_n(x)$ можно вычислять последовательно, ибо между ними имеется следующее рекуррентное соотношение:

$$\frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}} p_{k+1}(x) = (x - \gamma_k)\, p_k(x) - \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} p_{k-1}(x), \tag{10}$$

где γ_k легко подсчитываемая постоянная, а через $\alpha_{k-1}, \alpha_k, \alpha_{k+1}$ обозначены, как и выше, главные коэффициенты соответствующих ортонормированных полиномов.

Для доказательства этого соотношения разложим полином $xp_k(x)$ степени $k+1$ по функциям $\{p_n(x)\}$:

$$xp_k(x) = \sum_{\nu=0}^{k+1} \gamma_\nu p_\nu(x).$$

Умножая обе части этого равенства на $p_m(x)$ $(m \leqslant k-2)$ и интегрируя, мы замечаем, что для $m \leqslant k-2$ степень полинома $xp_m(x)$ не выше $k-1$ и поэтому интеграл слева равен нулю, в то время как для интеграла справа получаем значение γ_m. Таким образом, $\gamma_m = 0$ для $m \leqslant k-2$, а потому

$$xp_k(x) = \gamma_{k-1}p_{k-1}(x) + \gamma_k p_k(x) + \gamma_{k+1}p_{k+1}(x).$$

Так как в обеих частях этого равенства стоят полиномы $(k+1)$-й степени, то, сравнивая коэффициенты при x^{k+1}, находим

$$\gamma_{k+1} = \frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}},$$

и, стало быть,

$$\frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}} p_{k+1}(x) = (x - \gamma_k)\, p_k(x) - \gamma_{k-1}p_{k-1}(x).$$

Умножая теперь это равенство на $p_{k-1}(x)$ и интегрируя, мы получаем

$$\gamma_{k-1} = \int_a^b xp_k(x)\, p_{k-1}(x)\, d\mu(x).$$

Отсюда, в силу соотношения

$$xp_{k-1}(x) = \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} p_k(x) + q_{k-1}(x),$$

где $q_{k-1}(x)$ есть полином $(k-1)$-й степени, мы в качестве следствия выводим равенство

$$\gamma_{k-1} = \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} \int_a^b p_k^2(x)\, d\mu(x) + \int_a^b p_k(x)\, q_{k-1}(x)\, d\mu(x) = \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k},$$

чем и завершается доказательство (10).

Из (10) легко выводится чрезвычайно важная для теории сходимости разложений по ортогональным полиномам ф о р м у л а К р и с т о ф ф е л я—Д а р б у:

$$\sum_{k=0}^{n} p_k(x)\, p_k(t) = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \frac{p_n(x)\, p_{n+1}(t) - p_n(t)\, p_{n+1}(x)}{t - x}. \tag{11}$$

В самом деле, если умножим (10) на $p_k(t)$ и вычтем отсюда аналогичное равенство, в котором t заменено на x, а x на t, то получим

$$\frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}} [p_k(x)\, p_{k+1}(t) - p_k(t)\, p_{k+1}(x)] =$$
$$= (t - x)\, p_k(t)\, p_k(x) + \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} [p_{k-1}(x)\, p_k(t) - p_{k-1}(t)\, p_k(x)].$$

Это равенство справедливо для $k = 1, 2, \ldots$, а если положим $p_{-1}(x) \equiv 0$, то справедливо и для $k = 0$. Суммируя все эти соотношения, находим

$$(t - x) \sum_{k=0}^{n} p_k(t)\, p_k(x) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \left\{ \frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}} [p_k(x)\, p_{k+1}(t) - p_k(t)\, p_{k+1}(x)] - \right.$$
$$\left. - \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} [p_{k-1}(x)\, p_k(t) - p_{k-1}(t)\, p_k(x)] \right\} =$$
$$= \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} [p_n(x)\, p_{n+1}(t) - p_n(t)\, p_{n+1}(x)],$$

а это и есть формула Кристоффеля—Дарбу.

Теорема о сходимости разложений по ортогональным полиномам. Формула Кристоффеля—Дарбу указывает на некоторое сходство разложений по ортогональным полиномам с рядами Фурье. Из этой формулы можно вывести теорему о сходимости, которая допускает различные применения и имеет классический аналог в теории рядов Фурье. Будем говорить, что в точке ξ функция $f(x)$ удовлетворяет *условию Дини—Липшица порядка* α, если для всех достаточно малых значений $|h|$ выполняется неравенство

$$|f(\xi+h)-f(\xi)| \leqslant \frac{K}{|\log|h||^{\alpha}} \quad (K = \text{const} > 0). \qquad (12)$$

Тогда указанная в подзаголовке теорема формулируется следующим образом:

1.3.6. *Если в точке* $\xi \in (a, b)$ *функция* $f \in L^2_{\varrho(x)}$ *удовлетворяет условию Дини—Липшица порядка* $\alpha > 1$ *и если в окрестности точки* ξ *как весовая функция* $\varrho(x)$, *так и ортонормированная с весом* $\varrho(x)$ *полиномиальная система* $\{p_n(x)\}$ *ограничены, то разложение*

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, p_n(x)$$

сходится в точке ξ *к значению* $f(\xi)$. *Если указанные условия выполняются равномерно на всем подинтервале* $[a_1, b_1] \subset \subset [a, b]$, *то разложение сходится равномерно к* $f(x)$ *на любом внутреннем к* $[a_1, b_1]$ *подинтервале.*

В самом деле, если рассмотрим разность

$$s_n(\xi)-f(\xi) = \int_a^b [f(t)-f(\xi)]\,\varrho(t)\sum_{k=0}^{n} p_k(t)\,p_k(\xi)\,dt,$$

то, используя формулу Кристоффеля—Дарбу, получим:

$$s_n(\xi)-f(\xi) =$$

$$= \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\int_a^b [f(t)-f(\xi)]\,\varrho(t)\,\frac{p_n(\xi)\,p_{n+1}(t)-p_n(t)\,p_{n+1}(\xi)}{t-\xi}\,dt =$$

$$= \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\left(\int_a^{\xi-\delta} + \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} + \int_{\xi+\delta}^{b}\right), \qquad (13)$$

где δ выбрано столь малым, что на интервале $[\xi-\delta, \xi+\delta]$ функции $|p_n(t)|$, $|p_{n+1}(t)|$ и $\varrho(t)$ ограничены абсолютной константой C, а $f(t)$ удовлетворяет условию Дини—Липшица (12). Такой выбор возможен в силу наших предположений.

Первый и третий интегралы можно оценить следующим образом: так как $f \in L^2_{\varrho(x)}$, то функция

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t \in [\xi - \delta, \ \xi + \delta], \\ \dfrac{f(t) - f(\xi)}{t - \xi} & \text{при} \quad t \in [a, \xi - \delta) \cup (\xi + \delta, b] \end{cases}$$

является $L^2_{\varrho(x)}$-интегрируемой и по теореме 1.1.3 имеем

$$\int_a^b F(t)\, \varrho(t)\, p_k(t)\, dt \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Следовательно, для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ и для всех достаточно больших n справедливы оценки

$$\left| \int_a^{\xi-\delta} \right| < \varepsilon \left\{ |p_n(\xi)| + |p_{n+1}(\xi)| \right\} \leqslant 2\varepsilon\, C, \tag{14}$$

$$\left| \int_{\xi+\delta}^{b} \right| < \varepsilon \left\{ |p_n(\xi)| + |p_{n+1}(\xi)| \right\} \leqslant 2\varepsilon C. \tag{15}$$

Оценим теперь дробь $\dfrac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}$. Прежде всего запишем

$$\int_a^b \varrho(t)\, p_{n+1}(t)\, t p_n(t)\, dt = \\ = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \int_a^b \varrho(t)\, p_{n+1}^2(t)\, dt + \int_a^b \varrho(t)\, p_{n+1}(t)\, q_n(t)\, dt,$$

где $q_n(t)$ есть полином степени не выше n, в силу чего последний интеграл обращается в нуль. Далее, применяя неравенство Шварца (6), выводим

$$\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \leqslant \int_a^b \varrho(t) |p_{n+1}(t)|\, |t p_n(t)|\, dt \leqslant \\ \leqslant \max(|a|, |b|) \left\{ \int_a^b \varrho(t)\, p_{n+1}^2(t)\, dt \int_a^b \varrho(t)\, p_n^2(t)\, dt \right\}^{1/2} = \\ = \max(|a|, |b|) = A \tag{16}$$

и из (13), (14), (15) и (16) получаем оценку

$$|s_n(\xi) - f(\xi)| \leqslant 2AC^3 \int\limits_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} \left| \frac{f(t) - f(\xi)}{t - \xi} \right| dt + 4\varepsilon AC.$$

Далее, применяя (12), находим

$$\int\limits_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} \left| \frac{f(t) - f(\xi)}{t - \xi} \right| dt \leqslant K \int\limits_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} \frac{dt}{|t - \xi|\,|\log|t - \xi||^\alpha} = \frac{2K}{(\alpha - 1)\,|\log\delta|^{\alpha-1}}.$$

Так как $\alpha - 1 > 0$, а $\delta > 0$ можно выбрать как угодно малым, то стоящая справа величина может быть сделана меньше любого положительного ε. Таким образом, для достаточно больших n мы получаем оценку

$$|s_n(\xi) - f(\xi)| < 2A\,\varepsilon\,(C^3 + 2C).$$

Ясно, что если условия теоремы выполняются равномерно на интервале $[a_1, b_1]$, то все предыдущие оценки справедливы равномерно на каждом внутреннем к $[a_1, b_1]$ подинтервале, чем и завершается доказательство наших утверждений.

В частности, теорема 1.3.6 справедлива, если $f(x)$ на интервале $[a_1, b_1]$ удовлетворяет *условию Липшица порядка* α, т. е. если на $[a_1, b_1]$ выполняется неравенство

$$|f(x + h) - f(x)| \leqslant K|h|^\alpha \qquad (K = \mathrm{const},\ 0 < \alpha \leqslant 1).$$

Как теоремы 1.3.1—1.3.5, так и формула Кристоффеля—Дарбу (11), доказанная для полиномов Лежандра в 1858 г. Кристоффелем, а в общем случае — в 1878 г. Дарбу, являются классическими. О других свойствах ортогональных полиномов смотри, например, в монографии Г. Сегё, Ортогональные многочлены, М., 1962.

Ж. Фавар [1] доказал следующее обращение рекуррентной формулы (10):

Если A_n, B_n — постоянные ($n = 1, 2, \ldots; B_n > 0$) *и если для системы полиномов $\{P_n(x)\}$, у которых главный коэффициент равен* 1, *справедлива рекуррентная формула*

$$P_{n+1}(x) = (x - A_n)\,P_n(x) - B_n P_{n-1}(x),$$

то существует такая монотонная неубывающая функция $\mu(x)$ (производная которой обращается в нуль, вообще говоря, не на нуль-множестве!), *что полиномиальная система $\{P_n(x)\}$ является ортонормированной по мере $\mu(x)$.*

Нам не известно[1], высказывалась ли для разложений по общим ортогональным полиномам теорема, аналогичная теореме 1.3.6, однако ее доказательство совпадает в основном с доказательством соответствующего результата, относящегося к рядам Фурье.

§ 4. Полиномы Якоби

Как во многих разделах математики, так и в физических приложениях большую роль играют ортогональные с весом $\varrho(x) = (b - x)^\alpha (x - a)^\beta$ полиномы, где $\alpha > -1$, $\beta > -1$. Они носят название *полиномов Якоби*. Для упрощения вычислений мы положим $a = -1$, $b = 1$, т. е. выберем $[-1, 1]$ в качестве интервала ортогональности; весовая функция в этом случае примет вид $\varrho(x) = (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta$, где $\alpha > -1$, $\beta > -1$. К общему случаю нас возвращает линейное преобразование $t = -1 + 2\frac{x - a}{b - a}$. Если $\alpha = \beta$, т. е. $\varrho(x) = (1 - x^2)^\alpha$, то полиномы, ортогональные с этим весом, называются *ультрасферическими полиномами*. Частные случаи $\alpha = \beta = 0$ и $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ заслуживают особого внимания; они соответствуют классическим *полиномам Лежандра и Чебышева*.

Через $p_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ обозначим n-й нормированный с весом $\varrho(x) = (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta$ полином Якоби; одно из определяющих его представлений дает следующая теорема:

1.4.1. *Функция $J_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, определяемая из уравнения*

$$(1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta J_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{n!\, 2^n} \frac{d^n}{dx^n} [(1 - x)^{\alpha+n} (1 + x)^{\beta+n}],$$

является полиномом степени n; этот полином называется n-м (не нормированным) полиномом Якоби порядка α, β.

Действительно, применяя правило Лейбница, находим

$$\frac{d^n}{dx^n} [(1 - x)^{\alpha+n} (1 + x)^{\beta+n}] = \sum_{k=0}^{n} C_k (1 - x)^{\alpha+n-k} (1 + x)^{\beta+k},$$

---

[1] Теорема 1.3.6 (даже при более общих предположениях) имеется, например, в книге Д ж е к с о н Дж., Ряды Фурье и ортогональные полиномы, М., 1948, стр. 220, 221. — *Прим. ред.*

где C_k — соответствующие коэффициенты. Отсюда имеем

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\right] = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} q_n(x),$$

где $q_n(x)$ есть полином степени n, а значит, и $J_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ является полиномом n-й степени. В силу 1.3.1, нам нужно еще доказать, что выражение $(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} J_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ ортогонально к любому полиному $\Pi(x)$ степени не выше $n-1$. Поэтому через $u^{(k)}(x)$ обозначим k-ю производную от $u(x) = (1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}$. После n-кратного интегрирования по частям мы находим, что

$$(-1)^n n!\, 2^n \int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} J_n^{(\alpha,\beta)}(x)\,\Pi(x)\,dx = \int_{-1}^{1} u^{(n)}(x)\Pi(x)\,dx =$$

$$= \left[u^{(n-1)}(x)\,\Pi(x) - u^{(n-2)}(x)\,\Pi'(x) + \ldots + (-1)^{n-1}u(x)\,\Pi^{(n-1)}(x)\right]_{-1}^{1} +$$

$$+ (-1)^n \int_{-1}^{1} u(x)\,\Pi^{(n)}(x)\,dx.$$

Так как для $0 \leqslant k \leqslant n-1$ справедливы равенства $u^{(k)}(-1) = u^{(k)}(1) = 0$, то мы заключаем, что стоящий в правой части первый проинтегрированный член равен нулю. Далее, второй член также равен нулю, так как под знаком интеграла стоит n-я производная от полинома, степень которого не выше $n-1$. Это доказывает ортогональность системы полиномов Якоби.

Так как в дальнейшем мы не будем использовать явного представления нормированных полиномов Якоби $p_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, то, не приводя доказательства, заметим, что $p_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ с помощью ненормированных полиномов $J_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ представляются следующим образом[1]:

$$p_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \sqrt{\frac{2n+\alpha+\beta+1}{2^{\alpha+\beta+1}} \frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma(n+\beta+1)}}\; J_n^{(\alpha,\beta)}(x).$$

Полиномы Чебышева. Пожалуй, самыми важными среди всех полиномов Якоби являются полиномы Чебышева,

[1] См. Сегё Г., Ортогональные многочлены, М., 1962, стр. 80.

которые получаются в частном случае $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$. Мы утверждаем, что нормированные полиномы Чебышева имеют вид

$$p_0^{\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)}(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \qquad p_n^{\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(n \arccos x)$$

$$(n = 1, 2, \ldots).$$

Для доказательства этого утверждения сделаем замену переменной $\theta = \arccos x$; тогда при $m \neq n$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cos(m \arccos x) \cos(n \arccos x)\, dx =$$

$$= \int_{0}^{\pi} \cos m\theta \cos n\theta \, d\theta = 0,$$

а для $m = n$ имеем

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cos^2(n \arccos x)\, dx = \int_{0}^{\pi} \cos^2 n\theta \, d\theta =$$

$$= \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{для} \quad n \geqslant 1, \\ \pi & \text{для} \quad n = 0. \end{cases}$$

Следовательно, система $\{\cos(n \arccos x)\}$ является ортогональной с весом $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$. Далее, из известного соотношения

$$\cos n\theta = 2^{n-1} \cos^n \theta + \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k \cos^k \theta, \qquad (n \geqslant 1)$$

следует, что $\cos(n \arccos \theta)$ есть полином степени n с главным коэффициентом 2^{n-1}. Так как по теореме 1.3.1 весовой функции $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ соответствует только одна ортонормированная полиномиальная система с положительным главным коэффициентом, то ясно, что система $\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}; \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(n \arccos x)\right\}$ и будет искомой.

Особое значение имеют полиномы Чебышева с главным коэффициентом 1, т. е. полиномы

$$T_0(x) \equiv 1, \quad T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Согласно теореме 1.3.4, среди всех полиномов степени n с главным коэффициентом 1 эти полиномы наименее удалены от нуля в смысле метрики пространства $L^2_{\varrho(x)}$ с весом $\varrho(x) = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$. Однако справедливо и большее:

1.4.2. *Среди всех полиномов $\Pi_n(x)$ степени n с главным коэффициентом* 1 *полином $T_n(x)$ наименее отклоняется от нуля на интервале* $[-1, 1]$, *т. е.*

$$\max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |T_n(x)| \leqslant \max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |\Pi_n(x)|.$$

Для $n = 0$ это утверждение очевидно; а поэтому будем считать $n \geqslant 1$. Положим $x = \cos\theta$, тогда в точках $x_k = \cos\frac{k\pi}{n}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ $T_n(x)$ принимает значения

$$T_n(x_k) = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}}.$$

Очевидно, что в точках x_k полином $T_n(x)$ имеет экстремальные значения, а потому уклонение $T_n(x)$ от нуля достигает своего наибольшего значения в этих точках. Если отличный от $T_n(x)$ полином

$$\Pi_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

на интервале $[-1, 1]$ уклоняется от нуля менее чем $T_n(x)$, то выполняются неравенства

$$T_n(x_0) - \Pi_n(x_0) \geqslant 0, \quad T_n(x_1) - \Pi_n(x_1) \leqslant 0, \ldots,$$

т. е. полином $T_n(x) - \Pi_n(x)$ имеет не менее n корней, но это невозможно, так как разность $T_n(x) - \Pi_n(x)$ является полиномом степени не выше $n - 1$. Это противоречие и доказывает наше утверждение.

Непосредственно из определения $T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x)$ выводится следующая теорема:

1.4.3. *Полиномы Чебышева удовлетворяют дифференциальному уравнению*

$$(1 - x^2)\, T_n''(x) - x\, T_n'(x) + n^2\, T_n(x) = 0\,.$$

Полиномы Лежандра. В случае $\alpha = \beta = 0$ полиномы Якоби приводят к классическим полиномам Лежандра. Полагая $P_n(x) = J_n^{(0,0)}(x)$, из 1.4.1 мы получаем следующую теорему:

1.4.4. *Полиномы Лежандра $P_n(x)$ образуют на интервале $[-1, 1]$ ортогональную систему в обычном смысле, т. е.*

$$\int\limits_{-1}^{1} P_m(x)\, P_n(x)\, dx = 0 \qquad (m \neq n)\,.$$

Полиномы $P_n(x)$ наиболее просто подсчитываются непосредственно из их определения:

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!\, 2^n}\; \frac{d^n(1 - x^2)^n}{dx^n}$$

(формула Родрига). Приведем для примера выражения для первых пяти полиномов:

$$P_0(x) \equiv 1, \qquad P_1(x) = x, \qquad P_2(x) = \frac{3}{2}\, x^2 - \frac{1}{2}\,,$$

$$P_3(x) = \frac{5}{2}\, x^3 - \frac{3}{2}\, x, \qquad P_4(x) = \frac{35}{8}\, x^4 - \frac{15}{4}\, x^2 + \frac{3}{8}\,.$$

Для вычисления нормированных полиномов Лежандра $p_n^{(0,0)}(x)$ мы положим $u(x) = (x^2 - 1)^n$. Последовательно интегрируя по частями и замечая, что $u^{(k)}(1) = u^{(k)}(-1) = 0$, находим

$$\int\limits_{-1}^{1} [u^{(n)}(x)]^2\, dx =$$

$$= -\int\limits_{-1}^{1} u^{(n-1)}(x)\, u^{(n+1)}(x)\, dx = \int\limits_{-1}^{1} u^{(n-2)}(x)\, u^{(n+2)}(x)\, dx =$$

$$= \ldots = (-1)^n \int\limits_{-1}^{1} u(x)\, u^{(2n)}(x)\, dx = (2n)! \int\limits_{-1}^{1} (1 - x)^n (1 + x)^n\, dx.$$

Далее, также интегрируя по частям, вычислим

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^n(1+x)^n\,dx=\frac{n}{n+1}\int_{-1}^{1}(1-x)^{n-1}(1+x)^{n+1}\,dx=$$

$$=\ldots=\frac{(n!)^2}{(2n)!}\int_{-1}^{1}(1+x)^{2n}\,dx=\frac{(n!)^2\,2^{n+1}}{(2n)!\,(2n+1)}.$$

Таким образом,

$$\int_{-1}^{1}[u^n(x)]^2\,dx=\frac{(n!)^2\,2^{n+1}}{2n+1}.$$

Применяя формулу Родрига:

$$P_n^2(x)=\frac{[u^{(n)}(x)]^2}{(n!)^2\,2^{2n}},$$

мы выводим

$$\int_{-1}^{1}P_n^2(x)\,dx=\frac{2}{2n+1}$$

и, наконец,

$$p_n^{(00)}(x)=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,P_n(x)\qquad(n=0,1,\ldots).\tag{17}$$

1.4.5. *Полиномы Лежандра $P_n(x)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению*

$$(1-x^2)\,P_n''(x)-2x\,P_n'(x)+n\,(n+1)\,P_n(x)=0.$$

Для $n=0$ это очевидно. Поэтому будем считать $n\geqslant 1$. Полагая $u(x)=(x^2-1)^n$, мы находим

$$(x^2-1)\,u'(x)=2nx\,u(x).$$

Дифференцируя это равенство $n+1$ раз и применяя правило Лейбница, получаем

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(x^2-1)^{(k)}\,u^{(n+2-k)}(x)=2n\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}x^{(k)}\,u^{(n+1-k)}(x),$$

что эквивалентно соотношению

$$u^{(n+2)}(x)\,(x^2-1)+(n+1)\,u^{(n+1)}(x)\,2x+\frac{(n+1)n}{2}\,2u^{(n)}(x)=$$
$$=2n\,[xu^{(n+1)}(x)+(n+1)\,u^{(n)}(x)].$$

Подставляя сюда равенство $u^{(n)}(x)=n!\,2^nP_n(x)$, которое вытекает из формулы Родрига, мы получаем наше утверждение.

1.4.6. *Для нормированных полиномов Лежандра справедлива следующая оценка;*

$$\max_{-1<x<1}|p_n^{(0,\,0)}(x)|=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}.$$

Из (17) следует, что нам достаточно доказать соотношения $P_n(1)=1=|P_n(-1)|$ и $|P_n(x)|\leqslant P_n(1)$. Первое из этих соотношений следует непосредственно из формулы Родрига. Для доказательства второго соотношения положим

$$n(n+1)\,f(x)=n\,(n+1)\,P_n^2(x)+(1-x^2)\,[P_n'(x)]^2.$$

Из этого равенства вытекает, что $f(1)=P_n^2(1)=f(-1)$ и $f(\xi)=P_n^2(\xi)$ в любой точке ξ, для которой $P_n'(\xi)=0$, т. е. в любой точке экстремума $P_n(x)$. Поэтому мы имеем

$$\max_{-1<x<1}P_n^2(x)\leqslant\max_{-1<x<1}f(x). \tag{18}$$

Дифференцируя равенство, определяющее функцию $f(x)$, находим

$$n\,(n+1)\,f'(x)=2P_n'(x)\,[n\,(n+1)\,P_n(x)-xP_n'(x)+$$
$$+(1-x^2)\,P_n''(x)]=2P_n'(x)\,[(1-x^2)\,P_n''(x)-2x\,P_n'(x)+$$
$$+n\,(n+1)\,P_n(x)]+2x\,[P_n'(x)]^2.$$

Так как по теореме 1.4.5 выражение в квадратных скобках равно нулю, то мы имеем

$$f'(x)=\frac{2x}{n(n+1)}\,[P_n'(x)]^2.$$

Отсюда видим, что функция $f(x)$ монотонно возрастает на $[0,1]$ и монотонно убывает на $[-1,0]$, а потому $f(x)$ достигает своего наибольшего значения либо в точке $x=1$, либо в точке $x = -1$. Но в точках $x = 1$ и $x = -1$ функция $f(x)$ принимает одно и то же значение $f(1) = f(-1) = P_n^2(1) = 1$, а тогда из (18) следует, что $|P_n(x)| \leq 1$, чем и завершается доказательство теоремы.

§ 5. Ограничения на общие ортонормированные системы и на ортонормированные системы полиномов

Порядок роста членов $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ из систем ортогональных функций играет определенную роль при различных исследованиях сходимости ортогональных разложений. Это понятно, ибо заранее ясно, что в точках, где функции $|\varphi_n(x)|$ «становятся большими», нельзя ожидать хорошей сходимости. Вопрос, каковы те достаточные условия, при которых функции, полученные ортогонализацией заданной системы функций, удовлетворяют определенным условиям ограниченности, оказался очень сложным и в настоящее время не решен удовлетворительно даже для ортонормированных полиномиальных систем. Несмотря на это обстоятельство, легко показать, что арифметические средние функций ортонормированной системы не могут расти «слишком быстро».

Введем символы Ландау O и o: Если $\{a_n\}$ — произвольная, а $\{b_n\}$ — положительная числовые последовательности, то выражение $a_n = O(b_n)$ означает, что отношение $\frac{|a_n|}{b_n}$ ограничено константой K, не зависящей от n, а выражение $a_n = o(b_n)$ означает, что $\frac{a_n}{b_n} \to 0$. Далее, пусть на множестве E определена некоторая последовательность функций $\{f_n(x)\}$ и некоторая положительная последовательность функций $\{g_n(x)\}$. Тогда $f_n(x) = O[g_n(x)]$ означает, что для всех n равномерно на E выполняется соотношение $\frac{|f_n(x)|}{g_n(x)} \leq K$, а $f_n(x) = o[g_n(x)]$ означает, что $\frac{f_n(x)}{g_n(x)} \to 0$ равномерно на E. Если эти условия выполняются не обязательно равномерно, но имеют место в каждой отдельной точке $x \in E$, то мы пишем $f_n(x) =$

$= O_x[g_n(x)]$ или $f_n(x) = o_x[g_n(x)]$. Символы O и o могут применяться и для отдельных функций: так, если речь идет о предельном переходе при $x \to a\,(x \in E)$, то $f(x) = O[g(x)]$ означает $\frac{|f(x)|}{g(x)} \leqslant K$, а $f(x) = o[g(x)]$ означает $\frac{f(x)}{g(x)} \to 0$. Используя эти обозначения, легко доказать следующую теорему:

1.5.1. *Если $\{\lambda_n\}$ — монотонно возрастающая последовательность положительных чисел, удовлетворяющих условию $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{-1} < \infty$, то для любой ортонормированной системы $\{\varphi_n(x)\}$ почти всюду справедлива оценка*

$$\sum_{n=0}^{n} \varphi_k^2(x) = o_x(\lambda_n).$$

В самом деле, учитывая ортонормированность, выводим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b \frac{\varphi_n^2(x)}{\lambda_n}\, d\mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty,$$

откуда по теореме 1.2.2 заключаем, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^2(x)}{\lambda_n}$$

сходится почти всюду. Наше утверждение следует тогда из элементарной теоремы о числовых рядах, которую мы сформулируем и докажем в 2.2.2.

Теорема 1.5.1, грубо говоря, означает, что «большие» функции $|\varphi_n(x)|$ встречаются «редко» в том смысле, что их квадратичные средние (а тем более арифметические средние) возрастают «медленно». Действительно, можно легко построить монотонно возрастающую последовательность $\{\lambda_n\}$, для которой $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{-1} < \infty$ и в то же время для надлежащим образом выбранной последовательности $\{m_n\}$ последовательность $\left\{\frac{\lambda_{m_n}}{m_n}\right\}$ стремится к бесконечности как угодно медленно. Тогда, в силу 1.5.1, для квадратичных средних почти всюду справедлива оценка

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \varphi_k^2(x) = o_x\left(\frac{\lambda_n}{n}\right).$$

Вопрос, при каких условиях порядок роста $o_x\left(\frac{\lambda_n}{n}\right)$ можно заменить оценкой $O_x(1)$, является очень трудным. В настоящее время удовлетворительное решение этого вопроса известно только для случая полиномиальных систем, ортонормированных относительно веса $\varrho(x)$, который отделен от нуля. Именно справедлива следующая теорема:

1.5.2. *Если на подинтервале* $(a_1, b_1) \subset [a, b]$ *весовая функция* $\varrho(x)$ *удовлетворяет условию* $\varrho(x) \geqslant \varrho_0 > 0$, *то для ортонормированной с весом* $\varrho(x)$ *полиномиальной системы* $\{p_n(x)\}$ *справедлива оценка*

$$\sum_{k=0}^{n} p_k^2(x) = O(n)$$

равномерно на каждом интервале $[c, d] \subset (a_1, b_1)$.

Пусть $\{\Pi_n(x)\}$ — совокупность всех полиномов степени не выше n, которые удовлетворяют условию

$$\int_a^b \varrho(x)\, \Pi_n^2(x)\, dx \leqslant 1,$$

а $\{\overline{\Pi}_n(x)\}$ — совокупность полиномов степени не выше n, для которых

$$\varrho_0 \int_{a_1}^{b_1} \overline{\Pi}_n^2(x)\, dx \leqslant 1,$$

где ϱ_0 — постоянная, входящая в условие $\varrho(x) \geqslant \varrho_0 > 0$. Всякий полином $\Pi_n(x)$, удовлетворяющий первому неравенству, удовлетворяет также и второму. Поэтому, если под $\sup \Pi_n^2(x)$ и $\sup \overline{\Pi}_n^2(x)$ понимать точные верхние грани квадратов всех определенных выше полиномов $\Pi_n^2(x)$ и $\overline{\Pi}_n^2(x)$ соответственно, то $\sup \Pi_n^2(x) \leqslant \sup \overline{\Pi}_n^2(x)$. Стало быть, если через $\{\overline{p}_n(x)\}$ обозначить полиномиальную систему, ортонормированную относительно веса[1]

$$\overline{\varrho}(x) = \begin{cases} \varrho_0 & \text{для} \quad x \in [a_1, b_1], \\ 0 & \text{для} \quad x \in [a; b] - [a_1, b_1], \end{cases}$$

[1] В этом месте автор отходит от соглашения, принятого им в § 1, что будут рассматриваться лишь почти всюду положительные весовые функции. Этот отход не приводит к недоразумениям в доказа-

то из 1.3.5 вытекает соотношение

$$\sum_{k=0}^{n} p_k^2(x) = \sup \Pi_n^2(x) \leqslant \sup \overline{\Pi}_n^2(x) = \sum_{k=0}^{n} \overline{p}_k^2(x). \tag{19}$$

Если мы введем новую переменную $t = -1 + 2\frac{x - a_1}{b_1 - a_1}$, то интервал $[a_1, b_1]$ перейдет в $[-1, 1]$, а потому система $\left\{\overline{p}_n\left(\frac{b_1 - a_1}{2}(t + 1) + a_1\right)\right\}$ при $t \in [-1, 1]$ является ортонормированной с весом $\overline{\varrho}(t) = \varrho_0 \frac{b_1 - a_1}{2}$ полиномиальной системой. Следовательно,

$$\sqrt{\varrho_0 \frac{b_1 - a_1}{2}}\, \overline{p}_k\left(\frac{b_1 - a_1}{2}(t + 1) + a_1\right) = p_k^{(0,0)}(t).$$

Однако на каждом замкнутом подинтервале из $(-1, 1)$ функции $|p_k^{(0,0)}(t)|$ ограничены в своей совокупности[1]. Поэтому $\overline{p}_k^2(x) = O(1)$ и наше утверждение следует из (19).

Эта теорема установлена Г. Фрайдом [1] и является важным вспомогательным средством для доказательства теоремы о суммируемости 3.4.5. Основная идея доказательства применялась ранее для других целей Эрдёшем, Тураном и Сегё. Не известно, справедлива ли теорема 1.5.2 без ограничения $\varrho(x) \geqslant \varrho_0 > 0$. Если бы ответ был положительным, то отсюда, между прочим, следовало бы, что все разложения по ортогональным полиномам каждой $L^2_{\varrho(x)}$- интегрируемой функции $(C, \alpha > 0)$-суммируемы почти всюду.

тельстве теоремы 1.5.2, так как полиномиальные системы на $[a, b]$ можно строить и для любого *неотрицательного* интегрируемого веса $\varrho(x)$, лишь бы $\int_a^b \varrho(x)\,dx > 0$. Для таких полиномиальных систем теорема 1.3.5 остается справедливой. — *Прим. ред.*

[1] См., например, Сеге Г., Ортогональные многочлены, М., 1962. стр 172. Точная оценка такова

$$|p_k^{(0,0)}(t)| \leqslant \sqrt{\frac{2n+1}{\pi n(1 - t^2)}}.$$

Мы не будем доказывать это соотношение, так как доказательство требует привлечения специальных свойств системы ортонормированных полиномов Лежандра. Это—классический результат, и его можно найти в любом специальном курсе.

Условия ограниченности ортогональных полиномов. Во многих вопросах сходимости важно знать[1] удобный критерий, из которого можно сделать вывод об ограниченности общей ортонормированной полиномиальной системы. Как уже отмечалось, об этом известно очень мало и мы довольствуемся теоремами средней важности, из которых, тем не менее, можно сделать выводы об условиях ограниченности классических ортогональных полиномов.

Обозначим через $\{p_n(x)\}$ полиномиальную систему, ортонормированную по весу $\varrho(x)$. Образуем теперь новую весовую функцию $\varrho(x)\,\sigma(x)$, где $\sigma(x) > 0$ почти всюду, и обозначим через $\{q_n(x)\}$ ортонормированную с этим весом полиномиальную систему. Докажем прежде всего теорему, хорошо применимую к классическим полиномам, но громоздкую из-за многих условий.

1.5.3. *Если в точке $x_0 \in (a, b)$ выполняются условия*

1) $p_k(x_0) = O(1)$,

2) $\sigma(x_0) > 0$,

3) $\left|\dfrac{\sigma(t) - \sigma(x_0)}{t - x_0}\right| = O(1)$ *в некоторой окрестности* $x_0 - \varepsilon \leqslant t \leqslant x_0 + \varepsilon$ *точки* x_0,

4) $\displaystyle\int_a^b \varrho(t)\,\sigma(t)\,p_k^2(t)\,dt = O(1)$,

5) $\displaystyle\int_a^b \varrho(t)\,\frac{p_k^2(t)}{\sigma(t)}\,dt = O(1)$,

то $q_n(x) = O(1)$.

Если условия 1)—3) *выполняются равномерно во всех точках интервала* $[c, d] \subset (a, b)$, *то равномерно на* $[c, d]$ *справедлива оценка* $q_n(x) = O(1)$.

---

[1] Здесь следует отметить, что такого рода вопрос впервые был поставлен Стекловым В. А., *Изв. Рос. АН* (1921), стр. 281—302, 303—326. — *Прим. ред.*

Разложив функцию $q_n(x)$ по системе $\{p_n(x)\}$, и положив $x = x_0$, мы получим

$$q_n(x_0) = p_n(x_0)\int_a^b \varrho(t)\, q_n(t)\, p_n(t)\, dt + \int_a^b \varrho(t)\, q_n(t) \sum_{k=0}^{n-1} p_k(t)\, p_k(x_0)\, dt.$$

Так как $q_n(x)$ есть n-й ортонормированный с весом $\varrho(x)\,\sigma(x)$ полином, то он ортогонален с весом $\varrho(x)\,\sigma(x)$ к любому полиному степени не выше $n - 1$, а потому

$$\int_a^b \varrho(t)\, \sigma(t)\, q_n(t) \sum_{k=0}^{n-1} p_k(t)\, p_k(x_0)\, dt = 0.$$

Отсюда видим, что, в силу 2), разложение для $q_n(x_0)$ можно записать в форме

$$q_n(x_0) = p_n(x_0)\int_a^b \varrho(t)\, q_n(t)\, p_n(t)\, dt +$$

$$+ \frac{1}{\sigma(x_0)} \int_a^b \varrho(t)\, [\sigma(x_0) - \sigma(t)]\, q_n(t) \sum_{k=0}^{n-1} p_k(t)\, p_k(x_0)\, dt.$$

Применяя неравенство Шварца (6) и используя (5), для первого из интегралов получаем оценку

$$\left|\int_a^b\right| \leqslant \int_a^b \varrho(t) \sqrt{\sigma(t)}\, |q_n(t)|\, \frac{|p_n(t)|}{\sqrt{\sigma(t)}}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\int_a^b \varrho(t)\, \sigma(t)\, q_n^2(t)\, dt \int_a^b \varrho(t) \frac{p_n^2(t)}{\sigma(t)}\, dt\right\}^{1/2} = O(1).$$

Поэтому из условий 1) и 2) следует, что

$$|q_n(x_0)| =$$

$$= O(1) + O(1) \int_a^b \varrho(t)\, |\sigma(x_0) - \sigma(t)|\, |q_n(t)| \left|\sum_{k=0}^{n-1} p_k(t)\, p_k(x_0)\right| dt.$$

Если же к сумме, стоящей под знаком интеграла, применить теперь формулу Кристоффеля—Дарбу (11), то учитывая (16), для $|q_n(x_0)|$ получаем оценку

$$|q_n(x_0)| =$$
$$= O(1) + O(1)\int_a^b \varrho(t)\left|\frac{\sigma(t)-\sigma(x_0)}{t-x_0}\right||q_n(t)|\,[|p_n(t)|+|p_{n-1}(t)|]\,dt.$$

Интервал интегрирования $[a, b]$ разобьем на три части: $[a, x_0-\varepsilon]$, $[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$ и $[x_0+\varepsilon, b]$. В силу 4) и 5) интеграл по интервалу $[a, x_0-\varepsilon]$ оценивается следующим образом:

$$\int_a^{x_0-\varepsilon} \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\int_a^{x_0-\varepsilon} \varrho(t)\,[\sigma(x_0)+\sigma(t)]\,|q_n(t)|\,[|p_n(t)|+|p_{n-1}(t)|]\,dt =$$
$$= O(1)\int_a^{x_0-\varepsilon} \varrho(t)\sqrt{\sigma(t)}\,|q_n(t)|\left[\frac{\sigma(x_0)}{\sqrt{\sigma(t)}}+\sqrt{\sigma(t)}\right][|p_n(t)|+|p_{n-1}(t)|]\,dt =$$
$$= O(1)\left\{\int_a^b \varrho(t)\left[\frac{\sigma(x_0)}{\sqrt{\sigma(t)}}+\sqrt{\sigma(t)}\right]^2[|p_n(t)|+|p_{n-1}(t)|]^2\,dt \times\right.$$
$$\left.\times\int_a^b \varrho(t)\,\sigma(t)\,q_n^2(t)\,dt\right\}^{1/2} = O(1)\left\{\int_a^b \varrho(t)\frac{p_n^2(t)+p_{n-1}^2(t)}{\sigma(t)}\,dt+\right.$$
$$\left.+\int_a^b \varrho(t)\,\sigma(t)\,[p_n^2(t)+p_{n-1}^2(t)]\,dt\right\}^{1/2} = O(1).$$

Точно таким же образом устанавливается оценка

$$\int_{x_0+\varepsilon}^b = O(1).$$

Используя 3) и 5), для интеграла по среднему интервалу получаем

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} = O(1)\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \varrho(t)\,|q_n(t)|\,[|p_n(t)|+|p_{n-1}(t)|]\,dt =$$
$$= O(1)\left\{\int_a^b \varrho(t)\,\sigma(t)\,q_n^2(t)\,dt\int_a^b \varrho(t)\frac{p_n^2(t)+p_{n-1}^2(t)}{\sigma(t)}\,dt\right\}^{1/2} = O(1).$$

Учитывая все эти оценки, мы и получаем утверждение теоремы.

Наша теорема является обобщением следующей теоремы Корауса [1]:

Если для всех $t \in [a, b]$ *имеем* $\sigma(t) \geqslant \sigma_0 > 0$ *и* $\dfrac{\sigma(t) - \sigma(x_0)}{t - x_0} = O(1)$, *то из условия* $p_n(x_0) = O(1)$ *следует, что и* $q_n(x_0) = O(1)$.

Действительно, эта теорема является следствием из 1.5.3. Хотя теорема Корауса проще и красивее нашей, однако по сравнению с 1.5.3 она имеет тот недостаток, что из-за сильных ограничений на $\sigma(t)$ возможность ее применения значительно сужена. Например, отправляясь от полиномов Чебышева, едва ли можно вывести с помощью теоремы Корауса свойство ограниченности полиномов Якоби.

Если нам известна некоторая ограниченная ортонормированная полиномиальная система $\{p_n(x)\}$, то наша теорема дает возможность строить с ее помощью разнообразные ограниченные ортонормированные полиномиальные системы. Например, ограниченной является система полиномов Чебышева. Исходя из этого, мы можем доказать следующую теорему:

1.5.4. *В каждой точке* $x \in (-1, 1)$ *для системы* $\{p_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}$ *нормированных полиномов Якоби справедлива оценка*

$$p_n^{(\alpha,\beta)}(x) = O_x(1),$$

причем эта оценка равномерна на каждом интервале $[c, d] \subset \subset (-1, 1)$.

Прежде всего предположим, что $-1 < \alpha$, $\beta < 0$. Затем выберем $\varrho(x) = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$, а потому системой $\{p_n(x)\}$ является система нормированных полиномов Чебышева. Далее, пусть $\sigma(x) = (1 - x)^{\alpha + \frac{1}{2}} (1 + x)^{\beta + \frac{1}{2}}$, т. е. $q_n(x) = p_n^{(\alpha,\beta)}(x)$. Очевидно, что для каждого $x \in (-1, 1)$ выполняются условия 1), 2), и 3) из 1.5.3, а так как $|p_n(x)| \leqslant \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$, то выполнены также условия 4) и 5); стало быть, на интервале $[c, d]$ справедливо соотношение $q_n(x) = O(1)$. Таким образом, наше утверждение установлено в случае $-1 < \alpha$, $\beta < 0$. Этим доказано, что теорема верна для всех нецелых $\alpha, \beta > -1$, так как в этом случае мы можем записать $\alpha = \alpha_1 + \mu$, $\beta = \beta_1 + \nu$, где $-1 < \alpha_1 < 0$, $-1 < \beta_1 < 0$, а μ и ν — целые числа. По доказанному мы можем уже утверждать, что совокупность ортонормированных с весом $\varrho(x) = (1 - x)^{\alpha_1} (1 + x)^{\beta_1}$ полиномов ограничена при любом $x \in (-1, 1)$. Поэтому наше утверждение будет доказано для любых α, β, если мы установим справедливость следующей промежуточной теоремы:

1.5.5. *Если совокупность ортонормированных с весом $\varrho(x)$ полиномов $p_n(x)$ ограничена в точке x_0 и если $\sigma(x) \geqslant 0$ есть полином, не обращающийся в нуль в точке x_0, то ортонормированные с весом $\varrho(x)\,\sigma(x)$ полиномы $q_n(x)$ удовлетворяют соотношению $q_n(x_0) = O(1)$. Если же $\sigma(x) > 0$ и $p_n(x) = O(1)$ для всех $x \in [c, d]$, то $q_n(x) = O(1)$ равномерно на $[c, d] \subset (-1, 1)$.*

В самом деле, пусть $\sigma(x) \geqslant 0$ есть полином степени m. (В случае применения к полиномам Якоби выбираем $m = \mu + \nu$.) Тогда $\sigma(x)\, q_n(x)$ можно представить в форме

$$\sigma(x)\, q_n(x) = \sum_{k=0}^{m+n} c_k p_k(x),$$

где

$$c_k = \int_{-1}^{1} \varrho(x)\, \sigma(x)\, q_n(x)\, p_k(x)\, dx.$$

Но так как $q_n(x)$ ортогональны с весом $\varrho(x)\,\sigma(x)$ к каждому полиному степени $k < n$, то $c_k = 0$ для $k < n$, а потому

$$\sigma(x)\, q_n(x) = \sum_{k=n}^{n+m} c_k p_k(x).$$

Обозначим через M максимум $\sigma(x)$. Тогда, применяя неравенство Шварца (6), находим

$$c_k^2 \leqslant \int_{-1}^{1} \varrho(x)\, \sigma^2(x)\, q_n^2(x)\, dx \int_{-1}^{1} \varrho(x)\, p_k^2(x)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant M \int_{-1}^{1} \varrho(x)\, \sigma(x)\, q_n^2(x)\, dx = M$$

и, следовательно,

$$\sigma(x_0)\, q_n(x_0) \leqslant \sum_{k=n}^{n+m} |c_k|\,|p_k(x_0)| = (m+1)\sqrt{M}\, O(1) = O(1).$$

Этим промежуточная теорема доказана.

Таким образом, в 1.5.4 обоснованы все случаи нецелых чисел α и β. Для рассмотрения целочисленных α и β мы можем опираться на тот факт, что, как уже отмечалось, для полиномов Лежандра ($\alpha = \beta = 0$) при всех $x \in (-1, 1)$ справедлива оценка $p_n^{(0,0)}(x) = O(1)$. Поэтому, как и выше, применяя промежуточную теорему 1.5.5, мы получаем утверждение теоремы 1.5.4 для любых целых α и β.

Ограниченность полиномов Якоби внутри интервала $(-1, 1)$ позволяет нам в качестве следствия из теорем 1.3.6 и 1.5.4 сформулировать следующую теорему о сходимости:

1.5.6. *Если L^2-интегрируемая функция $f(x)$ на интервале $[c, d] \subset (-1, 1)$ удовлетворяет условию Дини—Липшица порядка α и $\alpha > 1$, то разложение $f(x)$ по полиномам Якоби сходится равномерно на $[c, d]$.*

Эта теорема справедлива также и при более общих предположениях (см. Г. Сегё, Ортогональные многочлены, стр. 254). Но так как ортогональные полиномы взяты нами только для примера, то мы не будем приводить других специальных исследований

§ 6. Ортогональная система Хаара

Интересную ортогональную систему построил Хаар [1] в своей докторской диссертации. Она состоит из кусочно-постоянных функций и на интервале ортогональности $[0, 1]$ определяется следующим образом:

$$\chi_0^{(0)}(x) \equiv 1, \quad \chi_0^{(1)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \\ 0, & x = \frac{1}{2}, \\ -1, & x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Это две первые функции Хаара. Другие функции определены так, что для всех натуральных $m\ (\geqslant 1)$ и $1 \leqslant k \leqslant 2^m$ положено

$$\chi_m^{(k)}(x) = \begin{cases} \sqrt{2^m}, & x \in \left(\frac{k-1}{2^m}, \frac{k-\frac{1}{2}}{2^m}\right), \\ -\sqrt{2^m}, & x \in \left(\frac{k-\frac{1}{2}}{2^m}, \frac{k}{2^m}\right), \\ 0, & x \in \left(\frac{l-1}{2^m}, \frac{l}{2^m}\right) \text{ при } l \neq k, \ 1 \leqslant l \leqslant 2^m, \end{cases}$$

В точках разрыва $\chi_m^{(k)}(x)$ определена как среднее арифметическое значений, которые она имеет в прилегающих к этой точке интервалах. В точке 0 функция $\chi_m^{(k)}(x)$ имеет то же значение, что и в интервале $\left(0, \frac{1}{2^{m+1}}\right)$, а в точке 1 — то же значение, что и в интервале $\left(1-\frac{1}{2^{m+1}}, 1\right)$. Нетрудно проверить, что совокупность функций Хаара является ортонормированной системой. Прежде всего, ясно, что функции $\chi_m^{(i)}(x)$ нормированы. Но они также и ортогональны. Ортогональность $\chi_0^{(k)}(x)$ $(k = 0, 1)$ ко всем остальным функциям очевидна. Если $m \geqslant 1$, $1 \leqslant i, j \leqslant 2^m$, то для $i \neq j$ уже само произведение $\chi_m^{(i)}(x)\,\chi_m^{(j)}(x)$ равно нулю, кроме, быть может, одной точки, а для $n > m$ интервал, в котором $\chi_n^{(j)}(x)$ не равна нулю, целиком содержится в интервале постоянства функции $\chi_m^{(i)}(x)$, а потому

$$\int_0^1 \chi_m^{(i)}(x)\,\chi_n^{(j)}(x)\,dx = \lambda\int_0^1 \chi_n^{(j)}(x)\,dx = 0,$$

где $\lambda = 0$ или $\pm\sqrt{2^m}$.

Пусть теперь $f(x)$ — L-интегрируемая функция на $[0, 1]$. Тогда ее разложение по функциям Хаара

$$f(x) \sim c_0\,\chi_0^{(0)}(x) + \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^m} c_m^{(k)}\,\chi_m^{(k)}(x)$$

обладает тем замечательным свойством, что оно очень хорошо представляет функцию $f(x)$, т. е. справедливы следующие теоремы:

1.6.1. *Если $f(x)$ L-интегрируема, то ее разложение Хаара сходится к $f(x)$ почти всюду.*

1.6.2. *Разложение Хаара для $f(x)$ сходится к $f(x)$ в каждой точке непрерывности этой функции и равномерно сходится на каждом интервале, на котором $f(x)$ равномерно непрерывна.*

Оборвем разложение Хаара функции $f(x)$ на некотором члене, например на члене с парой индексов k, m; получившуюся частичную сумму обозначим через $s_m^{(k)}(x)$. Полагая

$$K_m^{(k)}(t, x) = \chi_0^{(0)}(t)\,\chi_0^{(0)}(x) + \ldots + \chi_m^{(k)}(t)\,\chi_m^{(k)}(x),$$

мы имеем

$$s_m^{(k)}(x) = \int_0^1 f(t)\,K_m^{(k)}(t, x)\,dt.$$

Исследуем теперь свойства ядра $K_m^{(k)}(t, x)$, из них и будут следовать сформулированные теоремы.

Прежде всего, ясно, что $K_0^{(0)}(t, x) \equiv 1$ для всех пар значений t, x. Так как функция $\chi_0^{(1)}(t)\,\chi_0^{(1)}(x)$ принимает значение 1 в квадратах Q_{11}: $0 \leqslant t < \frac{1}{2}$, $0 \leqslant x < \frac{1}{2}$ и Q_{22}: $\frac{1}{2} < t \leqslant 1$, $\frac{1}{2} < x \leqslant 1$, значение -1 в квадратах Q_{12}: $\frac{1}{2} < t \leqslant 1$, $0 \leqslant x < \frac{1}{2}$ и Q_{21}: $0 \leqslant t < \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2} < x \leqslant 1$, а для остальных пар t, x значение 0, то мы находим

$$K_0^{(1)}(t, x) = K_0^{(0)}(t, x) + \chi_0^{(1)}(t)\,\chi_0^{(1)}(x) =$$
$$= \begin{cases} 2, & \text{если} \quad (t, x) \in Q_{11} \cup Q_{22}, \\ 0, & \text{если} \quad (t, x) \in Q_{12} \cup Q_{21}, \\ 1, & \text{если} \quad t = \frac{1}{2} \ \text{ или } \ x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

После этого подсчитываем $K_1^{(1)}(t, x)$, затем $K_1^{(2)}(t, x)$ и, продолжая таким образом, мы по индукции для $K_n^{(2^n)}(t, x)$ получаем следующий результат: Пусть единичный квадрат Q разделен параллельными прямыми на 2^{2n+2} равных открытых квадрата; в квадратах $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{2^{n+1}}$, которые лежат на диагонали $t = x$ квадрата Q, мы имеем $K_n^{(2^n)}(t, x) = 2^{n+1}$, а в остальных квадратах $K_n^{(2^n)}(t, x) = 0$. На общей стороне двух смежных квадратов $K_n^{(2^n)}(t, x)$ равно среднему арифметическому значений $K_n^{(2^n)}(t, x)$ на этих квадратах. Чтобы получить отсюда значения всех ядер

$$K_{n+1}^{(p)}(t, x) = K_n^{(2^n)}(t, x) + \sum_{k=1}^{p} \chi_{n+1}^{(k)}(t)\,\chi_{n+1}^{(k)}(x) \quad (1 \leqslant p < 2^{n+1}),$$

мы каждый из первых p квадратов $Q_1, Q_2, \ldots, Q_p$ разделим на 4 частичных квадрата и эти частичные для Q_k квадраты обозначим через $Q_k^{(1,1)}, Q_k^{(1,2)}, Q_k^{(2,1)}, Q_k^{(2,2)}$. Тогда $K_{n+1}^{(r)}(t, x) = 2^{n+2}$ на каждом из двух квадратов $Q_k^{(1,1)}$ и $Q_k^{(2,2)}$ лежащих на диагонали Q_k, а на двух других квадратах $K_{n+1}^{(r)}(t, x) = 0$. На общей стороне двух смежных квадратов $K_{n+1}^{(r)}(t, x)$ равно среднему арифметическому значений, которые $K_{n+1}^{(r)}(t, x)$ принимает на этих квадратах. В остальных точках единичного квадрата Q мы имеем $K_{n+1}^{(p)}(t, x) = K_n^{(2n)}(t, x)$.

Теперь уже легко подсчитать и частичные суммы

$$s_m^{(k)}(x) = \int_0^1 f(t)\, K_m^{(k)}(t, x)\, dt.$$

В самом деле, если x не представляется конечной двоичной дробью, то $K_m^{(k)}(t, x)$ отлично от нуля только на одном интервале $I_m^{(k)} (x \in I_m^{(k)})$ длины $|I_m^{(k)}| = \frac{1}{2^m}$ или $\frac{1}{2^{m+1}}$, и на этом интервале $K_m^{(k)}(t, x)$ принимает значение 2^m или соответственно 2^{m+1}. Следовательно,

$$s_m^{(k)}(x) = \frac{1}{|I_m^{(k)}|} \int_{I_m^{(k)}} f(t)\, dt.$$

Напротив, если x двоичная дробь, то мы имеем либо $K_m^{(k)}(t, x) = 2^{m+1}, 2^m$ или 2^{m-1} на интервале $I_m^{(k)} (x \in I_m^{(k)})$ длины $\frac{1}{2^{m+1}}, \frac{1}{2^m}$ или $\frac{1}{2^{m-1}}$ соответственно, либо $K_m^{(k)}(t, x) = 2^m$ на $I_m^{(k)} = \left(x - \frac{1}{2^{m+1}}, x\right)$ и $K_m^{(k)}(t, x) = 2^{m-1}$ на $J_m^{(k)} = \left(x, x + \frac{1}{2^m}\right)$; тогда в первом случае для $s_m^{(k)}(x)$ справедлива установленная выше формула, а во втором случае имеет место равенство

$$s_m^{(k)}(x) = \frac{1}{2|I_m^{(k)}|} \int_{I_m^{(k)}} f(t)\, dt + \frac{1}{2|J_m^{(k)}|} \int_{J_m^{(k)}} f(t)\, dt.$$

Если теперь m устремить в бесконечность, то интервалы $I_m^{(k)}$ и $J_m^{(k)}$ стягиваются в точку x, а поэтому, полагая

$$\int_0^u f(t)\, dt = F(u),$$

мы получаем

$$\lim_{m\to\infty} s_m^{(k)}(x) = F'(x),$$

если только производная от $F(u)$ в точке $u = x$ существует. Но, как известно, $F'(x)$ существует для почти всех x, а потому заключаем отсюда, что $s_m^{(k)}(x) \to f(x)$ почти всюду, как это и утверждалось нами в 1.6.1.

Если $f(x)$ непрерывна в точке x, то $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ для любого малого $\varepsilon > 0$, если только t изменяется в достаточно малой окрестности точки x. Поэтому для достаточно больших m имеем

$$|s_m^{(k)}(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{|I_m^{(k)}|} \int\limits_{I_m^{(k)}} |f(t) - f(x)|\,dt < \varepsilon$$

или

$$|s_m^{(k)}(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{2|I_m^{(k)}|} \int\limits_{I_m^{(k)}} |f(t) - f(x)|\,dt +$$

$$+ \frac{1}{2|J_m^{(k)}|} \int\limits_{J_m^{(k)}} |f(t) - f(x)|\,dt < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

и это соотношение выполняется равномерно на любом интервале, на котором $f(x)$ равномерно непрерывна. Этим мы доказали и 1.6.2.

Ясно, что ортогональная система Хаара является полной. Действительно, если все коэффициенты разложения функции $f(x)$ равны нулю, то $s_n(x) \equiv 0$ и из 1.6.1 следует, что $f(x) \equiv 0$ почти всюду. Но этот результат означает большее, ибо он доказывает полноту не только в случае $f \in L^2$, а вообще для L-интегрируемых функций. Следовательно, можно сказать, что ортогональная система Хаара полна в L.

Все результаты этого параграфа установлены Хааром [1]. Одной из наиболее интересных особенностей системы Хаара является тот факт, что любая непрерывная на $[0,1]$ функция может быть равномерно приближена с помощью ее разложения по разрывным ортогональным функциям. Франклин [1] так изменил конструкцию Хаара, что построенная им ортонормированная система состоит из непрерывных функций, и каждой L-интегрируемой (или непрерывной) на $[0, 1]$ функции соответствует сходящееся почти всюду (или равномерно сходящееся) разложение. Хаар также обратил внимание на различные возможные обобщения его системы (например, деление на неравные частичные интервалы или троичное деление вместо двоичного).

§ 7. Ортогональные системы Радемахера и Уолша. Связь с теорией вероятностей

Ортонормированная система Радемахера получается от сложения функций Хаара с одинаковыми нижними индексами в одну функцию. Эта система обладает рядом интересных свойств. Систему функций Радемахера определяем следующим образом:

$$r_1(x) = \chi_0^{(1)}(x),$$

$$r_{n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{k=1}^{2^n} \chi_n^{(k)}(x) \qquad (n = 1, 2, \ldots; 0 < x < 1),$$

$$r_n(0) = r_n(1) = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

т. е.

$$r_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \\ -1, & x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right), \\ 0, & x = 0, \frac{1}{2}, 1; \end{cases}$$

$$r_2(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left(0, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right), \\ -1, & x \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{4}, 1\right), \\ 0, & x = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1; \end{cases}$$

и т. д. Очевидно, что функции Радемахера принимают попеременно значения 1 и —1. Их можно также определить и с помощью равенства

$$r_n(x) = \operatorname{sign} \sin 2^n \pi x,$$

где, как обычно, символ $\operatorname{sign} a$ означает 1 для $a > 0$, —1 для $a < 0$ и 0 для $a = 0$.

Система Радемахера неполна, так как для любого n

$$\int_0^1 r_n(x)\, r_1(x)\, r_2(x)\, dx = 0.$$

Поэтому нельзя ожидать, что разложение функции $f(x)$ по системе Радемахера, даже в случае его сходимости, представляет эту же функцию $f(x)$. Следовательно, с точки зрения представления функций ортонормированная система Радемахера «плохая». Однако, несмотря на это, ряды Радемахера имеют относительно сходимости «хорошие» свойства или, во всяком случае, несомненно интересные. Докажем прежде всего следующую теорему:

1.7.1. *Если* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty$, *то ряд Радемахера* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n r_n(x)$ *сходится почти всюду.*

Положим

$$c_n^{(k)} = \frac{c_n}{\sqrt{2^n}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, 2^n).$$

Тогда имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^n} (c_n^{(k)})^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty,$$

а потому, в силу теоремы Рисса—Фишера 1 2.4, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^n} c_n^{(k)} \chi_n^{(k)}(x)$$

является разложением Хаара некоторой функции $f \in L^2$. Применяя теорему 1.6.1, выводим отсюда, что это разложение Хаара сходится почти всюду, а стало быть, и ряд Радемахера

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n r_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^n} c_n^{(k)} \chi_n^{(k)}(x)$$

сходится почти всюду.

Так как функции Радемахера в двоично иррациональных точках интервала [0, 1] принимают лишь значения ± 1, то ряд Радемахера $\sum c_n r_n(x)$ означает, что у членов ряда $\sum c_n$ выбрано распределение знаков ± 1, зависящее от положения точки x. Если знак $+$ отнести к цифре 0, а знак $-$ отнести к цифре 1 бесконечной двоичной дроби $x = 0, a_1, a_2 \ldots$, то существует взаимно однозначное соответствие между множеством всех распределений знаков (в которых знак $+$ встречается бесконечно много раз) и множеством точек полуинтервала [0, 1). Таким образом, любому множеству распределений знаков мы можем сопоставить некоторое точечное множество на [0, 1], а посредством этого определить их меру, т. е. меру соответствующего множества точек из [0, 1], представимых в форме бесконечных двоичных дробей (предполагается, что это множество измеримо). Тогда в этих терминах теорему 1.7.1 можно сформулировать следующим образом:

1.7.2. *Если* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \pm c_n$ *сходится для почти всех распределений знаков.*

Если $\{\varphi_n(x)\}$ — ортонормированная система и $\sum c_n^2 < \infty$, то из 1.7.2 вытекает сходимость ряда $\sum \pm c_n \varphi_n(x)$ для почти всех распределений знаков только в почти каждой фиксированной точке x. Тем не менее справедлива следующая общая теорема:

1.7.3. *Если* $\{\varphi_n(x)\}$ — *произвольная ортонормированная система и* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n^2 < \infty$, *то для почти каждого распределения знаков ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \pm c_n \varphi_n(x)$ *сходится для почти всех* x.

Прежде всего из 1.2.2 и из неравенства

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b c_n^2 \varphi_n^2(x)\, dx < \infty$$

заключаем, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n^2 \varphi_n^2(x)$ сходится почти всюду. Поэтому, в силу 1.7.1, ряд Радемахера

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)\, r_{n+1}(t) \tag{20}$$

сходится для почти всех $x \in [a, b]$ в почти всех точках $t \in [0, 1]$. Пусть E — множество точек (t, x) плоскости, в которых ряд (20) сходится. Если через $\Gamma(t, x)$ обозначим характеристическую функцию множества E, то по известной теореме Фубини о перемене порядка интегрирования находим

$$\int_a^b \left[\int_0^1 \Gamma(t, x)\, dt\right] dx = \int_0^1 \left[\int_a^b \Gamma(t, x)\, dx\right] dt.$$

Так как для почти каждого фиксированного значения x функция $\Gamma(t, x)$ принимает значение 1 почти всюду по отношению к t, то стоящий слева интеграл равен $b - a$. Если бы функция $\Gamma(t, x)$ для каждого фиксированного $t \in A$ с $|A| > 0$ не была бы равной 1 при всех $x \in A_t$ с $|A_t| < 1$, то справа стоящий интеграл был бы меньше, чем $b - a$, но это невозможно. Тем самым сходимость ряда (20) доказана для почти всех t почти всюду по отношению к x, как это и утверждалось нами.

Так как, в силу 1.6.1, для любой L-интегрируемой функции (а не только для L^2-интегрируемой) разложение Хаара сходится почти всюду и, с другой стороны, доказательство 1.7.1 опирается на этот факт, то на первый взгляд можно было бы подумать, что утверждение 1.7.1 справедливо при более общих ограничениях, чем $\sum c_n^2 < \infty$. Тем не менее любопытно, что это не так; более того, справедлива следующая теорема:

1.7.4. *Если* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n^2 = \infty$, *то ряд Радемахера* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n r_n(x)$ *почти всюду расходится.*

Прежде всего заметим, что система Радемахера обладает следующим свойством: если $(k_1, \ldots, k_n)$ и $(l_1, \ldots, l_m)$ — две различные конечные последовательности, то

$$\int_0^1 [r_{k_1}(x) \ldots r_{k_n}(x)]\, [r_{l_1}(x) \ldots r_{l_m}(x)]\, dx = 0.$$

Для доказательства этого соотношения мы вычеркнем все пары функций с одинаковыми индексами, произведение которых имеет значение 1 почти всюду; оставшиеся под знаком интеграла множители мы запишем в виде $r_{j_1}(x), r_{j_2}(x), \ldots, r_{j_p}(x)$ $(j_1 < \ldots < j_p)$. Теперь произведение $r_{j_1}(x) \ldots r_{j_{p-1}}(x)$ является кусочно постоянной функцией и каждый из ее интервалов постоянства I мы можем разбить на четное число равных частичных подинтервалов, в которых $r_{j_p}(x)$ принимает попеременно значения $+1$ и -1. Учитывая это, получим

$$\int r_{j_1}(x)\, r_{j_2}(x) \ldots r_{j_p}(x)\, dx = \mathrm{const} \int_I r_{j_p}(x)\, dx = 0,$$

а потому обращается в нуль и интеграл, распространенный на интервал $[0, 1]$.

Теперь мы можем приступить к доказательству 1.7.4. Предположим что рассматриваемый ряд Радемахера сходится на множестве положительной меры. В силу теоремы Егорова, это предположение влечет существование множества E с мерой $|E| > 0$, на котором частичные суммы $s_n(x)$ обладают свойством

$$|s_m(x) - s_n(x)| \leqslant M \qquad (m > n),$$

где M — абсолютная постоянная. Отсюда следует, что

$$M^2|E| \geqslant \int\limits_E \left[\sum_{k=n+1}^{m} c_k r_k(x)\right]^2 dx =$$

$$= |E| \sum_{k=n+1}^{m} c_k^2 + 2 \sum_{k=n+1}^{m-1} c_k \sum_{l=k+1}^{m} c_l \int\limits_E r_k(x)\, r_l(x)\, dx. \tag{21}$$

По неравенству Коши абсолютное значение стоящей справа двойной суммы не превосходит величины

$$\left\{\sum_{k=n+1}^{m} \sum_{l=n+1}^{m} c_k^2 c_l^2\right\}^{1/2} \left\{\sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{l=k+1}^{\infty} \left[\int\limits_E r_k(x)\, r_l(x)\, dx\right]^2\right\}^{1/2}.$$

Из доказанной выше ортогональности системы $\{r_k(x)\, r_l(x)\}$ и из определения функций $r_k(x)$ следует ортонормированность системы $\{r_k(x)\, r_l(x)\}$. Таким образом, интеграл

$$\int\limits_E r_k(x)\, r_l(x)\, dx$$

является коэффициентом разложения характеристической функции $\Gamma(x)$ множества E. Применяя неравенство Бесселя (5), находим, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left[\int\limits_E r_k(x)\, r_l(x)\, dx\right]^2 \leqslant \int\limits_0^1 \Gamma^2(x)\, dx = |E|,$$

а потому для достаточно больших n имеет место неравенство

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{l=k+1}^{\infty} \left[\int\limits_E r_k(x)\, r_l(x)\, dx\right]^2 \leqslant \frac{|E|^2}{9},$$

из которого (для достаточно больших n) получаем оценку

$$2\left|\sum_{k=n+1}^{m-1} c_k \sum_{l=k+1}^{m} c_l \int_E r_k(x)\, r_l(x)\, dx\right| \leqslant \frac{2|E|}{3} \sum_{k=n+1}^{m} c_k^2 .$$

Следовательно, применяя (21), имеем

$$M^2|E| \geqslant |E| \sum_{k=n+1}^{m} c_k^2 - \frac{2|E|}{3} \sum_{k=n+1}^{m} c_k^2 = \frac{|E|}{3} \sum_{k=n+1}^{m} c_k^2 .$$

Так как m здесь произвольно, то отсюда следует, что

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2 \leqslant 3M^2,$$

т. е. ряд $\sum c_k^2$ сходится, а это противоречит предположению, и теорема доказана.

Ортонормированная система $\{r_n(x)\}$ построена Радемахером в [1]; там же им установлены теорема 1.7.1 и ее следствие 1.7.2. Обобщение этого следствия, т. е. теорема 1.7.3, доказано Пэли и Зигмундом [1], а теорема 1.7.4 доказана Колмогоровым и Хинчиным [1]. Впоследствии мы увидим, что эта теорема справедлива также и в более широких пределах. Утверждение теоремы 1.7.4 остается верным, если сходимость заменить регулярным методом суммирования Тёплица (3.2.7).

Принимая во внимание 1.6.1, из 1.7.4 можно заключить, что *ряд Радемахера $\sum c_n r_n(x)$ представляет собой разложение L-интегрируемой функции $f(x)$ по пополненной системе функций Радемахера тогда и только тогда, когда $f(x)$ не только L-, но также и L^2-интегрируема.* В самом деле, ряд $\sum c_n r_n(x)$ можно выразить через соответствующий ряд Хаара, который, в силу 1.6.1, сходится к $f(x)$ почти всюду. Следовательно, ряд Радемахера $\sum c_n r_n(x)$ также сходится почти всюду, а отсюда, согласно 1.7.4, следует сходимость ряда $\sum c_n^2$, и тогда по теорема Рисса—Фишера 1.2.4 заключаем, что $f \in L^2$.

Связь с теорией вероятностей. Функция $r_1(x)$ принимает как значение $+1$, так и значение -1 в интервале, длина которого равна $\frac{1}{2}$. Из определения $r_2(x)$ следует, что каждая из четырех комбинаций знаков $r_1(x) = \pm 1$, $r_2(x) = \pm 1$ осуществляется на интервале длины $\frac{1}{4}$. Продолжая точно таким же образом, по индукции нетрудно убедиться, что каждая из 2^n комбинаций знаков

$$r_1(x) = \pm 1,\ r_2(x) = \pm 1, \ldots, r_n(x) = \pm 1$$

осуществляется на x-множестве с мерой $\frac{1}{2^n}$. Эта величина является вероятностью выбора одной определенной комбинации знаков из множества всех комбинаций знаков. Опираясь на аксиому об абсолютной аддитивности вероятностей, мы можем допускать бесконечно длинные выборы и утверждать следующее: Если M есть измеримое множество различных бесконечных последовательностей знаков $\{\pm 1\}$, то вероятность получения некоторой принадлежащей множеству M последовательности знаков с помощью бесконечного числа выборов равна мере множества тех точек x, для которых последовательность знаков функций $r_1(x), r_2(x), \ldots$ принадлежит к множеству M. Таким образом, каждое утверждение о функциях Радемахера можно истолковать с точки зрения теории вероятностей. Например, на основании теорем 1.7.1 и 1.7.4 теорему 1.7.2 можно высказать и дополнить следующим образом:

1.7.5. *Если знаки членов ряда $\sum \pm c_n$ выбирать произвольно, то вероятность сходимости или расходимости этого ряда равна* 1, *смотря по тому, сходится ряд $\sum c_n^2$ или расходится.*

Тот факт, что вероятность выигрыша при игре «в герб и решетку» можно однозначно сопоставить с множеством значений функций Радемахера, дает возможность перевести ряд теорем теории вероятностей в термины функций Радемахера. Например, теорема Кантелли гласит, что при игре «в герб и решетку» со ставкой 1 средний выигрыш с вероятностью 1 стремится к нулю. В терминах функций Радемахера это означает, что равенство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{n=1}^{n} r_k(x) = 0 \tag{22}$$

справедливо почти всюду. Доказательство этого, и даже более сильного, утверждения следует непосредственно из 1.7.1. В самом деле, пусть $\{\lambda_n\}$ — монотонно возрастающая последовательность, для которой $\sum \lambda_n^{-2} < \infty$. Тогда по теореме 1.7.1 ряд $\sum \lambda_n^{-1} r_n(x)$ сходится почти всюду, а потому из доказанной в следующей главе (см. 2.2.2) общей теоремы о числовых рядах следует, что почти всюду

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=1}^{n} r_k(x) = 0.$$

Теореме Кантелли соответствует частный случай $\lambda_n = n$.

Соотношение (22) эквивалентно также теореме Бореля, согласно которой отношение числа единиц, стоящих на первых n местах двоичного разложения числа $x \in [0, 1]$, к числу нулей стремится к 1 при $n \to \infty$ для почти всех x. Следовательно, если через $m_n(x)$ обозначим число единиц, то теорема Бореля утверждает, что для почти всех x

$$\frac{m_n(x)}{n - m_n(x)} = 1 + o_x(1).$$

Отсюда следует справедливость почти всюду равенства

$$\frac{m_n(x) - [n - m_n(x)]}{n} = o_x(1). \tag{23}$$

Это означает, что почти всюду стремятся к нулю арифметические средние последовательности, полученной из последовательности цифр двоичного разложения заменой цифры 0 на -1. А это как раз и есть утверждение (22). Обратно, предположим, что (22) или, что то же самое, (23) выполнено почти всюду. Тогда отсюда для почти всех x следует равенство

$$\frac{m_n(x)}{n} = \frac{1}{2} + o_x(1),$$

а это и есть теорема Бореля.

Эти соотношения между теоремами о системе функций Радемахера и проблемой игры «в герб и решетку» могут служить примером того, как теория ортогональных функций используется в теории вероятностей и обратно. Между этими двумя теориями имеется много других общих точек соприкосновения, и впоследствии мы еще будем возвращаться к этой теме.

Теоретико-вероятностная интерпретация ортонормированной системы Радемахера установлена Штейнгаузом [1]. Она опирается на стохастическую независимость функций $r_n(x)$, т. е. на следующее свойство: обозначим через $M_k(a, b)$ множество тех точек x, для которых $a \leq r_k(x) \leq b$, и пусть M есть пересечение множеств $M_{\nu_1}(a_{\nu_1}, b_{\nu_1}) \cap M_{\nu_2}(a_{\nu_2}, b_{\nu_2}) \cap \ldots$ $\ldots \cap M_{\nu_n}(a_{\nu_n}, b_{\nu_n})$ для некоторой последовательности индексов $\nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_n$. Стохастическая независимость означает, что при любом выборе чисел $\nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_n$ и интервалов (a_{ν_i}, b_{ν_i}) мера множества M удовлетворяет соотношению

$$|M| = \prod_{k=1}^{n} |M_{\nu_k}(a_{\nu_k}, b_{\nu_k})|.$$

Подобно тому как из 1.7.2 выводилась 1.7.5, для теоремы 1.7.3 можно дать теоретико-вероятностную формулировку и расширить ее:

Если в ортогональном ряде $\sum \pm c_n\varphi_n(x)$ *знаки выбирать произвольно, то он сходится почти всюду с вероятностью* 1, *если сходится ряд* $\sum c_n^2$.

Если мы положим $v_n(t) = \dfrac{1 + r_n(t)}{2}$, то $v_n(t)$ принимает значения 1 или 0 в зависимости от того, будет ли $r_n(t) = 1$ или -1. Поэтому ряд $\sum c_n v_n(t)$ получается из ряда $\sum c_n$ выбрасыванием членов с теми индексами ν_n, для которых $v_{\nu_n}(t) = 0$. А так как

$$2\sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n + \sum_{n=1}^{\infty} c_n r_n(t),$$

то мы установили следующую теорему Зигмунда и Пэли [1]:

Если ряд $\sum c_n$ *сходится, то оставшийся после выбрасывания произвольных членов ряд сходится или расходится с вероятностью* 1, *если ряд* $\sum c_n^2$ *сходится или расходится соответственно.*

Ортогональная система Уолша. Упомянутое нами при доказательстве теоремы 1.7.4 свойство системы Радемахера $\{r_n(x)\}$, заключающееся в том, что два различных конечных произведения функций этой системы ортогональны друг другу, позволяет построить следующую ортогональную систему: пусть $\mathfrak{w}_0(x) \equiv 1$ на $[0, 1]$; если $n \geqslant 1$ и $2^{\nu_1} + 2^{\nu_2} + \ldots + 2^{\nu_p}$ $(\nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_p)$ есть двоичное представление числа n, то полагаем

$$\mathfrak{w}_n(x) = r_{\nu_1+1}(x)\, r_{\nu_2+1}(x) \ldots r_{\nu_p+1}(x).$$

Как уже отмечалось выше, определенные таким образом функции $\mathfrak{w}_n(x)$ ортогональны друг другу и, очевидно, также нормированы. Ортонормированная система $\{\mathfrak{w}_n(x)\}$ впервые была рассмотрена Уолшем [1].

Система Радемахера является частью системы Уолша, а именно

$$\mathfrak{w}_{2^n}(x) = r_{n+1}(x).$$

Интересное свойство системы Уолша состоит в том, что она является естественным пополнением системы $\{r_n(x)\}$. В самом деле, справедлива следующая теорема:

1.7.6. *Ортогональная система Уолша полна в* L^2.

Для доказательства этого мы полагаем, что $f \in L^2$ (или даже просто L-интегрируема) и что

$$\int_0^1 f(x)\, \mathfrak{w}_n(x)\, dx = 0 \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Обозначим также

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

Тогда из наших предположений следует равенство

$$\int_0^1 f(x)\,\mathfrak{w}_0(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx = F(1) - F(0) = F(1) = 0$$

и, кроме того, следующее равенство:

$$\int_0^1 f(x)\,\mathfrak{w}_1(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,r_1(x)\,dx = \int_0^{1/2} f(x)\,dx - \int_{1/2}^1 f(x)\,dx =$$

$$= F\left(\frac{1}{2}\right) - F(0) - \left[F(1) - F\left(\frac{1}{2}\right)\right] = 2F\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

Аналогично, рассматривая следующие два условия, мы находим

$$\int_0^1 f(x)\,\mathfrak{w}_2(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,r_2(x)\,dx = 2\left[F\left(\frac{1}{4}\right) + F\left(\frac{3}{4}\right)\right] = 0,$$

$$\int_0^1 f(x)\,\mathfrak{w}_3(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,r_1(x)\,r_2(x)\,dx = 2\left[F\left(\frac{1}{4}\right) - F\left(\frac{3}{4}\right)\right] = 0$$

и, стало быть, $F\left(\frac{1}{4}\right) = F\left(\frac{3}{4}\right) = 0.$ Продолжая подобным образом, мы получаем следующие четыре уравнения:

$$F\left(\frac{1}{8}\right) + F\left(\frac{3}{8}\right) + F\left(\frac{5}{8}\right) + F\left(\frac{7}{8}\right) = 0,$$

$$F\left(\frac{1}{8}\right) + F\left(\frac{3}{8}\right) - F\left(\frac{5}{8}\right) - F\left(\frac{7}{8}\right) = 0,$$

$$F\left(\frac{1}{8}\right) - F\left(\frac{3}{8}\right) + F\left(\frac{5}{8}\right) - F\left(\frac{7}{8}\right) = 0,$$

$$F\left(\frac{1}{8}\right) - F\left(\frac{3}{8}\right) - F\left(\frac{5}{8}\right) + F\left(\frac{7}{8}\right) = 0.$$

Из этих уравнений выводим, что

$$F\left(\frac{1}{8}\right) = F\left(\frac{3}{8}\right) = F\left(\frac{5}{8}\right) = F\left(\frac{7}{8}\right) = 0.$$

Продолжая аналогичные рассуждения, легко убеждаемся, что во всех двоично рациональных точках справедливо равенство

$$F\left(\frac{k}{2^n}\right) = 0 \qquad (n = 0, 1, \ldots; \quad k = 0, 1, \ldots, 2^n).$$

Так как функция $F(x)$ непрерывна и обращается в нуль на плотном на $[0, 1]$ множестве, то $F(x) \equiv 0$. А так как $f(x) = F'(x)$ почти всюду, то и $f(x) = 0$ почти всюду, как это и утверждалось нами.

Теорема 1.7.6 доказана Уолшем [1]; им же установлен первый результат, относящийся к разложениям по функциям системы $\{\mathfrak{w}_n(x)\}$. Полнота этой системы может быть выведена также из теоремы Реньи, сформулированной на стр. 29.

Между системами Хаара и Уолша имеется интересная связь (Качмаж [5]). Положим $\chi_0^{(0)}(x) = \mathfrak{w}_0(x)$, $\chi_0^{(1)}(x) = \mathfrak{w}_1(x)$, а затем

$$\chi_1^{(1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,[\mathfrak{w}_2(x) + \mathfrak{w}_3(x)],$$

$$\chi_1^{(2)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,[\mathfrak{w}_2(x) - \mathfrak{w}_3(x)]$$

и вообще определим $\chi_n^{(k)}(x)$ по индукции. Допустим, что $\chi_{n-1}^{(k)}(x)$ представляется в форме

$$\chi_{n-1}^{(k)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}} \sum_{\nu=2^{n-1}}^{2^n-1} a_{k\nu}^{(n-1)}\mathfrak{w}_\nu(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, 2^{n-1}),$$

где $a_{k\nu}^{(n-1)} = \pm 1$. Матрицу $(a_{k\nu}^{(n)})$ строим следующим образом: каждую строку матрицы $(a_{k\nu}^{(n-1)})$ запишем дважды одну под другой [чем образуем левую половину матрицы $(a_{k\nu}^{(n)})$], а затем каждую строку из этой пары будем удлинять вправо так, что первая строка переписывается еще раз в правую сторону без изменения, а вторая переписывается с противоположными знаками [образуем вторую половину матрицы $(a_k^{(n)})$]. После этого определяем функцию $\chi_n^{(k)}(x)$ как

$$\chi_n^{(k)}(x) = \frac{1^n}{\sqrt{2^n}} \sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}-1} a_{k\nu}^{(n)}\mathfrak{w}_\nu(x).$$

За исключением двоично рациональных точек, так построенная система $\{\chi_n^{(k)}(x)\}$ совпадает с системой Хаара.

Свойства сходимости разложений по функциям Уолша не так хороши, как в случае разложений Хаара. Существует, например, непрерывная функция, разложение Уолша которой расходится в некоторой точке (Уолш [1]), чего, в силу 1.6.2, не может быть в случае разложений Хаара.

КОЭФФИЦИЕНТНЫЕ УСЛОВИЯ СХОДИМОСТИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

В этой главе мы будем заниматься решением такой задачи: при каких условиях, наложенных на коэффициенты $c_0, c_1, \ldots$ $\ldots, c_n, \ldots$, можно сделать заключение о сходимости общего ортогонального ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)? \tag{24}$$

Так как на систему $\{\varphi_n(x)\}$ мы, вообще говоря, не будем накладывать никаких ограничений, кроме ортогональности, то разумно рассматривать только проблему сходимости почти всюду. Поясним это, заметив, что, не нарушая ортогональности системы, значения функций $\varphi_n(x)$ мы можем выбрать произвольно на любом μ-нуль-множестве N так, чтобы ряд (24) расходился на N, например положив $\varphi_n(x) = \infty$ при всех $x \in N$ и всех $n = 0, 1, \ldots$

Нетрудно видеть, что условие $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n| < \infty$ обеспечивает абсолютную сходимость почти всюду ряда (24). В самом деле, применяя неравенство Шварца (6), из ортогональности системы $\{\varphi_n(x)\}$ выводим:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b |c_n \varphi_n(x)| \, d\mu(x) \leqslant \sqrt{\mu(b) - \mu(a)} \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \sqrt{\int_a^b \varphi_n^2(x) \, d\mu(x)} =$$

$$= \sqrt{\mu(b) - \mu(a)} \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| < \infty,$$

и абсолютная сходимость почти всюду ортогонального ряда (24) следует непосредственно из 1.2.2. Мы видим, что для тонких исследований нашей проблемы требование $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| < \infty$ является очень сильным. С другой стороны, если мы хотим получать критерии сходимости общего ортогонального ряда, то условие

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 < \infty$$

является необходимым. Действительно, если бы это условие не выполнялось, то по теореме 1.7.4 ряд (24) был бы почти всюду расходящимся, например, для $\varphi_n(x) = r_n(x)$, где $r_n(x)$ — функции Радемахера. Таким образом, пригодные критерии сходимости лежат между условиями

$$\sum c_n^2 < \infty \quad \text{и} \quad \sum |c_n| < \infty.$$

В § 4 мы увидим, что условие $\sum c_n^2 < \infty$ не обеспечивает сходимости почти всюду общего ортогонального ряда. Оно является достаточным для сходимости только специальных ортогональных рядов, как, например, для рядов Радемахера (1.7.1) или для рядов Хаара (1.2.4 и 1.6.1). Достаточно ли оно для сходимости рядов Фурье или рядов по полиномам Якоби — это очень трудная проблема, и в настоящее время нет подходов к ее решению. Большое значение имеет тот факт, что, несмотря на значительные трудности, с помощью общей теории рядов можно получить многие теоремы о сходимости. Именно таким путем устанавливается много классических теорем, которые до этого доказывались только с помощью привлечения специальных свойств рассматриваемых ортогональных систем; кроме того, из общих теорем сходимости выводятся также различные частные случаи. Любопытно, что на этом общем пути во многих случаях даже для классических рядов получаются более глубокие и более значительные результаты, чем те, которые в классической теории доказываются специальными методами.

§ 1. Общие методы суммирования

Прежде чем перейти к рассмотрению сходимости ортогональных рядов, мы кратко напомним некоторые факты из теории числовых рядов, необходимые нам для дальнейшего изложения.

Кроме сходимости ряда $\sum u_n$ в обычном смысле, мы будем рассматривать также сходимость линейных средних

$$t_n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{nk} s_k,$$

которые образованы из последовательности частичных сумм $\{s_n\}$ с помощью числовой матрицы (α_{nk}). Полученная таким образом последовательность $\{t_n\}$ определяет один из способов линейного суммирования рядов. Если $\{t_n\}$ сходится, то ряд $\sum u_n$ называется *суммируемым соответствующим методом*. Метод суммирования называется *регулярным*, если из $s_n \to s$ следует, что и $t_n \to s$. Тёплиц [1] указал необходимые и достаточные условия регулярности метода суммирования. Эти условия особенно просты в случае, когда $\alpha_{nk} \geqslant 0$; в этом случае метод суммирования называется *положительным*. Так как в дальнейшем мы будем заниматься только положительными методами суммирования, то мы и ограничимся этим случаем.

2.1.1. *Чтобы метод суммирования был регулярным, необходимо и достаточно выполнение условий*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{nk} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_{nk} = 0. \qquad (k = 0, 1, \ldots)$$

Необходимость первого условия следует непосредственно из требования регулярности. Действительно, если $s_k = s + \varepsilon_k$, где $s \neq 0$ и $\varepsilon_k \to 0$, то мы имеем

$$t_n = s \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{nk} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{nk} \varepsilon_k.$$

Так как последовательность $\{\varepsilon_k\}$ сходится к нулю, то в силу регулярности метода сходятся к нулю и t_n-средние этой последовательности, т. е. стоящий справа второй член. Это означает, что

$$t_n = s \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{nk} + o(1),$$

а тогда из требования $t_n \to s$ вытекает необходимость первого условия теоремы. Пусть теперь для некоторого индекса

k_0 не выполняется второе условие теоремы. Рассмотрим последовательность $\{s_k\}$, такую, что $s_{k_0} = 0$ и $s_k = s \neq 0$ при $k \neq k_0$. Тогда из требования регулярности следует соотношение

$$\lim_{n\to\infty} t_n = s \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{nk} - \alpha_{nk_0}\right) = s,$$

т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{nk} - \alpha_{nk_0}\right) = 1.$$

Используя теперь первое условие $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\alpha_{nk} = 1$, мы получаем противоречие с предположением $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_{nk_0} \neq 0$.

Нам нужно еще доказать, что условия теоремы являются также и достаточными. Это очевидно, если принять во внимание положительность матриц (α_{nk}). В самом деле, так как $s_n = s + o(1)$, то из наших предположений следует справедливость равенства

$$t_n = s\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{nk} + \sum_{k=0}^{k_0}\alpha_{nk}(s_k - s) + o(1)\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\alpha_{nk} =$$
$$= s + o(1) + \sum_{k=0}^{k_0}\alpha_{nk}(s_k - s).$$

Далее, в силу второго условия, последняя сумма стремится к нулю при $n\to\infty$ и потому $t_n = s + o(1)$, а это и означает, что метод суммирования регулярен.

Если матрица (α_{nk}) неположительна, то указанные выше условия недостаточны для регулярности. В этом случае для обеспечения регулярности указанные условия достаточно дополнить требованием

$$\sum_{k=0}^{\infty}|\alpha_{nk}| \leqslant K,$$

где K — постоянная, не зависящая от n. Доказательство необходимости в общем случае более длинное, но так как для дальнейшего изложения общая теорема нам не нужна, то мы отсылаем читателя к специальной литературе.

Преимущество положительных методов суммирования перед другими регулярными методами состоит в том, что для положительных методов справедливы соотношения

$$\varliminf_{n\to\infty} s_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty} t_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} t_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} s_n.$$

В самом деле, если положить $\overline{\lim}\, s_n = s$, то для любого $-\infty < s < \infty$ существует индекс k_0 такой, что

$$t_n \leqslant \sum_{k=0}^{k_0} \alpha_{nk}\, s_k + (s+\varepsilon) \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \alpha_{nk},$$

каково бы ни было $\varepsilon > 0$. Так как первая (конечная) сумма стремится к нулю при $n \to \infty$, а вторая ограничена величиной $s + \varepsilon$, то это и доказывает последнее неравенство. В случае $s = \pm\infty$ неравенство тоже справедливо. Точно так же доказывается и первое неравенство. В этом доказательстве по существу используется положительность матрицы (α_{nk}). Действительно, подобное утверждение в общем случае для неположительных матриц уже неверно. Например, пусть для $n = 2m$

$$\alpha_{nk} = \begin{cases} \dfrac{3}{2^{n+1}+1}(-2)^k, & \text{если} \quad k = 0, 1, \ldots, n, \\ 0, & \text{если} \quad k \geqslant n+1 \end{cases}$$

и пусть $\alpha_{2m+1,k} = \alpha_{2m,k}$. Тогда мы имеем $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_{nk} = 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_{nk} = 0$. Рассматривая теперь последовательность $\{s_n\}$, такую что $s_k = \operatorname{sign} \alpha_{nk}$, найдем, что

$$t_{2m} = \sum_{k=0}^{2m} |\alpha_{2m,k}| = 3\,\frac{2^{2m+1}-1}{2^{2m+1}+1} \to 3$$

и, стало быть, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, t_n > \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, s_n = 1$.

Методы суммирования Чезаро. В качестве первого применения теоремы 2.1.1 мы рассмотрим методы Чезаро. Если через $A_n^\alpha = \binom{n+\alpha}{n}$ обозначим n-й коэффициент биномиального ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^\alpha x^n = \frac{1}{(1-x)^{1+\alpha}} \qquad (\alpha \neq -1, -2, \ldots),$$

а через s_n^α обозначим n-й коэффициент степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n^\alpha x^n = \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} s_n x^n}{(1-x)^\alpha},$$

то отношения

$$\sigma_n^\alpha = \frac{s_n^\alpha}{A_n^\alpha}$$

называются n-ми средними Чезаро, или (C, α)-средними, для последовательности $\{s_n\}$. По теореме о произведении степенных рядов отношение σ_n^α можно также записать в форме

$$\sigma_n^\alpha = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} s_k .$$

В случае $\alpha > 0$ биномиальные коэффициенты A_n^α и $A_{n-k}^{\alpha-1}$ положительны. Таким образом, если положить $\alpha_{nk} = A_{n-k}^{\alpha-1}/A_n^\alpha$, то σ_n^α можно рассматривать как n-е средние t_n некоторого положительного метода суммирования. Из хорошо известного для биномиальных коэффициентов соотношения

$$\sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} = A_n^\alpha$$

нетрудно видеть, что построение (C, α)-средних σ_n^α приводит к положительному методу суммирования, удовлетворяющему первому условию теоремы 2.1.1. Для доказательства второго условия мы прежде всего покажем, что A_n^α и n^α имеют один и тот же порядок роста. Из определения биномиальных коэффициентов A_n^α выводим

$$\log A_n^\alpha = \sum_{k=1}^{n} \log\left(1 + \frac{\alpha}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha}{k} + \sum_{k=1}^{\infty} O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Поэтому, обозначая через C постоянную Эйлера, мы имеем

$$|\log A_n^\alpha - \alpha \log n| \leqslant C\alpha + o(1) + \left|\sum_{k=1}^{\infty} O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right| < K,$$

где K — абсолютная постоянная; отсюда следует существование двух положительных постоянных K_1 и K_2 таких, что

$$K_1 < \frac{A_n^\alpha}{n^\alpha} < K_2 \quad (n \geqslant 1). \tag{25}$$

Таким образом, для α_{nk} мы получаем оценку

$$\frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{A_n^\alpha} = O\left(\frac{(n-K+1)^{\alpha-1}}{n^\alpha}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

т. е. выполняется второе условие теоремы 2.1.1. Стало быть, из 2.1.1 вытекает следующая теорема:

2.1.2. *Для $\alpha > 0$ метод суммирования (C, α) является регулярным.*

Положим теперь, что $\alpha > -1$, $\beta > 0$. Тогда $s_n^{\alpha+\beta}$ является n-м коэффициентом разложения произведения

$$\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} s_n x^n}{(1-x)^\alpha} \cdot \frac{1}{(1-x)^\beta},$$

а потому, в силу теоремы о произведении рядов,

$$s_n^{\alpha+\beta} = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\beta-1} s_k^\alpha = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\beta-1} A_k^\alpha \sigma_k^\alpha,$$

или, другими словами,

$$\sigma_n^{\alpha+\beta} = \frac{1}{A_n^{\alpha+\beta}} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\beta-1} A_k^\alpha \sigma_k^\alpha. \tag{26}$$

Полагая здесь $\alpha_{nk} = A_{n-k}^{\beta-1} A_k^\alpha / A_n^{\alpha+\beta}$, легко видеть, что (α_{nk}) есть положительная матрица, удовлетворяющая условиям теоремы 2.1.1. Этим мы доказали справедливость следующей теоремы:

2.1.3. *Если некоторая последовательность (C, α)-суммируема ($\alpha > -1$), то для любого $\beta > 0$ она также и $(C, \alpha + \beta)$-суммируема к той же сумме.*

Если $\sum u_n$ — некоторый ряд с частичными суммами $s_0, s_1, \ldots$, то часто его (C, α)-средние удобнее представлять в другой форме. Именно, из соотношения

$$s_n^\alpha = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} (u_0 + u_1 + \ldots + u_k) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} u_k (A_0^{\alpha-1} + A_1^{\alpha-1} + \ldots + A_{n-k}^{\alpha-1}) = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^\alpha u_k$$

мы сразу же получаем следующее представление:

$$\sigma_n^\alpha = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^\alpha u_k.$$

Отсюда следует, что $\sigma_n^0 = s_n$, т. е. $(C, 0)$-суммируемость ряда означает просто его сходимость.

В дальнейшем мы часто будем использовать формулу

$$\sigma_n^\alpha - \sigma_n^{1+\alpha} = \frac{1}{(1+\alpha) A_n^{1+\alpha}} \sum_{k=1}^{n} A_{n-k}^\alpha k u_k, \tag{27}$$

которая непосредственно следует из тождества

$$\sigma_n^\alpha - \sigma_n^{1+\alpha} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{A_{n-k}^\alpha}{A_n^\alpha} - \frac{A_{n-k}^{1+\alpha}}{A_n^{1+\alpha}} \right) u_k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{A_{n-k}^\alpha}{A_n^{1+\alpha}} \left(\frac{n+1+\alpha}{1+\alpha} - \frac{n-k+1+\alpha}{1+\alpha} \right) u_k.$$

Метод суммирования Абеля—Пуассона. Ряд $\sum u_n$ называется *суммируемым при помощи метода Абеля—Пуассона* (короче: *А-суммируемым*), если при $0 < r < 1$ ряд $\sum u_n r^n$ сходится и существует конечный предел

$$\lim_{r \to 1} \sum_{k=0}^{\infty} u_k r^k = s.$$

Этот метод суммирования, чрезвычайно важный в теории аналитических функций, можно интерпретировать как *регулярный положительный метод суммирования.* Чтобы пояснить это, запишем ряд $\sum u_k r^k$ в форме

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k r^k = (1-r) \sum_{k=0}^{\infty} s_k r^k.$$

Пусть $\{r_n\}$ означает стремящуюся к 1 возрастающую последовательность положительных чисел и пусть $\alpha_{nk} = r_n^k (1 - r_n)$. Тогда матрица (α_{nk}) удовлетворяет всем условиям теоремы 2.1.1, а потому А-суммируемость действительно является регулярным положительным методом суммирования. Но справедливо даже большее: A-метод сильнее, чем любой (C, α)-метод.

2.1.4. *Если для некоторого $\alpha > -1$ ряд (C, α)-суммируем, то он также и А-суммируем.*

Снова обозначив через $\{r_n\}$ последовательность возрастающих положительных чисел, стремящихся к 1, легко видеть, что ряд $\sum u_k r_n^k$ можно записать в форме

$$(1-r_n)^{1+\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} s_k^\alpha r_n^k = (1-r_n)^{1+\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} A_k^\alpha \sigma_k^\alpha r_n^k.$$

Так как числа $\alpha_{nk} = A_k^\alpha r_n^k (1 - r_n)^{1+\alpha}$ удовлетворяют условиям теоремы 2.1.1, то это доказывает регулярность A-метода, а следовательно, устанавливает справедливость нашей теоремы.

§ 2. Преобразование Абеля. Некоторые тауберовы теоремы

В теории ортогональных рядов очень часто используется классическое преобразование Абеля для частичных сумм ряда. Так называется одна из формул

$$\sum_{k=m+1}^{n} \lambda_k u_k = \sum_{k=m+1}^{n-1} (\lambda_k - \lambda_{k+1}) s_k - \lambda_{m+1} s_m + \lambda_n s_n,$$

$$\sum_{k=m+1}^{n} \lambda_k u_k = \sum_{k=m+1}^{n-1} (\lambda_k - \lambda_{k+1}) (s_k - s_m) + \lambda_n (s_n - s_m),$$

$$\sum_{k=m+1}^{n} \lambda_k u_k = \sum_{k=m+2}^{n} (\lambda_k - \lambda_{k-1}) \sum_{\nu=k}^{\infty} u_\nu + \lambda_{m+1} \sum_{\nu=m+1}^{\infty} u_\nu - \lambda_n \sum_{\nu=n+1}^{\infty} u_\nu,$$

где s_n означает n-ю частичную сумму ряда $\sum u_n$, а $\{\lambda_n\}$ — произвольную числовую последовательность (в последней формуле предполагается, что ряд $\sum u_n$ сходится). Непосредственные следствия из этих преобразований являются классическими и не нуждаются здесь в более подробных исследованиях. Мы напомним только следующую теорему, доказательство которой следует непосредственно из первой формулы:

2.2.1. *Если $\{\lambda_n\}$ — монотонная положительная нуль-последовательность и $s_n = O(1)$, то ряд $\sum \lambda_n u_n$ сходится.*

Особенно важной для наших целей является следующая теорема Кронекера, которая, быть может, мало известна.

2.2.2. *Если положительная последовательность $\{\lambda_n\}$ монотонно возрастает к бесконечности, то из сходимости ряда $\sum \lambda_n^{-1} u_n$ следует оценка $s_n = o(\lambda_n)$.*

Для сокращения наших записей мы положим $R_n = \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k^{-1} u_k$. Тогда из равенства

$$s_n - s_m = \sum_{k=m+1}^{n} \frac{u_k}{\lambda_k} \lambda_k \qquad (n > m),$$

применяя третью формулу и учитывая оценку $R_n = o(1)$, получаем:

$$|s_n - s_m| \leqslant \sum_{k=m+2}^{n} |R_k| (\lambda_k - \lambda_{k-1}) + |R_{m+1}| \lambda_{m+1} + |R_{n+1}| \lambda_n = o(\lambda_n - \lambda_{m+1}) + o(\lambda_{m+1}) + o(\lambda_n) = o(\lambda_n).$$

Далее, так как $\lambda_n \to \infty$, то для любого конечного m имеем $s_m = o(\lambda_n)$, а потому

$$|s_n| \leqslant |s_n - s_m| + |s_m| = o(\lambda_n),$$

что и доказывает наше утверждение.

Подобные теоремы можно доказать также и для (C, α)-средних при целых α. Мы рассмотрим только случай $(C, 1)$-средних. С этой целью n-е $(C, 1)$-средние ряда $\sum u_n$ обозначим через σ_n, а n-е $(C, 1)$-средние ряда $\sum \lambda_n u_n$ через $\sigma_n(\lambda)$. Если мы положим $\Delta\lambda_k = \lambda_k - \lambda_{k+1}$ и $\Delta^2\lambda_k = \Delta\lambda_k - \Delta\lambda_{k+1}$, то справедлива следующая формула:

$$\sigma_n(\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right)(k+1)\,\sigma_k \cdot \Delta^2\lambda_k + \\ + \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\,\sigma_k\,\Delta\lambda_{k+1} + \sigma_n\,\lambda_n. \tag{28}$$

Действительно, пусть $\delta_k = \left(1 - \dfrac{k}{n+1}\right)\lambda_k$, $\delta'_k = \delta_k - \delta_{k+1}$ и $\delta''_k = \delta'_k - \delta'_{k+1}$. Тогда, обозначая n-ю частичную сумму ряда $\sum u_n$ через s_n и применяя преобразование Абеля, получаем

$$\sigma_n(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} u_k\,\delta_k = \sum_{k=0}^{n-1} s_k\,\delta'_k + s_n\,\delta'_n.$$

Принимая во внимание равенство $\delta_n = \delta'_n$, после повторного применения преобразования Абеля находим

$$\sigma_n(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} s_k \delta'_k = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\,\sigma_k \delta''_k + (n+1)\,\sigma_n \delta'_n.$$

Вторую разность δ''_k можно представить следующим образом:

$$\delta''_k = \left(1 - \frac{k}{n+1}\right)\Delta^2\lambda_k + 2\Delta\left(1 - \frac{k}{n+1}\right)\Delta\lambda_{k+1} + \lambda_{k+2}\Delta^2\left(1 - \frac{k}{n+1}\right).$$

Так как $\Delta\left(1 - \dfrac{k}{n+1}\right) = \dfrac{1}{n+1}$ и $\Delta^2\left(1 - \dfrac{k}{n+1}\right) = 0$, то

$$\delta''_k = \left(1 - \frac{k}{n+1}\right)\Delta^2\lambda_k + \frac{2}{n+1}\Delta\lambda_{k+1}.$$

Учитывая еще соотношение $\delta'_n = \dfrac{\lambda_n}{n+1}$, непосредственно из последнего представления для $\sigma_n(\lambda)$ мы получаем равенство (28).

После этой подготовки можно теперь перенести теоремы 2.2.1 и 2.2.2 и на $(C, 1)$-суммирование. Так, аналог теоремы 2.2.1 гласит:

2.2.3. *Если $\{\lambda_n\}$ — выпуклая нуль-последовательность*[1] *и $\sigma = O(1)$, то ряд $\sum u_n\lambda_n$ $(C, 1)$-суммируем.*

По предположению, последний член в (28) имеет порядок $O(\lambda_n) = o(1)$. Далее, очевидно, что ряд $\sum \Delta\lambda_n$ сходится, причем из выпуклости $\{\lambda_n\}$ следуют неравенства $\Delta\lambda_n \geqslant \Delta\lambda_{n+1}$, а потому из классической теоремы о сходимости ряда следует оценка $(n+1)\,\Delta\lambda_{n+1} = o(1)$, а стало быть, и оценка $(n+1)\,\sigma_n\,\Delta\lambda_{n+1} = o(1)$. Отсюда для предпоследнего члена в (28) получаем оценку $o(1)$, ибо этот член представляет собой удвоенные n-е арифметические средние последовательности чисел, стремящейся к нулю. Таким образом, мы имеем

$$\sigma_n(\lambda) = O(1)\sum_{k=0}^{n}\left(1 - \frac{k}{n+1}\right)(k+1)\,\Delta^2\lambda_k + o(1).$$

Но стоящая справа сумма есть n-е арифметическое среднее для ряда $\sum (k+1)\,\Delta^2\lambda_k$. Все будет доказано, если мы покажем сходимость этого ряда. В этом нетрудно убедиться, ибо, применяя преобразование Абеля, получаем

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)\,\Delta^2\lambda_k = \sum_{k=0}^{n+1}\Delta\lambda_k - (n+2)\,\Delta\lambda_{n+1} = \lambda_0 - \lambda_{n+2} - (n+2)\,\Delta\lambda_{n+1}.$$

Так как два последних члена стремятся к нулю, то мы имеем

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)\,\Delta^2\lambda_k = \lambda_0 + o(1).$$

Этим доказана сходимость ряда $\sum (k+1)\,\Delta^2\lambda_k$, а стало быть, и теорема 2.2.3.

Докажем теперь аналог теоремы 2.2.2.

2.2.4. *Если положительная вогнутая последовательность $\{\lambda_n\}$ так медленно стремится к бесконечности, что $\Delta\lambda_n = O(n^{-1})$, то из $(C, 1)$-суммируемости ряда $\sum u_n$ следует оценка $\sigma_n(\lambda) = o(\lambda_n)$.*

---

[1] Числовая последовательность $\{\lambda_n\}$ называется выпуклой нуль-последовательностью, если она удовлетворяет условиям $\lambda_n \to 0$ и $\Delta^2\lambda_n \geqslant 0$. Очевидно, что выпуклая нуль-последовательность также и монотонна.

По предположению, $\sigma_n \to s$. Если через σ'_n обозначим n-е $(C, 1)$-средние ряда $(u_0 - s) + u_1 + u_2 + \ldots$, то $\sigma'_n = \sigma_n - s$ и $\sigma'_n(\lambda) = \sigma_n(\lambda) - \lambda_0 s$. Применяя равенство (28) к средним σ'_n и $\sigma'_n(\lambda)$, получаем

$$|\sigma_n(\lambda)| \leqslant |\lambda_0 s| + \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) (k+1) |\sigma_k - s| |\Delta^2 \lambda_k| +$$

$$+ \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) |\sigma_k - s| |\Delta \lambda_{k+1}| + |\sigma_n - s| \lambda_n =$$

$$= |\lambda_0 s| + o(1) \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) |\Delta^2 \lambda_k| + o\left(\frac{1}{n}\right) \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) |\Delta \lambda_{k+1}| + o(\lambda_n).$$

Из условия $\lambda_n \to \infty$ следует оценка $s = o(\lambda_n)$ и, как мы уже видели ранее,

$$\sum_{k=0}^{n-1} (k+1) |\Delta^2 \lambda_k| = \lambda_{n+1} - \lambda_0 + O(1) = O(\lambda_n).$$

Отсюда заключаем, что

$$\sigma_n(\lambda) = o(\lambda_n),$$

чем и завершается доказательство теоремы.

Тауберовы теоремы. Тауберовыми в теории рядов называют теоремы, дающие критерий, согласно которому из суммируемости более сильным методом можно сделать заключение о суммируемости более слабым методом. Из множества тауберовых теорем нам понадобятся лишь некоторые. Отметим прежде всего одну теорему Фейера [3]:

2.2.5. *Если ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ *A-суммируем (или если при* $0 < r < 1$ *величина* $\left|\sum_{n=0}^{\infty} u_n r^n\right|$ *ограничена не зависящей от r константой), то из условия* $\sum_{k=0}^{\infty} k u_k^2 < \infty$ *следует сходимость ряда* $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ *(соответственно следует оценка* $s_n = O(1)$, *где* s_n *означает n-ю частичную сумму ряда* $\sum u_n$).

Наше утверждение будет доказано, если мы покажем справедливость соотношения $s_n - \sum_{k=0}^{\infty} u_k r_n^k = o(1)$ для любой возрастающей последовательности чисел $\{r_n\}$, стремящейся к 1. С этой целью положим

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} ku_k^2 = \varepsilon_n$$

и выберем $r_n = 1 - \frac{\sqrt{\varepsilon_n}}{n}$. Тогда справедлива оценка

$$\left| s_n - \sum_{k=0}^{\infty} u_k r_n^k \right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |u_k| (1 - r_n^k) + \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k| r_n^k \leqslant$$

$$\leqslant (1 - r_n) \sum_{k=0}^{n} |u_k| (1 + r_n + \ldots + r_n^{k-1}) + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n+1}^{\infty} \sqrt{k} |u_k| r_n^k \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{\varepsilon_n}}{n} \sum_{k=0}^{n} k |u_k| + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n+1}^{\infty} \sqrt{k} |u_k| r_n^k.$$

Применяя неравенство Коши, находим

$$\left(s_n - \sum_{k=0}^{\infty} u_k r_n^k \right)^2 \leqslant \frac{2\,\varepsilon_n}{n^2} \sum_{k=0}^{n} k \sum_{k=0}^{n} ku_k^2 + \frac{2}{n} \sum_{k=n+1}^{\infty} ku_k^2 r_n^k \sum_{k=n+1}^{\infty} r_n^k \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_n \frac{n+1}{n} \sum_{k=0}^{n} ku_k^2 + \frac{2\,\varepsilon_n}{n} \frac{r_n^{n+1}}{1 - r_n} = o(1) + 2\sqrt{\varepsilon_n} = o(1)\,,$$

и наше утверждение доказано.

Эту теорему мы будем применять в следующей форме:

2.2.6. *Если ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ *A-суммируем (или величина* $\left|\sum_{n=0}^{\infty} u_n r^n\right|$ *при* $0 < r < 1$ *ограничена константой* C, *не зависящей от* r), *то из условия* $\sum_{k=1}^{\infty} k(\sigma_k - \sigma_{k-1})^2 < \infty$ *следует* $(C, 1)$*-суммируемость ряда* $\sum u_n$ *(соответственно следует оценка* $\sigma_n = O(1)$, *где* σ_n *означает n-е* $(C, 1)$*-средние ряда* $\sum u_n$).

A-суммируемость ряда $\sum u_n$ к предельному значению s означает, что

$$(1 - x)^2 \sum_{k=0}^{\infty} (k + 1)\, \sigma_k\, x^k - s = o(1) \qquad (x \to 1),$$

или, другими словами,

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\,\sigma_k\, x^k - \frac{s}{(1-x)^2} = o\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right).$$

Поэтому мы имеем

$$(1-r)\sum_{k=0}^{\infty}\sigma_k r^k - s = \frac{1-r}{r}\int_0^r \left[\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\,\sigma_k\, x^k - \frac{s}{(1-x)^2}\right] dx =$$

$$= o\left(\frac{1-r}{r}\int_0^r \frac{dx}{(1-x)^2}\right) = o(1).$$

Это означает A-суммируемость последовательности $\{\sigma_n\}$ или, если положим $\sigma_{-1} = 0$ и $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n}(\sigma_k - \sigma_{k-1})$, A-суммируемость ряда $\sum_{k=0}^{\infty}(\sigma_k - \sigma_{k-1})$, а тогда наше утверждение следует из 2.2.5. Если вместо A-суммируемости мы предположим только $\left|\sum_{k=0}^{\infty} u_k r^k\right| < C$, то аналогично предыдущему найдем

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\sigma_k - \sigma_{k-1})\, r^k = O(1)$$

и из второй части теоремы 2.2.5 выведем соотношение $\sigma_n = O(1)$.

Впоследствии нам потребуется еще тауберова теорема, которая относится к так называемой сильной суммируемости. Ряд $\sum u_n$ называется *сильно* (C, α)*-суммируемым* ($\alpha > 0$), если выполняется условие

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(\sigma_k^{\alpha-1} - s)^2 \to 0.$$

Из сильной (C, α)-суммируемости ряда можно получить следующую тауберову теорему, которая часто применяется в теории суммирования ортогональных рядов:

2.2.7. *Если* $\alpha > \frac{1}{2}$, *то из сильной* (C, α)*-суммируемости ряда* $\sum u_n$ *следует его* $\left(C, \alpha - \frac{1}{2} + \varepsilon\right)$*-суммируемость при любом* $\varepsilon > 0$.

Действительно, величину $\sigma_n^{\alpha-1} - s$ можно понимать как n-е $(C, \alpha - 1)$-средние $\bar{\sigma}_n^{\alpha-1}$ ряда $(u_0 - s) + u_1 + u_2 + \ldots$. Поэтому сильная (C, α)-суммируемость ряда $\sum u_n$ означает, что

$$\sum_{k=0}^{n} (\bar{\sigma}_k^{\alpha-1})^2 = o(n).$$

Применяя равенство (26), находим

$$\bar{\sigma}_n^{\alpha-\frac{1}{2}+\varepsilon} = \frac{1}{A_n^{\alpha-\frac{1}{2}+\varepsilon}} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{-\frac{1}{2}+\varepsilon} A_k^{\alpha-1} \bar{\sigma}_k^{-\alpha-1},$$

а потому из неравенства Коши выводим оценку:

$$\left|\sigma_n^{\alpha-\frac{1}{2}+\varepsilon}\right| \leqslant \frac{1}{A_n^{\alpha-\frac{1}{2}+\varepsilon}} \sqrt{\sum_{k=0}^{n} \left(A_{n-k}^{-\frac{1}{2}+\varepsilon} A_k^{\alpha-1}\right)^2 \sum_{k=0}^{n} (\bar{\sigma}_k^{\alpha-1})^2} =$$

$$= o\left(\frac{\sqrt{n}}{A_n^{\alpha-\frac{1}{2}+\varepsilon}}\right) \sqrt{\sum_{k=0}^{n} \left(A_{n-k}^{-\frac{1}{2}+\varepsilon} A_k^{\alpha-1}\right)^2}.$$

Так как $2(\alpha - 1) > -1$, то, согласно (25), мы можем записать

$$\left(A_{n-k}^{-\frac{1}{2}+\varepsilon} A_k^{\alpha-1}\right)^2 = O[(n-k)^{-1+2\varepsilon} k^{2(\alpha-1)}] = O(A_{n-k}^{-1+2\varepsilon} A_k^{2(\alpha-1)}).$$

Принимая во внимание соотношение

$$\sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{-1+2\varepsilon} A_k^{2(\alpha-1)} = A_n^{2(\alpha-1)+2\varepsilon} = O(n^{2(\alpha-1)+2\varepsilon}),$$

заключаем, что

$$\bar{\sigma}_n^{\alpha-\frac{1}{2}+\varepsilon} = o\left(\frac{n^{\alpha-\frac{1}{2}+\varepsilon}}{A_n^{\alpha-\frac{1}{2}+\varepsilon}}\right) + o(1),$$

т. е. $\sigma_n^{\alpha-\frac{1}{2}+\varepsilon} \to s$, как это и утверждалось в теореме.

Теорема 2.2.2 впервые, по-видимому, доказана Зигмундом [1]. Ее можно доказать также в следующей более сильной форме (см. Тандори [5]):

Если $\{\lambda_n\}$ — положительная неубывающая числовая последовательность и если для некоторого $\alpha > \frac{1}{2}$ выполняется соотношение

$$\sum_{k=0}^{n} (\sigma_k^{\alpha-1})^2 = o(n\lambda_n^2),$$

то для любого $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\sigma_n^{\alpha - \frac{1}{2} + \varepsilon} = o(\lambda_n).$$

Чтобы еще более оттенить важность сильной суммируемости, мы введем следующее понятие: Из последовательности частичных сумм s_n ряда $\sum u_n$ выберем подпоследовательность $\{s_{m_n}\}$ с возрастающими индексами. Если через $\nu(n)$ обозначим число тех s_{m_k}, для которых $m_k \leqslant n$, то предел $d = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{\nu(n)}{n+1}$ называется *плотностью*[1] последовательности $\{s_{m_n}\}$. Очевидно, что $0 \leqslant d \leqslant 1$. Справедлива следующая теорема:

Если ряд $\sum u_n$ сильно $(C, 1)$-суммируем к числу s, то существует сходящаяся к s подпоследовательность частичных сумм $\{s_{m_n}\}$, которая имеет плотность 1.

Сильная (C, α)-суммируемость с произвольным $\alpha > 0$ влечет аналогичное утверждение для последовательности из $(C, \alpha - 1)$-средних.

§ 3. Основная теорема о сходимости ортогональных рядов

Важнейший критерий сходимости, из которого может быть выведена большая часть теорем о сходимости общих ортогональных рядов, установлен почти одновременно Меньшовым [1] и Радемахером [1]. Для его доказательства необходима следующая лемма, важная также и в других приложениях:

2.3.1. *Пусть действительные числа $a_0, a_1, \ldots, a_N$ и ортонормированная система $\{\psi_n(x)\}$ заданы произвольно. Тогда существует L^2_μ-интегрируемая функция $\delta_N(x) \geqslant 0$ со свой-*

---

[1] Обычно число d называют *верхней плотностью* последовательности целых чисел $\{m_k\}$. — *Прим. ред.*

ствами:

$$\max_{\nu\leqslant N}\left|\sum_{k=0}^{\nu} a_k\psi_k(x)\right| \leqslant \delta_N(x), \qquad \int_a^b \delta_N^2(x)\,d\mu(x) \leqslant O(\log^2 N)\sum_{k=0}^{N} a_k^2.$$

В самом деле, пусть $\sigma_\nu^\alpha(x)$ означает ν-е (C, α)-средние ряда $\sum\limits_{k=0}^{N} a_k\psi_k(x)$, $S_\nu^\alpha(x) = A_\nu^\alpha\sigma_\nu^\alpha(x)$ и пусть $\nu(x)$ — зависящий от точки x наименьший индекс, удовлетворяющий условию

$$\left|\sum_{k=0}^{\nu(x)} a_k\psi_k(x)\right| = \max_{\nu\leqslant N}\left|\sum_{k=0}^{\nu} a_k\psi_k(x)\right|.$$

Тогда, используя (26) и применяя неравенство Коши, получаем, что

$$\max_{\nu\leqslant N}\left|\sum_{k=0}^{N} a_k\psi_k(x)\right| = \left|S_{\nu(x)}^0(x)\right| \leqslant \sum_{m=0}^{\nu(x)} A_{\nu(x)-m}^{-\frac{1}{2}} A_m^{-\frac{1}{2}}\left|\sigma_m^{-\frac{1}{2}}(x)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{m=0}^{\nu(x)}\left(A_{\nu(x)-m}^{-\frac{1}{2}}\right)^2 \sum_{m=0}^{\nu(x)}\left(A_m^{-\frac{1}{2}}\sigma_m^{-\frac{1}{2}}(x)\right)^2} = \delta_N(x).$$

Учитывая неравенства (25), мы можем записать, что

$$\sum_{m=0}^{\nu(x)}\left(A_{\nu(x)-m}^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = 1 + \sum_{m=0}^{\nu(x)-1} O\left(\frac{1}{\nu(x)-m}\right) = O\left[\log \nu(x)\right] = O(\log N),$$

а потому

$$\int_a^b \delta_N^2(x)\,d\mu(x) = O(\log N)\sum_{m=0}^{N}\int_a^b\left(\sum_{k=0}^{m} A_{m-k}^{-\frac{1}{2}} a_k\psi_k(x)\right)^2 d\mu(x) =$$

$$= O(\log N)\sum_{m=0}^{N}\sum_{k=0}^{m} a_k^2\left(A_{m-k}^{-\frac{1}{2}}\right)^2.$$

Производя здесь перестановку членов и снова учитывая (25), находим

$$\int_a^b \delta_N^2(x)\,d\mu(x) = O(\log N)\sum_{k=0}^{N} a_k^2\left[1 + \sum_{m=k+1}^{N} O\left(\frac{1}{m-k}\right)\right] =$$

$$= O(\log^2 N)\sum_{k=0}^{N} a_k^2,$$

и лемма доказана.

Теперь фундаментальную теорему Меньшова—Радемахера мы в состоянии доказать в несколько строк. Эта теорема формулируется следующим образом:

2.3.2. *Пусть* $\{\varphi_n(x)\}$ — *произвольная ортонормированная система. Тогда ортогональный ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \tag{29}$$

почти всюду сходится, если

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \log^2 n < \infty. \tag{30}$$

Для доказательства этого мы через $s_n(x)$ обозначим n-ю частичную сумму ряда (29). Покажем прежде всего, что из условия (30) следует сходимость почти всюду подпоследовательности $\{s_{2^m}(x)\}$. Учитывая оценку

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \int_a^b \nu^2 \left[\sum_{k=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} c_k \varphi_k(x)\right]^2 d\mu(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^2 \sum_{k=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} c_k^2 =$$

$$= O(1) \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{k=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} c_k^2 \log^2 k < \infty,$$

из 1.2.2 заключаем, что ряд, состоящий из подинтегральных функций, сходится почти всюду. Поэтому, применяя неравенство Коши, мы убеждаемся в справедливости почти всюду оценки

$$[s_{2^{m+p}}(x) - s_{2^m}(x)]^2 \leq \sum_{\nu=m}^{\infty} \nu^2 \left[\sum_{k=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} c_k \varphi_k(x)\right]^2 \sum_{\nu=m}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} = o_x\left(\frac{1}{m}\right).$$

Этим доказана сходимость почти всюду последовательности $\{s_{2^m}(x)\}$. Осталось еще доказать, что почти всюду справедливо соотношение

$$\max_{2^m < n \leq 2^{m+1}} |s_n(x) - s_{2^m}(x)| = o_x(1).$$

Но это есть непосредственное следствие из леммы 2.3.1. Действительно, полагая $a_0 = 0$, $a_k = c_{2^m+k}$, $\psi_k(x) = \varphi_{2^m+k}(x)$, $N = 2^m$, мы получаем оценку

$$\max_{2^m < n \leq 2^{m+1}} |s_n(x) - s_{2^m}(x)| \leq \delta_{2^m}(x),$$

где функция $\delta_{2^m}(x)$ удовлетворяет условию

$$\sum_{m=1}^{\infty} \int_a^b \delta_{2^m}^2(x)\, d\mu(x) = \sum_{m=1}^{\infty} O(m^2) \sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} c_k^2 =$$

$$= O(1) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} c_k^2 \log^2 k < \infty.$$

Отсюда, согласно теореме 1.2.2, следует сходимость ряда $\sum \delta_{2^m}^2(x)$ почти всюду, а поэтому $\delta_{2^m}(x) = o_x(1)$ почти всюду. Этим и завершается доказательство теоремы.

Для сходимости классических рядов Фурье из теоремы 2.3.2 получаются такие результаты, которые в настоящее время мы не можем доказать никаким другим путем. Рассмотрим, например, ряд Фурье

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos m_n x}{\sqrt{n (\log n)^{3+\varepsilon}}} \qquad (\varepsilon > 0),$$

где числа $m_n < m_{n+1}$ выбраны произвольно. В теории рядов Фурье нет такой специальной теоремы, из которой можно было бы заключить о сходимости этого ряда. Но если мы выберем $\varphi_n(x) = \frac{\cos m_n x}{\sqrt{\pi}}$ и $c_n = n^{-\frac{1}{2}} (\log n)^{-\frac{3+\varepsilon}{2}}$, то из 2.3.2 следует, что данный ряд сходится почти всюду.

Теорема 2.3.2 является результатом длительного развития. Первый, по-видимому, нетривиальный результат о сходимости почти всюду общего ортогонального ряда установлен Вейлем и Ерошем [1]. Ими показано, что условие $c_n = O\left(n^{-\frac{3}{4}-\varepsilon}\right)$ $(\varepsilon > 0)$ достаточно для сходимости почти всюду. Позднее Вейль [1] показал также достаточность условия $\sum c_n^2 \sqrt{n} < \infty$. Далее, достаточность условия $\sum c_n^2 n^{\varepsilon} < \infty$ $(\varepsilon > 0)$ для сходимости ряда $\sum c_n \varphi_n(x)$ почти всюду доказана Гобсоном [1], а Планшерель показал, что достаточным условием будет и сходимость ряда $\sum c_n^2 \log^3 n$. Окончательная форма теоремы 2.3.2, как уже отмечалось, получена одновременно и независимо друг от друга Меньшовым [1] и Радемахером [1].

Ясно, что ядром доказательства теоремы Меньшова—Радемахера является лемма 2.3.1. Обычное доказательство этой леммы состоит в том, что функция $\delta_N(x)$ образуется следующим образом: Индекс $n \leqslant N (= 2^p)$ представляется через систему чисел с базисом 2:

$$n = \sum_{k=0}^{p} 2^{p-k} \gamma_k,$$

где $\gamma_k = 1$ или 0 в зависимости от того, встречается ли 2^{p-k} в двоичном разложении числа n или не встречается. Затем сумма $\sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(x)$ разбивается на частичные суммы, которые начинаются с индекса $\nu_q + 1 = 2^p\gamma_0 + 2^{p-1}\gamma_1 + \ldots + 2^{p-q}\gamma_q + 1$ и кончаются индексом $\nu_{q+1} = 2^p\gamma_0 + \ldots + 2^{p-q-1}\gamma_{q+1}$ $(\nu_{-1} = 0)$. Если эти частичные суммы обозначить через $S_q(x)$, то имеет место неравенство

$$s_n^2(x) \leq (p+1)\sum_{q=-1}^{p-1} S_q^2(x).$$

Далее доказывается неравенство $S_q^2(x) \leq T_q(x)$, где через $T_q(x)$ обозначена сумма квадратов всех частичных сумм

$$\sum_{k=r\,2^{p-q-1}+1}^{(r+1)\,2^{p-q-1}} c_k \varphi_k(x).$$

После этого вводится функция

$$\delta_N^2(x) = (p+1)\sum_{q=-1}^{p-1} T_q(x).$$

Этот метод доказательства приводит к желаемому результату сперва для всех индексов вида $N = 2^p$, после чего мы получаем утверждение леммы уже для всех индексов $2^p < n < 2^{p+1}$. Идея двоичного представления индекса n встречается уже у Планшереля в доказательстве его слабого критерия сходимости.

Основная идея нашего доказательства принадлежит Суиоути и Яно [1]. Мы привели это доказательство не только из-за его простоты, а также и потому, что оно ведет к оценке функции

$$\sup_{2^m < n < 2^{m+1}} |s_n(x) - s_{2^m}(x)|.$$

Этот результат имеет то значение, что наша схема доказательства позволяет получить данное Канторовичем [1] обобщение теоремы 2.3.2. Это обобщение таково:

$$\int_a^b \max_n \left[\sum_{k=2}^{n} \frac{c_k \varphi_k(x)}{\log k}\right]^2 d\mu(x) = O(1)\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2.$$

Дальнейшие обобщения теоремы 2.3.2 даны Салемом [2], Talalяном [1] и Вальфишем [1].

Применения. Сходимость подпоследовательностей и лакунарных рядов. Как теорема 2.3.2, так и лемма 2.3.1 могут успешно применяться к различным проблемам сходимости. Приведем прежде всего следующую теорему, которая, если принять во внимание 2.2.2, выводится из 2.3.2:

2.3.3. *Если ряд* $\sum c_n^2$ *сходится, то для частичных сумм ортогонального ряда* (29) *почти всюду справедлива оценка*

$$s_n(x) = o_x(\log n).$$

Другое следствие из 2.3.2 формулируется следующим образом.

2.3.4. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\log n)^2 \sum\limits_{k=m_n+1}^{m_{n+1}} c_k^2$ *сходится, то последовательность частичных сумм* $\{s_{m_n}(x)\}$ *ортогонального ряда* (29) *сходится почти всюду.*

Так как тождественно равные нулю суммы $\sum\limits_{k=m_n+1}^{m_{n+1}} c_k\varphi_k(x)$ не влияют на сходимость или расходимость ряда, то при доказательстве мы будем считать отличными от нуля все числа

$$C_n = \sqrt{\sum_{k=m_n+1}^{m_{n+1}} c_k^2}.$$

Тогда, полагая

$$\Phi_n(x) = \frac{\sum\limits_{k=m_n+1}^{m_{n+1}} c_k\,\varphi_k(x)}{C_n},$$

мы видим, что система $\{\Phi_n(x)\}$ ортонормирована и, кроме того, учитывая наши предположения, убеждаемся в справедливости неравенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 \log^2 n = \sum_{n=1}^{\infty} (\log n)^2 \sum_{k=m_n+1}^{m_{n+1}} c_k^2 < \infty.$$

Применяя 2.3.2, мы получаем, что последовательность частичных сумм

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_k\,\Phi_k(x) = s_{m_n}(x)$$

сходится почти всюду.

Эта теорема может быть высказана также и в следующей форме (см. С. Качмаж и Г. Штейнгауз, Теория ортогональных рядов, М., 1958, стр. 191). *Из условия*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n} \sum_{k=m_n+1}^{\infty} c_k^2 < \infty$$

следует сходимость почти всюду последовательности $\{s_{m_n}(x)\}$. Эквивалентность этих двух утверждений проверяется непосредственно преобразованием Абеля.

2.3.5. *Если положительная монотонно возрастающая последовательность чисел* $\{\lambda_n\}$ *и произвольные не обращающиеся в нуль коэффициенты* $c_0, c_1, \ldots$ *удовлетворяют условию*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n^2}{\lambda_n \sum_{k=0}^{n} c_k^2} < \infty,$$

то почти всюду справедливо соотношение

$$s_n(x) = o_x\left(\sqrt{\lambda_n (\log n)^2 \sum_{k=0}^{n} c_k^2}\right).$$

Действительно, если рассмотрим ортогональный ряд $\sum C_n \varphi_n(x)$ с коэффициентами

$$C_n = \frac{c_n}{\sqrt{\lambda_n (\log n)^2 \sum_{k=0}^{n} c_k^2}} \qquad (n = 2, 3, \ldots),$$

то по теореме 2.3.2 он сходится почти всюду, а потому наше утверждение следует из 2.2.2.

Для частного случая $c_n = 1$ это следствие из 2.3.2 установлено Радемахером в [1], где оно сформулировано следующим образом: *Почти всюду справедливо соотношение*

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) = o_x\left(\sqrt{n (\log n)^{3+\varepsilon}}\right) \qquad (\varepsilon > 0).$$

Общий случай 2 3.5 (с излишними усложнениями) доказан Алексичем [5].

Ортогональный ряд (29) называется *лакунарным*, если бесконечное число его коэффициентов равно нулю. Уже из 2.3.4 ясно, что ортогональные ряды с большими лакунами обладают в некоторой степени лучшей сходимостью, чем ряды с малыми лакунами. Теперь мы докажем одну полезную теорему о сходимости лакунарных рядов. Для этого через $\{\lambda(n)\}$ обозначим положительную, строго монотонно возрастающую последовательность чисел. Полагая, что $\lambda(x)$ линейна на каждом интервале $(n, n+1)$, получим строго монотонную функцию $\lambda(x)$, имеющую однозначно определенную обратную функцию, которую мы обозначаем через $l(x)$. Докажем следующую теорему:

2.3.6. *Если число N_n отличных от нуля коэффициентов c_k с номерами $l(n) < k \leqslant l(n+1)$ имеет порядок $O(n)$, то условие*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \log^2 \lambda(n) < \infty$$

достаточно для сходимости почти всюду ортогонального ряда (29).

В самом деле, пусть m — индекс, заключенный между $l(n)$ и $l(n+1)$ и пусть c_{ν_k} обозначает k-й отличный от нуля коэффициент с индексом, лежащим между $l(n)$ и $l(n+1)$. Положим теперь $a_k = c_{\nu_k}$ и $\psi_k(x) = \varphi_{\nu_k}(x)$. Так как

$$\sum_{l(n)<k<m} c_k\varphi_k(x) = \sum_{\nu_k<m} a_k\psi_k(x),$$

то, применяя 2.3.1, убеждаемся в существовании функции $\delta_{N_n}(x)$ с $N_n = O(n)$, для которой

$$\Big|\sum_{l(n)<k<m} c_k\varphi_k(x)\Big| \leqslant \delta_{N_n}(x) \quad [l(n) < m \leqslant l(n+1)]$$

и, кроме того, удовлетворяющей условию

$$\int_a^b \delta_{N_n}^2(x)\, d\mu(x) = O(\log^2 N_n) \sum_{k=1}^{N_n} a_k^2 = O(\log^2 n) \sum_{l(n)<k<l(n+1)} c_k^2.$$

Но если принять во внимание равенство $\lambda(l(n)) = n$, то из монотонности $\lambda(x)$ следует, что $\lambda(k) > n$ для $k > l(n)$, т. е. $\log^2 n < \log^2 \lambda(k)$, а потому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \delta_{N_n}^2(x)\, d\mu(x) = O(1) \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \log^2 \lambda(k) < \infty.$$

Отсюда и из 1.2.2 вытекает справедливость почти всюду оценки $s_m(x) - s_{[l(n)]}(x) = o_x(1)$[1] для каждого числа m, заключенного между $l(n)$ и $l(n+1)$.

Поэтому достаточно доказать только сходимость почти всюду подпоследовательности $\{s_{[l(n)]}(x)\}$. Но это есть непосред-

---

[1] $[a]$ означает целую часть от числа a.

ственное следствие из 2.3.4, так как

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\log n)^2 \sum_{k=[l(n)]+1}^{[l(n+1)]} c_k^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=[l(n)]+1}^{[l(n+1)]} c_k^2 \log^2 \lambda(k) < \infty .$$

Таким образом, теорема 2.3.6 установлена.

Если мы с самого начала потребуем, чтобы последовательность частичных сумм содержала некоторую сходящуюся почти всюду подпоследовательность $\{s_{\nu_n}(x)\}$, то теорему 2.3.6 можно уточнить. Именно, если через $\lambda(x) = O(x)$ обозначить положительную функцию, монотонно возрастающую к бесконечности, то справедлива следующая теорема:

2.3.7. *Если подпоследовательность частичных сумм $\{s_{\nu_n}(x)\}$ ряда* (29) *сходится почти всюду на множестве E и если число N_n индексов k, для которых $c_k \neq 0$ и $\nu_n < k < \nu_{n+1}$, имеет порядок $O[\lambda(\nu_n)]$, то условие*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \log^2 \lambda(n) < \infty$$

достаточно для сходимости почти всюду на E ортогонального ряда (29).

В самом деле, пусть $\delta_{N_n}(x)$ есть функция, для которой справедливы неравенства

$$\Big|\sum_{k=\nu_n+1}^{m} c_k \varphi_k(x)\Big| \leqslant \delta_{N_n}(x) \qquad (\nu_n < m < \nu_{n+1})$$

и которая удовлетворяет условию

$$\int_a^b \delta_{N_n}^2(x)\, d\mu(x) = O(\log^2 N_n) \sum_{k=0}^{N_n} \bar{c}_k^2,$$

где через $\bar{c}_k$ обозначен k-й отличный от нуля коэффициент с индексом между ν_n и ν_{n+1}. По предположению,

$$N_n = O[\lambda(\nu_n)].$$

Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \delta_{N_n}(x)\, d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} O(1) \sum_{k=\nu_n+1}^{\nu_{n+1}} c_k^2 \log^2 \lambda(k) < \infty,$$

а потому для каждого m, заключенного между ν_n и ν_{n+1}, почти всюду справедлива оценка $s_m(x) - s_{\nu_n}(x) = o_x(1)$, которая и доказывает наше утверждение.

Схема доказательства теорем 2.3.6 и 2.3.7 взята в основном из работы Алексича [3]. Эти теоремы можно применить, в частности, к исследованию вопросов сходимости суммируемых ортогональных рядов (см. 2.7.5). Теорема, аналогичная теореме 2.3.6, тем же самым методом была доказана также Лоренцем [1].

§ 4. Всюду расходящиеся ортогональные ряды

Чрезвычайно интересным является то обстоятельство, что критерий сходимости (30) в общем случае не может быть усилен, благодаря чему теорема 2.3.2 на самом деле оказывается фундаментальной теоремой теории сходимости. В самом деле, справедлива следующая теорема Меньшова [1]:

2.4.1. *Если произвольная положительная монотонно возрастающая последовательность чисел такова, что* $w(n) = o(\log n)$, *то существует всюду расходящийся ортогональный ряд* $\sum c_n \varphi_n(x)$, *коэффициенты которого удовлетворяют условию*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 w^2(n) < \infty.$$

Эта теорема становится еще интереснее, если мы заметим, что теорема 2.3.2 была доказана с помощью очень грубых оценок (неоднократное применение неравенства Коши); следовательно, в некоторых случаях даже самыми грубыми методами можно получить точные результаты.

Высказанному выше утверждению о невозможности улучшения теоремы 2.3.2 можно противопоставить следующую задачу об усилении этой теоремы: критерий сходимости (30) нельзя улучшить, наверное, только потому, что при этом не предполагается убывания коэффициентов c_n; если же заранее задана некоторая регулярно убывающая последовательность коэффициентов, например

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{n \log^3 n}},$$

то, может быть, все-таки нельзя построить такую ортонормированную систему $\{\varphi_n(x)\}$, для которой ряд $\sum' c_n \varphi_n(x)$ был бы всюду расходящимся. Но, как оказывается, невозможно даже такое ограниченное улучшение теоремы 2.3.2. Именно Тандори [5] доказал следующее значительное усиление теоремы Меньшова 2.4.1:

2.4.2. *Если для монотонно убывающей последовательности положительных чисел* $\{c_n\}$ *выполняется условие*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \log^2 n = \infty ,$$

то существует ортонормированная на $[a, b]$ *система* $\{\Phi_n(x)\}$, *зависящая от* $\{c_n\}$, *такая, что ортогональный ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \Phi_n (x)$$

расходится всюду на $[a, b]$.

Теорема 2.4.2, очевидно, содержит в себе теорему Меньшова 2.4.1, т. е. 2.4.2 действительно является усилением теоремы 2.4.1. Но она означает даже больше, так как из 2.3.2 и 2.4.2 выводится следующая интересная теорема:

2.4.3. *Если* $\{c_n\}$ *есть положительная монотонно убывающая числовая последовательность, то условие* (30) *необходимо и достаточно для того, чтобы все ортогональные ряды с коэффициентами* $c_0, c_1, \ldots$ *были почти всюду сходящимися.*

Теорема 2.4.2 является очень глубокой. Ее доказательство представляет собой усовершенствование оригинального доказательства теоремы 2.4.1, данного Меньшовым. Прежде всего нам нужно доказать несколько вспомогательных теорем; первая из них гласит:

2.4.4. *Пусть* $C \geqslant 1$ *и* $p \geqslant 2$ — *целые числа, а* $I = [u, v]$ — *произвольный интервал. Тогда существует ортогональная на* $[u, v]$ *система из* $2p$ *кусочно-постоянных функций* $\{f_l(C, p, I;\, x)\}$, *которая обладает следующими свойствами:*

1) *Справедливы равенства*

$$\int_u^v f_l^2(C, p, I;\, x)\, dx = v - u \quad (l = 1, 2, \ldots, 2p).$$

2) *Для каждой точки* x *из полуоткрытого интервала*

$$F(C, I) = \left[u + \frac{v-u}{5} \cdot \frac{2}{C},\, u + \frac{v-u}{5} \cdot \frac{3}{C}\right)$$

существует зависящий от x *индекс* $m(x) < p$ *такой, что функции* $f_1(C, p, I;\, x), \ldots, f_{p+m(x)}(C, p, I;\, x)$ *положительны и* *удовлетворяют соотношению*

$$\sum_{k=1}^{p+m(x)} f_k(C, p, I; x) \geqslant A\sqrt{Cp}\log p,$$

где A — положительная постоянная, не зависящая от C, p, I и x.

Прежде всего выберем $I = [0, 5]$ и на интервале $[0, 4)$ определим $2p$-членную систему функций следующим образом: для $i = 1, 2, \ldots, 2p$ полагаем

$$f_{C,p,i}(t) = \frac{1}{k-p-i-\frac{1}{2}} \qquad \text{при } t \in \left[\frac{k-1}{Cp}, \frac{k}{Cp}\right),$$

где k принимает значения $1, 2, \ldots, 4Cp$. Тогда имеем

$$\int_0^4 f_{C,p,i}^2(t)\,dt = \frac{1}{Cp}\sum_{k=1}^{4Cp}\frac{1}{\left(k-p-i-\frac{1}{2}\right)^2},$$

а потому существуют две положительные постоянные A_1 и A_2, для которых выполняется соотношение

$$\frac{A_1}{Cp} \leqslant \int_0^4 f_{C,p,i}^2(t)\,dt \leqslant \frac{A_2}{Cp}. \tag{31}$$

Функции $f_{C,p,i}(t)$ обладают также следующим свойством: для каждой точки $t \in \left[\frac{2}{C}, \frac{3}{C}\right)$ существует такое целое число $0 \leqslant m = m(t) < p$, что

$$\sum_{\nu=1}^{p+m} f_{C,p,\nu}(t) > A_3 \log p, \tag{32}$$

где A_3 — положительная постоянная. Действительно, существует такое m, что $t \in \left[\frac{2p+m}{Cp}, \frac{2p+m+1}{Cp}\right)$, а тогда из определения следует, что

$$\sum_{\nu=1}^{p+m} f_{C,p,\nu}(t) = \sum_{\nu=1}^{p+m}\frac{1}{2p+m+1-p-\nu-\frac{1}{2}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{p+m}\frac{1}{k-\frac{1}{2}} > A_3\log p.$$

Положим теперь

$$\delta_{i,\,j} = \delta_{j,\,i} = \int\limits_0^4 f_{C,\,p,\,i}(t)\, f_{C,\,p,\,j}(t)\, dt.$$

Для продолжения функции $f_{C,\,p,\,i}(t)$ на интервал $[4, 5]$ мы разобьем $[4, 5]$ на столько равных частей, сколько имеется пар чисел i, j с условием $1 \leqslant i, j \leqslant 2p, i \neq j$, т. е. разбиваем интервал $[4, 5]$ на $2p(2p-1)$ равных частей. Полученные подинтервалы обозначаем через $J_{i,\,j}$. Тогда для $t \in [4, 5]$ значение функции определим следующим образом:

$$f_{C,\,p,\,i}(t) = \begin{cases} \sqrt{p(2p-1)\,|\delta_{i,\,j}|}, & \text{если } t \in J_{i,\,j}, \\ -\sqrt{p(2p-1)\,|\delta_{i,\,j}|}\cdot \operatorname{sign} \delta_{i,\,j}, & \text{если } t \in J_{j,\,i}, \\ 0 \ \text{ в остальных точках из } [4, 5]. \end{cases}$$

Так как для $i \neq j$

$$\int\limits_0^5 f_{C,\,p,\,i}(t)\, f_{C,\,p,\,j}(t)\, dt = \int\limits_0^4 + \int\limits_4^5 = \int\limits_0^4 + \int\limits_{J_{i,j}} + \int\limits_{J_{j,i}} =$$

$$= \delta_{i,\,j} - |\delta_{i,\,j}| \operatorname{sign} \delta_{i,\,j} = 0,$$

то функции $f_{C,\,p,\,i}(t)$, число которых конечно, ортогональны друг другу на интервале $[0, 5]$. Далее, мы имеем

$$\int\limits_0^5 f^2_{C,\,p,\,i}(t)\, dt = \int\limits_0^4 f^2_{C,\,p,\,i}(t)\, dt + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{i-1} |\delta_{i,\,j}| + \frac{1}{2}\sum_{j=i+1}^{2p} |\delta_{i,\,j}|. \qquad (33)$$

Оценим величину $|\delta_{i,\,j}|$, например, для случая $i > j$:

$$\delta_{i,\,j} = \frac{1}{Cp}\sum_{k=1}^{4Cp} \frac{1}{\left(k-p-i-\frac{1}{2}\right)\left(k-p-j-\frac{1}{2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{Cp}\,\frac{1}{i-j}\sum_{k=1}^{4Cp}\left(\frac{1}{k-p-i-\frac{1}{2}} - \frac{1}{k-p-j-\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{Cp(i-j)}\left(\sum_{k=1-p-i}^{(4C-1)p-i} \frac{1}{k-\frac{1}{2}} - \sum_{k=1-p-j}^{(4C-1)p-j} \frac{1}{k-\frac{1}{2}}\right).$$

Это соотношение можно записать также следующим образом:

$$\delta_{i,j} = \frac{1}{Cp(i-j)}\left(\sum_{k=1-p-i}^{-p-j} \frac{1}{k-\frac{1}{2}} - \sum_{k=(4C-1)p-i+1}^{(4C-1)p-j} \frac{1}{k-\frac{1}{2}}\right),$$

откуда и следует оценка

$$|\delta_{i,j}| \leqslant \frac{1}{Cp(i-j)}\left(\frac{i-j}{p+j+\frac{1}{2}} + \frac{i-j}{(4C-1)p-i-\frac{1}{2}}\right) \leqslant \frac{2}{Cp^2}.$$

Следовательно,

$$\sum_{j=1}^{i-1} |\delta_{i,j}| + \sum_{j=i+1}^{2p} |\delta_{i,j}| \leqslant \frac{2(2p-1)}{Cp^2} < \frac{4}{Cp}.$$

Если эту оценку подставим в (33) и учтем (31), то убеждаемся в существовании двух положительных абсолютных постоянных A_4 и A_5, для которых имеет место соотношение

$$\frac{A_4}{Cp} \leqslant \int_0^5 f_{C,p,l}^2(t)\,dt \leqslant \frac{A_5}{Cp}. \tag{34}$$

Если пронормируем теперь функции $f_{C,p,l}(t)$ и нормированные функции обозначим через $\bar{f}_{C,p,l}(t)$, то из (32) и (34) выводим существование абсолютной постоянной A_6 такой, что для $t \in \left[\frac{2}{C}, \frac{3}{C}\right]$ справедливо неравенство

$$\sum_{l=1}^{p+m} \bar{f}_{C,p,l}(t) > A_6 \sqrt{Cp}\log p. \tag{32a}$$

Теперь с помощью линейного преобразования $x = u + \frac{t(v-u)}{5}$ мы перейдем от интервала $[0, 5]$ к интервалу $I = [u, v]$ и положим

$$f_l(C, p, I; x) = \sqrt{5}\,\bar{f}_{C,p,l}\left(5\frac{x-u}{v-u}\right) \qquad (l = 1, 2, \ldots, 2p).$$

Тогда, как легко видеть, функции $f_l(C, p, I; x)$ на интервале $[u, v]$ ортогональны друг другу и, кроме того,

$$\int_u^v f_l^2(C, p, I; x)\,dx = |I| = v - u,$$

т. е. выполняется условие 1). Далее, в силу (32а), неравенство

$$\sum_{l=1}^{p+m} f_l(C, p, I; x) > \sqrt{5}\, A_6 \sqrt{Cp} \log p$$

справедливо на интервале $F(C, I)$, в который при нашем линейном преобразовании переходит интервал $\left[\frac{2}{C}, \frac{3}{C}\right)$. Этим доказано и условие 2).

2.4.5. *Пусть $\{c_n\}$ — монотонно убывающая последовательность положительных чисел и пусть $N_m = 2^{m+2} - 4$ при $m = 0, 1, \ldots$. Для каждого m можно построить измеримое множество $F_m \subset [a, b]$ с мерой*

$$|F_m| \geqslant \frac{b-a}{10} \min\left(1; N_{m+1} c_{N_{m+1}}^2 \log^2 N_{m+1}\right) \qquad (35)$$

и систему $\{\Phi_n(x)\}$ кусочно-постоянных ортонормированных функций со следующими свойствами:

a) *Множества $F_0, F_1, \ldots$ стохастически независимы, т. е. для каждой последовательности индексов $k_1 < k_2 < \ldots < k_s$ справедливо соотношение*

$$\frac{|F_{k_1} \cap F_{k_2} \cap \ldots \cap F_{k_s}|}{b-a} = \frac{|F_{k_1}|}{b-a} \cdot \frac{|F_{k_2}|}{b-a} \cdots \frac{|F_{k_s}|}{b-a}.$$

b) *Для каждого $x \in F_m$ существует индекс $n_m(x) < 2^{m+2} - 1$ такой, что, с одной стороны, значения функций $\Phi_{N_m}(x), \ldots, \Phi_{N_m + n_m(x)}(x)$ одинаковы по знаку, а с другой стороны,*

$$|\Phi_{N_m}(x) + \ldots + \Phi_{N_m + n_m(x)}(x)| \geqslant \frac{B}{c_{N_{m+1}}},$$

где B — положительная постоянная, не зависящая от x и m.

Доказательство будем вести по индукции. Прежде всего, пусть $m = 0$. Применим лемму 2.4.4 с $I = [a, b]$ и

$$C = C_1 = \left[\frac{1}{N_1 c_{N_1}^2 \log^2 N_1} + 1\right], \qquad p = p_1 = 2,$$

где $[a]$ означает целую часть числа a. Полагая $F_0 = F(C_1, I)$, мы видим, что

$$|F_0| = \frac{b-a}{5}\left[\frac{1}{N_1 c_{N_1}^2 \log^2 N_1} + 1\right]^{-1} \geqslant \frac{b-a}{5} \frac{N_1 c_{N_1}^2 \log^2 N_1}{N_1 c_{N_1}^2 \log^2 N_1 + 1},$$

т. е. для $m = 0$ выполняется соотношение (35). Пусть теперь

$$\Phi_{l-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}} f_l(C_1, p_1, I; x) \qquad (l = 1, \ldots, 2 \cdot 2).$$

В силу свойства 1) из 2.4.4, кусочно-постоянные функции $\Phi_n(x)$ $(n = 0, 1, \ldots, N_1 - 1)$ ортонормированы; далее, в силу свойства 2) из 2.4.4, для каждого $x \in F_0$ существует индекс $n_0(x) < 2^2 - 1$ такой, что значения функций $\Phi_0(x), \ldots, \Phi_{n_0(x)}(x)$ положительны и справедлива оценка

$$\Phi_0(x) + \ldots + \Phi_{n_0(x)}(x) \geqslant \frac{A}{\sqrt{b-a}} \sqrt{\left[\frac{1}{N_1 c_{N_1}^2 \log^2 N_1} + 1\right] 2 \cdot \log 2} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{A}{\sqrt{b-a}} \frac{\sqrt{2} \log 2}{\sqrt{N_1}\, c_{N_1} \log N_1} > \frac{A}{6\sqrt{b-a}} \cdot \frac{1}{c_{N_1}} = \frac{B}{c_{N_1}}.$$

Этим наше утверждение установлено для $m = 0$. Пусть теперь $m \geqslant 1$. Предположим, что теорема доказана для каждого целого числа $k \leqslant m - 1$. Тогда интервал $[a, b]$ мы можем разбить на конечное число подинтервалов $I_1, I_2, \ldots, I_r$, в которых каждая из функций $\Phi_n(x)$ $(n = 0, 1, \ldots, N_m - 1)$ остается постоянной. Интервал I_ϱ разделим пополам и полученные половины обозначим через I'_ϱ и I''_ϱ. Применим теперь лемму 2.4.4 с

$$C = C_{m+1} = \left[\frac{1}{N_{m+1} c_{N_{m+1}}^2 \log^2 N_{m+1}} + 1\right], \qquad p = p_{m+1} = 2^{m+1}.$$

Положим

$$F_m = \bigcup_{\varrho=1}^{r} \left(F(C_{m+1}, I'_\varrho) \cup F(C_{m+1}; I''_\varrho)\right) \tag{36}$$

и, кроме того,[1]

$$\Phi_{N_m+l-1}(x) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b-a}} \left\{\sum_{\varrho=1}^{r} f_l(C_{m+1}, p_{m+1}, I'_\varrho; x) - \sum_{\varrho=1}^{r} f_l(C_{m+1}, p_{m+1}, I''_\varrho; x)\right\}$$

для $l = 1, 2, \ldots, 2 \cdot 2^{m+1}$. Ясно, что эти функции также кусочно-постоянны. Докажем, что так построенные функции $\Phi_n(x)$ $(0 \leqslant n \leqslant N_{m+1} - 1)$ ортонормированы. В самом

[1] Автор предполагает, что $f_l(C, p, I, x) = 0$ при $x \bar{\in} I$. — *Прим. перев.*

деле, при $1 \leqslant i \leqslant 2^{m+2}$, $1 \leqslant j \leqslant 2^{m+2}$ мы имеем

$$\int_a^b \Phi_{N_m+i-1}(x)\,\Phi_{N_m+j-1}(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{b-a}\left\{\sum_{\varrho=1}^{r} \int_{I'_\varrho} f_i(C_{m+1}, p_{m+1}, I'_\varrho; x)\, f_j(C_{m+1}, p_{m+1}, I'_\varrho; x)\,dx + \right.$$

$$\left. + \sum_{\varrho=1}^{r} \int_{I''_\varrho} f_i(C_{m+1}, p_{m+1}, I''_\varrho; x)\, f_j(C_{m+1}, p_{m+1}, I''_\varrho; x)\,dx\right\}.$$

Вследствие ортогональности функций $f_l(C_{m+1}, p_{m+1}, I'_\varrho; x)$ на интервале I'_ϱ и функций $f_l(C_{m+1}, p_{m+1}, I''_\varrho; x)$ на интервале I''_ϱ для $i \neq j$ имеем

$$\int_a^b \Phi_{N_m+i-1}(x)\,\Phi_{N_m+j-1}(x)\,dx = 0.$$

Если же $i = j$, то, учитывая соотношение

$$\sum_{\varrho=1}^{r} (|I'_\varrho| + |I''_\varrho|) = \sum_{\varrho=1}^{r} |I_\varrho| = b-a$$

и свойство 1) из 2.4.4, мы находим, что

$$\int_a^b \Phi^2_{N_m+i-1}(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\sum_{\varrho=1}^{r} (|I'_\varrho| + |I''_\varrho|) = 1.$$

Мы должны еще доказать ортогональность вновь построенных функций к функциям, определенным ранее. Предположим, что $0 \leqslant n \leqslant N_m - 1$, $1 \leqslant l \leqslant 2^{m+2}$ и пусть $c_\varrho(n)$ обозначает постоянное значение функции $\Phi_n(x)$ на интервале I_ϱ. Тогда

$$\int_a^b \Phi_n(x)\,\Phi_{N_m+l-1}(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{b-a}}\left\{\sum_{\varrho=1}^{r} c_\varrho(n) \int_{I'_\varrho} f_l(C_{m+1}, p_{m+1}, I'_\varrho; x)\,dx - \right.$$

$$\left. - \sum_{\varrho=1}^{r} c_\varrho(n) \int_{I''_\varrho} f_l(C_{m+1}, p_{m+1}, I''_\varrho; x)\,dx\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5(b-a)}} \sum_{\varrho=1}^{r} c_\varrho(n)\,(|I'_\varrho| - |I''_\varrho|) \int_0^5 f_{C,p,l}(x)\,dx = 0.$$

Этим мы доказали ортонормальность всей N_{m+1}-членной системы $\{\Phi_n(x)\}$. Пусть теперь $x \in F_m$; тогда для соответственно выбранного ϱ либо $x \in F(C_{m+1}, I'_\varrho)$, либо $x \in F(C_{m+1}, I''_\varrho)$. По свойству 2) из 2.4.4, для каждого $x \in F$ существует такой индекс $n_m(x) < 2^{m+2} - 1$, что все функции $f_l(C_{m+1}, p_{m+1}, I'_\varrho; x)$ и $f_l(C_{m+1}, p_{m+1}, I''_\varrho; x)$ при $N_m < l \leqslant N_m + n_m(x)$ положительны, а потому значения функций $\Phi_{N_m}(x), \ldots, \Phi_{N_m+n_m(x)}(x)$ имеют один и тот же знак, положительный или отрицательный, в зависимости от того, будет ли $x \in I'_\varrho$ или $x \in I''_\varrho$. Кроме того, согласно свойству 2) из 2.4.4, мы имеем

$$|\Phi_{N_m}(x) + \ldots + \Phi_{N_m+n_m(x)}(x)| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{A}{\sqrt{b-a}} \sqrt{\left[\frac{1}{N_{m+1}c^2_{N_{m+1}} \log^2 N_{m+1}} + 1\right] 2^{m+1}} \, (m+1) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{A}{\sqrt{b-a}} \frac{\sqrt{2^{m+1}}}{\sqrt{N_{m+1}}\, c_{N_{m+1}} \log N_{m+1}} (m+1).$$

Из условия $N_{m+1} = 2^{m+3} - 4$ следуют неравенства $\sqrt{N_{m+1}} < 2\sqrt{2^{m+1}}$ и $\frac{1}{3}\log N_{m+1} \leqslant m+1$, а потому

$$|\Phi_{N_m}(x) + \ldots + \Phi_{N_m+n_m(x)}(x)| \geqslant \frac{A}{6\sqrt{b-a}} \frac{1}{c_{N_{m+1}}} = \frac{B}{c_{N_{m+1}}}.$$

Этим справедливость свойства b) доказана при $k = m$. Чтобы завершить доказательство леммы, нам нужно еще убедиться, что соотношения (35) и a) справедливы при $k = m$. Но в силу (36),

$$|F_m| = \frac{1}{5}\left[\frac{1}{N_{m+1}\, c^2_{N_{m+1}} \log^2 N_{m+1}} + 1\right]^{-1} \sum_{\varrho=1}^{r} (|I'_\varrho| + |I''_\varrho|) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{b-a}{5} \frac{N_{m+1}\, c^2_{N_{m+1}} \log^2 N_{m+1}}{N_{m+1}\, c^2_{N_{m+1}} \log^2 N_{m+1} + 1},$$

т. е. при $k = m$ выполняется (35). Наконец, из (36) ясно, что множества $F_0, F_1, \ldots, F_m$ стохастически независимы. Лемма 2.4.5 полностью доказана.

2.4.6. *Если монотонно убывающая последовательность положительных чисел $\{c_n\}$ удовлетворяет условию $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \log^2 n = \infty$,* *то множество*

$$F = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{l=k}^{\infty} F_l$$

имеет меру $|F| = b - a$.

В самом деле, пусть CM обозначает дополнение произвольного множества $M \subset [a, b]$ до $[a, b]$. Используя это обозначение, сумму множеств $F_k \cup F_{k+1} \cup \ldots \cup F_s$ представим следующим образом:

$$\bigcup_{l=k}^{s} F_l = [a, b] - C \bigcup_{l=k}^{s} F_l = [a, b] - \bigcap_{l=k}^{s} CF_l.$$

Так как множества F_l стохастически независимы, то для меры этой суммы множеств справедливо соотношение

$$\left|\bigcup_{l=k}^{s} F_l\right| = (b-a)\left[1 - \frac{1}{b-a} \prod_{l=k}^{s} ((b-a) - |F_l|)\right] =$$
$$= (b-a)\left[1 - \prod_{l=k}^{s}\left(1 - \frac{|F_l|}{b-a}\right)\right]. \quad (37)$$

Используя равенство $N_l = 2^{l+2} - 4$ и монотонное убывание последовательности $\{c_n^2\}$, мы получаем следующую оценку:

$$\sum_{n=N_1}^{N_m-1} c_n^2 \log^2 n = \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{n=N_k}^{N_{k+1}-1} c_n^2 \log^2 n \leqslant \sum_{k=1}^{m-1} (N_{k+1} - N_k)\, c_{N_k}^2 \log^2 N_k =$$
$$= \sum_{k=1}^{m-1} 2^{k+2}\, c_{N_k}^2 \log^2 N_k \leqslant 2 \sum_{k=1}^{m-1} N_k\, c_{N_k}^2 \log^2 N_k.$$

Так как, по нашему предположению, ряд $\sum c_n^2 \log^2 n$ расходится, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} N_k\, c_{N_k}^2 \log^2 N_k = \infty.$$

Поэтому, в силу (35),

$$\sum_{m=1}^{\infty} |F_m| = \infty,$$

и, применяя одну элементарную теорему о бесконечных произведениях, мы получаем

$$\prod_{l=k}^{\infty}\left(1-\frac{|F_l|}{b-a}\right)=0 \qquad (k=0, 1, \ldots).$$

После этого из (37) выводим

$$\left|\bigcup_{l=k}^{\infty} F_l\right| = b-a \qquad (k=0, 1, \ldots),$$

и, следовательно, $|F| = b-a$.

После этой подготовки мы теперь в состоянии доказать теорему 2.4.2 в несколько строк. Из леммы 2.4.5 делаем вывод о существовании ортонормированной системы $\{\Phi_n(x)\}$, для которой в каждой точке $x \in F_m$ имеется индекс $n_m(x) < 2^{m+2}$ такой, что имеет место соотношение

$$|\Phi_{N_m}(x)+\ldots+\Phi_{N_m+n_m(x)}(x)| > \frac{B}{c_{N_{m+1}}}. \tag{38}$$

Но если точка $x \in F$, то из определения множества F следует ее принадлежность также и бесконечно многим F_m, т. е. неравенство (38) выполняется для бесконечно многих номеров m. В силу свойства b) из леммы 2.4.5, все значения функций $\Phi_{N_m}(x), \ldots, \Phi_{N_m+n_m(x)}(x)$ имеют один и тот же знак, а потому отношение

$$Q_m = \left|\frac{c_{N_m}\Phi_{N_m}(x)+\ldots+c_{N_m+n_m(x)}\Phi_{N_m+n_m(x)}(x)}{\Phi_{N_m}(x)+\ldots+\Phi_{N_m+n_m(x)}(x)}\right|$$

можно рассматривать как взвешенные средние[1] монотонно убывающей последовательности чисел $c_{N_m}, \ldots, c_{N_m+n_m(x)}$, причем значение этого отношения заключено между c_{N_m} и $c_{N_m+n_m(x)}$. Следовательно,

$$|c_{N_m}\Phi_{N_m}(x)+\ldots+c_{N_m+n_m(x)}(x)\Phi_{N_m+n_m(x)}(x)| =$$

$$= Q_m|\Phi_{N_m}(x)+\ldots+\Phi_{N_m+n_m(x)}(x)| > \frac{Q_m B}{c_{N_{m+1}}} \geqslant \frac{Bc_{N_m+n_m(x)}}{c_{N_{m+1}}}.$$

[1] Под взвешенными средними числовой последовательности $a_1, a_2, \ldots$ понимается следующее: пусть $p_1, p_2, \ldots$ — положительные числа, тогда n-ми взвешенными средними последовательности $\{a_n\}$ будут числа

$$M_n = \frac{p_1a_1+p_2a_2+\ldots+p_na_n}{p_1+p_2+\ldots+p_n}.$$

Очевидно, что если числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ положительны, то M_n заключено между наибольшим и наименьшим из этих чисел. — *Прим. ред.*

Из неравенства $n_m(x) < 2^{m+2}$ имеем $N_m + n_m(x) < 2^{m+2} - 4 + 2^{m+2} = N_{m+1}$, а потому, принимая во внимание монотонность последовательности коэффициентов $\{c_n\}$, убеждаемся в справедливости оценки $c_{N_m + n_m(x)}/c_{N_m} \geqslant 1$. Таким образом,

$$\left| c_{N_m} \Phi_{N_m}(x) + \ldots + c_{N_m + n_m(x)} \Phi_{N_m + n_m(x)}(x) \right| \geqslant B > 0.$$

Последняя оценка справедлива для каждого $x \in F$ и для бесконечно многих номеров m, причем, в силу $N_m + n_m(x) < N_{m+1} - 1$, суммы, стоящие слева, не имеют общих членов для различных m. Следовательно, ортогональный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \Phi_n(x)$ расходится во всех точках $x \in F$, т. е., в силу 2.4.6, расходится почти всюду. Чтобы сделать его всюду расходящимся, достаточно изменить только значения $\Phi_n(x)$ на том нуль-множестве, где ряд, возможно, сходится (например, положить $\Phi_n(x) = \infty$). Тогда полученный ряд всюду расходится, как это и утверждалось в 2.4.2.

Литературные указания к теоремам 2.4.1 и 2.4.2 приведены в тексте. Мы можем еще добавить, что, как уже упоминалось, основная идея этой конструкции, т. е. лемма 2.4.4 и ядро приведенного в лемме 2.4.5 построения, предложена Меньшовым. (Основная идея приведенного в тексте упрощенного доказательства леммы 2.4.4 принадлежит Качмажу [7]). Тандори так усовершенствовал конструкцию Меньшова, что ему удалось получить значительно более сильные результаты, чем оригинальная теорема 2.4.1. Именно переработкой идеи Меньшова ему удалось доказательство провести таким путем, что основное условие используется только при доказательстве 2.4.6; этот факт интересен и сам по себе. Позднее Меньшов [7] и [8] доказал теорему 2.4.1 также и в следующей более общей форме[1].

Если $\{w(n)\}$ монотонно возрастает и $w(n) = o(\log n)$, то существует всюду расходящийся ортогональный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$, коэффициенты которого

[1] Из приведенной формулировки теоремы Д. Е. Меньшова совсем не ясно, зависят ли полиномы $\varphi_n(x)$ от последовательности $\{w(n)\}$. На самом же деле Д. Е. Меньшов доказал, что существует единая ортонормированная система полиномов $\{\varphi_n(x)\}$, которая ограничена в совокупности и такая, что для всякой положительной (не обязательно монотонной) последовательности $w(n) = o(\log n)$ существуют числа c_n такие, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n^2 w^2(n) < \infty$ и в то же время ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$ всюду расходится. — *Прим. ред.*

удовлетворяют условию $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 [w(n)]^2 < \infty$ *и, кроме того, функции* $\varphi_n(x)$ *являются ограниченными в совокупности полиномами, т. е.* $|\varphi_n(x)| \leq M$ $(n = 0, 1, \ldots)$, *где* M *константа.*

Доказательство этой теоремы длинно и сложно. Интересно, что Тандори [5] также расширил свою теорему 2.4.2 в этом направлении. Результат формулируется следующим образом:

Если $|c_n| \geq q_n$, *где* $\{q_n\}$ — *положительная монотонно убывающая последовательность, удовлетворяющая условию* $\sum_{n=1}^{\infty} q_n^2 \log^2 n = \infty$, *то существует ортонормированная система* $\{\Phi_n(x)\}$, *такая, что* $|\Phi_n(x)| \leq M$ $(n = 0,1, \ldots; x \in [a, b])$ *и ортогональный ряд* $\sum c_n \Phi_n(x)$ *всюду расходится.*

Доказательство этой теоремы трудно, и мы не будем его приводить.

Недавно Лейндлер [1] соответствующим уточнением метода Меньшова показал справедливость следующего утверждения: если для ортогональных рядов можно установить общую теорему о расходимости, то существует ряд, имеющий тот же характер расходимости, членами которого являются ортонормированные полиномы. Доказательство этого утверждения тоже длинно и трудно. Оно основано на той общей идее, что ортонормированные функции $\varphi_n(x)$ из расходящегося ряда $\sum c_n\varphi_n(x)$ можно достаточно хорошо приблизить подходящим образом выбранными ортонормированными полиномами $P_n(x)$.

Все эти примеры всюду расходящихся рядов при $\sum c_n^2 < \infty$, в силу теоремы Рисса—Фишера 1 2.4, являются разложениями L^2-интегрируемых функций. Можно было бы предполагать, что сходимость может быть существенно улучшена, если на структуру разлагаемой функции $f(x)$ накладывать больше, чем $f \in L^2$. Однако это не так. Именно, опираясь на 2.4.1, сильными средствами функционального анализа Банах [1] доказал глубокую теорему, которая, например, для случая дифференцируемых функций утверждает следующее:

Существует континуум таких ортонормированных систем функций $\{\varphi_n(x)\}$, *что разложение*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \sim f(x)$$

каждой непрерывно дифференцируемой функции $f(x) \not\equiv 0$ *почти всюду расходится.*

Все эти рассуждения показывают, что в общей теории сходимости ортогональных рядов получены в некоторой степени окончательные результаты. Этот факт вытекает также из некоторых других теорем, в большей своей части найденных Тандори [5] и указывающих на то, что не может быть усилено ни одно из следствий 2.3.3—2.3.5 фундаментальной теоремы 2.3.2. Действительно, опираясь на 2.4.2, можно получить следующие результаты:

1. *Если $\{w(n)\}$ — монотонно возрастающая последовательность положительных чисел, причем $w(n) = o(\log n)$, то существует такая ортонормированная система $\{\Phi_n(x)\}$, что для нее можно построить ортогональный ряд $\sum c_n \Phi_n(x)$ с $\sum c_n^2 < \infty$, частичные суммы которого всюду удовлетворяют условию*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{w(n)} \left| \sum_{k=1}^{n} c_k \Phi_k(x) \right| = \infty$$

(невозможность улучшения 2.3.3).

2. *Если последовательность* $\left\{ \sum_{k=\nu_n+1}^{\nu_{n+1}} c_k^2 \right\}$ $(\nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_n < \ldots)$ *монотонно убывает и если* $\sum_{n=1}^{\infty} \log^2 n \sum_{k=\nu_n+1}^{\nu_{n+1}} c_k^2 = \infty$, *то существует ортонормированная система $\{\Phi_n(x)\}$, для которой последовательность* $\left\{ \sum_{k=1}^{\nu_n} c_k \Phi_k(x) \right\}$ *всюду расходится.*

3. *Если последовательность $\{w(n)\}$ положительна, монотонно возрастает и*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log^2 n}{w^2(n)} = \infty,$$

то существует ортонормированная система $\{\Phi_n(x)\}$, такая, что почти всюду на $[a, b]$ справедливо равенство

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{w(n)} \left| \sum_{k=0}^{n} \Phi_k(x) \right| = \infty.$$

(невозможность улучшения для случая Радемахера теоремы 2.3.5).

Нам кажется, что, исходя из 2.4.2, с бóльшими или меньшими затруднениями можно, вероятно, получить и невозможность улучшения общего случая теоремы 2.3.5. Ограничимся схемой доказательства 1.

Выберем прежде всего положительную монотонно возрастающую числовую последовательность $\{v(n)\}$ так, чтобы $w(n) = o\{v(n)\}$ и $v(n) = o(\log n)$. Из 2.4.2 следует существование всюду расходящегося ортогонального ряда $\sum c_n \Phi_n(x)$, для которого $\sum c_n^2 v^2(n) < \infty$. Полагая $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k v(k) \Phi_k(x)$ и применяя преобразование Абеля, находим

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \Phi_k(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{v(k)} - \frac{1}{v(k+1)} \right) s_k(x) + \frac{s_n(x)}{v(n)}.$$

Так как

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{v(k)} - \frac{1}{v(k+1)} \right) \int_a^b |s_k(x)|\, dx \leq$$

$$\leq \sqrt{b-a} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{v(k)} - \frac{1}{v(k+1)} \right) \sqrt{\sum_{j=0}^{k} c_j^2 v^2(j)} < \infty,$$

то ряд $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{v(k)}-\frac{1}{v(k+1)}\right) s_k(x)$ почти всюду сходится, а потому $\frac{s_n(x)}{v(n)}$ почти всюду расходится. Но $w(n)=o\,(v(n))$, поэтому, после возможного изменения $\Phi_n(x)$ на нуль-множестве, мы выводим отсюда справедливость высказанного соотношения: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left|\frac{s_n(x)}{w(n)}\right|=\infty$ для всех x.

§ 5. Сходимость при любой перестановке членов

Если сумма квадратов коэффициентов ортогонального ряда сходится, то по теореме Рисса—Фишера это означает, что данный ряд является разложением некоторой функции $f\in L^2_\mu$ по ортонормированной системе $\{\varphi_n(x)\}$. Если изменить порядок членов этого ряда, то новое разложение функции $f(x)$ будет уже разложением не по $\{\varphi_n(x)\}$, а по новой системе $\{\psi_n(x)\}$, где $\psi_n(x)$ обозначает некоторую функцию $\varphi_{k_n}(x)$, которая после перестановки членов стоит на n-м месте. Сходимость разложения $f(x)$ по системе $\{\varphi_n(x)\}$ не влечет, конечно, сходимости разложения $f(x)$ по системе $\{\psi_n(x)\}$. Однако общие ортогональные системы не имеют «естественного» порядка, а потому нет никаких оснований для того, чтобы разложение функции $f(x)$ по системе $\{\varphi_n(x)\}$ в заданном порядке предпочитать ее же разложению по этой системе в другом порядке. Следовательно, можно с полным правом спросить: при каких условиях ортогональный ряд почти всюду сходится при любом порядке его членов? Здесь выражение «почти всюду» мы понимаем, конечно, так, что нуль-множества точек расходимости могут изменяться с каждой перестановкой; иначе сходимость почти всюду при любой перестановке членов сводилась бы к абсолютной сходимости почти всюду. В качестве ответа на наш вопрос мы докажем следующую теорему:

2.5.1. *Пусть $\{\nu_n\}$ — возрастающая последовательность индексов, для которой $\log \nu_{n+1} = O\,(\log \nu_n)$. Если существует положительная монотонно возрастающая функция $\lambda(x)$, такая, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda(\nu_n)}<\infty,$$

то из условия

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \lambda(n) \log^2 n < \infty \tag{39}$$

следует сходимость почти всюду ортогонального ряда $\sum c_n\varphi_n(x)$ *при любой перестановке его членов.*

В самом деле, пусть $\sum c_{n_k}\varphi_{n_k}(x)$ означает ряд, полученный из ряда (29) после перестановки его членов. Нам нужно из заданных условий вывести сходимость почти всюду этого ряда. Для этой цели рассмотрим различные суммы $\sum\limits_{i\leqslant n_k\leqslant j} c_{n_k}\varphi_{n_k}(x)$, где $\nu_n < i \leqslant j \leqslant \nu_{n+1}$. Согласно 2.3.1, существует функция $\delta_n(x) \geqslant 0$, для которой

$$\left|\sum_{i\leqslant n_k\leqslant j} c_{n_k}\varphi_{n_k}(x)\right| \leqslant \delta_n(x),$$

$$\int_a^b \delta_n^2(x)\, d\mu(x) = O\left(\log^2(\nu_{n+1}-\nu_n)\right)\sum_{k=\nu_n+1}^{\nu_{n+1}} c_k^2,$$

где, по предположению, $\log(\nu_{n+1}-\nu_n) = O(\log \nu_n)$. Отсюда выводим соотношение

$$\lambda(\nu_n)\int_a^b \delta_n^2(x)\, d\mu(x) = \lambda(\nu_n)\; O(\log^2 \nu_n)\sum_{k=\nu_n+1}^{\nu_{n+1}} c_k^2 =$$

$$= O(1)\sum_{k=\nu_n+1}^{\nu_{n+1}} c_k^2\lambda(k)\log^2 k,$$

а потому, в силу (39),

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(\nu_n)\int_a^b \delta_n^2(x)\, d\mu(x) < \infty.$$

Учитывая 1.2.2, мы убеждаемся в сходимости почти всюду ряда $\sum \lambda(\nu_n)\,\delta_n^2(x)$. Поэтому, используя неравенство Коши и сходимость ряда $\sum [\lambda(\nu_n)]^{-1}$, заключаем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n(x) \leqslant \left\{\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(\nu_n)\,\delta_n^2(x)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda(\nu_n)}\right\}^{1/2} < \infty$$

для почти всех x. Таким образом, если мы выберем индекс m столь большим, чтобы для всех $k \geqslant m$ выполнялось неравенство $n_k > \nu_N$, где N — любое достаточно большое целое число, то почти всюду справедливо соотношение

$$\left|\sum_{k=m}^{m+p} c_{n_k}\varphi_{n_k}(x)\right| \leqslant \sum_{n=N}^{\infty} \delta_n(x) = o_x(1) \qquad (p = 1, 2, \ldots).$$

Следовательно, ряд $\sum c_{n_k}\varphi_{n_k}(x)$ сходится почти всюду, а это и требовалось доказать[1].

Из этой теоремы можно получить некоторые другие утверждения, которые выделяются своей простотой и ясностью.

2.5.2. *Пусть* $\{c_{n_k}\}$ — *последовательность отличных от нуля коэффициентов ортогонального ряда* (29). *Тогда, если функция* $g(x) > 0$ *монотонно возрастает и*

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{g(x)} < \infty,$$

то из условий $c_{n_k} = o(1)$ *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{n_k}^2 g\left(\log\log\frac{1}{c_{n_k}^2}\right)\log^2\frac{1}{c_{n_k}^2} < \infty \tag{40}$$

следует сходимость почти всюду ортогонального ряда (29) *при любой перестановке его членов.*

Так как (40) выполняется при любой перестановке членов, то без ограничения общности мы можем предполагать

---

[1] В доказательстве теоремы 2.5.1 автор допустил ошибку. Он рассматривает и оценивает суммы $\sum_{i\leqslant n_k\leqslant j} c_{n_k}\varphi_{n_k}(x)$, которые есть не что иное, как $\sum_{p=i}^{j} c_p\varphi_p(x)$. Поэтому оценка приводит к сходимости почти всюду ряда $\sum_{p=1}^{\infty} c_p\varphi_p(x)$, а не ряда $\sum_{k=1}^{\infty} c_{n_k}\varphi_{n_k}$, как это утверждает автор. Правильно следует рассуждать так: функции $\varphi_{n_k}(x)$ такие, что $\nu_n < n_k \leqslant \nu_{n+1}$, расположим *в порядке возрастания индекса* k (а не n_k!), и к так упорядоченной группе функций применим теорему 2.3.1. Дальнейшие рассуждения проходят так же, как и у автора, правда с учетом указанного обстоятельства. Полезно еще заметить, что мажоранта $\delta_N(x)$ в теореме 2.3.1 существенно зависит от порядка следования функций. — *Прим. ред.*

монотонное убывание последовательности $\{c^2_{n_k}\}$. Так как $c_{n_k} = o(1)$, то для достаточно больших номеров справедливы неравенства

$$\log \frac{1}{c^2_{n_k}} > 1 \quad \text{и} \quad g\left(\log\log \frac{1}{c^2_{n_k}}\right) > 1,$$

а потому из (40) следует неравенство $\sum_{n=1}^{\infty} c^2_{n_k} < \infty$. Отсюда и из монотонности $\{c^2_{n_k}\}$ получаем оценку $c^2_{n_k} = o(n^{-1})$, которая вместе с (40) доказывает справедливость соотношения

$$\sum_{n=4}^{\infty} c^2_{n_k} g(\log\log n) \log^2 n < \infty .$$

Таким образом, выполнены условия теоремы 2.5.1 при $\nu_n = 2^{2^n}$ и $\lambda(x) = g(\log\log x)$ и теорема 2.5.2 доказана.

2.5.3. *Пусть* $\{|c_{m_n}|\}$ — *расположенная в порядке монотонности последовательность абсолютных величин отличных от нуля коэффициентов ряда* (29). *Тогда, если для некоторого* $\varepsilon > 0$

$$\alpha_n \geqslant (4+\varepsilon)\frac{\log\log n}{\log n}, \tag{41}$$

то из условия

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_{m_n}|^{2-\alpha_n} < \infty$$

вытекает сходимость почти всюду ортогонального ряда (29) *при любой перестановке его членов.*

Из монотонности $\{c^2_{m_n}\}$ и из сходимости ряда $\sum c^2_{m_n}$ следует неравенство $c^2_{m_n} \leqslant n^{-1}$ для всех достаточно больших индексов. Следовательно, справедливо неравенство

$$\log \frac{1}{c^2_{m_n}} \geqslant \log n.$$

Поэтому из (41) вытекает, что

$$\alpha_n \geqslant (4+\varepsilon)\frac{\log\log n}{\log 1/c^2_{m_n}}$$

при всех достаточно больших n.

Выберем теперь N столь большим, чтобы для $n \geqslant N$ выполнялось условие $\varepsilon \log\log n \geqslant 4 \log\log\log n$. Тогда имеем

$$\frac{\alpha_n}{2} \log \frac{1}{c_{m_n}^2} \geqslant 2 (\log\log n + \log\log\log n),$$

а это означает, что

$$\left(\frac{1}{c_{m_n}^2}\right)^{\frac{\alpha_n}{2}} \geqslant (\log\log n)^2 \log^2 n,$$

т. е.

$$|c_{m_n}|^{-\alpha_n} \geqslant (\log\log n)^2 \log^2 n.$$

Отсюда следует неравенство

$$\sum_{n=N}^{\infty} c_{m_n}^2 (\log\log n)^2 \log^2 n \leqslant \sum_{n=N}^{\infty} |c_{m_n}|^{2-\alpha_n} < \infty$$

Так как ряд, стоящий слева, сходится, то, применяя 2.5.1 при $\nu_n = 2^{2^n}$ и $\lambda(x) = (\log\log x)^2$, мы убеждаемся в справедливости нашего утверждения.

Этот результат содержит в себе в качестве частного случая следующую очень простую и, конечно, более слабую теорему[1].

2.5.4. *Если*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^{2-\varepsilon} < \infty \qquad (0 < \varepsilon < 2),$$

то ортогональный ряд (29) *сходится почти всюду при любой перестановке его членов.*

Отметим, что константа $4 + \varepsilon$ в условии (41) не может быть существенно улучшена, ибо справедлива следующая теорема:

2.5.5. *Если монотонно убывающая последовательность положительных чисел* $\{\alpha_n\}$ *при некотором* $\varepsilon > 0$ *удовлетворяет условию*

$$\alpha_n \leqslant (4 - \varepsilon) \frac{\log\log n}{\log n},$$

---

[1] Здесь следует отметить, что хотя теорема 2.5.4 и проста, но именно эта теорема Д. Е. Меньшова явилась началом общей теории безусловной сходимости ортогональных рядов. Тем самым значение и важность этой теоремы не меньше, чем все ее последующие обобщения. — *Прим. ред.*

то существует всюду расходящийся ортогональный ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \Phi_n(x)$, *коэффициенты которого образуют положительную монотонно убывающую последовательность, для которой* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^{2-\alpha_n} < \infty$.

В самом деле, если для $m = 1, 2, \ldots$ положим

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{3^m m^3}} \qquad (3^m \leqslant n < 3^{m+1}),$$

то получим

$$\sum_{n=3}^{\infty} c_n^2 \log^2 n = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{3^m m^3} \sum_{n=3^m}^{3^{m+1}-1} \log^2 n \geqslant \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 \log^2 3}{m} = \infty.$$

Так как последовательность $\{c_n\}$ монотонно убывает и ряд $\sum c_n^2 \log^2 n$ расходится, то, согласно теореме 2.4.2, существует ортонормированная система $\{\Phi_n(x)\}$, для которой ортогональный ряд $\sum c_n \Phi_n(x)$ всюду расходится. Нам осталось ещё показать сходимость ряда $\sum |c_n|^{2-\alpha_n}$. Но так как $\{\alpha_n\}$ монотонно убывает, то мы имеем

$$\sum_{n=3}^{\infty} |c_n|^{2-\alpha_n} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{3^m m^3} \sum_{n=3^m}^{3^{m+1}-1} 3^{\frac{m}{2}\alpha_n} m^{\frac{3}{2}\alpha_n} \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{m^3} \cdot 3^{m\frac{\alpha_{3^m}}{2}} m^{3\frac{\alpha_{3^m}}{2}},$$

причем

$$\alpha_{3^m} \leqslant (4-\varepsilon) \frac{\log m + \log\log 3}{m \log 3} < (4-\varepsilon_1) \frac{\log m}{m \log 3}.$$

Это означает, что

$$m^{\frac{3\alpha_{3^m}}{2}} < m^{\left(6-\frac{3\varepsilon_1}{2}\right)\frac{\log m}{m \log 3}} = O(1)$$

и, кроме того,

$$3^{\frac{m \cdot \alpha_{3^m}}{2}} < 3^{\left(2-\frac{\varepsilon_1}{2}\right)\frac{\log m}{\log 3}} = m^{2-\frac{\varepsilon_1}{2}},$$

а потому

$$\sum_{n=3}^{\infty} c_n^{2-\alpha_n} = \sum_{m=1}^{\infty} O\left(\frac{1}{m^{1+\frac{\varepsilon_1}{2}}}\right) < \infty.$$

Теорема полностью установлена.

Как основная в этой теории теорема 2.5.1, так и теорема 2.5.2 установлены Орличем [1]; 2.5.4 доказана Орличем[1] [1] и Меньшовым [4], тогда как теоремы 2.5.3 и 2.5.5 высказаны Алексичем [12].

Вопрос о том, не являются ли эти теоремы, в частности 2.5.1 и 2.5.2, неулучшаемыми в том же смысле, что и теорема 2.3.2, не решен. Нетрудно видеть, что теоремы 2.5.3 и 2.5.5 не получают сильного развития, так как можно показать следующее: в 2.5.3, например, имеем

$$\alpha_n \geqslant 4\,\frac{\log\log n + \log\log\log n}{\log n},$$

а в 2.5.5 —

$$\alpha_n \leqslant 4\,\frac{\log\log n - \log\log\log n}{\log n}.$$

Однако неясно, образуют ли числа

$$\alpha_n = 4\,\frac{\log\log n}{\log n}$$

последовательность, с помощью которой можно сформулировать критерий сходимости ортогональных рядов, или же существует всюду расходящийся ряд $\sum c_n \Phi_n(x)$, для которого $\sum |c_n|^{2-\alpha_n} < \infty$.

Положение, по-видимому, будет еще более сложным, если мы попытаемся исследовать вопрос о возможности улучшения критерия (40) в теореме 2.5.2. В этом случае мы не имеем никаких путей к решению вопроса. Мы только заметим, что независимость критерия (40) от перестановки членов ряда не означает еще сходимости почти всюду ортогонального ряда при любой перестановке его членов. В самом деле, условие (30) также можно сформулировать в не зависящей от порядка членов форме, однако отсюда не следует сходимость почти всюду ортогонального ряда при любой перестановке его членов.

Пусть $\{c_n\}$ — положительная монотонно убывающая нуль-последовательность. Тогда условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \log^2 \frac{1}{c_n^2} < \infty$$

достаточно для сходимости почти всюду ортогонального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$, образованного по произвольной ортонормированной системе $\{\varphi_n(x)\}$. Если же $\{c_n\}$ выпукла, то это условие также и необходимо.

Действительно, так как $c_n \to 0$, то ряд $\sum c_n^2$ сходится, а тогда из монотонности последовательности $\{c_n\}$ следует оценка $c_n^2 = o(n^{-1})$. Поэтому

---

[1] На самом деле теорема 2.5.4 доказана впервые Меньшовым [4]. Орлич в указанной автором работе [1] сам говорит, что эта теорема установлена Меньшовым (который опубликовал ее в январе 1924 года в *C. r. Acad. sci.*, 178 (1924), стр. 301—303) и что Орлич лишь обобщает теорему Меньшова. — *Прим. ред.*

мы имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \log^2 n = O(1) \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \log^2 \frac{1}{c_n^2} < \infty,$$

и сходимость почти всюду ряда $\sum c_n \varphi_n(x)$ есть следствие из **2.3.2**. Для доказательства необходимости[1] нашего условия мы различаем между собой два случая; именно, так как $\{c_n\}$ выпуклая нуль-последовательность, то для достаточно больших индексов имеем одно из двух: либо $c_n < n^{-2}$, либо $c_n \geqslant n^{-2}$. В первом случае по правилу Лопиталя находим $c_n \log^2 \frac{1}{c_n^2} \to 0$, а потому

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \log^2 \frac{1}{c_n^2} = O(1) \sum_{n=1}^{\infty} c_n = O(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Во втором случае для достаточно больших номеров справедливо неравенство $\log^2 \frac{1}{c_n^2} \leqslant 16 \log^2 n$ и, следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \log^2 \frac{1}{c_n^2} = O(1) \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \log^2 n.$$

Из предполагаемой сходимости почти всюду ортогонального ряда $\sum c_n \varphi_n(x)$, из монотонности последовательности коэффициентов $\{c_n\}$ и из 2.4.3 следует сходимость ряда $\sum c_n^2 \log^2 n$, т. е. наше утверждение доказано и в этом случае.

В случае общей последовательности коэффициентов $\{c_n\}$ не решен еще вопрос о том, является ли условие $\sum c_n^2 \log^2 \frac{1}{c_n^2} < \infty$ достаточным или необходимым для сходимости почти всюду ортогональных рядов. Причина состоит в том, что в общем случае условие $\sum c_n^2 \log^2 n < \infty$

---

[1] При доказательстве необходимости не обязательно требовать, чтобы $\{c_n\}$ была выпуклой. В самом деле, при любом $\alpha > 0$ и любых c_n с $|c_n| < 1$ справедливо неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \log^\alpha \frac{1}{c_n^2} \leqslant \sum_n{}' + \sum_n{}'' = O(1) \left\{ \sum_{|c_n| \leqslant \frac{1}{n^2}}' |c_n| + \sum_{|c_n| > \frac{1}{n^2}} c_n^2 \log^\alpha n \right\} =$$

$$= O(1) \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \log^\alpha n \right\}. \text{ — } \textit{Прим. ред.}$$

не является необходимым для сходимости почти всюду ортогональных рядов $\sum c_n \varphi_n(x)$. Так, например, ортогональные ряды $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2} \varphi_{2^n}(x)$ сходятся почти всюду, однако справедливо равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \log^2 n = \infty.$$

§ 6. Суммирование ортогональных рядов методами Чезаро

При изучении вопросов суммируемости ортогонального ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \tag{42}$$

обращает на себя внимание тот любопытный факт, что при условии

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 < \infty \tag{43}$$

наиболее употребительные методы суммирования, т. е. методы Чезаро и Абеля, с точностью до нуль-множества дают один и тот же результат. В самом деле, справедлива следующая теорема:

2.6.1. *Если ортогональный ряд* (42) *A-суммируем почти всюду на множестве E, то при выполнении условия* (43) *он также и* (C, α)*-суммируем почти всюду на E для любого* $\alpha > 0$.

Через $\sigma_n^{\alpha}(x)$ обозначим n-е (C, α)-средние ряда (42). Если речь идет о средних нулевого порядка (частичные суммы), то вместо $\sigma_n^0(x)$ пишем $s_n(x)$, а средние первого порядка (арифметические средние) обозначаем просто через $\sigma_n(x)$. Прежде чем перейти к доказательству теоремы 2.6.1, мы установим следующую теорему о сильной суммируемости:

2.6.2. *Если ортогональный ряд* (42), *коэффициенты которого удовлетворяют* (43), *при некотором* $\alpha > \frac{1}{2}$ (C, α)*-суммируем почти всюду на множестве E, то он также и сильно* (C, α)*-суммируем почти всюду на E*[1].

[1] Без выполнения условия (43) теорема **2.6.2** теряет силу. — *Прим. ред.*

Действительно, если в точках $x \in E$, являющихся точками сходимости последовательности $\{\sigma_n^\alpha(x)\}$, мы положим $s(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n^\alpha(x)$, то последний член в неравенстве

$$\sum_{\nu=0}^{n} [\sigma_\nu^{\alpha-1}(x) - s(x)]^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{\nu=0}^{n} [\sigma_\nu^{\alpha-1}(x) - \sigma_\nu^\alpha(x)]^2 + 2\sum_{\nu=0}^{n} [\sigma_\nu^\alpha(x) - s(x)]^2$$

почти всюду на E имеет порядок $o_x(n)$. Поэтому наше утверждение будет доказано, если мы покажем стремление к нулю почти всюду на E следующих функций

$$\delta_n^\alpha(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n} [\sigma_\nu^{\alpha-1}(x) - \sigma_\nu^\alpha(x)]^2.$$

Прежде всего из (27) следует неравенство

$$\int_a^b \delta_{2^m}^\alpha(x)\, d\mu(x) = \frac{1}{(2^m+1)\,\alpha^2}\sum_{\nu=0}^{2^m} \frac{1}{(A_\nu^\alpha)^2}\sum_{k=1}^{\nu} (A_{\nu-k}^{\alpha-1})^2 k^2 c_k^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(2^m+1)\,\alpha^2}\sum_{k=1}^{2^m} k^2 c_k^2 \sum_{\nu=k}^{\infty}\left(\frac{A_{\nu-k}^{\alpha-1}}{A_\nu^\alpha}\right)^2.$$

Далее, учитывая (25) и условие $\alpha > \frac{1}{2}$, выводим оценку

$$\sum_{\nu=k}^{\infty}\left(\frac{A_{\nu-k}^{\alpha-1}}{A_\nu^\alpha}\right)^2 \leqslant \frac{1}{(A_k^\alpha)^2}\sum_{\nu=k}^{2k} (A_{\nu-k}^{\alpha-1})^2 + \sum_{\nu=2k+1}^{\infty}\left(\frac{A_{\nu-k}^{\alpha-1}}{A_\nu^\alpha}\right)^2 =$$

$$= O\left(\frac{1}{k^{2\alpha}}\right)\sum_{\nu=k}^{2k} (\nu - k + 1)^{2\alpha-2} + \sum_{\nu=2k+1}^{\infty} O\left(\frac{1}{(\nu-k)^2}\right) = O\left(\frac{1}{k}\right).$$

Отсюда выводим соотношение

$$\sum_{m=1}^{\infty}\int_a^b \delta_{2^m}^\alpha(x)\, d\mu(x) = \sum_{m=1}^{\infty} O\left(\frac{1}{2^m}\right)\sum_{k=1}^{2^m} k c_k^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k c_k^2 \sum_{2^m \geqslant k} \frac{1}{2^m} = O(1)\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty.$$

По теореме 1.2.2 ряд $\sum \delta_{2^m}^\alpha(x)$ сходится почти всюду, а потому $\delta_{2^m}^\alpha(x) = o_x(1)$ почти всюду. Пусть теперь n — произвольный индекс между 2^m и 2^{m+1}; тогда из определения функции $\delta_n^\alpha(x)$ следует оценка

$$\delta_n^\alpha(x) \leqslant \frac{2}{2^{m+1}+1} \sum_{\nu=0}^{2^{m+1}} [\sigma_\nu^{\alpha-1}(x) - \sigma_\nu^\alpha(x)]^2 = 2\delta_{2^{m+1}}^\alpha(x).$$

Стало быть, почти всюду справедлива оценка $\delta_n^\alpha(x) = o_x(1)$, чем и завершается доказательство.

Перейдем к доказательству теоремы 2.6.1. Из тождества

$$\sigma_\nu(x) - \sigma_{\nu-1}(x) = \frac{1}{\nu(\nu+1)} \sum_{k=1}^{\nu} kc_k \varphi_k(x),$$

и из (43) мы выводим соотношение

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \int_l^b \nu [\sigma_\nu(x) - \sigma_{\nu-1}(x)]^2 \, d\mu(x) \leqslant \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^3} \sum_{k=1}^{\nu} k^2 c_k^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 c_k^2 \sum_{\nu=k}^{\infty} \frac{1}{\nu^3} = O(1) \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty.$$

Из 1.2.2 делаем вывод о сходимости почти всюду следующего ряда:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu [\sigma_\nu(x) - \sigma_{\nu-1}(x)]^2.$$

Поэтому, согласно 2.2.6, A-суммируемость ряда (42) влечет его $(C, 1)$-суммируемость, а тогда по теореме 2.6.2 заключаем, что он сильно $(C, 1)$-суммируем почти всюду на E. Применяя теорему 2.2.7, для ряда (42) выводим его (C, β)-суммируемость почти всюду на E при любом $\beta > \frac{1}{2}$, а тогда из 2.6.2 следует и его сильная (C, β)-суммируемость почти всюду на E. Таким образом, утверждение теоремы 2.6.1 следует после повторного применения 2.2.7.

Эквивалентность $(C, 1)$- и A-суммируемости почти всюду доказана Качмажем [1]. Впоследствии Зигмунд [1] установил эквивалентность почти всюду всех положительных (C, α)-методов и A-суммируемости, а также эквивалентность почти всюду A-суммируемости и сильной $\left(C, \alpha > \frac{1}{2}\right)$-суммируемости. Последний результат является обобщением одной специальной теоремы Литлвуда и Харди [1] о сильной $(C, 1)$-

суммируемости рядов Фурье. Этими же авторами и введенно понятие сильной суммируемости. Проблема сильной $(C, 1)$-суммируемости почти всюду рассматривалась также Боргеном [1].

Очень сильная суммируемость. Ортогональный ряд (42) мы будем называть почти всюду *очень сильно* (C, α)-*суммируемым* к сумме $s(x)$, если для каждой монотонно возрастающей последовательности индексов $\{\nu_n\}$ и для почти всех x выполняется соотношение

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}[\sigma_{\nu_k}^{\alpha-1}(x)-s(x)]^2=o_x(1),$$

причем нуль-множество, на котором не выполняется это соотношение, зависит, вообще говоря, от выбора последовательности индексов $\{\nu_n\}$. Очень сильная (C, α)-суммируемость почти всюду является более строгим требованием, чем сильная суммируемость, не говоря уже об обычной (C, α)-суммируемости почти всюду[1]. Действительно, если сильная $(C, 1)$-суммируемость означает, что частичные суммы $s_{\nu_1}(x), s_{\nu_2}(x), \ldots$, которые портят сходимость, расположены «редко», то очень сильная суммируемость означает, что испорченных членов у этой «плохой» последовательности $\{s_{\nu_n}(x)\}$ «мало», т. е. портит сходимость только частичная подпоследовательность $\{s_{\nu_{n_m}}(x)\}$ из последовательности $\{s_{\nu_n}(x)\}$, и т. д. Несмотря на большое ограничение, которое заложено в требовании очень сильной суммируемости почти всюду, теорему 2.6.2 можно перенести на очень сильную суммируемость при довольно простых и приемлемых предположениях на коэффициенты:

2.6.3. *Пусть монотонно возрастающая последовательность чисел $\{\lambda_n\}$ такова, что последовательность $\left\{\frac{n}{\lambda_n}\right\}$ монотонно возрастает и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\lambda_n^{-1}$ сходится. Если ряд* (42) *A-суммируем почти всюду на E, то из условия*

$$c_n=O\left(\frac{1}{\sqrt{n\lambda_n}}\right) \tag{44}$$

следует очень сильная (C, α)-суммируемость почти всюду на E ортогонального ряда (42) *для любого $\alpha > \frac{1}{2}$.*

---

[1] Если ряд очень сильно $(C, 1)$-суммируем, например, в фиксированной точке x_0, то он также и сходится в точке x_0.

Как и при доказательстве 2.6.2, нам достаточно только доказать справедливость почти всюду на E соотношения

$$\sum_{m=1}^{n} [\sigma_{\nu_m}^{\alpha-1}(x) - \sigma_{\nu_m}^{\alpha}(x)]^2 = o_x(n).$$

Прежде всего, учитывая (27), находим

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \int_a^b [\sigma_{\nu_m}^{\alpha-1}(x) - \sigma_{\nu_m}^{\alpha}(x)]^2 \, d\mu(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sum_{k=1}^{\nu_m} \left(A_{\nu_m-k}^{\alpha-1}\right)^2 k^2 c_k^2}{\alpha^2 m \left(A_{\nu_m}^{\alpha}\right)^2}.$$

Из условия (44) мы имеем $k^2 c_k^2 = O\left(\frac{k}{\lambda_k}\right)$, а поэтому, принимая во внимание монотонное возрастание последовательности $\left\{\frac{k}{\lambda_k}\right\}$, соотношение (25) и предположение $\alpha > \frac{1}{2}$, получаем

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \int_a^b [\sigma_{\nu_m}^{\alpha-1}(x) - \sigma_{\nu_m}^{\alpha}(x)]^2 \, d\mu(x) =$$

$$= O(1) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\nu_m}{m \lambda_{\nu_m}} \cdot \frac{\sum_{k=1}^{\nu_m} (\nu_m - k + 1)^{2\alpha-2}}{\nu_m^{2\alpha}} = O(1) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m \lambda_{\nu_m}} < \infty.$$

Отсюда по теореме 1.2.2 заключаем о сходимости почти всюду следующего ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} [\sigma_{\nu_m}^{\alpha-1}(x) - \sigma_{\nu_m}^{\alpha}(x)]^2.$$

Таким образом, из теоремы 2.2.2 заключаем о справедливости почти всюду соотношения

$$\sum_{m=1}^{n} [\sigma_{\nu_m}^{\alpha-1}(x) - \sigma_{\nu_m}^{\alpha}(x)]^2 = o_x(n),$$

чем завершается доказательство нашего утверждения.

Если на коэффициенты c_n не налагать никаких других условий, кроме условия (43), то приходится ограничиваться несколько меньшим результатом, чем очень сильная суммируемость:

2.6.4. *Пусть* $\{\nu_n\}$ — *выпуклая последовательность индексов и пусть выполнено условие* (43). *Если ортогональный ряд* (42) *почти всюду на множестве E A-суммируем к* $s(x)$, *то почти всюду на E справедливо соотношение*

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}[s(x)-s_{\nu_k}(x)]^2=o_x(1).$$

Как и ранее, мы видим, что наше утверждение будет доказано, если мы убедимся в справедливости неравенства

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\int_a^b[s_{\nu_k}(x)-\sigma_{\nu_k}(x)]^2\,d\mu(x)<\infty.$$

Эту сумму, которую мы обозначим через S, можно оценить таким образом:

$$S=\sum_{m=k}^{\infty}\frac{1}{m(\nu_m+1)^2}\sum_{k=1}^{\nu_m}k^2c_k^2\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m\,\nu_n^2}\sum_{l=1}^{m}\sum_{k=\nu_{l-1}+1}^{\nu_l}k^2c_k^2\leqslant\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m\,\nu_m^2}\sum_{l=1}^{m}\nu_l^2\sum_{k=\nu_{l-1}+1}^{\nu_l}c_k^2.$$

Если положить

$$\sum_{k=\nu_{l-1}+1}^{\nu_l}c_k^2=C_l,$$

то, преобразовав стоящий справа ряд, мы получим

$$S\leqslant\sum_{l=1}^{\infty}C_l\nu_l^2\sum_{m=l}^{\infty}\frac{1}{m\nu_m^2},$$

где

$$\nu_l^2\sum_{m=l}^{\infty}\frac{1}{m\,\nu_m^2}=\frac{1}{l}+\nu_l^2\left(\sum_{m=l+1}^{2l}\frac{1}{m\,\nu_m^2}+\sum_{m=2l+1}^{4l}\frac{1}{m\,\nu_m^2}+\ldots\right)<$$

$$<\frac{1}{l}+\nu_l^2\left(\frac{1}{\nu_l^2}+\frac{1}{\nu_{2l}^2}+\ldots\right).$$

Но из выпуклости последовательности $\{\nu_n^2\}$ следует неравенство $2\nu_n^2\leqslant\nu_0^2+\nu_{2n}^2$, а потому $\nu_{2n}^2\geqslant q\,\nu_n^2$, причем $q>1$. Отсюда

$$\nu_l^2\left(\frac{1}{\nu_l^2}+\frac{1}{\nu_{2l}^2}+\ldots\right)\leqslant1+\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\ldots$$

и, следовательно,

$$\nu_l^2 \sum_{m=l}^{\infty} \frac{1}{m\nu_m^2} < \frac{1}{l} + \frac{1}{1-q}.$$

Наконец,

$$S \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} C_l\left(\frac{1}{l} + \frac{1}{1-q}\right) = O(1) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=\nu_{l-1}+1}^{\nu} c_k^2 < \infty,$$

чем и завершается доказательство нашего утверждения.

Казалось бы, можно предполагать, что утверждение теоремы 2.6.2 о сильной суммируемости может быть расширено до соответствующего утверждения об очень сильной суммируемости. Однако это не так, т. е. введенные в 2.6.3 ограничения на коэффициенты не являются излишними. Более того, справедливы следующие теоремы:

2.6.5. *Существует почти всюду сильно* $\left(C, \alpha > \frac{1}{2}\right)$*-суммируемый, но нигде очень сильно не суммируемый методом* $(C, 1)$ *ортогональный ряд.*

2.6.6. *Существует почти всюду очень сильно* $\left(C, \alpha > \frac{1}{2}\right)$*-суммируемый, но всюду расходящийся ортогональный ряд.*

В силу изложенного нами ранее, доказательство теоремы 2.6.6 очень просто. В самом деле, из 2.4.2 следует существование всюду расходящегося ортогонального ряда формы

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Phi_n(x)}{\sqrt{n}\log n}.$$

Коэффициенты этого ортогонального ряда, т. е. числа

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{n}\log n},$$

удовлетворяют требуемым в 2.6.3 ($\lambda_n = \log^2 n$) и в 2.8.1 условиям, а потому ряд почти всюду очень сильно суммируем.

Доказательство 2.6.5 является более глубоким и также опирается на 2.4.2. При доказательстве 2.6.5 мы будем использовать отдельные теоремы, которые доказаны в двух следующих параграфах; тем не менее доказательство 2.6.5 целесообразно провести в этом пункте.

Прежде всего, из 2.4.2 следует существование такого всюду расходящегося ортогонального ряда $\sum c_n \Phi_n(x)$, что $\sum c_n^2 \log^2 n =$

$= \infty$, но $\sum c_n^2 (\log\log n)^2 < \infty$. Последнее условие, в силу 2.8.1, обеспечивает (C, α)-суммируемость почти всюду этого ортогонального ряда. Из этого ряда мы выбираем бесконечное число членов $c_1'\Phi_1'(x), \ldots, c_n'\Phi_n'(x), \ldots$ так, чтобы ряд $\sum c_n'\Phi_n'(x)$ был бы почти всюду сходящимся. Это осуществимо, так как можно, например, выбрать $|c_n'| < 2^{-n}$. Ряд из оставшихся членов $\sum c_n''\Phi_n''(x)$ почти всюду расходится, но он $(C, \alpha > 0)$-суммируем почти всюду. Если через

$$S_m(x) = \sum_{k=0}^{m} c_k''\Phi_k''(x)$$

обозначим m-ю частичную сумму ряда $\sum c_n''\Phi_n''(x)$, то из суммируемости этого ряда следует сходимость почти всюду последовательности $\{S_{2^n}(x)\}$ (см. теорему 2.7.1).

Теперь мы по индукции определим последовательность индексов $\nu_1 < \nu_2 < \ldots$ и последовательность натуральных чисел $N_1 < N_2 < \ldots$ так, чтобы для каждого $l = 1, 2, \ldots$ выполнялось условие

$$2^{N_l} < \nu_k < 2^{N_l+1} \qquad (2^{2^l} < k \leq 2^{2^{l+1}}).$$

Для $l = 1$ поступим следующим образом: выберем $\nu_i = i$ для $i = 1, \ldots, 2^2$, и пусть N_1 есть наименьшее натуральное число, для которого выполняются неравенства

$$\nu_{2^2} < 2^{N_1} \qquad \text{и} \qquad 2^4 < 2^{N_1}.$$

Далее, для $i = 1, \ldots, 2^4 - 2^2$ полагаем $\nu_{2^2+i} = 2^{N_1} + i$. Этим обоснован случай $l = 1$. Пусть теперь построены обе последовательности до номера $l - 1$. Тогда через N_l обозначим наименьшее натуральное число, для которого выполняются неравенства

$$\nu_{2^{2^l}} < 2^{N_l} \qquad \text{и} \qquad 2^{2^{l+1}} < 2^{N_l}.$$

После этого полагаем

$$\nu_{2^{2^l}+i} = 2^{N_l} + i \qquad (i = 1, \ldots, 2^{2^{l+1}} - 2^{2^l}).$$

Построение требуемых последовательностей $\{\nu_k\}$ и $\{N_k\}$ закончено.

Теперь перейдем к построению ортогонального ряда

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m \psi_m(x),$$

удовлетворяющего всем требованиям нашей теоремы. С этой целью положим

$$a_{\nu_{2n}} = c_n'', \quad \psi_{\nu_{2n}}(x) = \Phi_n''(x) \qquad (n = 0, 1, \ldots);$$

кроме того, пусть $a_m = 0$ для $m \neq \nu_{2n}$, а оставшиеся $\psi_m(x)$ совпадают с функциями $\Phi_n'(x)$, взятыми в том порядке, в каком они расположены в этой последовательности. Через $s_n(x)$ обозначим n-ю частичную сумму ряда $\sum a_m\psi_m(x)$. Мы определили члены $a_m\psi_m(x)$ так, чтобы

$$s_{\nu_{2n}}(x) = S_n(x),$$

причем для всех $N_l < m \leqslant N_{l+1}$

$$s_{2m}(x) = S_{2l+1}(x).$$

Как мы уже видели, последовательность $\{S_{2l}(x)\}$ сходится почти всюду, а поэтому из второго соотношения выводим сходимость почти всюду последовательности $\{s_{2m}(x)\}$. Но, как будет доказано в 2.7.2, сходимость почти всюду последовательности $\{s_{2m}(x)\}$ влечет $(C, \alpha > 0)$-суммируемость почти всюду ортогонального ряда $\sum a_n\psi_n(x)$. Нам осталось доказать, что ряд $\sum a_n\psi_n(x)$ нигде очень сильно не суммируем. Учитывая расходимость почти всюду ряда $\sum c_n''\Phi_n''(x)$ и используя соотношение $s_{\nu_{2n}}(x) = S_n(x)$, убеждаемся в расходимости почти всюду последовательности $\{s_{\nu_{2n}}(x)\}$, а тогда из 2.7.6 следует также и расходимость почти всюду последовательности арифметических средних:

$$\frac{s_{\nu_1}(x) + s_{\nu_2}(x) + \ldots + s_{\nu_n}(x)}{n}.$$

Изменяя теперь значения функций на нуль-множестве, мы получаем расходимость всюду. Это даже больше, чем нам необходимо, так как не сходятся арифметические средние последовательности $\{s_{\nu_n}(x)\}$. Этим теорема 2.6.5 полностью доказана.

Проблема очень сильной суммируемости поставлена Зальцвассером [1], которым и доказана теорема 2.6.4. Теоремы 2.6.3 и 2.6.6 установлены Алексичем [8], а теорема 2.6.5 доказана Тандори [8]; эта теорема решает проблему Зальцвассера в отрицательном смысле.

§ 7. Сходимость подпоследовательностей частичных сумм и чезаровская суммируемость

Мы уже знаем, что при условии (43) методы Чезаро $(C, \alpha > 0)$ в применении к рядам (42) дают с точностью до множества меры нуль один и тот же результат. Этот факт позволяет установить эквивалентность, с точностью до множества меры нуль, $(C, \alpha > 0)$-суммируемости ортогонального ряда и сходимости некоторых подпоследовательностей его частичных сумм. Прежде всего, справедлива следующая теорема·

2.7.1. *Если выполнено условие* (43), *то для всякой последовательности индексов* ν_n, *для которой* $\frac{\nu_{n+1}}{\nu_n} \geqslant q > 1$, *справедливо для почти всех* x *соотношение* $s_{\nu_n}(x) - \sigma_{\nu_n}(x) = o_x(1)$.

В самом деле, имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b [s_{\nu_n}(x) - \sigma_{\nu_n}(x)]^2\, d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\nu_n + 1)^2} \sum_{k=1}^{\nu_n} k^2 c_k^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} k^2 c_k^2 \sum_{\nu_n \geqslant k} \frac{1}{\nu_n^2}.$$

Но из условия $\nu_{n+1} \geqslant q\nu_n$ находим

$$\sum_{\nu_n \geqslant k} \frac{1}{\nu_n^2} \leqslant \frac{1}{k^2} \sum_{m=0}^{\infty} q^{-2m} = \frac{q^2}{k^2(q^2 - 1)}.$$

Поэтому из (43) следует неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b [s_{\nu_n}(x) - \sigma_{\nu_n}(x)]^2\, d\mu(x) \leqslant \frac{q^2}{q^2 - 1} \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty,$$

и наше утверждение есть следствие из 1.2.2.

При выполнении условия (43) из этой очень простой, но важной теоремы непосредственно следует, что (C, α)-суммируемость ортогонального ряда (42) на множестве E влечет сходимость почти всюду на E любой подпоследовательности $\{s_{\nu_n}(x)\}$, для которой $\nu_{n+1} \geqslant q\nu_n$. Справедливо и обратное утверждение.

2.7.2. *Пусть* r *и* q — *две постоянные, для которых* $r > q > 1$, *и пусть возрастающая последовательность индексов* $\{\nu_n\}$

удовлетворяет неравенствам $q \leqslant \frac{\nu_{n+1}}{\nu_n} \leqslant r$. *Тогда при выполнении условия* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 < \infty$ *из сходимости почти всюду на* E *последовательности* $\{s_{\nu_n}(x)\}$ *следует* $(C, \alpha > 0)$*-суммируемость почти всюду на* E *ортогонального ряда* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$.

Так как, по предположению, последовательность $\{s_{\nu_n}(x)\}$ сходится почти всюду на E, то из 2.7.1 делаем заключение и о сходимости почти всюду на E последовательности $\{\sigma_{\nu_n}(x)\}$. Из проведенных при доказательстве 2.6.1 рассуждений мы видим, что нам достаточно проверить справедливость почти всюду соотношения $\sigma_m(x) - \sigma_{\nu_n}(x) = o_x(1)$ для случая, когда индекс m выбран произвольно между ν_n и ν_{n+1}. Применяя неравенство Коши, находим

$$[\sigma_m(x) - \sigma_{\nu_n}(x)]^2 \leqslant \sum_{k=\nu_n+1}^{\nu_{n+1}} k[\sigma_k(x) - \sigma_{k-1}(x)]^2 \sum_{k=\nu_n+1}^{\nu_{n+1}} \frac{1}{k}.$$

Так как $\nu_{n+1} \leqslant r\nu_n$, то

$$\sum_{k=\nu_n+1}^{\nu_{n+1}} \frac{1}{k} \leqslant \int_{\nu_n}^{r\nu_n} \frac{dx}{x} = \log r,$$

а потому

$$[\sigma_m(x) - \sigma_{\nu_n}(x)]^2 = O(1) \sum_{k=\nu_n+1}^{\nu_{n+1}} k\,[\sigma_k(x) - \sigma_{k-1}(x)]^2.$$

С другой стороны, как мы уже видели при доказательстве теоремы 2.6.1 на стр. 118, при выполнении условия (43) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} k\,[\sigma_k(x) - \sigma_{k-1}(x)]^2$ сходится почти всюду. Таким образом, равенство

$$\sigma_m(x) - \sigma_{\nu_n}(x) = o_x(1)$$

справедливо почти всюду, и теорема установлена.

С помощью 2.6.1 из 2.7.1 и 2.7.2 выводится следующая теорема, на которой основана значительная часть теории суммирования ортогональных рядов:

2.7.3. *Для того чтобы ортогональный ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$ *с коэффициентами, удовлетворяющими условию* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 < \infty$, *был почти всюду на множестве* E $(C, \alpha > 0)$*-суммируем, необходимо и достаточно существование сходящейся почти всюду последовательности* $\{s_{\nu_n}(x)\}$, *для которой* $1 < q \leqslant \frac{\nu_{n+1}}{\nu_n} \leqslant r$.

Непосредственное следствие этой теоремы относится к сильно лакунарным рядам; ортогональный ряд (42) называется *сильно лакунарным*, если индексы отличных от нуля коэффициентов $c_{\nu_1}, c_{\nu_2}, \ldots, c_{\nu_n}, \ldots$ удовлетворяют условию $\frac{\nu_{n+1}}{\nu_n} \geqslant q > 1$. Это следствие гласит:

2.7.4. *Если выполнено условие* (43) *и если сильно лакунарный ортогональный ряд* (42) *по крайней мере* A*-суммируем на множестве* E, *то он также и сходится почти всюду на* E.

Однако для A-суммируемых лакунарных рядов можно вывести более сильную теорему о сходимости:

2.7.5. *Пусть ортогональный ряд* (42) A*-суммируем почти всюду на множестве* E *и пусть число заключенных между* n *и* $2n$ *индексов* k, *для которых* $c_k \neq 0$, *имеет порядок* $O(\lambda(n))$, *причем* $1 < \lambda(n) \leqslant \lambda(n+1)$. *Тогда условие*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \log^2 \lambda(n) < \infty$$

влечет сходимость почти всюду на E *ряда* (42).

Действительно, по теореме 2.7.1 из A-суммируемости на E ряда (42) следует сходимость почти всюду на E последовательности $\{s_{2^n}(x)\}$. Если в 2.3.7 положим $\nu_n = 2^n$, то наше утверждение является частным случаем этой теоремы.

Соотношения между сходимостью подпоследовательностей частичных сумм и очень сильной $(C, 1)$-суммируемостью почти всюду. Теоремы 2.6.2. и 2.7.3 могут быть обобщены. Эти уточнения в случае очень сильной $(C, 1)$-суммируемости почти всюду являются аналогом важных оригинальных теорем для обычной чезаровской суммируемости почти всюду.

Ради краткости, для любой возрастающей последовательности индексов $\nu_1 < \nu_2 < \ldots$ мы полагаем

$$\sigma_n(\{\nu\}; x) = \frac{s_{\nu_1}(x) + s_{\nu_2}(x) + \ldots + s_{\nu_n}(x)}{n}.$$

Докажем следующее обобщение теоремы 2.7.3:

2.7.6. *При выполнении условия* $\sum c_n^2 < \infty$ *сходимость почти всюду последовательности* $\{s_{\nu_{2^n}}(x)\}$ *необходима и достаточна для сходимости почти всюду последовательности* $\{\sigma_n(\{\nu\}; x)\}$.

Необходимость. Имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b [s_{\nu_{2^n}}(x) - \sigma_{2^n}(\{\nu\}; x)]^2 \, d\mu(x) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \left[s_{\nu_{2^n}}(x) - \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} s_{\nu_k}(x) \right]^2 d\mu(x) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{k}{2^{2n}} \sum_{i=\nu_{k+1}}^{\nu_{k+1}} c_i^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \sum_{i=\nu_{k+1}}^{\nu_{k+1}} c_i^2 \sum_{2^n > k} \frac{1}{2^{2n}} =$$

$$= O(1) \sum_{i=\nu_1+1}^{\infty} c_i^2 < \infty.$$

Поэтому из 1.2.2 убеждаемся в справедливости почти всюду соотношения

$$s_{\nu_{2^n}}(x) - \sigma_{2^n}(\{\nu\}; x) \to 0,$$

а это и требовалось в нашем утверждении.

Достаточность. Из доказательства необходимости легко выводим, что сходимость почти всюду последовательности $\{s_{\nu_{2^n}}(x)\}$ влечет сходимость почти всюду последовательности $\{\sigma_{2^m}(\{\nu\}; x)\}$. Поэтому остается только доказать справедливость соотношения

$$\sigma_n(\{\nu\}; x) - \sigma_{2^m}(\{\nu\}; x) \to 0 \qquad \text{при} \quad m \to \infty$$

для почти всех x и всех n, заключенных между 2^m и 2^{m+1}. Теми же самыми рассуждениями, что и при доказательстве

2.7.2, мы выводим

$$|\sigma_n(\{\nu\};x)-\sigma_{2^m}(\{\nu\};x)|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=2^m}^{n-1}(k+1)\,[\sigma_{k+1}(\{\nu\};x)-\sigma_k(\{\nu\};x)]^2.$$

Но, используя оценку

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\int_a^b[\sigma_{n+1}(\{\nu\};x)-\sigma_n(\{\nu\};x)]^2\,d\mu(x)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\int_a^b\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{n(n+1)}\sum_{i=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}}c_i\varphi_i(x)\right]^2d\mu(x)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2(n+1)}\sum_{k=1}^{n}k^2\sum_{i=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}}c_i^2\right)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k-1}^{\infty}k^2\sum_{i=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}}c_i^2\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n^3}\leqslant 2\sum_{i=1}^{\infty}c_i^2<\infty,$$

мы, в силу 1.2.2, убеждаемся в сходимости почти всюду к нулю стоящей справа суммы. А это доказывает достаточность нашего предположения.

Теперь мы докажем следующее уточнение теоремы 2.6.2:

2.7.7. *Если выполнено условие* $\sum c_n^2<\infty$, *то для сходимости почти всюду последовательности* $\{\sigma_n(\{\nu\};x)\}$ *необходимо и достаточно, чтобы почти всюду выполнялось соотношение*

$$\frac{1}{n}\sum_{n=1}^{n}[s_{\nu_k}(x)-s(x)]^2\to 0.$$

Достаточность следует непосредственно из неравенства

$$|\sigma_n(\{\nu\};x)-s(x)|\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|s_{\nu_k}(x)-s(x)|\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[s_{\nu_k}(x)-s(x)]^2}.$$

Для доказательства необходимости полагаем $\mu_k = \nu_{2^m}$ при $2^m \leqslant k < 2^{m+1}$. Тогда имеем

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[s_{\nu_k}(x) - s(x)]^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}[s_{\nu_k}(x) - s_{\mu_k}(x)]^2 + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}[s_{\mu_k}(x) - s(x)]^2.$$

На основании 2.7.6 последний член этой оценки почти всюду сходится к нулю. Чтобы сделать аналогичное заключение для первого члена, мы, во-первых, получим соотношение

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}\int_a^b [s_{\nu_k}(x) - s_{\mu_k}(x)]^2\, d\mu(x) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}}\frac{1}{k}(c^2_{\nu_{2^m}+1} + \ldots + c^2_{\nu_k}) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=0}^{\infty}(c^2_{\nu_{2^m}+1} + \ldots + c^2_{\nu_{2^{m+1}}})\sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}}\frac{1}{k} \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}c_i^2 < \infty.$$

Отсюда, в силу 1.2.2, убеждаемся в сходимости почти всюду ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}[s_{\nu_k}(x) - s_{\mu_k}(x)]^2,$$

а потому из 2.2.2 следует справедливость почти всюду соотношения

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[s_{\nu_k}(x) - s_{\mu_k}(x)]^2 \to 0.$$

Итак, стоящие справа в оценке для $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[s_{\nu_k}(x) - s(x)]^2$ члены почти всюду сходятся к нулю, т. е. почти всюду справедливо соотношение

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[s_{\nu_k}(x) - s(x)]^2 \to 0,$$

чем и завершается наше доказательство.

Непосредственно из этих двух теорем мы получаем следующую теорему, чрезвычайно важную для разъяснения вопроса об очень сильной $(C, 1)$-суммируемости почти всюду:

2.7.8. *Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty$, то для того, чтобы ортогональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$ был очень сильно $(C, 1)$-суммируем почти всюду, необходимо и достаточно, чтобы для всякой возрастающей последовательности индексов $\nu_1 < \nu_2 < \ldots$ последовательность частичных сумм $s_{\nu_{2^n}}(x)$ была почти всюду сходящейся.*

Теоремы 2.7.1 и 2.7.4 установлены Колмогоровым [2], в то время как 2.7.2 и 2.7.3 при $\alpha = 1$ доказаны Качмажем [1], [2], а для всех $\alpha > 0$ расширены Зигмундом [1].

Интересно отметить, что 2.7.4 даже в более расширенной форме справедлива для произвольных числовых рядов. Действительно, так называемая «теорема о больших показателях» (см., например, Г. Харди, Расходящиеся ряды, М., 1951, стр. 218—220) утверждает следующее: *Если сильно лакунарный ряд $\sum u_n$ по крайней мере A-суммируем и $u_n \to 0$, то он сходится.* Доказательство трудное и требует привлечения сильных методов общей теории рядов.

Теорема 2.7.5 доказана Галом [1]. Для $\lambda_n = n$ она обращается в 2.3.2, а для $\lambda_n = e$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — в 2.7.4. В частности, она может быть применена к вопросам сходимости ортогональных рядов, для которых уже обеспечена A-суммируемость, как, например, для рядов Фурье. Теоремы 2.7.6—2.7.8 доказаны Тандори [10].

Алексич [3] доказал, что 2.7.5 не может быть усилена, ибо справедлива следующая теорема:

Для любой монотонной числовой последовательности $\{W(n)\}$ с условием $\log\log n \leqslant W(n) = O(\log n)$ существует всюду расходящийся, но почти всюду $(C, \alpha > 0)$-суммируемый ортогональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \;\; \Phi_n(x)$, для которого $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n^2 W^2(\lambda(n)) < \infty$, и такой, что число коэффициентов $c_k \neq 0$ с $n < k < 2n$ равно $O(\lambda(n))$, где положительная монотонно возрастающая последовательность $\{\lambda(n)\}$ удовлетворяет условию $\lambda(n) \leqslant n$.

Доказательство проводится следующим образом: рассмотрим всюду расходящийся ортогональный ряд $\sum C_n \Phi_n(x)$, коэффициенты которого удовлетворяют условию $\sum C_n^2 W^2(n) < \infty$, причем отличны от нуля только коэффициенты с индексами $i_k = [k^{\log k}]$. Существование такого ортогонального ряда гарантируется, например, теоремой 2.4.1. Для выбранного таким образом ортогонального ряда, имеющего, как легко подсчитать, большие лакуны, существует такая монотонно возрастающая последовательность $\{\lambda(n)\}$, что число коэффициентов $c_k \neq 0$ с номерами $n < k < 2n$ равно $O(\lambda(n))$ и справедливо неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 W^2(\lambda(n)) < \infty.$$

Ясно, что

$$\sum_{n=3}^{\infty} c_n^2 (\log\log n)^2 < \infty.$$

Используя теорему 2.8.1, заключаем, что ряд почти всюду $(C, \alpha > 0)$-суммируем и в то же время всюду расходится.

Качмаж [6] в случае общих регулярных методов суммирования доказал аналог теоремы 2.7.1:

Если выполняется условие (43) *и ортогональный ряд* (42) *с помощью регулярного линейного метода суммируем почти всюду на множестве E, то существует зависящая только от способа суммирования последовательность индексов $\{m_n\}$ такая, что подпоследовательность $\{s_{m_n}(x)\}$ сходится почти всюду на E.*

Доказательство проводится совершенно аналогично теореме 2.7.1, только требуются еще некоторые вычисления с коэффициентами α_{nk} рассматриваемого метода суммирования.

§ 8. Коэффициентные критерии для чезаровской суммируемости ортогональных рядов

С помощью теоремы 2.7.3 легко перейти от теории сходимости ортогональных рядов к теории их суммируемости. В частности, легко доказываются аналоги теорем 2.3.2 и 2.4.1:

2.8.1. *Если коэффициенты ортогонального ряда $\sum c_n\varphi_n(x)$ удовлетворяют условию*

$$\sum_{n=3}^{\infty} c_n^2 (\log\log n)^2 < \infty, \tag{45}$$

то для любого $\alpha > 0$ ряд (42) *почти всюду* (C, α)*-суммируем.*

2.8.2. *Если члены положительной монотонно возрастающей последовательности чисел $\{W(n)\}$ имеют порядок $W(n) = o(\log\log n)$, то существует ортогональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n\Phi_n(x)$,* *который нигде не суммируем методом A, хотя его коэффициенты удовлетворяют условию*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 W^2(n) < \infty. \tag{46}$$

Для доказательства теоремы 2.8.1 рассмотрим соотношение

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log^2 n \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} c_k^2 = O(1) \sum_{k=3}^{\infty} c_k^2 (\log\log k)^2 < \infty,$$

из которого, согласно 2.3.4, выводим сходимость последовательности $\{s_{2^n}(x)\}$, а это, в силу 2.7.3, эквивалентно нашему утверждению.

Также просто доказывается теорема 2.8.2, например, с помощью 2.4.2 или 2.4.1. Действительно, если положим $w(n) = W(2^n)$, то $w(n) = o(\log n)$, а тогда из доказательства 2.4.2 мы убеждаемся в существовании ортогонального ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$ со следующими свойствами:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 w^2(n) < \infty$,

2) $\left|\sum_{k=N_m}^{N_m+n_m} c_k\varphi_k(x)\right| \geqslant B > 0$ для бесконечно многих m, где $N_m = 2^{m+2} - 4$, индекс n_m зависит от x и $n_m < 2^{m+2} - 1$. Члены, входящие в суммы 2), мы расположим в последовательность, которую обозначим через $\{c_n'\varphi_n'(x)\}$. Оставшиеся члены ортогонального ряда $\sum c_n\varphi_n(x)$ составят последовательность $\{c_n''\varphi_n''(x)\}$. Эта последовательность является бесконечной, ибо из условия $N_m = 2^{m+2} - 4$ следует неравенство $N_m + n_m < N_m + 2^{m+2} - 1 \leqslant 2^{m+3} - 5 = N_{m+1} - 1$, а это означает, что между N_m и N_{m+1} обязательно существуют члены, которые не входят в суммы 2). Положим теперь $\Phi_{2^n}(x) = \varphi_n'(x)$, $C_{2^n} = c_n'$ и $\Phi_m(x) = \varphi_m''(x)$, $C_m = 0$ для $m \neq 2^n$. Тогда

$$\sum_{n=2}^{\infty} C_n^2 W^2(n) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{2^n}^2 W^2(2^n) = \sum_{n=1}^{\infty} (c_n')^2 w^2(n) < \infty,$$

т. е. выполняется условие (46). Если через

$$S(2^n, x) = \sum_{m=1}^{2^n} C_m\Phi_m(x)$$

обозначим 2^n-е частичные суммы, то они содержат только члены формы $c'_n\varphi'_n(x)$, которые отличны от нуля. Поэтому для каждого x и для бесконечно многих значений m существует индекс ν_m такой, что

$$|S(2^{\nu_m+n_m}, x) - S(2^{\nu_m}, x)| = \left|\sum_{k=N_m}^{N_m+n_m} c_k\varphi_k(x)\right| \geqslant B > 0,$$

т. е. последовательность $\{S(2^n, x)\}$ почти всюду расходится. Тогда из теоремы 2.7.1 заключаем, что A-суммируемость ряда $\sum C_n\Phi_n(x)$ возможна не более чем на нуль-множестве. Изменяя значения функций в точках этого нуль-множества, мы добиваемся того, что ортогональный ряд всюду не суммируем методом A.

Отметим, что условие (45), будучи в теории суммирования точным аналогом критерия сходимости (30), дает даже больше, чем просто необходимость. Справедлива следующая теорема:

2.8.3. *Если выполнено условие* (45), *то ортогональный ряд* (42) *очень сильно* $(C, 1)$-*суммируем почти всюду.*

В самом деле, пусть $\nu_1, <\nu_2 < \ldots$ — произвольная возрастающая последовательность индексов. По теореме 2.7.7 нам нужно показать сходимость почти всюду последовательности $\{s_{\nu_{2^n}}(x)\}$. Прежде всего мы заметим, что, в силу 2.8.1 и 2.7.1, последовательность $\{s_{2^m}(x)\}$ сходится почти всюду, а затем докажем сходимость почти всюду к нулю разности $s_{\nu_{2^n}}(x) - s_{2^m}(x)$ при $m \to \infty$ и $2^m < \nu_{2^n} < 2^{m+1}$. С этой целью значения величин n, для которых $2^m < \nu_{2^n} < 2^{m+1}$, мы обозначим через $n_1, n_1 + 1, \ldots, n_2$. Определим теперь $\Phi_k(x)$ следующим образом:

$$\Phi_0(x) = \frac{s_{\nu_{2^{n_1}}}(x) - s_{2^m}(x)}{C_0}, \qquad \Phi_k(x) = \frac{s_{\nu_{2^{n_1+k}}}(x) - s_{\nu_{2^{n_1+k-1}}}(x)}{C_k}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n_2 - n_1),$$

где

$$C_0 = \sqrt{\sum_{i=2^m+1}^{\nu_{2^{n_1}}} c_i^2}, \qquad C_k = \sqrt{\sum_{i=\nu_{2^{n_1+k-1}}+1}^{\nu_{2^{n_1+k}}} c_i^2}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n_2 - n_1)$$

(если же в стоящей справа сумме все $c_i = 0$, то полагаем $C_k = 1$). Тогда по теореме 2.3.1 существует такая функция

$\delta_m(x) \geqslant 0$, для которой

$$\max_{0<l\leqslant n_2-n_1}\left|\sum_{k=0}^{l} C_k\Phi_k(x)\right| \leqslant \delta_m(x)$$

и

$$\int_a^b \delta_m^2(x)\,d\mu(x) = O(1)\log^2(n_2-n_1+1)\sum_{k=0}^{n_2-n_1} C_k^2.$$

Принимая во внимание очевидное неравенство $n_2-n_1+1\leqslant m$ и определение C_k, мы получаем следующую оценку:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\int_a^b \delta_m^2(x)\,d\mu(x) = \sum_{m=1}^{\infty} O(\log^2 m)\sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} c_k^2 =$$

$$= O(1)\sum_{k=3}^{\infty} c_k^2(\log\log k)^2 < \infty.$$

В силу этого, из 1.2.2 следует сходимость почти всюду ряда $\sum \delta_m^2(x)$. Отсюда получаем, что $\delta_m(x)\to 0$ для почти всех x. Учитывая соотношение

$$\max_{2^m<\nu_{2^n}<2^{m+1}}|s_{\nu_{2^n}}(x)-s_{2^m}(x)| = \max_{0<l\leqslant n_2-n_1}\left|\sum_{k=0}^{l} C_k\Phi_k(x)\right| \leqslant \delta_m(x),$$

убеждаемся в одновременной сходимости почти всюду последовательностей $\{s_{2^m}(x)\}$ и $\{s_{\nu_{2^n}}(x)\}$ при $2^m<\nu_{2^n}<2^{m+1}$, а это и требовалось для доказательства нашего утверждения.

Фундаментальные теоремы 2.8.1 и 2.8.2 доказаны сначала Меньшовым [2], [3], а затем независимо от него Качмажем [3]. Эти теоремы являются точными аналогами теорем 2.3.2 и 2.4.1, только вместо сходимости в них участвует суммируемость. Интересная теорема 2.8.3 доказана Тандори [10].

Методом, примененным при доказательстве теоремы 2.8.2, можно показать, что не существует регулярного линейного метода, который позволял бы просуммировать почти всюду любой ортогональный ряд с $\sum c_n^2<\infty$, т. е. *для каждого заданного регулярного линейного метода существует нигде не суммируемый ортогональный ряд* $\sum c_n\Phi_n(x)$ *с* $\sum c_n^2 < \infty$. Действительно, как мы уже упоминали (стр. 132), линейная суммируемость влечет сходимость почти всюду соответствующей последовательности $\{s_{\nu_n}(x)\}$ частичных сумм. Для доказательства нашего утверждения, как и при доказательстве 2.8.2, мы полагаем $\Phi_{\nu_n}(x)=\varphi_n'(x)$, $C_{\nu_n}=c_n'$ и $C_m=0$ для остальных номеров. Дальнейшее доказательство совершенно аналогично доказательству теоремы 2.8.2.

Тем не менее в противоположность сделанному выше замечанию справедливо следующее утверждение: *для каждого ортогонального ряда* $\sum c_n\varphi_n(x)$ *с условием* $\sum c_n^2 < \infty$ *существует* (*зависящий*[1] *от коэффициентов* c_n) *регулярный линейный метод суммирования, который этот ряд суммирует почти всюду*. В самом деле, по теореме Рисса—Фишера 1.2.4 существует сходящаяся почти всюду подпоследовательность $\{s_{\nu_n}(x)\}$ частичных сумм. Выберем теперь элементы α_{nk} матрицы Тёплица следующим образом: $\alpha_{\nu_n k} = 1$ для $k = \nu_n$ и $\alpha_{\nu_n k} = 0$ для остальных k, кроме того, $\alpha_{mk} = \alpha_{\nu_n k}$ для $\nu_n < m < \nu_{n+1}$. Тогда матрица (α_{nk}) определяет положительный линейный метод суммирования, для которого

$$t_m(x) = s_{\nu_n}(x) \quad \text{при} \quad \nu_n \leq m < \nu_{n+1}.$$

Таким образом, $\lim\limits_{m\to\infty} t_m(x)$ существует почти всюду.

Используя 2.2.4, из 2.6.1 и 2.8.1 получаем следующее утверждение[2]: *Если удовлетворяющий условию* (43) *ряд* (42) *A-суммируем почти всюду, то почти всюду справедлива оценка* $\sigma_n(x) = o_x(\log\log n)$. Как показал Тандори [5], с одной стороны, здесь $\sigma_n(x)$ можно заменить на $\sigma_n^\alpha(x)$ с произвольным $\alpha > 0$, а с другой стороны, этот результат нельзя улучшить: другими словами, утверждается, что *для каждой монотонно возрастающей последовательности чисел* $\{\lambda_n\}$ *с* $\lambda_n = o(\log\log n)$ *можно построить ортогональный ряд* $\sum c_n\varphi_n(x)$ *с* $\sum c_n^2 < \infty$, *для которого почти всюду справедливо равенство*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{|\sigma_n^\alpha(x)|}{\lambda_n} = \infty.$$

Доказательство аналогично тому, которое проведено в соответствующей теореме (стр. 107, теорема 1) о невозможности улучшения соотношения $s_n(x) = o_x(\log n)$ теоремы 2.3.3.

В заключение мы отметим следующее обобщение теорем 2.3.2 и 2.8.1, полученное Суноути и Яно [1] для (C, α)-суммируемости отрицательного порядка:

Если $0 < \alpha < 1$ *и выполняется условие*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2\alpha} c_n^2 < \infty,$$

то ортогональный ряд (42) *почти всюду* (C, α)-*суммируем.*

Доказательство представляет собой развитие основной идеи доказательства леммы 2.3.1 и усложнено выкладками, имеющими технический характер.

---

[1] Метод, который приводит автор, зависит не только от $\{c_n\}$, но и от системы $\{\varphi_n(x)\}$. Ниже будет видно (см. теорему 2.10.2), что зависимость от коэффициентов $\{c_n\}$ может быть опущена. — *Прим. ред.*

[2] Легко видеть, что для справедливости этого утверждения нет никакой необходимости требовать от ряда A-суммируемости почти всюду. — *Прим. ред.*

Суммируемость лакунарных ортогональных рядов. Пусть определенная для $x \geqslant 1$ положительная вогнутая снизу функция $\lambda(x)$ монотонно возрастает к бесконечности и $\lambda(x) \leqslant x$. Ортогональный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \tag{47}$$

мы будем называть $\lambda(n)$-*лакунарным*, если число отличных от нуля коэффициентов c_k с номерами $n < k \leqslant 2n$ не превосходит $\lambda(n)$. Далее, говорим, что коэффициенты c_n *мажорируются положительной числовой последовательностью* $\{q_n\}$, если выполняется соотношение $c_n = O(q_n)$.

Отметим, что лакунарность ортогонального ряда оказывает влияние не только на его сходимость, а также и на (C, α)-суммируемость. Докажем относящуюся к этому вопросу следующую теорему:

2.8.4. *Если коэффициенты* $\lambda(n)$- *лакунарного ортогонального ряда* (47) *мажорируются монотонно убывающей последовательностью чисел* $\{q_n\}$, *удовлетворяющей неравенству*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\lambda(n)}}{n} q_n < \infty, \tag{48}$$

то при выполнении условия (43) *ортогональный ряд* (47) *почти всюду* $(C, \alpha > 0)$-*суммируем.*

В самом деле, пусть $c_{\nu_1}, c_{\nu_2}, \ldots, c_{\nu_N}$ — отличные от нуля коэффициенты с индексами между 2^n и 2^{n+1}. Тогда, применяя неравенство Шварца, находим

$$\int_a^b |s_{2^{n+1}}(x) - s_{2^n}(x)|\, d\mu(x) \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\mu(b) - \mu(a)} \left\{ \int_a^b [s_{2^{n+1}}(x) - s_{2^n}(x)]^2\, d\mu(x) \right\}^{1/2} =$$

$$= O(1) \sqrt{\sum_{k=1}^{N} c_{\nu_k}^2} = O(1) \sqrt{\sum_{k=1}^{N} q_{\nu_k}}\,.$$

Из наших предположений следуют неравенства $q_{2^n}^2 \geqslant q_{\nu_1} \geqslant \geqslant \ldots \geqslant q_{\nu_N}^2$ и $N \leqslant \lambda(2^n)$, а потому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b |s_{2^{n+1}}(x) - s_{2^n}(x)|\, d\mu(x) = O(1) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda(2^n)} \cdot q_{2^n}. \tag{49}$$

Так как функция $\lambda(x)$ вогнута и $\lambda(x) \leqslant x$, то для достаточно больших n

$$\lambda(2^n) - \lambda(2^n - 1) \leqslant 2,$$

т. е.

$$\lambda(2^n - 1) \geqslant \lambda(2^n) - 2 \geqslant \frac{\lambda(2^n)}{2}.$$

Далее, из вогнутости функции $\lambda(x)$ следуют неравенства

$$\lambda(2^{n-1}) \geqslant \frac{\lambda(1) + \lambda(2^n - 1)}{2} \geqslant \frac{\lambda(2^n)}{4},$$

а поэтому, используя монотонное возрастание последовательности $\{\lambda(k)\}$ и монотонное убывание $\{q_k\}$, получим

$$\sqrt{\lambda(2^n)}\, q_{2^n} \leqslant \sqrt{4\lambda(2^{n-1})}\, q_{2^n} \leqslant 4\sqrt{\lambda(2^{n-1})}\, q_{2^n} \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} \frac{1}{k} \leqslant$$

$$\leqslant 4 \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} \frac{\sqrt{\lambda(k)}}{k} q_k.$$

Подставляя эту оценку в (49), получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \left| s_{2^{n+1}}(x) - s_{2^n}(x) \right| d\mu(x) = O(1) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} \frac{\sqrt{\lambda(k)}}{k} q_k < \infty$$

и по теореме 1.2.2 убеждаемся в сходимости почти всюду ряда $\sum \left| s_{2^{n+1}}(x) - s_{2^n}(x) \right|$. Стало быть, также сходится почти всюду и последовательность частичных сумм

$$s_{2^n}(x) = s_2(x) + \sum_{k=1}^{n-1} [s_{2^{k+1}}(x) - s_{2^k}(x)],$$

а потому из (43) и 2.7.2 следует $(C, \alpha > 0)$-суммируемость почти всюду ряда (47). Следовательно, наше утверждение установлено.

В этой теореме можно освободиться от требования лакунарности. Действительно, так как между индексами n и $2n$ имеется только n свободных мест, то полагая $\lambda(x) = x$, т. е. $\lambda(n) = n$, мы видим, что всякий ряд, у которого даже ни один из коэффициентов не равен нулю, тем не менее будет $\lambda(n)$-лакунарным. Это замечание позволяет получить из теоремы 2.8.4 частный случай, в котором не используется условие лакунарности:

2.8.5. *Если коэффициенты ортогонального ряда* (47) *мажорируются монотонно убывающей последовательностью* $\{q_n\}$, *для которой*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{\sqrt{n}} < \infty, \tag{50}$$

то ряд (47) *почти всюду* ($C, \alpha > 0$)-*суммируем.*

В самом деле, (50) есть не что иное, как частный случай (48), соответствующий $\lambda(n) = n$, и, как уже отмечалось, это условие справедливо для любого ряда. Поэтому для применения теоремы 2.8.4 с $\lambda(x) = x$ нужно доказать, что условие (50) влечет соотношение (43). Но это очевидно, ибо, используя монотонность $\left\{\frac{q_n}{\sqrt{n}}\right\}$ и (50), получаем оценку $q_n = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Отсюда с помощью преобразования Абеля находим

$$\sum_{k=1}^{n} q_k^2 = \sum_{k=1}^{n-1} k\,(q_k^2 - q_{k+1}^2) + nq_n^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} k\,(q_k - q_{k+1})\,(q_k + q_{k+1}) + o(1) =$$

$$= O(1) \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{k}\,(q_k - q_{k+1}) + o(1) = O(1) \sum_{k=1}^{n} \frac{q_k}{\sqrt{k}} + o(1) = O(1).$$

Учитывая условие $c_n = O(q_n)$, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty,$$

чем и завершается доказательство.

Теоремы 2.8.4 и 2.8.5 установлены Алексичем [9]. Ясно, что теорема Меньшова—Качмажа 2.8.1 не содержится в этих теоремах. Действительно, если, например,

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{n \log n}\,(\log \log n)^2},$$

то (45) выполняется, а (50) нет. Обратно, теорема 2.8.5 (не говоря уже о 2.8.4) не содержится в теореме Меньшова—Качмажа 2.8.1, ибо для любой сколь угодно медленно растущей к ∞ монотонной последовательности положительных чисел $\{p_n\}$ можно подобрать монотонно убывающую последовательность коэффициентов $\{c_n\}$, для которой выполняется условие (50), а ряд $\sum c_n^2 p_n^2$ расходится (если, например, мы выберем $p_n = \log \log n$, то (45) не выполняется). В самом деле, пусть $\{\nu_n\}$ — возрастающая выпуклая последовательность индексов, для которой $p_{\nu_n} \geqslant n$, и пусть

$$c_k = \frac{1}{(\sqrt{\nu_{n+1}} - \sqrt{\nu_n})\sqrt{n^3}} \qquad (k = \nu_n + 1, \ldots, \nu_{n+1}).$$

Последовательность коэффициентов $\{c_n\}$ монотонно убывает и, кроме того,

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 p_n^2 \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{\nu_{n+1}} - \sqrt{\nu_n})^2 n^3} \sum_{k=\nu_n+1}^{\nu_{n+1}} p_k^2 \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu_{n+1} - \nu_n}{(\sqrt{\nu_{n+1}} - \sqrt{\nu_n})^2 n} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

С другой стороны, имеем

$$\sum_{n=\nu_1}^{\infty} \frac{c_n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{\nu_{n+1}} - \sqrt{\nu_n})\sqrt{n^3}} \sum_{k=\nu_n+1}^{\nu_{n+1}} \frac{1}{\sqrt{k}} = O(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}} < \infty.$$

Нетрудно видеть, что 4.8.5 справедлива также в следующей более общей форме, свободной от требования монотонности:

При условии

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} c_k^2} < \infty \qquad (*)$$

ортогональный ряд (47) *абсолютно* $(C, 1)$*-суммируем почти всюду.*

Здесь ряд (47) называется *абсолютно* $(C, 1)$*-суммируемым*, если сходится ряд $\sum |\sigma_n(x) - \sigma_{n-1}(x)|$. Очень интересно, что, как показал недавно Тандори [12], этот критерий суммируемости является также и необходимым:

Для того чтобы ряд (47) *по любой ортонормированной системе* $\{\varphi_n(x)\}$ *был абсолютно* $(C, 1)$*-суммируем почти всюду, необходимо и достаточно выполнение условия* (*).

Недавно Лейндлер [2] установил справедливость подобного утверждения для абсолютной $\left(C, \alpha > \frac{1}{2}\right)$-суммируемости и, кроме того, доказал, что условия

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{m}\, C_m < \infty \quad \text{и} \quad \sum_{m=1}^{\infty} C_m\, 2^{\frac{m}{2}(1-2\alpha)} < \infty \quad \left(C_m = \sqrt{\sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} c_k^2}\right)$$

влекут соответственно абсолютную $\left(C, \frac{1}{2}\right)$- или $(C, \alpha > -1)$-суммируемость почти всюду ряда (47). Для положительных монотонно убывающих коэффициентов эти условия оказываются и необходимыми для абсолютной $\left(C, \frac{1}{2}\right)$- или соответственно $\left(C, \frac{1}{2} > \alpha > -1\right)$-суммируемости почти всюду ряда (47) по любой ортонормированной системе $\{\varphi_n(x)\}$.

Согласно 2.8.1, условие (45) дает даже большее, чем необходимость, так как оно влечет очень сильную $(C, 1)$-суммируемость. В силу только что упомянутой теоремы Тандори, условие (*) или условие (50), которое для монотонных коэффициентов эквивалентно (*), дает также большее, чем необходимость, ибо (*) влечет абсолютную $(C, 1)$-суммируемость почти всюду.

Сходимость лакунарных ортогональных рядов. Как мы уже видели (теорема 2.7.5), $(C, \alpha > 0)$-суммируемость ортогонального ряда (47) при некоторых условиях на лакунарность влечет сходимость почти всюду ряда (47). Теорема 2.8.4 позволяет в отдельных случаях ослабить эти условия. Это видно из следующей теоремы:

2.8.6. *Если коэффициенты $\lambda(n)$-лакунарного ряда* (47) *мажорируются монотонно убывающей последовательностью $\{q_n\}$, для которой справедливо соотношение*

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n^2 \log^{\beta} n < \infty \qquad (0 \leqslant \beta \leqslant 2), \tag{51}$$

то условие

$$\lambda(n) = O\left(\frac{n}{\log^{2-\beta} n}\right) \tag{52}$$

влечет сходимость почти всюду ортогонального ряда (47).

Применяя неравенство Коши, из (51) и (52) получаем

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{\lambda(n)}}{n} q_n = O(1) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{q_n \sqrt{\log^{\beta} n}}{\sqrt{n} \log n} =$$

$$= O(1) \sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} q_n^2 \log^{\beta} n \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^2 n}} < \infty .$$

Таким образом, выполнено условие (48) и, как это следует непосредственно из (51), выполняется также условие (43). Поэтому по теореме 2.8.4 ряд (47) почти всюду $(C, \alpha > 0)$-суммируем, а тогда по теореме 2.7.1 делаем вывод о сходимости почти всюду последовательности $\{s_{2^m}(x)\}$. Нам нужно еще доказать справедливость почти всюду соотношения

$$s_n(x) - s_{2^m}(x) = o_x(1) \qquad (n \to \infty,\ 2^m < n \leqslant 2^{m+1}). \tag{53}$$

С этой целью через $c_{\nu_i(m)}$ $(i = 1, \ldots, M_m)$ обозначим отличные от нуля коэффициенты с индексами между 2^m и 2^{m+1}. В силу 2.3.1, существует функция $\delta_m(x)$, для которой справедливы соотношения

$$|s_n(x) - s_{2^m}(x)| \leqslant \delta_m(x) \qquad (2^m < n < 2^{m+1}) \tag{54}$$

и

$$\int_a^b \delta_m^2(x)\, d\mu(x) = O(\log^2 M_m) \sum_{i=1}^{M_m} c_{\nu_i(m)}^2.$$

Так как $M_m = O(\lambda(2^m))$ и $c_{\nu_i(m)}^2 \leqslant q_{\nu_i(m)}^2 \leqslant q_{2^m}^2$ $(i = 1, 2, \ldots \ldots, M_m)$, то, используя (52), находим

$$\int_a^b \delta_m^2(x)\, d\mu(x) = O(m^2) \frac{2^m}{m^{2-\beta}} q_{2^m}^2 = O(2^m q_{2^m}^2 m^\beta) =$$

$$= O(2^{m-1} q_{2^m}^2 (m-1)^\beta).$$

Таким образом,

$$\sum_{m=2}^{\infty} \int_a^b \delta_m^2(x)\, d\mu(x) = O(1) \sum_{m=2}^{\infty} 2^{m-1} q_{2^m}^2 (m-1)^\beta =$$

$$= O(1) \sum_{n=2}^{\infty} q_n^2 \log^\beta n < \infty,$$

и из 1.2.2 следует сходимость почти всюду ряда $\sum \delta_m^2(x)$, а потому $\delta_m(x) \to 0$ почти всюду. Учитывая (54), убеждаемся в справедливости почти всюду соотношения (53).

Теорема 2.8.6 установлена Алексичем [9]. Ее частный случай $\beta = 0$ заслуживает отдельной формулировки:

Если коэффициенты $\lambda(n)$-лакунарного ряда (47) *с* $\lambda(n) = O\left(\dfrac{n}{\log^2 n}\right)$ *мажорируются монотонной последовательностью* $\{q_n\}$, *для которой* $\sum q_n^2 < \infty$, *то ортогональный ряд* (47) *сходится почти всюду.*

Утверждение этой теоремы существенно точнее, чем 2.7.4. Действительно, теорема 2.7.4 требует сильной лакунарности, а это означает $\lambda(n)$-лакунарность с $\lambda(n)$=const. Действительно, если через c_{n_1} обозначим первый, а через c_{n_r} — последний из отличных от нуля коэффициентов с индексами между n и $2n$, то сильная лакунарность означает, что $n_1 q^{r-1} \leqslant \leqslant n_r \leqslant 2n$, т. е. $q^{r-1} \leqslant 2$ и $r \leqslant 1 + \dfrac{\log 2}{\log q}$. Таким образом, сильной лакунарности соответствует $\lambda(n)$-лакунарность с $\lambda(n) = \text{const}$. Напротив, наша теорема утверждает, что при условии мажорируемости коэффициентов положительной монотонной последовательностью $\{q_n\}$ с $\sum q_n^2 < \infty$ мы можем выбрать $\lambda(n) = O\left(\frac{n}{\log^2 n}\right)$. И это уточнение 2.7.4 улучшить нельзя, ибо справедлива следующая теорема (Алексич [9]):

Если

$$w(n) = \lambda(n)\frac{\log^2 n}{n} \to \infty,$$

то можно построить всюду расходящийся $\lambda(n)$-лакунарный ортогональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x),$$

коэффициенты которого c_n мажорируются монотонно убывающей последовательностью $\{q_n\}$ с $\sum q_n^2 < \infty$.

В самом деле, выберем возрастающую выпуклую последовательность индексов $\{m_n\}$, для которой $w(3^k) \geqslant n$ при $k \geqslant m_n$, и положим $p(k) = (m_{n+1} - m_n)\, n^2$ при $k = m_n + 1,\ m_n + 2, \ldots, m_{n+1}$. Нетрудно видеть, что

$$\sum_{k=m_1+1}^{\infty} \frac{1}{p(k)} \quad \text{и} \quad \sum_{k=m_1+1}^{\infty} \frac{w(3^k)}{p(k)} = \infty.$$

Пусть теперь $l(n) = \sum_{k=1}^{n-1} [\lambda(3^k)]$, где символ $[a]$ означает целую часть числа a. Если положим

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{3^n p(n)}} \qquad (k = l(n) + 1,\ l(n) + 2, \ldots, l(n+1)),$$

то легко доказать расходимость ряда $\sum a_n^2 \log^2 n$, а потому, в силу 2.4.2, существует всюду расходящийся ортогональный ряд $\sum a_n \Phi_n(x)$. Тогда полагаем $\psi_{2\cdot 3^n + k}(x) = \Phi_{l(n)+k}(x)$ при $k = 2, 3, \ldots, [\lambda(3^n)]$, а для оставшихся индексов ряда отождествляем $\psi_m(x)$ с членами последовательности $\{\Phi_{l(n)+1}(x)\}$. Коэффициенты c_k определим следующим образом: $c_{2\cdot 3^n + k} = a_{l(n)+k}$ при $k = 2, 3, \ldots, [\lambda(3^n)]$ и $c_m = 0$ для остальных индексов. Стало быть, мы имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Phi_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} a_{l(n)+1}\, \Phi_{l(n)+1}(x).$$

Первый из двух стоящих справа рядов всюду расходится, в то время как второй, в силу условия $a_{l(n)+1} \leqslant 3^{-n/2}$, сходится почти всюду. После соответствующего изменения значений функций $\psi_n(x)$ на нуль-множестве добиваемся того, что $\sum c_n \psi_n(x)$ становится расходящимся всюду. Нетрудно видеть, что этот ортогональный ряд является $\lambda(n)$-лакунарным, ибо число его отличных от нуля коэффициентов, лежащих между n и $2n$ при $3^\nu < n \leqslant 3^{\nu+1}$, не превосходит величины $\lambda(3^\nu) < \lambda(n)$. Далее, если положим

$$q_k = \frac{1}{\sqrt{3^n p(n)}} \qquad (k = 3^n + 1,\ 3^n + 2, \ldots, 3^{n+1}),$$

то $\{q_n\}$ монотонно убывает, $c_n \leqslant q_n$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1} - 3^n}{3^n \cdot p(n)} < \infty.$$

Этим наше утверждение полностью доказано.

Мы приведем еще одну теорему о лакунарных ортогональных рядах, которую можно рассматривать как относящийся к теории сходимости аналог теоремы о суммируемости 2.8.4:

Если выполнено условие (43) *и коэффициенты ряда* (47) *мажорируются положительной монотонно убывающей последовательностью чисел* $\{q_n\}$, *которая удовлетворяет условию*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n \sqrt{\lambda(n)} \log \lambda(n)}{n} < \infty,$$

то (47) *сходится почти всюду.*

Прежде всего из 2.8.4 следует $(C, \alpha > 0)$-суммируемость, а потому, в силу 2.7.2, последовательность $\{s_{2^n}(x)\}$ сходится почти всюду. Обозначим через ν_m произвольный индекс между 2^n и 2^{n+1}, для которого $c_{\nu_m} \neq 0$. Поэтому нам остается доказать соотношение $s_{\nu_m}(x) - s_{2^n}(x) = o_x(1)$. По теореме 2.3.1 существует такая положительная функция $\delta_n(x)$, для которой $|s_{\nu_m}(x) - s_{2^n}(x)| \leqslant \delta_n(x)$ и

$$\int_a^b \delta_n^2(x)\, d\mu(x) = O(1) \log^2 \lambda(2^n) \sum_{2^n < \nu_k \leqslant 2^{n+1}} c_{\nu_k}^2 = O(1)\, q_{2^n}^2 \lambda(2^n) \log^2 \lambda(2^n).$$

Поэтому мы имеем

$$\int_a^b \delta_n(x)\, d\mu(x) = O(1) \left\{ \int_a^b \delta_n^2(x)\, d\mu(x) \right\}^{1/2} = O(1) q_{2^n} \sqrt{\lambda(2^n)} \log \lambda(2^n) =$$

$$= O(1) q_{2^n} \sqrt{\lambda(2^{n-1})} \log \lambda(2^{n-1}) \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} \frac{1}{k} =$$

$$= O(1) \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} \frac{q_k \sqrt{\lambda(k)} \log \lambda(k)}{k}$$

и из нашего предположения выводим неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \delta_n(x)\, d\mu(x) < \infty,$$

т. е. ряд из подинтегральных функций сходится почти всюду. Таким образом, $\delta_n(x) \to 0$ почти всюду, чем и завершается наше доказательство.

Риссовские средние ортогональных рядов. Пусть $\{\lambda_n\}$ — возрастающая в строгом смысле последовательность положительных чисел с $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_n \to \infty$. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ называется $(R, \lambda_n, 1)$-*суммируемым к значению* s, если выполняется соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{n+1}}\right) u_k = s.$$

Ясно, что введенные М. Риссом $(R, \lambda_n, 1)$-средние являются обобщением $(C, 1)$-средних, с которыми они совпадают для $\lambda_n = n$. Но если $u_n = o(1)$, то при $\lambda_n = 2^n$ $(R, \lambda_n, 1)$-суммируемость эквивалентна сходимости. В самом деле, из условия $s_n = s + o(1)$ с помощью преобразования Абеля находим

$$\sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{n+1}}\right) u_k = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} (\lambda_{k+1} - \lambda_k)\, s_k}{\lambda_{n+1}} = \frac{(s + o(1)) \sum\limits_{k=0}^{n} 2^k}{2^{n+1}} = s + o(1),$$

т. е. ряд $(R, \lambda_n, 1)$-суммируем. Обратно:

$$\sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{n+1}}\right) u_k = s_n - \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{2^{n+1}} u_k =$$

$$= s_n - o(1) \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{2^{n+1}} = s_n + o(1),$$

и, следовательно, сходимость $(R, \lambda_n, 1)$-средних влечет сходимость последовательности $\{s_n\}$.

Для $(R, \lambda_n, 1)$-средних можно построить теорию, подобную той, которая имеется для $(C, \alpha > 0)$-средних. При этом мы получим, с одной стороны, обобщение важнейших доказанных ранее теорем, а с другой — более содержательные результаты, ибо за счет медленного возрастания последовательности $\{\lambda_n\}$ можно $(R, \lambda_n, 1)$-средние сделать сколь угодно сильным способом суммирования. Докажем прежде всего аналог теоремы 2.7.3:

2.8.7. *Пусть $\{\nu_n\}$ — возрастающая последовательность индексов, удовлетворяющая условию*

$$1 < q \leqslant \frac{\lambda_{\nu_{n+1}}}{\lambda_{\nu_n}} \leqslant r.$$

Сходимость почти всюду на множестве E последовательности частичных сумм $\{s_{\nu_n}(x)\}$ необходима и достаточна для того, чтобы ортогональный ряд $\sum c_n\varphi_n(x)$, коэффициенты которого удовлетворяют условию $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n^2 < \infty$, был бы $(R, \lambda_n, 1)$-суммируем почти всюду на E.

Необходимость. Если мы положим

$$\sigma_n(\lambda, x) = \sum_{k=0}^{n}\left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{n+1}}\right) c_k\varphi_k(x),$$

то из наших предположений относительно последовательности $\{\lambda_n\}$ следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b [s_{\nu_n}(x) - \sigma_{\nu_n}(\lambda, x)]^2\, d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda^2_{\nu_n+1}}\sum_{k=1}^{\nu_n}\lambda_k^2 c_k^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k^2 c_k^2 \sum_{\nu_n \geqslant k}\frac{1}{\lambda^2_{\nu_n+1}} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{q^{2l}} = O(1)\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty.$$

Отсюда по теореме 1.2.2 заключаем, что соотношение $s_{\nu_n}(x) - \sigma_{\nu_n}(\lambda, x) \to 0$ справедливо почти всюду на E, а поэтому из сходимости почти всюду на E последовательности $\{\sigma_{\nu_n}(\lambda, x)\}$ следует и сходимость почти всюду на E последовательности $\{s_{\nu_n}(x)\}$.

Достаточность. Пусть $\{s_{\nu_n}(x)\}$, а следовательно, также и $\{\sigma_{\nu_n}(\lambda, x)\}$, сходится почти всюду на E и пусть m — индекс, заключенный между ν_n и ν_{n+1}. Нам необходимо доказать стремление почти всюду к нулю разности $\sigma_m(\lambda, x) - \sigma_{\nu_n}(\lambda, x)$. Прежде всего, применяя неравенство Коши для $\nu_n < m < \nu_{m+1}$, получаем

$$[\sigma_m(\lambda, x) - \sigma_{\nu_n}(\lambda, x)]^2 \leqslant \sum_{=\nu_n}^{\nu_{n+1}-2}\frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_{j+2} - \lambda_{j+1}}[\sigma_{j+1}(\lambda, x) - \sigma_j(\lambda, x)]^2 \times$$

$$\times \sum_{j=\nu_n}^{\nu_{n+1}-2}\frac{\lambda_{j+2} - \lambda_{j+1}}{\lambda_{j+1}}.$$

Тогда, учитывая неравенство

$$\sum_{j=\nu_n}^{\nu_{n+1}-2} \frac{\lambda_{j+2}-\lambda_{j+1}}{\lambda_{j+1}} \leqslant \frac{1}{\lambda_{\nu_n+1}} \sum_{j=\nu_n}^{\nu_{n+1}-2} (\lambda_{j+2}-\lambda_{j+1}) \leqslant \frac{\lambda_{\nu_{n+1}}}{\lambda_{\nu_n}} \leqslant r,$$

находим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \max_{\nu_n<m<\nu_{n+1}} [\sigma_m(\lambda, x)-\sigma_{\nu_n}(\lambda, x)]^2\, d\mu(x) =$$

$$= O(1) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_{j+2}-\lambda_{j+1}} \int_a^b [\sigma_{j+1}(\lambda, x)-\sigma_j(\lambda, x)]^2\, d\mu(x) =$$

$$= O(1) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{j+2}-\lambda_{j+1}}{\lambda_{j+1}\lambda_{j+2}^2} \sum_{k=1}^{j+1} \lambda_k^2 c_k^2 = O(1) \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 c_k^2 \sum_{=k-1}^{\infty} \frac{\lambda_{j+2}-\lambda_{j+1}}{\lambda_{j+1}\lambda_{j+2}^2}.$$

Но так как

$$\frac{\lambda_{j+2}-\lambda_{j+1}}{\lambda_{j+1}\lambda_{j+2}^2} = \frac{(\lambda_{j+2}-\lambda_{j+1})(\lambda_{j+2}+\lambda_{j+1})}{\lambda_{j+1}\lambda_{j+2}^2(\lambda_{j+2}+\lambda_{j+1})} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\lambda_{j+2}^2-\lambda_{j+1}^2}{\lambda_{j+1}^2\lambda_{j+2}^2} = \frac{1}{\lambda_{j+1}^2} - \frac{1}{\lambda_{j+2}^2},$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \max_{\nu_n<m<\nu_{n+1}} [\sigma_m(\lambda, x)-\sigma_{\nu_n}(\lambda, x)]^2\, d\mu(x) =$$

$$= O(1) \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 c_k^2 \sum_{j=k-1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_{j+1}^2} - \frac{1}{\lambda_{j+2}^2}\right) = O(1) \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty.$$

Применяя 1.2.2, заключаем, что $\sigma_n(\lambda, x) - \sigma_{\nu_n}(\lambda, x) \to 0$ почти всюду, и наше утверждение доказано.

Теперь мы легко докажем аналоги теорем 2.8.1 и 2.8.2:

2.8.8. *Ортогональный ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$ *почти всюду* $(R, \lambda_n, 1)$-*суммируем, если его коэффициенты удовлетворяют условию*

$$\sum_{n=N}^{\infty} c_n^2 (\log\log \lambda_n)^2 < \infty$$

2.8.9. *Если члены монотонно возрастающей последовательности положительных чисел* $\{W(n)\}$ *имеют порядок*

$W(n) = o(\log\log\lambda_n)$, то существует ортогональный ряд $\sum_{n=0}^{\infty} C_n \Phi_n(x)$ с коэффициентами, удовлетворяющими условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 W^2(n) < \infty,$$

всюду не суммируемый методом $(R, \lambda_n, 1)$[1].

Для доказательства теоремы 2.8.8 продолжим последовательность $\{\lambda_n\}$ до непрерывной возрастающей функции $\lambda(x)$, например, с помощью линейной интерполяции, причем в точке $x = n$ полагаем $\lambda(n) = \lambda_n$. Однозначно определенную для $\lambda(x)$ обратную функцию обозначим через $l(x)$. Ради простоты положим, что $l(2^n)$ есть целое число. Теорема остается верной и без этого ограничения, но доказательство ее значительно усложняется. Тогда

$$\log n = O(\log\log 2^n) = O(\log\log \lambda_{l(2^n)}),$$

а потому

$$\sum_{n=2}^{\infty} \log^2 n \sum_{k=l(2^n)+1}^{l(2^{n+1})} c_k^2 = O(1) \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=l(2^n)+1}^{l(2^{n+1})} c_k^2 (\log\log\lambda_k)^2 < \infty.$$

Таким образом, из 2.3.4 следует сходимость почти всюду последовательности $\{s_{l(2^n)}(x)\}$, откуда, в силу соотношения

$$\frac{\lambda_{l(2^{n+1})}}{\lambda_{l(2^n)}} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$$

и теоремы 2.8.7, мы выводим $(R, \lambda_n, 1)$-суммируемость ортогонального ряда.

Доказательство теоремы 2.8.9 мы не будем детализировать, ибо оно является почти дословным повторением доказательства теоремы 2.8.2. Единственное отличие состоит в том, что теперь мы должны положить $\Phi_{l(2^n)}(x) = \varphi_n'(x)$, $C_{l(2^n)} = c_n'$

---

[1] Теорема 2.8.9 сформулирована автором нечетко. Так, если мы возьмем $\lambda_n = 2^{2^n}$, то метод $(R, \lambda_n, 1)$ будет регулярным, и для $W(n) \equiv \sqrt{n} = o(\log\log\lambda_n)$ нельзя построить всюду расходящегося (тем более не суммируемого методом $(R, \lambda_n, 1)$) ортогонального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} C_n \Phi_n(x)$ с $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 W^2(n)$. Поэтому в теореме 2.8.9 нужны некоторые ограничения на рост λ_n. — *Прим. ред.*

и $\Phi_m(x) = \varphi''_m(x)$, $C_m = 0$ при $m \neq l(2^n)$, где $\varphi'_n(x)$, $\varphi''_n(x)$, c'_n и c''_n имеют данные на стр. 133 значения.

Интересное следствие теоремы 2.8.8 состоит в том, что *для каждого ортогонального ряда с коэффициентами, удовлетворяющими условию* $\sum c_n^2 < \infty$, *можно указать* $(R, \lambda_n, 1)$-*метод, который почти всюду суммирует этот ортогональный ряд*. В самом деле, из условия $\sum c_n^2 < \infty$ следует существование стремящейся к бесконечности строго возрастающей последовательности $\{\mu_n\}$, такой, что $\sum c_n^2 \mu_n^2 < \infty$. Тогда, полагая $\lambda_n = e^{e^{\mu_n}}$ и применяя теорему 2.8.8, выводим $(R, \lambda_n, 1)$-суммируемость почти всюду заданного ортогонального ряда.

Как вышеуказанные теоремы, так и формулировка проблемы $(R, \lambda_n, 1)$-суммируемости ортогонального ряда даны Зигмундом [2] (см. также Лоренц [1] и Медер [1]). Результаты Зигмунда относятся к более общим методам Рисса, чем $(R, \lambda_n, 1)$-средние. Заметим, что из 2.8.8 при $\lambda_n = 2^n$ мы получаем теорему Меньшова—Радемахера 2.3.2, а при $\lambda_n = n$ — теорему Меньшова—Качмажа 2.8.1.

Приведенная на стр. 132 теорема Качмажа утверждает следующее: для каждого регулярного метода суммирования (T) существует такая последовательность индексов $\{\nu_n\}$, что (T)-суммируемость почти всюду ряда (47) влечет сходимость почти всюду последовательности $\{s_{\nu_n}(x)\}$. Поэтому, применяя теорему 2.8.8, мы заключаем, что *при условии* $\sum c_n^2 < \infty$ *для каждого* (T)-*метода можно найти такие* $(R, \lambda_n, 1)$-*средние, которые суммируют почти всюду ортогональный ряд* (47), *если только этот ряд* (T)-*суммируем почти всюду.*

§ 9. Не суммируемые методом Абеля ортогональные ряды с монотонными коэффициентами

Хотя в 2.8.2 доказана неулучшаемость критерия суммируемости (45), теорема 2.8.5 указывает на то, что суммируемость ортогонального ряда более сильно зависит от монотонности коэффициентов, чем сходимость. Отсюда возникает вопрос: существует ли вообще нигде не суммируемый методом Абеля ортогональный ряд с монотонными коэффициентами, для которого $\sum c_n^2 < \infty$? Ответ на этот вопрос утвердительный, что устанавливается уточнением метода доказательства теоремы 2.4.2, предложенного Меньшовым и Тандори. Результатом этого доказательства, хотя и сложного в деталях, но ничего нового по сравнению с 2.4.2 не содержащего, является следующая теорема Тандори [4]:

2.9.1. *Если последовательность коэффициентов $\{c_n\}$ удовлетворяет условиям*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 < \infty, \tag{55}$$

$$\sqrt{n}\, c_n \geqslant \sqrt{n+1}\, c_{n+1} > 0, \tag{56}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_n^2 (\log\log n)^2 = \infty, \tag{57}$$

то существует такая ортонормированная система $\{\Phi_n(x)\}$, что образованный с этими коэффициентами ортогональный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \Phi_n(x)$$

не суммируем методом A ни в какой точке интервала ортогональности.

Эта теорема утверждает, между прочим, что наличие регулярности убывания коэффициентов c_n не влияет на A-суммируемость, ибо существует не суммируемый методом A ортогональный ряд с регулярно убывающими коэффициентами. Действительно, по теореме 2.9.1 существует нигде не суммируемый методом A ортогональный ряд, например, с коэффициентами $c_n = n^{-\frac{1}{2}} (\log n)^{-\frac{1}{2}} (\log\log n)^{-\frac{3}{2}}$. Далее, из 2.9.1 и 2.8.1 выводится следующая теорема:

2.9.2. *Пусть $\{\sqrt{n}\, c_n\}$ — невозрастающая последовательность положительных чисел. Тогда условие*

$$\sum_{n=3}^{\infty} c_n^2 (\log\log n)^2 < \infty$$

необходимо и достаточно для того, чтобы для любой ортонормированной системы $\{\varphi_n(x)\}$ ортогональный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

был бы $(C, \alpha > 0)$-суммируем почти всюду.

Как и при доказательстве 2.4.2, мы установим прежде всего уточнение леммы 2.4.4, которое будет играть здесь ту же роль, что и 2.4.4 при доказательстве 2.4.2:

2.9.3. *Пусть* $C \geqslant 2$, $p \geqslant 2$, $a_1, \ldots, a_{2p}$ — *положительные целые числа и пусть, кроме того,* $s_0 = 0$, $s_i = a_1 + \ldots + a_i$ *для* $i = 1, 2, \ldots, 2p$ *и* $a_l = a_i$ *для* $s_{i-1} < l \leqslant s_i$. *Тогда на* $[0, 1]$ *существует* s_{2p}*-членная система* $\{h_l(C, p, \{a\}; x)\}$, *кусочно-постоянных ортонормированных функций со следующими свойствами*:

1) *На* $[0, 1]$ *имеется измеримое подмножество* $E(C)$ *с мерой* $|E(C)| = \frac{1}{5C}$ *и для любого* $x \in E(C)$ *имеется индекс* $m(x) < 2p$ *такой, что значения функций* $h_l(C, p\{a\}; x)$ *при* $l = 1, 2, \ldots, s_{m(x)}$ *неотрицательны.*

2) *Существует такая положительная постоянная* A, *что в каждой точке* $x \in E(C)$ *справедливо неравенство*

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}} h_1(C, p, \{a\}, x) + \ldots + \frac{1}{\sqrt{a_{s_{m(x)}}}} h_{s_{m(x)}}(C, p\{a\}; x) \geqslant A\sqrt{Cp}\log p.$$

Интервал $[0, 1]$ разделим на $N = a_1, a_2, \ldots, a_{2p}$ равных частей и ϱ-й частичный интервал обозначим через $I_\varrho = [u_\varrho, v_\varrho]$. Пусть $f_l = (C, p, I_\varrho; x)$ для $l = 1, 2, \ldots, 2p$ есть определенные в 2.4.4 кусочно-постоянные функции[1] и пусть $E(C, I_\varrho)$ — относящиеся к этим функциям полуоткрытые интервалы длиной $\frac{1}{5CN}$. Для индексов $i = 1, 2, \ldots, 2p$ и $j = 1, 2, \ldots, a_i$ полагаем

$$h_{s_{i-1}+j}(C, p, \{a\}; x) = \sqrt{a_i} \sum_{\varrho=(j-1)\frac{N}{a_i}+1}^{j\frac{N}{a_i}} f_i(C, p, I_\varrho; x)$$

и, кроме того,

$$E(C) = \bigcup_{\varrho=1}^{N} E(C, I_\varrho).$$

Из определения $E(C)$ следует, что $|E(C)| = \frac{1}{5C}$, а из 2.4.4 для любого индекса $l = s_{i-1} + j$ выводим соотношение

$$\int_0^1 h_l^2(C, p, \{a\}; x)\,dx = a_l \sum_{\varrho=(j-1)\frac{N}{a_i}+1}^{j\frac{N}{a_i}} \int_{I_\varrho} f_i^2(C, p, I_\varrho; x)\,dx =$$

$$= a_i \frac{N}{a_i} \frac{1}{N} = 1,$$

[1] Здесь функции $f_l(C, p, I_\varrho; x)$ предполагаются равными нулю вне (u_ϱ, v_ϱ). — *Прим. ред.*

т. е. функции $h_l(C, p, \{a\}; x)$ нормированы. Легко доказать, что они также и ортогональны друг другу. Действительно, если через $l_1 = s_{i_1-1} + j_1$ и $l_2 = s_{i_2-1} + j_2$ обозначим два различных индекса, то получим

$$H_{l_1, l_2} = \int_0^1 h_{l_1}(C, p, \{a\}; x)\, h_{l_2}(C, p, \{a\}; x)\, dx =$$
$$= \sqrt{a_{i_1} a_{i_2}} \sum_{\varrho} \int_{I_\varrho} f_{i_1}(C, p, I_\varrho; x)\, f_{i_2}(C, p, I_\varrho; x)\, dx.$$

Здесь ϱ пробегает все индексы, которые удовлетворяют одновременно двум неравенствам:

$$(j_1 - 1)\frac{N}{a_{i_1}} < \varrho \leqslant j_1 \frac{N}{a_{i_1}},\quad (j_2 - 1)\frac{N}{a_{i_2}} < \varrho \leqslant j_2 \frac{N}{a_{i_2}}.$$

Если таких индексов не существует, то справа стоящая сумма пуста, т. е. $H_{l_1, l_2} = 0$. Это будет в том случае, когда $i_1 \neq i_2$, а $j_1 \neq j_2$. Поэтому при $l_1 \neq l_2$ мы должны рассмотреть лишь случай $i_1 \neq i_2$, $j_1 = j_2$. Но тогда функции $f_i(C, p, I_\varrho; x)$, в силу леммы 2.4.4, ортогональны друг другу, а, стало быть, справа стоящий член обращается в нуль, т. е. и в этом случае $H_{l_1, l_2} = 0$. Этим доказана ортогональность системы $\{h_l(C, p, \{a\}; x)\}$.

Пусть теперь $x \in E(C)$; тогда имеется индекс ϱ, для которого $x \in E(C, I_\varrho)$. Кроме того, в силу определения, каждому индексу i соответствует индекс $j = j(i, x) \leqslant a_i$, для которого

$$h_{s_{i-1}+j}(C, p, \{a\}; x) = \sqrt{a_i}\, f_i(C, p, I_\varrho; x),$$

а для всех остальных индексов j

$$h_{s_{i-1}+j}(C, p, \{a\}; x) = 0.$$

Применяя 2.4.4, убеждаемся в существовании индекса $m(x)$, для которого имеет место соотношение

$$\frac{1}{\sqrt{\bar a_1}} h_1(C, p, \{a\}; x) + \ldots + \frac{1}{\sqrt{\bar a_{s_{m(x)}}}} h_{s_{m(x)}}(C, p, \{a\}; x) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{a_1}} h_{j(1, x)}(C, p, \{a\}; x) + \ldots + \frac{1}{\sqrt{a_{m(x)}}} h_{s_{m(x)-1}+j(m(x), x)}(C, p, \{a\}; x) =$$
$$= f_1(C, p, I_\varrho; x) + \ldots + f_{m(x)}(C, p, I_\varrho; x) \geqslant A\sqrt{Cp}\log p.$$

Этим завершается доказательство 2.9.3.

Дальнейшее доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 2.4.2, только вместо оценки

$$|c_{N_m} \Phi_{N_m}(x) + \ldots + c_{N_m+n(x)} \Phi_{N_m+n(x)}(x)| \geqslant B > 0$$

в этом случае используется оценка

$$|c_{2^{N_m+1}+1} \Phi_{2^{N_m+1}+1}(x) + \ldots + c_{2N_m+n_m(x)+1} \Phi_{2N_m+n_m(x)+1}(x)| \geqslant B > 0,$$

которая доказывается для бесконечно многих m. Отсюда следует расходимость последовательности частичных сумм $\{s_{2^n}(x)\}$, из которой по теореме 2.7.1 выводим несуммируемость ряда почти всюду методом A, а после изменения значений функций на нуль-множестве получаем несуммируемость всюду методом A.

Из-за сильного сходства между доказательствами этих теорем мы по возможности будем опускать детали отдельных вычислений, ссылаясь при этом на соответствующие места доказательства 2.4.2.

Заметим, прежде всего, что из (56) следует равенство $c_n = \frac{1}{\sqrt{n}\lambda_n}$, где $\{\lambda_n\}$ — неубывающая последовательность положительных чисел. Полагая $l_n = \lambda_{2^n}$, из (57) легко выводим соотношение

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^2 n}{l_n^2} = \infty.$$

Для $m = 0, 1, \ldots$ полагаем $N_m = 2^{m+2} - 4$. Тогда из неравенства

$$\sum_{n=N_1}^{\infty} \frac{\log^2 n}{l_n^2} \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=N_{m+1}}^{N_{m+2}-1} \frac{\log^2 k}{l_k^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(N_{m+2} - N_{m+1}) \log^2 N_{m+2}}{l_{N_{m+1}}^2} \leqslant 6 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{N_{m+1} \log^2 N_{m+1}}{l_{N_{m+1}}^2}$$

получаем соотношение

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{N_{m+1} \log^2 N_{m+1}}{l_{N_{m+1}}^2} = \infty, \tag{58}$$

которое будет использовано в дальнейшем.

Перейдем теперь к построению системы $\{\Phi_n(x)\}$ и докажем для этого аналог леммы 2.4.5.

2.9.4. *На интервале $[a, b]$ для каждого индекса m можно так определить измеримое множество E_m с мерой*

$$|E_m| \geqslant \frac{b-a}{10} \min\left\{1; \frac{N_{m+1}\log^2 N_{m+1}}{l^2_{N_{m+1}}}\right\} \tag{59}$$

и систему $\{\Phi_n(x)\}$ кусочно-постоянных ортонормированных функций, что

(a) *множества E_m стохастически независимы;*

(b) *для каждой точки $x \in E_m$ имеется индекс $n_m(x) < 2^{m+2}$, такой, что значения функций $\Phi_{2N_m+1+1}(x), \ldots, \Phi_{2N_m+n_m(x)+1}(x)$ имеют один и тот же знак и, кроме того, справедливо неравенство*

$$\left|\frac{1}{\sqrt{\bar{a}_1}}\Phi_{2N_m+1+1}(x) + \ldots + \frac{1}{\sqrt{\bar{a}_{s_{n_m(x)}}}}\Phi_{2N_m+n_m(x)+1}(x)\right| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{A}{6(b-a)} l_{N_{m+1}}, \tag{60}$$

где ради сокращения положено: $\bar{a}_j = 2^{N_m+i} = a_i$ при $s_{i-1} < j \leqslant s_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 2^{m+2})$ и $s_0 = 0$, $s_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_i$.

Через $h_l(C, p, \{a\}, I; x)$ обозначим функцию, которая получена из $h_l(C, p, \{a\}; x\}$ с помощью линейного преобразования интервала $[0, 1]$ в интервал $I = [u, v]$, т. е.

$$h_l(C, p, \{a\}, I; x) = \begin{cases} h_l\left(C, p, \{a\}; \dfrac{x-u}{v-u}\right), & \text{если } x \in (u, v), \\ 0, & \text{если } x \notin (u, v). \end{cases}$$

Далее, через $E(C, I)$ обозначим образующийся при этом преобразовании образ множества $E(C)$. Тогда лемма 2.9.3 справедлива для функций $h_l(C, p, \{a\}, I; x)$ и множества $E(C, I)$ с мерой $|E(C, I)| = \dfrac{|I|}{5C}$. Теперь $\Phi_i(x)$ определим следующим образом: $\Phi_i(x) = r_i(x)$ при $i = 1, 2$. Далее, интервал $[a, b]$ разобьем на четыре равные части и через $\bar{I}_\varrho$ $(\varrho = 1, 2, 3, 4)$ обозначим эти частичные интервалы, а через $\bar{I}'_\varrho$ и $\bar{I}''_\varrho$ — соответственно левую и правую половины частичного интервала $\bar{I}_\varrho$. Применим теперь лемму 2.9.3 с

$$C = C_1 = \left[\frac{l^2_{N_1}}{N_1 \log^2 N_1} + 1\right], \ p = p_1 = 2, \ a_i^{(1)} = 2^i$$

$$(i = 1, 2, \ldots, 2p_1)$$

(здесь $[a]$ означает целую часть числа a). Если для $l = 1, 2, \ldots$ $\ldots, 2^{2p+1} - 2$ положим

$$\Phi_{2+l}(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}} \sum_{\varrho=1}^{4} [h_l(C_1, p_1, \{a^{(1)}\}, \bar{I}'_\varrho; x) - h_l(C_1, p_1, \{a^{(1)}\}; \bar{I}''_\varrho; x)]$$

и

$$E_0 = \bigcup_{\varrho=1}^{4} [E(C_1, \bar{I}'_\varrho) \cup E(C_1, \bar{I}''_\varrho)],$$

то, опираясь на лемму 2.9.3, как и при доказательстве 2.4.5, нетрудно убедиться в том, что, во-первых, кусочно-постоянные функции $\Phi_n(x)$ $(2 < n \leqslant 2^{N_1+1})$ образуют ортонормированную систему, во-вторых, мера множества E_0 удовлетворяет условию (59) с $m = 0$ и, в-третьих, соотношение (60) справедливо при $m = 0$.

Предполагая, что 2.9.4 верна при всех $m \leqslant k-1$, для завершения доказательства по индукции мы должны показать справедливость 2.9.4 при $m = k$. С этой целью интервал $[a, b]$ разделим на интервалы постоянства $I_1, I_2, \ldots, I_r$ ранее определенных кусочно-постоянных ортонормированных функций $\Phi_n(x)$ (ясно, что число таких интервалов конечно) и обозначим через I'_ϱ левую, а через I''_ϱ правую половины интервала I_ϱ. Применим теперь лемму 2.9.3 с

$$C = C_{k+1} = \left[\frac{l^2_{N_{k+1}}}{N_{k+1} \log^2 N_{k+1}} + 1\right],$$

$$p = p_{k+1} = 2^{k+1}, \quad a_i^{(k+1)} = 2^{N_k+1} \qquad (i = 1, \ldots, 2p_{k+1}).$$

Если для $l = 1, 2, \ldots, 2^{N_k + 2p_{k+1}+1} - 2^{N_k+1}$ положим

$$\Phi_{2^{N_k+1}+l}(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}} \sum_{\varrho=1}^{r} [h_l(C_{k+1}, p_{k+1}, \{a^{(k+1)}\}, I'_\varrho; x) -$$
$$- h_l(C_{k+1}, p_{k+1}, \{a^{(k+1)}\}, I''_\varrho; x)]$$

и

$$E_k = \bigcup_{\varrho=1}^{r} [E(C_{k+1}, I'_\varrho) \cup E(C_{k+1}, I''_\varrho)],$$

то, опираясь на лемму 2.9.3, как и при доказательстве 2.4.5, убеждаемся в справедливости леммы 2.9.4 при $m = k$, чем и заканчивается ее доказательство.

Точно так же, как и при доказательстве 2.4.6, из стохастической независимости множеств E_m из (59) и (60) для множества

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcap_{l=k}^{\infty} E_l$$

мы находим меру $|E| = b - a$. Тем самым мы почти доказали теорему 2.9.1, ибо (60) справедливо для бескочено многих m в любой точке $x \in E$. Нужно только заметить следующее: при $2^{N_m+i} < j \leqslant 2^{N_m+i+1}$ имеем

$$\frac{1}{\sqrt{2^{N_m+i+1}}\, l_{N_m+i+1}} \leqslant c_i = \frac{1}{\sqrt{j}\lambda_j} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2^{N_m+i}}\, l_{N_m+i}}.$$

Учитывая это неравенство и условие (60), точно так же, как в конце доказательства 2.4.2, убеждаемся в справедливости неравенства

$$\left| c_{2^{N_m+1}+1}(x)\, \Phi_{2^{N_m+1}+1}(x) + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + c_{2^{N_m+n_m(x)}+1}\, \Phi_{2^{N_m+n_m(x)}+1}(x) \right| \geqslant B > 0$$

для бесконечно многих номеров m и при любом $x \in E$. Изменяя теперь значения функций $\Phi_n(x)$ на нуль-множестве, на котором это неравенство не выполняется, мы получаем утверждение 2.9.1.

Как мы уже отмечали при доказательстве теоремы 2.8.5, существует сколь угодно медленно сходящаяся к нулю последовательность коэффициентов, которая удовлетворяет условию (50). Поэтому предположение (56) не является излишним и, вероятно, не может быть заменено только требованием монотонности. Но, как и теорема 2.8.1, теорема 2.8.5 является окончательной и не может быть улучшена. В самом деле, Тандори [6] доказал следующую теорему:

Пусть последовательность положительных чисел $\{w(n)\}$ такова, что $\sqrt{n} = o\{w(n)\}$. Тогда существует всюду не суммируемый методом А ортогональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n\, \Phi_n(x)$, коэффициенты которого удовлетворяют условиям

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 < \infty,\ c_n \geqslant c_{n+1} > 0 \quad и \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{w(n)} < \infty.$$

Доказательство основано на идее, подобной идее доказательства теоремы 2.9.1. Мы набросаем только его основной ход. Рассмотрим такую последовательность индексов $n_1 < n_2 < \ldots$, что для $M_m = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \ldots + 2^{n_m}$ выполняется соотношение

$$\frac{w(n)}{\sqrt{n}} \geqslant m \qquad (n \geqslant M_m),$$

и положим

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{M_{m+1} - M_m}\,\sqrt{m}\log(m+2)} \qquad (M_m < n \leqslant M_{m+1}).$$

Последовательность $\{c_n\}$ является, очевидно, положительной и монотонно убывающей и, как нетрудно проверить, для нее справедливо соотношение

$$\sum_{n=M_1+1}^{\infty} \frac{c_n}{w(n)} = \sum_{m=1}^{\infty} O\left(\frac{1}{m^{3/2}}\right) < \infty.$$

Функции $\Phi_n(x)$ строим по индукции, применяя на k-м шаге лемму 2.9.3 с $C = C_{k+1} = 1, p = p_{k+1} = 2^{k+1}, a_i^{(k)} = M_{i+N_k+1} - M_{i+N_k}$ $(i = 1, \ldots, 2p_{k+1})$.

При этом для $l = 1, 2, \ldots, M_{N_{k+1}+1} - M_{N_k+1}$ полагаем

$$\Phi_{M_{N_k+1}+l}(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}} \sum_{\varrho=1}^{r} [h_l(C_{k+1}, p_{k+1}, \{a^{(k)}\}, I'_\varrho; x) - \\ - h_l(C_{k+1}, p_{k+1}, \{a^{(k)}\}, I''_\varrho; x)]$$

и

$$E_k = \bigcup_{\varrho=1}^{r} [E(C_{k+1}, I'_\varrho) \cup E(C_{k+1}, I''_\varrho)].$$

Как и ранее, показывается, что в каждой точке множества $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}} E_m$, мера которого равна $b - a$, для бесконечно многих значений m имеет место оценка

$$|c_{M_{N_m+1}+1}\Phi_{M_{N_m+1}+1}(x) + \ldots + c_{M_{N_m+n_m(x)+1}}\Phi_{M_{N_m+n_m(x)+1}}(x)| \geqslant \\ \geqslant B > 0,$$

и, стало быть, подпоследовательность частичных сумм $\{s_{M_m}(x)\}$ расходится почти всюду. После необходимого изменения значений функций $\Phi_n(x)$ на нуль-множестве, из 2.7.1 выводим несуммируемость всюду ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n\Phi_n(x)$ методом A.

В теоремах этого параграфа мы нигде не предполагали ограниченности ортонормированной системы $\{\Phi_n(x)\}$. Поэтому возникает вопрос, останутся ли сформулированные выше теоремы справедливыми и при предположении $\Phi_n(x) = O_x(1)$. Эта нерешенная проблема является, по-видимому, очень трудной.

§ 10. Теорема Меньшова о суммируемости ортогональных рядов

Различные контрпримеры, подтверждающие невозможность улучшения различных теорем сходимости и суммируемости, указывают на то, что при одном только условии

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 < \infty \tag{61}$$

общие ортогональные ряды не имеют никаких хороших свойств сходимости, не говоря уже о хороших способах представления L^2-интегрируемых функций. В этом нет ничего удивительного, так как одна ортонормированность является слишком общим понятием для того, чтобы от всех ортогональных рядов можно было бы ожидать хороших свойств сходимости. Поэтому тем более замечателен фундаментальный результат Меньшова, утверждающий, что любой ортогональный ряд, коэффициенты которого удовлетворяют условию (61), становится почти всюду $(C, \alpha > 0)$-суммируемым, если только надлежащим образом изменить порядок его членов. Эта теорема может быть сформулирована следующим образом:

2.10.1. *Если $\{\varphi_n(x)\}$ — произвольная ортонормированная система (в L^2), то существует такой порядок функций этой системы $\{\varphi_{\nu_n}(x)\}$, что каждый ортогональный ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_{\nu_n}(x)$$

для всех $\alpha > 0$ (C, α)-суммируем почти всюду при одном только условии (61).

Для доказательства этой, а также и другой более общей теоремы Меньшова нам потребуется несколько вспомогательных теорем. Первая из них, интересная так же и сама по себе, гласит:

2.10.2. *Для любой ортонормированной системы $\{\varphi_n(x)\}$ (в L^2) существует возрастающая последовательность индексов $\{m_k\}$ такая, что сходится почти всюду последовательность частич-*

ных сумм $\{s_{m_k}(x)\}$ *каждого ортогонального ряда*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x),$$

коэффициенты которого удовлетворяют условию (61).

Без ограничения общности мы можем в качестве интервала ортогональности выбрать интервал $[0, \pi]$. Тогда функцию $\varphi_i(x)$ разложим в ряд по косинусам

$$\varphi_i(x) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^{(i)} \cos \nu x.$$

Так как система $\{\cos \nu x\}$ полна, то ряд Фурье функции $\varphi_i(x)$ сходится в метрике пространства L^2 к этой функции, а потому для каждого i существует целое число $v(i)$ такое, что $i < v(i) < v(i+1)$ и

$$\int_0^\pi \left[\varphi_i(x) - \sum_{\nu=0}^{v(i)} a_\nu^{(i)} \cos \nu x\right]^2 dx < \frac{1}{2^i}. \tag{62}$$

Далее, применяя неравенство Бесселя, получаем следующие оценки:

$$\sum_{i=0}^{\infty} (a_0^{(i)})^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\pi^2}\left[\int_0^\pi \varphi_i(x)\, dx\right]^2 \leqslant \frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi dx,$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} (a_\nu^{(i)})^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{4}{\pi^2}\left[\int_0^\pi \varphi_i(x) \cos \nu x\, dx\right]^2 \leqslant \frac{4}{\pi^2}\int_0^\pi \cos^2 \nu x\, dx$$

($\nu = 1, 2, \ldots$). Стало быть, существует возрастающая последовательность индексов $\{n_k\}$, такая, что $n_k > k$ и

$$\sum_{i=n_k}^{\infty} (a_k^{(i)})^2 < \frac{1}{2^k}. \tag{63}$$

Полагая $u(i) = k$ при $n_k \leqslant i < n_{k+1}$, мы имеем $v(i) > i > u(i)$. Теперь из последовательности индексов $\{n_k\}$ выберем подпоследовательность $\{m_k\}$, удовлетворяющую условию

$$u(m_{i+1}) > 2v(m_i) \qquad (i = 0, 1, \ldots). \tag{64}$$

Если теперь положим

$$\varphi_i(x) = \sum_{\nu=0}^{u(i)} a_\nu^{(i)} \cos \nu x + \sum_{\nu=u(i)+1}^{v(i)} a_\nu^{(i)} \cos \nu x + \sum_{\nu=v(i)+1}^{\infty} a_\nu^{(i)} \cos \nu x \equiv$$
$$\equiv \varphi_i'(x) + \varphi_i''(x) + \varphi_i'''(x),$$

то получим

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i\varphi_i(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i\varphi_i'(x) + \sum_{i=0}^{\infty} c_i\varphi_i''(x) + \sum_{i=0}^{\infty} c_i\varphi_i'''(x). \quad (65)$$

В силу (63), сходимость первой справа стоящей суммы следует из оценки

$$\sum_{i=0}^{\infty} |c_i\varphi_i'(x)| \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} |c_i| \sum_{k=0}^{u(i)} |a_k^{(i)}| = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{u(i)>k} |c_i||a_k^{(i)}| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \left\{\sum_{i=n_k}^{\infty} c_i^2\right\}^{1/2} \cdot \left\{\sum_{i=n_k}^{\infty} (a_k^{(i)})^2\right\}^{1/2} \leqslant \left\{\sum_{i=0}^{\infty} c_i^2\right\}^{1/2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left\{\sum_{i=n_k}^{\infty} (a_k^{(i)})^2\right\}^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant \left\{\sum_{i=0}^{\infty} c_i^2\right\}^{1/2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^k}} < \infty.$$

Принимая во внимание (62), заключаем о сходимости почти всюду последней суммы в (65) из следующей оценки:

$$\int_0^{\pi} \left[\sum_{i=0}^{\infty} |c_i\varphi_i'''(x)|\right]^2 dx \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} c_i^2 \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^{\pi} [\varphi_i'''(x)]^2\, dx \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=0}^{\infty} c_i^2 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \infty.$$

Займемся теперь суммой $\sum c_i\varphi_i''(x)$. Положим

$$c_i' = \begin{cases} c_i, & \text{если } m_{2k} < i \leqslant m_{2k+1}, \\ 0, & \text{если } m_{2k+1} < i \leqslant m_{2k+2} \end{cases} \quad (k = 0, 1, \ldots)$$

и

$$c_i'' = \begin{cases} 0, & \text{если } m_{2k} < i \leqslant m_{2k+1}, \\ c_i, & \text{если } m_{2k+1} < i \leqslant m_{2k+2} \end{cases} \quad (k = 0, 1, \ldots).$$

Так как $\sum (c_n')^2 < \infty$, то из теоремы Рисса—Фишера 1.2.4 следует, что ряд $\sum c_n'\varphi_n(x)$ в смысле метрики L^2 сходится к некоторой L^2-интегрируемой функции. Это замечание применимо, очевидно, и для рядов $\sum c_n'\varphi_n'(x)$ и $\sum c_n'\varphi_n'''(x)$. Поэтому существует такая функция $f \in L^2$, что ряд $\sum c_n'\varphi_n''(x)$ в смысле метрики L^2 сходится к $f(x)$. Пусть теперь

$$f(x) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \cos \nu x.$$

Если через $S(n, x)$ обозначим n-ю частичную сумму этого ряда Фурье, то из определения функций $\varphi_i''(x)$ и индексов m_k очевидны равенства

$$S(v(m_{2k+1}), x) = \sum_{i=0}^{m_{2k+1}} c_i'\varphi_i''(x) = \sum_{i=0}^{m_{2k+2}} c_i'\varphi_i''(x).$$

Как хорошо известно, ряд Фурье L^2-интегрируемой функции $(C, \alpha > 0)$-суммируем почти всюду. (Более общая теорема, содержащая это утверждение как частный случай, будет доказана нами в 3.4.1.) Из этого результата по теореме 2.7.1 заключаем, что последовательность $\{S(\nu_n, x)\}$ при $\nu_{n+1}/\nu_n \geqslant \geqslant q > 1$ сходится почти всюду. Вместе с тем из (64) выводим неравенства

$$v(m_{2k+3}) > u\,(m_{2k+3}) > 2v\,(m_{2k+2}) > 2v\,(m_{2k+1}),$$

а потому последовательность $\{S(v(m_{2k+1}), x)\}$ сходится, т. е. сходится почти всюду последовательность сумм

$$\sum_{i=0}^{m_{2k+1}} c_i'\varphi_i''(x) = \sum_{i=0}^{m_{2k+2}} c_i''\varphi_i''(x)$$

и последовательность $\left\{\sum_{i=0}^{m_k} c_i'\varphi_i''(x)\right\}$. Аналогично доказывается сходимость почти всюду последовательности $\left\{\sum_{i=0}^{m_k} c_i''\varphi_i''(x)\right\}$.

Теперь из (65) мы получаем сходимость почти всюду последовательности частичных сумм

$$s_{m_k}(x) = \sum_{i=0}^{m_k} c_i\varphi_i'(x) + \sum_{i=0}^{m_k} c_i\varphi_i''(x) + \sum_{i=0}^{m_k} c_i\varphi_i'''(x),$$

а это и доказывает наше утверждение.

Ортонормированная система $\{\psi_n(x)\}$ называется *системой сходимости*, если всякий ряд $\sum c_n\psi_n(x)$, коэффициенты которого удовлетворяют условию (61), сходится почти всюду. Непосредственным следствием только что доказанной теоремы является такое утверждение:

2.10.3. *Каждая ортонормированная (в L^2) система содержит в себе (бесконечную) систему сходимости.*

Пусть $\{m_k\}$ — определенная в предыдущей теореме последовательность индексов. Если положить $c_{m_k} = a_k$ и $c_\nu = 0$ при $\nu \neq m_k$, то частичные суммы ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_{m_k}(x)$$

совпадают с частичными суммами $s_{m_k}(x)$ ряда $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$.

Из 2.10.2 и из условия $\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 < \infty$ убеждаемся в сходимости почти всюду сумм

$$\sum_{k=0}^{m_n} c_k \varphi_k(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_{m_k}(x),$$

т. е. система $\{\varphi_{m_n}(x)\}$ является системой сходимости.

Теперь мы докажем усиление 2.10.2, состоящее в том, что определенная в этой теореме последовательность индексов $\{m_k\}$ при соответствующем порядке функций ортонормированной системы может быть выбрана очень медленно возрастающей:

2.10.4. *Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — ортонормированная (в L^2) система и $\{p_n\}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел со свойством*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(p_{n+1} - p_n) = \infty. \tag{66}$$

Тогда существует такой порядок $\{\varphi_{\nu_k}(x)\}$ функций системы $\{\varphi_n(x)\}$, при котором суммы

$$\sum_{k=0}^{p_n} c_k \varphi_{\nu_k}(x)$$

сходятся почти всюду, если только коэффициенты c_k удовлетворяют условию (61).

Пусть $\{\varphi_{m_k}(x)\}$ — бесконечная система сходимости, образованная из системы функций $\{\varphi_n(x)\}$. Существование такой системы сходимости гарантируется теоремой 2.10.3. Отличные от $m_1, m_2, \ldots$ индексы обозначим через $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$. По теореме 2.10.2 существует возрастающая последовательность натуральных чисел $\{l_n\}$ такая, что при условии $\sum a_k^2 < \infty$ суммы

$$\sum_{k=0}^{l_n} a_k \varphi_{\varrho_k}(x)$$

сходятся почти всюду. Из (66) выводим существование возрастающей последовательности индексов $\{i_k\}$, для которой выполнены условия $p_{i_k} - p_{i_{k-1}} > l_k - l_{k-1}$. Полагая теперь

$$q_0 = 0, \qquad q_k = p_{i_{k-1}} + l_k - l_{k-1},$$

мы имеем

$$q_{k-1} < p_{i_{k-1}} < q_k < p_{i_k}.$$

Желаемый порядок функций $\{\varphi_{\nu_r}(x)\}$ мы получим следующим образом. Места с индексами $p_{i_{k-1}}+1, \ldots, q_k$ занимаем функциями $\{\varphi_{\varrho_n}(x)\}$, а остальные места функциями системы сходимости $\{\varphi_{m_k}(x)\}$. Пусть теперь n есть некоторый индекс, удовлетворяющий условиям $i_{k-1} \leqslant n < i_k$. Так как множество чисел $p_{i_{k-1}} + 1, \ldots, q_k$ состоит из $l_k - l_{k-1}$ чисел, то, обозначая через c_j' коэффициенты при $\varphi_{\varrho_j}(x)$, а через c_j'' — коэффициенты при $\varphi_{m_j}(x)$, мы выводим следующее соотношение:

$$\sum_{j=p_{i_0}+1}^{p_n} c_j \varphi_{\nu_j}(x) = \sum_{j=p_{i_0}+1}^{l_{k-1}} c_j' \varphi_{\varrho_j}(x) + \sum_{j=p_{i_0}+1}^{p_n - l_{k-1}} c_j'' \varphi_{m_j}(x).$$

Так как $\{\varphi_{m_k}(x)\}$ является системой сходимости и так как, в силу (61), $\sum (c_j'')^2 < \infty$ то последняя сумма сходится почти всюду, когда $p_n - l_{k-1} \to \infty$. Но это условие действительно выполняется, ибо из неравенства $p_{i_j} - p_{i_{j-1}} \geqslant l_j - l_{j-1} + 1$ следует оценка

$$p_n - l_{k-1} \geqslant p_{i_{k-1}} - l_{k-1} = \sum_{j=2}^{k-1} (p_{i_j} - p_{i_{j-1}}) + p_{i_1} - l_{k-1} \geqslant$$
$$\geqslant \sum_{j=2}^{k-1} (l_j - l_{j-1}) + (k-2) + p_{i_1} - l_{k-1} = (k-2) + p_{i_1} - l_1.$$

Что касается первой суммы, то вследствие условия $\sum (c_j')^2 < \infty$ она также сходится почти всюду. Таким образом, почти всюду сходится и сумма $\sum_{j=0}^{p_n} c_j \varphi_{\nu_j}(x)$, а это и есть наше утверждение.

Теорема 2.10.1 является непосредственным следствием из 2.10.4. Действительно, если выберем $p_n = 2^n$, то для ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_{\nu_n}(x)$ получаем сходимость почти всюду его частичных сумм $s_{2^n}(x)$, а по теореме 2.7.2 отсюда вытекает $(C, \alpha > 0)$-суммируемость почти всюду этого ряда.

Теоремы этого параграфа доказаны Меньшовым. Первой им была доказана теорема 2.10.3 в его работе [5], затем теорема 2.10.2 в [6] и, наконец, 2.10.4 в [11]. Теорема 2.10.2 независимо от Меньшова получена также Марцинкевичем [2], чье доказательство и приведено здесь, ибо оно кажется нам проще. Теорема 2.10.1 есть частный случай следующей теоремы Меньшова [9] (доказательство этой теоремы упрощено Лоренцом [1] с использованием одной общей теоремы из теории рядов):

Пусть $\{T_\nu\}$ — последовательность регулярных линейных методов суммирования с матрицами $(\alpha_{nk}^{(\nu)})$. Если

$$\max_{0 \leqslant k \leqslant \infty} |\alpha_{nk}^{(\nu)}| = o(1) \qquad (n \to \infty),$$

то каждая ортонормированная система $\{\varphi_n(x)\}$ (из L^2) имеет такой порядок функций $\{\varphi_{\nu_n}(x)\}$, что ортогональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_{\nu_n}(x)$$

при единственном условии (61) *почти всюду суммируем каждым методом T_ν.*

Ясно, что матрица $\left(\dfrac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{A_n^{\alpha}}\right)$ любого $(C, \alpha > 0)$-метода удовлетворяет условиям теоремы, поэтому T_ν для каждого ν может совпадать с $(C, \alpha > 0)$.

Из этой общей теоремы Меньшова легко получается следующее утверждение: система $\{\varphi_n(x)\}$ может быть расположена в таком порядке $\{\varphi_{\nu_n}(x)\}$, при котором частичные суммы $s_n(x)$ ряда $\sum c_n \varphi_{\nu_n}(x)$ с коэффициентами, удовлетворяющими условию (61), растут почти всюду не быстрее заданной последовательности чисел $\{\lambda_n\}$, монотонно возрастающей к бесконечности. Действительно, выберем последовательность положительных чисел $\{p_n\}$ так, чтобы

$$\lambda_n \geqslant \frac{P_n}{p_n} \to \infty,$$

где $\sum_{k=0}^{n} p_k = P_n$. Пусть для всех $\nu = 1, 2, \ldots$ в качестве T_ν взят метод суммирования взвешенных средних

$$t_n = \frac{p_0 s_0 + p_1 s_1 + \ldots + p_n s_n}{P_n}.$$

По теореме Меньшова существует такой порядок функций $\{\varphi_{\nu_n}(x)\}$, при котором сходятся почти всюду суммы $t_n(x)$ ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_{\nu_n}(x)$. При этом рост n-й частичной суммы $s_n(x)$ оценивается для почти всех x следующим образом:

$$\frac{p_n}{P_n}\,|\,s_n(x)\,| \leqslant \frac{P_n - P_{n-1}}{P_nP_{n-1}}\left|\sum_{k=0}^{n-1} p_ks_k(x)\right| + \left|\frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n} p_ks_k(x) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{P_{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1} p_ks_k(x)\right| \leqslant |\,t_{n-1}(x)\,| + |\,t_n(x) - t_{n-1}(x)\,| = O_x(1).$$

А это эквивалентно соотношению $s_n(x) = O_x(\lambda_n)$ почти всюду.

Этот результат можно также сформулировать следующим образом: *Если $\sum c_n\varphi_n(x)$ — произвольный ортогональный ряд с коэффициентами, удовлетворяющими условию* (61), *то существует не зависящий от коэффициентов порядок членов, при котором для частичных сумм переставленного ряда $\sum c_{\nu_n}\varphi_{\nu_n}(x)$ почти всюду имеет место оценка $s_n(x) = O_x(\lambda_n)$* ($\lambda_n \leqslant \lambda_{n+1} \to \infty$). Это обстоятельство позволяет надеяться, что с помощью перестановки членов (зависящей как от системы $\{\varphi_n(x)\}$, так и от последовательности коэффициентов $\{c_n\}$) для частичных сумм переставленного ряда можно, вероятно, добиться оценки $s_n(x) = O_x(1)$ почти всюду. Отсюда легко выводилась бы также и сходимость почти всюду соответствующим образом переставленного ряда. Поэтому мы ставим следующую проблему: для каждого ли ортогонального ряда с коэффициентами, удовлетворяющими условию (61), существует такой порядок членов, зависящий, может быть, от коэффициентов, что ряд, полученный из данного перестановкой членов, сходится почти всюду, или же существует ортогональный ряд с коэффициентами, удовлетворяющими условию (61), который при любом порядке его членов расходится на множестве положительной меры?

Эта проблема, оказывается, не может быть решена только применением данного выше метода Меньшова. В самом деле, этот метод опирается на то, что ортогональный ряд разбивается на одну «хорошо» и на одну «плохо» сходящиеся части, причем члены разных частей перемежаются между собой, но каждая часть остается в первоначальном для себя порядке. Например, если бы определенный таким способом в 2.4.2 всюду расходящийся ряд $\sum c_n\Phi_n(x)$ преобразовывался в почти всюду сходящийся ряд, то в случае, когда коэффициенты «хорошей» части равны нулю, этот переставленный ряд оказался бы стоящей в первоначальном порядке «плохой» частью, которая теперь должна сходиться почти всюду, а это невозможно.

§ 11. Универсальные ортогональные ряды

До сих пор мы преимущественно занимались вопросом, сходится ли в каком-либо смысле ортогональный ряд, сумма квадратов коэффициентов которого сходится; при этом мы не интересовались тем, какую функцию представляет этот ряд. Так как по теореме 1.2.4 такой ортогональный ряд является разложением L^2_μ-интегрируемой функции, то в случае, когда ортогональная система полна, сумма этого ряда отличается от раскладываемой L^2_μ-интегрируемой функции не более чем на нуль-множестве. Теперь мы покажем, что полнота ортонормированной системы обеспечивает возможность образования универсальных рядов. При этом функциональный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)$ называется *универсальным рядом*, если для любой измеримой и конечной почти всюду функции $f(x)$ можно выбрать подпоследовательность частичных сумм $\sum\limits_{k=0}^{m_n} a_k f_k(x)$ этого ряда, которая сходится к $f(x)$ почти всюду[1]. Существование универсальных рядов интересно само по себе; тем более любопытна следующая теорема:

2.11.1. *Если $\{\varphi_n(x)\}$ — произвольная полная в L^2 ортонормированная система, то из нее можно образовать универсальный ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \qquad (c_n \to 0).$$

Коэффициенты этого ряда c_n не являются, конечно, коэффициентами разложения, ибо в противном случае, как легко видеть, каждая сходящаяся почти всюду последовательность частичных сумм должна сходиться почти всюду к некоторой функции $F(x) \neq 0$, коэффициентами разложения которой являются числа c_n. Напротив, универсальный ряд обладает также сходящейся почти всюду к нулю, а не к $F(x)$, подпоследовательностью частичных сумм.

[1] При определении универсальных рядов от функций $f(x)$ обычно требуется лишь измеримость и не требуется ее конечность почти всюду. Именно при таком определении была доказана Талаляном А. А. теорема 2.11.1. — *Прим. ред.*

Для довольно сложного доказательства 2.11.1 нам потребуется несколько вспомогательных теорем. Первой мы докажем одну теорему из общей теории функций действительного переменного:

2.11.2. *Пусть $g(x)$ есть L^2-интегрируемая на $[a, b]$ функция и пусть интервал $[a, b]$ разбит на r равных непересекающихся друг с другом интервалов $I_1, I_2, \ldots, I_r$. Если для $x \in I_k$ положим*

$$g_r(x) = \frac{1}{|I_k|} \int\limits_{I_k} g(t)\, dt \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

то

$$\lim_{r\to\infty} \int\limits_a^b [g(x) - g_r(x)]^2\, dx = 0.$$

Пусть $f(x)$ — непрерывная на $[a, b]$ функция, удовлетворяющая условию $\|g - f\| < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — произвольное заданное число. Вследствие непрерывности $f(x)$ функция

$$f_r(x) = \frac{1}{|I_k|} \int\limits_{I_k} f(t)\, dt \qquad (x \in I_k,\ k = 1, 2, \ldots, r)$$

при $r \to \infty$ сходится к $f(x)$, т. е. для достаточно больших r справедливо неравенство $\|f - f_r\| < \varepsilon$. Положим теперь $h(x) = g(x) - f(x)$; тогда, с одной стороны, $\|h\| < \varepsilon$, а, с другой стороны, с помощью неравенства Шварца находим

$$\|h_r\|^2 = \|g_r - f_r\|^2 = \sum_{k=1}^{r} |I_k| \left(\frac{1}{|I_k|} \int\limits_{I_k} h(t)\, dt\right)^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{|I_k|} \left(\int\limits_{I_k} h(t)\, dt\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{r} \int\limits_{I_k} h^2(t)\, dt = \int\limits_a^b h^2(t)\, dt < \varepsilon^2,$$

т. е. $\|h_r\| < \varepsilon$. Отсюда для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ находим

$$\|g - g_r\| \leqslant \|g - f\| + \|f - f_r\| + \|f_r - g_r\| =$$

$$= \|h\| + \|f - f_r\| + \|h_r\| < 3\varepsilon,$$

а это и требовалось доказать.

2.11.3. *Пусть функции $\psi_0(x), \psi_1(x), \ldots, \psi_n(x)$ (число которых конечно) определены и L^2-интегрируемы на интервале $[a, b]$ и пусть δ и η — два положительных числа, меньших единицы.*

Существует функция $g \in L^2$ *такая, что множество* $E = E(g \neq 0)$ *имеет меру*

$$|E| \leqslant \delta (b - a) \tag{67}$$

и, кроме того, $g(x)$ *удовлетворяет условиям*

$$\int_a^b g^2(x)\, dx \leqslant \frac{1}{\delta} \int_a^b \psi_0^2(x)\, dx, \tag{68}$$

$$\left| \int_a^b \psi_0(x)\, \psi_k(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, \psi_k(x)\, dx \right| < \eta \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{69}$$

Интервал $[a, b]$ разделим на r равных неперекрывающихся интервалов $I_1, I_2, \ldots, I_r$ и положим

$$\psi_k^{(r)}(x) = \frac{1}{|I_l|} \int_{I_l} \psi_k(t)\, dt \qquad (x \in I_l,\ l = 1, 2, \ldots, r).$$

Из 2.11.2 имеем

$$\lim_{r \to \infty} \int_a^b [\psi_k^{(r)}(x) - \psi_k(x)]^2\, dx = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Используя соотношение $\psi_0^{(r)} \psi_k^{(r)} - \psi_0 \psi_k = \psi_0^{(r)} (\psi_k^{(r)} - \psi_k) + \psi_k (\psi_0^{(r)} - \psi_0)$ и применяя неравенство Шварца, мы находим

$$\lim_{r \to \infty} \int_a^b \psi_0^{(r)}(x)\, \psi_k^{(r)}(x)\, dx = \int_a^b \psi_0(x)\, \psi_k(x)\, dx.$$

Выберем теперь r столь большим, чтобы для $k = 1, \ldots, n$ выполнялись два следующих условия[1]:

$$\int_a^b [\psi_k^{(r)}(x) - \psi_k(x)]^2\, dx < \frac{\delta \eta^2}{4} \frac{1}{\int_a^b \psi_0^2(x)\, dx}, \tag{70}$$

$$\left| \int_a^b \psi_0^{(r)}(x)\, \psi_k^{(r)}(x)\, dx - \int_a^b \psi_0(x)\, \psi_k(x)\, dx \right| < \frac{\eta}{2}. \tag{71}$$

[1] Здесь предполагается, что функция $\psi_0(x)$ не эквивалентна нулю. Если же $\psi_0(x) = 0$ почти всюду, то для этого случая утверждение 2.11.3 очевидно, так как достаточно положить $g(x) \equiv 0$. — *Прим. ред.*

Обозначим через J_k концентрический с I_k подинтервал длины $\delta|I_k|$ и определим $g(x)$ следующим образом:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\delta\,|I_k|}\displaystyle\int_{I_k} \psi_0(x)\,dx & \text{для } x \in J_k,\ \ k = 1, 2, \ldots, r, \\ 0 & \text{для остальных } x. \end{cases}$$

Тогда имеем

$$|E| \leqslant \sum_{k=1}^{r} |J_k| = \delta \sum_{k=1}^{r} |I_k| = \delta\,(b-a),$$

как это и требовалось в (67). Далее, применяя неравенство Шварца, получаем

$$\int_a^b g^2(x)\,dx = \sum_{k=1}^{r} \int_{J_k} \left\{ \frac{1}{\delta\,|I_k|} \int_{I_k} \psi_0(t)\,dt \right\}^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{r} \frac{|J_k|\,|I_k|}{\delta^2\,|I_k|^2} \int_{I_k} \psi_0^2(t)\,dt = \frac{1}{\delta} \sum_{k=1}^{r} \int_{I_k} \psi_0^2(t)\,dt,$$

т. е. (68) также доказано. Так как функции $\psi_k^{(r)}(x)$ постоянны на I_l, то мы находим

$$\int_a^b g(x)\,\psi_k^{(r)}(x)\,dx = \sum_{l=1}^{r} \int_{J_l} g(x)\,\psi_k^{(r)}(x)\,dx =$$

$$= \sum_{l=1}^{r} \int_{J_l} \frac{1}{\delta\,|I_l|} \int_{I_l} \psi_0(t)\,dt \cdot \frac{1}{|I_l|} \int_{I_l} \psi_k(t)\,dt\,dx =$$

$$= \sum_{l=1}^{r} \int_{J_l} \frac{1}{\delta} \psi_0^{(r)}(x)\,\psi_k^{(r)}(x)\,dx = \sum_{l=1}^{r} \int_{I_l} \psi_0^{(r)}(x)\,\psi_k^{(r)}(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b \psi_0^{(r)}(x)\,\psi_k^{(r)}(x)\,dx.$$

Поэтому из (71) заключаем о справедливости для достаточно больших r неравенства

$$\left| \int_a^b g(x)\,\psi_k^{(r)}(x)\,dx - \int_a^b \psi_0(x)\,\psi_k(x)\,dx \right| < \frac{\eta}{2} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Применяя неравенство Шварца, из (68) и (70) выводим оценку

$$\left|\int_a^b g(x)\,\psi_k^{(r)}(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,\psi_k(x)\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\int_a^b g^2(x)\,dx\right\}^{1/2} \left\{\int_a^b [\psi_k^{(r)}(x) - \psi_k(x)]^2\,dx\right\}^{1/2} < \frac{\eta}{2}.$$

Непосредственно из двух последних неравенств следует справедливость соотношения (69).

2.11.4. *Пусть* $\{\varphi_n(x)\}$ — *полная в* $L^2(a, b)$ *ортонормированная система,* $F \in L^2$ *и* $\varepsilon > 0$ — *произвольное число. Тогда существует функция* $g \in L^2$, *для которой множество* $E = E(g \neq 0)$ *имеет меру*

$$|E| \leqslant \varepsilon\,(b - a), \tag{72}$$

в то время как коэффициенты разложения для $F(x)$ *и* $g(x)$ *удовлетворяют условию*

$$\left|\int_a^b F(x)\,\varphi_k(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,\varphi_k(x)\,dx\right| < \varepsilon \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{73}$$

Интервал $[a, b]$ разделим на m неперекрывающихся интервалов $I_1, I_2, \ldots, I_m$ так, чтобы

$$\int_{I_\nu} F^2(x)\,dx < \frac{\varepsilon^3}{2^4} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m).$$

Функцию $g(x)$ определим с помощью последовательности функций $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_m(x)$, построенных по индукции. Пусть, прежде всего, $n_1 = 1$, $\eta = \frac{\varepsilon}{2^2}$, $\delta = \varepsilon$; тогда вспомогательную теорему 2.11.3 применим с этими числами. Из этой теоремы убеждаемся в существовании на I_1 такой функции $g_1 \in L^2$, которая удовлетворяет условиям:

$$|E(g_1 \neq 0)| < \varepsilon |I_1|, \quad \int_{I_1} g_1^2(x)\,dx \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \int_{I_1} F^2(x)\,dx,$$

$$\left|\int_{I_1} F(x)\,\varphi_k(x)\,dx - \int_{I_1} g_1(x)\,\varphi_k(x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2^2} \qquad (k = 1).$$

Пусть теперь $n_2 > n_1$ выбрано так, чтобы

$$\left| \int_{I_1} [F(x) - g_1(x)] \varphi_k(x)\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{2^3} \qquad (k \geq n_2).$$

Функцию $g_1(x)$ продолжим на весь интервал $[a, b]$, полагая $g_1(x) = 0$ при $x \in [a, b] - I_1$. Этим завершен первый шаг индукции. Пусть теперь функции $g_i(x)$ определены при $i \leq \nu - 1$, причем $g_i(x) = 0$ для $x \notin I_i$. Тогда существует натуральное число n_ν такое, что

$$\left| \int\limits_{\sum\limits_{j=1}^{\nu-1} I_j} \left[F(x) - \sum_{j=1}^{\nu-1} g_i(x) \right] \varphi_k(x)\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{2^{\nu+1}} \quad (k \geq n_\nu). \qquad (74)$$

Затем по теореме 2.11.3 определяем функцию $g_\nu(x)$, требуя выполнения условий

$$|E(g_\nu \neq 0)| < \varepsilon |I_\nu|,$$

$$\int_{I_\nu} g_\nu^2(x)\, dx \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{I_\nu} F^2(x)\, dx,$$

$$\left| \int_{I_\nu} F(x) \varphi_k(x)\, dx - \int_{I_\nu} g_\nu(x) \varphi_k(x)\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{2^{\nu+1}} \quad (k = 1, 2, \ldots, n_\nu) \qquad (75)$$

и $g_\nu(x) = 0$ при $x \notin I_\nu$. Этим последовательность $g_1(x), g_2(x), \ldots$ $\ldots, g_m(x)$ построена. Положим теперь

$$g(x) = \sum_{\nu=1}^{m} g_\nu(x).$$

Тогда имеем

$$|E(g \neq 0)| = \sum_{\nu=1}^{m} |E(g_\nu \neq 0)| < \varepsilon \sum_{\nu=1}^{m} |I_\nu| = \varepsilon(b - a),$$

т. е. выполняется условие (72). При любом $\nu \leq m$ нетрудно проверяется соотношение

$$\int_{I_\nu} g^2(x)\, dx = \int_{I_\nu} g_\nu^2(x)\, dx \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{I_\nu} F^2(x)\, dx < \frac{\varepsilon^2}{2^4},$$

из которого выводим следующую оценку:

$$\left| \int\limits_{I_\nu} F(x)\varphi_k(x)\,dx - \int\limits_{I_\nu} g(x)\varphi_k(x)\,dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \int\limits_{\nu} F^2(x)\,dx \right\}^{1/2} \left\{ \int\limits_{I_\nu} \varphi_k^2(x)\,dx \right\}^{1/2} + \left\{ \int\limits_{I_\nu} g^2(x)\,dx \right\}^{1/2} \left\{ \int\limits_{I_\nu} \varphi_k^2(x)\,dx \right\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \int\limits_{I_\nu} F^2(x)\,dx \right\}^{1/2} + \left\{ \int\limits_{I_\nu} g^2(x)\,dx \right\}^{1/2} < \frac{\varepsilon}{2^2} + \frac{\varepsilon}{2^2} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда и из (74) для $k \geqslant n_m$ получаем неравенство

$$\left| \int\limits_a^b F(x)\varphi_k(x)\,dx - \int\limits_a^b g(x)\varphi_k(x)\,dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int\limits_{\sum\limits_{\nu=1}^{m-1} I_\nu} [F(x)-g(x)]\varphi_k(x)dx \right| + \left| \int\limits_{I_m} [F(x)-g(x)]\varphi_k(x)\,dx \right| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2^{m+1}} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Из этого неравенства убеждаемся в справедливости (73) при $k \geqslant n_m$; теперь мы должны показать еще справедливость этого соотношения и при $k < n_m$. Пусть $n_{\nu-1} \leqslant k < n_\nu$ ($\nu = 2, 3, \ldots, m$). Из предыдущих оценок, в частности из (74) и (75), следует неравенство

$$\left| \int\limits_a^b F(x)\varphi_k(x)\,dx - \int\limits_a^b g(x)\varphi_k(x)\,dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int\limits_{\sum\limits_{i=1}^{\nu-2} I_i} [F(x)-g(x)]\varphi_k(x)\,dx \right| + \left| \int\limits_{I_{\nu-1}} [F(x)-g(x)]\varphi_k(x)\,dx \right| +$$

$$+ \left| \sum_{i=\nu}^{m} \int\limits_{I_i} [F(x)-g(x)]\varphi_k(x)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{2^\nu} + \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=\nu}^{m} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} < \varepsilon.$$

Этим (73) доказано при $1 \leqslant k < n_m$, и, стало быть, (73) справедливо при всех k.

2.11.5. *Если $\{\varphi_n(x)\}$ — полная в $L^2(a, b)$ ортонормированная система, $F(x)$ — L^2-интегрируемая функция и $\eta > 0$ — произвольное число, то для всех $n \geqslant 0$ существует сумма*

$$\Phi_{n,N}(x) = \sum_{k=n+1}^{N} b_k \varphi_k(x),$$

удовлетворяющая следующим соотношениям:

$$|b_k| < \eta \qquad (k = n+1, \ldots, N),$$
$$|E(|F - \Phi_{n,N}| \geqslant \eta)| < \eta.$$

Выберем положительное число $\varepsilon < \eta$ столь малым, чтобы выполнялось неравенство

$$\left| E\left(\varepsilon \sum_{k=1}^{n} |\varphi_k(x)| \geqslant \frac{\eta}{3}\right)\right| < \frac{\eta}{3}. \tag{76}$$

Из 2.11.4 следует существование функции $g \in L^2$, для которой

$$|E(g \neq 0)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{77}$$

и

$$\left| \int_a^b [F(x) - g(x)]\, \varphi_k(x)\, dx \right| < \varepsilon \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Ради сокращения записи положим $\psi(x) = F(x) - g(x)$ и пусть

$$b_k = \int_a^b \psi(x)\, \varphi_k(x)\, dx \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Тогда имеем $|b_k| < \varepsilon < \eta$, т. е. выполнено первое требование теоремы. Для доказательства второго соотношения заметим, что вследствие полноты ортонормированной системы $\{\varphi_n(x)\}$ из разложения

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \varphi_n(x) \sim \psi(x)$$

можно выбрать сходящуюся почти всюду к $\psi(x)$ подпоследовательность $\left\{ \sum_{k=0}^{N} b_k \varphi_k(x) \right\}$ частичных сумм. Поэтому для достаточно больших N имеем

$$\left|E\left(\left|\psi-\sum_{k=0}^{N} b_k\varphi_k\right|\geqslant\frac{\eta}{3}\right)\right|<\frac{\eta}{3}. \tag{78}$$

Используя равенство $F-\Phi_{n,N}=\psi-\sum\limits_{k=0}^{N} b_k\varphi_k+g+\sum\limits_{k=0}^{n} b_k\varphi_k$, из (76), (77) и (78) выводим оценку:

$$|E(|F-\Phi_{n,N}|\geqslant\eta)|\leqslant\left|E\left(\left|\psi-\sum_{k=0}^{N} b_k\varphi_k\right|\geqslant\frac{\eta}{3}\right)\right|+$$
$$+\left|E\left(|g|\geqslant\frac{\eta}{3}\right)\right|+\left|E\left(\sum_{k=0}^{n}|b_k||\varphi_k(x)|\geqslant\frac{\eta}{3}\right)\right|<$$
$$<\frac{\eta}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\left|E\left(\varepsilon\sum_{k=0}^{n}|\varphi_k(x)|\geqslant\frac{\eta}{3}\right)\right|<\frac{\eta}{3}+\frac{\eta}{3}+\frac{\eta}{3}=\eta.$$

Этим доказано второе наше требование, и доказательство 2.11.5 закончено.

Теперь мы можем, наконец, перейти к доказательству теоремы 2.11.1. В силу хорошо известной теоремы Лузина[1], любая измеримая и почти всюду конечная функция $f(x)$ является, за исключением, может быть, нуль-множества, пределом последовательности непрерывных функций. С другой стороны, в силу классической теоремы Вейерштрасса, эти непрерывные функции являются пределом равномерно сходящейся последовательности полиномов с рациональными коэффициентами. Стало быть, если $\{P_n(x)\}$ есть счетное множество всех полиномов с рациональными коэффициентами, то из него можно выбрать подпоследовательность $\{P_{m_n}(x)\}$, для которой

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} P_{m_n}(x)$$

почти всюду. Пусть теперь $\{\varepsilon_n\}$ — монотонная последовательность положительных чисел, удовлетворяющих условию

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n<\infty.$$

[1] См., например, Рисс Ф. и Надь Б., Лекции по функциональному анализу, М., 1954, стр. 110.

Применяя прежде всего 2.11.5 с $n = n_0 = 0$, $F(x) = P_1(x)$ и $\eta = \varepsilon_1$, мы убеждаемся в существовании суммы

$$\Phi_{0,n_1}(x) = \sum_{k=1}^{n_1} b_k^{(1)} \varphi_k(x)$$

с $|b_k^{(1)}| < \varepsilon_1\ (1 \leqslant k \leqslant n_1)$ и $|E(|P_1 - \Phi_{0,n_1}| \geqslant \varepsilon_1)| < \varepsilon_1$. Затем мы применяем 2.11.5 с $n = n_\nu$ и $\eta = \varepsilon_\nu$ последовательно для $\nu = 1, 2, \ldots$ к функциям $F_\nu(x) = P_\nu(x) - \sum_{i=0}^{\nu-1} \Phi_{n_i, n_{i+1}}(x)$. Отсюда убеждаемся в существовании такой суммы

$$\Phi_{n_\nu, n_{\nu+1}}(x) = \sum_{k=n_\nu+1}^{n_{\nu+1}} b_k^{(\nu+1)} \varphi_k(x)$$

с $|b_k^{(\nu+1)}| < \varepsilon_{\nu+1}$, для которой

$$|E(|F_\nu - \Phi_{n_\nu, n_{\nu+1}}| \geqslant \varepsilon_{\nu+1})| < \varepsilon_{\nu+1}.$$

Если положим теперь $c_0 = 0$ и $c_k = b_k^{(\nu+1)}$ при $n_\nu < k \leqslant n_{\nu+1}$, то, как легко видеть, $c_k \to 0$. Далее, справедливо соотношение

$$P_\nu(x) - \sum_{j=0}^{n_{\nu+1}} c_j \varphi_j(x) = F_\nu(x) - \Phi_{n_\nu, n_{1+1}}(x),$$

а потому

$$\left| E\left(\left| P_\nu(x) - \sum_{k=0}^{n_{\nu+1}} c_k \varphi_k(x) \right| \geqslant \varepsilon_{\nu+1} \right) \right| < \varepsilon_{\nu+1}.$$

Соотношение

$$\overline{\lim_{\nu \to \infty}} \left| P_\nu(x) - \sum_{k=0}^{n_{\nu+1}} c_k \varphi_k(x) \right| > 0$$

имеет место не более, чем на множестве

$$E = \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{\nu=l}^{\infty} E\left(\left| P_\nu(x) - \sum_{k=0}^{n_{\nu+1}} c_k \varphi_k \right| \geqslant \varepsilon_{\nu+1} \right).$$

Но для достаточно больших l имеем

$$|E| \leqslant \sum_{\nu=l}^{\infty} \left| E\left(\left| P_\nu - \sum_{k=0}^{n_{\nu+1}} c_k \varphi_k \right| \geqslant \varepsilon_{\nu+1} \right) \right| \leqslant \sum_{\nu=l}^{\infty} \varepsilon_{\nu+1},$$

а потому из условия $\sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_{\nu+1} < \infty$ выводим равенство $|E| = 0$. Поэтому всюду, за исключением точек нуль-множества E, справедливо соотношение

$$\lim_{\nu \to \infty} \left| P_\nu(x) - \sum_{k=0}^{n_{\nu+1}} c_k \varphi_k(x) \right| = 0.$$

Так как $\{P_\nu(x)\}$ сходится к $f(x)$ почти всюду, то отсюда и следует справедливость почти всюду соотношения

$$f(x) = \lim_{\nu \to \infty} \sum_{k=0}^{n_{\nu+1}} c_k \varphi_k(x),$$

как это утверждалось в 2.11.1.

Впервые теорема 2.11.1 доказана Талаляном[1] [2]. Так как его работа нам недоступна, то доказательство мы заимствовали из приложения к русскому переводу книги Качмажа и Штейнгауза. [Р. С. Гутер и П. Л. Ульянов, О новых результатах в теории ортогональных рядов (обзорная статья), стр. 372—385]. Еще раньше Меньшов доказал существование тригонометрического универсального ряда[2]. Проблема универсальных рядов поставлена уже давно. М. Фекете (в замечании к работе Паля [1], занимавшегося подобными вопросами) впервые обратил внимание на существование фиксированного степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, надлежащим образом выбранные частичные суммы которого сходятся равномерно к любой непрерывной ненулевой функции. Так как измеримые функции являются почти всюду пределами таких непрерывных функций, то, собственно говоря, этот степенной ряд и есть уже универсальный ряд.

Из теоремы 2.11.1 следует, в частности, что, используя только полноту системы $\{\varphi_n(x)\}$, можно построить сходящийся почти всюду к нулю ряд, не все коэффициенты которого равны нулю. Эта теорема имеет большое значение для вопросов, относящихся к единственности ортогональных рядов, и, в частности, дает повод для обширных исследований в теории тригонометрических рядов. (Довольно полное исследование этого вопроса см., например, в книге А. Зигмунда »Тригонометрические ряды», М.—Л., 1939, гл. XI, стр. 265—301.)

---

[1] В настоящее время Талаляном А. А. опубликованы еще более общие результаты [см. *«Успехи матем. наук»*, 15 (1960), стр. 77—141]. — *Прим. ред.*

[2] Полезно отметить, что наиболее простой пример универсального тригонометрического ряда был построен Козловым В. Я. [см. *Матем. сб.* 26 (68): 3 (1950), стр. 351—364]. — *Прим. ред.*

ФУНКЦИИ ЛЕБЕГА

§ 1. Значение функций Лебега для вопросов сходимости

Хотя результаты, полученные с помощью методов теории рядов, объясняют сходимость общего ортогонального ряда с различных точек зрения, все же они не дают никаких сведений о характере сходимости ортогонального разложения L^2_μ-интегрируемой функции $f(x)$ по ортонормированной системе $\{\varphi_n(x)\}$, расположенной в заданном порядке, даже если известна структура функции $f(x)$. Чтобы перейти к этому кругу вопросов, необходимо наложить определенные условия также и на систему $\{\varphi_n(x)\}$, ибо, в силу цитированной на стр. 106 теоремы Банаха, даже ортогональное разложение дифференцируемой функции может быть почти всюду расходящимся. Для ближайших исследований характера сходимости ортогонального разложения мы воспользуемся следующими очевидными интегральными представлениями:

$$s_n(x) = \int_a^b s_n(t) \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(t)\varphi_k(x)\, d\mu(t),$$

$$\sigma_n^\alpha(x) = \int_a^b s_n(t) \sum_{k=0}^{n} \frac{A_{n-k}^\alpha}{A_n^\alpha} \varphi_k(t)\varphi_k(x)\, d\mu(t).$$

Суммы

$$K_n(t, x) = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(t)\varphi_k(x) \qquad \text{и} \qquad K_n^\alpha(t, x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_{n-k}^\alpha}{A_n^\alpha}\, \varphi_k(t)\varphi_k(x)$$

называются соответственно *n-м ядром* и *n-м (C, α)-ядром* ортонормированной системы $\{\varphi_n(x)\}$. С помощью ядер определяются следующие функции:

$$L_n(x) = \int_a^b |K_n(t, x)|\, d\mu(t) \quad \text{и} \quad L_n^\alpha(x) = \int_a^b |K_n^\alpha(t, x)|\, d\mu(t),$$

которые называются соответственно *n-й функцией Лебега* и *n-й (C, α)-функцией Лебега* ортонормированной системы $\{\varphi_n(x)\}$. Ясно, что функции Лебега можно определить для любого линейного метода суммирования. Во многих случаях порядок роста функций Лебега оказывается решающим для выяснения вопроса о сходимости.

Условия сходимости, зависящие от порядка роста функций Лебега. Отправной точкой для многих теорем сходимости и суммируемости является следующая основная лемма:

3.1.1. *Если $\{\lambda_n\}$ — неубывающая последовательность положительных чисел, для которой на множестве $E \subset [a, b]$ выполняется соотношение*

$$L_{\nu_n}(x) = O(\lambda_{\nu_n}) \quad (\nu_1 < \nu_2 < \ldots), \tag{79}$$

то при условии

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 < \infty \tag{80}$$

для частичных сумм $\{s_{\nu_n}(x)\}$ ортогонального ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \tag{81}$$

почти всюду на E справедлива оценка

$$s_{\nu_n}(x) = O_x\left(\sqrt{\lambda_{\nu_n}}\right).$$

Действительно, пусть $\nu_n(x)$ — наименьший индекс $\leqslant \nu_n$ такой, что для него имеет место равенство

$$\frac{s_{\nu_n(x)}(x)}{\sqrt{\lambda_{\nu_n(x)}}} = \max_{0 \leqslant k \leqslant n} \frac{s_{\nu_k}(x)}{\sqrt{\lambda_{\nu_k}}}.$$

Тогда $\nu_n(x)$ является измеримой функцией, которая может принимать только целочисленные значения $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$.

Применяя неравенство Шварца, находим

$$\left|\int\limits_E \frac{s_{\nu_n(x)}(x)}{\sqrt{\lambda_{\nu_n(x)}}}\,d\mu(x)\right| = \left|\int\limits_E\int\limits_a^b s_{\nu_n}(t)\frac{K_{\nu_n(x)}(t,x)}{\sqrt{\lambda_{\nu_n(x)}}}\,d\mu(t)d\mu(x)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\int\limits_a^b s_{\nu_n}^2(t)d\mu(t)\right\}^{1/2}\left\{\int\limits_a^b\left[\int\limits_E \frac{K_{\nu_n(x)}(t,x)}{\sqrt{\lambda_{\nu_n(x)}}}\,d\mu(t)\right]^2 d\mu(t)\right\}^{1/2}.$$

Если учтем (80) и квадрат интеграла представим в виде двойного интеграла, то получим

$$\left|\int\limits_E \frac{s_{\nu_n(x)}(x)}{\sqrt{\lambda_{\nu_n(x)}}}\,d\mu(x)\right| =$$

$$= O(1)\left\{\int\limits_a^b\int\limits_E\int\limits_E \frac{K_{\nu_n(x)}(t,x)\,K_{\nu_n(y)}(t,y)}{\sqrt{\lambda_{\nu_n(x)}\lambda_{\nu_n(y)}}}\,d\mu(x)\,d\mu(y)\,d\mu(t)\right\}^{1/2}.$$

Интегрируя по t и принимая во внимание монотонность последовательности $\{\lambda_n\}$ и вытекающее из ортонормированности равенство

$$\int\limits_a^b K_{\nu_n(x)}(t,x)\,K_{\nu_n(y)}(t,y)\,d\mu(t) = K_{\nu_n(x,y)}(x,y),$$

где $\nu_n(x,y)$ — наименьшее из чисел $\nu_n(x)$ и $\nu_n(y)$, мы выводим соотношение

$$\left|\int\limits_E \frac{s_{\nu_n(x)}(x)}{\sqrt{\lambda_{\nu_n(x)}}}\,d\mu(x)\right| = O(1)\left\{\int\limits_E\int\limits_E \frac{|K_{\nu_n(x,y)}(x,y)|}{\lambda_{\nu_n(x,y)}}\,d\mu(x)\,d\mu(y)\right\}^{1/2}.$$

Из справедливости на множестве E соотношения $L_{\nu_n}(x) = O(\lambda_{\nu_n})$ следует оценка

$$\int\limits_E\int\limits_E \frac{|K_{\nu_n(x,y)}(x,y)|}{\lambda_{\nu_n(x,y)}}\,d\mu(x)\,d\mu(y) \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_E\int\limits_E \frac{|K_{\nu_n(x)}(x,y)|}{\lambda_{\nu_n(x)}}\,d\mu(x)\,d\mu(y) + \int\limits_E\int\limits_E \frac{|K_{\nu_n(y)}(x,y)|}{\lambda_{\nu_n(y)}}\,d\mu(x)\,d\mu(y) =$$

$$= \int\limits_E \frac{L_{\nu_n(x)}(x)}{\lambda_{\nu_n(x)}}\,d\mu(x) + \int\limits_E \frac{L_{\nu_n(y)}(y)}{\lambda_{\nu_n(y)}}\,d\mu(y) = O(1),$$

а потому имеем

$$\int\limits_E \frac{s_{\nu_n(x)}(x)}{\sqrt{\lambda_{\nu_n(x)}}}\,d\mu(x) = O(1).$$

Из определения последовательности $\left\{\frac{s_{\nu_n(x)}(x)}{\sqrt{\lambda_{\nu_n(x)}}}\right\}$ следует ее монотонное возрастание, а тогда из 1.2.2 заключаем, что функция

$$S_1(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{s_{\nu_n(x)}(x)}{\sqrt{\lambda_{\nu_n(x)}}}$$

интегрируема на E, а значит, и конечна почти всюду на E. Кроме того, очевидно следующее неравенство:

$$\frac{s_{\nu_n}(x)}{\sqrt{\lambda_{\nu_n}}} \leqslant S_1(x).$$

Повторяя те же самые рассуждения для последовательности $\left\{-\frac{s_{\nu_n}(x)}{\sqrt{\lambda_{\nu_n}}}\right\}$, мы убеждаемся в существовании функции $S_2(x)$, которая интегрируема на E, а потому конечна почти всюду на E и, кроме того,

$$-\frac{s_{\nu_n}(x)}{\sqrt{\lambda_{\nu_n}}} \leqslant S_2(x).$$

Объединяя эти два неравенства, получаем

$$\frac{|s_{\nu_n}(x)|}{\sqrt{\lambda_{\nu_n}}} \leqslant |S_1(x)| + |S_2(x)|,$$

или, другими словами, $s_{\nu_n}(x) = O_x(\sqrt{\lambda_{\nu_n}})$ для почти всех $x \in E$, как это и утверждалось в лемме.

3.1.2. *Пусть последовательность $\{\lambda_n\}$ положительна и не убывает. Если почти всюду на E справедливо соотношение*

$$L_n(x) = O(\lambda_n),$$

то из условия

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2\,\lambda_n < \infty$$

следует сходимость почти всюду на E ортогонального ряда (81).

Прежде всего, из нашего предположения следует существование положительной строго возрастающей последовательности $\{\mu_n\}$, для которой

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \lambda_n \mu_n < \infty.$$

Пусть $S_n(x)$ означает n-ю частичную сумму ортогонального ряда $\sum c_n \sqrt{\lambda_n \mu_n} \varphi_n(x)$. Применяя преобразование Абеля (первую формулу) для разности частичных сумм

$$s_{n+p}(x) - s_n(x) = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{\sqrt{\lambda_k \mu_k}} c_k \sqrt{\lambda_k \mu_k} \varphi_k(x),$$

мы получаем оценку

$$|s_{n+p}(x) - s_n(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p-1} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_k \mu_k}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_{k+1} \mu_{k+1}}} \right) |S_k(x)| + \\ + \frac{|S_n(x)|}{\sqrt{\lambda_{n+1} \mu_{n+1}}} + \frac{|S_{n+p}(x)|}{\sqrt{\lambda_{n+p} \mu_{n+p}}}.$$

По предположению, $\sum c_n^2 \lambda_n \mu_n < \infty$; поэтому если к частичным суммам $S_n(x)$ ортогонального ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \varphi_n(x)$$

с $C_n = c_n \sqrt{\lambda_n \mu_n}$ мы применим лемму 3.1.1 с $\nu_n = n$, то для почти всех $x \in E$ получим оценки $S_{n+p}(x) = O_x\left(\sqrt{\lambda_{n+p}}\right)$ и $S_n(x) = O_x(\sqrt{\lambda_n})$. Следовательно, почти всюду на E имеет место неравенство

$$|s_{n+p}(x) - s_n(x)| \leqslant \sum_{k=n}^{n+p-1} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_k \mu_k}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_{k+1} \mu_{k+1}}} \right) |S_k(x)| + o_x(1).$$

Докажем теперь, что оценка

$$\sum_{k=n}^{n+p-1} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_k \mu_k}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_{k+1} \mu_{k+1}}} \right) |S_k(x)| = o_x(1)$$

справедлива почти всюду на E. Она вытекает из 1.2.2, ибо, в силу неравенства Шварца, имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty}\int_a^b\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_k\mu_k}}-\frac{1}{\sqrt{\lambda_{k+1}\,\mu_{k+1}}}\right)|S_k(x)|\,d\mu(x)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_k\,\mu_k}}-\frac{1}{\sqrt{\lambda_{k+1}\,\mu_{k+1}}}\right)\left\{\int_a^b d\mu(x)\int_a^b S_k^2(x)\,d\mu(x)\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{\mu(b)-\mu(a)}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_k\mu_k}}-\frac{1}{\sqrt{\lambda_{k+1}\,\mu_{k+1}}}\right)\sqrt{\sum_{m=0}^{k}c_m^2\lambda_m\mu_n}=$$

$$=O(1)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_k\mu_k}}-\frac{1}{\sqrt{\lambda_{k+1}\,\mu_{k+1}}}\right)<\infty.$$

Следовательно, почти всюду на E справедливо соотношение

$$s_{n+p}(x)-s_n(x)=o_x\ (1),$$

и наше утверждение доказано.

Все только что изложенное является результатом длительного развития. Метод доказательства основной леммы 3.1.1 разработан (независимо друг от друга) Колмогоровым—Селиверстовым [1], [2] и Плеснером [1]. Однако они имели в виду проблему сходимости ряда Фурье, а поэтому теорема 3.1.2 была высказана ими только для частного случая тригонометрической системы, хотя доказательство ее содержит все необходимое для исследования общего случая. Доказательство общего случая дано позднее Качмажем [4] (см. также Тандори [1]). Заметим, что основная идея введения переменного индекса $n(x)$ вместо n при построении монотонной последовательности $\left\{\frac{s_{n(x)}(x)}{\sqrt{\lambda_{n(x)}}}\right\}$ применялась ранее Вейлем и Ёрошем [1], где этот метод был использован при получении более слабых результатов.

Теорема 3.1.2 позволяет получить уточнение следующего частного случая леммы 3.1.1: если $\lambda_n\uparrow\infty$, то почти всюду на E справедлива оценка $s_n(x)=O_x(\sqrt{\lambda_n})$, вытекающая из (80). Однако, из 3.1.2, применяя 2.2.2, получаем более точную оценку, т. е. $s_n(x)=o_x\,(\sqrt{\lambda_n})$ почти всюду на E.

Применение к классическим разложениям. Ортонормированные системы полиномиального вида. Ряды Фурье и разложения по ортонормированным полиномам обнаруживают много общего в отношении их свойств сходимости. Это можно объяснить преимущественно специальными свойствами ядер $K_n(t, x)$ этих ортогональных систем. Ядро тригонометрической системы имеет вид

$$K_n(t, x) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)}{2\pi\sin\frac{t-x}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{t-x}{2}(\sin nt\cos nx - \cos nt\sin nx) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}(\cos nt\cos nx + \sin nt\sin nx).$$

На основании формулы Кристоффеля—Дарбу (11) ядро для ортонормированной полиномиальной системы $\{p_n(x)\}$ представляется следующим образом:

$$K_n(t, x) = \gamma_n\frac{p_n(x)\,p_{n+1}(t) - p_{n+1}(x)\,p_n(t)}{t-x} \qquad (\gamma_n = O(1)).$$

Важнейшие свойства этих ядер можно объединить вместе введением следующего понятия: мы говорим, что ортонормированная система $\{\varphi_n(x)\}$ *имеет полиномиальный вид*, если ее n-е ядро представляется в форме

$$K_n(t, x) = \sum_{k=1}^{r} F_k(t, x)\sum_{i,j=-p}^{p}\gamma_{i,j,k}^{(n)}\,\varphi_{n+i}(t)\,\varphi_{n+j}(x), \tag{82}$$

где p и r — независящие от n натуральные числа, постоянные $|\gamma_{i,j,k}^{(n)}|$ ограничены в совокупности независящей от n константой, а измеримые функции $F_k(t, x)$ для всех $x \in [a, b]$ удовлетворяют условию

$$F_k(t, x) = O\left(\frac{1}{|t-x|}\right).$$

При этом функции $\varphi_{n+j}(x)$ с отрицательным индексом мы считаем тождественно равными нулю.

Ясно, что ортонормированные полиномы $\{p_n(x)\}$ образуют систему, имеющую полиномиальный вид, причем в этом случае $p = 1$, $r = 1$, $\gamma_{1,0,1}^{(n)} = \gamma_n$, $\gamma_{0,1,1}^{(n)} = -\gamma_n$ и $\gamma_{i,j,k}^{(n)} = 0$ для остальных i, j и, наконец, $F_k(t, x) = (t-x)^{-1}$. Тригонометрическая система также имеет полиномиальный вид, только мы должны обратить внимание на употребление обозначений, свойственных этой системе. Действительно, положим

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{и} \quad \varphi_{2k-1}(x) = \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \quad \varphi_{2k}(x) = \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}$$

при $k = 1, 2, \ldots,$ и выражение $A_{2k-1}\varphi_{2k-1}(x) + B_{2k}\varphi_{2k}(x)$ примем за отдельный член тригонометрического ряда

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) =$$

$$= A_0\varphi_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} [A_{2k-1}\varphi_{2k-1}(x) + B_{2k}\varphi_{2k}(x)],$$

а потому $2n$-ю частичную сумму будем обозначать через $s_n(x)$. По той же самой причине ядро $K_{2n}(t, x)$ мы назовем n-м ядром и переобозначим его (как это делалось выше) через $K_n(t, x)$. После этого получаем

$$K_n(t, x) = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{t-x}{2}[\varphi_{2n}(t)\varphi_{2n-1}(x) - \varphi_{2n-1}(t)\varphi_{2n}(x)] +$$

$$+ \frac{1}{2}[\varphi_{2n-1}(t)\varphi_{2n-1}(x) + \varphi_{2n}(t)\varphi_{2n}(x),$$

т. е. ядро $K_n(t, x)$ имеет полиномиальный вид, причем

$$p = 1,\ r = 2, \quad F_1(t, x) = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{t-x}{2}, \quad F_2(t, x) = \frac{1}{2},$$

$$\gamma^{(n)}_{0,-1,1} = \gamma^{(n)}_{0,0,2} = \gamma^{(n)}_{-1,-1,2} = 1,\ \gamma^{(n)}_{-1,0,1} = -1 \text{ и } \gamma^{(n)}_{i,j,k} = 0$$

для всех других троичных систем из чисел i, j, k.

Кроме этих двух систем полиномиального вида можно построить также и различные другие системы, однако мы не будем на этом останавливаться. Привлекая свойства систем, имеющих полиномиальный вид, можно дать общее толкование особенностей сходимости классических ортогональных рядов. Прежде всего мы оценим функции Лебега для систем полиномиального вида:

3.1.3. *Пусть* $[c, d]$ — *подинтервал из* (a, b) *и пусть* $\{\varphi_n(x)\}$ — *ортонормированная по мере* $\mu(x)$ *система, имеющая полиномиальный вид и удовлетворяющая на* $[c, d]$ *условию*

$$\varphi_n(x) = O(1). \tag{83}$$

Тогда для функции Лебега $L_n(x)$ почти всюду на (c, d) справедлива оценка

$$L_n(x) = O_x(\log n).$$

Если ортонормированная с весом $\varrho(x)$ система $\{\varphi_n(x)\}$ имеет полиномиальный вид и если как $\{\varphi_n(x)\}$, так и $\varrho(x)$ ограничены на $[c, d]$, то равномерно на каждом внутреннем к (c, d) подинтервале справедлива оценка

$$L_n(x) = O(\log n).$$

В самом деле, пусть $x \in (c, d)$; тогда для достаточно большого n весь интервал $\left[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right]$ также принадлежит к (c, d). Точки $a, c, x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}, d, b$ делят интервал $[a, b]$ на пять открытых неперекрывающихся подинтервалов. Функцию Лебега $L_n(x)$ запишем в форме

$$L_n(x) = \int_a^b |K_n(t, x)|\, d\mu(t) = I_{n1} + I_{n2} + I_{n3},$$

где

$$I_{n1} = \int_a^c + \int_d^b, \quad I_{n2} = \int_c^{x-\frac{1}{n}} + \int_{x+\frac{1}{n}}^d, \quad I_{n3} = \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}}.$$

Очень просто оценивается I_{n3}, ибо из (83) следует

$$I_{n3} = O(n) \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} d\mu(t) = O(n)\left[\mu\left(x + \frac{1}{n}\right) - \mu\left(x - \frac{1}{n}\right)\right].$$

Так как в тех точках x, в которых существует производная $\mu'(x)$, справедливо соотношение

$$\frac{\mu\left(x + \frac{1}{n}\right) - \mu\left(x - \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = O_x(1),$$

то для почти всех $x \in (c, d)$ находим

$$I_{n3} = O_x(1). \tag{84}$$

Оценим I_{n1}. Так как система $\{\varphi_n(x)\}$ имеет полиномиальный вид, то справедливо соотношение

$$|K_n(t, x)| = O_x\left(\frac{1}{|t-x|}\right) \sum_{k=1}^{r} \sum_{i,j=-p}^{p} |\gamma_{i,j,k}^{(n)}| \, |\varphi_{n+i}(t)| \, |\varphi_{n+j}(x)|.$$

Далее, используя оценки $\gamma_{i,j,k}^{(n)} = O(1)$ и (83), имеем

$$|K_n(t, x)| = O_x\left(\frac{1}{|t-x|}\right) \sum_{i=-p}^{p} |\varphi_{n+i}(t)|.$$

Для $x - c$, $d - x \geqslant h$ $(h > 0)$ это эквивалентно соотношению

$$|K_n(t, x)| = O\left(\frac{1}{h}\right) \sum_{i=-p}^{p} |\varphi_{n+i}(t)|.$$

Но

$$\int_a^b |\varphi_{n+i}(t)| \, d\mu(t) \leqslant \left\{\int_a^b d\mu(t) \int_a^b \varphi_{n+i}^2(t) \, d\mu(t)\right\}^{1/2} \leqslant \sqrt{\mu(b) - \mu(a)},$$

а потому мы получаем оценку

$$I_{n1} = O\left(\frac{1}{h}\right)(2p+1)\sqrt{\mu(b) - \mu(a)} = O(1). \tag{85}$$

Перейдем, наконец, к оценке I_{n2}. Прежде всего, в силу соотношений (83) и $\gamma_{i,j,k}^{(n)} = O(1)$, на интервалах $\left[c, x - \frac{1}{n}\right]$ и $\left[x + \frac{1}{n}, d\right]$ справедлива оценка

$$|K_n(t, x)| = O_x\left(\frac{1}{|t-x|}\right)$$

и, следовательно,

$$I_{n2} = O_x(1)\left(\int_c^{x-\frac{1}{n}} + \int_{x+\frac{1}{n}}^{d}\right) \frac{d\mu(t)}{|t-x|}.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\int_c^{x-\frac{1}{n}} \frac{d\mu(t)}{|t-x|} = -\int_c^{x-\frac{1}{n}} \frac{d\mu(t)}{t-x} =$$

$$= \left[-\frac{\mu(t)-\mu(x)}{t-x}\right]_c^{x-\frac{1}{n}} - \int_c^{x-\frac{1}{n}} \frac{\mu(t)-\mu(x)}{(t-x)^2}\,dt.$$

Но почти всюду справедливо соотношение

$$\frac{\mu(t)-\mu(x)}{t-x} = O_x(1),$$

а потому

$$\int_c^{x-\frac{1}{n}} \frac{d\mu(t)}{|t-x|} = O_x(1) + O_x(1)\int_c^{x-\frac{1}{n}} \frac{dt}{|t-x|} = O_x(\log n).$$

Точно так же оценивается интеграл, распространенный от $x+\frac{1}{n}$ до d; следовательно,

$$I_{n2} = O_x(\log n). \tag{86}$$

Из (84), (85) и (86) следует требуемая оценка $L_n(x) = O_x(\log n)$ почти всюду на (c, d).

Доказательство второй части нашего утверждения также следует непосредственно из приведенных выше рассуждений. В самом деле, из ограниченности $\varrho(x)$ на $[c, d]$ для I_{n3} следует соотношение

$$I_{n3} = O(n)\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} \varrho(t)\,dt = O(1),$$

в то время как для I_{n1} имеем оценку (85). Далее, оценивая I_{n2}, находим

$$I_{n2} = O(1)\left(\int_c^{x-\frac{1}{n}} + \int_{x+\frac{1}{n}}^{d}\right)\frac{dt}{|t-x|} = O(\log n).$$

Так как для $\varepsilon > 0$ эти соотношения не зависят от положения точки $x \in [c+\varepsilon, d-\varepsilon]$, то наше утверждение относительно равномерности доказано.

Непосредственно из 3.1.2 и 3.1.3 вытекает следующая теорема о сходимости:

3.1.4. *Если ортонормированная система* $\{\varphi_n(x)\}$ *имеет полиномиальный вид и на интервале* $[c, d] \subset (a, b)$ *удовлетворяет условию* (83), *то из неравенства*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \log n < \infty$$

следует сходимость почти всюду на (c, d) *ортогонального ряда*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x).$$

Два частных случая этой теоремы заслуживают того, чтобы их сформулировать специально, так как они относятся к классическим ортогональным разложениям и в настоящее время являются самыми сильными критериями сходимости почти всюду классических ортогональных разложений.

3.1.5. *При условии*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \log n < \infty$$

ряд Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

сходится почти всюду.

3.1.6. *При условии*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \log n < \infty$$

ряд по полиномам Якоби

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$$

сходится почти всюду.

Оба эти следствия выводятся непосредственно из 3.1.4. При доказательстве 3.1.6 мы учитываем также теорему 1.5.4, согласно которой система $\{p_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}$ на каждом внутреннем к $(-1, 1)$ интервале $[c, d]$ удовлетворяет условию (83).

Понятие функций Лебега $L_n(x)$ предложено Лебегом в «Leçons sur les séries «trigonométriques»(Paris, 1906), стр. 86—88 (см. также Лебег [2]). Он исследовал влияние этих функций на расходимость рядов Фурье. Для тригонометрической системы функции $L_n(x)$ являются постоянными числами и называются константами Лебега. В самом деле, из периодичности следует равенство

$$L_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)}{\sin\frac{t-x}{2}}\right| dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\right| dt = L_n(0).$$

Доказав теперь равенство

$$L_n = \frac{16}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2k(2n-1)}}{4k^2-1},$$

мы можем легко подсчитать константы Лебега для тригонометрической системы (Сегё [1]). Отсюда, с одной стороны, определяем стоящую в соотношении $L_n = O(\log n)$ точную константу и, с другой стороны, выводим соотношение монотонности $L_n < L_{n+1}$.

Теорема 3.1.3 в случае ортонормированных полиномиальных систем доказана Б. Надем [1], и мы воспользовались в нашем тексте его методом доказательства. Позднее Алексич [11] ввел понятие ортонормированных систем, имеющих полиномиальный вид. Теорема 3.1.4 для рядов по ортонормированным полиномам доказана Б. Надем [1], в то время как уже ранее были известны теоремы 3.1.5 (Колмогоров—Селиверстов [2], Плеснер [1]) и, по существу, 3.1.6 (Алексич [2]).

В случае, когда не слишком многие коэффициенты равны нулю, теоремы 3.1.5 и 3.1.6, как легко видеть, дают более строгий критерий сходимости, чем общая теорема 2.3.2. Теорему 3.1.5 можно еще преобразовать и несколько усилить. Именно, если положим $\Delta^0 a_n = a_n, \ldots, \Delta^p a_n = \Delta^{p-1} a_n - \Delta^{p-1} a_{n+1}$, то можно утверждать следующее (Салем [1]):

При выполнении условий $a_n = o(1)$, $b_n = o(1)$ *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty}[(\Delta^p a_n)^2 + (\Delta^p b_n)^2]\log n < \infty$$

тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

сходится почти всюду.

В самом деле, применяя преобразование Абеля, в любой точке $x \not\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 2\pi)$ имеем

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx = \sum_{k=1}^{n-1} \Delta^1 a_k \frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x}{2\,\text{in}\,\frac{x}{2}} + a_n \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{ctg}\,\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\Delta^1 a_k \sin kx + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\Delta^1 a_k \cos kx + o_x(1).$$

По теореме 3.1.5 стоящие справа частичные суммы при условии $\sum_{n=1}^{\infty}(\Delta^1 a_n)^2 \log n < \infty$ сходятся почти всюду, а потому при этом условии и косинус-ряд сходится почти всюду. Аналогичное утверждение справедливо и для синус-ряда. Этим наше утверждение доказано в случае $p = 1$. Для $p > 1$ оно доказывается повторным применением преобразования Абеля.

Отметим, что в этой теореме тригонометрические ряды необязательно являются ядрами Фурье. Теорема остается справедливой, если только $a_n, b_n \to 0$, а p-я разность убывает достаточно быстро.

§ 2. Мультипликативные ортогональные системы. Обобщение рядов Уолша

Интересно, что теорема 3.1.1 может с успехом применяться не только для теории сходимости, а также и для теории суммирования определенных ортогональных рядов, хотя она относится не к оценке порядка (C, α) - средних $\sigma_n^\alpha(x)$, а только к оценке порядка частичных сумм $s_{\nu_n}(x)$. Переход от частичных сумм к средним Чезаро осуществляется с помощью теорем § 7 гл. II. Докажем относящуюся к этому вопросу следующую теорему о суммируемости:

3.2.1. *Если функции Лебега*

$$L_{2^n}(x) = \int_a^b \left| \sum_{k=0}^{2^n} \varphi_k(t)\varphi_k(x) \right| d\mu(t)$$

ортонормированной системы $\{\varphi_n(x)\}$ *ограничены в своей совокупности на множестве* $E \subset [a, b]$, *то из условия*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 < \infty \tag{87}$$

следует $(C, \alpha > 0)$*-суммируемость почти всюду на* E *ортогонального ряда*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x). \tag{88}$$

Из (87) вытекает существование монотонню возрастающей к бесконечности последовательности чисел $\{\mu_n^2\}$, для которой $\sum c_n^2 \mu_n^2 < \infty$. Можно также легко построить (например, геометрически) строго возрастающую вогнутую последовательность $\{\lambda_n\}$ со свойствами

$$\lambda_n^2 \leqslant \mu_n^2, \ \lambda_n^2 \to \infty \ \text{ и } \ \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \lambda_n^2 < \infty.$$

Из вогнутости $\{\lambda_n\}$ вытекает, что $\left\{\frac{1}{\lambda_n}\right\}$ — выпуклая нуль-последовательность. Через $s_n\ (\lambda, x)$ обозначим n-ю частичную сумму ортогонального ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda_n \varphi_n(x),$$

а через $\sigma_n(\lambda, x)$ — его n-е $(C, 1)$-средние. По предположению, $L_{2^m}(x) = O(1)$ при $x \in E$, а потому из 3.1.1 убеждаемся в справедливости почти всюду на E соотношения $s_{2^m}(\lambda, x) = O_x(1)$, а тогда, применяя 2.7.1, мы получаем оценку $\sigma_{2^m}(\lambda, x) = O_x(1)$. Как уже указывалось в доказательстве теоремы 2.7.2 при $2^m < n < 2^{m+1}$ разность $\sigma_n\ (\lambda, x) - \sigma_{2^m}\ (\lambda, x)$ почти всюду стремится к нулю. Поэтому почти всюду на E справедливо равенство $\sigma_n\ (\lambda, x) = O_x(1)$. Так как ряд $\sum c_n \varphi_n(x)$ получается из $\sum c_n \lambda_n \varphi_n(x)$ путем умножения членов ряда $\sum c_n \lambda_n \varphi_n(x)$ на элементы выпуклой нуль-последовательности

$\{1/\lambda_n\}$, то из 2.2.3 заключаем о сходимости почти всюду на E последовательности, $\{\sigma_n(x)\}$, а это, в силу 2.6.1, влечет (C, α)-суммируемость почти всюду на E ряда $\sum c_n \varphi_n(x)$ при любом $\alpha > 0$.

Мультипликативные ортогональные системы. Теперь доказанную выше теорему 3.2.1 мы применим к теории суммирования классов ортогональных рядов, являющихся обобщением рядов Радемахера-Уолша. С этой целью мы обобщим установленное в § 7 гл. I свойство функций Радемахера, состоящее в том, что конечные произведения этих функций также образуют ортонормированную систему.

Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — произвольная система функций и пусть

$$n = 2^{\nu_1} + 2^{\nu_2} + \ldots + 2^{\nu_m} \qquad (0 \leqslant \nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_m)$$

— двоичное представление индекса $n \geqslant 1$. Из системы $\{\varphi_n(x)\}$ мы образуем систему произведений $\{\psi_n(x)\}$, полагая при этом для $n \geqslant 1$ в качестве n-й функции

$$\psi_n(x) = \varphi_{\nu_1+1}(x)\varphi_{\nu_2+1}(x)\ldots\varphi_{\nu_m+1}(x),$$

а для $n = 0$ $\psi_0(x) \equiv 1$. Систему $\{\varphi_n(x)\}$ мы называем *мультипликативной ортогональной системой*, если выполняются соотношения

$$\int_a^b \psi_n(x)d\mu(x) = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Система произведений $\{\psi_n(x)\}$, конечно, не обязана быть ортогональной. Но если тем не менее $\{\psi_n(x)\}$ также ортогональна, то систему $\{\varphi_n(x)\}$ мы называем *сильно мультипликативно ортогональной системой*, а систему $\{\psi_n(x)\}$ *W-системой, порождаемой системой* $\varphi_n(x)$. В этом случае ортогональный ряд $\sum c_n\psi_n(x)$ называем W-рядом.

Рассмотренная в § 7 главы I система Уолша $\{\mathfrak{w}_n(x)\}$ является, очевидно, частным случаем W-систем. (Отсюда и введено название W-систем.) Системе Уолша соответствует случай $\mu(x) = x$ и $\varphi_n(x) = r_n(x)$, где $r_n(x)$ — n-я функция Радемахера. Другие примеры сильно мультипликативных ортогональных систем и W-систем будут изучены в дальнейшем.

W-ряды и разложения по сильно мультипликативным ортогональным системам имеют интересные свойства. Для их изучения введем следующее понятие: система функций $\{f_n(x)\}$ называется *равнонормированной*, если существует такая положительная константа C, что для всех n, за исключением, может быть, конечного числа, нормы функций этой системы удовлетворяют соотношению $\|f_n\| = C$. Прежде всего мы дадим применение 3.2.1 к (C, α) - суммированию W-рядов:

3.2.2. *Если сильно мультипликативная ортогональная система* $\{\varphi_n(x)\}$ *удовлетворяет условию*

$$|\varphi_n(x)| \leqslant 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

и если порождаемая ею W*-система* $\{\psi_n(x)\}$ *равнонормирована, то при условии* (87) W*-ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\psi_n(x) \tag{89}$$

$(C, \alpha > 0)$ *- суммируем почти всюду.*

Рассмотрим функцию

$$K(2^n - 1;\ t,\ x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} \psi_k(t)\psi_k(x) = \prod_{k=1}^{n} [1 + \varphi_k(t)\,\varphi_k(x)].$$

Так как $|\varphi_n(x)| \leqslant 1$, то стоящее справа произведение неотрицательно, а потому $K(2^n - 1;\ t,\ x) \geqslant 0$. Из ограниченности и равнонормированности системы $\{\psi_n(x)\}$ заключаем, что между ядром этой системы

$$K_{2^n}(t,\ x) = \sum_{k=0}^{2^n} \frac{\psi_k(t)\ \psi_k(x)}{\|\psi_k\|^2}$$

и функцией $K(2^n - 1;\ t,\ x)$ имеет место соотношение

$$K_{2^n}(t,\ x) = O(1)K(2^n - 1;\ t,\ x) + O(1).$$

Замечая, что ядра $K(2^n - 1;\ t, x)$ неотрицательны и что вследствие сильной мультипликативной ортогональности при $n \geqslant 1$ интегралы от $\psi_n\ (x)$ равны нулю, мы получаем следующую оценку для функций Лебега:

$$L_{2^n}(x) = \int\limits_a^b |K_{2^n}(t, x)|\ d\mu(t) = O(1)\int\limits_a^b K(2^n - 1;\ t,\ x)\ d\mu(t) + O(1) =$$

$$= O(1)\int\limits_a^b \psi_0(t)\,\psi_0(x)\ d\mu(t) = O(1).$$

Таким образом, $(C, \alpha > 0)$-суммируемость ортогонального ряда (89) является непосредственным следствием предшествующей теоремы 3.2.1.

Эта теорема может быть уточнена. Действительно, так как сильно мультипликативная ортогональная система при любой перестановке функций $\varphi_n(x)$ остается сильно мультипликативной и так как $\{\psi_n(x)\}$ при соответствующем порядке становится W-системой, порожденной системой $\{\varphi_n(x)\}$, то мы заключаем, что для так переставленных рядов (89) справедливо утверждение 3.2.2. Полученные из системы $\{\varphi_n(x)\}$ два расположения $\{\varphi_{k_n}(x)\}$ и $\{\varphi_{l_n}(x)\}$, мы назовем существенно различными, если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |l_n - k_n| = \infty$. Отметим, что $\{\varphi_n(x)\}$, а следовательно, и порождаемая ею W-система $\{\psi_n(x)\}$ имеет континуум существенно различных расположений. Теперь уточнение теоремы 3.2.2 можно сформулировать следующим образом:

3.2.3. *При выполнении условий теоремы* 3.2.2 *W-ряд* (89) *почти всюду* $(C, \alpha > 0)$*-суммируем для континуума существенно различных расположений его членов.*

В качестве следствия из этой теоремы и из 2.7.4 мы заключаем, что ряд (88) сходится почти всюду, если только $|\varphi_n(x)| \leqslant 1$. Тем не менее можно установить и более сильную теорему:

3.2.4. *Если сильно мультипликативная ортогональная система* $\{\varphi_n(x)\}$ *удовлетворяет условию*

$$|\varphi_n(x)| \leqslant K_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

с $K_1 \leqslant K_2 \leqslant \ldots$, *и если порождаемая ею W-система* $\{\psi_n(x)\}$ *равнонормирована, то при условии*

$$\sum c_n^2 K_n^2 < \infty$$

ряд (88) *почти всюду сходится.*

Через $S_n(x)$ обозначим n-ю частичную сумму ряда $\sum \frac{c_n K_n}{\|\varphi_n\|^2} \varphi_n(x)$, а через $s_n(x)$ — n-ю частичную сумму ряда (88). Положим

$$s_{n(x)}(x) = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} s_k(x).$$

Тогда точно так же, как и при доказательстве 3.1.1, для $k = 2^{\nu_1} + 2^{\nu_2} + \ldots + 2^{\nu_m}$ и $M_k = K_{\nu_1+1} K_{\nu_2+1} \ldots K_{\nu_m+1}$ получаем

$$\int_a^b s_{n(x)}(x) d\mu(x) = \int_a^b \int_a^b S_n(t) \sum_{k=1}^{n(x)} \frac{\varphi_k(t)\varphi_k(x)}{K_k} d\mu(t)\, d\mu(x) =$$

$$= \int_a^b \int_a^b S_n(t) \sum_{k=1}^{2^{n(x)}-1} \frac{\psi_k(t)\psi_k(x)}{M_k} d\mu(t)\, d\mu(x) =$$

$$= O(1) \left\{ \int_a^b \int_a^b \left| \sum_{k=0}^{2^{n(x,y)}-1} \frac{\psi_k(x)\psi_k(y)}{M_k^2} \right| d\mu(x)\, d\mu(y) \right\}^{1/2} + O(1).$$

Так как

$$\sum_{k=0}^{2^{n(x)}-1} \frac{\psi_k(x)\psi_k(y)}{M_k^2} = \prod_{l=1}^{n(x)} \left[1 + \frac{\varphi_l(x)\varphi_l(y)}{K_l^2} \right] \geqslant 0,$$

то в последнем интеграле мы можем отбросить знак абсолютной величины, а потому

$$\int_a^b s_{n(x)}(x)\, d\mu(x) = O(1) \int_a^b \psi_0(x)\, \psi_0(y)\, d\mu(x) = O\,(1).$$

Из монотонности последовательности $\{s_{n(x)}(x)\}$ и из 1.2.2 заключаем, что почти всюду справедливо соотношение $s_{n(x)}(x) = O_x(1)$. Аналогичная оценка выводится также для $\{-s_{n(x)}(x)\}$, а потому $s_n(x) = O_x(1)$ почти всюду. Отсюда аналогично тому, как и при доказательстве 3.1.2, мы убеждаемся в сходимости почти всюду последовательности $\{s_n(x)\}$.

Из только что доказанной теоремы мы получаем следствие:

3.2.5. *Если $\{\varphi_n(x)\}$ — ограниченная сильно мультипликативная ортогональная система и если порождаемая ею W-система $\{\psi_n(x)\}$ равнонормирована, то при условии $\sum c_n^2 < \infty$ ряд* (88) *сходится почти всюду при любой перестановке его членов.*

Действительно, в силу ограниченности системы $\{\varphi_n(x)\}$, в предыдущей теореме мы можем рассматривать $K_n = K$ при всех n. Тогда условия теоремы 3.2.4 выполняются при любой перестановке членов ряда (88), и наше утверждение доказано.

Сходимость сильно лакунарных рядов Фурье. Полученные выше результаты применим к лакунарным рядам Фурье. Лакунарный ряд запишем в следующей форме:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varrho_n \cos(m_n x + \alpha_n), \tag{90}$$

$$\varrho_n = \{a_n^2 + b_n^2\}^{\frac{1}{2}}, \qquad \frac{m_{n+1}}{m_n} \geqslant q > 1.$$

По индукции нетрудно доказать (см. также А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, М. — Л., 1939, стр. 141), что *при* $\frac{m_{k+1}}{m_k} \geqslant 3$ *ограниченные системы* $\{\sqrt{2}\cos m_k x\}$ *и* $\{\sqrt{2}\sin m_k x\}$ *являются сильно мультипликативными ортогональными системами и порождаемые ими W-системы равнонормированы с общей нормировкой* $\sqrt{2\pi}$. Поэтому из 3.2.5 можно вывести следующую теорему:

3.2.6. *Если ряд Фурье L^2-интегрируемой функции сильно лакунарен, то он сходится почти всюду при любом порядке его членов.*

Вследствие сильной лакунарности ряд (90), как легко видеть, можно разложить на конечное число рядов без общих членов

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varrho_n \cos(m_n x + \alpha_n) = \sum_{l=1}^{p} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \varrho_k^{(l)} \sqrt{2}\cos(m_k^{(l)} x + \alpha_k^{(l)}), \tag{91}$$

причем

$$\frac{m_{k+1}^{(l)}}{m_k^{(l)}} \geqslant 3 \qquad (k = 0,1, \ldots; \ l = 1, 2 \ldots, p).$$

Так как $\sum (\varrho_k^{(l)})^2 < \infty$ и, кроме того, системы $\{\sqrt{2}\cos m_k x\}$ и $\{\sqrt{2}\sin m_k x\}$ удовлетворяют условиям теоремы 3.2.5, то тригонометрические ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varrho_k^{(l)} \cos(m_k^{(l)} x + \alpha_k^{(l)}) \qquad (l = 1, 2, \ldots, p)$$

сходятся почти всюду при любом порядке их членов. В силу (91), ряд Фурье (90) является суммой конечного числа таких рядов, а поэтому он также сходится почти всюду при любом порядке его членов. Теорема доказана.

За исключением теорем 3.2.4 и 3.2.5, установленных Алексичем и Тандори [1], теоремы 3.2.1—3.2.6 доказаны Алексичем. Некоторые из этих теорем, а именно 3.2.1 и 3.2.2, опубликованы в статье [7], а остальные являются, по-видимому, новыми[1]. До этого проводились некоторые частные исследования рядов Уолша (Уолш [1], Качмаж [5], Пэли [1]) и $(C, \alpha > 0)$-суммируемости рядов Уолша $\sum c_n \mathfrak{w}_n(x)$, а также доказывались различные свойства сходимости лакунарных рядов Уолша. Эти исследования опирались на специальные свойства системы $\{\mathfrak{w}_n(x)\}$ и не могли применяться к вопросам сходимости других рядов. Введение общего понятия мультипликативной ортогональности позволило доказать некоторые теоремы для отдельных ортогональных рядов без изучения специальных свойств каждого такого ортогонального ряда. Так, например, теорема 3.2.6, являющаяся существенным усилением высказанной первоначально для рядов Фурье теоремы 2.7.4, не использует специальных свойств тригонометрической системы.

Более узкое определение сильной мультипликативной ортогональности, отправной точкой которому послужила теория групп, дано Виленкиным [1]. Наши теоремы остаются, конечно, справедливыми и в этом ограниченном случае, причем частично даже в более сильной форме.

Сильно мультипликативные ортогональные системы тесно связаны со стохастически независимыми системами функций из теории вероятностей. Система $\{f_n(x)\}$ называется *стохастически независимой* (Штейнгауз [1]), если для характеристических множеств $E_n(\alpha \leqslant f_n \leqslant \beta)$ функций $f_n(x)$ справедливо соотношение

$$\left|\bigcap_{k=1}^{n} E(\alpha_k \leqslant f_{m_k} \leqslant \beta_k)\right| = \prod_{k=1}^{n} |E(\alpha_k \leqslant f_{m_k} \leqslant \beta_k)|$$

при любом конечном числе функций $f_{m_1}(x), f_{m_2}(x), \ldots, f_{m_n}(x)$ из системы $\{f_n(x)\}$. Функции Радемахера являются классическим примером стохастически независимой системы. Можно показать, что для стохастически независимых функций при любых натуральных r_k справедливо соотношение

$$\int_0^1 \prod_{k=1}^{n} [f_{m_k}(x)]^{r_k}\, dx = \prod_{k=1}^{n} \int_0^1 [f_{m_k}(x)]^{r_k}\, dx,$$

лишь бы только существовали эти интегралы. Поэтому в случае, когда интегральные средние функций $f_n(x)$ равны нулю, т. е. если

$$\int_0^1 f_n(x)\, dx = 0,$$

---

[1] Следует отметить, что теорема 3.2.6 была установлена еще в 1958 году Стечкиным С. Б. и Зизой О. А. (см. *Докл. АН СССР*, 124, № 2 (1959), стр. 257—259).

Такого же рода результат, относящийся к рядам по системе Радемахера, еще раньше был получен Штейнгаузом Г. (см. *Матем. сб.* 35 (77): 1 (1928), стр. 39—42). — *Прим. ред.*

то система $\{f_n(x)\}$ является сильно мультипликативной ортогональной системой. Далее, как нетрудно видеть, нормировка на $\{f_n(x)\}$ переносится и на ее W-систему. Опираясь на наши результаты, отсюда можно получить некоторые заключения о сходимости рядов по ограниченным, нормированным, стохастически независимым функциям с равными нулю интегральными средними. Однако предположение ограниченности не является здесь необходимым, ибо справедлива следующая теорема Колмогорова [3]:

Если $\{\varphi_n(x)\}$ есть система стохастически независимых функций с равными нулю интегральными средними и с равным 1 *«рассеиванием», то при условии* (87) *ряд* (88) *сходится почти всюду.*

Непосредственно из этого результата выводится так называемый колмогоровский усиленный закон больших чисел. Чтобы его сформулировать, мы через

$$D_n = \sqrt{\int_0^1 f_n^2(x)\,dx}$$

обозначим «рассеивание» функции $f_n(x)$, причем функции $f_n(x)$ стохастически независимы и их интегральные средние равны нулю. Усиленный закон больших чисел читается следующим образом:

При условии

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n^2}{n^2} < \infty$$

средние значения

$$M_n(x) = \frac{f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)}{n}$$

сходятся к нулю с вероятностью, равной 1.

Действительно, если положим

$$\varphi_n(x) = \frac{f_n(x)}{D_n}, \quad c_n = \frac{D_n}{n},$$

то $\sum c_n^2 < \infty$, и, в силу теоремы Колмогорова, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(x)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\varphi_n(x)$$

сходится почти всюду. Поэтому из 2.2.2 для почти всех x выводим оценку $M_n(x) = o_x(1)$, а это и есть усиленный закон больших чисел.

Расходимость рядов из мультипликативных ортогональных функций. Как мы уже отмечали, теорема 1.7.4 может быть сильно обобщена. Это обусловлено тем, что в доказательстве

1.7.4 используется только свойство мультипликативной ортогональности системы Радемахера. Небольшое изменение хода доказательства позволяет получить дальнейшее обобщение:

3.2.7. *Пусть* $\{\varphi_n(x)\}$ — *нормированная мультипликативная ортогональная система, причем подсистема произведений* $\{\varphi_k(x)\varphi_l(x)\}_{k\neq l}$ *равнонормирована. Пусть, далее, для каждого множества* $E\subset[a, b]$ *с* μ*-мерой* $|E|_\mu$ *и для достаточно больших* n *справедливо соотношение*

$$\int\limits_E \varphi_n^2(x)\, d\mu(x) \geqslant K\,|E|_\mu \qquad (K > 0).$$

Тогда, если ряд (88) *суммируем на множестве положительной меры конечнострочным регулярным положительным методом суммирования, то коэффициенты этого ряда удовлетворяют неравенству* (87).

В самом деле, через

$$t_n(x) = \sum_{k=0}^{m_n} \alpha_{nk} s_k(x)$$

обозначим n-е средние данного метода суммирования. Полагая $\alpha_{nk} = 0$ при $k > m_n$, с помощью преобразования Абеля, средние $t_n(x)$ запишем в форме

$$t_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\varphi_k(x)R_{nk},$$

где $R_{nk} = \alpha_{nk} + \alpha_{n,k+1} + \ldots$. Пусть N — достаточно большое целое число, которое мы определим позднее. Если при $k = 0$, 1, ..., N коэффициенты c_k мы заменим нулями, то средние

$$t_n^*(x) = \sum_{k=N}^{\infty} c_k\varphi_k(x)R_{nk}$$

сходятся на том же самом множестве, что и $t_n(x)$. В силу нашего предположения, это множество имеет положительную меру, а потому существуют множество E с μ-мерой $|E|_\mu > 0$ и постоянная $M > 0$ такие, что $|t_n^*(x)|\leqslant M$ $(n = 0, 1, \ldots)$ почти всюду на E. С помощью интегрирования $[t_n^*(x)]^2$ при достаточно больших N мы выводим оценку

$$M^2|E|_\mu \geqslant K|E|_\mu \sum_{k=N}^{\infty} c_k^2 R_{nk}^2 +$$
$$+ 2\sum_{k=N}^{\infty} c_k R_{nk} \sum_{l=k+1}^{\infty} c_l R_{nl} \int_E \varphi_k(x)\varphi_l(x)\,d\mu(x).$$

Последняя двойная сумма S_n удовлетворяет неравенству

$$|S_n| \leqslant \left\{\sum_{k=N}^{\infty} \sum_{l=k+1}^{\infty} c_k^2 c_l^2 R_{nk}^2 R_{nl}^2\right\}^{1/2} \left\{\sum_{k=N}^{\infty} \sum_{l=k+1}^{\infty} \left[\int_E \varphi_k(x)\varphi_l(x)\,d\mu(x)\right]^2\right\}^{1/2}.$$

Так как интеграл $\int_E \varphi_k(x)\varphi_l(x)\,d\mu(x)$ является коэффициентом разложения характеристической функции множества E по функциям равнонормированной ортогональной системы $\{\varphi_k(x)\varphi_l(x)\}$ $(k \neq l)$, то число N можно выбрать столь большим, чтобы выполнялось соотношение

$$\sum_{k=N}^{\infty} \sum_{l=k+1}^{\infty} \left[\int_E \varphi_k(x)\varphi_l(x)\,d\mu(x)\right]^2 \leqslant \frac{K^2|E|_\mu^2}{9}.$$

Таким образом, мы получаем следующую оценку:

$$2|S_n| \leqslant \frac{2K|E|_\mu}{3} \sum_{k=N+1}^{\infty} c_k^2 R_{nk}^2.$$

Как и при доказательстве 1.7.4, отсюда выводим соотношение

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} c_k^2 R_{nk}^2 < \frac{3M^2}{K},$$

из которого, учитывая вытекающее из 2.1.1 неравенство $R_{nk}^2 \leqslant 1 + o(1)$ $(n \to \infty)$, убеждаемся в справедливости неравенства (87).

Теорема 3.2.2, являющаяся обобщением 1.7.4, доказана, по существу, Зигмундом [3]. Ограничения на положительность и конечнострочность метода здесь излишни, и мы принимали их только ради упрощения доказательства. Однако можно утверждать, что практически не суммируется большинство рядов, коэффициенты которых не удовлетворяют условию (87), хотя сами ряды являются разложениями по нормированным сильно мультипликативным ортогональным функциям (ряды Радемахера, сильно лакунарные ряды и т. д.). Если сравнить этот результат с теоремой Колмогорова о сходимости почти всюду рядов по нормированным независимым функциям при выполнении условия (87), то можно высказать следующее: *При соответствующих условиях ряды по независимым функциям сходятся или суммируются либо с вероятностью единица, либо с вероятностью нуль.* В теории вероятностей этот факт называют законом нуля или единицы.

Свойства рядов из мультипликативных ортогональных функций дают возможность постановки некоторых проблем. Например, можно ли утверждать, что условие (87) и сильная мультипликативная ортогональность $\{\varphi_n(x)\}$ даже без ограниченности системы $\{\varphi_n(x)\}$ влекут сходимость ряда (88)? Что можно утверждать о сходимости рядов по (слабо) мультипликативным ортогональным функциям? Можно ли из любой полной ортогональной системы выбрать бесконечную мультипликативную ортогональную или даже сильно мультипликативную ортогональную подсистему? Решение подобных задач даст, по-видимому, возможность для расширения сферы применения некоторых теорем теории вероятностей.

§ 3. Функции Лебега для методов Чезаро

В теории (C, α)-суммирования функции Лебега

$$L_n^\alpha(x) = \int_a^b |K_n^\alpha(t, x)|\, d\mu\ (t)$$

играют такую же большую роль, как и функции $L_n(x)$ в теории сходимости. Это очень важно, ибо, как мы уже видели в гл. II, из $(C,\alpha > 0)$-суммируемости почти всюду следуют многие теоремы о сильной суммируемости и о сходимости лакунарных рядов. Самая простая теорема о суммируемости, основанная на порядке роста функций Лебега $L_n^\alpha(x)$, формулируется следующим образом:

3.3.1. *Если для некоторого фиксированного* $\beta > -1$ *на множестве* E *выполняется соотношение*

$$L_n^\beta(x) = O(1), \tag{92}$$

то при условии

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 < \infty \tag{93}$$

ортогональный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x) \tag{94}$$

при любом $\alpha > 0$ *почти всюду на* E (C, α)*-суммируем.*

Без ограничения общности можем считать, что $\beta > 0$, ибо иначе имели бы также и $L_n(x) = O_x(1)$ на E, т. е. ряд был бы сходящимся почти всюду. В самом деле, это замечание следует из (26):

$$L_n(x) \leqslant \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{-\beta-1} A_\nu^\beta \int_a^b \left| K_\nu^\beta(t, x) \right| d\mu(t) = O(1) \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{-\beta-1} A_\nu^\beta = O(1).$$

Поэтому мы полагаем $\beta > 0$ и при доказательстве используем средние Абеля—Пуассона

$$P(r,\ x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x) r^k \qquad (0 < r < 1)$$

ряда (94). Функция $P(r,\ x)$ существует почти всюду, так как по теореме 1.5.1 ортонормированные функции $\varphi_k(x)$ для почти всех x имеют порядок $O_x(k)$; следовательно, ряд $\sum c_k \varphi_k(x) r^k$ $(0 < r < 1)$ абсолютно сходится почти всюду. Далее, $P(r,\ x)$ для почти всех x является непрерывной функцией от r. Действительно, если r и r' — два числа между 0 и 1, то из абсолютной сходимости рядов $\sum c_k \varphi_k(x) r^k$ и $\sum c_k \varphi_k(x) r'^k$ на x-множестве M меры $b—a$ следует, что разность $P(r,\ x)—P(r', x)$ при постоянном $x \in M$ стремится к нулю, когда $r' \to r$.

По теореме Рисса—Фишера 1.2.4 коэффициенты c_n являются коэффициентами разложения функции $f \in L_\mu^2$, а потому $P(r,\ x)$ можно представить в форме

$$P(r,\ x) = \int_a^b f(t) \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(t) \varphi_k(x) r^k d\mu(t).$$

Через r_x обозначим наименьшее положительное число $\leqslant r$, для которого выполняется соотношение

$$P(r_x,\ x) = \sup_{0 < \varrho \leqslant r} P(\varrho,\ x).$$

Тогда число r_x существует во всех тех точках x, в которых $P(r,\ x)$ есть непрерывная функция от r и, стало быть, r_x существует для почти всех x. Функция $P(r_x,\ x)$ монотонно возрастает вместе с r, т. е. предельная функция $P(x) = \lim\limits_{r \to 1} P(r, x)$ существует почти всюду, причем $P(x) \geqslant P(r,\ x)$ при всех $0 < r < 1$ и для почти всех x. Поступая теперь аналогично тому, как и в доказательстве 3.1.1, мы получаем

$$\int\limits_E P(r_x, x)\, d\mu(x) \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \int\limits_a^b f^2(t)\, d\mu(t) \right\}^{1/2} \cdot \left\{ \int\limits_a^b \left[\int\limits_E \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(t)\varphi_k(x) r_x^k\, d\mu(x) \right]^2 d\mu(t) \right\}^{1/2} =$$

$$= O(1) \left\{ \int\limits_E \int\limits_E \int\limits_a^b \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(t)\varphi_k(x)\, r_x^k \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(t)\varphi_k(y)\, r_y^k\, d\mu(t)\, d\mu(x)\, d\mu(y) \right\}^{1/2} =$$

$$= O(1) \left\{ \int\limits_E \int\limits_E \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x)\,\varphi_k(y)\,(r_x r_y)^k\, d\mu(x)\, d\mu(y) \right\}^{1/2}.$$

Подинтегральная функция представляет собой средние Абеля—Пуассона ряда $\sum \varphi_k(x)\,\varphi_k(y)$, образованные с помощью $\varrho = r_x r_y$, а поэтому ее можно записать в форме

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x)\,\varphi_k(y)\,(r_x r_y)^k = (1 - r_x r_y)^{1+\beta} \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu^\beta K_\nu^\beta(x, y)\,(r_x r_y)^\nu =$$

$$= \left[\frac{(1 - r_x)(1 + r_y) + (1 - r_y)(1 + r_x)}{2} \right]^{1+\beta} \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu^\beta K_\nu^\beta(x, y)\,(r_x r_y)^\nu.$$

Так как $0 \leqslant r_x,\ r_y < 1$, то отсюда выводим

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x)\,\varphi_k(y)\,(r_x r_y)^k \right| = O((1 - r_x)^{1+\beta}) \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu^\beta\, |K_\nu^\beta(x, y)|\, r_x^\nu +$$

$$+ O((1 - r_y)^{1+\beta}) \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu^\beta\, |K_\nu^\beta(x, y)|\, r_y^\nu,$$

и, стало быть, справедлива оценка

$$\int\limits_E \int\limits_E \left| \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x)\,\varphi_k(y)\,(r_x r_y)^k \right| d\mu(x)\, d\mu(y) =$$

$$= O(1) \int\limits_E (1 - r_x)^{1+\beta} \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu^\beta r_x^\nu\, d\mu(x) +$$

$$+ O(1) \int\limits_E (1 - r_y)^{1+\beta} \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu^\beta r_y^\nu\, d\mu(y) =$$

$$= O(1) \int\limits_E d\mu(x) + O(1) \int\limits_E d\mu(y) = O(1).$$

Таким образом, мы имеем

$$\int_E P(r_x, x)\, d\mu(x) = O(1).$$

Так как $P(r_x, x)$ монотонно возрастает вместе с r, то мы можем применить теорему Б. Леви 1.2.2[1], согласно которой предельная функция $P(x) = \lim\limits_{r \to 1} P(r_x, x)$ интегрируема на E и, следовательно, почти всюду конечна. Поэтому все $P(r, x)$ мажорируются сверху функцией $P(x)$, конечной почти всюду на E. Повторяя те же самые рассуждения для средних $-P(r,x)$, мы убеждаемся в существовании конечной почти всюду на E функции $Q(x)$, для которой имеет место неравенство $-P(r, x) \leqslant Q(x)$. Таким образом, почти всюду на E имеем $|P(r, x)| \leqslant |P(x)| + |Q(x)|$. Отсюда по теореме 2.2.6 заключаем, что для почти всех $x \in E$ справедливо соотношение $\sigma_n(x) = O_x(1)$, ибо, как показано на стр. 118, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n[\sigma_n(x) - \sigma_{n-1}(x)]^2$ сходится почти всюду. Итак, мы доказали, что при условии (93) $(C, 1)$-средние ортогонального ряда (94) остаются конечными почти всюду на множестве E, если только выполняется (92).

Из (93) следует существование монотонно возрастающей к бесконечности последовательности положительных чисел $\{\mu_n\}$, для которой ряд $\sum c_n^2\mu_n^2$ сходится. Можно также построить вогнутую последовательность $\{\lambda_n\}$ с $\lambda_n \to \infty$, для которой сходится ряд $\sum c_n^2\lambda_n^2$. Согласно только что доказанному результату, $(C, 1)$-средние ряда $\sum c_n\lambda_n\varphi_n(x)$ конечны почти всюду на E, и по теореме 2.2.3 ряд (94) $(C, 1)$-суммируем почти всюду на E, откуда, в силу 2.6.1, и следует наше утверждение для всех $\alpha > 0$.

Хотя доказанная нами теорема удобна для применений в теории суммирования ортогональных рядов, она является только частным случаем полного обобщения теоремы 3.1.2, согласно которому $L_n(x)$ заменяются на $L_n^\beta(x)$ с произвольным $\beta > 0$, а тогда из условий $L_n^\beta(x) = O(\lambda_n)$ при $x \in E$ и $\sum c_n^2\lambda_n < \infty$ выводится $(C, \alpha > 0)$-суммируемость почти всюду

[1] Непрерывное изменение переменной r не мешает, ибо мы заменяем r произвольной, стремящейся к 1 последовательностью возрастающих положительных чисел $\{r_n\}$.

на E ряда (94). Так как доказательство этого обобщения очень сложно и не содержит никаких принципиально новых идей, то мы ограничимся только случаем $\beta = 1$. Тогда $(C, 1)$-аналог теоремы 3.1.1 гласит:

3.3.2. *Если $\{\lambda_n\}$ — неубывающая последовательность положительных чисел и если на множестве $E \subset [a, b)$ имеет место соотношение*

$$L_n^1(x) = O(\lambda_n),$$

то при условии (93) для $(C, 1)$-средних ортогонального ряда (94) почти всюду на E справедлива оценка

$$\sigma_n(x) = O_x(\sqrt{\lambda_n}).$$

Доказательство является модификацией доказательства 3.1.1. Обозначая через n_x наименьший индекс $\leqslant n$, для которого справедливо соотношение

$$\frac{\sigma_{n_x}(x)}{\sqrt{\lambda_{n_x}}} = \max_{0 \leqslant \nu \leqslant n} \frac{\sigma_\nu(x)}{\sqrt{\lambda_\nu}},$$

мы получаем следующую оценку:

$$\int_E \frac{\sigma_{n_x}(x)}{\sqrt{\lambda_{n_x}}}\, d\mu(x) = O(1) \left\{ \int_E \int_E \int_a^b \frac{K_{n_x}^1(t, x)\, K_{n_y}^1(t, y)}{\sqrt{\lambda_{n_x}}\, \sqrt{\lambda_{n_y}}}\, d\mu(t)\, d\mu(x)\, d\mu(y) \right\}^{1/2}.$$

Пусть $n_{x,y}$ означает наименьшее, а $\bar{n}_{x,y}$ — наибольшее из чисел n_x и n_y. Тогда из определения ядра $K_m^1(t, x)$:

$$K_m^1(t, x) = \frac{1}{m+1} \sum_{\nu=0}^{m} K_\nu(t, x),$$

и из ортонормированности $\{\varphi_n(x)\}$ следует равенство[1]

[1] Здесь допущена неточность при подсчете. В самом деле, применяя преобразование Абеля к среднему члену, получаем

$$\int_a^b K_{n_x}^1(t, x)\, K_{n_y}^1(t, y)\, dt = \frac{1}{(n_x+1)(n_y+1)} \sum_{\nu=0}^{n_{x,y}} K_\nu(x, y)\,(n_x + n_y - 2\nu + 1) =$$

$$= 2\, \frac{\sum\limits_{\nu=0}^{n_{x,y}} (\nu+1)\, K_\nu^1(x, y)}{(n_{x,y}+1)\,(\bar{n}_{x,y}+1)} + \frac{\bar{n}_{x,y} - n_{x,y} - 1}{\bar{n}_{x,y}+1}\, K_{n_{x,y}}^1(x, y).$$

Дальнейшие рассуждения автора правильны. — *Прим. ред.*

$$\int_a^b K^1_{n_x}(t, x)\, K^1_{n_y}(t, y)\, d\mu(t) = \frac{\sum\limits_{\nu=0}^{n_{x,y}} K_\nu(x, y)\, (\bar{n}_{x,y} + 1 - \nu)}{(n_x + 1)\,(n_y + 1)}.$$

Если вместо $\bar{n}_{x,y}$ подставим сюда $n_{x,y} + 1 + \bar{n}_{x,y} - n_{x,y} - 1$, то справа стоящее выражение запишется в форме

$$\frac{1}{\bar{n}_{x,y} + 1} \sum_{\nu=0}^{n_{x,y}} \left(1 - \frac{\nu}{n_{x,y} + 1}\right) K_\nu(x, y) + \frac{\bar{n}_{x,y} - n_{x,y}}{\bar{n}_{x,y} + 1} \cdot \frac{\sum\limits_{\nu=0}^{n_{x,y}} K_\nu(x, y)}{n_{x,y} + 1} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{\nu=0}^{n_{x,y}} (\nu + 1)\, K^1_\nu(x, y)}{(n_{x,y} + 1)\,(\bar{n}_{x,y} + 1)} + \frac{\bar{n}_{x,y} - n_{x,y}}{\bar{n}_{x,y} + 1}\, K^1_{n_{x,y}}(x, y).$$

Поэтому

$$\left|\int_a^b K^1_{n_x}(t, x)\, K^1_{n_y}(t, y)\, d\mu(t)\right| \leqslant \frac{1}{n_{x,y} + 1} \sum_{\nu=0}^{n_{x,y}} |K^1_\nu(x,y)| + |K^1_{n_{x,y}}(xy)|,$$

и из нашего предположения $L^1_n(x) = O(\lambda_n)$ мы выводим

$$\int_E \int_E \frac{1}{\lambda_{n_{x,y}}} \left|\int_a^b K^1_{n_x}(t, x)\, K^1_{n_y}(t,y)\, d\mu(t)\right| d\mu(x)\, d\mu(y) \leqslant$$

$$\leqslant 2 \int_E \int_E \frac{1}{\lambda_{n_x}} \frac{\sum\limits_{\nu=0}^{n_x} |K^1_\nu(x, y)|}{n_x + 1}\, d\mu(x)\, d\mu(y) +$$

$$+ 2 \int_E \int_E \frac{1}{\lambda_{n_x}} |K^1_{n_x}(x, y)|\, d\mu(x)\, d\mu(y) =$$

$$= \int_E \frac{1}{\lambda_{n_x}(n_x + 1)} \sum_{\nu=0}^{n_x} O(\lambda_\nu)\, d\mu(x) + O(1) \int_E d\mu(x) = O(1).$$

Таким образом,

$$\int_E \frac{\sigma_{n_x}(x)}{\sqrt{\lambda_{n_x}}}\, d\mu(x) = O(1),$$

а отсюда, как и при доказательстве 3.1.1, вытекает наше утверждение.

3.3.3. *Если* $\{\lambda_n\}$ — *неубывающая вогнутая последовательность положительных чисел и если на множестве* $E \in [a, b]$ *имеет место соотношение*

$$L_n^1(x) = O(\lambda_n),$$

то при условии

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \lambda_n < \infty$$

ортогональный ряд (94) $(C, \alpha > 0)$-*суммируем почти всюду на* E.

В силу наших предположений на коэффициенты, существует монотонно возрастающая последовательность положительных чисел $\{\lambda_n^*\}$, для которой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n^2 \lambda_n^*$ сходится и $\lambda_n = o(\lambda_n^*)$. Так как, по предположению, $\{\lambda_n\}$ вогнута, то между λ_n и λ_n^* можно вставить μ_n так, чтобы последовательность $\{\mu_n\}$ была вогнута и $\lambda_n = o(\mu_n)$. Тогда $\{1/\mu_n\}$ — выпуклая нуль-последовательность. Через $\sigma_n(\sqrt{\mu}, x)$ обозначим n-е $(C, 1)$-средние ортогонального ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \sqrt{\mu_n}\, \varphi_n(x).$$

Используя (28), получаем

$$\sigma_{n+p}(x) - \sigma_n(x) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n+p-1} \left(1 - \frac{k}{n+p-1}\right)(k+1)\, \sigma_k(\sqrt{\mu}, x)\, \Delta^2 \left(\frac{1}{\sqrt{\mu_k}}\right) -$$
$$- \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right)(k+1)\, \sigma_k(\sqrt{\mu}, x)\, \Delta^2 \left(\frac{1}{\sqrt{\mu_k}}\right) +$$
$$+ \frac{2}{n+p+1} \sum_{k=0}^{n+p-1} (k+1)\, \sigma_k(\sqrt{\mu}, x)\, \Delta \left(\frac{1}{\sqrt{\mu_{k+1}}}\right) -$$
$$- \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\, \sigma_k(\sqrt{\mu}, x)\, \Delta \left(\frac{1}{\sqrt{\mu_{k+1}}}\right) +$$
$$+ \frac{\sigma_{n+p}(\sqrt{\mu}, x)}{\sqrt{\mu_{n+p}}} - \frac{\sigma_n(\sqrt{\mu}, x)}{\sqrt{\mu_n}}.$$

Так как $\lambda_n = o(\mu_n)$, то из 3.3.2 следует, что два последних члена в правой части этого равенства стремятся к нулю почти всюду на E. Относительно двух предшествующих им членов мы заметим, что выражение

$$\frac{2}{m+1}\sum_{k=0}^{m-1} k\sigma_k(\sqrt{\mu}, x)\, \Delta\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_{k+1}}}\right)$$

является $\frac{2m}{m+1}$-кратной разностью между $(m-1)$-й частичной суммой и $(m-1)$-ми арифметическими средними ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k(\sqrt{\mu}, x)\, \Delta\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_{k+1}}}\right).$$

Поэтому почти всюду на множестве сходимости этого ряда оба указанных члена стремятся к нулю. Но, как мы покажем, это множество сходимости покрывает почти весь интервал (a, b). В самом деле, применяя неравенство Шварца, получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Delta\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_{k+1}}}\right) \int_a^b |\sigma_k(\sqrt{\mu}, x)|\, d\mu(x) =$$

$$= O(1) \sum_{k=0}^{\infty} \Delta\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_{k+1}}}\right) \sqrt{\sum_{j=0}^{k} c_j^2 \mu_j} = O(1) \sum_{k=0}^{\infty} \Delta\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_{k+1}}}\right) < \infty.$$

Поэтому сходимость почти всюду нашего ряда следует непосредственно из 1.2.2. Нам осталось только показать стремление почти всюду к нулю двух первых членов преобразованной разности. Так как это есть разность двух $(C, 1)$-средних ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, \sigma_k(\sqrt{\mu}, x) \Delta^2\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_k}}\right),$$

то нам достаточно показать сходимость почти всюду последнего ряда. Но это непосредственно следует из 1.2.2, ибо, используя неравенство Шварца, находим, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, \Delta^2\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_k}}\right) \int_a^b |\sigma_k(\sqrt{\mu}, x)|\, d\mu(x) =$$

$$= O(1) \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, \Delta^2\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_k}}\right) \sqrt{\sum_{j=0}^{k} c_j^2 \mu_j} =$$

$$= O(1) \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, \Delta^2\left(\frac{1}{\mu_k}\right) < \infty,$$

где последняя оценка есть следствие выпуклости $\{1/\mu_k\}$ (см. стр. 80). Таким образом, мы доказали соотношение

$$\sigma_{n+p}(x) - \sigma_n(x) = o_x(1),$$

а, стало быть, и $(C, 1)$-суммируемость почти всюду на E ортогонального ряда (94). Поэтому его $(C, \alpha > o)$-суммируемость есть следствие из 2.6.1.

Как эти теоремы, так и уже упомянутое и ниже точно сформулированное обобщение теоремы 3.3.3 установлены Качмажем [4] и [6]. Упрощенное доказательство, в котором частично содержатся и детали доказательства Качмажа, дал Тандори [1]. Упомянутая общая теорема, которая содержит все без исключения теоремы этого параграфа, гласит:

Если $\{\lambda_n\}$ — неубывающая последовательность положительных чисел и если на множестве E выполняется соотношение $L_n^\beta(x) = O(\lambda_n)$ $(\beta > -1)$, то при условии $\sum c_n^2 \lambda_n < \infty$ ортогональный ряд (94) $(C, \alpha > 0)$-*суммируем почти всюду на E.*

Ее доказательство совершенно аналогично доказательству 3.3.3, только вместо (28) нужно исходить из соотношения

$$\sigma_n^r(x) = \frac{1}{A_n^r} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^r \sigma_k^0(\lambda, x)\, \Delta\left(\frac{1}{\lambda_k}\right) +$$
$$+ \sum_{\mu=1}^{r} \frac{1}{A_n^r} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{r-\mu} A_k^\mu \sigma_k^\mu(\lambda, x)\, \Delta\left(\frac{1}{\lambda_{k+\mu}}\right) + \frac{\sigma_n^r(\lambda, x)}{\lambda_{n+r+1}},$$

которое справедливо для целых значений r. После этого оценка $\sigma_n^r(x) = O(1)$ почти всюду на E доказывается, по существу, применением метода Колмогорова—Селиверстова—Плеснера. Кроме того, доказав справедливость почти всюду на E соотношения

$$\sigma_n^r(x) = \frac{1}{A_n^r} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^r \sigma_k^0(\lambda, x)\, \Delta\left(\frac{1}{\lambda_k}\right) + o_x(1),$$

мы заключаем, что справа стоящая сумма представляет собой n-е (C, r)-средние ряда $\sum \sigma_k^0(\lambda, x)\, \Delta\left(\frac{1}{\lambda_k}\right)$, сходимость почти всюду которого влечет сходимость почти всюду последовательности $\{\sigma_n^r(x)\}$. Но сходимость почти всюду написанного ряда следует из соотношения

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Delta\left(\frac{1}{\lambda_k}\right) \int_a^b |\sigma_k^0(\lambda, x)|\, d\mu(x) < \infty.$$

Этим наше утверждение доказано при всех целых r. Если же $\alpha \geqslant 0$ не целое, то утверждение для всех $\alpha \geqslant 0$ получим из 2.6.1 и из неравенства $L_n^\alpha(x) \geqslant L_n^r(x)$ при $r > \alpha$.

Перенесение приведенных здесь способов доказательства иа более общие методы суммироваиия ие удается, по-видимому, только из-за технических трудностей. Поэтому совершеиио естествеииа формулировка следующей проблемы: если для некоторого регулярного метода суммироваиия с матрицей (a_{nk}) выполияется соотиошение

$$\int_a^b \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} K_k(t, x) \right| dt = O(1) \qquad (x \in E),$$

то будет ли тогда этот метод суммировать почти всюду иа E ортогоиальный ряд (94), удовлетворяющий условию (93)?

§ 4. Суммирование ортогональных рядов по функциям системы полиномиального вида

Теорему 3.3.1 мы можем сразу же применить к рядам Фурье L^2-интегрируемых функций, ибо функции Лебега $L_n^1(x)$ тригонометрической системы удовлетворяют условию

$$L_n^1(x) = L_n^1(0) = \frac{1}{2\pi(n+1)} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 (n+1)\frac{t}{2}}{\sin^2 \frac{t}{2}}\, dt = 1.$$

Следовательно, выполнены условия теоремы 3.3.1, откуда тотчас получаем $(C, \alpha > 0)$-суммируемость почти всюду ряда Фурье L^2-интегрируемой функции. В этом направлении мы продвинемся еще дальше и докажем теорему, которая содержит как частный случай все сказанное о рядах Фурье:

3.4.1. *Пусть ортонормированная система* $\{\varphi_n(x)\}$ *имеет полиномиальный вид и на множестве E удовлетворяет соотношению*

$$\sum_{k=0}^{n} \varphi_k^2(x) = O_x(n). \tag{95}$$

Тогда при условии (93) *ряд* (94) $(C, \alpha > 0)$-суммируем почти *всюду на E.*

Эта теорема является непосредственным следствием из 3.3.1 и следующей теоремы:

3.4.2. *Если ортонормированная система* $\{\varphi_n(x)\}$ *имеет полиномиальный вид и если в точках множества E выполняется* *условие* (95), *то почти всюду на* E *справедливо соотношение* $L_n^1(x) = O_x(1)$.

В самом деле, пусть $P_n(t, x)$ и $N_n(t, x)$ — характеристические функции множеств, на которых $\sum_{\nu=0}^{n} K_\nu(t, x) \geqslant 0$ или < 0 соответственно. Непосредственно из определения функций Лебега $L_n^1(x)$ выводится представление

$$L_n^1(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} \int_a^b P_n(t, x) K_\nu(t, x)\, d\mu(t) - \\ - \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} \int_a^b N_n(t, x) K_\nu(t, x)\, d\mu(t). \quad (96)$$

Мы докажем, что для почти всех $x \in E \cap (a+\varepsilon, b-\varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ — произвольно, каждая из стоящих справа сумм имеет порядок $O_x(n)$ и, следовательно, $L_n^1(x) = O_x(1)$ для почти всех $x \in E$. С этой целью интеграл

$$\int_a^b P_n(t, x) K_\nu(t, x)\, d\mu(t)$$

при $n \geqslant n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$ разобьем на две части:

$$I_{\nu_1} = \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}}, \qquad I_{\nu_2} = \int_a^{x-\frac{1}{n}} + \int_{x+\frac{1}{n}}^{b}.$$

Для оценки $|I_{\nu_1}|$ мы применим неравенство Шварца. Тогда, учитывая (95) и неравенство $P_n^2(t, x) \leqslant 1$, найдем, что

$$I_{\nu_1}^2 \leqslant \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} P_n^2(t, x)\, d\mu(t) \int_a^b K_\nu^2(t, x)\, d\mu(t) \leqslant \\ \leqslant \left[\mu\left(x+\frac{1}{n}\right) - \mu\left(x-\frac{1}{n}\right)\right] \sum_{k=0}^{\nu} \varphi_k^2(x) = \\ = O_x(\nu)\left[\mu\left(x+\frac{1}{n}\right) - \mu\left(x-\frac{1}{n}\right)\right].$$

Но так как $\mu(x)$ имеет почти всюду конечную производную $\mu'(x)$, то для почти всех x справедливо равенство

$$\frac{\mu\left(x+\frac{1}{n}\right)-\mu\left(x-\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=\mu'(x)+o_x(1),$$

или, другими словами, для почти всех x

$$\mu\left(x+\frac{1}{n}\right)-\mu\left(x-\frac{1}{n}\right)=O_x\left(\frac{1}{n}\right).$$

Поэтому почти всюду на $E\cap(a+\varepsilon,\ b-\varepsilon)$ получаем неравенства

$$\sum_{\nu=n_\varepsilon}^{n}|I_{\nu_1}|\leqslant\sqrt{(n-n_\varepsilon+1)\sum_{\nu=n_\varepsilon}^{n}I_{\nu_1}^2}\leqslant\sqrt{n\sum_{\nu=1}^{n}\nu\,O_x\left(\frac{1}{n}\right)},$$

т. е.

$$\sum_{\nu=0}^{n}|I_{\nu_1}|=O_x(n). \tag{97}$$

Теперь оценим $\sum\limits_{\nu=0}^{n}|I_{\nu_2}|$. Для этого мы используем полиномиальный вид системы $\{\varphi_n(x)\}$, т. е. специальную структуру ядра $K_\nu(t,\ x)$, выраженную соотношением (82). Полагая

$$g_k(t,x)=\begin{cases}P_n(t,x)\,F_k(t,x) & \text{для}\quad t\in\left[a,\ x-\frac{1}{n}\right]\cup\left[x+\frac{1}{n},\ b\right],\\ 0 & \text{для остальных } t,\end{cases}$$

получаем оценку

$$\sum_{\nu=n_\varepsilon}^{n}|I_{\nu2}|\leqslant\sum_{k=1}^{r}\sum_{i,j=-p}^{p}\sum_{\nu=n_\varepsilon}^{n}|\gamma_{i,j,k}^{(\nu)}\varphi_{\nu+j}(x)|\left|\int_a^b g_k(t,x)\varphi_{\nu+i}(t)\,d\mu(t)\right|.$$

Учитывая условия $\gamma_{i,j,k}^{(\nu)}=O(1)$ и (95) и применяя неравенство Коши, находим, что

$$\sum_{\nu=n_\varepsilon}^{n}|I_{\nu2}|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{r}\sum_{i,j=-p}^{p}\left\{\sum_{\nu=n_\varepsilon}^{n}[\gamma_{i,j,k}^{(\nu)}]^2\varphi_{\nu+j}^2(x)\sum_{\nu=n_\varepsilon}^{n}\left[\int_a^b g_k(t,x)\varphi_{\nu+i}(t)\,d\mu(t)\right]^2\right\}^{1/2}=$$

$$=O_x(\sqrt{n})\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=-p}^{p}\left\{\sum_{\nu=n_\varepsilon}^{n}\left[\int_a^b g_k(t,x)\varphi_{\nu+i}(t)\,d\mu(t)\right]^2\right\}^{1/2}.$$

Стоящие под знаком суммы интегралы являются коэффициентами разложения функции $g_k(t, x)$, которая L^2_μ-интегрируема, ибо из условий $F_k(t, x) = O(|t-x|)$ и $|t-x| \geqslant n^{-1}$ следует неравенство $|g_k(t, x)| \leqslant P_n(t, x)\,|F_k(t, x)| = O(n)$, т. е. для каждого фиксированного n функции $g_k(t, x)$ ограничены. Поэтому, в силу неравенства Бесселя (5), мы получаем оценку

$$\sum_{\nu=n_\varepsilon}^{n}\left[\int_a^b g_k(t, x)\varphi_{\nu+i}(t)\,d\mu(t)\right]^2 \leqslant \int_a^b g_k^2(t, x)\,d\mu(t) =$$

$$= \left(\int_a^{x-\frac{1}{n}} + \int_{x+\frac{1}{n}}^{b}\right) P_n^2(t, x)\,F_k^2(t, x)\,d\mu(t) = O(1)\left(\int_a^{x-\frac{1}{n}} + \int_{x+\frac{1}{n}}^{b}\right)\frac{d\mu(t)}{(t-x)^2}.$$

Интегрируем по частям:

$$\int_a^{x-\frac{1}{n}} + \int_{x+\frac{1}{n}}^{b} =$$

$$= \left[\frac{\mu(t)-\mu(x)}{(t-x)^2}\right]_a^{x-\frac{1}{n}} + \left[\frac{\mu(t)-\mu(x)}{(t-x)^2}\right]_{x+\frac{1}{n}}^{b} + 2\left(\int_a^{x-\frac{1}{n}} + \int_{x+\frac{1}{n}}^{b}\right)\frac{\mu(t)-\mu(x)}{(t-x)^3}\,dt.$$

Так как в точках, где $\mu'(x)$ существует, т. е. для почти всех x, справедливо соотношение

$$\frac{\mu(t)-\mu(x)}{t-x} = O_x(1),$$

то мы выводим

$$\int_a^{x-\frac{1}{n}} + \int_{x+\frac{1}{n}}^{b} = O_x(n) + O_x(1)\left(\int_a^{x-\frac{1}{n}} + \int_{x+\frac{1}{n}}^{b}\right)\frac{dt}{(t-x)^2} = O_x(n).$$

Этим для почти всех $x \in E \cap [a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ доказана оценка

$$\sum_{\nu=n_\varepsilon}^{n} |I_{\nu 2}| = O_x\left(\sqrt{n}\right)\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=-p}^{p}\{O_x(n)\}^{1/2} = O_x(n). \qquad (98)$$

Из (97) и (98) для почти всех $x \in E \cap [a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ получаем равенство

$$\sum_{\nu=0}^{n} \int_a^b P_n(t,x)\, K_\nu(t,x)\, d\mu(t) = O_x(n).$$

Аналогично устанавливается, что

$$\sum_{\nu=0}^{n} \int_a^b N_n(t,x)\, K_\nu(t,x) d\mu(t) = O_x(n).$$

Поэтому из (96) для почти всех $x \in E \cap [a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ имеем $L_n^1(x) = O_x(1)$, причем $\varepsilon > 0$ как угодно мало, т. е. $L_n^1(x) = O_x(1)$ почти всюду на E.

Как нетрудно видеть из этого доказательства, указанные оценки остаются справедливыми равномерно на каждом подинтервале $[c+\varepsilon, d-\varepsilon]$ из интервала $[c, d] \subset [a, b]$, если только (95) выполняется равномерно на $[c, d]$ и если $\mu(t)$ на $[c, d]$ удовлетворяет условию Липшица $\mu(t)-\mu(x) = O(|t-x|)$, или, другими словами, если $\varrho(t) = \mu'(t)$ ограничена на $[c, d]$. Поэтому мы можем сделать следующее добавление к 3.4.2, которое будет нами использовано несколько позднее:

3.4.3. *Если система п $\{\varphi_n(x)\}$ имеет полиномиальный вид и если на интервале $[c, d] \subset [a, b]$ выполнены условия*

$$\sum_{k=0}^{n} \varphi_k^2(x) = O(n), \qquad 0 \leqslant \varrho(x) \leqslant \text{const},$$

то на каждом подинтервале $[c+\varepsilon, d-\varepsilon]$ из (c, d) справедливо соотношение $L_n^1(x) = O(1)$.

Если опустить требование (95), т. е. предполагать только полиномиальный вид ортонормированной системы, то можно сформулировать теоремы о суммируемости, которые до некоторой степени будут все-таки превосходить по силе общие теоремы о суммируемости. Действительно, по теореме 1.5.1 для всякой ортонормированной системы почти всюду справедлива оценка

$$\sum_{k=0}^{n} \varphi_k^2(x) = o_x(\lambda_n),$$

не зависящая от выбора неубывающей последовательности положительных чисел $\{\lambda_n\}$ со сходящимся рядом $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{-1}$. Таким образом, если при доказательстве теоремы 3.4.2 условие (95) заменить этой оценкой, то мы убедимся в справедливости равенства $L_n^1(x) = o_x\left(\sqrt{\frac{\lambda_n}{n}}\right)$. Обобщая теорему 3.3.3, мы получим тогда следующую теорему:

3.4.4. *Если ортонормированная система $\{\varphi_n(x)\}$ имеет полиномиальный вид и если для неубывающей последовательности положительных чисел $\{\lambda_n\}$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{-1}$ сходится, то при условии*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \sqrt{\frac{\lambda_n}{n}} < \infty$$

ортогональный ряд (94) *почти всюду* $(C, \alpha > 0)$-*суммируем.*

В качестве примера применения доказанных выше теорем мы выведем одну очень простую теорему о суммируемости разложений по ортогональным полиномам:

3.4.5. *Если весовая функция $\varrho(x) \geqslant 0$ почти всюду на интервале $[c, d] \subset (a, b)$ удовлетворяет условию $\varrho(x) \geqslant \varrho_0 > 0$ и если $\{p_n(x)\}$ — ортонормированная с весом $\varrho(x)$ полиномиальная система, то разложение функции $f \in L^2_{\varrho(x)}$*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(x) \sim f(x)$$

$(C, \alpha > 0)$-*суммируемо почти всюду на* (c, d).

В самом деле, так как $\varrho(x) \geqslant \varrho_0 > 0$ на $[c, d]$, то, в силу 1.5.2, мы имеем

$$\sum_{k=0}^{n} p_k^2(x) \leqslant C_\varepsilon n$$

на любом внутреннем к (c, d) подинтервале $[c+\varepsilon, d-\varepsilon]$, где постоянная C_ε зависит от $\varepsilon > 0$. Стало быть, на $[c+\varepsilon, d-\varepsilon]$ справедлива оценка (95); кроме того, так как $f \in L^2_{\varrho(x)}$, то ряд Σc_n^2 также сходится. Таким образом, выполнены все условия теоремы 3.4.1, откуда и следует наше утверждение.

Хотя теоремы этого параграфа в данных нами общих формулировках и являются новыми, тем не менее метод их доказательства совсем не нов: он неоднократно применялся в доказательствах различных теорем о сильной суммируемости рядов Фурье и рядов по ортогональным полиномам. Основная идея, а именно представление интеграла

$I_{\nu 2}$ в качестве коэффициента разложения L^2-интегрируемой функции, встречается, по-видимому, впервые у Карлемана [1]. Эта идея использовалась им при исследовании сильной суммируемости рядов Фурье. Затем Тандори [2] и [3] применил эти методы к сильной суммируемости рядов по ортогональным полиномам при условии $p_n(x) = O(1)$ на $[c, d]$. В связи с этим Фрайд [1] доказал, что требование $p_n(x) = O(1)$ можно заменить условием $\sum\limits_{k=0}^{n} p_k^2(x) = O(n)$ на $[c, d]$; им доказана теорема 3.4.5. Ход доказательства наших общих теорем мы заимствовали из названных работ.

Вероятно, небезынтересно заметить, что вытекающая из 3.4.1 $(C, \alpha > 0)$-суммируемость ряда Фурье L^2-интегрируемой функции не является следствием теорем § 2. Именно по теореме 3.2.2 этот ряд и $(C, \alpha > 0)$-суммируем почти всюду при любой перестановке членов всякой тригонометрической системы, для которой W-система является сильно мультипликативной ортогональной подсистемой. Однако в естественном порядке тригонометрическая система не будет W-системой. В самом деле, в противном случае по теореме Сидона[1] [2] существовал бы тригонометрический ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \varrho_n \cos(nx + \alpha_n)$ со свойствами

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \varrho_n > 0$$

и

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=0}^{n} \varrho_n \cos(kx + \alpha_n) \right| dx = O(1).$$

Согласно же теореме Хельсона [1], последняя оценка влечет равенство $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$ и, стало быть, тригонометрическая система $\{1;\ \cos nx, \sin nx\}$ не может быть W-системой.

Было бы ошибочно предполагать, что ряд Фурье L^2-интегрируемой функции $(C, \alpha > 0)$-суммируем при любой перестановке его членов. Тогда он был бы и почти всюду сходящимся при любой перестановке членов (см. Качмаж [4]), но имеется противоречащий этому пример Колмогорова для ряда Фурье L^2-интегрируемой функции, который при подходящей перестановке членов расходится почти всюду (см. Колмогоров—Меньшов [1][2].

---

[1] Хотя Сидон высказал свою теорему только для систем Уолша $\{\mathfrak{w}_\gamma(x)\}$, однако в доказательстве он использует только то, что $\{\mathfrak{w}_\gamma(x)\}$ является нормированной W-системой, значения функций которой заключены между —1 и 1.

[2] Колмогоров А. Н. привел это последнее утверждение (пример) без доказательства. Краткая схема доказательства этого утверждения впервые приведена З. Загорским (*C. r. Acad. sci.* 251 (1960), стр. 501—503). Подробное доказательство этого утверждения (а также и некоторых других утверждений в этом направлении) дано П. Л. Ульяновым (см. *Докл. АН СССР*, 137, № 4 (1961), стр. 786—789, и «*Успехи матем. наук*», 16, № 3 (1961), стр. 61—142). — *Прим. перев.*

§ 5. Порядок роста функций Лебега

Как уже отмечалось, с помощью функций Лебега часто можно получить более сильный критерий сходимости или суммируемости, чем полученный общими методами теории рядов; правда, это только при том условии, что функции Лебега растут достаточно медленно, как, например, в случае ограниченных систем, имеющих полиномиальный вид, для которых и справедливы теорема сходимости 3.1.4 и теорема суммируемости 3.4.1. Поэтому целесообразно более подробно исследовать порядок роста функций Лебега. Однако первые грубые оценки не приводят к существенным результатам.

3.5.1. *Если монотонно возрастающая последовательность положительных чисел* $\{\lambda_n\}$ *удовлетворяет условию* $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{-1} < \infty$, *то функции Лебега ортонормированной системы* $\{\varphi_n(x)\}$ *почти всюду имеют порядок роста*

$$L_n(x) = o_x(\sqrt{\lambda_n}).$$

Если же система $\{\varphi_n(x)\}$ *на множестве* E *удовлетворяет условию*

$$\sum_{k=0}^{n} \varphi_k^2(x) = O(n),$$

то в точках $x \in E$ *этот порядок роста можно понизить до* $L_n(x) = O(\sqrt{n})$.

Действительно, из неравенства Шварца следует оценка

$$L_n(x) \leq \left\{ \int_a^b d\mu(t) \int_a^b \left[\sum_{k=0}^{n} \varphi_k(t)\varphi_k(x) \right]^2 d\mu(t) \right\}^{1/2} =$$

$$= \left\{ (\mu(b) - \mu(a)) \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{k=0}^{n} \varphi_k^2(x) \right\}^{1/2},$$

из которой непосредственно вытекает наше второе утверждение, в то время как первое доказывается применением 1.5.1.

Несмотря на грубость полученной оценки, дальнейшее продвижение в общем случае невозможно. С этой целью в качестве примера неулучшаемости второй оценки мы приведем систему Радемахера. Именно, справедлива следующая теорема:

3.5.2. *За исключением, может быть, счетного множества двоично-рациональных точек интервала* [0, 1], *точный порядок роста функций Лебега системы Радемахера есть* $\sqrt{n}$.

Пусть x_0 — фиксированная двоично-иррациональная точка. Тогда $K_1(t, x_0) = r_1(t)r_1(x_0)$ принимает оба значения $+1$ и -1 в некоторых интервалах длины $\frac{1}{2}$. Подсчитывая $K_2(t, x_0) = K_1(t, x_0) + r_2(t)r_2(x_0)$ в том интервале, где $K_1(t, x_0) = 1$, мы получаем $K_2(t, x_0) = 2$ или 0, причем ядро $K_2(t, x_0)$ принимает каждое из этих двух значений в интервалах общей длины $\frac{1}{2^2}$. Точно так же в том интервале, где $K_1(t, x_0) = -1$, мы находим $K_2(t, x_0) = -2$ или 0, причем каждое из этих значений принимается в интервалах общей длины $\frac{1}{2^2}$. Таким образом, ядро $K_2(t, x_0)$ принимает значения $2, 0, -2$ в интервалах общей длины соответственно $\frac{1}{2^2}, 2\cdot\frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^2}$.

Если этот процесс мы продолжим от $K_m(t, x_0)$ к $K_{m+1}(t, x_0)$, то для $K_n(t, x_0)$ получим такую таблицу значений:

$$-n, \ -n+2, \ -n+4, \ldots, \ n-2, \ n,$$

принимаемых в интервалах с общей длиной соответственно

$$\binom{n}{0}\frac{1}{2^n}, \ \binom{n}{1}\frac{1}{2^n}, \ \binom{n}{2}\frac{1}{2^n}, \ldots, \ \binom{n}{n-1}\frac{1}{2^n}, \ \binom{n}{n}\frac{1}{2^n}.$$

Обозначая через $\left[\frac{n}{2}\right]$ целую часть от числа $\frac{n}{2}$, мы получаем отсюда соотношение

$$L_n(x_0) = \int_0^1 |K_n(t, x_0)|\,dt =$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}}\left\{n\binom{n}{0} + (n-2)\binom{n}{1} + \ldots + \left(n - 2\left[\frac{n}{2}\right]\right)\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}\right\}.$$

Мы видим, что если x есть двоично иррациональная точка интервала $(0, 1)$, то $L_n(x)$ не зависит от x. Для оценки константы Лебега $L_n = L_n(x)$ снизу мы в правую часть доказанного выше равенства

$$L_{2m+1} + 2m + 1 = 2m + 1 + \frac{1}{2^{2m}}\left\{(2m+1)\binom{2m+1}{0} + \right.$$

$$\left. + (2m-1)\binom{2m+1}{1} + \ldots + (2m+1)\binom{2m+1}{m}\right\}$$

подставим значение

$$2m+1=\frac{2m+1}{2^{2m}}\frac{2^{2m+1}}{2}=\frac{1}{2^{2m}}\left\{(2m+1)\binom{2m+1}{0}+\right.$$
$$\left.+(2m+1)\binom{2m+1}{1}+\ldots+(2m+1)\binom{2m+1}{m}\right\},$$

и, используя известные свойства биномиальных коэффициентов, получим

$$L_{2m+1}+2m+1=\frac{1}{2^{2m}}\left\{(4m+2)\binom{2m+1}{0}+4m\binom{2m+1}{1}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+(2m+2)\binom{2m+1}{m}\right\}=$$
$$=\frac{1}{2^{2m-1}}\left\{(2m+1)\binom{2m+1}{0}+2m\frac{(2m)!\,(2m+1)}{1!\,(2m)!}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+(m+1)\frac{(2m)!\,(2m+1)}{m!\,(m+1)!}\right\}=$$
$$=\frac{2m+1}{2^{2m}}\left\{\binom{2m}{0}+\binom{2m}{1}+\ldots+\binom{2m}{m+1}+\ldots+\binom{2m}{2m}\right\}+$$
$$+\frac{2m+1}{2^{2m}}\binom{2m}{m}=2m+1+\frac{2m+1}{2^{2m}}\binom{2m}{m},$$

т. е.

$$L_{2m+1}=\frac{2m+1}{2^{2m}}\binom{2m}{m}.$$

Применяя формулу Валлиса

$$\frac{2^{2m}(m!)^2}{(2m)!}=\sqrt{(m+\theta_m)\pi}\qquad\left(0<\theta_m<\frac{1}{2}\right),$$

мы находим

$$\frac{2m+1}{2^{2m}}\binom{2m}{m}=\frac{2m+1}{2^{2m}}\frac{(2m)!}{(m!)^2}=\frac{2m+1}{\sqrt{(m+\theta_m)\pi}},$$

а потому

$$L_{2m+1}>\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{m+\frac{1}{2}}.$$

Таким образом, требуемая оценка $L_n \geqslant \mathrm{const}\sqrt{n}$ доказана в случае нечетных n. Наше утверждение будет полностью доказано, если мы установим равенство $L_{2m+2} = L_{2m+1}$. Это действительно так, ибо, используя формулу $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$, мы получаем

$$L_{2m+2} = \frac{1}{2^{2m+1}} \left\{ (2m+2)\binom{2m+2}{0} + 2m\binom{2m+2}{1} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + 2\binom{2m+2}{m} \right\} =$$
$$= \frac{1}{2^{2m}} \left\{ (m+1)\binom{2m+1}{0} + m\left[\binom{2m+1}{0} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \binom{2m+1}{1}\right] + \ldots + \left[\binom{2m+1}{m-1} + \binom{2m+1}{m}\right]\right\} =$$
$$= \frac{1}{2^{2m}} \left\{ (2m+1)\binom{2m+1}{0} + (2m-1)\binom{2m+1}{1} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + 3\binom{2m+1}{m-1} + \binom{2m+1}{m} \right\} = L_{2m+1},$$

чем и завершается наше доказательство.

Итак, мы показали, что для ограниченных ортонормированных систем утверждение 3.5.1 не может быть улучшено. Докажем теперь неулучшаемость в общем случае и первой оценки. Это означает, что разработанные в предыдущих параграфах методы не всегда приводят к лучшим критериям сходимости, чем критерии сходимости общей теории рядов, рассмотренные в гл. II. Тем не менее, привлекая функции Лебега, для некоторых специальных ортогональных рядов можно получить удовлетворительные результаты. Теперь мы установим такую теорему:

3.5.3. *Пусть произвольная монотонно стремящаяся к бесконечности последовательность чисел $\{\lambda_n\}$ удовлетворяет условию*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} = \infty. \tag{99}$$

Тогда можно построить такую ортонормированную систему $\{\varphi_n(x)\}$, что ее функции Лебега имеют почти всюду точный порядок роста λ_n, т. е. почти всюду выполняются соотношения

$$L_n(x) = O_x(\lambda_n), \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{L_n(x)}{\lambda_n} > 0.$$

К сожалению, доказательство этой теоремы Тандори [7] очень длинное и сложное; оно основано на той же самой идее, что и доказательство 2.4.2. Для проведения этого доказательства нам необходимо несколько вспомогательных теорем.

3.5.4. *Если натуральные числа q и r удовлетворяют условию*

$$2r/2^q \leqslant 1,$$

то, за исключением двоично рациональных точек при любом натуральном p справедлива оценка

$$\int\limits_{2r/2^q}^{2} \left| \sum_{k=q}^{q+p-1} r_k(t) r_k(x) \right| dt > \frac{\sqrt{p}}{2}, \tag{100}$$

где $r_k(x)$ — k-я функция Радемахера, продолженная периодически на интервал $[0, 2]$.

На интервале $\left[\frac{2r}{2^q}, 2\right]$ функция $r_q(t)r_q(x)$ принимает значение $+1$ на подинтервалах с общей длиной $\frac{2^{q+1}-2r}{2^{q+1}}$ и значение -1 на подинтервалах с той же длиной. Как и в доказательстве теоремы 3.5.2, мы видим, что функция $r_q(t)r_q(x) + r_{q+1}(t)r_{q+1}(x)$ при фиксированном двоично иррациональном x принимает значения 2, 0, -2 на системе интервалов, общие длины которых равны соответственно

$$\frac{2^{q+1}-2r}{2^{q+2}},\ 2\,\frac{2^{q+1}-2r}{2^{q+2}},\ \frac{2^{q+1}-2r}{2^{q+2}}.$$

Отсюда и из правила построения функций Радемахера с индексом $> q$ (снова как и при доказательстве 3.5.2) по индукции убеждаемся в том, что кусочно-постоянная функция

$$\sum_{k=q}^{q+p-1} r_k(t) r_k(x)$$

принимает значения $p, \ldots, p-2l, \ldots, -p$ в системе интервалов с общими длинами

$$\binom{p}{0}\frac{2^{q+1}-2r}{2^{q+p}}, \ldots, \binom{p}{l}\frac{2^{q+1}-2r}{2^{q+p}}, \ldots, \binom{p}{p}\frac{2^{q+1}-2r}{2^{q+p}}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\frac{2r}{2^q}}^{2} \left| \sum_{k=q}^{q+p-1} r_k(t) r_k(x) \right| dt = \frac{2^{q+1} - 2r}{2^q} L_p, \tag{101}$$

где

$$L_p = \frac{1}{2^{p-1}} \left\{ p \binom{p}{0} + (p-2) \binom{p}{1} + \ldots + \left(p - 2\left[\frac{p}{2}\right]\right) \binom{p}{\left[\frac{p}{2}\right]} \right\}.$$

Как уже отмечалось в доказательстве 3.5.2, имеет место неравенство

$$L_{2m+2} = L_{2m+1} > \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{m + \frac{1}{2}},$$

а потому, учитывая условие $\frac{2r}{2^q} \leqslant 1$, из (101) мы получаем требуемое соотношение (100).

3.5.5. *Если $C \geqslant 1$ и p—натуральное число, то на интервале* $[0, 2]$ *можно построить p-членную ортонормированную систему $\{h_k(C, p; x)\}$, состоящую из ступенчатых функций, для которых выполняются соотношения*

$$\int\limits_0^2 h_k(C, p; x)\, dx = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, p), \tag{102}$$

$$\int\limits_0^2 \left| \sum_{k=1}^{l} h_k(C, p; t)\, h_k(C, p; x) \right| dt < \sqrt{2Cp} \qquad (l = 1, 2, \ldots, p). \tag{103}$$

Кроме того, на $[0, 2]$ *существует множество $M(C)$ с мерой*

$$|M(C)| > \frac{1}{2C} \tag{104}$$

такое, что для $x \in M(C)$ справедлива оценка снизу

$$\int\limits_0^2 \left| \sum_{k=1}^{p} h_k(C, p; t)\, h_k(C, p; x) \right| dt > \frac{1}{8} \sqrt{2Cp}. \tag{105}$$

Выберем натуральные числа q и r так, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{2^q}{2r+1} < C \leqslant \frac{2^q}{2r}, \tag{106}$$

и тогда при $k = 1, 2, \ldots, p$ полагаем

$$h_k(C, p; x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2^{q-2}}{r}}\, r_{q+k-1}(x), & x \in \left[0, \dfrac{2r}{2^q}\right], \\ \dfrac{r_{q+k-1}(x)}{\sqrt{4 - \dfrac{r}{2^{q-2}}}}, & x \in \left(\dfrac{2r}{2^q}, 2\right]. \end{cases}$$

Как следует непосредственно из этого определения, функции $h_k(C, p; x)$ удовлетворяют условию (102) и образуют p-членную ортонормированную систему. Применяя неравенство Шварца и учитывая ортонормированность системы, получаем оценку

$$\int_0^2 \left| \sum_{k=1}^{l} h_k(C, p; t)\, h_k(C, p; x) \right| dt \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{2} \left\{ \int_0^2 \left[\sum_{k=1}^{l} h_k(C, p; t)\, h_k(C, p; x) \right]^2 dt \right\}^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{2} \left\{ \sum_{k=1}^{l} h_k^2(C, p; x) \right\}^{1/2} \leqslant \sqrt{2l}\, \max \left\{ \sqrt{\frac{2^{q-2}}{r}}, \frac{1}{\sqrt{4 - \dfrac{r}{2^{q-2}}}} \right\}. \tag{107}$$

Используя левую часть неравенства (106), находим

$$\frac{2^{q-2}}{r} = \frac{2^q}{2r+2r} < \frac{2^q}{2r+1} < C,$$

а из правой части и из неравенства $C \geqslant 1$ следует оценка

$$\frac{1}{4 - \dfrac{r}{2^{q-2}}} = \frac{1}{2}\, \frac{1}{2 - \dfrac{2r}{2^q}} \leqslant \frac{1}{2}\, \frac{1}{2 - \dfrac{1}{C}} = \frac{1}{2}\, \frac{C}{2C-1} \leqslant \frac{C}{2}.$$

Стало быть,

$$\max \left\{ \sqrt{\frac{2^{q-2}}{r}}, \frac{1}{\sqrt{4 - \dfrac{r}{2^{q-2}}}} \right\} < C,$$

а потому из (107) вытекает неравенство (103). Выберем теперь в качестве множества $M(C)$ множество тех точек интервала $\left(0, \frac{2r}{2^q}\right)$, в которых $h_k(C, p; x) \not\to 0$. Тогда (104) следует из (106). Для доказательства (105) рассмотрим неравенства

$$\frac{2^{q-2}}{r} = \frac{1}{2}\,\frac{2^q}{2r} \geqslant \frac{C}{2}, \qquad \frac{1}{4 - \frac{r}{2^{q-2}}} > \frac{1}{4},$$

которые вместе с определением функций $h_k(C,p;x)$ дают следующую оценку снизу:

$$\int_0^2 \left| \sum_{k=1}^{p} h_k(C, p;\, t)\, h_k(C, p;\, x) \right| dt \geqslant$$

$$\geqslant \int_{\frac{2r}{2^q}}^{2} \left| \sum_{k=1}^{p} h_k(C, p;\, t)\, h_k(C, p;\, x) \right| dt =$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{2^{q-2}}{r}}{4 - \frac{r}{2^{q-2}}}} \int_{\frac{2r}{2^q}}^{2} \left| \sum_{k=q}^{q+p-1} r_k(t)\, r_k(x) \right| dt > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{C}{2}} \int_{\frac{2r}{2^q}}^{2} \left| \sum_{k=q}^{q+p-1} r_k(t)\, r_k(x) \right| dt.$$

Так как $\frac{2r}{2^q} \leqslant \frac{1}{C} \leqslant 1$, то последний интеграл, в силу 3.5.4, оценивается снизу через $\frac{\sqrt{p}}{2}$, т. е. получаем (105), и наша теорема полностью установлена.

3.5.6. *Пусть $I = [u, v]$ — произвольный интервал и число $C \geqslant 1$. Для любого натурального числа p можно построить p-членную систему $\{h_k(C, p, I;\, x)\}$ ступенчатых на $[u, v]$ функций, удовлетворяющих условиям*

$$\int_I h_k(C, p, I;\, x)\, dx = 0, \tag{108}$$

$$\int_I h_i(C, p, I; x)\, h_j(C, p, I; x)\, dx = \begin{cases} 0 & (i \neq j), \\ |I| & (i = j), \end{cases} \tag{109}$$

$$\int_I \left| \sum_{k=1}^{l} h_k(C, p, I; t)\, h_k(C, p, I; x) \right| dt < |I| \sqrt{2Cp} \tag{110}$$

при $l = 1, 2, \ldots, p$ *и* $u < x < v$.

Кроме того, на I *существует множество* $M(C, I)$ *с мерой*

$$|M(C, I)| > \frac{|I|}{4C} \tag{111}$$

такое, что для $x \in M(C, I)$ *справедлива оценка снизу*

$$\int_I \left| \sum_{k=1}^{p} h_k(C, p, I; t)\, h_k(C, p, I; x) \right| dt \geqslant \frac{|I|}{8} \sqrt{2Cp}. \tag{112}$$

Действительно, пусть

$$h_k(C, p, I; x) = \begin{cases} \sqrt{2}\, h_k\left(C, p; 2\dfrac{x-u}{v-u}\right) & \text{при} \quad u < x < v, \\ 0 & \text{при остальных } x \end{cases}$$

и пусть $M(C, I)$ есть множество, полученное из определенного в 3.5.5 множества $M(C)$ с помощью преобразования $y = \frac{v-u}{2}x + u$. Тогда соотношения (108)—(112) следуют из ортонормированности системы $\{h_k(C, p; x)\}$ и, соответственно, из соотношений (102)—(105).

3.5.7. *Для каждой монотонно стремящейся к бесконечности последовательности положительных чисел* $\{\lambda_n\}$ *можно выбрать монотонную последовательность* $\{\mu_n\}$ *и возрастающую последовательность индексов* $\{N_m\}$ *так, что выполняются условия:*

$$\lambda_n \leqslant \mu_n \leqslant (2^6 + 1)\, \lambda_n, \tag{113}$$

$$\mu_{N_m} \leqslant \frac{1}{2^6 + 1} \mu_{N_{m+1}}, \tag{114}$$

а если $N_{m+1} - N_m > 1$, *то, кроме того,*

$$\mu_{N_{m+1}} \leqslant 2(2^6 + 1)\, \mu_{N_m}. \tag{115}$$

Пусть $N_0 = 0$, $N_1 = 1$ и $\mu_0 = 0$, $\mu_1 = \lambda_1$. Продолжим теперь построение по индукции. Предположим, что уже определены $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{N_k}$ и $N_1, N_2, \ldots, N_k$, причем (113) выполнено для индексов $n = 1, 2, \ldots, N_k$, а (114) и (115) для индексов $m = 1, 2, \ldots, k-1$. Тогда через $\overline{N}_{k+1}$ обозначим наименьшее целое число $\geqslant N_k + 1$, для которого выполняется неравенство

$$\mu_{N_k} \leqslant \frac{1}{2^6+1}\lambda_{\overline{N}_{k+1}}.$$

Если $\overline{N}_{k+1} = N_k + 1$ или $\lambda_{\overline{N}_{k+1}} \leqslant 2(2^6+1)\mu_{N_k}$, то мы полагаем $N_{k+1} = \overline{N}_{k+1}$ и $\mu_n = \lambda_n$ при $N_k < n \leqslant N_{k+1}$. Но если $\overline{N}_{k+1} > N_k + 1$ и $\lambda_{\overline{N}_{k+1}} > 2(2^6+1)\mu_{N_k}$, то полагаем $N_{k+1} = \overline{N}_{k+1} - 1$ и $\mu_n = \lambda_n$ при $N_k < n < N_{k+1}$ и, кроме того, $\mu_{N_{k+1}} = (2^6+1)\mu_{N_k}$. Теперь в обоих случаях (113) выполняется уже и для индексов $N_k + 1, \ldots$ $\ldots, N_{k+1}$, тогда как (114) и (115) выполняются для индекса $m = k$. Этим и закончено доказательство теоремы.

3.5.8. *На интервале* $[a, b]$ *существует ортонормированная система* $\{\varphi_n(x)\}$ *ступенчатых функций и последовательность измеримых множеств* $\{M_m\}$, *для которых выполняются следующие условия:*

$$\int_a^b \left| \sum_{n=N_{m-1}+1}^{N_{m-1}+q} \varphi_n(t)\varphi_n(x) \right| dt \leqslant 2\sqrt{2}\,\mu_{N_m} \tag{116}$$

$$(q = 1, 2, \ldots, N_m - N_{m-1}),$$

$$\int_a^b \left| \sum_{n=N_{m-1}+1}^{N_m} \varphi_n(t)\varphi_n(x) \right| dt > \frac{1}{16}\sqrt{2}\mu_{N_m} \qquad \text{для } x \in M_m, \tag{117}$$

множества M_m *стохастически независимы и*

$$|M_m| > \frac{b-a}{4}\min\left\{1, \frac{N_m - N_{m-1}}{\mu_{N_m}^2}\right\}. \tag{118}$$

Доказательство будем вести по индукции. Во-первых, случай $m = 1$ мы докажем с помощью вспомогательной теоремы 3.5.6. Рассмотрим отдельно два подслучая:

$$\text{(I)} \quad \frac{\mu_{N_1}^2}{N_1 - N_0} \geqslant 1;$$

тогда применяем 3.5.6 с $C = C_1 = \frac{\mu_{N_1}^2}{N_1 - N_0}$ и $p_1 = N_1 - N_0$.

$$\text{(II)} \quad \frac{\mu_{N_1}^2}{N_1 - N_0} < 1;$$

здесь применяем 3.5.6 с $C = C_1 = 1$, и $p = p_1 = [\mu_{N_1}]^2$ ($[\alpha]$ означает целую часть от α).

В подслучае (I) мы положим $M_1 = M(C, [a, b])$ и

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}} h_n(C_1, p_1, [a, b]; x) \qquad (n = 1, 2, \ldots, p_1). \tag{119}$$

Согласно (109), функции $\varphi_n(x)$ образуют p_1-членную ортонормированную систему. Из (111) следует справедливость (118) при $m = 1$, а справедливость (116) и (117) вытекает из (110) и (112).

В подслучае (II) нам нужно определить еще $\varphi_n(x)$ также и для индексов $[\mu_{N_1}]^2 < n \leqslant N_1 - N_0$. Поступим следующим образом: Существует разбиение интервала $[a, b]$ на конечное число подинтервалов $J_1, J_2, \ldots, J_s$ таких, что на каждом J_ϱ любая из определенных уже функций $\varphi_n(x)$ $(1 \leqslant n \leqslant [\mu_{N_1}]^2)$ является постоянной. Разделим J_ϱ на две половины J'_ϱ и J''_ϱ и для $l = 0, 1, \ldots, N_1 - [\mu_{N_1}]^2 - 1$ полагаем

$$\varphi_{[\mu_{N_1}]^2 + l + 1}(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}} \left[\sum_{\varrho=1}^{s} \chi_l(J'_\varrho, x) - \sum_{\varrho=1}^{s} \chi_l(J''_\varrho, x) \right]. \tag{120}$$

Здесь под символом $\chi_l(I, x)$ понимается следующее: Пусть определенные на интервале $[0, 1]$ функции Хаара $\chi_n^{(k)}(x)$ расположены в обычную последовательность и $\chi_l(x)$ есть l-я функция Хаара из этой последовательности. Тогда функция $\chi_l(I, x)$ представляет собой преобразованную на интервал $I = [u, v]$ l-ю функцию Хаара, т. е.

$$\chi_l(I, x) = \begin{cases} \chi_l\left(\dfrac{x-u}{v-u}\right) & \text{при} \quad u < x < v, \\ 0 & \text{при остальных } x. \end{cases}$$

Как мы уже видели в § 6 гл. I, ядро

$$K_n(t, x) = \sum_{l=0}^{m} \chi_l(t) \chi_l(x)$$

неотрицательно, а потому для функций Лебега системы Хаара имеем оценку $L_n(x) \leqslant 1$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Непосредственно отсюда выводим неравенство

$$\int\limits_I \left| \sum_{l=0}^{n} \chi_l(I, t)\, \chi_l(I, x) \right| dt \leqslant |I| \qquad (n = 0,\ 1, \ldots),$$

применяя которое к определенным в (120) функциям, находим

$$\int\limits_a^b \left| \sum_{l=[\mu_{N_1}]^2+1}^{n} \varphi_l(t)\varphi_l(x) \right| dt \leqslant 1 \qquad (n = [\mu_{N_1}]^2 + 1, \ldots, N_1).$$

Отсюда, из (110) и (109) в случае $m = 1$ следует (116), а из (112), (119) и (120) при предположении $\mu_1 = \lambda_1 \geqslant 16$ (это мы можем предполагать без ограничения общности) убеждаемся в справедливости (117). Кроме того, из определений (119) и (120) вытекает ортогональность друг другу функций $\varphi_n(x)$ и их нормировка. Этим наше утверждение при $m = 1$ доказано в обоих подслучаях.

Предположим теперь, что наше утверждение верно при всех $m \leqslant k$. Тогда разделим интервал $[a, b]$ на конечное число подинтервалов $I_1, I_2, \ldots, I_r$ так, чтобы на каждом подинтервале I_ϱ любая из функций $\varphi_n(x)$ $(1 \leqslant n \leqslant N_k)$ была постоянной. Снова рассмотрим два случая:

$$(\mathrm{I}^*) \qquad \frac{\mu^2_{N_{k+1}}}{N_{k+1} - N_k} \geqslant 1;$$

тогда применяем 3.5.6 с $C = C_{k+1} = \dfrac{\mu^2_{N_{k+1}}}{N_{k+1} - N_k}$ и $p = p_{k+1} = N_{k+1} - N_k$.

$$(\mathrm{II}^*) \qquad \frac{\mu^2_{N_{k+1}}}{N_{k+1} - N_k} < 1;$$

тогда применяем 3.5.6 с $C = C_{k+1} = 1$ и $p = p_{k+1} = [\mu_{N_{k+1}}]^2$.

В подслучае (I*) для $l = 1, 2, \ldots, p_{k+1}$ полагаем

$$\varphi_{N_k+l}(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}} \sum_{\varrho=1}^{r} h_l(C_{k+1}, p_{k+1}, I_\varrho; x)$$

и

$$M_{k+1} = \bigcup_{\varrho=1}^{r} M(C_{k+1}, I_\varrho).$$

Как легко видеть, множества M_1, $M_2, \ldots, M_k$, M_{k+1} стохастически независимы. В силу (111), выполняется (118), а согласно (108) и (109), система $\{\varphi_n(x)\}$ $(1 \leqslant n \leqslant N_k + p_{k+1})$ является ортонормированной; наконец, из (110) и (112) следуют неравенства (116) и (117).

В подслучае (II*) функции $\varphi_n(x)$ для $N_k + [\mu_{N_{k+1}}]^2 < n \leqslant \leqslant N_{k+1}$ мы определим точно так же, как и при $m = 1$: разбиваем интервал $[a, b]$ на конечное число подинтервалов $\bar{I}_1$, $\bar{I}_2, \ldots, \bar{I}_{\bar{r}}$) так, чтобы каждая из определенных ранее функций $\varphi_n(x)$ $(1 \leqslant n \leqslant N_k + [\mu_{N_{k+1}}]^2)$ была постоянной на любом из интервалов $\bar{I}_\varrho$. Затем интервал $\bar{I}_\varrho$ делим на две половины $\bar{I}'_\varrho$ и $\bar{I}''_\varrho$ и для $l = 0, 1, \ldots, N_{k+1} - N_k - [\mu_{N_{k+1}}]^2 - 1$ полагаем

$$\varphi_{N_k + [\mu_{N_{k+1}}]^2 + l + 1}(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}} \left[\sum_{\varrho=1}^{\bar{r}} \chi_l(\bar{I}'_\varrho, x) - \sum_{\varrho=1}^{\bar{r}} \chi_l(\bar{I}''_\varrho, x) \right].$$

Как и при $m = 1$, убеждаемся в том, что эти функции удовлетворяют условиям (116) и (117) и что система $\{\varphi_n(x)\}$ $(1 \leqslant n \leqslant \leqslant N_{k+1})$ является ортонормированной. Этим и завершается доказательство теоремы 3.5.8.

Теперь мы можем приступить к доказательству теоремы 3.5.3. Пусть n есть индекс, для которого $N_{k-1} < n \leqslant N_k$. Согласно (113), (114) и (116), для функций Лебега ортонормированной системы $\{\varphi_n(x)\}$ справедлива следующая оценка сверху:

$$L_n(x) \leqslant \sum_{m=1}^{k-1} \int_a^b \left| \sum_{\nu=N_{m-1}+1}^{N_m} \varphi_\nu(t)\varphi_\nu(x) \right| dt + \int_a^b \left| \sum_{\nu=N_{k-1}+1}^{n} \varphi_\nu(t)\varphi_\nu(x) \right| dt =$$

$$= O(\mu_{N_1} + \mu_{N_2} + \ldots + \mu_{N_{k-1}}) + O(\mu_{N_k}) = O(\mu_{N_k}) = O(\mu_n) = O(\lambda_n),$$

чем и доказано первое соотношение из 3.5.3. Далее, из (99), (113) и (115) следует соотношение

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{N_m - N_{m-1}}{\mu_{N_m}^2} = \infty.$$

Используя стохастическую независимость множеств M_m, из последнего соотношения и из (118) мы, как и при доказательстве 2.4.6, для меры множества $M = \overline{\lim_{m \to \infty}} M_m$ получаем равенство

$$|M| = b - a.$$

Пусть теперь x точка из M_m. Тогда, учитывая (113), (114), (116) и (117), мы получаем оценку:

$$L_{N_m}(x) \geqslant \int_a^b \left| \sum_{\nu=N_{m-1}+1}^{N_m} \varphi_\nu(t)\varphi_\nu(x) \right| dt - \sum_{k=1}^{m-1} \int_a^b \left| \sum_{\nu=N_{k-1}+1}^{N_k} \varphi_\nu(t)\varphi_\nu(x) \right| dt \geqslant$$

$$\geqslant 2\sqrt{2} \left(\frac{1}{2^5} \mu_{N_m} - \sum_{k=1}^{m-1} \mu_{N_k} \right) \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2^5} \mu_{N_m} \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2^5} \lambda_{N_m}.$$

Если $x \in M$, то эта оценка справедлива для бесконечно многих номеров m, а потому для почти всех x имеет место соотношение

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{L_n(x)}{\lambda_n} \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2^5}.$$

Этим доказано также и второе утверждение 3.5.3 и длинное доказательство этой теоремы закончено.

Общая оценка $L_n(x) = o_x(\sqrt{\lambda_n})$ в 3.5.1 установлена Чень Цзяньгуном [1] и Качмажем [4], в то время как оценка $L_n(x) = O(\sqrt{n})$ для ограниченных систем была доказана ранее Радемахером [1], которому принадлежит также и доказательство 3.5.2. Теорема 3.5.3 и необходимые для нее вспомогательные теоремы доказаны Тандори [7]. Он доказал также более общую теорему о том, что утверждение теоремы 3.5.3 остается справедливым, если $L_n(x)$ заменить на $L_n^\alpha(x)$ с произвольным $\alpha > 0$. Это означает, что теорема 3.5.1 не может быть улучшена ни для какого метода Чезаро сколь угодно большого порядка. Доказательство этой теоремы о порядке роста функций Лебега $L_n^\alpha(x)$ очень похоже на доказательство 3.5.3, однако требуются утомительные вычисления.

§ 6. Неулучшаемость коэффициентных критериев

Полученные до сих пор коэффициентные критерии имеют большей частью следующий вид: Если $\{\lambda(n)\}$ — монотонно возрастающая последовательность положительных чисел и если для коэффициентов ортогонального ряда $\sum c_n\varphi_n(x)$ справедливо соотношение $\sum c_n^2\lambda(n) < \infty$, то этот ортогональный ряд почти всюду сходится или суммируется. Условия сходимости такого вида мы называем коэффициентными критериями.

Как мы видели в гл. II, полученные с помощью методов общей теории рядов коэффициентные критерии в общем случае неулучшаемы. Однако можно было бы предполагать, что составляет исключение коэффициентный критерий теоремы 3.1.2, ибо в нем до некоторой степени принималось во внимание своеобразие ортонормированной системы $\{\varphi_n(x)\}$. Но совсем недавно Тандори [9] своими гибкими методами доказал, что это не так, т. е. теорема 3.1.2 в общем случае также не может быть улучшена. Относящаяся к этому теорема Тандори утверждает:

3.6.1. *Если монотонно стремящаяся к бесконечности последовательность положительных чисел $\{\lambda_n\}$ удовлетворяет условию*

$$\lambda_n = O(\log^2 n),$$

то существует ортонормированная система $\{\Phi_n(x)\}$ со свойствами:

Функции Лебега системы $\{\Phi_n(x)\}$ удовлетворяют на $[a, b]$ условию

$$L_n(x) = O(\lambda_n).$$

Для любой возрастающей последовательности положительных чисел $\{w(n)\}$ таких, что

$$w(n) = o(\lambda_n),$$

существует последовательность коэффициентов $\{c_n\}$, для которой

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 w(n) < \infty,$$

но ортогональный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \Phi_n(x)$$

всюду на $[a, b]$ расходится.

Доказательство основано на той же самой идее, что и доказательство 2.4.2 или 3.5.3, а поэтому мы по возможности будем делать краткие ссылки на соответствующие места предыдущих доказательств. Первая необходимая нам вспомогательная теорема является усилением 2.4.4:

3.6.2. *Пусть $p \geqslant 2$ — целое число и $I = [u, v]$ — произвольный интервал. Тогда на $[u, v]$ существует $2p$-членная система $\{g_l(p, I; x)\}$ кусочно-постоянных ортогональных друг* *другу функций со свойствами:*

1) $$\int_u^v g_l^2(p, I; x)\,dx = v - u.$$

2) *Для каждой точки x из полуоткрытого интервала*

$$F(I) = \left[u + 2\,\frac{v-u}{5},\; u + 3\,\frac{v-u}{5}\right)$$

существует зависящий от x индекс $m(x) < p$ такой, что функции $g_1(p, I; x), g_2(p, I; x), \ldots, g_{p+m(x)}(p, I; x)$ положительны и

$$\sum_{k=1}^{p+m(x)} g_k(p,\ I;\ x) \geqslant A\,\sqrt{p}\log p,$$

где постоянная $A > 0$ не зависит от p, I и x.

3) *Для всех $x \in [u, v]$ и $n = 1, 2, \ldots, 2p$ имеем*

$$\int_u^v \left|\sum_{l=1}^{n} g_l(p,\ I;\ t)\, g_l(p,\ I;\ x)\right| dt \leqslant B(v-u)\log^2 p,$$

где $B > 0$ не зависит от n, p, I и x.

Без условия 3) эта лемма совпадает с 2.4.4. Доказательство мы будем вести тем же самым путем, что и в 2.4.4, т. е. построим прежде всего $g_l(p,\ I;\ x)$ на $I = [0, 5]$, а затем линейным преобразованием отобразим $[0, 5]$ на $[u, v]$.

Рассмотрим определенные в 2.4.4 функции $f_{C,\,p,\,i}(t)$ с $C = 1$ и положим

$$g_{p,\,i}(t) = f_{1,\,p,\,i}(t).$$

Если снова обозначим

$$\delta_{i,\,j} = \int_0^4 g_{p,\,i}(t) g_{p,\,j}(t)\,dt$$

и при $l = 1, 2, \ldots, 2p$

$$\gamma_l^2 = \int_0^4 g_{p,\,l}^2(t)dt + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{l-1} |\delta_{k,\,l}| + \frac{1}{2}\sum_{k=l+1}^{2p} |\delta_{k,\,l}|,$$

то аналогично неравенству (34) в доказательстве 2.4.4 мы получаем

$$\frac{1}{A_1 p} \leqslant \gamma_l^2 \leqslant \frac{1}{A_2 \cdot p} \qquad (l = 1, 2, \ldots, 2p), \tag{121}$$

где $A_1, A_2, \ldots$ — не зависящие от p положительные постоянные.

Функции

$$\bar{g}_{p,l}(x) = \frac{1}{\gamma_l} g_{p,l}(x)$$

ортонормированы на [0, 5] и выполняют ту же самую роль, что и функции $\bar{f}_{C,p,l}(x)$ в доказательстве 2.4.4, т. е. функции $g_l(p, I; x) = \sqrt{5}\, \bar{g}_{p,l}\left(5\frac{x-u}{v-u}\right)$ удовлетворяют на $[u, v]$ условиям 1) и 2). Докажем теперь выполнение условия 3). С этой целью запишем

$$\int_0^5 \left| \sum_{l=1}^{n} \bar{g}_{p,l}(t)\, \bar{g}_{p,l}(x) \right| dt = \int_0^4 + \int_4^5 = R_1(x) + R_2(x).$$

Прежде всего, пусть x — точка из [0, 4]. Тогда x лежит в интервале $\left[\frac{k_0-1}{p}, \frac{k_0}{p}\right]$, где k_0 — зависящее от x целое число, заключенное между 1 и $4p$. Тогда из определения функции $g_{p,l}(t) = f_{1,p,l}(t)$ и из (121) следуют соотношения:

$$R_1(x) = \sum_{k=1}^{4p} \int_{\frac{k-1}{p}}^{\frac{k}{p}} \left| \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\gamma_l^2} \frac{1}{\left(k_0 - p - l - \frac{1}{2}\right)\left(k - p - l - \frac{1}{2}\right)} \right| dt \leqslant$$

$$\leqslant A_1 \sum_{k=1}^{4p} \sum_{l=1}^{n} \left| \frac{1}{\left(k_0 - p - l - \frac{1}{2}\right)\left(k - p - l - \frac{1}{2}\right)} \right| \leqslant$$

$$\leqslant A_3 + A_1 \sum_{\substack{k=1\\k\neq k_0}}^{4p} \frac{1}{|k-k_0|} \sum_{l=1}^{n} \left| \frac{1}{k_0 - p - l - \frac{1}{2}} - \frac{1}{k - p - l - \frac{1}{2}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant A_3 + A_1 \sum_{\substack{k=1\\k\neq k_0}}^{4p} \frac{1}{|k-k_0|} \sum_{l=1}^{n} \left(\frac{1}{\left|k_0 - p - l - \frac{1}{2}\right|} + \frac{1}{\left|k - p - l - \frac{1}{2}\right|} \right) =$$

$$= O(1) + O(\log p) \sum_{l=1}^{n} \left(\frac{1}{\left|k_0 - p - l - \frac{1}{2}\right|} + \frac{1}{\left|k - p - l - \frac{1}{2}\right|} \right) =$$

$$= O(\log^2 p).$$

Оценим $R_2(x)$. Прежде всего, из (121) следует неравенство

$$R_2(x) \leqslant A_1 p \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\left| k_0 - p - l - \frac{1}{2} \right|} \int_4^5 | g_{p,l}(t) | \, dt.$$

Подсчитывая справа стоящий интеграл, находим

$$\int_4^5 | g_{p,l}(t) | \, dt \leqslant \frac{4}{p},$$

т. е. $R_2(x) = O(\log p)$, а этим и доказана оценка $R_1(x) + R_2(x) = O(\log^2 p)$ при $x \in [0, 4]$.

Пусть теперь $x \in [4, 5]$. Тогда среди $2p$ $(2p-1)$ равных интервалов, на которые разделен интервал $[4, 5]$ (см. доказательство 2.4.4), существует один и только один интервал $I_{i,j}$, содержащий x, а потому имеется только две функции $g_{p,i}(x)$ и $g_{p,j}(x)$, которые в точке x не обращаются в нуль, и, как это следует из наших определений, модуль этих функций $\leqslant 3$. Стало быть,

$$\int_0^5 \left| \sum_{l=1}^{n} \bar{g}_{p,l}(t) \, \bar{g}_{p,l}(x) \right| dt \leqslant$$

$$\leqslant 2A_1 p \left\{ \int_0^5 | g_{p,i}(t) | \, dt + \int_0^5 | g_{p,j}(t) | \, dt \right\},$$

а поэтому из оценок

$$\int_4^5 | g_{p,l}(t) | \, dt = O\left(\frac{1}{p}\right)$$

и

$$\int_0^4 | g_{p,l}(t) | \, dt = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{4p} \frac{1}{\left| k - p - l - \frac{1}{2} \right|} = O\left(\frac{\log p}{p}\right)$$

мы выводим справедливость равенства $R_1(x) + R_2(x) = O(\log p)$ в случае $x \in [4, 5]$. Таким образом, для $x \in [0, 5]$ имеем $R_1(x) + R_2(x) = O(\log^2 p)$ и свойство 3) доказано.

3.6.3. *Пусть $\{M_k\}$ и $\{N_k\}$— две возрастающие последовательности натуральных чисел со свойством*

$$N_k + 2M_k \leqslant N_{k+1}$$

и пусть $M_0 = 2$, $N_0 = 0$, $M_k \geqslant 2$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Тогда существует ортонормированная система $\{\Phi_n(x)\}$ ступенчатых функций и последовательность $\{F_k\}$ измеримых множеств, которые удовлетворяют следующим условиям:

1*) *Множества F_k стохастически независимы и имеют меру*

$$|F_k| = \frac{b-a}{5}.$$

2*) *Для каждого $x \in F_k$ существует индекс $m_k(x) < M_k$ такой, что функции $\Phi_{N_k+1}(x), \ldots, \Phi_{N_k+M_k+m_k(x)}(x)$ имеют один и тот же знак и*

$$|\Phi_{N_k+1}(x) + \ldots + \Phi_{N_k+M_k+m_k(x)}(x)| \geqslant C\sqrt{M_k}\log M_k,$$

где $C > 0$ не зависит от k и x.

3*) *Для всех $x \in [a, b]$, $k = 0, 1, \ldots$ и $N_k \leqslant N < N_{k+1}$ справедлива оценка*

$$\int_a^b \left| \sum_{n=N_k+1}^{N} \Phi_n(t)\Phi_n(x) \right| dt = O(\log^2 M_k).$$

Расположенную в обычном порядке ортонормированную систему Хаара отобразим на интервал $[a, b]$ и n-ю функцию полученной последовательности обозначим через $\chi_n([a, b], x)$. Если мы положим

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}}\chi_{n-1}([a, b], x) \qquad (n = 1, 2, \ldots, N_1),$$

то эти функции образуют ортонормированную систему. Разобьем интервал $[a, b]$ на r подинтервалов $I_1, I_2, \ldots, I_r$, на которых определенные уже функции $\Phi_n(x)$ постоянны, и половины интервала I_ϱ обозначим через I'_ϱ и I''_ϱ. Применим теперь вспомогательную теорему 3.6.2 с $p = M_1$. Тогда при $l = 1, 2, \ldots, 2M_1$ полагаем

$$\Phi_{N_1+l}(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}}\left\{\sum_{\varrho=1}^{r} g_l(M_1, I'_\varrho; x) - \sum_{\varrho=1}^{r} g_l(M_1, I''_\varrho; x)\right\}$$

и
$$F_1 = \bigcup_{\varrho=1}^{r} [F(I'_\varrho) \cup F(I''_\varrho)].$$

Интервал $[a, b]$ снова разделим на $\bar{r}$ подинтервалов $\bar{I}_1, \bar{I}_2, \ldots, \bar{I}_{\bar{r}}$, на которых каждая из определенных функций $\Phi_n(x)$ постоянна, и через $\bar{I}'_\varrho$ и $\bar{I}''_\varrho$ обозначим половины интервала $\bar{I}_\varrho$. Тогда при $l = 0, 1, \ldots, N_2 - N_1 - 2M_1 - 1$ полагаем
$$\Phi_{N_1+2M_1+l+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}} \sum_{\varrho=1}^{\bar{r}} [\chi_l(\bar{I}'_\varrho, x) - \chi_l(\bar{I}''_\varrho, x)].$$

Следовательно, $\Phi_n(x)$ определены до номера $n = N_2$. Из определения $F(I)$ (см. 2*) в лемме 3.6.2) мы видим, что при $k = 1$ выполнено условие 1*). Далее, в силу 2), из 3.6.2, при $k = 1$ выполняется также и 2*). Кроме того, учитывая справедливое для системы Хаара соотношение
$$\int_I \left| \sum_{n=0}^{s} \chi_n(I, t)\, \chi_n(I, x) \right| dt \leqslant |I|$$
и сформулированное в 3.6.2 свойство 3), мы убеждаемся в справедливости 3*) в случае $k = 1$. Продолжим теперь доказательство нашей теоремы по индукции. Предположим, что свойства 1*), 2*) и 3*) доказаны при $i = 1, 2, \ldots, k-1$, и разобьем интервал $[a, b]$ на интервалы J_ϱ $(\varrho = 1, 2, \ldots, s)$, на которых все ранее определенные функции $\Phi_n(x)$ постоянны. Обозначая через J'_ϱ и J''_ϱ половины интервала J_ϱ, для $l = 1, 2, \ldots, 2M_k$ полагаем
$$\Phi_{N_k+l}(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}} \left\{ \sum_{\varrho=1}^{s} g_l(M_k, J'_\varrho; x) - \sum_{\varrho=1}^{s} g_l(M_k, J''_\varrho; x) \right\},$$
$$F_k = \bigcup_{\varrho=1}^{s} [F(J'_\varrho) \cup F(J''_\varrho)].$$

Чтобы определить $\Phi_n(x)$ при $N_k + 2M_k < n \leqslant N_{k+1}$, мы снова разделим $[a, b]$ на $\bar{s}$ интервалов $\bar{J}_\varrho$, на которых все наши функции $\Phi_n(x)$ постоянны. Тогда для $l = 0, 1, \ldots, N_{k+1} - N_k - 2M_k - 1$ полагаем
$$\Phi_{N_k+2M_k+l+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}} \sum_{\varrho=1}^{\bar{s}} \{\chi_l(\bar{J}'_\varrho, x) - \chi_l(\bar{J}''_\varrho, x)\}.$$

Справедливость 1*), 2*) и 3*) показывается аналогично предыдущему, и 3.6.3 доказана.

Чтобы, опираясь на установленные вспомогательные теоремы, доказать теорему 3.6.1, мы поступим точно так же, как и при доказательстве 3.5.7. Именно, определим возрастающую последовательность чисел $\{\mu(n)\}$ и возрастающую последовательность индексов $\{\nu_n\}$ ($\nu_n \geqslant 16$) так, чтобы выполнялись условия:

$$\text{a)} \qquad \lambda_n \leqslant \mu(n) \leqslant 2\lambda_n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

$$\text{b)} \qquad \mu(\nu_m) \leqslant \frac{1}{2}\mu(\nu_{m+1}) \qquad (m = 1, 2, \ldots,),$$

и если $\nu_{m+1} - \nu_m > 1$, то

$$\text{c)} \qquad \mu(\nu_{m+1}) \leqslant 4\mu(\nu_m) \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

Тогда для бесконечно многих m справедливы неравенства $\nu_{m+1} > 2\nu_m$, ибо в противном случае при некотором фиксиро ванном i мы имели бы

$$\nu_{m+i} \leqslant 2^m \nu_i \qquad (m = 1, 2, \ldots),$$

а потому из условия $\lambda_{\nu_{m+i}} \leqslant K \log^2 \nu_{m+i}$ с постоянным K и из a) следовало бы, что

$$\mu(\nu_{m+i}) \leqslant 2\lambda_{\nu_{m+i}} \leqslant 2K \log^2 \nu_{m+i} \leqslant 2K\,(m + \log \nu_i)^2,$$

но это противоречит вытекающему из b) неравенству

$$\mu(\nu_{m+i}) \geqslant 2^m \mu(\nu_i).$$

Положим $N_0 = 0$ и пусть $N_1 < N_2 < \ldots$ есть ряд из тех ν_m, для которых выполняется неравенство $\nu_{m+1} > 2\nu_m$. Тогда $N_{k+1} \geqslant 2N_k$ и из a) и b) следует соотношение

$$1 + \lambda_{N_1} + \ldots + \lambda_{N_k} \leqslant 1 + \mu(N_1) + \ldots + \mu(N_k) \leqslant$$
$$\leqslant 2\mu(N_k) \leqslant 4\lambda_{N_k} \qquad (122)$$

(без ограничения общности можно предполагать $\lambda(1) \geqslant 2$). Теперь с помощью N_k определим числа M_k. Пусть, прежде всего, $M_0 = 2$. Из a) и c) при $N_k = \nu_{m_k}$ следуют неравенства

$$\log^2\left[\frac{N_k}{2}\right] > \frac{1}{4}\log^2 N_k \geqslant \frac{1}{8K}\,\mu(N_k) \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{32K}\,\mu(\nu_{m_k+1}) \geqslant \frac{1}{32K}\,\mu(2N_k).$$

Пусть M_k есть наименьшее натуральное число ($\geqslant 2$), для которого выполняются соотношения

$$2M_k \leqslant N_k, \ \log^2 M_k \geqslant \frac{1}{32K}\mu(2N_k),$$

допустимые в силу предыдущих неравенств. Тогда из а) получаем

$$\log^2 M_k \geqslant \frac{1}{32K}\lambda_{N_k+2M_k}; \tag{123}$$

кроме того, из условия $N_{k+1} \geqslant 2N_k$ следует неравенство

$$N_k + 2M_k \leqslant N_{k+1},$$

т. е. последовательности $\{M_k\}$ и $\{N_k\}$ удовлетворяют требованиям теоремы 3.6.3. Применяя 3.6.3. с этими последовательностями чисел, мы определяем систему $\{\Phi_n(x)\}$. Пусть $N_k < n \leqslant N_{k+1}$. Тогда из свойства 3*) теоремы 3.6.3 для функций Лебега ортонормированной системы $\{\Phi_n(x)\}$ мы выводим оценку

$$L_n(x) \leqslant \sum_{m=0}^{k-1} \int_a^b \left| \sum_{j=N_m+1}^{N_{m+1}} \Phi_j(t)\,\Phi_j(x) \right| dt + \int_a^b \left| \sum_{j=N_k+1}^{n} \Phi_j(t)\Phi_j(x) \right| dt =$$

$$= O\,(1 + \log^2 M_1 + \ldots + \log^2 M_k). \tag{124}$$

Но при достаточно больших j имеем

$$\log^2 (M_j - 1) < \frac{1}{32K}\mu(2N_j).$$

Поэтому из а) и с) следует неравенство

$$\log^2 M_j = \log^2 (M_j - 1) + [\log^2 M_j - \log^2 (M_j - 1)] <$$

$$< \frac{1}{32K}\mu(2N_j) + 1 < \frac{1}{16K}\mu(\nu_{m_j+1}) \leqslant \frac{1}{4K}\mu(\nu_{m_j}) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2K}\lambda_{N_j} < \lambda_{N_j},$$

ибо мы можем предполагать $K \geqslant 1$. Из (122) и (124) находим

$$L_n(x) = O(1 + \lambda_{N_1} + \ldots + \lambda_{N_k}) = O(\lambda_{N_k}) = O(\lambda_n).$$

Этим и доказано требование теоремы 3.6.1 относительно $L_n(x)$.

Пусть теперь $\{w(n)\}$ — возрастающая последовательность чисел, для которой $w(n)=o(\lambda_n)$. Из последовательности $\{N_k\}$ выберем возрастающую подпоследовательность $\{N_{k_\nu}\}$ так, чтобы

$$\frac{w(n)}{\lambda_n}\leqslant\frac{1}{\nu^2}\quad\text{при}\quad n>N_{k_\nu}.$$

Положим теперь

$$c_n=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{M_{k_\nu}}\log^2 M_{k_\nu}} & \text{при } N_{k_\nu}<n\leqslant N_{k_\nu}+2M_{k_\nu},\ \nu=1,2,\ldots,\\ 0 & \text{при остальных } n.\end{cases}$$

Тогда из (123) находим

$$\sum_{n=N_{k_1}+1}^{\infty}c_n^2w(n)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{n=N_{k_\nu}+1}^{N_{k_\nu}+2M_{k_\nu}}c_n^2\lambda_n\frac{w(n)}{\lambda_n}\leqslant 2\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}\frac{\lambda_{N_{k_\nu}+2M_{k_\nu}}}{\log^2 M_{k_\nu}}\leqslant$$
$$\leqslant 64\,K\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}<\infty,$$

т. е. требование 3.6.1 относительно коэффициентов c_n также выполняется.

По аналогии с окончанием доказательства 2.4.2, при любом $x\in F_{k_\nu}$ мы убеждаемся в существовании индекса $m_{k_\nu}(x)$ такого, что функции $\Phi_{N_{k_\nu}+1}(x),\ldots,\Phi_{N_{k_\nu}+M_{k_\nu}+m_{k_\nu}(x)}(x)$ имеют один и тот же знак и справедливо неравенство

$$\left|\sum_{l=N_{k_\nu}+1}^{N_{k_\nu}+M_{k_\nu}+m_{k_\nu}(x)}c_l\Phi_l(x)\right|\geqslant C>0.$$

Если x принадлежит к множеству $F=\overline{\lim_{\nu\to\infty}}F_{k_\nu}$, то последнее неравенство выполняется при бесконечно многих ν, а поэтому ортогональный ряд $\sum c_n\Phi_n(x)$ расходится в точке x. Аналогично доказательству 2.4.6 убеждаемся, что для меры множества F имеет место равенство

$$|F|=b-a.$$

Таким образом, ортогональный ряд $\sum c_n\Phi_n(x)$ расходится почти всюду, а после изменения значений функций $\Phi_n(x)$ на нуль-множестве становится расходящимся всюду. Теорема 3.6.1 полностью доказана.

Все содержание этого параграфа установлено Тандори [9]; он утверждает также, что подобная теорема справедлива и для средних Чезаро, но доказательство им не приведено. Так как доказательство теоремы 3.6.1 является комбинацией различных этапов из доказательств теорем 2.4.2 и 3.5.3 и так как обе эти теоремы переносятся на $(C, \alpha > 0)$-суммируемость, то возможность подобного расширения теоремы 3.6.1 действительно имеется. Расширенная теорема утверждает следующее:

Если последовательность $\{\lambda_n\}$ *положительна, монотонно возрастает и* $\lambda_n = O[(\log\log n)^2]$, *то для любой возрастающей последовательности чисел* $\{w(n)\}$ *с* $w(n) = o(\lambda_n)$ *существует всюду не суммируемый методом* (C, α) *ортогональный ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \Phi_n(x)$, *коэффициенты которого удовлетворяют условию* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 w(n) < \infty$, *в то время как для* $(C, 1)$*-функций Лебега системы* $\{\Phi_n(x)\}$ *выполняется соотношение* $L_n^1(x) = O(\lambda_n)$.

Подробное воспроизведение ее доказательства приводит, по-видимому, к утомительным рассуждениям. «Растягивание» определенного в 3.6.2 ортогонального ряда подобно тому, как это проведено в доказательстве 2.8.2 возможно, кажется, только при условии $L_{2^n}(x) = O(\lambda_n)$. Поэтому для полного доказательства нужно привлечь более эффективные средства.

Глава 4

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ СХОДИМОСТИ

До сих пор мы занимались только вопросами сходимости ортогональных рядов и не исследовали, какую функцию представляет этот ряд. Поэтому мы не интересовались тем, в какой мере структурные свойства разлагаемой функции влияют на сходимость или суммируемость ее ортогонального разложения. Это было вызвано соображениями теории рядов и теории точечных множеств, где пренебрегают множествами меры нуль. Напротив, классические вопросы сходимости относятся к представлению в отдельных точках функций заданной структуры, т. е. изучаются структурные свойства функции $f(x)$, которые обеспечивают сходимость или суммируемость ее ортогонального разложения в заранее заданной точке x_0 к значению $f(x_0)$. Далее, изучаются условия, при которых имеющаяся сходимость является равномерной в определенном интервале, исследуется порядок приближения функции $f(x)$ с помощью частичных сумм ее ортогонального разложения и т. д.

Этими классическими задачами мы будем заниматься в настоящей главе. Естественно, что при подобных исследованиях общих ортогональных рядов выдвигается меньше вопросов, ибо ортогональные разложения реагируют на структурные свойства разлагаемой функции только при специальных предположениях на ортогональную систему. Прежде всего, коротко приведем некоторые основные понятия и отдельные факты функционального анализа с тем, чтобы можно было легче обосновать необходимость различных предположений

§ 1. Пространства Банаха. Функционалы

Произвольное множество R называется *линейным метрическим* пространством,[1] если выполняются следующие условия:

I. Для любой пары элементов ξ, η из R определена коммутативная и ассоциативная операция сложения так, что $(\xi + \eta) \in R$.

II. В R существует такой элемент 0 (нулевой элемент) что равенство $\xi + 0 = \xi$ справедливо для всех $\xi \in R$.

III. Определена дистрибутивная и ассоциативная операция умножения любого элемента $\xi \in R$ на действительное число c, причем $1 \cdot \xi = \xi$, $0 \cdot \xi = 0$ и $c\xi \in R$.

IV. Каждому элементу $\xi \in R$ соответствует точно одно число $\|\xi\| \geqslant 0$, которое называется нормой ξ и обладает следующими свойствами: 1) $\|\xi + \eta\| \leqslant \|\xi\| + \|\eta\|$, 2) $\|c\xi\| = |c|\,\|\xi\|$, 3) $\|\xi\| = 0$ тогда и только тогда, когда $\xi = 0$.

V. Расстояние между двумя точками ξ, η из R определяется числом $\|\xi - \eta\|$, где $\xi - \eta$ означает $\xi - \eta = \xi + (-1)\eta$.

Банаховым пространством называется линейное метрическое и полное пространство, т. е. пространство, в котором каждая фундаментальная последовательность Коши $\{\xi_n\}$ со свойством $\lim\limits_{m,n\to\infty} \|\xi_n - \xi_m\| = 0$ имеет единственную предельную точку ξ, для которой $\|\xi_n - \xi\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Примеры банаховых пространств. Пространство L^p_μ. Евклидово пространство с обычным определением расстояния является, очевидно, банаховым пространством. Пространство C всех непрерывных на интервале $[a, b]$ функций $f(x)$ с нормой

$$\|f(x)\| = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)|,$$

так же как и пространство M всех ограниченных почти всюду на $[a, b]$ функций $f(x)$ с нормой

$$\|f\| = \operatorname*{vrai\,max}_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)|$$

является также банаховым пространством[2]. В § 2 гл. I мы уже

---

[1] Множество, обладающее приведенными ниже свойствами I—V, обычно называют *нормированным пространством*. — *Прим. ред.*

[2] Символ $\operatorname*{vrai\,max}\limits_{x \in E} |f(x)|$ означает то же самое, что и $\inf\limits_{N \subset E} \sup\limits_{x \in E - N} |f(x)|$ для всех μ-нуль-множеств $N \subset E$.

видели, что L_μ^2 является банаховым пространством. Однако это только частный случай следующей теоремы:

Пространство L_μ^p (при $p \geqslant 1$) всех определенных на $[a, b]$ измеримых функций $f(x)$, p-я степень которых L_μ^p-интегрируема, является банаховым пространством с нормой

$$\|f\| = \left\{ \int_a^b |f(x)|^p \, d\mu(x) \right\}^{1/p}.$$

Докажем прежде всего, что L_μ^p является линейным метрическим пространством. Как легко видеть, для этого достаточно доказать неравенство треугольника для нормы $\|f\|$, или, другими словами, доказать справедливость так называемого неравенства Минковского

$$\left\{ \int_a^b |f(x) + g(x)|^p \, d\mu(x) \right\}^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \int_a^b |f(x)|^p \, d\mu(x) \right\}^{1/p} + \left\{ \int_a^b |g(x)|^p \, d\mu(x) \right\}^{1/p}. \quad (125)$$

В случае $p = 1$ это неравенство очевидно, а при $p > 1$ является следствием неравенства Гёльдера

$$\int_a^b |f(x)g(x)| \, d\mu(x) \leqslant \left\{ \int_a^b |f(x)|^p \, d\mu(x) \right\}^{1/p} \left\{ \int_a^b |g(x)|^{\frac{p}{p-1}} \, d\mu(x) \right\}^{\frac{p-1}{p}}, \quad (126)$$

где $f(x)$ — L_μ^p-интегрируемая, а $g(x)$ — $L_\mu^{\frac{p}{p-1}}$-интегрируемая функции ($p > 1$). В самом деле, если $f(x)$ и $g(x)$ L_μ^p-интегрируемы, то $|f(x) + g(x)|^{p-1}$ есть $L_\mu^{\frac{p}{p-1}}$-интегрируемая функция. Если считать, что (126) справедливо, то получим

$$\int_a^b |f(x)| \, |f(x) + g(x)|^{p-1} \, d\mu(x) \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \int_a^b |f(x)|^p \, d\mu(x) \right\}^{1/p} \left\{ \int_a^b |f(x) + g(x)|^p \, d\mu(x) \right\}^{\frac{p-1}{p}}$$

и аналогично

$$\int_a^b |g(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,d\mu(x) \leq$$
$$\leq \left\{\int_a^b |g(x)|^p\,d\mu(x)\right\}^{1/p} \left\{\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,d\mu(x)\right\}^{\frac{p-1}{p}}.$$

Складывая эти два неравенства и используя соотношение

$$|f+g|^p = |f+g|\,|f+g|^{p-1} \leq |f|\,|f+g|^{p-1} + |g|\,|f+g|^{p-1},$$

мы выводим неравенство

$$\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,d\mu(x) \leq \left[\left\{\int_a^b |f(x)|^p\,d\mu(x)\right\}^{1/p} +\right.$$
$$\left.+\left\{\int_a^b |g(x)|^p\,d\mu(x)\right\}^{1/p}\right]\left\{\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,d\mu(x)\right\}^{\frac{p-1}{p}}.$$

Если множитель

$$\left\{\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,d\mu(x)\right\}^{\frac{p-1}{p}}$$

отличен от нуля, то, разделив на него, мы получаем (125). Но если этот множитель равен нулю, то соотношение (125) тривиально.

Таким образом, чтобы доказать, что L^p_μ—линейное метрическое пространство, мы должны показать справедливость неравенства Гёльдера (126). С этой целью рассмотрим функцию $t^\alpha - \alpha t$ при положительных t и $0 < \alpha < 1$. Ее производная $\alpha(t^{\alpha-1} - 1)$ положительна при $0 < t < 1$ и отрицательна при $t > 1$. Стало быть, $1-\alpha$ есть наибольшее значение этой функции, а потому $t^\alpha \leq \alpha t + 1 - \alpha$. Полагая $t = \frac{A}{B}$ с положительными A и B и, кроме того, $\alpha = \frac{1}{p}$, мы получаем

$$A^{\frac{1}{p}}\,B^{\frac{p-1}{p}} \leq \frac{A}{p} + \frac{B(p-1)}{p}.$$

Выбирая

$$A^{\frac{1}{p}} = \frac{|f(x)|}{\left\{\int\limits_a^b |f(x)|^p\, d\mu(x)\right\}^{1/p}}, \qquad B^{\frac{p-1}{p}} = \frac{|g(x)|}{\left\{\int\limits_a^b |g(x)|^{\frac{p}{p-1}}\, d\mu(x)\right\}^{\frac{p-1}{p}}},$$

интегрируя оба равенства и используя соотношения

$$\int\limits_a^b A\, d\mu(x) = 1, \qquad \int\limits_a^b B\, d\mu(x) = 1,$$

мы выводим

$$\frac{\int\limits_a^b |f(x)g(x)|\, d\mu(x)}{\left\{\int\limits_a^b |f(x)|^p\, d\mu(x)\right\}^{1/p} \left\{\int\limits_a^b |g(x)|^{\frac{p}{p-1}}\, d\mu(x)\right\}^{\frac{p-1}{p}}} \leqslant \frac{1}{p} + \frac{p-1}{p} = 1.$$

А это и есть неравенство Гёльдера (126); мы полностью доказали и (125), т. е. L_μ^p при всех $p \geqslant 1$ действительно является линейным метрическим пространством.

Чтобы показать, что L_μ^p является банаховым пространством, мы рассмотрим фундаментальную последовательность Коши $\{f_n\}$ из L_μ^p. Из $\{f_n\}$ выберем такую подпоследовательность $\{f_{k_n}\}$, для которой $\|f_{k_n} - f_{k_{n+1}}\| < 2^{-n}$ и $\|f_{k_1}\| = 0$. В случае $p > 1$ из неравенства Гёльдера следует

$$\int\limits_a^b |f_{k_n}(x) - f_{k_{n+1}}(x)|\, d\mu(x) \leqslant \|f_{k_n} - f_{k_{n+1}}\| \left\{\int\limits_a^b d\mu(x)\right\}^{\frac{p-1}{p}} = O\left(\frac{1}{2^n}\right),$$

а потому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b |f_{k_n}(x) - f_{k_{n+1}}(x)|\, d\mu(x) < \infty.$$

Если же $p = 1$, то эта оценка вытекает непосредственно из неравенства $\|f_{k_n} - f_{k_{n+1}}\| < 2^{-n}$. Таким образом, по теореме 1.2.2 при всех $p \geqslant 1$ почти всюду существует функция

$$f(x) = f_{k_1}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [f_{k_{n+1}}(x) - f_{k_n}(x)],$$

Кроме того, применяя неравенство Минковского (125), находим

$$\|f\| \leqslant \lim_{m\to\infty} \Big\| \sum_{n=1}^{m} (f_{k_n} - f_{k_{n+1}}) \Big\| \leqslant \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \|f_{k_n} - f_{k_{n+1}}\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1,$$

а поэтому $f = f(x)$ является точкой из L^p_μ, для которой $\|f - f_n\| \to 0$, т. е. L^p_μ полное пространство, чем и завершается наше доказательство.

Линейные функционалы. Функция $U(f)$, определенная на банаховом пространстве R, значения которой действительны, называется *линейным функционалом*, если выполняются следующие условия: для любой пары точек f, g из R справедливо равенство

$$U(f + g) = U(f) + U(g);$$

для любой постоянной c

$$U(cf) = cU(f);$$

существует положительная постоянная C такая, что для любого $f \in R$ имеет место оценка

$$|U(f)| \leqslant C\|f\|.$$

Число

$$\|U\| = \inf C$$

называется *нормой функционала* $U(f)$. Ее не нужно путать с нормой $|U(f)|$ элемента $U(f)$ из R_1; действительно,

$$\|U\| = \sup_{\substack{f\in R \\ \|f\|<1}} |U(f)|.$$

В теории расходимости ортогональных рядов большую роль играют последовательности линейных функционалов. Для их исследования нам потребуются следующие понятия теории точечных множеств: *Сферой* $S(f_0,\varrho)$ *радиуса* $\varrho > 0$ *с центром в точке* $f_0 \in R$ называется множество всех функций $f \in R$, для которых $\|f - f_0\| < \varrho$. Множество $E \subset R$ называется *множеством первой категории*, если оно является суммой счетного числа нигде не плотных множеств. В противном случае E называется *множеством второй категории*. Так как одноточечное множество нигде не плотно, то счетное множество является множеством первой категории, а потому подмножество второй категории из пространства Банаха несчетно. Теперь мы в состоянии доказать следующую теорему о линейных функционалах:

4.1.1. *Если для последовательности линейных функционалов $\{U_n(f)\}$ существует последовательность $\{f_n\}$ точек пространства R, для которых $\|f_n\| \leqslant 1$ и*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, |U_n(f_n)| = \infty,$$

то все $f \in R$, удовлетворяющие условию

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, |U_n(f)| = \infty,$$

образуют множество второй категории, в то время как множество точек $f \in R$, удовлетворяющих условию

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, |U_n(f)| < \infty,$$

является множеством первой категории.

Покажем прежде всего, что множество E всех $f \in R$, для которых $\overline{\lim}\, |U_n(f)| < \infty$ является множеством первой категории. Через $E_{m,n}$ обозначим множество всех f, для которых $|U_n(f)| \leqslant m$. Если $g_\nu \in E_{m,n}$ и $\|g_\nu - g\| \to 0$, то из определения линейного функционала следует неравенство

$$|U_n(g)| \leqslant |U_n(g_\nu)| + |U_n(g_\nu - g| \leqslant$$
$$\leqslant m + |U_n(g_\nu - g)| \leqslant m + C_n \|g_\nu - g\|.$$

Так как при $\nu \to \infty$ последний член стремится к нулю, то $|U_n(g)| \leqslant m$, а потому $g \in E_{m,n}$, т. е. множество $E_{m,n}$ замкнуто. Обозначим через E_m пересечение всех $E_{m,n}$ при фиксированном m. Тогда E_m тоже замкнуто и представляет собой множество всех f, для которых справедливо $|U_n(f)| \leqslant m$ при всех $n = 1, 2, \ldots$. Но, в силу определения,

$$E = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m.$$

Если бы E было множеством второй категории, то хотя бы одно из множеств E_m, например E_k, было бы плотным в сфере $S(f', \varrho)$ радиуса $\varrho > 0$. Так как E_k замкнуто, то отсюда следовало бы, что $S(f', \varrho) \subset E_k$, а поэтому для всех $f'' \in S(f', \varrho)$ выполнялись бы неравенства $|U_n(f'')| \leqslant K$ $(n = 1, 2, \ldots)$. С другой стороны, каждую точку $f \in S(0, \varrho)$ можно представить в форме $f = f'' - f'$, и тогда имеет место оценка

$$|U_n(f)| \leqslant |U_n(f'')| + |U_n(f')| \leqslant 2K.$$

Так как $\|f_n\| \leqslant 1$, то всякая точка ϱf_n лежит в сфере $S(0,\varrho)$ и, следовательно, $\varrho\,|U_n(f_n)| = |U_n(\varrho f_n)| \leqslant 2K$, т. е.

$$|U_n(f_n)| \leqslant \frac{2K}{\varrho}.$$

Отсюда следует, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,|U_n(f_n)|$ должен быть конечным, а это противоречит нашему предположению, множество E — первой категории, а не второй, как мы и утверждали.

Наша теорема будет полностью доказана, если мы покажем еще, что дополнение $CE = R - E$ множества E первой категории является множеством второй категории. Для этого необходимо установить, что полное пространство R не может быть множеством первой категории. Это хорошо известный в теории точечных множеств факт доказывается следующим образом: Пусть $F \subset R$ — произвольное множество первой категории, т. е.

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n,$$

где F_n — нигде не плотные множества. Как легко видеть, замкнутые оболочки $\overline{F}_n$ множеств F_n также являются нигде не плотными множествами. Нужно доказать, что $R - \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \overline{F}_n$ непусто. Прежде всего в непустом открытом множестве $R - \overline{F}_1$ имеется замкнутая сфера $\overline{S}(f_1, \varrho_1)$ с центром в точке $f_1 \in R - \overline{F}_1$ и с радиусом $0 < \varrho_1 < 1$. Так как $\overline{F}_2$ нигде не плотна, то в $\overline{S}(f_1, \varrho_1)$ существует точка f_2 и содержащая ее сфера $\overline{S}(f_2, \varrho_2) \subset \overline{S}(f_1, \varrho_1)$ с радиусом $0 < \varrho_2 < \frac{1}{2}$, причем $\overline{S}(f_2, \varrho_2) \cap \overline{F}_2 = 0$. Продолжая этот выбор, мы получим бесконечную последовательность вложенных друг в друга замкнутых сфер $\{\overline{S}(f_n, \varrho_n)\}$ с радиусами $0 < \varrho_n < \frac{1}{n}$, причем $\overline{S}(f_n, \varrho_n)$ не пересекаются с $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \overline{F}_k$. Так как $\{f_n\}$ — фундаментальная последовательность Коши, то она имеет единственную предельную точку f, которая лежит в пересечении всех $\overline{S}(f_n, \varrho_n)$, а поэтому и в $R - \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \overline{F}_n$. Таким образом, пространство R не является множеством первой категории, чем и заканчивается доказательство 4.1.1.

Из только что доказанной теоремы легко получается следующий принцип сгущения особенностей:

4.1.2. *Пусть* $\{U_n^{(1)}\}$, $\{U_n^{(2)}\}$, ... — *последовательности функционалов, а* $\{f_n^{(1)}\}$, $\{f_n^{(2)}\}$, ... — *последовательности элементов банахового пространства* R. *Если* $\|f_n^{(m)}\| \leqslant 1$ *при всех* n, m *и*

$$\varlimsup_{n\to\infty} |U_n^{(m)}(f_n^{(m)})| = \infty \qquad (m = 1, 2, \ldots),$$

то точки $f \in R$, *для которых*

$$\varlimsup_{n\to\infty} |U_n^{(m)}(f)| = \infty \qquad (m = 1, 2, \ldots),$$

образуют множество второй категории, дополнение к которому является множеством первой категории.

Применяя теорему 4.1.1, мы заключаем, что множество E_m тех точек $f^{(m)} \in R$ (при фиксированном m), для которых

$$\varlimsup_{n\to\infty} |U_n^{(m)}(f^{(m)})| = \infty,$$

является множеством второй категории. Пересечение $E = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} E_m$ — тоже множество второй категории, так как, в силу 4.1.1, его дополнение

$$CE = \bigcup_{m=1}^{\infty} (R - E_m)$$

— множество первой категории. Таким образом, для любой точки $f \in E$ и при всех $m \geqslant 1$ имеет место соотношение $\varlimsup\limits_{n\to\infty} |U_n^{(m)}(f)| = \infty$, которое и доказывает наше утверждение.

Коэффициенты разложения L_μ-интегрируемых функций. Доказанные выше теоремы мы применим к последовательности функционалов

$$c_n = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)\, d\mu(x) \qquad (n = 0, 1, \ldots),$$

являющихся коэффициентами разложения L_μ-интегрируемых функций. При этом предполагается, конечно, существование этих интегралов. Мы докажем, что требование $c_n = o(1)$ для любой $f \in L_\mu$, которое желательно при построении теории сходимости разложений L_μ-интегрируемых функций, выполняется только тогда, когда ортонормированные функции $\{\varphi_n(x)\}$ в своей совокупности почти всюду равномерно ограничены.

Для доказательства этого мы напомним прежде всего следующую теорему из теории функций действительного переменного:

4.1.3. *Если интеграл*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,d\mu(x)$$

существует для любой L_μ-интегрируемой функции $f(x)$, то

$$\operatorname{vrai}\max_{a\leqslant x\leqslant b} |g(x)| < \infty.$$

В самом деле, в противном случае неравенство $|g(x)| \geqslant n$ выполнялось бы на множестве E_n с положительной μ-мерой $m(E_n)$. Положим

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sign} g(x)}{m(E_n)} & \text{при} \quad x \in E_n, \\ 0 & \text{при остальных} \quad x. \end{cases}$$

L_μ-нормой функции $f_n(x)$ является число

$$\|f_n\| = \frac{1}{m(E_n)} \int_{E_n} |\operatorname{sign} g(x)|\,d\mu(x) = 1.$$

Поэтому, если функционал $U_n(f)$ определить как

$$U_n(f) = \int_a^b f_n(x)\,g(x)\,d\mu(x),$$

то

$$|U_n(f_n)| = \frac{1}{m(E_n)} \int_{E_n} g(x) \operatorname{sign} g(x)\,d\mu(x) \geqslant n,$$

т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} |U_n(f_n)| = \infty$. Но тогда из теоремы 4.1.1 следовало бы существование такой $f \in L_\mu$, для которой справедливо соотношение

$$\int^{b} f(x)g(x)\,d\mu(x) = \infty,$$

а это противоречит условию теоремы.

Теперь мы можем перейти к утверждению относительно коэффициентов разложения.

4.1.4. *Чтобы для коэффициентов разложения c_n любой L_μ-интегрируемой функции имела место оценка $c_n = o(1)$, необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\operatorname*{vrai\,max}_{a\leqslant x\leqslant b} |\varphi_n(x)| \leqslant M \qquad (n = 0, 1, \ldots), \tag{127}$$

где постоянная M не зависит от n.

Для доказательства необходимости мы положим

$$U_n(f) = c_n = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,d\mu(x).$$

Если (127) не выполнено, то существуют последовательность множеств $\{E_n\}$ из $[a, b]$ и последовательность чисел $\{M_n\}$ такие, что $M_n \to \infty$ и $\{\varphi_n(x)\}$ содержит подпоследовательность $\{\varphi_{\nu_n}(x)\}$ со свойством $|\varphi_{\nu_n}(x)| \geqslant M_n$ при $x \in E_n$, причем каждое E_n имеет положительную μ-меру $m(E_n)$. Если мы положим

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sign} \varphi_{\nu_n}(x)}{m(E_n)} & \text{при} \quad x \in E_n, \\ 0 & \text{при остальных } x, \end{cases}$$

то L_μ-норма функции f_n равна единице, а для $|U_n(f_n)|$ мы имеем следующую оценку снизу:

$$|U_n(f_n)| = \frac{1}{m(E_n)} \int_{E_n} \varphi_{\nu_n}(x) \operatorname{sign} \varphi_{\nu_n}(x)\,d\mu(x) \geqslant M_n,$$

откуда и следует соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} |U_n(f_n)| = \infty$. Поэтому из теоремы 4.1.1 мы убеждаемся в существовании несчетного числа функций $f \in L_\mu$, которые образуют множество второй категории, причем для их коэффициентов разложения c_n справедливо соотношение $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |c_n| = \infty$.

Условие (127) также и достаточно. Действительно, пусть f — произвольная функция из L_μ. Положим

$$f_k(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } |f(x)| \leqslant k, \\ 0 & \text{при остальных } x, \end{cases}$$

и пусть F_k означает множество тех точек x, для которых $|f(x)| > k$. Тогда мы имеем

$$c_n = \int\limits_a^b f_k(x)\varphi_n(x)\,d\mu(x) + \int\limits_{F_k} f(x)\varphi_n(x)\,d\mu(x).$$

Если выберем произвольное $\varepsilon > 0$, то при достаточно больших k справедливо неравенство

$$\int\limits_{F_k} |f(x)|\,d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{2M},$$

а так как функция $f_k(x)$ L_μ^2-интегрируема, то по теореме 1.1.3 для всех $n \geqslant n_k$ имеем

$$\left| \int\limits_a^b f_k(x)\varphi_n(x)\,d\mu(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом, учитывая (127), мы при $n \geqslant n_k$ получаем

$$|c_n| < \frac{\varepsilon}{2} + M \int\limits_{F_k} |f(x)|\,d\mu(x) < \varepsilon,$$

это и есть утверждение теоремы.

Теоремы этого параграфа доказаны Банахом и Штейнгаузом [1]. Их называют также «теоремами разонанса» (С. Качмаж и Г. Штейнгауз, Теория ортогональных рядов, М., 1958, стр. 30—37), так как из существования одной расходящейся последовательности следует, что «бо́льшая часть» последовательностей банахового пространства также расходится. Эти теоремы выявляют сущность различных видов расходимости, которые были установлены ранее для отдельных ортогональных рядов.

Доказательство достаточности теоремы 4.1.4, которое почти очевидно, в специальном случае $\mu(x) = x$ часто приписывают Мерсеру [1].

Однако, это не верно; на самом деле теорема 4.1.4 в полной общности впервые доказана Лебегом [2].

Из 4.1.4 можно получить простое доказательство существования L-интегрируемой функции с почти всюду расходящимся разложением по ортогональным полиномам. Именно, с помощью 4.1.4 легко устанавливается теорема:

Пусть ортонормированная система $\{\varphi_n(x)\}$ удовлетворяет условиям

$$\varlimsup_{n\to\infty} \operatorname*{vrai\,max}_{a\leqslant x\leqslant b} |\varphi_n(x)| = \infty \tag{*}$$

и для любого множества $E \subset (a, b)$ положительной μ-меры

$$\varliminf_{n\to\infty} \int_E \varphi_n^2(x)\,d\mu(x) > 0. \tag{**}$$

Тогда существует L_μ-интегрируемая функция $f(x)$, разложение которой

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

почти всюду расходится.

Действительно, если это разложение сходится на множестве F положительной меры, то сходимость его равномерна на $E \subset F$, причем $m(E) > 0$ (теорема Егорова), а поэтому равномерно на E справедливо соотношение $c_n^2\varphi_n^2(x) \to 0$, из которого и выводим оценку

$$c_n^2 \int_E \varphi_n^2(x)\,d\mu(x) = o(1).$$

Используя (**), заключаем, что $c_n = o(1)$. Но из 4.1.4 вследствие (*) убеждаемся в существовании L_μ-интегрируемой функции, для которой $c_n \neq \neq o(1)$, чем и завершается доказательство.

Примером применения этой теоремы служат нормированные полиномы Лежандра $\{p_n(x)\}$. В самом деле, для этих полиномов имеем (1.4.6)

$$\operatorname*{vrai\,max}_{-1\leqslant x\leqslant 1} |p_n(x)| = \sqrt{\frac{2n+1}{2}},$$

т. е. выполняется (*). Далее, при $0 < \varepsilon \leqslant \theta \leqslant \pi - \varepsilon$ справедлива асимптотическая формула Лапласа:

$$p_n(\cos\theta) = \sqrt{\frac{2n+1}{\pi n \sin\theta}} \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right] + O\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right)$$

(см. Г. Сегё, Ортогональные многочлены, М., 1962, стр. 202). Если с помощью преобразования $\theta = \arccos x$ интервал $[-1, 1]$ отобразить на $[0, \pi]$, то множество E с $|E| > 0$ переходит в E_θ с $|E_\theta| > 0$. Выберем теперь $0 < \varepsilon < \frac{|E_\theta|}{2}$, тогда существует подмножество E_θ^* из E_θ, которое лежит в $[\varepsilon, \pi - \varepsilon]$ и имеет положительную меру. Если E^* есть прообраз E_θ^*, то имеет место соотношение

$$\int\limits_E p_n^2(x)\,dx \geqslant \int\limits_{E^*} p_n^2(x)\,dx \geqslant \frac{2n+1}{\pi n} \int\limits_{E_\theta^*} \cos^2\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right] d\theta - O\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right).$$

Так как справа стоящий интеграл сходится к $\frac{1}{2}|E_\theta^*| > 0$, то

$$\varliminf_{n\to\infty} \int\limits_E p_n^2(x)\,dx > 0,$$

т. е. выполняется условие (**). Отсюда мы видим, что *существует L-интегрируемая функция с почти всюду расходящимся разложением по полиномам Лежандра.*

§ 2. Сингулярные интегралы

Частичные суммы разложения $L_{\varrho(x)}$-интегрируемой функции $f(x)$ по ортонормированной системе $\{\varphi_n(x)\}$ представляются в форме

$$I_n(f, x) = \int\limits_a^b f(t)\Phi_n(t, x)\varrho(t)\,dt,$$

где $\Phi_n(t, x)$ означает сумму $\sum\limits_{k=0}^{n} \varphi_k(t)\varphi_k(x)$; n-е суммы $t_n(x)$ при суммировании разложения с помощью линейного метода также представляются через подобные интегралы, и $\Phi_n(t, x)$ в этом случае означает сумму $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_{nk}\varphi_k(t)\varphi_k(x)$. Поэтому напрашивается задача об исследовании характера сходимости интегралов $I_n(f, x)$ независимо от того, получены они из ортогональных разложений или нет. Теория этих интегралов совершенно формальна, но она очень обширна и имеет много приложений.

Если мы потребуем не только сходимость последовательности $\{I_n(f, x)\}$, но и выполнения равенства $\lim\limits_{n\to\infty} I_n(f, x) = f(x)$, т.е. чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} I_n(f, x)$ представлял значения функции $f(x)$, то ядро $\Phi_n(t, x)$ будет удовлетворять определенным требованиям. Самое очевидное из этих условий состоит в том, что величина $I_n(f, x)$ при достаточно больших n должна зависеть только от тех значений функции $f(x)$, которые она принимает в некоторой окрестности точки x. С другой стороны, для функций f и g, совпадающих в некоторой окрестности x, $I_n(f, x)$ и $I_n(g, x)$ должны сходиться к общему пределу $f(x) = g(x)$. Поэтому мы предполагаем следующее:

Если δ—произвольное положительное число и $[\alpha, \beta]$ — произвольный интервал из $[a, b]$, то

$$\lim_{n\to\infty}\int_I \Phi_n(t, x)\varrho(t)\,dt = 1 \text{ и } \lim_{n\to\infty}\int_J \Phi_n(t, x)\varrho(t)\,dt = 0, \tag{128}$$

где $I = [a, b] \cap [x-\delta, x+\delta]$, $J = [\alpha, \beta] - [x-\delta, x+\delta]$

$$\text{и} \quad \underset{t\in[a, x-\delta]\cup[x+\delta, b]}{\text{vrai max}} |\Phi_n(t, x)| \leqslant \Phi(\delta), \tag{129}$$

причем число $\varphi(\delta)$ зависит только от δ и x и не зависит от n.

Если при фиксированном x ядро $\Phi_n(t, x)$ удовлетворяет условиям (128) и (129), то интеграл $I_n(f, x)$ называется *сингулярным* (с особенностью в точке x). Если $\Phi_n(t, x)$ удовлетворяет условиям (128) и (129) равномерно на x-множестве E, то интеграл $I_n(f, x)$ называется *равномерно сингулярным на E*. Сингулярные интегралы обладают важными свойствами сходимости.

4.2.1. *Пусть интегралы $I_n(f, x)$ (предполагается, что они существуют для всякой $L_{\varrho(x)}$-интегрируемой функции) сингуляры в точке $x \in [a, b]$. Чтобы для любой непрерывной в точке $t = x$ функции с ограниченной вариацией $f(t)$ интегралы $I_n(f, x)$ сходились к значению $f(x)$, необходимо и достаточно существование такой постоянной $K > 0$, для которой на каждом подинтервале $[A, B]$ из $[a, b]$ выполняется соотношение*

$$\left|\int_A^B \Phi_n(t, x)\varrho(t)\,dt\right| \leqslant K \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{130}$$

Если же условие (130) *выполняется равномерно на подинтервале $[c, d]$ из $[a, b]$, функция $f(t)$, имеющая ограниченную вариацию, непрерывна на $[c, d]$ и интегралы $I_n(f, x)$ равномерно сингулярны на $[c, d]$, то на $[c, d]$ они равномерно сходятся к $f(x)$.*

Необходимость. Обозначим через V пространство всех определенных на $[a, b]$ функций с ограниченной вариацей, которые непрерывны в фиксированной точке x. Далее, пусть $V_a^b(f)$ — полная вариация $f(t)$, а $S(f)$ — верхняя грань значений $|f(t)|$ на $[a, b]$. Метрику в пространстве V введем с помощью следующей нормы:

$$\|f\|^* = S(f) + V_a^b(f).$$

Очевидно, что V является линейным метрическим пространством. Мы утверждаем, что пространство V банахово. Для доказательства этого утверждения рассмотрим фундаментальную последовательность Коши $\{f_n\}$ из V. Тогда при $m, n \to \infty$ справедливо соотношение $S(f_n - f_m) \leqslant \|f_n - f_m\|^* \to 0$. Стало быть, функции $f_n(t)$ равномерно сходятся к функции $f(t)$, которая поэтому также непрерывна в x. Если $t_0 < t_1 < \ldots < t_N$ — произвольные точки из $[a, b]$, то выберем число $\varepsilon > 0$ и постоянный индекс n_ε так, чтобы для всех $m > n_\varepsilon$ выполнялось неравенство $V_a^b(f_m - f_{n_\varepsilon}) < \varepsilon$. Тогда имеем

$$\sum_{k=1}^{N} \left|\{f_m(t_k) - f_{n\varepsilon}(t_k)\} - \{f_m(t_{k-1}) - f_{n\varepsilon}(t_{k-1})\}\right| \leqslant V_a^b(f_m - f_{n\varepsilon}) < \varepsilon.$$

Так как m может быть сколь угодно большим, то мы можем перейти к пределу при $m \to \infty$, а так как $t_0 < t_1 \ldots < t_N$ — произвольные точки из $[a, b]$, то мы получаем оценку $V_a^b(f - f_{n\varepsilon}) \leqslant \leqslant \varepsilon$ и $f \in V$. Кроме того, справедливо соотношение $\|f - f_n\|^* \to 0$, т. е. V является банаховым пространством.

Теперь в V введем функционал

$$U_n(f) = I_n(f, x).$$

Покажем, что $U_n(f)$ действительно является определенным на V линейным функционалом. В самом деле, так как $I_n(f, x)$ существует для любой $f \in L_{\varrho(t)}$, то, в силу 4.1.3, величина

$$K_n = \operatorname*{vrai\,max}_{a \leqslant t \leqslant b} |\Phi_n(t, x)|. \tag{131}$$

является конечным числом. Пусть теперь $P(f, t)$ и $N(f, t)$ соответственно положительная и отрицательная вариации $f(t)$ на интервале $[a, b]$. Применяя вторую теорему о среднем, мы получаем оценку

$$|U_n(f)| \leqslant \left| \int_a^b \{f(a) + P(f, t)\} \Phi_n(t, x) \varrho(t)\, dt \right| +$$

$$+ \left| \int_a^b N(f, t) \Phi_n(t, x) \varrho(t)\, dt \right| \leqslant |f(a)| \int_a^\xi |\Phi_n(t, x)| \varrho(t)\, dt +$$

$$+ \{|f(a)| + P(f, b)\} \int_\xi^b |\Phi_n(t, x)| \varrho(t)\, dt +$$

$$+ N(f, b) \int_\xi^b |\Phi_n(t, x)| \varrho(t)\, dt \leqslant$$

$$\leqslant K_n \int_a^b \varrho(t)\, dt \cdot \{2|f(a)| + P(f, b) + N(f, b)\} | \leqslant$$

$$\leqslant K_n \int_a^b \varrho(t)\, dt \cdot \{2S(f) + V_a^b(f)\} \leqslant C_n \|f\|^*.$$

А это и доказывает, что $U_n(f)$ — линейный функционал на V.

Если условие (130) не выполняется, то существует последовательность пар точек $\{a_n < b_n\}$ из $[a, b]$, для которых

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \int_{a_n}^{b_n} \Phi_n(t, x) \varrho(t)\, dt \right| = \infty.$$

При этом за счет незначительных изменений a_n и b_n мы всегда можем предполагать, что x не совпадает ни с a_n, ни с b_n. Положим

$$f_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{при } t \in [a_n, b_n], \\ 0 & \text{при остальных } t. \end{cases}$$

Тогда $f_n \in V$, $\|f_n\|^* = 1$ и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |U_n(f_n)| = \infty.$$

Поэтому, в силу теоремы 4.1.1, существует непрерывная в точке x функция $f(t)$ с ограниченной вариацией, для которой

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| I_n(f, x) \right| = \infty,$$

т. е. в точке x последовательность $\{I_n(f, x)\}$ не сходится к значению функции $f(x)$.

Достаточность. Пусть G — открытое множество, оставшееся от $[a, b]$после выбрасывания из него не более чем счетного множества точек разрыва функции $f(t)$. Множество G можно разбить на счетное число неперекрывающихся (за исключением концов) интервалов $I_1, I_2, \ldots$ так, чтобы колебание $f(t)$ в каждом из этих интервалов было меньше произвольного положительного ε. Пусть, далее, через J_k обозначены множества I_l—$[x—\delta, \ x+\delta]$. Тогда, в силу (129), мы имеем

$$\left| \left(\int_a^{x-\delta} + \int_{x+\delta}^b \right) f(t)\, \Phi_n(t, x)\, \varrho(t)\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int_{J_k} \left| f(t) - f(t_k) \right| \left| \Phi_n(t, x) \right| \varrho(t)\, dt +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left| f(t_k) \right| \left| \int_{J_k} \Phi_n(t, x)\, \varrho(t)\, dt \right| <$$

$$< \varepsilon \Phi(\delta) \sum_{k=1}^{\infty} \int_{J_k} \varrho(t)\, dt + S(f) \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_{J_k} \Phi_n(t, x)\, \varrho(t)\, dt \right|.$$

Первый справа стоящий член $< \varepsilon C_1$, где C_1 — некоторая не зависящая от n положительная постоянная. Стоящую во втором члене сумму разобьем на две части, $\sum\limits_{k=1}^{N}$ и $\sum\limits_{k=N+1}^{\infty}$, где N выбрано столь большим, что выполняется неравенство

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \int_{J_k} \varrho(t)\, dt < \varepsilon.$$

Используя (128) и (129), для достаточно больших n получаем оценку

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\int_{J_k}\Phi_n(t, x)\,\varrho(t)\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{N}\left|\int_{J_k}\Phi_n(t, x)\,\varrho(t)\,dt\right| + \Phi(\delta)\sum_{k=N+1}^{\infty}\int_{J_k}\varrho(t)\,dt < \varepsilon + \varepsilon\Phi(\delta) < \varepsilon C_2,$$

где C_2 — надлежащим образом выбранная не зависящая от n положительная постоянная. Отсюда при достаточно большом n будет

$$\left|\left(\int_{a}^{x-\delta} + \int_{x+\delta}^{b}\right) f(t)\,\Phi_n(t, x)\,\varrho(t)\,dt\right| < \varepsilon C_1 + \varepsilon C_2 S(f),$$

а потому, в силу (128),

$$I_n(f, x) - f(x) = \int_{x-\delta}^{x+\delta}[f(t) - f(x)]\,\Phi_n(t,x)\,\varrho(t)\,dt + o(1).$$

Применяя вторую теорему о среднем, находим

$$I_n(f, x) - f(x) = [f(x-\delta) - f(x)]\int_{x-\delta}^{T_n}\Phi_n(t, x)\,\varrho(t)\,dt +$$

$$+ [f(x+\delta) - f(x)]\int_{T_n}^{x+\delta}\Phi_n(t, x)\,\varrho(t)\,dt.$$

Выберем теперь $\delta > 0$ столь малым, чтобы колебание функции на $[x-\delta, x+\delta]$ было бы меньше ε. Тогда, учитывая (130), получаем

$$|I_n(f, x) - f(x)| < 2\varepsilon K + o(1) = o(1),$$

и наше утверждение доказано[1].

---

[1] Приведенное автором доказательство достаточности условия (130) представляется нам ошибочным:

a) Нельзя применять (в том виде, как это делает автор) вторую теорему о среднем для функций с ограниченным изменением.

b) Если E есть множество точек разрыва функции $f \in V$, то множество $[a, b] - E$ не обязано быть *открытым*, так как E могло быть всюду плотным множеством на $[a, b]$ (хотя и счетным!).

Как нетрудно видеть из приведенного доказательства, данные выше оценки справедливы равномерно на любом подинтервале из $[a, b]$, на котором равномерно выполнены все условия теоремы. А это и доказывает наше утверждение относительно равномерной сходимости на $[c, d]$.

Как понятие сингулярного интеграла, так и теорема 4.2.1 даны Лебегом [2]. Теорема 4.2.1 позволяет обобщить известную теорему Дирихле—Жордана о сходимости рядов Фурье.

---

c) Автор для заданного $\varepsilon > 0$ подбирает δ так, чтобы колебание функции f на $[x - \delta, x + \delta]$ было меньше ε, т. е. $\delta = \delta(\varepsilon)$. Но перед этим автор пользуется тем, что $\varepsilon\, \Phi(\delta)$ мало. Этого-то мы как раз и не можем гарантировать, так как рост $\Phi(\delta) = \Phi(\delta(\varepsilon))$ не в нашей власти.

Правильное доказательство можно провести по следующей схеме: Сначала функцию $f(t)$ представим как разность двух функций, монотонных на $[a, b]$ и непрерывных в точке x. Поэтому с самого начала мы можем предполагать, что $f(t)$ монотонно возрастает на $[a, b]$ и непрерывна в точке x. После этого задаем произвольное $\varepsilon > 0$ и для него подбираем $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, чтобы колебание $f(t)$ на $[x - \delta, x + \delta]$ было меньше ε. Далее, находим такое $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$, что $\eta\, \Phi(\delta) < \varepsilon$. Теперь разбиваем отрезок $[a, b]$ на конечное число непересекающихся интервалов I_k $(1 \leqslant k \leqslant m)$ так, чтобы на каждом интервале (а не на отрезке!) колебание функции $f(t)$ было меньше η. Это можно сделать следующим образом:

Из интервала (a, b) выбрасываются все точки ξ, в которых $f(\xi + 0) - f(\xi - 0) > \frac{\eta}{2}$. Таких точек ξ конечное число. Оставшееся множество есть конечное число интервалов (c_i, d_i). Но каждый интервал (c_i, d_i) уже в свою очередь можно разбить на конечное число более мелких интервалов, на каждом из которых колебание функции $f(t)$ меньше η.

После всего этого мы получаем для всех $n \geqslant N$ [см. (128) и (129)]

$$\left| \left(\int_a^{x-\delta} + \int_{x+\delta}^b \right) f(t)\, \Phi_n(t, x)\, \varrho(t)\, dt \right| \leqslant \eta \Phi(\delta) \sum_{k=1}^m \int\limits_{I_k\{[a,b]-(x_0-\delta,\, x+\delta)\}} \varrho(t)\, dt +$$

$$+ S(f) \sum_{k=1}^m \left| \int\limits_{I_k\{[a,b]-(x-\delta,\, x+\delta)\}} \Phi_n(t,x)\, \varrho(t)\, dt \right| \leqslant \varepsilon \int_a^b \varrho(t)\, dt + \varepsilon = C\varepsilon.$$

Применяя вторую теорему о среднем и используя (130), получаем

$$\left| \int_{x-\delta}^{x+\delta} [f(t) - f(x)]\, \Phi_n(t, x)\, \varrho(t)\, dt \right| \leqslant 2K\varepsilon.$$

Из полученных оценок и из (128) вытекает, что $I_n(f, x) - f(x) = o(1)$. — *Прим. ред.*

Различие между утверждениями теоремы 4.2.1 и теоремы Дирихле—Жордана состоит в том, что последняя обеспечивает сходимость ряда Фурье не только в точках непрерывности, но и в точках разрыва функции $f(t)$ с ограниченной вариацией. Это основано на специальной форме частичных сумм:

$$s_n(x) = \int_0^{\pi} \frac{f(t)+f(-t)}{2} \cdot \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)}{\pi \sin\frac{t-x}{2}}\, dt^1.$$

В самом деле, так как функция $\frac{f(t)+f(-t)}{2}$ непрерывна в точке x и принимает значение $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, то из сингулярности справа стоящего интеграла следует соотношение

$$s_n(x) \to \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Однако для произвольных сингулярных интегралов теорема 4.2.1 подобным образом не может быть усилена. Противоречащий пример строится для разложения по ортонормированной системе Хаара $\{\chi_n^{(k)}(x)\}$. Пусть $s_n(x)$ — n-я частичная сумма разложения функции $f(x)$ с ограниченной вариацией по системе $\{\chi_n^{(k)}(x)\}$. Если двоично иррациональная точка x_0 является точкой разрыва функции $f(x)$, то последовательность $\{s_n(x_0)\}$ должна сходиться к обобщенной производной

$$F'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|I_n^{(k)}|} \int_{I_n^{(k)}} f(x)\, dx$$

функции

$$F(u) = \int_0^u f(x)\, dx$$

[1] Эта формула ошибочна. На самом деле справедлива формула

$$s_n(x) = \int_0^{\pi} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} \cdot \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\, dt$$

и потому ниже должна идти речь о непрерывности функции $\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}$ в точке $t=0$. — *Прим. ред.*

(см. доказательство 1.6.1). Но это невозможно, ибо $F'(x_0)$ не существует в точке скачка $f(x)$, а поэтому $\{s_n(x_0)\}$ расходится (Фабер [1]). Подобное утверждение справедливо также для разложения функции $f(x)$ по системе Уолша (Уолш [1]). Таким образом, обобщение теоремы 4.2.1 обеспечивает сходимость в точке скачка $f(x)$ только при специальных предположениях на ядро $\Phi_n(t, x)$.

Возможность применения сингулярных интегралов простирается значительно дальше, чем представление функций с ограниченной вариацией. В частности, можно дать необходимые и достаточные условия для представления $L_{\varrho(x)}$-интегрируемых функций в интервалах непрерывности. При этом существенную роль играют условия ограниченности интеграла от $|\Phi_n(t, x)|$. Для ортогональных разложений это означает, что сходимость линейных средних для метода суммирования зависит от роста соответствующих функций Лебега.

4.2.2. *Пусть на подинтервале* $[c, d]$ *из* $[a, b]$ *интегралы* $I_n(f, x)$ *являются сингулярными и пусть они существуют для любой* $L_{\varrho(x)}$*-интегрируемой функции. В точке* $x \in [c, d]$ *интегралы* $I_n(f, x)$ *сходятся к* $f(x)$ *для любой непрерывной на* $[c, d]$ $L_{\varrho(t)}$*-интегрируемой функции* $f(t)$ *тогда и только тогда, когда выполняется условие*

$$\int_a^b |\Phi_n(t, x)|\, \varrho(t)\, dt = O(1). \tag{132}$$

Необходимость. Пусть через $L^*_{\varrho(t)}$ обозначено множество $L_{\varrho(t)}$-интегрируемых функций, которые непрерывны на $[c, d]$. Пусть, далее, метрика в $L^*_{\varrho(t)}$ определяется следующим образом:

$$\|f\|^* = \int_a^b |f(t)|\, \varrho(t)\, dt + S(f;\, c, d),$$

где $S(f;\, c, d) = \max\limits_{c \leq t \leq d} |f(t)|$. $L^*_{\varrho(t)}$ является банаховым пространством. Действительно, последовательность Коши из $L^*_{\varrho(t)}$ по отношению к метрике $L_{\varrho(t)}$ имеет в $L_{\varrho(t)}$ предельную точку $f(t)$ и, кроме того, на $[c, d]$ сходится равномерно к $f(t)$. Следовательно, $f(t)$ принадлежит также $L^*_{\varrho(t)}$, а потому является предельной точкой для последовательности Коши и по отношению к метрике $L^*_{\varrho(t)}$.

Рассмотрим определенные на $L^*_{\varrho(t)}$ действительные однородные аддитивные функции $U_n(f) = I_n(f, x)$. Мы утверждаем, что $U_n(f)$ есть линейный функционал. Как уже упоминалось, из существования $U_n(f)$ следует справедливость (131), т. е. для любой $f \in L_{\varrho(t)}$

$$|U_n(f)| \leqslant K_n \int_a |f(t)|\,\varrho(t)\,dt \leqslant K_n \|f\|^*.$$

Если (132) не выполняется, то для функции $h_n(t) = \operatorname{sign} \Phi_n(t, x)$ справедливо соотношение

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, |U_n(h_n)| = \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_a^b |\Phi_n(t, x)|\,\varrho(t)\,dt = \infty.$$

По известной теореме Лузина[1] функция $h_n(t)$ совпадает с непрерывной функцией $g_n(t)$ всюду, за исключением множества E_n с произвольно малой мерой, причем вследствие условия $|h_n(t)| \leqslant 1$ можно также предполагать и $|g_n(t)| \leqslant \leqslant 1$. Если мы выберем меру $|E_n|$ настолько малой, чтобы

$$\int_{E_n} |\Phi_n(t, x)|\,\varrho(t)\,dt \leqslant \frac{1}{2n},$$

то вследствие неравенства

$$|U_n(h_n - g_n)| \leqslant \int_{E_n} |h_n(t) - g_n(t)|\,|\Phi_n(t, x)|\,\varrho(t)\,dt \leqslant$$
$$\leqslant 2 \int_{E_n} |\Phi_n(t, x)|\,\varrho(t)\,dt$$

мы получаем следующую оценку снизу:

$$|U_n(g_n)| \geqslant |U_n(h_n)| - |U_n(h_n - g_n)| \geqslant |U_n(h_n)| - \frac{1}{n}.$$

Поэтому из неограниченности $\{|U_n(h_n)|\}$ выводим соотношение

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, |U_n(g_n)| = \infty.$$

---

[1] См. Рисс Ф. и Надь Б., Лекции по функциональному анализу, М., 1954, стр. 110.

Полагая

$$f_n(t) = \min\left\{\frac{g_n(t)}{2},\ \frac{g_n(t)}{2\int\limits_a^b \varrho(t)\,dt}\right\},$$

мы получаем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|U_n(f_n)| = \infty.$$

С другой стороны, из неравенства $|g_n(t)| \leqslant 1$ следует, что

$$\|f_n\|^* \leqslant \frac{1}{2\int\limits_a^b \varrho(t)\,dt}\int\limits_a^b |g_n(t)|\,\varrho(t)\,dt + S\left(\frac{g_n}{2};\ c,\ d\right) \leqslant \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1.$$

Тогда из 4.1.1 заключаем, что в банаховом пространстве $L^*_{\varrho(t)}$ имеется несчетное множество $f(t)$, для которого

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|U_n(f)| = \overline{\lim_{n\to\infty}}\,|I_n(f, x)| = \infty,$$

и, следовательно, $\{I_n(f, x)\}$ расходится.

Достаточность. Выберем $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ столь малым, чтобы при $t \in [x-\delta, x+\delta]$ неравенство $|f(t)-f(x)| \leqslant \varepsilon$ выполнялось для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$. Функцию $f(x)$ аппроксимируем непрерывными функциями $f_m(x)$ с ограниченной вариацией (например, полиномами) в смысле метрики $L_{\varrho(t)}$, т. е

$$\lim_{m\to\infty}\int\limits_a^b |f(t)-f_m(t)|\,\varrho(t)\,dt = 0.$$

Если $\varepsilon > 0$ произвольно, то выберем индекс m столь большим, чтобы

$$\int\limits_a^b |f(t)-f_m(t)|\,\varrho(t)\,dt < \frac{\varepsilon}{2\Phi(\delta)},$$

где $\Phi(\delta)$ — определенная в (129) оценка для $|\Phi_n(t,x)|$. Тогда мы имеем

$$\left|\left(\int_a^{x-\delta}+\int_{x+\delta}^b\right) f(t)\,\Phi_n(t,x)\,\varrho(t)\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\left(\int_a^{x-\delta}+\int_{x+\delta}^b\right) f_m(t)\,\Phi_n(t,x)\,\varrho(t)\,dt\right| +$$

$$+\,\Phi(\delta)\left(\int_a^{x-\delta}+\int_{x+\delta}^b\right)|f(t)-f_m(t)|\,\varrho(t)\,dt <$$

$$< \left|\left(\int_a^{x-\delta}+\int_{x+\delta}^b\right) f_m(t)\,\Phi_n(t,x)\,\varrho(t)\,dt\right| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как $f_m(t)$ всюду непрерывна, то так же, как и в доказательстве 4.2.1, убеждаемся в справедливости для достаточно большого индекса n следующей оценки:

$$\left|\left(\int_a^{x-\delta}+\int_{x+\delta}^b\right) f_m(t)\Phi_n(t,x)\,\varrho(t)\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

причем эта оценка будет равномерной в случае равномерной сингулярности. Следовательно, существует такое число N, что для всех $n \geqslant N$ выполняется неравенство

$$\left|\left(\int_a^{x-\delta}+\int_{x+\delta}^b\right) f(t)\,\Phi_n(t,x)\,\varrho(t)\,dt\right| < \varepsilon.$$

Поэтому из (128) для достаточно больших n находим

$$|f(x)-I_n(f,x)| \leqslant \left|\left(\int_a^{x-\delta}+\int_{x+\delta}^b\right)[f(x)-f(t)]\,\Phi_n(t,x)\,\varrho(t)\,dt\right| +$$

$$+\int_{x-\delta}^{x+\delta}|f(x)-f(t)|\,|\Phi_n(t,x)|\,\varrho(t)\,dt+\varepsilon < 2\varepsilon+\varepsilon\int_a^b|\Phi_n(t,x)|\,\varrho(t)\,dt,$$

откуда, учитывая (132), мы и выводим соотношение $I_n(f,x)\to f(x)$.

Из доказательства достаточности нетрудно убедиться в справедливости следующей теоремы:

4.2.3. *Если функция* $f(t) \in L_{\varrho(t)}$ *равномерно непрерывна на подмножестве* E *из* $[a, b]$ *и если при* $x \in E$ *равномерно выполняются условия* (128), (129) *и* (132), *то равномерно на* E *справедливо соотношение*

$$I_n(f, x) \to f(x).$$

Приведенные выше теоремы содержат следующую важную для вопросов сходимости локальную теорему:

4.2.4. *Пусть* $\{\varphi_n(x)\}$ — *ортонормированная с весом* $\varrho(x)$ *система. Предположим, что средние*

$$t_n(f, x) = \int_a^b f(t) \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{nk} \varphi_k(t) \varphi_k(x) \varrho(t)\, dt$$

линейного метода суммирования разложения

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \tag{133}$$

на интервале $[c, d] \subset [a, b]$ *имеют* (*равномерно*) *сингулярный интеграл с ядром* $\Phi_n(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{nk} \varphi_k(t) \varphi_k(x)$. *Если* $f(x) = g(x)$ *на* $[c, d]$ *и* $f(x)$ *и* $g(x)$ *разложены по системе* $\{\varphi_n(x)\}$, *то соотношение*

$$t_n(f, x) - t_n(g, x) \to 0$$

справедливо (*равномерно*) *на интервале* $[c + \delta, d - \delta]$ *при любом* $\delta > 0$.

В самом деле, при $x \in [c + \delta, d - \delta]$ имеем

$$t_n(f, x) - t_n(g, x) = \left(\int_a^{x-\delta} + \int_{x+\delta}^{b} \right) [f(t) - g(t)] \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{nk} \varphi_k(t) \varphi_k(x) \varrho(t)\, dt,$$

и наше утверждение мы получим аналогично выводу соответствующего соотношения в доказательстве теоремы 4.2.2.

Идея доказательства теоремы 4.2.2 дает возможность для более детального исследования свойств сходимости некоторых ортогональных разложений, в том числе и рядов Фурье непрерывных функций. Именно справедлива следующая теорема:

4.2.5. *Пусть система $\{\varphi_n(x)\}$ ортонормирована с весом $\varrho(x)$. Предположим, что функции $\varphi_n(x)$ непрерывны, а функции Лебега $L_n(x)$ системы $\{\varphi_n(x)\}$ на плотном подмножестве интервала ортогональности $[a, b]$ удовлетворяют условию*

$$\varlimsup_{n\to\infty} L_n(x) = \infty.$$

Тогда существует непрерывная на $[a, b]$ функция $f(x)$, разложение которой по системе $\{\varphi_n(x)\}$ сходится только на множестве первой категории из $[a, b]$ и, следовательно, расходится на множестве второй категории.

Выберем плотное в $[a, b]$ счетное множество $\{x_m\}$, на котором, в силу предположения, имеет место соотношение

$$\varlimsup_{n\to\infty} \int_a^b |K_n(t, x_m)|\,\varrho(t)dt = \infty \qquad (m = 1,\ 2, \ldots).$$

Если в (132) положим $\Phi_n(t, x) = K_n(t,\ x_m)$, то из доказательства необходимости (132) заключаем о существовании непрерывной функции $f_n^{(m)}(x)$, для которой $|f_n^{(m)}(x)| \leqslant 1$, причем частичные суммы $s_n(f_n^{(m)},\ x)$ ее $\{\varphi_n(x)\}$-разложения обладают свойством

$$\varlimsup_{n\to\infty} |s_n(f_n^{(m)},\ x_m)| = \infty \qquad (m = 1,\ 2, \ldots).$$

Как нетрудно видеть, $s_n(f, x)$ являются функционалами, определенными на банаховом пространстве C непрерывных функций. Поэтому из теоремы 4.1.2 следует существование непрерывной функции $f(x)$, для которой

$$\varlimsup_{n\to\infty} |s_n(f,\ x_m)| = \infty \qquad (m = 1,\ 2, \ldots).$$

Если через G обозначим множество всех точек $x \in [a,\ b]$, в которых это соотношение имеет место, то G плотно в $[a,\ b]$. Пусть G_{kn} — множество тех точек x, для которых $|s_n(f,\ x)| > k$. Тогда мы имеем

$$G = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} G_{kn}.$$

Так как $|s_n(f, x)|$ непрерывны, то как множества G_{kn}, так и их любые суммы являются открытыми. Поэтому дополнение $F_k^{(m)}$ к $\bigcup_{n=m}^{\infty} G_{kn}$ замкнуто. Оно также и нигде не плотно, ибо G, а тем более $\bigcup_{n=m}^{\infty} G_{kn}$ плотны в $[a, b]$. Отсюда заключаем, что дополнение к G, т. е. множество

$$F = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} F_k^{(m)},$$

является множеством первой категории и, следовательно, G — второй категории. Но множество сходимости последовательности $\{s_n(f, x)\}$ есть часть множества F, в то время как множество расходимости содержит G. Это и доказывает наше утверждение.

Содержание этого параграфа установлено Лебегом [2]. Эквивалентное теореме 4.2.3 утверждение было доказано также (независимо от Лебега) Хааром [1]. Локальная теорема 4.2.4 содержит, в частности, так называемую лемму Римана—Лебега для рядов Фурье. Теорема 4.2.5 принадлежит к кругу идей «теории резонанса» (см. Банах и Штейнгауз [1]). Ясно, что аналогичная теорема справедлива и для произвольных методов суммирования.

В качестве примеров применения теоремы 4.2.3 мы можем получить теорему о равномерной сходимости разложения Хаара для непрерывной функции, доказанную непосредственно в 1.6.2, или же теорему Фейера 1.2.8. Уолш [1] показал, что $(C, 1)$-средние разложений Уолша являются равномерными сингулярными интегралами, ядра которых удовлетворяют условию (132). Отсюда следует, что *разложение Уолша интегрируемой функции $(C, 1)$-суммируемо в каждой точке непрерывности к значению функции и равномерно суммируемо внутри каждого интервала непрерывности.*

§ 3. Сходимость разложений по системам полиномиального вида в точках непрерывности

Высказанные выше общие теоремы можно применить к вопросам сходимости разложений по функциям ортонормированных систем, имеющих полиномиальный вид. Введем следующее понятие: ортонормированная система $\{\varphi_n(x)\}$ полиномиального вида называется *сохраняющей константу*, если $\varphi_0(x) = \text{const}$. Именно, при этом предположении обращаются в нуль все коэффициенты разложения функции $f(x) \equiv C$, за исключением c_0, и, следовательно, для n-й частичной суммы ее разложения справедливо равенство

$$s_n(x) = C \int_a^b \varphi_0(t)\varphi_0(x)d\mu(t) \equiv C,$$

т. е. имеем сохраняющее константу представление. Так как замена одного члена ряда другим не играет роли в вопросах сходимости, то предполагаемое постоянство нулевой функции $\varphi_0(x)$ не ограничивает общности.

Если относительно функций $F_k(t, x)$, входящих в представление ядра (82), мы введем некоторые предположения (которые выполняются для таких классических систем, как системы ортогональных полиномов, тригонометрическая система), то теорему Дирихле—Жордана можно перенести и на системы, имеющие полиномиальный вид.

4.3.1. *Пусть ортонормированная с весом $\varrho(x)$ ограниченная система $\{\varphi_n(x)\}$ имеет полиномиальный вид и сохраняет константу и пусть функции $F_k(t, x)$ непрерывны в квадрате $a \leqslant t \leqslant b$, $a \leqslant x \leqslant b$, кроме, быть может, диагонали $t = x$. Если функция $f(x) \in L_{\varrho(x)}(a, b)$ непрерывна и с ограниченной вариацией на интервале $[c, d]$ из $[a, b]$ и, кроме того, при всех $x \in [a, b]$ выполняется* (130), *то разложение* (133) *сходится равномерно к $f(x)$ на каждом внутреннем к $[c, d]$ подинтервале.*

Пусть $g(x)$ — всюду непрерывная функция с ограниченной вариацией; n-ю частичную сумму ее разложения обозначим через

$$s_n(g, x) = \int_a^b g(t)K_n(t, x)\varrho(t)\,dt.$$

Покажем, что $s_n(g, x)$ являются равномерными сингулярными интегралами. Прежде всего, из $F_k(t, x) = O(|t - x|^{-1})$ следует ограниченность $|F_k(t, x)|$ на $[a, x - \delta] \cup [x + \delta, b]$. Поэтому, учитывая ограниченность системы $\{\varphi_n(x)\}$, находим

$$|K_n(t, x)| = O(1) \sum_{k=1}^{r} |F_k(t, x)| \leqslant \Phi(\delta)$$

$$(x \in [a, b],\ t \in [a, x - \delta] \cup [x + \delta, b]),$$

т. е. для $\Phi_n(t, x) = K_n(t, x)$ соотношение (129) выполняется равномерно. Пусть $[\alpha, \beta]$ — подинтервал из $[a, b]$ и $J = [\alpha, \beta] -$ $- [x - \delta, x + \delta]$. Вследствие оценки

$$\int_J K_n(t, x)\varrho(t)\, dt = O(1) \sum_{k=1}^{r} \sum_{i=-p}^{p} \int_J F_k(t, x)\varphi_{n+i}(t)\varrho(t)\, dt$$

из 1.1.3 выводим

$$\int_J K_n(t, x)\varrho(t)\, dt = o_x(1),$$

т. е. выполняется второе соотношение (128) (равномерность пока не утверждается). Так как система $\{\varphi_n(x)\}$ сохраняет константу, то мы имеем

$$\int_a^b K_n(t, x)\varrho(t) dt = \int_a^b \varphi_0(t)\varphi_0(x)\varrho(t)\, dt = 1$$

и, в силу предыдущего соотношения, получаем

$$\int_{x-\delta}^{x+\delta} K_n(t, x)\varrho(t)\, dt = 1 + o_x(1).$$

Поэтому частичные суммы $s_n(g, x)$ являются сингулярными интегралами. Докажем теперь, что при наших предположениях $s_n(g, x)$ оказываются и равномерными сингулярными интегралами. Действительно, по теореме 4.2.1 из сингулярности выводим, что $\{s_n(g, x)\}$ сходится к $g(x)$ всюду на $[a, b]$, а тогда по теореме Рисса—Фишера 1.2.4 находим

$$\int_a^b [g(x) - S_n(g, x)]^2\, \varrho(x)\, dx = o(1).$$

Так как любую функцию $G \in L^2_{\varrho(x)}$ можно сколь угодно хорошо приблизить в смысле метрики $L^2_{\varrho(x)}$ непрерывными функциями с ограниченной вариацией, то из этой оценки заключаем о существовании последовательности линейных комбинаций

$$S_n(x) = \sum_{m=0}^{\nu_n} a_m^{(n)}\varphi_m(x),$$

для которой

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b [G(x) - S_n(x)]^2 \varrho(x)\, dx = 0.$$

Следовательно, в силу 1.2.6, система $\{\varphi_n(x)\}$ полна. Рассмотрим теперь функции

$$c_n(x) = \int_J F_k(t, x)\varphi_n(t)\varrho(t)\, dt.$$

При фиксированном x они являются коэффициентами разложения функции $G_k(t, x)$, совпадающей с $F_k(t, x)$ на множестве J и равной нулю в остальных точках. Так как $\{\varphi_n(x)\}$ полна, то, согласно 1.2.5, справедливо равенство Парсеваля

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2(x) = \int^b G_k^2(t, x)\varrho(t)\, dt.$$

По предположению, $F_k(t, x)$ непрерывна, а поэтому как функция

$$\int_a^b G_k^2(t, x)\varrho(t)\, dt = \int_J F_k^2(t, x)\varrho(t)\, dt,$$

так и функция $c_n^2(x)$ являются непрерывными. Но тогда по теореме Дини[1] о монотонной последовательности непрерывных функций ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2(x)$ сходится равномерно. Следовательно, равномерно выполняется соотношение

$$c_n(x) = \int_J F_k(t, x)\varphi_n(t)\varrho(t)\, dt = o(1).$$

Отсюда, в силу равенства $\gamma_{i,j,k}^{(n)}\varphi_{n+j}(x) = O(1)$, мы выводим

$$\int_J K_n(t, x)\, \varrho(t)\, dt = o(1).$$

[1] Монотонная последовательность непрерывных функций, предельная функция которой является непрерывной, сходится равномерно. См., например, Лузин Н. Н., Теория функций действительного переменного, М., 1948, стр. 246—248.

Так как система сохраняет константу, то равенство

$$\lim_{n\to\infty}\int_{x-\delta}^{x+\delta} K_n(t, x)\,\varrho(t)\,dt = 1$$

выполняется равномерно, т. е. частичные суммы $s_n(g, x)$ есть равномерные сингулярные интегралы, а потому $\{s_n(g, x)\}$ сходится к $g(x)$ равномерно на $[a, b]$. Но $g(x)$ — любая непрерывная функция с ограниченной вариацией, и мы можем выбрать $g(x) = f(x)$ на $[c, d]$, $g(x) = f(c)$ на $[a, c]$ и $g(x) = f(d)$ на $[d, b]$. Наше утверждение следует тогда из 4.2.4.

При переходе от обычной сходимости к $(C, 1)$-суммируемости сильные требования относительно системы $\{\varphi_n(x)\}$ и функции $f(x)$ могут быть существенно ослаблены.

4.3.2. *Пусть полная ортонормированная с весом $\varrho(x)$ система $\{\varphi_n(x)\}$ имеет полиномиальный вид и сохраняет константу. Предположим, что функции $F_k(t, x)$ непрерывны в квадрате $a \leqslant t \leqslant b$, $a \leqslant x \leqslant b$, за исключением, может быть, диагонали $t = x$, и что на подинтервале $[c, d]$ из $[a, b]$ выполнены два условия*

$$\sum_{k=0}^{n} \varphi_k^2(x) = O(n), \quad 0 \leqslant \varrho(x) \leqslant \text{const}.$$

Если $L^2_{\varrho(x)}$-интегрируемая функция $f(x)$ непрерывна на $[c, d]$, то ее разложение (133) *равномерно $(C, 1)$-суммируемо к $f(x)$ на каждом подинтервале из $[c, d]$.*

Действительно, пусть $G_k(t, x)$ означает функцию, которая совпадает с $f(t)F_k(t, x)$ при $t\in[a, x-\delta] \cup [x+\delta, b]$ и равна нулю при $t\in(x-\delta, x+\delta)$. Как и при доказательстве 3.4.2, для $x\in[c+\delta, d-\delta]$ получаем

$$\left|\left(\int_a^{x-\delta} + \int_{x+\delta}^{b}\right) f(t)K_n^1(t, x)\varrho(t)\,dt\right| =$$

$$= O(1)\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=-p}^{p}\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}\left[\int_a^b G_k(t, x)\varphi_{\nu+i}(t)\varrho(t)\,dt\right]^2\right\}^{1/2}.$$

Справа стоящие интегралы являются $(\nu+i)$-ми коэффициентами разложения $c_{\nu+i}(x)$ функции $G_k(t, x)$, т. е. по теореме 1.2.5

(при фиксированном i) имеем:

$$\sum_{\nu=-i}^{\infty} c_{\nu+i}^2(x) = \int_a^b G_k^2(t, x)\varrho(t)\,dt.$$

Отсюда, как и при доказательстве предыдущей теоремы, следует, что при $\nu \to \infty$ последовательность $\{c_{\nu+i}^2(x)\}$ равномерно стремится к нулю. Поэтому и арифметические средние для $c_{\nu+i}^2(x)$ также равномерно сходятся к нулю, и мы получаем оценку

$$\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}\left[\int_a^b G_k(t, x)\varphi_{\nu+i}(t)\varrho(t)\,dt\right]^2 = o(1).$$

Этим мы доказали, что для $x \in [c+\delta,\ d-\delta]$

$$\left(\int_a^{x-\delta} + \int_{x+\delta}^{b}\right) f(t)K_n^1(t, x)\varrho(t)\,dt = o(1).$$

Таким образом, так как система $\{\varphi_n(x)\}$ сохраняет константу, то соотношение (128) выполняется равномерно для $x \in [c+\delta,$ $d-\delta]$. Далее, по теореме 3.4.3, соотношение (132) справедливо равномерно на $[c+\delta,\ d-\delta]$, а потому наше утверждение следует из 4.2.3.

Эта теорема содержит, в частности, теорему Фейера 1.2.8, а также и обобщение этой теоремы, ибо, согласно 1.5.2, из нашей теоремы следует:

4.3.3. *Пусть* $\{p_n(x)\}$ — *ортонормированная с весом* $\varrho(x)$ *полиномиальная система и на подинтервале* $[c, d]$ *из* $[a, b]$, $\varrho(x)$ *удовлетворяет условию*

$$0 < \varrho_0 \leq \varrho(x) \leq \mathrm{const}.$$

Тогда если $L_{\varrho(x)}^2$-*интегрируемая функция* $f(x)$ *непрерывна на* $[c, d]$, *то на каждом внутреннем к* $[c, d]$ *подинтервале разложение*

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(x)$$

равномерно $(C, 1)$-*суммируемо к* $f(x)$.

Если $\{\varphi_n(x)\}$ или $\{p_n(x)\}$ ограничены на всем интервале ортогональности $[a, b]$, то в двух предшествующих теоремах вместо $L_{\varrho(x)}^2$-интегрируемости достаточно предполагать только $L_{\varrho(x)}$-интегрируемость функции $f(x)$. В этом случае $(C, 1)$-средние, а также и частичные суммы являются равномерными сингулярными интегралами. Если же мы ограничимся частным случаем рядов Фурье, то можем допустить и более слабые методы суммирования, чем $(C, 1)$-средние:

4.3.4. *Если $f(x) \in L(0, 2\pi)$ и функция $f(x)$ непрерывна на подинтервале $[c, d]$ из $[0,2\pi]$, то ряд Фурье*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

равномерно (C, α)-суммируем на $[c+\varepsilon, d-\varepsilon]$ при всех $\alpha > 0$.

Рассмотрим ядро (C, α)-метода для $0 < \alpha < 1$:

$$K_n^\alpha(t, x) = \frac{1}{2\pi A_n^\alpha \sin \frac{t-x}{2}} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)(t-x).$$

Если через $\operatorname{Im}(z)$ обозначим мнимую часть комплексного числа z, то для $K_n^\alpha(t, x)$ получаем следующее представление:

$$K_n^\alpha(t, x) = \frac{1}{2\pi A_n^\alpha \sin \frac{t-x}{2}} \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{m} A_{n-k}^{\alpha-1} e^{i\left(k+\frac{1}{2}\right)(t-x)}\right) =$$

$$= \operatorname{Im}\left(\frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)}}{2\pi A_n^\alpha \sin \frac{t-x}{2}} \sum_{k=0}^{n} A_k^{\alpha-1} e^{-ik(t-x)}\right) =$$

$$= \operatorname{Im}\left\{\frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)}}{2\pi A_n^\alpha \sin \frac{t-x}{2}} \left[\frac{1}{(1-e^{-i(t-x)})^\alpha} - \sum_{k=n+1}^{\infty} A_k^{\alpha-1} e^{-ik(t-x)}\right]\right\}.$$

Так как $1 > \alpha > 0$, то последовательность $\{A_k^{\alpha-1}\}$ положительна и монотонно стремится к нулю, а поэтому, применяя преобразование Абеля, получаем

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} A_k^{\alpha-1} e^{-ik(t-x)}\right| =$$

$$= \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} (A_k^{\alpha-1} - A_{k+1}^{\alpha-1}) \frac{e^{-i(n+1)(t-x)} - e^{-i(k+1)(t-x)}}{1-e^{-i(t-x)}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{|1-e^{-i(t-x)}|} \sum_{k=n+1}^{\infty} (A_k^{\alpha-1} - A_{k+1}^{\alpha-1}) = \frac{2A_{n+1}^{\alpha-1}}{|1-e^{-i(t-x)}|}$$

и, следовательно, для $|K_n^\alpha(t, x)|$ находим оценку

$$|K_n^\alpha(t, x)| \leqslant \frac{C_1}{A_n^\alpha \left|\sin\dfrac{t-x}{2}\right|^{1+\alpha}} + \frac{C_2}{n \sin^2 \dfrac{t-x}{2}},$$

где $C_1, C_2, \ldots$ — не зависящие от n постоянные. Если принять во внимание (25) и неравенство $\left|\sin\dfrac{t-x}{2}\right| \geqslant \dfrac{|t-x|}{\pi}$ при $0 \leqslant |t-x| < \pi$, то последнюю оценку можно записать в форме

$$|K_n^\alpha(t, x)| \leqslant \frac{C_3}{n^\alpha |t-x|^{1+\alpha}} + \frac{C_4}{n(t-x)^2}.$$

Но при $|t-x| \geqslant n^{-1}$ имеем $n(t-x)^2 = n^\alpha |t-x|^{1+\alpha} (n|t-x|)^{1-\alpha} \geqslant n^\alpha |t-x|^{1+\alpha}$, а потому справедлива также и оценка

$$|K_n^\alpha(t, x)| \leqslant \frac{C_5}{n^\alpha |t-x|^{1+\alpha}} \quad \left(\frac{1}{n} \leqslant |t-x| \leqslant \pi\right). \tag{134}$$

Так как функция $K_n^\alpha(t, x)$ в точке $t = x$ достигает абсолютного максимума, то получаем, что

$$|K_n^\alpha(t, x)| \leqslant \frac{1}{\pi A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1}\left(k + \frac{1}{2}\right) \leqslant C_6 n \tag{135}$$

и, стало быть,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |K_n^\alpha(t, x)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2C_5}{n^\alpha}\left(\int_0^{x-\frac{1}{n}} + \int_{x+\frac{1}{n}}^{\pi}\right)\frac{dt}{|t-x|^{1+\alpha}} + 2C_6 n \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} dt \leqslant C_7,$$

как бы мы ни выбирали точку $x \in [-\pi, \pi]$, т. е. условие (132) выполняется равномерно. Так как непосредственно из определения ядра $K_n^\alpha(t, x)$ следует равномерная сингулярность интеграла

$$\sigma_n^\alpha(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, K_n^\alpha(t, x)\, dt,$$

то наше утверждение для случая $0 < \alpha < 1$, есть следствие из теоремы 4.2.3. Но если теорема 4.3.4. верна для $0 < \alpha < 1$, то она верна, в силу теоремы 2.1.3, также и для случая $\alpha \geqslant 1$, т. е. теорема 4.3.4 справедлива при всех $\alpha > 0$.

Теоремы 4.3.1 и 4.3.2 в данной здесь общей формулировке являются новыми. Теорема 4.3.3 установлена Фрайдом [1], а теорема 4.3.4 доказана независимо друг от друга Чепменом [1] и М. Риссом [1]. Приведенное в этом тексте упрощенное доказательство оценки $|K_n^\alpha(t, x)|$ предложено М. Риссом [2].

Любопытно, что теорема 4.3.2 обеспечивает равномерную $(C, 1)$-суммируемость разложения (133) в интервале непрерывности $f(x)$ даже тогда, когда функции $\varphi_n(x)$ разрывны. Это явление мы наблюдали уже при разложеиии по разрывной системе Хаара (теорема 1.6.2). Кроме того, как следует из результатов Уолша [1] и Файна [1], разложения по разрывной системе Уолша также равномерно $(C, 1)$-суммируемы на интервалах непрерывности.

§ 4. Сходимость сингулярных интегралов в точках Лебега

Предыдущие рассуждения о сходимости сингулярных интегралов не имеют непосредственной связи с вопросами сходимости ортогональных разложений произвольной L- интегрируемой функции, ибо мы занимались только сходимостью в точках непрерывности, а L-интегрируемая функция может не иметь точек непрерывности. Поэтому желательно было бы найти необходимые и достаточные условия сходимости на классе тех точек, которые, за исключением, может быть, нуль-множества, заполняют весь интервал определения любой L-интегрируемой функции. Важный класс точек такого вида образуется так называемыми точками Лебега. Точка x называется *точкой Лебега* L-интегрируемой функции $f(x)$, если существует зависящее от x число c такое, что в точке x выполняется условие

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - c| \, dt = 0.$$

Справедлива следующая теорема:

4.4.1. *Если $f(x)$ есть L-интегрируемая функция на $[a, b]$, то почти все $x \in [a, b]$ являются точками Лебега функции $f(x)$, причем почти всюду $c = f(x)$.*

Рациональные числа мы расположим в последовательность $\{r_n\}$ и через E_n обозначим множество тех точек $x \in [a, b]$, которые не удовлетворяют соотношению

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(t)-r_n|\,dt = |f(x)-r_n|.$$

Как легко видеть, E_n является нуль-множеством, ибо интеграл $\int_a^x |f(t)-r_n|\,dt$ имеет почти всюду производную $|f(x)-r_n|$. Следовательно, и $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ также является нуль-множеством.

Докажем теперь, что все множество $[a, b]-E$ состоит из точек Лебега функции $f(x)$. В самом деле, пусть $x \in [a, b]-E$. По заданному $\varepsilon > 0$ определим r_n так, чтобы выполнялось неравенство $|f(x)-r_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Так как $x \notin E$, то при достаточно малых $|h|$ имеем

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(t)-f(x)|\,dt < \frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(t)-r_n|\,dt + \frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(x)-r_n|\,dt <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т. е. x действительно есть точка Лебега для $f(x)$.

Ясно, что точки непрерывности функции $f(x)$ являются точками Лебега.

4.4.2. *Пусть интегралы*

$$I_n(f, x) = \int_a^b f(t)\,\Phi_n(t, x)\,dt$$

существуют для каждой $f \in L$. Для того чтобы $I_n(f, x)$ в каждой точке Лебега x произвольной L-интегрируемой функции $f(t)$ сходились к значению c, необходимо и достаточно, чтобы $I_n(f, x)$ были сингулярными интегралами и, кроме того, чтобы выполнялось соотношение

$$\int_a^b \Psi_n(t, x)\,dt = O(1), \tag{136}$$

где

$$\Psi_n(t, x) = \begin{cases} \operatorname*{vrai\,max}_{t \leqslant u \leqslant b} |\Phi_n(u, x)| & \text{при } t \geqslant x, \\ \operatorname*{vrai\,max}_{a \leqslant u \leqslant t} |\Phi_n(u, x)| & \text{при } t < x. \end{cases}$$

Доказательство достаточности сравнительно просто. Ради сокращения вычислений мы можем, очевидно, считать $[a, b] = [0, 1]$, так как иначе с помощью линейного преобразования $[a, b]$ можно было бы отобразить на $[0, 1]$. Кроме того, положим

$$M_n^{(m)} = \operatorname*{vrai\,max}_{x+2^{-m-1} \leqslant t \leqslant x+2^{-m}} |\Phi_n(t, x)|,$$

и пусть N — наименьшее натуральное число, для которого точка $x + 2^{-N+1}$ еще принадлежит к $[0, 1]$. Тогда из определения $\Psi_n(t, x)$ при $x + 2^{-m-1} \leqslant t \leqslant x + 2^{-m}$ имеем неравенство $\Psi_n(t, x) \geqslant M_n^{(m-1)}$. Отсюда мы получаем оценку

$$\int^{1} \Psi_n(t, x)\, dt \geqslant \sum_{m=N}^{\infty} \int_{x+2^{-m-1}}^{x+2^{-m}} \Psi_n(t, x)\, dt \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{m=N}^{\infty} M_n^{(m-1)} \int_{x+2^{-m-1}}^{x+2^{-m}} dt = \frac{1}{4} \sum_{m=N-1}^{\infty} \frac{M_n^{(m)}}{2^m}.$$

Из (136) следует существование не зависящей от n константы K, для которой

$$\sum_{m=N-1}^{\infty} \frac{M_n^{(m)}}{2^m} \leqslant K \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Выберем число $k \geqslant N$ настолько большим, чтобы для всех $m \geqslant k$ и для любого $\varepsilon > 0$ выполнялось неравенство

$$2^m \int_{x+2^{-m-1}}^{x+2^{-m}} |f(t) - c|\, dt < \frac{\varepsilon}{4K}.$$

Это возможно, ибо если выбрать $h = 2^{-m}$, то

$$2^m \int_{x+2^{-m-1}}^{x+2^{-m}} |f(t) - c|\, dt \leqslant \frac{1}{h} \int_{x}^{x+h} |f(t) - c|\, dt.$$

Однако справа стоящий интеграл с ростом m стремится к нулю, так как x есть точка Лебега. Отсюда мы получаем оценку:

$$\int_x^{x+2^{-k}} |f(t)-c|\,|\Phi_n(t,x)|\,dt \leqslant \sum_{m=k}^{\infty} \int_{x+2^{-m-1}}^{x+2^{-m}} |f(t)-c|\,|\Phi_n(t,x)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=k}^{\infty} \frac{M_n^{(m)}}{2^m} 2^m \int_{x+2^{-m-1}}^{x+2^{-m}} |f(t)-c|\,dt < \frac{\varepsilon}{4K} \sum_{m=k}^{\infty} \frac{M_n^{(m)}}{2^m} \leqslant \frac{\varepsilon}{4}.$$

Так как $I_n(f, x)$ — сингулярные интегралы, то, как и при доказательстве 4.2.2, для достаточно больших n выводим

$$\left| \int_x^1 [f(t)-c]\,\Phi_n(t,x)\,dt - \int_x^{x+2^{-k}} [f(t)-c]\,\Phi_n(t,x)\,dt \right| < \frac{\varepsilon}{4},$$

а потому

$$\left| \int_x^1 [f(t)-c]\,\Phi_n(t,x)\,dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Совершенно аналогично мы получаем оценку

$$\left| \int_0^x [f(t)-c]\,\Phi_n(t,x)\,dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Эта оценка эквивалентна тому, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 [f(t)-c]\,\Phi_n(t,x)\,dt = 0.$$

Таким образом, принимая во внимание равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 c\Phi_n(t,x)\,dt = c,$$

мы выводим соотношение

$$\lim_{n\to\infty} I_n(f,x) = c,$$

Для доказательства необходимости мы заметим, что если $I_n(f, x) \to c$ для любой $f \in L$, то выполняется (128) и, более того, для любой $f \in L$ справедливо равенство

$$\left(\int\limits_a^{x-\delta} + \int\limits_{x+\delta}^{b} \right) f(t)\, \Phi_n(t, x)\, dt = o(1).$$

Однако, как отмечалось в 4.1.4, это возможно для всех $f \in L$ только тогда, когда выполняется (129). Итак, сингулярность интегралов $I_n(f, x)$ является необходимым условием. Поэтому нам нужно еще доказать необходимость требования (136). Положим $[a, b] = [0, 1]$ и $x = 0$, тогда мы имеем

$$\Psi_n(t, 0) = \operatorname*{vrai\,max}_{t \leqslant u \leqslant 1} |\Phi_n(u, 0)|.$$

Мы утверждаем, что из предположения

$$\varlimsup_{n \to \infty} \int\limits_0^1 \Psi_n(t, 0)\, dt = \infty \tag{137}$$

следует существование L-интегрируемой функции $f(x)$, для которой точка 0 является точкой Лебега, но в то же время последовательность $\{I_n(f, 0)\}$ не сходится к значению функции $f(0) = 0$. Через L_0 обозначим пространство L-интегрируемых на $[0, 1]$ функций $f(x)$, для которых $f(0) = 0$ и точка $x = 0$ есть точка Лебега с $c = f(0)$. Метрику в L_0 определим следующим образом:

$$\|f\|^* = \sup_{0 < h \leqslant 1} \frac{1}{h} \int\limits_0^h |f(x)|\, dx.$$

Покажем, что L_0 есть банахово пространство. Пусть $\{f_n\}$ — фундаментальная последовательность из L_0, т. е. $\|f_n - f_m\|^* \to 0$ при $m, n \to \infty$. Эта последовательность содержит подпоследовательность $\{f_{\nu_n}\}$, для которой $\|f_{\nu_{n+1}} - f_{\nu_n}\|^* < 2^{-n}$. Тогда по теореме 1.2.1 заключаем о существовании L-интегрируемой функции $f(x)$, к которой почти всюду на $[0, 1]$ сходится последовательность $\{f_{\nu_n}(x)\}$, и такой, что $\|f - f_{\nu_n}\|^* < 2^{-n+1}$. Как легко видеть, $f(0) = 0$. Теперь мы покажем, что точка нуль есть точка Лебега функции $f(x)$. В самом деле, для каждого $\varepsilon > 0$ существует число $N = N(\varepsilon)$, для которого $\|f - f_{\nu_N}\|^* < \frac{\varepsilon}{2}$. Кроме того, так как точка нуль является точкой Лебега функций $f_{\nu_n}(x)$, то существует такое число $h(N, \varepsilon)$, что при $0 < h \leqslant h(N, \varepsilon)$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{h}\int_0^h | f_{\nu_N}(x) | \, dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Это означает, что

$$\frac{1}{h}\int_0^h | f(x) | \, dx < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{h}\int_0^h | f_{\nu_N}(x) | \, dx < \varepsilon.$$

Стало быть, точка нуль является точкой Лебега функции $f(x)$, а потому f принадлежит к L_0 и, очевидно, $\|f_n - f\|^* \to 0$; иными словами, L_0 есть банахово пространство.

Положим $U_n(f) = I_n(f, 0)$. Чтобы показать, что $U_n(f)$ есть линейный функционал на L_0, мы введем следующее обозначение:

$$M_n^{(m)} = \operatorname*{vrai\,max}_{2^{-m-1} \leqslant t \leqslant 2^{-m}} | \Phi_n(t, x) |.$$

Пусть, далее, интегралы $I_n(f, 0)$ существуют для всех L-интегрируемых функций $f(x)$. По теореме 4.1.3 заключаем отсюда, что при каждом фиксированном n величина

$$M_n = \operatorname*{vrai\,max}_{0 \leqslant t \leqslant 1} | \Phi_n(t, 0) |$$

является конечной. Поэтому из неравенства $M_n^{(m)} \leqslant M_n$ мы выводим

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{M_n^{(m)}}{2^{m+1}} \leqslant M_n < \infty.$$

Следовательно,

$$| U_n(f) | \leqslant \int_0^1 | f(t) | \, | \Phi_n(t, 0) | \, dt \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} M_n^{(m)} \int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} | f(t) | \, dt =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{M_n^{(m)}}{2^m} 2^m \int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} | f(t) | \, dt \leqslant \| f \|^* \sum_{m=0}^{\infty} \frac{M_n^{(m)}}{2^m} \leqslant 2M_n \| f \|^*.$$

Таким образом, $U_n(f)$ действительно является линейным функционалом на L_0.

Через $E_n^{(m)}$ обозначим t-множество из интервала $[2^{-m-1}, 2^{-m}]$, на котором имеет место неравенство $|\Phi_n(t,0)| \geqslant \frac{M_n^{(m)}}{2}$. Мера $|E_n^{(m)}|$ этого множества не равна нулю, а поэтому для каждого m и фиксированного n можно определить функцию $g_n^{(m)}(t)$ следующим образом:

$$g_n^{(m)}(t) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sign} \Phi_n(t,0)}{|E_n^{(m)}|} & \text{при } t \in E_n^{(m)}, \\ 0 & \text{при остальных } t. \end{cases}$$

Тогда, с одной стороны, имеем

$$\int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} |g_n^{(m)}(t)|\, dt = \frac{1}{|E_n^{(m)}|} \int_{E_n^{(m)}} dt = 1,$$

а с другой стороны,

$$\int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} g_n^{(m)}(t)\, \Phi_n(t,0)\, dt = \frac{1}{|E_n^{(m)}|} \int_{E_n^{(m)}} |\Phi_n(t,0)|\, dt \geqslant \frac{M_n^{(m)}}{2}. \qquad (138)$$

При каждом значении n мы определим теперь функцию $f_n(t)$ с помощью равенства

$$f_n(t) = \frac{g_n^{(m)}(t)}{2^{m+2}\lambda_m} \qquad (t \in (2^{-m-1}, 2^{-m}],\ m = 0, 1, \ldots),$$

где $\{\lambda_m\}$ — монотонная последовательность чисел ($\lambda_0 \geqslant 1$), стремящихся к бесконечности, для которой

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{M_n^{(m)}}{2^m \lambda_m} \geqslant \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{M_n^{(m)}}{2^m}.$$

Конструкция такой последовательности $\{\lambda_m\}$ очевидна. Функция $f_n(t)$ L-интегрируема и $f_n(0) = 0$. Кроме того, если $2^{-k-1} < h \leqslant 2^{-k}$, то

$$\frac{1}{h} \int_0^h |f_n(t)|\, dt \leqslant 2^{k+1} \int_0^{2^{-k}} |f_n(t)|\, dt = 2^{k+1} \sum_{m=k}^{\infty} \frac{1}{2^{m+2}\lambda_m} \int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} |g_n^{(m)}(t)|\, dt =$$

$$= 2^{k+1} \sum_{m=k}^{\infty} \frac{1}{2^{m+2}\lambda_m} \leqslant \frac{1}{\lambda_k},$$

откуда заключаем, что

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h |f_n(t)|\,dt = 0$$

и, с другой стороны, что $\|f_n\|^* \leqslant 1$. Поэтому точка нуль есть точка Лебега функции $f_n(t)$, т. е. $f_n(t) \in L_0$. Далее, из (138) выводим оценку снизу

$$|U_n(f_n)| = \left|\sum_{m=0}^{\infty}\int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} f_n(t)\,\Phi_n(t, 0)\,dt\right| =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2^{m+2}\lambda_m}\int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} g_n^{(m)}(t)\,\Phi_n(t, 0)\,dt \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{M_n^{(m)}}{2^{m+2}\lambda_m} \geqslant \frac{1}{16}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{M_n^{(m)}}{2^m}.$$

Но из определения функции $\Psi_n(t, 0)$ имеем

$$\int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} \Psi_n(t, 0)\,dt \leqslant \frac{1}{2^{m+1}}\sum_{k=0}^{m} M_n^{(k)},$$

откуда следует оценка

$$\int_0^1 \Psi_n(t, 0)\,dt = \sum_{m=0}^{\infty}\int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} \Psi_n(t, 0)\,dt \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} M_n^{(k)}\sum_{m=k}^{\infty}\frac{1}{2^{m+1}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{M_n^{(k)}}{2^k} \leqslant 16\,|U_n(f_n)|.$$

Поэтому из предположения (137) следует, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|U_n(f_n)| = \infty,$$

а отсюда по теореме 4.1.1 заключаем о существовании точки $f \in L_0$, для которой

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|U_n(f)| = \infty.$$

Но тогда $U_n(f) = I_n(f, 0)$ не может сходиться к числу $c = f(0) = 0$, а это противоречит предположению. Таким образом, необходимость условия (136) доказана.

Эта теорема становится более наглядной, если мы заметим, что $\Psi_n(t, x)$ монотонно возрастает на $[a, x)$, монотонно убывает на $[x, b]$ и почти всюду не меньше $|\Phi_n(t, x)|$. Если каждую функцию такого вида называть «горбатой мажорантой» для $|\Phi_n(t, x)|$, то $\Psi_n(t, x)$ является наименьшей горбатой мажорантой. Поэтому теорема 4.4.2 утверждает, что $I_n(f, x)$ во всех точках Лебега сходится к числу c тогда и только тогда, когда $|\Phi_n(t, x)|$ имеют интегрируемые горбатые мажоранты, интегралы от которых ограничены в своей совокупности; при этом число c, в силу теоремы 4.4.1, почти всюду совпадает со значениями $f(x)$. Например, на этой теореме основана (C, α)-суммируемость ряда Фурье.

4.4.3. *Ряд Фурье*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

L-интегрируемой функции (C, α)-суммируем в каждой точке Лебега этой функции при любом $\alpha > 0$, причем его сумма почти всюду совпадает с $f(x)$. В точках скачка $f(x)$ (C, α)-средние сходятся к значению $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$.

Представим (C, α)-средние ряда Фурье в виде

$$\sigma_n^\alpha(x) = \int_0^\pi \frac{f(t) + f(-t)}{2} 2K_n^\alpha(t, x)\, dt.$$

Рассмотрим функцию

$$\Psi_n^\alpha(t, x) = C(\alpha) \frac{n}{1 + (n\,|t - x|)^{1+\alpha}},$$

где константа $C(\alpha)$ зависит только от α. Эта функция монотонно возрастает на $[0, x)$ и монотонно убывает на $(x, \pi]$. Мы утверждаем, что она является горбатой мажорантой для $2|K_n^\alpha(t, x)|$. Действительно, принимая во внимание (134), при $\pi \geqslant |t - x|^{-1} \geqslant n^{-1}$ мы получаем следующую оценку снизу:

$$\Psi_n^\alpha(t, x) \geqslant \frac{C(\alpha)}{n^\alpha\,|t - x|^{1+\alpha}} \geqslant 2\,|K_n^\alpha(t, x)|,$$

где $C(\alpha) \geqslant 2C_5$. Кроме того, учитывая (135), при $|t-x| \leqslant n^{-1}$ мы находим

$$\Psi_n^\alpha(t, x) \geqslant \frac{C(\alpha)n}{2} \geqslant 2\,|K_n^\alpha(t, x)|,$$

где $C(\alpha) \geqslant 4C_6$. Таким образом, $\Psi_n^\alpha(t, x)$ является горбатой мажорантой для $2\,|K_n^\alpha(t, x)|$. Далее,

$$\int_0^\pi \Psi_n^\alpha(t, x)\,dt \leqslant 2C(\alpha)\int_0^{n\pi} \frac{du}{1+u^{1+\alpha}} < 2C(\alpha)\left(1+\frac{1}{\alpha}\right),$$

т. е. выполняется (136). Так как каждая точка Лебега функции $f(t)$ является точкой Лебега и функции $\frac{f(t)+f(-t)}{2}$ и так как в каждой точке x скачка функции $f(t)$ имеем

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}\left|\frac{f(t)+f(-t)}{2}-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right|dt = 0,$$

то наше утверждение есть непосредственное следствие из теорем 4.4.2 и 4.4.1[1].

В каждой точке Лебега функция $f(x)$ является производной своего интеграла[2], а обратное неверно, так как су-

[1] При доказательстве теоремы 4.4.3 автором допущено много путаницы. На самом деле имеет место равенство

$$\sigma_n^\alpha(x) = \int_0^\pi \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}\,2K_n^\alpha(t)\,dt,$$

где ядро $2K_n^\alpha(t)$ имеет горбатую мажоранту с $x=0$. Далее рассуждения должны идти, как у автора, но только следует учесть, что если x — точка Лебега функции $f(t)$, то для функции $\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}$ точка $t=0$ тоже будет точкой Лебега. Если же функция $f(t)$ имеет разрыв первого рода в точке x, то

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right|dt = 0.$$

— *Прим. ред.*

[2] Здесь автор использует другое определение точки Лебега (ср. с началом § 4): x_0 есть точка Лебега, если $\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}|f(t)-f(x_0)|\,dt \to 0$. — *Прим. ред.*

ществуют противоречащие примеры. Поэтому более широкий критерий сходимости, чем в 4.4.3, дает следующая теорема:

4.4.4. *Пусть L-интегрируемая функция $f(t)$ в точке x является производной своего интеграла. Если сингулярные интегралы $I_n(f, x)$ существуют и если $\Phi_n(t, x)$ неотрицательны, монотонно возрастают на $[a, x)$ и монотонно убывают на $(x, b]$, то $I_n(f, x)$ сходятся к $f(x)$.*

Из сингулярности в точке x следует соотношение

$$I_n(f, x) - f(x) = \int\limits_{x-\delta}^{x+\delta} [f(t) - f(x)]\, \Phi_n(t, x)\, dt + o(1).$$

Через $F(t, x)$ обозначим тот интеграл от $f(t)—f(x)$, для которого $F(x, x) = 0$. Интегрирование по частям дает

$$\left|\int\limits_{x-\delta}^{x+\delta}\right| \leqslant \left|\left[\frac{F(t, x)}{t-x}(t-x)\,\Phi_n(t,x)\right]_{x-\delta}^{x+\delta}\right| + \int\limits_{x-\delta}^{x+\delta}\left|\frac{F(t, x)}{t-x}\right|(x-t)\, d\Phi_n(t,x).$$

В силу сингулярности, имеем $\Phi_n(x+\delta, x) = O(1)$ и $\Phi_n(x-\delta, x) = O(1)$. Далее, по предположению, $f(t) - f(x)|_{t=x} = 0$ есть производная от $F(t, x)$ в точке $t = x$, поэтому

$$\frac{F(t, x)}{t-x} = o(1) \qquad (\delta \to 0).$$

Таким образом, справедливо равенство

$$I_n(f, x) - f(x) = o(1) + o(1)\int\limits_{x-\delta}^{x+\delta}(x-t)\, d\Phi_n(t, x),$$

из которого выводим соотношение

$$I_n(f, x) - f(x) = o(1) + o(1)\int\limits_{x-\delta}^{x+\delta}(x-t)\, d\Phi_n(t, x) =$$

$$= o(1) + o(1)\left[(x-t)\,\Phi_n(t, x)\right]_{x-\delta}^{x+\delta} + o(1)\int\limits_{x-\delta}^{x+\delta}\Phi_n(t, x)\, dt =$$

$$= o(1) + o(1)\int\limits_{x-\delta}^{x+\delta}\Phi_n(t, x)\, dt.$$

Из сингулярности интегралов $I_n(f, x)$ следует ограниченность последнего интеграла при всех n, а потому $I_n(f, x) - f(x) = o(1)$, как это и утверждалось нами.

Вспомним доказательство теоремы 1.6.1, где мы подсчитывали ядро ортонормированной системы Хаара $\{\chi_n^{(k)}(x)\}$. Оказывается, что $K_n(t, x)$ удовлетворяет условиям теоремы 4.4.4. Зато ядро Фейера $K_n^1(t, x)$ тригонометрической системы не является монотонным ни для $t < x$, ни для $t > x$. Поэтому можно предполагать, что существует L-интегрируемая функция $f(t)$, такая, что ее ряд Фурье не суммируем методом $(C, 1)$ в точке $t = x$, хотя в этой точке $f(x)$ является производной своего интеграла. Эффективный пример в этом случае построен Ханом [1]. Тем не менее справедлива следующая теорема, которая имеет большое значение в теории гармонических функций:

4.4.5. *Через*

$$f(r, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)r^n \qquad (0 < r < 1)$$

обозначим r-е средние Абеля—Пуассона ряда Фурье L-интегрируемой функции $f(x)$. Тогда в каждой точке x, в которой $f(x)$ является производной своего интеграла, справедливо равенство

$$\lim_{r \to 1} f(r, x) = f(x).$$

Рассматривая вещественную часть степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in\theta}$, находим

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta = \frac{1 - r^2}{2(1 - 2r \cos \theta + r^2)} .$$

Отсюда следует равенство

$$f(r, x) = \int_0^{\pi} \frac{f(t) + f(-t)}{2} P_r(t, x)\, dt,$$

где

$$P_r(t, x) = \frac{1 - r^2}{\pi(1 - 2r \cos (t - x) + r^2)} .$$

Производная от ядра $P_r(t, x)$, т. е. функция

$$P'_r(t, x) = -\sin (t - x) \frac{2r(1 - r^2)}{\pi(1 - 2r \cos (t - x) + r^2)^2} ,$$

$\geqslant 0$ при $t < x$ и $\leqslant 0$ при $t > x$, а потому $P_r(t, x)$ монотонно возрастает на $[0, x)$, монотонно убывает на $(x, \pi]$ и, кроме того, $P_r(t, x) \geqslant 0$. Так как ясно, что интегралы

$$f(r, x) = \int_0^\pi f(t) P_r(t, x)\, dt$$

являются сингулярными, то наше утверждение следует непосредственно из 4.4.4[1].

Понятие точек Лебега введено Лебегом [1] при исследовании сходимости $(C, 1)$-средних ряда Фурье. Им установлена также и теорема 4.4.1. Теорема 4.4.2 доказана Фаддеевым [1]. Основная идея нашего доказательства дана Крейном и Левиным [1] и Тандори [11]. Идея построения горбатой мажоранты для ядра применялась впервые Фейером в частном случае $(C, 1)$-суммирования рядов Фурье. Теорема 4.4.3 доказана Харди [1] и М. Риссом [2]. Данное нами доказательство представляет собой объединение доказательства М. Рисса [2] с предложенным Фейером способом построения горбатой мажоранты тригонометрического ядра. В случае $\alpha = 1$ теорема 4.4.3 доказана Лебегом [1]. Теорема 4.4.4 получена Романовским [1], в то время как 4.4.5 впервые доказана Фату [1]. Она остается верной, если в ней A-суммирование заменить (C, α)-суммированием с произвольным $\alpha > 1$; при $\alpha = 2$ это показано Лебегом [1], а для произвольных $\alpha > 1$ независимо друг от друга Приваловым [1] и Юнгом [1]. Частный случай высказанного в 4.4.3 утверждения о том, что $(C, \alpha > 0)$-средние ряда Фурье в точках скачка $f(x)$ сходятся к $\dfrac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ при $\alpha = 1$ доказан уже Фейером [1], [2], а для произвольных $\alpha > 0$ — Чепменом [1] и М. Риссом [1].

Точки Лебега L-интегрируемой функции $f(x)$, также как и точки, в которых $f(x)$ является производной своего интеграла, заполняют почти весь интервал $[a, b]$. Можно также искать другие условия, которые обеспечивают сходимость почти всюду сингулярных интегралов для любой L-интегрируемой функции. Приведем два относящихся к этому вопросу отрицательных результата:

1. *Не существует такого ядра $\Phi_n(t, x)$, чтобы сингулярные интегралы $I_n(f, x)$ для каждой L-интегрируемой функции сходились к $f(x)$ во всех точках, где $f(x)$ аппроксимативно непрерывна* (Натансон [1]). Заметим, что точки аппроксимативной непрерывности заполняют почти весь интервал $[a, b]$.

---

[1] Здесь так же, как и в теореме 4.4.3, допущена неточность. На самом деле справедлива формула

$$f(r, x) = \int_0^\pi \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} P_r(t, 0)\, dt,$$

где $P_r(t, 0)$ убывает на отрезке $0 \leqslant t \leqslant \pi$. — *Прим. ред.*

2. *Существуют сингулярные интегралы, ядра которых равномерно на* $[a, b]$ *удовлетворяют условию* (132), *но для соответствующим образом выбранной* L*-интегрируемой функции* $f(x)$ *последовательность* $\{I_n(f, x)\}$ *расходится на множестве положительной меры* (Загорский [1]).

Сформулированные утверждения, по-видимому, можно перенести на L^p-интегрируемые функции ($1 < p < 2$) так, чтобы при этом $\Phi_n(t, x)$ являлись ядрами некоторого метода суммирования ортонормированной системы. Подход к доказательствам утверждений такого рода мы можем, вероятно, найти в теореме о расходимости Орлича [2]. Было бы интересно доказать, что для суммируемости почти всюду методом Чезаро разложений всех L^p-интегрируемых функций ($p < 2$) условие (92) уже не будет достаточным. Это предположение возникает из того, что по теореме 3.3.1 подобное утверждение неверно при $p = 2$. Доказательство этого утверждения дало бы возможность получить новые сведения о существенно различном поведении разложений L^2- и L^p-интегрируемых функций ($p < 2$).

Как показано в 4.4.3, ряд Фурье L-интегрируемой функции $(C, \alpha > 0)$-суммируем почти всюду. Аналогичное утверждение для разложений по общим ограниченным ортогональным полиномам неизвестно даже в случае A-суммируемости. Однако если мы рассмотрим $L^p_{\varrho(x)}$-интегрируемые функции с $p > 1$, то можно даже утверждать сильную сходимость их разложений по системам, имеющим полиномиальный вид.

Назовем x *точкой Лебега* p*-го порядка*, коротко l_p*-точкой*, если

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|^p \varrho(t)\, dt = 0.$$

Для L^p-интегрируемой функции $f(x)$ почти все точки x являются ее l_p-точками (доказательство этого утверждения совершенно аналогично доказательству 4.4.1). Тандори [3] доказал следующую теорему, которая в случае суммирования рядов Фурье была доказана ранее Карлеманом [1]:

Пусть ограниченная на интервале $[c, d] \subset [a, b]$ *система* $\{\varphi_n(x)\}$ *имеет полиномиальный вид и сохраняет константу и пусть* L^p_μ*-интегрируемая* ($p > 1$) *на* $[c, d]$ *функция* $f(x)$ *является* L^2_μ*-интегрируемой на* $[a, c]$ *и* $[d, b]$. *Тогда для любой* l_p*-точки из* $[c, d]$, *т. е. почти всюду на* $[c, d]$, *и для произвольного* $r > 0$ *справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} |f(x) - s_k(x)|^r = 0. \qquad (*)$$

Доказательство аналогично доказательству 3.4.2; отличие состоит только в том, что при оценке преобразованных интегральных сумм $\sum_{\nu=0}^{n} |I_{\nu 2}|$ и $\sum_{\nu=0}^{n} |I_{\nu 3}|$ вместо неравенства Бесселя нужно применить так называемое неравенство Хаусдорфа—Юнга[1]. Тандори [3] продолжил эту

[1] См. Качмаж С. и Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов, М., 1958, стр. 237—242.

теорему, доказав, что при $\alpha > 0$ почти всюду справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{A_n^{\alpha}} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} |f(x) - s_k(x)|^r = 0,$$

из которого непосредственно вытекает следующее обобщение теоремы 3.4.1:

Если функции системы $\{\varphi_n(x)\}$ полиномиального вида ограничены на $[c, d]$ и если $f \in L_{\mu}^{p}(c, d)$ с $p > 1$ и $f \in L_{\mu}^{2}(a, c) \cup L_{\mu}^{2}(d, b)$, то разложение $f(x)$ по системе $\{\varphi_n(x)\}$ $(C, \alpha > 0)$-суммируемо почти всюду на (c, d).

Соотношение (*) выполняется, конечно, в каждой точке непрерывности и выполняется даже равномерно внутри интервала непрерывности. Поэтому можно было бы спросить: а нельзя ли в случае непрерывных функций условие (*) расширить до условия

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} |f(x) - s_k(x)|^{\lambda_k} = 0 \tag{**}$$

с надлежащим образом выбранными монотонно стремящимися к бесконечности λ_n? Туран [1] доказал, что это неверно уже для рядов Фурье:

Для любой монотонной последовательности $\{\lambda_n\}$ с $\lambda_n \to \infty$ существует непрерывная функция, ряд Фурье которой в отдельных точках не удовлетворяет условию (**).

Однако все же остается неясным, не будет ли все-таки соотношение (**) иметь место почти всюду.

Если при исследовании сильной суммируемости ортогональных разложений мы хотим перейти от L-интегрируемых функций к L^p-интегрируемым с $p > 1$, то при этом появляются большие трудности. Марцинкевич [4] доказал, что *ряд Фурье почти всюду сильно суммируем*. Проблема сильной суммируемости в отдельных точках была рассмотрена Тандори [4], который показал, что *ряд Фурье сильно суммируем в любой точке x, для которой равномерно по $k > 0$ выполняется равенство*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^3 + hk} \int_{-h}^{h} |f(x+u) - f(x)|\, du \int_{u-k}^{u+k} |f(x+v) - f(v)|\, dv = 0;$$

кроме того, Тандори показал, что *это условие выполняется равномерно по k для почти всех x*. Однако неверно, что ряд Фурье сильно суммируем в любой точке Лебега; это доказали Литтлвуд и Харди [2], построив противоречащий пример.

§ 5. Общие замечания о порядке приближения

Сформулируем следующую классическую проблему: пусть на интервале $[a, b]$ заданы класс функций $\mathfrak{K}$ и система функций $\{f_n(x)\}$. Что можно сказать о порядке приближения

$$\sup_{a \leqslant x \leqslant b} \Big| f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_{nk} f_k(x) \Big|,$$

если не делать никаких других предположений, кроме того, что $f \in \mathfrak{K}$? Удовлетворительный ответ на этот вопрос и на другие подобные вопросы можно дать, очевидно, лишь при специально выбранных системах $\{f_n(x)\}$. Мы не будем вдаваться в дальнейшие подробности, которые изучаются конструктивной теорией функций[1]. Однако знание порядка приближения класса функций линейными комбинациями из ортонормированной системы имеет также значение и для общей теории сходимости ортогональных разложений, а поэтому мы сделаем краткий обзор некоторых результатов из теории приближения функций.

Обозначим через $\mathfrak{K}$ некоторый класс функций, а через $\{\varphi_n(x)\}$ — заданную на $[a, b]$ ортонормированную систему. С помощью вещественных чисел a_{nk} мы образуем (при фиксированном натуральном n) линейные комбинации функций $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ формы

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{nk}\varphi_k(x).$$

Предположим, что $d_n(f)$ есть нижняя грань по различным возможным комбинациям $S_n(x)$ следующих разностей $\sup\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - S_n(x)|$, т. е.

$$d_n(f) = \inf_{S_n(x)} \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - S_n(x)|.$$

Неотрицательное число

$$\varrho_n(\mathfrak{K}) = \sup_{f \in \mathfrak{K}} d_n(f)$$

называется *наилучшим приближением класса* $\mathfrak{K}$ линейными комбинациями $S_n(x)$. Докажем следующую теорему:

4.5.1. *Через $s_n(f, x)$ обозначим n-ю частичную сумму разложения $f(x)$ по системе $\{\varphi_n(x)\}$, а через $L_n(x)$ — n-ю функцию Лебега этой системы. Тогда для приближения любой функции $f(x)$ из класса $\mathfrak{K}$ в точке $x \in [a, b]$ справедливо неравенство*

$$|f(x) - s_n(f, x)| \leqslant \varrho_n(\mathfrak{K}) [1 + L_n(x)].$$

[1] Хороший обзор основных положений этой теории можно найти, например, в книге: Натансон И. П., Конструктивная теория функций, М. — Л., 1949.

В самом деле, пусть $\varepsilon > 0$ произвольно и пусть $S_n(f, x)$ — линейная комбинация, для которой

$$\sup_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - S_n(f, x)| < d_n(f) + \varepsilon;$$

тогда

$$|f(x) - s_n(f, x)| \leqslant |f(x) - S_n(f, x)| + |S_n(f, x) - s_n(S_n, x)| + \\ + |s_n(S_n, x) - s_n(f, x)|.$$

Принимая во внимание ортонормированность системы $\{\varphi_n(x)\}$, мы находим

$$S_n(f, x) - s_n(S_n, x) = S_n(f, x) - \int_a^b S_n(f, t) \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(t)\varphi_k(x)\, d\mu(t) = \\ = S_n(f, x) - \sum_{k=0}^{n} a_{nk}\varphi_k(x) = 0.$$

Далее, имеем

$$|s_n(S_n, x) - s_n(f, x)| \leqslant \int_a^b |S_n(f, t) - f(t)|\,|K_n(t, x)|\, d\mu(t) \leqslant \\ \leqslant \sup_{a \leqslant t \leqslant b} |S_n(f, t) - f(t)| \int_a^b |K_n(t, x)|\, d\mu(t) \leqslant (d_n(f) + \varepsilon)\, L_n(x).$$

Поэтому из неравенства для $|f(x) - s_n(f, x)|$ следует наше утверждение.

Можно также указать и другую связь сходимости с порядком приближения функций класса $\mathfrak{K}$; эта связь основана на приближении в смысле расстояния в L^p_μ. Действительно, если через $d_n^{(p)}(f)$ обозначим нижнюю грань чисел

$$\left\{ \int_a^b |f(x) - S_n(x)|^p\, d\mu(x) \right\}^{1/p}$$

по всем линейным комбинациям формы $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{nk}\varphi_k(x)$, то величина

$$\varrho_n(\mathfrak{K}, p) = \sup_{f \in \mathfrak{K}} d_n^{(p)}(f)$$

будет мерой приближения функций из $\mathfrak{R}$ линейными комбинациями $S_n(x)$ и достигается в пространстве L^p_μ. Поэтому $\varrho_n(\mathfrak{R}, p)$ можно рассматривать как наилучшее приближение класса $\mathfrak{R}$ в смысле L^p_μ-аппроксимации.

Во второй главе мы занимались следующим вопросом: при каких условиях из сходимости ряда $\sum c_n^2\lambda(n)$ с $0 < \lambda(n) \leqslant \lambda(n+1)$ можно заключить о сходимости или суммируемости разложения (133)? Связь этого вопроса с аппроксимацией в пространстве L^2_μ устанавливается такой теоремой:

4.5.2. *Пусть неубывающая вогнутая снизу функция $\lambda(x) > 0$ имеет производную $\lambda'(x)$. Тогда для всех функций $f \in \mathfrak{R}(\subset L^2_\mu)$ из сходимости ряда $\sum \lambda'(n)\varrho^2_{n-1}(\mathfrak{R}, 2)$ следует сходимость ряда $\sum c_n^2\lambda(n)$.*

Пусть n_0 — фиксированное натуральное число. Тогда при $n > n_0$

$$\lambda(n) = \int_{n_0}^{n} \lambda'(x)dx + \lambda(n_0),$$

а потому, учитывая вытекающее из вогнутости $\lambda(x)$ монотонное убывание производной $\lambda'(x) \geqslant 0$, получаем

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} c_n^2\lambda(n) = \sum_{n=n_0}^{\infty} c_n^2 \int_{n_0}^{n} \lambda'(x)\,dx + \lambda(n_0) \sum_{n=n_0}^{\infty} c_n^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=n_0}^{\infty} c_n^2 \sum_{k=n_0}^{n} \lambda'(k) + O(1) = \sum_{k=n_0}^{\infty} \lambda'(k) \sum_{n=k}^{\infty} c_n^2 + O(1).$$

Но, согласно 1.1.2,

$$\varrho_k^2(\mathfrak{R}, 2) = \sup_{f\in\mathfrak{R}} \int_a^b [f(x) - s_k(x)]^2\, d\mu(x) = \sup_{f\in\mathfrak{R}} \sum_{n=k+1}^{\infty} c_n^2,$$

а потому

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} c_n^2\lambda(n) \leqslant \sum_{k=n_0}^{\infty} \lambda'(k)\varrho^2_{k-1}(\mathfrak{R}, 2) + O(1),$$

откуда и следует утверждение нашей теоремы.

Как видно из этих двух теорем, исследование порядка приближения класса функций линейными комбинациями ортонормированной системы имеет значение не только само по себе, но также и для общих вопросов сходимости. Интересен тот факт, что этот порядок приближения для большинства важных классов функций не может быть сделан ниже некоторой определенной границы, характерной для каждого класса. Чтобы доказать это, мы установим следующую лемму:

4.5.3. *Пусть* $\{\varphi_n(x)\}$ *и* $\{\psi_n(x)\}$ — *две определенные на* $[0, 1]$ *ортонормированные по мере* $\mu(x) = x$ *системы и пусть заданные числа* $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ *и* $M_1, M_2, \ldots, M_m$ *удовлетворяют условиям*

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_i^2 \leqslant n, \qquad M_k > 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Положим также

$$S_n(\gamma, f, x) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i c_i \varphi_i(x),$$

где через c_i *обозначены коэффициенты разложения функции* $f(x)$ *по системе* $\{\varphi_n(x)\}$. *Тогда для величины*

$$\alpha(m, n, p) = \max_{1 \leqslant k \leqslant m} \frac{\|\psi_k - S_n(\gamma, \psi_k)\|_p}{M_k}$$

справедлива следующая оценка снизу:

$$\alpha(m, n, p) \geqslant \frac{\sum\limits_{k=0}^{m} \|\psi_k\|_p - \sqrt{mn}}{\sum\limits_{k=0}^{m} M_k},$$

где $1 \leqslant p \leqslant 2$ *и через* $\|g\|_p$ *обозначена* L^p*-норма функции* $g \in L^p$.

Пусть $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)$ — произвольные L^q-интегрируемые функции. Применяя неравенство Гёльдера (126) и неравенство Минковского (125) с показателем q/p при $1 \leqslant p \leqslant q$, мы выводим

$$\left\{\sum_{k=1}^{m} \int_0^1 |f_k(x)|^p\,dx\right\}^{1/p} \leqslant \left\{\sum_{k=1}^{m} \left[\int_0^1 |f_k(x)|^q\,dx\right]^{p/q}\right\}^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{m^{\frac{q-p}{q}} \left[\sum_{k=1}^{m} \int_0^1 |f_k(x)|^q\,dx\right]^{p/q}\right\}^{1/p} = m^{\frac{q-p}{pq}} \left\{\sum_{k=1}^{m} \int_0^1 |f_k(x)|^q\,dx\right\}^{1/q}.$$

Вводя обозначение

$$\mathfrak{M}_r = m^{\frac{r-1}{r}} \left\{ \sum_{k=1}^{m} \int_0^1 |f_k(x)|^r \, dx \right\}^{1/r},$$

мы имеем

$$\mathfrak{M}_p \leqslant m^{\frac{p-1}{p}+\frac{q-p}{pq}} \left\{ \sum_{k=1}^{m} \int_0^1 |f_k(x)|^q \, dx \right\}^{1/q} = \mathfrak{M}_q.$$

Следовательно, величина $\mathfrak{M}_p$ монотонно возрастает вместе с p. Если теперь мы рассмотрим ядро

$$K_n(\gamma, t, x) = \sum_{k=0}^{n} \gamma_i \varphi_i(t) \varphi_i(x),$$

то $S_n(\gamma, \psi_k, x)$ можно записать в форме

$$S_n(\gamma, \psi_k, x) = \int_0^1 \psi_k(t) K_n(\gamma, t, x) \, dt.$$

Применяя неравенство Гёльдера (126), находим

$$\sum_{k=1}^{m} \| S_n(\gamma, \psi_k) \|_p \leqslant m^{\frac{p-1}{p}} \left\{ \sum_{k=1}^{m} \| S_n(\gamma, \psi_k) \|_p^p \right\}^{1/p} =$$

$$= m^{\frac{p-1}{p}} \left\{ \sum_{k=1}^{m} \int_0^1 \left| \int_0^1 \psi_k(t) K_n(\gamma, t, x) \, dt \right|^p dx \right\}^{1/p}.$$

Если мы обозначим

$$f_k(x) = \int_0^1 \psi_k(t) K_n(\gamma, t, x) dt,$$

то справа стоящее выражение представляет собой $\mathfrak{M}_p$. Но тогда при $1 \leqslant p \leqslant 2$ имеем $\mathfrak{M}_p \leqslant \mathfrak{M}_2$, а потому

$$\sum_{k=1}^{m} \| S_n(\gamma, \psi_k) \|_p \leqslant m^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_0^1 \sum_{k=1}^{m} \left[\int_0^1 \psi_k(t) K_n(\gamma, t, x) \, dt \right]^2 dx \right\}^{1/2}.$$

В квадратных скобках стоит коэффициент разложения функции $K_n(\gamma, t, x)$ по ортонормированной системе $\{\psi_k(t)\}$. Поэтому, применяя неравенство Бесселя (5) и принимая во внимание введенные нами предположения на числа γ_i, мы получаем

$$\sum_{k=1}^{m} \| S_n(\gamma, \psi_k) \|_p \leqslant m^{1/2} \left\{ \int_0^1 \left[\int_0^1 K_n^2(\gamma, t, x) dt \right] dx \right\}^{1/2} =$$

$$= m^{1/2} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^2 \right\}^{1/2} \leqslant \sqrt{mn}.$$

Применяя неравенство Минковского (125), выводим отсюда

$$\sum_{k=0}^{m} \| \psi_k \|_p \leqslant \sum_{k=1}^{m} \| \psi_k - S_n(\gamma, \psi_k) \|_p + \sum_{k=1}^{m} \| S_n(\gamma, \psi_k) \|_p \leqslant$$

$$\leqslant \alpha(m, n, p) \sum_{k=1}^{m} M_k + \sqrt{mn},$$

а это и доказывает наше утверждение.

С помощью этой леммы можно оценить снизу порядок приближения важнейших классов функций. В самом деле, рассмотрим величины

$$\omega_p(f, \delta) = \sup_{|h| \leqslant \delta} \left\{ \frac{1}{b-a} \int_a^b | f(x+h) - f(x) |^p \, dx \right\}^{1/p},$$

где $f(x)$ вне интервала $[a, b]$ определена с помощью равенства $f(x + b - a) = f(x)$. Эти величины называются *L_p-модулями непрерывности* функции $f(x)$. Так как из неравенства Гёльдера (126) следует монотонное возрастание $\omega_p(f, \delta)$ с ростом p, то предел $\omega_\infty(f, \delta) = \lim\limits_{p \to \infty} \omega_p(f, \delta)$ существует и $\omega_\infty(f, \delta) = \sup\limits_{|h| \leqslant \delta} \operatorname{vrai} \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x+h) - f(x)|$. Для непрерывных функций эта величина совпадает с обычными модулями непрерывности

$$\omega(f, \delta) = \sup_{|h| \leqslant \delta} \max_{a \leqslant x \leqslant b} | f(x+h) - f(x) |,$$

а поэтому в дальнейшем под символом $\omega_\infty(f, \delta)$ мы всегда будем понимать модуль непрерывности $\omega(f, \delta)$. Заметим, что при любом $p \geqslant 1$ справедливо неравенство $\omega(f, \delta) \geqslant \omega_p(f, \delta)$.

4.5.4. *Пусть $\mathfrak{N}$ — класс непрерывных на* $[0, 1]$ *функций с модулями непрерывности $\omega(f, \delta) > 0$ и пусть система $\{\sqrt{2} \cos k\pi x\}$ принадлежит этому классу. Если числа $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ удовлет-*

воряют условию $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i^2 \leqslant n$, *то существует абсолютная постоянная* $K > 0$, *такая, что для любой определенной на* $[0, 1]$ *ортонормированной в обычном смысле системы справедливо неравенство*

$$\sup_{f \in \mathfrak{X}} \frac{\| f - S_n(\gamma, f) \|_p}{\omega\left(f, \frac{1}{n}\right)} \geqslant K \qquad (1 \leqslant p \leqslant \infty).$$

Так как $\| f - S_n(\gamma, f) \|_p$ монотонно возрастает вместе с p, то наше утверждение достаточно доказать только при $p = 1$. Применим лемму 4.5.3 с $\psi_k(x) = \sqrt{2} \cos k\pi x$, $m = 2n$ и $M_k = \omega\left(\psi_k, \frac{1}{n}\right)$. Учитывая соотношения

$$\| \psi_k \|_1 = \sqrt{2} \int_0^1 |\cos k\pi x| \, dx = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}, \qquad \omega\left(\psi_k, \frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{\sqrt{2}\, k\pi}{n},$$

выводим оценку

$$\alpha(2n, n, 1) \geqslant \frac{\frac{4\sqrt{2}}{\pi} n - \sqrt{2}\, n}{\sum_{k=1}^{2n} \frac{\sqrt{2}\, k\pi}{n}} > \frac{1}{4\pi}\left(\frac{4}{\pi} - 1\right) = K.$$

Так как система $\{\psi_k(x)\} = \{\sqrt{2} \cos k\pi x\}$ принадлежит к $\mathfrak{X}$, то

$$\sup_{f \in \mathfrak{X}} \frac{\| f - S_n(\gamma, f) \|}{\omega\left(f, \frac{1}{n}\right)} \geqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant 2n} \frac{\| \psi_k - S_n(\gamma, \psi_k) \|}{\omega\left(\psi_k, \frac{1}{n}\right)} = \alpha(2n, n, 1) \geqslant K,$$

и наше утверждение доказано.

Теорема 4.5.1 имеет большое значение в теории приближения; она установлена Лебегом [3]. Хотя в частных случаях многие авторы использовали у себя в работах идеи, примененные в доказательстве 4.5.2, тем не менее в общей формулировке эта теорема впервые была доказана Алексичем и Краликом [1]. Теоремы 4.5.3 и 4.5.4 даны Б. Надем [2]. Один частный случай ранее был доказан Рудиным[1]. Теорема 4.5.4 утверждает, что, грубо говоря, порядок суммирования разложений всех непрерывных функций по произвольной ортонормированной системе с помощью n-х средних регулярного метода не может быть лучше, чем $K\omega\left(f, \frac{1}{n}\right)$.

Теоремы Б. Надя содержат как случаи классов $\operatorname{Lip}\alpha$, так и случай класса Дини—Липшица порядка α. Эти классы совпадают с введенными выше классами $\mathfrak{X}$ при $\omega(f, \delta) = O(\delta^\alpha)$ и $0 < \alpha \leqslant 1$ и, соответственно, при $\omega(f, \delta) = O[(\log^1/\delta)^{-\alpha}]$ и $\alpha > 0$. Однако Б. Надь высказал теорему 4.5.4 в еще более общей форме. Именно, пусть $\mathfrak{X}^{(r)}$ есть класс всех функций $f(x)$, r-я производная которых $f^{(r)}(x)$ имеет модуль непрерывности $\omega(f^{(r)}, \delta) = O(\delta)$. Тогда теорема 4.5.4 может быть обобщена:

Если $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i^2 \leqslant n$, то существует такая абсолютная постоянная $K_r > 0$, что для любой определенной на $[0, 1]$ *ортонормированной системы справедливо соотношение*

$$\sup_{f \in \mathfrak{X}^{(r)}} \frac{\|f - S_n(\gamma, f)\|_p}{\omega\left(f^{(r)}, \dfrac{1}{n}\right)} \geqslant \frac{K_r}{n^r}.$$

Доказательство аналогично приведенному выше, только нужно выбрать $M_k = \omega\left(f^{(r)}, \dfrac{1}{n}\right)$.

Эти результаты носят отрицательный характер, ибо для порядка наилучшего приближения они дают оценку снизу. Едва ли можно получить положительные результаты в случае общих ортогональных рядов. Тем не менее существует, например, результат такого рода (Алексич—Кралик [2]): *Пусть $\theta(x)$ — положительная монотонно возрастающая к ∞ функция и пусть из условия $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2\theta^2(n) < \infty$ следует* $(C, 1)$*-суммируемость почти всюду на* $[a, b]$ *ортогонального ряда $\sum c_n\varphi_n(x)$. Далее, если $f(x)$ есть функция, определяемая по теореме Рисса—Фишера рядом $\sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$ и если $\lambda(x)$ — положительная, вогнутая снизу, монотонно стремящаяся к ∞ функция, для которой при некотором фиксированном γ $(0 < \gamma < 1)$ отношение $x^\gamma/\lambda(x)$ при достаточно больших x монотонно растет, то из условия $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2\theta^2(n)\,\lambda^2(n) < \infty$ для* $(C, 1)$*-средних $\sigma_n(x)$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$ вытекает соотношение*

$$|\sigma_n(x) - f(x)| = o_x\left(\frac{1}{\lambda(n)}\right).$$

§ 6. Аппроксимативные свойства некоторых ортогональных систем

Теперь мы покажем, что определенная в теореме 4.5.4 величина $\varrho_n(\mathfrak{X})$, являющаяся нижней гранью наилучших приближений с помощью линейных комбинаций из функций ортонормированной системы, действительно достигается в некоторых частных случаях. После этого с помощью вспомогательных теорем 4.5.1 и 4.5.2 мы выведем различные теоремы сходимости, которые едва ли можно получить без этих аппроксимационных свойств. Конечно, ортогональные разложения, обнаруживающие такого рода сходимость, имеют до некоторой степени специальные свойства.

Очень простым является случай системы Хаара $\{\chi_n^{(k)}(x)\}$, так как частичные суммы разложения Хаара уже удовлетворяют нашим требованиям:

4.6.1. *Пусть $f(x)$ — непрерывная функция, $\omega(f, \delta)$ — ее модуль непрерывности и $s_n(x)$ — n-я частичная сумма ее разложения Хаара. Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |f(x)-s_n(x)| = O\left[\omega\left(f, \frac{1}{n}\right)\right].$$

Если число n мы запишем в виде $n=2^m+k$, где $k=1, \ldots, 2^m$, то, как показано на стр. 58, справедливо неравенство

$$|s_n(x)-f(x)| \leqslant \frac{1}{|I_m^{(k)}|}\int\limits_{I_m^{(k)}} |f(t)-f(x)|\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{|J_m^{(k)}|}\int\limits_{J_m^{(k)}} |f(t)-f(x)|\,dt \qquad (x\in I_m^{(k)} \quad \text{или} \quad x\in J_m^{(k)}).$$

При этом меры $|I_m^{(k)}|$ и $|J_m^{(k)}|$ имеют значения $\frac{1}{2^{m+1}}$, $\frac{1}{2^m}$, $\frac{3}{2^{m+1}}$ или $\frac{1}{2^{m-1}}$. Таким образом, $|t-x|\leqslant\frac{1}{2^{m-2}}$, а поэтому

$$|s_n(x)-f(x)| \leqslant \frac{3}{2}\omega\left(f, \frac{1}{2^{m-2}}\right).$$

Но, как нетрудно видеть,

$$\omega\left(f, \frac{1}{2^{m-2}}\right) = \omega\left(f, \frac{8}{2^{m+1}}\right) \leqslant 8\omega\left(f, \frac{1}{2^{m+1}}\right) \leqslant 8\omega\left(f, \frac{1}{n}\right),$$

что и доказывает наше утверждение.

Согласно 4.5.4, эта теорема является точной. Жаль только, что она доказана лишь в частном случае системы Хаара. Аналогичного утверждения уже нельзя установить для многих других ортонормированных систем, например для систем полиномиального вида.

Через $\omega(f, \delta; c, d)$ обозначим модуль непрерывности функции $f(x)$ на интервале $[c, d]$, т. е.

$$\omega(f, \delta; c, d) = \sup_{\substack{|t-x|\leq\delta \\ t, x \in [c, d]}} |f(t) - f(x)|,$$

а через $\omega(\delta)$ — мажоранту функции $\omega(f, \delta; c, d)$, т. е. функцию, удовлетворяющую условию

$$\omega(\delta) \geqslant \omega(f, \delta; c, d).$$

4.6.2. *Пусть ортонормированная с весом $\varrho(x)$ система $\{\varphi_n(x)\}$ имеет полиномиальный вид и сохраняет константу и пусть равномерно на подинтервале $[c, d]$ из $[a, b]$ выполнены условия*

$$\sum_{k=0}^{n} \varphi_k^2(x) = O(n), \qquad 0 \leqslant \varrho(x) \leqslant \text{const}. \tag{139}$$

Через $s_n(x)$ обозначим n-ю частичную сумму разложения $L^2_{\varrho(x)}$-интегрируемой на $[a, b]$ и непрерывной на $[c, d]$ функции $f(x)$ с модулем непрерывности $\omega(f, \delta; c, d)$. Если $\omega(f, \delta; c, d)$ имеет мажоранту $\omega(\delta)$, для которой при некотором фиксированном $\gamma > 0$ отношение $\omega(\delta)/\delta^{\frac{1}{2}-\gamma}$ при $\delta \to 0$ монотонно возрастает к бесконечности, то равномерно на каждом интервале $[c + \varepsilon, d - \varepsilon] \subset (c, d)$ выполняется соотношение

$$\frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} |f(x) - s_\nu(x)| = O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{140}$$

Так как система сохраняет константу, то

$$\sum_{\nu=0}^{n} |s_\nu(x) - f(x)| = \sum_{\nu=0}^{n} \left| \int_a^b [f(t) - f(x)] K_\nu(t, x) \varrho(t)\, dt \right|. \tag{141}$$

Если $x \in [c + \varepsilon, d - \varepsilon]$, то при $n \geqslant n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$ стоящие справа интегралы можно разбить на три части:

$$I_{\nu 1} = \int_a^c + \int_d^b, \quad I_{\nu 2} = \int_c^{x-\frac{1}{n}} + \int_{x+\frac{1}{n}}^d, \quad I_{\nu 3} = \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}}.$$

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 3.4.2. В самом деле, если функции, входящие в представление ядра $K_n(t, x)$ (см. (82)), обозначены через $F_k(t, x)$ $(k = 1, 2, \ldots, r)$, то мы полагаем

$$g_k(t, x) = \begin{cases} [f(t) - f(x)]\, F_k(t, x) & \text{при} \quad t \in [a, c] \cup [d, b], \\ 0 & \text{при} \quad \text{остальных } t. \end{cases}$$

Применяя неравенство Коши, находим

$$\sum_{\nu=n_\varepsilon}^{n} |I_{\nu 1}| \leqslant \sum_{\nu=n_\varepsilon}^{n} \sum_{k=1}^{r} \sum_{i,j=-p}^{p} |\gamma_{i,j,k}^{(\nu)} \varphi_{\nu+j}(x)| \left| \int_a^b g_k(t, x)\, \varphi_{\nu+i}(t)\, \varrho(t)\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{r} \sum_{i,j=-p}^{p} \left\{ \sum_{\nu=n_\varepsilon}^{n} (\gamma_{i,j,k}^{(\nu)})^2 \varphi_{\nu+j}^2(x) \cdot \sum_{\nu=n_\varepsilon}^{n} \left[\int_a^b g_k(t, x)\, \varphi_{\nu+i}(t)\, \varrho(t)\, dt \right]^2 \right\}^{1/2}.$$

Учитывая условия $\gamma_{i,j,k}^{(\nu)} = O(1)$ и (139), получаем

$$\sum_{\nu=n_\varepsilon}^{n} (\gamma_{i,j,k}^{(\nu)})^2 \varphi_{\nu+j}^2(x) = O(1) \sum_{k=0}^{n+p} \varphi_k^2(x) = O(n).$$

Далее, применяем неравенство Бесселя (5):

$$\sum_{\nu=n_\varepsilon}^{n} \left[\int_a^b g_k(t, x)\, \varphi_{\nu+i}(t)\, \varrho(t)\, dt \right]^2 \leqslant \int_a^b g_k^2(t, x)\, \varrho(t)\, dt.$$

Учитывая все эти результаты, мы выводим

$$\sum_{\nu=n_\varepsilon}^{n} |I_{\nu 1}| = O(\sqrt{n}) \sum_{k=1}^{r} \left\{ \int_a^b g_k^2(t, x)\, \varrho(t)\, dt \right\}^{1/2}.$$

Так как $F_k(t, x) = O(|t - x|^{-1})$, то вследствие неравенства $|t - x| \geqslant \varepsilon$ величина $|F_k(t, x)|$ остается ограниченной при $t \in [a, c] \cup [d, b]$, а потому

$$\sum_{\nu=n_\varepsilon}^{n} |I_{\nu 1}| = O(\sqrt{n}) \left(\int_a^c + \int_d^b \right) [f(t) - f(x)]^2\, \varrho(t)\, dt = O(\sqrt{n}).$$

Далее, так как, по предположению, $n^{\frac{1}{2} - \gamma}\, \omega\left(\frac{1}{n}\right)$ с ростом n монотонно возрастает к бесконечности, то для достаточно больших n имеем $n^{\frac{1}{2}-\gamma}\omega\left(\frac{1}{n}\right)>1$, или, другими словами, $n\omega\left(\frac{1}{n}\right)>$ $>\sqrt{n}$. Следовательно, справедлива оценка

$$\sum_{\nu=n_\varepsilon}^{n}|I_{\nu1}| = O(n)\,\omega\left(\frac{1}{n}\right). \tag{142}$$

Сумму с $|I_{\nu2}|$ можно оценить точно таким же образом. Пусть

$$h_k(t,x)=\begin{cases}[f(t)-f(x)]\,F_k(t,x) & \text{при } t\in\left[c,x-\frac{1}{n}\right]\cup\left[x+\frac{1}{n},d\right],\\ 0 & \text{при остальных } t.\end{cases}$$

Как и в случае оценки $\sum|I_{\nu1}|$, находим

$$\sum_{\nu=n_\varepsilon}^{n}|I_{\nu2}| = O(\sqrt{n})\sum_{k=1}^{r}\left\{\int_a^b h_k^2(t,x)\,\varrho(t)\,dt\right\}^{1/2}.$$

Поэтому из второго условия (139) и из $F_k(t,x)=O(|t-x|^{-1})$ получаем

$$\sum_{\nu=n_\varepsilon}^{n}|I_{\nu2}| = O(\sqrt{n})\left\{\left(\int_c^{x-\frac{1}{n}}+\int_{x+\frac{1}{n}}^{d}\right)\left[\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\right]^2 dt\right\}^{1/2} =$$

$$= O(\sqrt{n})\left\{\left(\int_c^{x-\frac{1}{n}}+\int_{x+\frac{1}{n}}^{d}\right)\frac{\omega^2(|t-x|)}{(t-x)^2}\,dt\right\}^{1/2},$$

и, принимая во внимание монотонное возрастание отношения $\omega^2(|u|)/|u|^{1-2\gamma}$, выводим

$$\sum_{\nu=n_\varepsilon}^{n}|I_{\nu2}| = O(\sqrt{n})\left\{n^{1-2\gamma}\omega^2\left(\frac{1}{n}\right)\left(\int_{c-x}^{-\frac{1}{n}}+\int_{\frac{1}{n}}^{d-x}\right)\frac{du}{u^{1+2\gamma}}\right\}^{1/2}.$$

Другими словами,

$$\sum_{\nu=n_\varepsilon}^{n}|I_{\nu2}| = O(n)\,\omega\left(\frac{1}{n}\right). \tag{143}$$

Для оценки суммы интегралов $\sum |I_{\nu 3}|$ мы прежде всего, применяя неравенство Шварца (6), получаем

$$I_{\nu 3}^2 \leqslant \int\limits_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} [f(t)-f(x)]^2 \varrho(t)\, dt \int\limits_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} K_\nu^2(t, x)\, \varrho(t)\, dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{\nu} \varphi_k^2(x) \int\limits_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} [f(t)-f(x)]^2 \varrho(t)\, dt.$$

Отсюда, учитывая (139), находим

$$I_{\nu 3}^2 = O(\nu) \int\limits_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} [f(t)-f(x)]^2\, dt = O(\nu)\, \omega^2\left(\frac{1}{n}\right)\frac{2}{n},$$

а потому

$$\sum_{\nu=n_\varepsilon}^{n} |I_{\nu 3}| = O(n)\, \omega\left(\frac{1}{n}\right). \tag{144}$$

Из соотношений (142), (143) и (144) следует оценка

$$\sum_{\nu=n_\varepsilon}^{n} (|I_{\nu 1}| + |I_{\nu 2}| + |I_{\nu 3}|) = O(n)\, \omega\left(\frac{1}{n}\right),$$

а тогда из (141) имеем

$$\sum_{\nu=0}^{n} |s_\nu(x)-f(x)| = \sum_{\nu=0}^{n_\varepsilon-1} |s_\nu(x)-f(x)| + O(n)\omega\left(\frac{1}{n}\right).$$

Но так как, в силу (139), при $\nu < n_\varepsilon$ разность $|s_\nu(x)-f(x)|$ имеет порядок $O(1)$, а это даже больше, чем $O(n)\omega\left(\frac{1}{n}\right)$, ибо $n\omega\left(\frac{1}{n}\right) \to \infty$, то заключаем, что

$$\sum_{\nu=0}^{n} |s_\nu(x)-f(x)| = O(n)\omega\left(\frac{1}{n}\right),$$

как мы и утверждали.

Отметим отдельно один частный случай этой теоремы, отличающийся своей простотой:

4.6.3. *Если* $0 < \varrho_0 \leqslant \varrho(x) \leqslant \mathrm{const}$ *на интервале* $[c, d]$ *и* $\omega(f, \delta; c, d) \leqslant \leqslant \omega(\delta)$, *где* $\omega(\delta)/\delta^{\frac{1}{2}-\gamma}$ *монотонно стремится к* $+\infty$ *при* $\delta \to 0$, *то для частичных сумм* $s_n(x)$ *разложения* $f(x)$ *по ортонормированным с весом* $\varrho(x)$ *полиномам равномерно на* $[c+\varepsilon, d-\varepsilon] \subset \subset (c, d)$ *справедливо соотношение*

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|f(x)-s_k(x)| = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

В самом деле, при заданных условиях из 1.5.2 следует выполнение (139).

Недостаток теоремы 4.6.2 состоит в том, что она не дает порядка приближения в окрестности граничной точки в том случае, когда (139) выполняется на всем интервале ортогональности $[a, b]$ и $f(x)$ непрерывна всюду на $[a, b]$. Но этот недостаток только кажущийся, ибо имеет место следующая теорема:

4.6.4. *Если* (139) *выполняется на всем интервале ортогональности* $[a, b]$ *и модуль непрерывности* $\omega(f, \delta)$ *имеет мажоранту* $\omega(\delta)$, *для которой отношение* $\omega(\delta)/\delta^{\frac{1}{2}-\gamma}$ *монотонно возрастает к бесконечности при* $\delta \to 0$, *то оценка* (140) *справедлива равномерно на* $[a, b]$.

Мы ограничимся только случаем $[a, b] = [0, 1]$, так как при оценке линейное преобразование может лишь изменить константу. Функции $f(x)$, $\varrho(x)$ и $\varphi_n(x)$ продолжим четно на $[-1, 0]$, т. е. положим $f(-x) = f(x)$, $\varrho(-x) = \varrho(x)$ и $\varphi_n(-x) = \varphi_n(x)$, а затем полученные функции продолжаем непрерывно и периодически. Тогда $\{\varphi_n(x)\}$ — периодическая ортонормированная с весом $\varrho(x)/2$ система, имеющая полиномиальный вид и сохраняющая константу, причем представление (82) для ядра $K_n(t, x)$ сохраняется на $[-1, 1]$. Используя периодичность, теорему 4.6.2 мы можем применить на любом интервале длины 2. Тогда соотношение (140) остается справедливым на любом интервале длины $2-\varepsilon$ с $\varepsilon > 0$. А поэтому (140) справедливо на всем интервале $[0, 1]$, как это и утверждалось.

Теорема 4.6.1 доказана Б. Надем [2], остальные теоремы являются новыми. Только частный случай теорем 4.6.2 и 4.6.3, а именно случай, когда $f(x)$ на $[c, d]$ удовлетворяет условию Липшица порядка α с $0 < \alpha <$

$< \frac{1}{2}$, т. е. когда $\omega(\delta) = \delta^{\alpha}$, был доказан Алексичем [11]. Но мы можем выбрать $\omega(\delta)$ равным, например, $(\log 1/\delta)^{\alpha}$ с $\alpha > 0$, и тогда указанные выше теоремы справедливы также для функций, удовлетворяющих условию Дини—Липшица порядка α или еще более тонким условиям непрерывности. Отметим, что 4.6.2 и 4.6.3 содержат теоремы 4.3.2 и 4.3.3 и представляют собой значительное расширение этих теорем.

Теорема 4.6.4 в случае $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ усиливает известную теорему Бернштейна [1] в направлении сильной суммируемости. Теорема Бернштейна в ее начальной форме относится к приближению периодических функций суммами Фейера. В несколько расширенной форме она формулируется следующим образом (относительно расширения см. Якоб [1] и Алексич [1]):

Если периодическая функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица порядка α с $0 < \alpha < 1$, то в случае $0 < \alpha < \delta \leqslant 1$ для приближения этой функции (C, δ)-средними $\sigma_n^{(\delta)}(x)$ ее ряда Фурье справедливо равенство

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} | f(x) - \sigma_n^{\delta}(x) | = O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right).$$

Доказательство очень просто. Принимая во внимание условие Липшица, из (134) находим

$$\left(\int_0^{x-\frac{1}{n}} + \int_{x+\frac{1}{n}}^{\pi}\right) |f(t) - f(x)| \, |K_n^{\delta}(t, x)| \, dt =$$

$$= O\left(\frac{1}{n^{\delta}}\right) \left(\int_0^{x-\frac{1}{n}} + \int_{x+\frac{1}{n}}^{\pi}\right) \frac{dt}{| t - x |^{1+\delta-\alpha}} = O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right).$$

Далее, из (135) следует оценка

$$\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} | f(t) - f(x) | \, | K_n^{\delta}(t, x) | \, dt = O(n) \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} | t - x |^{\alpha} \, dt = O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right).$$

Непосредственно из этих двух оценок и вытекает расширенная теорема Бернштейна.

Точно таким же образом при $0 < \alpha \leqslant \delta \leqslant 1$ доказывается соотношение

$$\max_{a \leqslant x \leqslant 2\pi} | f(x) - \sigma_n^{(\delta)}(x)| = O\left(\frac{\log n}{n^{\alpha}}\right).$$

В случае $\alpha = \delta = 1$ эта теорема доказана Бернштейном.

Интересно, что ортонормированная система Уолша обнаруживает такие же аппроксимативные свойства, как и ряды Фурье. В самом деле, если через $\sigma_n(x)$ обозначим n-е $(C, 1)$-средние разложения Уолша функции $f(x)$, удовлетворяющей на $[0, 1]$ условию Липшица $|f(t) - f(x)| = O(|t-x|^\alpha)$ с $0 < \alpha < 1$, то справедливо равенство (Файн [1])

$$\sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x) - \sigma_n(x)| = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Как доказательство теоремы Бернштейна опирается на природу ядра Фейера, так и доказательство этого аппроксимативного свойства разложения Уолша опирается на специальную природу n-го ядра Уолша $K_n^1(t, x)$.

Приближение полиномами. Наиболее употребительными в теории приближения функций полиномами являются тригонометрические и алгебраические полиномы. Исходя из этого, мы приведем некоторые часто применяемые аппроксимативные теоремы. Рассмотрим прежде всего тригонометрические полиномы.

4.6.5. *Если непрерывная функция $f(x)$ периода 2π имеет модуль непрерывности $\omega(f, \delta)$, то существует тригонометрический полином $T_n(x)$ порядка не выше n такой, что*

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} |f(x) - T_n(x)| = O\left[\omega\left(f, \frac{1}{n}\right)\right].$$

Рассмотрим интегралы

$$J_n(x) = \frac{3}{2\pi n(2n^2+1)} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left(\frac{\sin n\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^4 dt \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Так как выражение

$$\left(\frac{\sin n\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 = n + 2\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\cos kt$$

является косинус-полиномом порядка $n-1$, то ядро интеграла $J_n(x)$, а стало быть, и сам интеграл $J_n(x)$ являются полиномами

$(2n-2)$-го порядка. Из равенства Парсеваля (9) следует соотношение

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin n\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^4 dt =$$
$$= n^2 + 2\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)^2 = n^2 + \frac{(n-1)\,n(2n-1)}{3} = \frac{n(2n^2+1)}{3},$$

а потому

$$|J_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{3}{2\pi\, n(2n^2+1)}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t) - f(x)|\left(\frac{\sin n\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^4 dt.$$

Интервал $[x-|t|, x+|t|]$ покроем минимальным числом N равных интервалов длины $\leqslant\frac{1}{n}$, совпадающих только в граничных точках. Так как общая длина этих интервалов такова, что $Nn^{-1} \geqslant 2|t|$ и $Nn^{-1} \leqslant 2|t| + n^{-1}$, то для числа N справедливо неравенство

$$2n|t| \leqslant N \leqslant 2n|t| + 1.$$

Если $V_k(f)$ — колебание функции $f(x)$ на k-м интервале из этого покрытия, то $V_k(f) \leqslant \omega\left(f, \frac{1}{n}\right)$, а потому

$$|f(x+t) - f(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{N} V_k(f) \leqslant N\omega\left(f, \frac{1}{n}\right) \leqslant (2\,n|t| + 1)\,\omega\left(f, \frac{1}{n}\right).$$

Отсюда мы выводим оценку

$$|J_n(f, x) - f(x)| \leqslant \frac{6\,\omega\left(f, \frac{1}{n}\right)}{\pi(2n^2+1)}\int_{0}^{\pi} t\left(\frac{\sin n\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^4 dt + \omega\left(f, \frac{1}{n}\right).$$

Справа стоящий интеграл разложим на две части, а именно на интегралы, распространенные на $\left[0, \frac{\pi}{n}\right]$ и на $\left[\frac{\pi}{n}, \pi\right]$. Тогда имеем

$$\int_0^\pi t\left(\frac{\sin n\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^4 dt \leqslant n^4\int_0^{\frac{\pi}{n}} t\,dt + \pi^4\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi}\frac{dt}{t^3} < n^2\pi^2.$$

Следовательно,

$$|J_n(f, x) - f(x)| \leqslant 12\,\omega\left(f, \frac{1}{n}\right).$$

Так как $J_n(x)$ есть тригонометрический полином $(2n-2)$-го порядка, то наше утверждение доказано в случае четных n. Если же $n = 2m-1$, то наилучшее приближение функции $f(x)$ тригонометрическими полиномами порядка $\leqslant 2m-1$ не больше, чем наилучшее приближение тригонометрическими полиномами порядка $\leqslant 2m-2$. Но для последнего имеем следующую оценку сверху:

$$12\,\omega\left(f, \frac{1}{2m-2}\right) \leqslant 12\,\omega\left(f, \frac{2}{2m-1}\right) \leqslant 24\,\omega\left(f, \frac{1}{n}\right),$$

чем и завершается доказательство.

4.6.6. *Пусть $\{p_n(x)\}$ — ортонормированная по мере $\mu(x)$ полиномиальная система и пусть непрерывная на $[a, b]$ функция $f(x)$ имеет модуль непрерывности $\omega(f, \delta)$. Тогда существует последовательность линейных комбинаций*

$$S_n(f, x) = \sum_{k=0}^{n} a_{nk}p_k(x),$$

для которой имеет место соотношение

$$\sup_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x) - S_n(f, x)| = O\left(\omega\left(f, \frac{1}{n}\right)\right).$$

Достаточно ограничиться случаем $[a, b] = [-1, 1]$, так как линейное преобразование $u = \frac{2x-b-a}{b-a}$ переводит $[a, b]$ на интервал $[-1, 1]$, а $f(u)$ имеет модуль непрерывности

$\omega\left(f,\frac{b-a}{2}\delta\right)=O(\omega(f,\delta))$. Далее, так как любой полином $P_n(x)$ степени не выше n можно представить в форме

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_{nk}p_k(x),$$

то достаточно доказать лишь существование последовательности полиномов $\{P_n(x)\}$ с требуемым аппроксимативным свойством. Вместо переменной $x\in[-1, 1]$ введем новую переменную $\theta=\arccos x$. Тогда функция $f^*(\theta)=f(\cos\theta)$ определена на $[0,\pi]$ и имеет там модуль непрерывности $\omega(f^*,\delta)\leqslant\omega(f,\delta)$. В самом деле, пусть $(\theta',\theta'')\subset[0,\pi]$ и $|\theta''-\theta'|\leqslant\delta$, тогда $|x''-x'|=|\cos\theta''-\cos\theta'|\leqslant|\theta''-\theta'|\leqslant\delta$, где $|x''-x'|$ может и не достигать значения δ. Таким образом,

$$\omega(f^*,\delta)=\sup_{|\theta''-\theta'|<\delta}|f^*(\theta'')-f^*(\theta')|\leqslant\sup_{|x''-x'|\leqslant\delta}|f(x'')-f(x')|=\omega(f,\delta).$$

Так как $P_n^*(\theta)=P_n(\cos\theta)$ — полином по $\cos\theta$ степени не выше n, то он является тригонометрическим полиномом по θ порядка не выше n, а поэтому коэффициенты $P_n(x)$ можно выбрать так, чтобы $P_n^*(\theta)$ был тригонометрическим полиномом и для него выполнялось соотношение

$$\sup_{0<\theta<\pi}|f^*(\theta)-P_n^*(\theta)|=O\left[\omega\left(f^*,\frac{1}{n}\right)\right]=O\left[\omega\left(f,\frac{1}{n}\right)\right].$$

Существование такого полинома гарантируется теоремой 4.6.5. Переходя от θ к $x=\cos\theta$, мы получаем требуемое утверждение:

$$\sup_{-1<x<1}|f(x)-P_n(x)|=O\left[\omega\left(f,\frac{1}{n}\right)\right].$$

Тригонометрическая система позволяет получить хороший порядок приближения также и в смысле L^2-аппроксимации:

4.6.7. *Пусть $\varrho_n(\mathfrak{X},2)$ — наилучшее приближение в метрике L^2 класса $\mathfrak{X}$ всех функций $f(x)$ периода 2π, имеющих L^2-модуль непрерывности $\omega_2(f,\delta)\leqslant\omega_2(\delta)$. Тогда*

$$\varrho_n(\mathfrak{X},2)=O\left[\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Если функцию $f(x+h)-f(x-h)$ разложим в ряд по тригонометрической системе, то получим соотношение

$$f(x+h)-f(x-h) \sim 2\sum_{k=1}^{\infty}(b_k \cos kx - a_k \sin kx)\sin kh,$$

где a_k и b_k — коэффициенты Фурье функции $f(x)$. Из равенства Парсеваля (9) выводим оценку:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\sin^2 kh = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}[f(x+h)-f(x-h)]^2\,dx \leqslant \omega_2^2(f, h).$$

Интегрируя по h от 0 до $2/n$ и замечая, что $\omega_2^2\,(f, h)$ монотонно возрастает вместе с h, мы находим

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\left(\frac{1}{n}-\frac{\sin\frac{4k}{n}}{4k}\right)\leqslant 2\omega_2^2\left(f(r), \frac{2}{n}\right)\int_0^{2/n}dh \leqslant \frac{8}{n}\,\omega_2^2\left(f, \frac{1}{n}\right),$$

или, в другой форме,

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\left(1-\frac{\sin\frac{4k}{n}}{\frac{4k}{n}}\right)\leqslant 8\omega_2^2\left(f, \frac{1}{n}\right).$$

Учитывая, что

$$1-\frac{\sin\frac{4k}{n}}{\frac{4k}{n}} \geqslant \frac{3}{4} \qquad (k \geqslant n)$$

и

$$1-\frac{\sin\frac{4k}{n}}{\frac{4k}{n}} \geqslant 0,$$

мы получаем

$$\frac{3}{4}\sum_{k=n}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\leqslant 8\omega_2^2\left(f, \frac{1}{n}\right),$$

откуда выводим неравенство

$$\left\{\int_0^{2\pi} [f(x) - s_n(x)]^2\, dx\right\}^{1/2} \leqslant \sqrt{\frac{32\pi}{3}}\, \omega_2\!\left(f, \frac{1}{n}\right).$$

Согласно 1.1.2, среди всех тригонометрических полиномов порядка не выше n наилучшее в смысле L^2-метрики приближение дают частичные суммы $s_n(x)$ и, следовательно,

$$\varrho_n(\mathfrak{K}, 2) = \sup_{f\in\mathfrak{K}} \|f - s_n\|_2 \leqslant \sqrt{\frac{32\pi}{3}}\, \omega_2\!\left(\frac{1}{n}\right).$$

Фундаментальные теоремы 4.6.5 и 4.6.6 доказаны Джексоном [1]. Теорема 4.6.7 встречается в литературе в различных формах в качестве вспомогательной теоремы; трудно установить, кто первый указал на ее значение.

Теоремы 4.6.5 и 4.6.6 могут быть обобщены. Именно, пусть $f^{(r)}(x)$ есть r-я производная от функции $f(x)$, причем под $f^{(0)}(x)$ понимается сама функция. Тогда имеет место теорема:

Существуют как тригонометрические, так и алгебраические полиномы порядка n (степени n), которые любую r раз непрерывно дифференцируемую функцию $f(x)$ приближают со скоростью $O\left(n^{-r}\,\omega\left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right)\right)$.

Отсюда следует, в частности, что если $f^{(r)}(x)$ удовлетворяет условию Липшица порядка α с $0 < \alpha \leqslant 1$, то функция $f(x)$ полиномами порядка n (степени n) может быть приближена со скоростью $O(n^{-r-\alpha})$. Интересно, что эта теорема является почти обратимой (Бернштейн [1]):

Если на интервале $[a, b]$ функция $f(x)$ приближается алгебраическими полиномами степени n или на интервале $[0, 2\pi]$ тригонометрическими полиномами порядка n со скоростью $O(n^{-r-\alpha})$, где r — целое и $0 < \alpha < 1$, то на каждом внутреннем интервале $[a+\varepsilon, b-\varepsilon] \subset (a, b)$ или соответственно на $[0, 2\pi]$ функция $f(x)$ имеет r производных, причем $f^{(r)}(x)$ на указанном интервале удовлетворяет условию Липшица порядка α.

Различные вопросы подобного рода дают обширный материал для конструктивной теории функций, однако их исследование уводит далеко от общей теории ортогональных разложений.

§ 7. Структурные условия сходимости

Если рассматривать фиксированный класс ортогональных разложений, то предыдущие рассуждения позволяют из свойств непрерывности функции вывести заключение о сходимости ортогонального разложения. Прежде всего мы предположим, что рассматриваемая функция является непрерывной на подинтервале $[c, d]$ из $[a, b]$. Через $\omega(f, \delta; c, d)$ снова обозначим относящийся к интервалу $[c, d]$ модуль непрерывности функции $f(x)$. На основании наших предыдущих рассуждений легко выводится следующая теорема о равномерной сходимости:

4.7.1. *Пусть равномерно ограниченная ортонормированная (относительно ограниченного веса $\varrho(x)$) система $\{\varphi_n(x)\}$ имеет полиномиальный вид и сохраняет константу. Пусть, кроме того, функции $F_k(t, x)$ непрерывны в квадрате $a \leqslant t \leqslant b$, $a \leqslant x \leqslant b$, за исключением, быть может, диагонали $t = x$. Тогда, если $L_{\varrho(x)}$-интегрируемая, непрерывная на подинтервале $[c, d]$ из $[a, b]$ функция $f(x)$ имеет модуль непрерывности*

$$\omega(f, \delta;\, c, d) = o\left(\frac{1}{\log\dfrac{1}{\delta}}\right), \tag{145}$$

то разложение

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \tag{146}$$

сходится равномерно к $f(x)$ на каждом интервале $[c+\varepsilon, d-\varepsilon] \subset \subset (c, d)$.

Функцию $f^*(x)$ определим таким образом: $f^*(x) = f(x)$ на $[c, d]$, $f^*(x) = f(c)$ на $[a, c]$ и $f^*(x) = f(d)$ на $[d, b]$. Тогда $f^*(x)$ непрерывна на всем интервале $[a, b]$ и имеет там модуль непрерывности

$$\omega(f^*, \delta) = o\left(\frac{1}{\log 1/\delta}\right).$$

Через $s_n(f^*, x)$ обозначим n-ю частичную сумму, а через $\sigma_n(f^*, x)$ — n-е $(C, 1)$-средние разложения

$$f^*(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n^* \varphi_n(x).$$

В силу 4.6.4, порядок приближения функции $f^*(x)$ ее $(C, 1)$-средними оценивается таким образом:

$$\sup_{a \leqslant x \leqslant b} |f^*(x) - \sigma_n(f^*, x)| = o\left(\frac{1}{\log n}\right).$$

Поэтому из 4.5.1, как и при доказательстве 3.1.3, мы находим

$$\sup_{c \leqslant x \leqslant d} |f^*(x) - s_n(f^*, x)| = o(1).$$

Вследствие условий, наложенных на систему $\{\varphi_n(x)\}$, частичные суммы $s_n(x)$ разложения (146) являются равномерно сингулярными интегралами. Так как функции $f^*(x)$ и $f(x)$ совпадают на $[c, d]$, то из 4.2.4 заключаем, что частичные суммы $s_n(x)$ и $s_n^*(x)$ будут равномерно равносходящимися на каждом интервале $[c+\varepsilon, d-\varepsilon] \subset [c, d]$, т. е.

$$\sup_{c+\varepsilon \leqslant x \leqslant d-\varepsilon} |f(x) - s_n(x)| = o(1).$$

Только что доказанная теорема не может быть локализирована на отдельные точки. В самом деле, если условие $\omega(f, \delta; c, d) = o\left[\left(\log \frac{1}{\delta}\right)^{-1}\right]$ заменить условием

$$f(t) - f(x_0) = o\left[\left(\log \frac{1}{|t - x_0|}\right)^{-1}\right],$$

причем точка x_0 фиксирована, то уже в случае рядов Фурье можно найти непрерывную функцию, для которой это условие выполняется, однако ее ряд Фурье расходится в точке x_0[1]. Если все же рассматривать критерии сходимости в отдельной точке, то наиболее простым является следующий:

4.7.2. *Пусть ортонормированная с весом $\varrho(x)$ ограниченная система $\{\varphi_n(x)\}$ имеет полиномиальный вид и сохраняет константу и пусть $L_{\varrho(x)}$-интегрируемая функция $f(x)$ в фиксированной точке x_0 удовлетворяет условию*

$$\int_a^b \left|\frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0}\right| \varrho(t)\,dt < \infty.$$

Тогда в точке x_0 разложение (146) *сходится к значению* $f(x_0)$.

Действительно, так как система сохраняет константу и имеет полиномиальный вид, то

$$s_n(x_0) - f(x_0) =$$

$$= \sum_{k=1}^{r} \sum_{i,j=-p}^{p} \gamma_{i,j,k}^{(n)} \varphi_{n+j}(x_0) \int_a^b [f(t) - f(x_0)]\, F_k(t, x_0)\, \varphi_{n+i}(t)\, \varrho(t)\, dt.$$

[1] Доказательство см. Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М. — Л., 1939, стр. 168—172.

Но $F_k(t, x_0) = O[|t-x_0|^{-1}]$ и функции $[f(t)-f(x_0)]\, F_k(t, x_0)$, по предположению, $L_{\varrho(x)}$-интегрируемы, а потому из ограниченности системы выводим:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b [f(t)-f(x_0)]\, F_k(t, x_0)\varphi_{n+i}(t)\varrho(t)\, dt = 0,$$

откуда вытекает равенство

$$|s_n(x_0)-f(x_0)| = O(1)\sum_{k=1}^{r} \sum_{i,j=-p}^{p} o(1) = o(1).$$

В том случае, когда разложение (146) является рядом Фурье функции $f(x)$, доказанные выше теоремы являются классическими. Нам не известно, высказывались ли они ранее для других ортогональных систем. Конечно, на разложения по ограниченным системам полиномиального вида можно было бы легко перенести также и другие известные для рядов Фурье критерии сходимости, однако этим мы здесь заниматься не будем.

Отметим, что 4.7.2 не может быть усилена, так как уже в случае рядов Фурье можно построить контрпример (см. А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, М.—Л., 1939, стр. 168—172).

Структурные условия для сходимости почти всюду на интервале непрерывности. Пусть $\Phi(x)$ — определенная при $x > 0$ положительная, монотонно возрастающая функция. Через $\mathfrak{R}_\Phi$ обозначим класс всех функций $f(x)$, модуль непрерывности которых на интервале $[a, b]$ удовлетворяет неравенству

$$\omega(f, \delta) \leqslant \frac{1}{\sqrt{\Phi(1/\delta)}},$$

а через $\mathfrak{R}_\Phi^{(2)}$ — класс всех функций $f(x)$, квадратичный модуль непрерывности которых удовлетворяет неравенству

$$\omega_2(f, \delta) \leqslant \frac{1}{\sqrt{\Phi(1/\delta)}}.$$

Систему $\{\varphi_n(x)\}$ мы назовем $\mathfrak{R}_\Phi$*-аппроксимационной системой*, если

$$\varrho_n(\mathfrak{R}_\Phi) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\Phi(n)}}\right),$$

и $\mathfrak{R}_\Phi^{(2)}$*-аппроксимационной системой*, если

$$\varrho_n(\mathfrak{R}_\Phi^{(2)}, 2) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\Phi(n)}}\right),$$

где $\varrho_n(\mathfrak{R}_\Phi)$ и $\varrho_n(\mathfrak{R}_\Phi^{(2)}, 2)$ величины, определенные соответственно на страницах 291 и 292.

4.7.3. *Пусть неубывающая, вогнутая снизу функция $\lambda(x) > 0$ имеет производную $\lambda'(x)$. Если $\{\varphi_n(x)\}$ является $\mathfrak{R}_\Phi$-или $\mathfrak{R}_\Phi^{(2)}$-аппроксимационной системой и*

$$\int_2^\infty \frac{\lambda'(x)}{\Phi(x-1)}\,dx < \infty, \tag{147}$$

то для $f \in \mathfrak{R}_\Phi$, соответственно для $f \in \mathfrak{R}_\Phi^{(2)}$, выполняется коэффициентное условие

$$\sum_{n=0}^\infty c_n^2 \lambda(n) < \infty; \tag{148}$$

поэтому разложение функции $f(x)$ по системе $\{\varphi_n(x)\}$ обладает всеми свойствами сходимости, которые следуют из этого коэффициентного условия.

Если $\{\varphi_n(x)\}$ — $\mathfrak{R}_\Phi^{(2)}$-аппроксимационная система, то, применяя (147), выводим оценку

$$\sum_{n=2}^\infty \lambda'(n)\,\varrho_{n-1}^2(\mathfrak{R}_\Phi^{(2)}, 2) = O(1) \sum_{n=2}^\infty \frac{\lambda'(n)}{\Phi(n-1)} < \infty,$$

и наше утверждение есть следствие леммы 4.5.2.

Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ является только $\mathfrak{R}_\Phi$-аппроксимационной системой; через

$$S_n(f, x) = \sum_{k=0}^n a_{nk}\varphi_k(x)$$

обозначим линейную комбинацию, для которой

$$\sup_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - S_n(f, x)| < d_n(f) + \varepsilon$$

с произвольным $\varepsilon > 0$. Если учесть, что для частичных сумм $s_n(x)$ разложения $f(x)$ справедливо свойство минимума (1.1.2)

$$\int_a^b [f(x) - s_n(x)]^2\,d\mu(x) \leqslant \int_a^b [f(x) - S_n(f, x)]^2\,d\mu(x),$$

то получим следующую оценку:

$$\varrho_n(\mathfrak{N}_\Phi, 2) = \sup_{f \in \mathfrak{N}_\Phi} \left\{ \int_a^b [f(x) - s_n(x)]^2 \, d\mu(x) \right\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{f \in \mathfrak{N}_\Phi} \left\{ \sup_{a \leqslant x \leqslant b} [f(x) - S_n(f, x)]^2 \int_a^b d\mu(x) \right\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant [\varrho_n(\mathfrak{N}_\Phi)] \left\{ \int_a^b d\mu(x) \right\}^{1/2} = O\left(\frac{1}{\sqrt{\Phi(n)}} \right).$$

Так как

$$\sum_{n=2}^{\infty} \lambda'(n)\, \varrho_{n-1}^2(\mathfrak{N}_\Phi, 2) = O(1) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda'(n)}{\Phi(n-1)} < \infty,$$

то и в этом случае наше утверждение также следует из 4.5.2.

Наша теорема имеет различные следствия, как, например, следующее:

4.7.4. *Пусть ортонормированная с весом $\varrho(x)$ система $\{\varphi_n(x)\}$ имеет полиномиальный вид и сохраняет константу, причем каждая из $\varphi_n(x)$ ограничена. Пусть, далее, условие* (139) *выполняется на всем интервале ортогональности, в то время как условие*

$$\varphi_n(x) = O(1)$$

выполняется равномерно на подинтервале $[c, d]$ *из* $[a, b]$. *Если $L^2_{\varrho(x)}$-интегрируемая, непрерывная на* $[c, d]$ *функция $f(x)$ имеет модуль непрерывности*

$$\omega(f, \delta; c, d) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\Phi(1/\delta)}} \right), \tag{149}$$

где $\Phi(x) > 0$ — произвольная монотонно возрастающая при $x > 1$ функция, удовлетворяющая условию

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\Phi(x-1)} < \infty, \tag{150}$$

то разложение (146) *сходится к $f(x)$ почти всюду на* (c, d), Рассмотрим класс $\mathfrak{K}_\Phi$ всех непрерывных функций $g(x)$ с модулем непрерывности

$$\omega(g, \delta) \leqslant \frac{1}{\sqrt{\Phi(1/\delta)}}.$$

Можно считать, что величина $\left(\sqrt{\Phi(1/\delta)}\,\delta^{\frac{1}{2}-\gamma}\right)^{-1}$ при $\delta \to 0$ монотонно стремится к бесконечности, ибо (150) справедливо для таких $\Phi(x)$[1]. Тогда из 4.6.4 следует оценка

$$\sup_{a \leqslant x \leqslant b} |g(x) - \sigma_n(g, x)| = O\left(\frac{1}{\sqrt{\Phi(1/\delta)}}\right),$$

где через $\sigma_n(g, x)$ обозначены n-е $(C, 1)$-средние $\{\varphi_n(x)\}$-разложения функции $g(x)$; следовательно, $\{\varphi_n(x)\}$ является $\mathfrak{K}_\Phi$-аппроксимационной системой. Если теперь мы применим 4.7.3 с $\lambda(x) = \log x$, то для каждой функции $g \in \mathfrak{K}_\Phi$ получаем коэффициентное условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \log n < \infty.$$

Так как $\{\varphi_n(x)\}$ равномерно ограничена на $[c, d]$, то из 3.1.4 заключаем о сходимости почти всюду на $[c, d]$ разложения для $g(x)$. Но $g \in \mathfrak{K}_\Phi$ — произвольная функция, поэтому мы можем выбрать $g(x)$ так, чтобы на $[c, d]$ выполнялось равенство

$$g(x) = f(x).$$

Тогда, в силу 4.2.4, разложения функций $f(x)$ и $g(x)$ равно суммируемы на любом интервале $[c + \varepsilon, d - \varepsilon]$ с произвольным $\varepsilon > 0$. Стало быть, разложение (146) сходится почти всюду на $[c, d]$, а так как, в силу 1.2.6, система $\{\varphi_n(x)\}$ полна, то предельной функцией почти всюду является функция $f(x)$.

Для рядов Фурье и для многих разложений по ортогональным полиномам эта теорема содержит структурные критерии сходимости. В частности, такой критерий выполнен в случае $\sqrt{\Phi(x)} = \log^\alpha x$ при $\alpha > \frac{1}{2}$, т. е. для условия Дини—Липшица порядка $\alpha > \frac{1}{2}$. Что касается разложений по ортогональным

[1] Можно выбрать, например, $\Phi(x) = |\log x|^{\varepsilon+1}$ с $\varepsilon > 0$, или $\Phi(x) = |\log\log x|^{\varepsilon+1} |\log x|$ и т. д.

полиномам, то можно обойтись без условия ограниченности (139):

4.7.5. *Пусть* $\{p_n(x)\}$ *— ортонормированная по мере* $\mu(x)$ *полиномиальная система, ограниченная на подинтервале* $[c, d]$ *из* $[a, b]$, *и пусть для функции* $\Phi(x)$ *выполнено* (150). *Если* L^2_μ-*интегрируемая функция* $f(x)$ *удовлетворяет условию* (149), *то разложение*

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(x) \tag{151}$$

сходится к $f(x)$ *почти всюду на* $[c, d]$.

4.7.6. *Пусть* $\{p_n(x)\}$ *— произвольная ортонормированная по мере* $\mu(x)$ *полиномиальная система и* $f(x)$ *— непрерывная функция. Если* $\Phi(x)$ *удовлетворяет условию*

$$\int\limits_2^\infty \frac{\log x}{x\Phi(x-1)}\,dx < \infty,$$

то из неравенства

$$\omega(f, \delta) \leqslant \frac{1}{\sqrt{\Phi(1/\delta)}} \tag{152}$$

следует сходимость почти всюду разложения (151).

4.7.7. *Если* $\Phi(x)$ *удовлетворяет условию*

$$\int\limits_2^\infty \frac{(\log\log x)^{1+\varepsilon}\log x}{x\Phi(x)}\,dx < \infty \qquad (\varepsilon > 0),$$

то из (152) *следует сходимость почти всюду разложения* (151) *при любом порядке его членов.*

Так как по теореме 4.6.6 система $\{p_n(x)\}$ уже без всяких других предположений является $\mathfrak{K}_\Phi$-аппроксимационной системой, то все три наши утверждения следуют из (149) или (152). В самом деле, в теореме 4.7.3 полагаем соответственно $\lambda(x) = \log x, \log^2 x$ или $(\log\log x)^{1+\varepsilon}\log^2 x$ и применяем теоремы 3.1.4, 2.3.2 или 2.5.2 (с $g(x) = x^{1+\varepsilon}$). Таким образом, нами доказаны теоремы 4.7.6 и 4.7.7, а 4.7.5 доказана только в том случае, когда модуль непрерывности удовлетворяет условию (152). Но если модуль непрерывности $\omega(f, \delta; c, d)$ удовлетворяет условию (149), то мы можем продолжить $f(x)$, определенную на интервале $[c, d]$, до функции, совпадающей с $f(x)$ на $[c, d]$ и модуль непрерывности которой на всем интервале $[a, b]$ имеет необходимый порядок. Наше утверждение мы получим тогда из теоремы о равносходимости 4.2.4.

Как теорема 4.7.3, так и ее следствие 4.7.5 доказаны Алексичем и Краликом [1]. Следствие 4.7.6 установлено Колмогоровым [1], а 4.7.7 — Ульяновым [2].

Теорема 4.7.3 имеет, конечно, и другие применения. Например, из нее можно получить структурные условия суммируемости, которые формулируются таким образом:

Если $f \in L^2_{\varrho(x)}$ *и выполняется условие* (149), *где* $\Phi(x)$ *такова, что*

$$\int_2^\infty \frac{\log\log x}{\Phi(x)\, x \log x} < \infty,$$

то (151) $(C, \alpha > 0)$*-суммируемо почти всюду на* $[c, d]$.

Если $f \in L^2_{\varrho(x)}$ *и выполняется условие* (149), *причем* $\Phi(x)$ *такова, что*

$$\int_2^\infty \frac{\lambda'(x) \log\log \lambda(x)}{\Phi(x)} < \infty,$$

где $\lambda(x)$ *— положительная, монотонная и вогнутая снизу функция, то* (151) $(R, \lambda_n, 1)$*-суммируемо почти всюду на* (c, d) $(\lambda(n) = \lambda_n)$.

Обе эти теоремы вытекают, как и доказанные выше, непосредственно из 4.7.3 и соответственно из 2.8.1 или 2.8.8. Из 4.7.3 можно, конечно, вывести аналоги теорем сходимости и суммируемости для всех $R^{(2)}_\Phi$-аппроксимационных систем.

Структурные условия для сходимости почти всюду разложений разрывных функций. В случае рядов Фурье и в случае разложений по полиномам Якоби можно избавиться от ограничительных требований непрерывности. Основанием для этого служит, с одной стороны, аппроксимационная теорема 4.6.7 и, с другой стороны, следующая лемма:

4.7.8. *Пусть* $\{p_n(x)\}$ *— ортонормированная на интервале* $[-1, 1]$ *с весом*

$$0 \leq \varrho(x) = O\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) \tag{153}$$

полиномиальная система и пусть $f(x)$ *есть* $L^2_{\varrho(x)}$*-интегрируемая функция на* $[-1, 1]$. *Если через* $\{c_n\}$ *обозначим коэффициенты разложения* (151), *а через* $\{a_n\}$ *— коэффициенты Фурье функции* $f(\cos\theta)$ *с* $\theta = \arccos x$, *то для любой монотонно возрастающей* *последовательности положительных чисел* $\{\lambda_n\}$ *справедливо равенство*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2\lambda_n = O(1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2\lambda_n.$$

Через $s_n(x)$ обозначим n-ю частичную сумму разложения (151). Если $P_n(x)$ — произвольный полином степени не выше n, то из сформулированного в 1.1.2 свойства минимума частичных сумм следует неравенство

$$\int_{-1}^{1} [f(x) - s_n(x)]^2 \varrho(x)\, dx \leqslant \int_{-1}^{1} [f(x) - P_n(x)]^2 \varrho(x)\, dx.$$

Выберем в качестве $P_n(x)$ тот полином, для которого $P_n(\cos\theta)$ является n-й частичной суммой ряда Фурье функции $f(\cos\theta)$. Тогда, принимая во внимание (153), находим

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2 = \int_{-1}^{1} [f(x) - s_n(x)]^2 \varrho(x)\, dx = O(1) \int_{-1}^{1} \frac{[f(x) - P_n(x)]^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx =$$

$$= O(1) \int_{0}^{\pi} [f(\cos\theta) - P_n(\cos\theta)]^2 d\theta = O(1) \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^2.$$

Если мы положим

$$A_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k^2 \quad \text{и} \quad C_n = \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2,$$

то предыдущая оценка показывает, что $C_n = O(A_n)$. Далее, полагая $\lambda_{-1} = 0$ и применяя преобразование Абеля, получаем

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k c_k^2 = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k(C_k - C_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n} (\lambda_k - \lambda_{k-1})\, C_k - \lambda_n C_{n+1} =$$

$$= O(1) \left[\sum_{k=0}^{n} (\lambda_k - \lambda_{k-1})\, A_k + \lambda_n A_{n+1}\right] =$$

$$= O(1) \left[\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k(A_k - A_{k+1}) + \lambda_n A_n\right] =$$

$$= O(1) \left[\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k a_k^2 + \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k a_k^2\right].$$

Так как это соотношение справедливо при любом n, то наша лемма доказана.

4.7.9. *Пусть L-интегрируемая функция $f(x)$ периода 2π на интервале $[c, d] \subset [0, 2\pi]$ имеет квадратичный модуль непрерывности*

$$\omega_2(f, \delta; c, d) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\Phi(1/\delta)}}\right), \tag{154}$$

причем $\Phi(x)$ удовлетворяет условию (150). *Тогда ряд Фурье*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

сходится почти всюду на (c, d).

4.7.10. *Пусть $L^2_{\varrho(x)}$-интегрируемая на $[-1, 1]$ функция $f(x)$ удовлетворяет на $[c, d] \subset [-1, 1]$ условиям* (154) *и* (150). *Если для весовой функции $\varrho(x)$ выполняется условие* (153), *а ортонормированная с этим весом полиномиальная система ограничена на $[c, d]$, то разложение* (151) *по ортонормированным полиномам сходится почти всюду.*

Как следует из 4.6.7, тригонометрические функции образуют $\mathfrak{K}^{(2)}_{\Phi}$-аппроксимационную систему. Применяя теоремы 4.7.3 и 3.1.5, мы видим, что утверждение теоремы 4.7.9 справедливо, если только вместо $\omega_2(f, \delta; c, d)$ условию (154) удовлетворяет модуль непрерывности $\omega_2(f, \delta)$. Но если (как это и предполагается) (150) и (154) выполнены только для $\omega_2(f, \delta; c, d)$, то можно образовать функцию $g(x)$, совпадающую с $f(x)$ на $[c, d]$, такую, что и ее модуль непрерывности $\omega_2(g, \delta)$ удовлетворяет условиям (150) и (154); утверждение теоремы 4.7.9 следует тогда из теоремы о равносходимости 4.2.4.

При доказательстве 4.7.10 необходима некоторая осторожность. Прежде всего, с помощью преобразования $\theta = \arccos x$ интервал $[-1, 1]$ отобразим на $[0, \pi]$. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число и через $[\alpha, \beta]$ обозначим образ интервала $[c + \varepsilon, d - \varepsilon]$. Из $[\alpha, \beta]$ выберем две точки θ и $\theta + \eta$ с $|\eta| < \delta$ и положим $x = \cos\theta$, $x + h = \cos(\theta + \eta)$. Тогда x и $x + h$ лежат на $[c + \varepsilon, d - \varepsilon]$ и, кроме того, справедливо неравенство

$$|h| = |\cos(\theta + \eta) - \cos\theta| \leqslant |\eta| \leqslant \delta.$$

Обозначив $f^*(\theta) = f(\cos\theta)$, мы получим

$$\int_{\alpha}^{\beta} [f^*(\theta + \eta) - f^*(\theta)]^2 \, d\theta = \int_{c+\varepsilon}^{d-\varepsilon} [f(x - h) - f(x)]^2 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Так как $1 - x^2 \geqslant \varepsilon$, то отсюда следует оценка

$$\omega_2(f^*, \delta; \alpha, \beta) = \sup_{|\eta| \leqslant \delta} \left\{ \frac{1}{\beta - \alpha} \int_\alpha^\beta [f^*(\theta + \eta) - f^*(\theta)]^2 \, d\theta \right\}^{1/2} =$$

$$= O(1) \sup_{|h| \leqslant \delta} \left\{ \frac{1}{(d - c) - 2\varepsilon} \int_{c+\varepsilon}^{d-\varepsilon} [f(x + h) - f(x)]^2 \, dx \right\}^{1/2} =$$

$$= O(\omega_2(f, \delta; c + \varepsilon, d - \varepsilon)).$$

Таким образом, используя (154), находим

$$\omega_2(f^*, \delta; \alpha, \beta) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\Phi(1/\delta)}}\right).$$

Построим теперь гладкую функцию $g^*(x)$, которая на $[\alpha, \beta]$ совпадает с $f^*(\theta)$ и имеет L^2-модуль непрерывности

$$\omega_2(g^*, \delta) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\Phi(1/\delta)}}\right).$$

Далее, пусть $\sum \bar{a}_n \cos n\theta$ — ряд Фурье функции $g^*(\theta)$. Применяя теорему 4.7.3, из (150) мы заключаем о сходимости ряда $\sum \bar{a}_n^2 \log n$. Поэтому, полагая $g(x) = g^*(\arccos x)$ и

$$g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \bar{c}_n p_n(x),$$

из леммы 4.7.8 мы получаем следующее соотношение:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{c}_n^2 \log n < \infty.$$

Следовательно, в силу 3.1.4, разложение функции $g(x)$ сходится почти всюду, а так как $f^*(\theta) = g^*(\theta)$ при $\theta \in [\alpha, \beta]$, т. е. $f(x) = g(x)$ при $x \in [c + \varepsilon, d - \varepsilon]$, то сходимость (151) на $(c + \varepsilon, d - \varepsilon)$ является следствием теоремы о равносходимости 4.2.4. Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то разложение (151) сходится почти всюду также и на интервале (c, d).

Лемма 4.7.8 установлена Алексичем [4], теорема 4.7.9 — Стечкиным [2] и Алексичем [6], в то время как 4.7.10 является, по-видимому, новой. Исследование эквивалентности коэффициентных и структурных условий было начато еще в 1926 году Плеснером [1]. Он доказал следующую теорему для рядов Фурье:

Условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \log n < \infty$$

и структурное условие

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{[f(x+t) - f(x-t)]^2}{t} \, dt \, dx < \infty$$

эквиваленты.

Это структурное условие можно расширить дальше и перевести в локальную форму (Ульянов [1]).

Рассмотренные до сих пор структурные условия являются, собственно говоря, только преобразованием различных коэффициентных условий. Это понятно, ибо все они получены при помощи теоремы 4.7.3, которая и дает возможность переводить коэффициентные условия в структурные. Теперь мы сформулируем глубокое структурное условие совершенно иного характера.

4.7.11. *Пусть ограниченная ортонормированная (относительно ограниченного веса $\varrho(x)$) система функций $\{\varphi_n(x)\}$ имеет полиномиальный вид и сохраняет константу. Если L-интегрируемая функция $f(x)$ при $x \in E$ удовлетворяет структурному условию*

$$\frac{1}{u} \int_0^u |f(x+t) - f(x)| \, dt = O\left(\frac{1}{|\log 1/|u||}\right), \tag{155}$$

то разложение (146) *сходится почти всюду на* E.

Прежде чем перейти к доказательству этой теоремы, мы докажем вспомогательную теорему:

4.7.12. *Пусть P — совершенное подмножество интервала ортогональности $[a, b]$ и пусть $\Delta_n = (x_n - 3\delta_n, x_n + 3\delta_n)$ — его смежные интервалы. Если неотрицательная функция $h(x)$ обращается в нуль в точках P и удовлетворяет условию*

$$\int_{\Delta_n} h(t) \, dt = O\left(\frac{\delta_n}{|\log 1/\delta_n|}\right),$$

то разложение функции $h(t)$ по системе $\{\varphi_n(x)\}$ сходится почти всюду на P.

Положим

$$\Delta_n^* = (x_n - \delta_n, x_n + \delta_n),$$

$$h^*(t) = \begin{cases} 3h\,[x_n + 3(t - x_n)], & \text{если} \quad t \in \Delta_n^*, \\ 0 & \text{при остальных } t. \end{cases}$$

Через $\Gamma(x)$ обозначим характеристическую функцию множества P. Тогда из наших предположений относительно $h(t)$ вытекают следующие неравенства:

$$\int_a^b \int_a^b \Gamma(x)\, h^*(t) \frac{dt\,dx}{|t - x|} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Delta_n^*} h^*(t) \left(\int_a^b \Gamma(x) \frac{dx}{|t - x|}\, dt \right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Delta_n^*} h^*(t) \left(\int_a^{x_n - 3\delta_n} \frac{dx}{t - x} + \int_{x_n + 3\delta_n}^b \frac{dx}{x - t} \right) dt =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Delta_n^*} h^*(t) \left(\log \frac{t - a}{t - (x_n - 3\delta_n)} + \log \frac{b - t}{x_n + 3\delta_n - t} \right) dt \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Delta_n^*} h^*(t) \left(\log \frac{x_n - \delta_n - a}{2\delta_n} + \log \frac{b - x_n - \delta_n}{2\delta_n} \right) dt \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{(b - a)^2}{4\delta_n^2} \int_{\Delta_n} h(t)\, dt =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} O\left(\left| \log \frac{1}{\delta_n} \right| \right) O\left(\frac{\delta_n}{|\log 1/\delta_n|} \right) = O(1) \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \infty.$$

Таким образом, существует двойной интеграл

$$\int_a^b \int_a^b I(x)\, h^*(t) \frac{dt\,dx}{|t - x|},$$

и по известной теореме Фубини (см. Ф. Рисс и Б. Надь, Лекции по функциональному анализу, М., 1954, стр. 94—95) заключаем о существовании интеграла

$$I(x) = \int^b h^*(t) \frac{dt}{|t - x|}$$

на подмножестве P_1, мера которого равна мере множества P. Оценим теперь положительную функцию

$$J(x) = \int_a^b h(t)\frac{dt}{|t-x|}$$

в тех точках ξ, которые являются точками плотности множества P_1. Так как ξ — точка плотности множества P_1, то существует такое $\delta > 0$, что

$$\frac{|(\xi, \xi+h)\cap P_1|}{h} \geqslant \frac{1}{2} \qquad (0 < h \leqslant \delta),$$

где в числителе стоит мера пересечения $(\xi, \xi+h)\cap P_1$. Отсюда выводим оценку

$$2(\xi - t) \geqslant 2(\xi - (x_n + 3\delta_n)) \geqslant \frac{|(x_n, \xi)\cap P_1|}{1/2} \geqslant \xi - x_n,$$

где $t < \xi$ есть точка из Δ_n и $\xi - x_n < \delta$. Учитывая это соотношение, мы получаем

$$\int_{\xi-\frac{\delta}{2}}^{\xi}\frac{h(t)}{\xi - t}\,dt \leqslant 5\sum_{n=1}^{\infty}{}'\int_{\Delta_n}\frac{h(t)}{5(\xi-t)}\,dt \leqslant 5\sum_{n=1}^{\infty}{}'\int_{\Delta_n}\frac{h(t)}{\xi - t + 2(\xi - x_n)}\,dt =$$

$$= \frac{5}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\Delta_n^*}\frac{3h[x_n + 3(u - x_n)]}{\xi - u}\,du \leqslant \frac{5}{3}\int_a^{\xi} h^*(u)\frac{du}{\xi - u} < \infty,$$

где $\sum'$ означает суммирование по тем индексам, для которых $\Delta_n^* \subset [\xi - \delta, \xi]$. Точно таким же образом мы выводим неравенство

$$\int_{\xi}^{\xi+\frac{\delta}{2}}\frac{h(t)}{t-\xi}\,dt < \infty.$$

Следовательно, распространенные на $[a, \xi - \delta]$ и $[\xi + \delta, b]$ интегралы конечны, а это и доказывает соотношение

$$\int_a^b \frac{h(t)}{|t - \xi|}\,dt < \infty$$

в каждой точке плотности $\xi \in P_1$, т. е. для почти всех точек множества P[1]. Поэтому из ограниченности весовой функции $\varrho(x)$ и из $h(x)=0$ при $x \in P$ мы заключаем о справедливости соотношения

$$\int_a^b \frac{|h(t)-h(x)|}{|t-x|}\varrho(t)\,dt = O(1)\int_a^b \frac{h(t)}{|t-x|}\,dt < \infty$$

для почти всех точек $x \in P$. Таким образом, сходимость для почти всех $x \in P$ разложения функции $h(x)$ по системе $\{\varphi_n(x)\}$ является следствием из 4.7.2.

Теперь мы можем доказать 4.7.11. Предположим, что наше утверждение не верно, т. е. существует такое подмножество $F \subset E$ положительной меры, что (146) расходится на F. Исходя из этого предположения, мы придем к противоречию.

В самом деле, пусть E_n есть множество тех точек $x \in F$, в которых выполняется соотношение

$$\left|\int_0^u |f[x+t)-f(x)|\,dt\right| \leqslant n\frac{|u|}{\log 1/|u|} \qquad \left(0<|u|\leqslant\frac{1}{n}\right). \tag{156}$$

Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty}|E_n| = |F|$, а потому существует такое $n_0(\geqslant 3)$, для которого $|E_{n_0}|>0$. Из E_{n_0} выберем совершенное подмножество P положительной меры с диаметром $\leqslant n_0^{-1}$. Через $E(u, x, M)$ обозначим множество всех точек t, лежащих между $x+\frac{u}{3}$ и $x+u$, для которых

$$|f(t)-f(x)| \geqslant \frac{M}{\log 1/|t-x|}$$

$(|u|\leqslant 1/n_0)$. Тогда при $x \in P$ будет

$$n_0\frac{|u|}{\log 1/|u|} \geqslant \left|\int_0^u |f(x+t)-f(x)|\,dt\right| \geqslant \frac{M}{\log 3/|u|}|E(u, x, M)|,$$

а потому

$$|E(u, x, M)| \leqslant \frac{\log 3/|u|}{\log 1/|u|}\cdot\frac{n_0}{M}\cdot|u| \leqslant \frac{2n_0}{M}|u|.$$

---

[1] Почти все точки измеримого множества являются точками плотности. См. Рисс Ф. и Надь Б., Лекции по функциональному анализу, М., 1954, стр. 21.

Отсюда выводим неравенство

$$|E(u, x, 14n_0)| \leqslant \frac{|u|}{7}.$$

Пусть теперь x и y — две точки из P, например $x < y$. Тогда справедливы соотношения

$$|E(y-x, x, 14n_0)| \leqslant \frac{y-x}{7}, \quad |E(y-x, y, 14n_0)| \leqslant \frac{y-x}{7}.$$

Оба эти множества не покрывают интервал $\left(x+\frac{y-x}{3}, y-\frac{y-x}{3}\right)$, так как он имеет длину $\frac{y-x}{3}$. Следовательно, в этом интервале существует точка ξ, которая не принадлежит ни к $E(y-x, x, 14n_0)$, ни к $E(y-x, y, 14n_0)$, т. е.

$$|f(\xi)-f(x)| \leqslant \frac{14n_0}{\log\frac{1}{|\xi-x|}}, \quad |f(\xi)-f(y)| \leqslant \frac{14n_0}{\log\frac{1}{|y-\xi|}}.$$

Отсюда для любой пары точек $(x, y) \in P$ мы выводим неравенство

$$|f(y)-f(x)| \leqslant \frac{28n_0}{\log\frac{1}{|y-x|}}. \tag{157}$$

Введем теперь новую функцию $g(x)$:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x = a \quad \text{и} \quad x = b \\ f(x) & \text{при} \quad x \in P, \\ \text{линейна на смежных к } P \text{ интервалах.} \end{cases}$$

Так как функция $u\log\frac{1}{u}$ монотонно возрастает на интервале $\left(0, \frac{1}{3}\right)$, то для любых двух точек x_1, x_2 из смежного к P подинтервала $[\alpha, \beta]$ длиной $\beta-\alpha < \frac{1}{3}$ мы имеем

$$|g(x_2)-g(x_1)| \leqslant |x_2-x_1| \frac{28n_0}{(\beta-\alpha)\log\frac{1}{\beta-\alpha}} =$$

$$= \frac{|x_2-x_1|\log\frac{1}{|x_2-x_1|}}{(\beta-\alpha)\log\frac{1}{\beta-\alpha}} \cdot \frac{28n_0}{\log\frac{1}{|x_2-x_1|}} \leqslant \frac{28n_0}{\log\frac{1}{|x_2-x_1|}}.$$

Следовательно, если x, y — произвольные точки из $[a, b]$ с расстоянием $< \frac{1}{3}$, то, учитывая (157) и вытекающее из $x \in P$ равенство $g(x) = f(x)$, выводим оценку

$$|g(y) - g(x)| \leq \frac{84 n_0}{\log \frac{1}{|y-x|}}. \tag{158}$$

Таким образом, функция $g(x)$ непрерывна и имеет модуль непрерывности

$$\omega(g, \delta) = O\left(\frac{1}{\left|\log \frac{1}{\delta}\right|}\right),$$

а потому сходимость почти всюду разложения $g(x)$ по системе $\{\varphi_n(x)\}$ следует из теоремы 4.7.4.

Рассмотрим теперь функцию $h(x) = f(x) - g(x)$. При $x \in P$ имеем $h(x) = 0$. Пусть (α, β) — смежный к P интервал. Тогда справедливо соотношение

$$\int_\alpha^\beta |h(t)|\, dt \leq \int_\alpha^\beta |f(t) - f(\alpha)|\, dt + \int_\alpha^\beta |g(t) - g(\alpha)|\, dt =$$

$$= \int_0^{\beta-\alpha} |f(\alpha + t) - f(\alpha)|\, dt + \int_0^{\beta-\alpha} |g(\alpha + t) - g(\alpha)|\, dt,$$

ибо из предположения $\alpha \in P$ следует равенство $f(\alpha) = g(\alpha)$. Поэтому из (157) и (158) выводим оценку

$$\int_\alpha^\beta |h(t)|\, dt = O\left(n_0 \frac{\beta - \alpha}{\left|\log \frac{1}{\beta - \alpha}\right|}\right).$$

Мы видим, что функция $h(t)$ удовлетворяет требованиям теоремы 4.7.12, а потому ее разложение, а следовательно, и разложение (146) по системе $\{\varphi_n(x)\}$ сходится почти всюду на P. С другой стороны, из включений $P \subset E_{n_0} \subset F$ следует, что разложение (146) должно быть расходящимся почти всюду на P. Таким образом, мы получили противоречие, и теорема 4.7.11 установлена.

Теорема 4.7.11 установлена Марцинкевичем [1], который доказал ее для рядов Фурье[1]. Условие сходимости (155) не может быть усилено даже в случае рядов Фурье. В самом деле, Марцинкевичем доказана в [3] следующая теорема:

Пусть положительная, неубывающая, (по модулю аргумента) четная функция $\omega(u)$ *удовлетворяет условию* $\lim\limits_{u\to 0} \omega(u) \log \frac{1}{|u|} = \infty$. *Тогда существует L-интегрируемая функция* $f(x)$ *такая, что для почти всех* $x \in (0, 2\pi)$ *справедливо соотношение*

$$\frac{1}{u} \int_{0}^{u} |f(x+t) - f(x)|\, dt = O(\omega(u)),$$

в то время как ее ряд Фурье почти всюду расходится.

Доказательство этой теоремы очень трудно[2]. Оно опирается на сложную конструкцию, использованную Колмогоровым [1], при построении расходящегося почти всюду ряда Фурье. Длинное доказательство заставляет нас отказаться и от схематического его изложения.

Далее, интересно исследовать такую задачу: для каждой ли ограниченной ортонормированной системы $\{\varphi_n(x)\}$ можно построить такую L-интегрируемую функцию, что ее разложение по этой системе почти всюду расходится, причем функции Лебега $L_n(x)$ этой системы $\{\varphi_n(x)\}$ всюду удовлетворяют условию

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ L_n(x) = \infty\,?$$

За исключением рядов Фурье и равносходящихся с ними ортогональных разложений, эта проблема, по-видимому, не решена.

§ 8. Абсолютная сходимость ортогональных рядов

Мы будем рассматривать общие ортогональные ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x), \tag{159}$$

где через $\{\varphi_n(x)\}$ снова обозначается произвольная ортонормированная система. Будем говорить, что система $\{\varphi_n(x)\}$

[1] Отметим, что автор проводит доказательство утверждений 4.7.11 и 4.7.12, следуя изложению теоремы Марцинкевича, данному П. Л. Ульяновым (см. Ульянов П. Л., О расходимости рядов Фурье, *Успехи матем. наук*, **12**, № 3 (1957), 75—132, особенно стр. 108—111). — *Прим. перев.*

[2] Марцинкевич не привел подробного доказательства, а лишь указал краткую схему возможных рассуждений. Подробное доказательство, по-видимому, впервые опубликовано П. Л. Ульяновым (см. предыдущее примечание). — *Прим. перев.*

обладает свойством C или c, если соотношение $c_n = o(1)$ следует из сходимости (159) на множестве положительной μ-меры или соответственно из μ-почти всюду сходимости (159). Далее, будем говорить, что система $\{\varphi_n(x)\}$ обладает свойством D или d, если соотношение

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| < \infty \tag{160}$$

следует из абсолютной сходимости (159) на множестве положительной μ-меры или соответственно из μ-почти всюду сходимости (159). Интересно, что как свойства C и D, так и свойства c и d эквивалентны. Это утверждение есть непосредственное следствие следующей теоремы:

4.8.1. *Чтобы ортонормированная система $\{\varphi_n(x)\}$ обладала свойством C или D, необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\varliminf_{n\to\infty} \int_E |\varphi_n(x)|\, d\mu(x) > 0. \tag{161}$$

для всех множеств положительной меры.

Чтобы ортонормированная система $\{\varphi_n(x)\}$ обладала свойством c или d, необходимо и достаточно выполнение условия (161) *для всех множеств E, μ-мера которых сколь угодно близка к $b - a$.*

Необходимость. Если (161) не выполняется, то существует такое множество E с положительной μ-мерой, соответственно с μ-мерой, сколь угодно близкой к $b-a$, что имеет место равенство

$$\varliminf_{n\to\infty} \int_E |\varphi_n(x)|d\mu(x) = 0.$$

Отсюда заключаем о существовании последовательности индексов (k_n) со свойством

$$\int_E |\varphi_{k_n}(x)|\, d\mu(x) \leqslant \frac{1}{n^3}\,.$$

Пусть теперь $c_{k_n} = n$, а остальные $c_\nu = 0$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \int_E |\varphi_n(x)|\, d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |c_{k_n}| \int_E |\varphi_{k_n}(x)|\, d\mu(x) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Применяя теорему 1.2.2, мы убеждаемся в том, что ряд $\sum|c_n\varphi_n(x)|$ сходится почти всюду на множестве E, μ-мера которого $m(E)>0$ в первом случае и $m(E)>b-a-\varepsilon$ во втором случае ($\varepsilon>0$ сколь угодно мало). Тем не менее $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, c_n=\infty$, т. е. не выполняются свойства C и D (в первом случае), и свойства c и d (во втором случае).

Достаточность. Предположим, что $m(E)>0$ или, во втором случае, $m(E)=b-a$ и что ряд (159) сходится на E. По известной теореме Егорова существует подмножество E_ε из E с мерой $m(E_\varepsilon)>m(E)-\varepsilon$ ($\varepsilon>0$ сколь угодно мало), на котором ряд (159) сходится равномерно и, следовательно, последовательность $\{c_n\varphi_n(x)\}$ равномерно сходится к нулю. В таком случае, мы имеем

$$\lim_{n\to\infty}|c_n|\int\limits_{E_\varepsilon}|\varphi_n(x)|\,d\mu(x)=0,$$

откуда вследствие (161) и выводим соотношение $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=0$. Таким образом, свойство C, соответственно c, есть следствие из (161).

Пусть теперь ряд $\sum|c_n\varphi_n(x)|$ равномерно сходится на E_ε. Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|\int\limits_{E_\varepsilon}|\varphi_n(x)|\,d\mu(x)<\infty.$$

В силу (161), существуют константа $K>0$ и натуральное число N такие, что при $n\geqslant N$ выполняется неравенство

$$\int\limits_{E_\varepsilon}|\varphi_n(x)|\,d\mu(x)\geqslant K,$$

а потому

$$\sum_{n=N}^{\infty}|c_n|\leqslant\frac{1}{K}\sum_{n=N}^{\infty}|c_n|\int\limits_{E_\varepsilon}|\varphi_n(x)|\,d\mu(x)<\infty.$$

Итак, D и d также являются следствием из (161).

4.8.2. *Ограниченная ортонормированная система обладает свойствами c и d.*

Как мы уже видели в 1.1.4, система $\{\varphi_n(x)\}$ обладает свойством c. Отсюда по теореме 4.8.1 заключаем, что эта система обладает также свойством d, Приведенные выше теоремы доказаны Орличем [1][1], позднее их доказательство дал также Стоун [1]. Теорема 4.8.1 может быть использована, например, для тригонометрической системы. В самом деле, пусть $E \subset [0, \pi]$ — множество с положительной мерой. Тогда имеем

$$\int\limits_E |\cos nx|\,dx \geqslant \int\limits_E \cos^2 nx\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_E dx + \frac{1}{2}\int\limits_E \cos 2nx\,dx.$$

Последний интеграл является коэффициентом Фурье характеристической функции множества E, а поэтому он стремится к нулю. Отсюда заключасм, что

$$\varliminf_{n\to\infty} \int\limits_E |\cos nx|\,dx \geqslant \frac{|E|}{2} > 0.$$

Аналогичное неравенство справедливо также и для интеграла от $|\sin nx|$. Стало быть, тригонометрическая система обладает свойствами C и D. Хотя утверждение относительно C было известно уже давно (теорема Кантора—Лебега), тем не менее связь между C и D не была установлена, а утверждение относительно D было специально доказано Данжуа [1] и Лузиным [1].

Другое следствие из теоремы 4.8.1 состоит в том, что ортонормированная система Уолша $\{\mathfrak{w}_n(x)\}$ обладает свойствами C и D. Действительно, функции $\mathfrak{w}_n(x)$ являются произведениями функций Радемахера, которые, за исключением счетного множества, принимают только значения ± 1. Отсюда для произвольного множества E положительной меры следует неравенство

$$\int\limits_E |\mathfrak{w}_n(x)|\,dx = |E| > 0,$$

и наше утверждение вытекает тогда из 4.8.1.

Абсолютная сходимость разложений по мультипликативным ортогональным функциям. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — мультипликативная ортогональная система функций, а $\{\psi_n(x)\}$ — порождаемая ею система произведений (см. гл. III, § 2). Будем говорить, что функция $f(x)$ *лежит в плоскости* $\{\varphi_n(x)\}$, если равны нулю все коэффициенты разложения функции $f(x)$ по системе $\{\psi_n(x)\}$, за исключением самое большее тех, которые являются коэффициентами разложения по системе $\{\varphi_n(x)\}$ (о таком способе выражения см. С. Качмаж и Г. Штейнгауз, Теория ортогональных рядов, М., 1958, стр. 290).

4.8.3. *Пусть* $\{\varphi_n(x)\}$ — *ограниченная, мультипликативная ортогональная, равнонормированная система функций. Если*

[1] Теорема 4.8.2 была доказана И. И. Приваловым (см. *Матем. сб.*, **29** (1914), 182—185) на 15 лет раньше, чем Орличем. — *Прим. ред.*

односторонне ограниченная L_μ-интегрируемая функция $f(x)$ лежит в плоскости $\{\varphi_n(x)\}$, то ее разложение (159) *по системе $\{\varphi_n(x)\}$ абсолютно сходится на $[a, b]$ и, более того, выполняется соотношение* (160).

Можно, очевидно, предполагать, что

$$|\varphi_n(x)| \leqslant 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{162}$$

В самом деле, по условию $|\varphi_n(x)| \leqslant K$ при всех n; если мы положим $\varphi_n^*(x) = \frac{\varphi_n(x)}{K}$ и $c_n^* = c_n K$, то $f(x)$ лежит в плоскости $\{\varphi_n^*(x)\}$ и $\sum c_n^* \varphi_n^*(x)$ есть разложение $f(x)$ по системе $\{\varphi_n^*(x)\}$. Так как ряды $\sum c_n^* \varphi_n^*(x)$ и $\sum c_n \varphi_n(x)$ либо вместе абсолютно сходятся, либо вместе расходятся, то, не ограничивая общности, мы можем считать выполненным условие (162). Пусть $\{\varphi_{\nu_k}(x)\}$ — расположенная в произвольном порядке система $\{\varphi_n(x)\}$ и пусть

$$S(n, x) = \sum_{k=1}^{n} c_{\nu_k} \varphi_{\nu_k}(x)$$

— n-я частичная сумма переставленного ряда (159). Так как $f(x)$ лежит в плоскости $\{\varphi_{\nu_k}(x)\}$, то, обозначая через $\|\varphi\|$ общую норму для $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$, получаем

$$S(n, x) = \frac{1}{\|\varphi\|^2} \int_a^b f(t) \prod_{k=1}^{n} [1 + \varphi_{\nu_k}(t)\, \varphi_{\nu_k}(x)]\, d\mu(t).$$

В силу (162), стоящее под знаком интеграла произведение положительно и, кроме того, функция $f(t)$ односторонне ограничена, например $f(t) \leqslant M$, а потому мы имеем оценку

$$S(n, x) \leqslant \frac{M}{\|\varphi\|^2} \int_a^b \prod_{k=1}^{n} [1 + \varphi_{\nu_k}(t)\, \varphi_{\nu_k}(x)]\, d\mu(t).$$

Из мультипликативной ортогональности выводим соотношение

$$\int_a^b \prod_{k=1}^{n} [1 + \varphi_{\nu_k}(t)\, \varphi_{\nu_k}(x)]\, d\mu(t) =$$

$$= \int_a^b \left[1 + \sum_{k=1}^{2^n - 1} \psi_k(t)\, \psi_k(x)\right] d\mu(t) = \int_a^b d\mu(t) = A$$

и, стало быть,

$$S(n, x) \leqslant \frac{AM}{\|\varphi\|^2}.$$

Кроме того, находим

$$-S(n, x) = \frac{1}{\|\varphi\|^2} \int_a^b f(t) \prod_{k=1}^{n} [1 - \varphi_{\nu_k}(t)\varphi_{\nu_k}(x)]\, d\mu(t) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{\|\varphi\|^2} \int_a^b \left[1 - \sum_{k=1}^{2^n-1} \psi_k(t)\ \psi_k(x)\right] d\mu(t) \leqslant \frac{AM}{\|\varphi\|^2}.$$

Отсюда мы видим, что как бы мы ни переставляли члены ряда (159), частичные суммы удовлетворяют неравенству

$$|S(n, x)| \leqslant \frac{AM}{\|\varphi\|^2} \qquad (n = 1, 2, \ldots ;\ a \leqslant x \leqslant b).$$

Таким образом, при любой перестановке членов ряда (159) абсолютные величины частичных сумм переставленного ряда ограничены одним и тем же числом; тогда по классической теореме Римана заключаем об абсолютной сходимости на $[a, b]$ ряда (159). Применяя 4.8.2, мы выводим и более сильное соотношение (160).

4.8.4. *Если ряд Радемахера*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n r_n(x)$$

является разложением Уолша односторонне ограниченной L-интегрируемой функции, то справедливо соотношение (160).

4.8.5. *Если сильно лакунарный тригонометрический ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{m_n} \cos m_n x + b_{m_n} \sin m_n x)$$

является рядом Фурье односторонне ограниченной L-интегрируемой функции, то справедливо соотношение

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_{m_n}| + |b_{m_n}|) < \infty.$$

Теорема 4.8.4 есть непосредственное следствие теоремы 4.8.3. Для доказательства 4.8.5 мы так же, как и в (91), разобьем сильно лакунарный ряд Фурье на конечное число рядов, не содержащих общих членов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varrho_{m_n} \cos (m_n x + \alpha_{m_n}) = \sum_{l=1}^{p} \sum_{k=0}^{\infty} \varrho_{m_k}^{(l)} \cos (m_k^{(l)} x + \alpha_{m_k}^{(l)}),$$

где $m_{k+1}^{(l)}/m_k^{(l)} \geqslant 3$. Как мы уже видели ранее, в этом случае система $\{\sqrt{2} \cos m_k^{(l)} x\}$ является мультипликативной ортогональной, а потому из 4.8.3 при $l = 1, 2, \ldots, p$ получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty} | \varrho_{m_k}^{(l)} | < \infty,$$

откуда и выводим требуемое неравенство[1]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} | \varrho_{m_n} | < \infty.$$

Теорему 4.8.4 можно существенно обобщить. Именно, пусть $F(x)$ — ограниченная измеримая на $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ функция, удовлетворяющая только одному условию

$$\int_0^{\frac{1}{2}} F^2(x)\, dx = \frac{1}{2}.$$

Тогда полагаем

$$\Phi_1(x) = F(x) \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$$

и

$$\Phi_1\left(\frac{1}{2} + x\right) = - \Phi_1\left(\frac{1}{2} - x\right) \quad \text{при} \quad \frac{1}{2} < x < 1.$$

---

[1] Приведенное доказательство теоремы 4.8.5 вызывает следующее возражение. Для того чтобы к ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varrho_{m_k}^{(l)} \cos (m_k^{(l)} x + \alpha_{m_k}^{(l)})$$

можно было применить теорему 4.8.3, нам нужно знать, что этот ряд является рядом Фурье некоторой односторонне ограниченной функции $f_l(x)$, которая лежит в плоскости $\{\cos m_k^{(l)} x, \sin m_k^{(l)} x\}$. Однако автор это не проверяет.

Точное и полное доказательство теоремы 4.8.5 можно найти в книге Бари Н. К. «Тригонометрические ряды», М., 1961 (Гл. XI, §§ 7,8). — *Прим. ред.*

Наконец, с помощью равенства $\Phi_1(x+1) = \Phi_1(x)$ мы продолжим $\Phi_1(x)$ на всю прямую. Положим также

$$\Phi_n(x) = \Phi_1(2^{n-1}x).$$

Здесь функциям Радемахера соответствует частный случай $F(x) \equiv 1$. Мы утверждаем, что $\{\Phi_n(x)\}$ есть ограниченная, нормированная, мультипликативная ортогональная система на $[0, 1]$. Ограниченность и нормированность вытекают из определения $\Phi_n(x)$. Чтобы доказать мультипликативную ортогональность, мы выберем произвольные индексы $\nu_1 < \nu_2 < \ldots$ $\ldots < \nu_n$. Произведение $\Phi_{\nu_2}(x)\,\Phi_{\nu_3}(x)\ldots\Phi_{\nu}(x)$ принимает все свои значения на интервале $[0, 1/2^{\nu_2-1}]$, а затем повторяется периодически. Так как $\nu_1 \leqslant \nu_2 - 1$, то это произведение имеет на интервале $[0, 1/2^{\nu_1-1}]$ четное число периодов, а потому симметрично относительно $\xi = \frac{1}{2^{\nu_1}}$, в то время как $\Phi_{\nu_1}(x)$ антисимметрична относительно ξ:

$$\Phi_{\nu_1}(\xi + t) = -\,\Phi_{\nu_1}(\xi - t) \qquad \left(0 < t < \frac{1}{2^{\nu_1}}\right).$$

Стало быть, все произведение $\Phi_{\nu_1}(x)\,\Phi_{\nu_2}(x)\ldots\Phi_{\nu}(x)$ также антисимметрично относительно ξ, вследствие чего

$$\int_0^{1/2^{\nu_1-1}} \Phi_{\nu_1}(x)\,\Phi_{\nu_2}(x)\ldots\Phi_{\nu_n}(x)\,dx = 0,$$

а отсюда и вытекает равенство

$$\int_0^1 \Phi_{\nu_1}(x)\,\Phi_{\nu_2}(x)\ldots\Phi_{\nu_n}(x)\,dx = 0.$$

Таким образом, система $\{\Phi_n(x)\}$ действительно является мультипликативной ортогональной системой.

Из 4.8.3 получаем следующее обобщение теоремы 4.8.4:

4.8.6. *Если L-интегрируемая односторонне ограниченная функция $f(x)$ лежит в плоскости $\{\Phi_n(x)\}$, то для коэффициентов ее разложения по системе $\{\Phi_n(x)\}$ справедливо соотношение* (160).

Теоремы 4.8.3 и 4.8.6 установлены Алексичем [10]; непосредственное доказательство теоремы 4.8.4 дано Качмажем и Штейнгаузом [1], а теоремы 4.8.5 — Сидоном [1], [2].

Доказательство 4.8.5 содержит больше, чем утверждение самой теоремы. В самом деле, в случае $m_{n+1}/m_n \geqslant 3$ достаточно предположить, что равны нулю отличные от c_{m_n} коэффициенты системы произведений $\{\exp m_n ix\}$. В случае очень сильно лакунарных рядов, как, например, при $m_n = 2^{2^n}$, различие между этими предположениями будет большим.

Другой пример использования теоремы 4.8.3 дают сильно лакунарные разложения по ортогональным полиномам. Действительно, если $\{p_n(x)\}$ — ортонормированная по мере $\mu(x)$ полиномиальная система и $m_{n+1}/m_n > 2$, то система $\{p_{n_m}(x)\}$ является мультипликативной ортогональной. Чтобы доказать это, мы через $\nu_k < \nu_{k+1} < \ldots < \nu_n$ обозначим произвольную систему индексов из $\{m_n\}$. Тогда произведение $p_{\nu_1}(x)\, p_{\nu_2}(x) \ldots p_{\nu_{k-1}}(x)$ есть полином степени не выше, чем

$$\sum_{i=1}^{k-1} \nu_i \leqslant \nu_{k-1}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{k-2}}\right) < 2\nu_{k-1} < \nu_k.$$

Следовательно, полином $p_{\nu_k}(x)$ ортогонален к этому произведению, т. е.

$$\int_a^b p_{\nu_1}(x)\, p_{\nu_2}(x) \ldots p_{\nu_k}(x)\, d\mu(x) = 0,$$

а это и означает мультипликативную ортогональность системы $\{p_{m_n}(x)\}$. Таким образом, из теоремы 4.8.3 мы получаем следующее утверждение:

Пусть $m_{n+1}/m_n > 2$ и $\{p_m(x)\}$ — ограниченная подсистема из ортонормированных по мере $\mu(x)$ полиномов. Если L-интегрируемая односторонне ограниченная функция $f(x)$ лежит в плоскости $\{p_m(x)\}$, то для ее коэффициентов разложения справедливо соотношение (160).

Из этой теоремы видно, что на самом деле в 4.8.4 и 4.8.5 достаточно вместо обращения в нуль отличных от c_{m_n} коэффициентов разложения по пополненной системе $\{\varphi_{m_n}(x)\}$ (как это делалось в оригинальн х работах) потребовать лишь обращение в нуль отличных от c_{m_n} коэффициентов разложения по системе произведений, независимо от того, полна она или нет. Тот факт, что полная система Уолша в определенном порядке представляет собой систему произведений, по-видимому, случаен. Тем не менее в случае сильно лакунарной ортонормированной полиномиальной системы равенство нулю отличных от c_{m_n} коэффициентов относительно полной системы было бы еще недостаточно для нашего доказательства, ибо система произведений из $\{p_{m_n}(x)\}$, вообще говоря, не содержится в $\{p_n(x)\}$.

Абсолютная сходимость ортогональных разложений по функциям аппроксимативных систем. Как нетрудно видеть, абсолютная сходимость разложения (159) тесно связана с аппроксимативными свойствами системы $\{\varphi_n(x)\}$. Эту связь можно установить многими способами. Мы выбираем наиболее простой путь и докажем прежде всего следующую теорему:

4.8.7. *Пусть* $\{\varphi_n(x)\}$ — *ортонормированная система и пусть* $\mathfrak{X}$ *есть класс функций, для которых наилучшее* L^2*-приближение с помощью линейных выражений* $\sum_{k=0}^{n} a_{nk}\varphi_k(x)$ *имеет порядок*

$$\varrho_n(\mathfrak{X}, 2) = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \qquad (\alpha > 0).$$

Если $2 > \beta > \frac{2}{2\alpha+1}$, *то коэффициенты разложения* c_n *произвольной функции* $f \in \mathfrak{X}$ *удовлетворяют соотношению*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^\beta < \infty.$$

Прежде всего, из неравенства Гёльдера выводим оценку

$$\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} |c_k|^\beta \leqslant \left\{\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} c_k^2\right\}^{\beta/2} \left\{\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} 1\right\}^{\frac{2-\beta}{2}} = 2^{\frac{2-\beta}{2}n} \left\{\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} c_k^2\right\}^{\beta/2}.$$

Но по теореме 1.1.2 имеем

$$\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} c_k^2 \leqslant \sum_{k=2^n+1}^{\infty} c_k^2 = \int_a^b [f(x) - s_{2^n}(x)]^2 d\mu(x) \leqslant \varrho_{2^n}^2(\mathfrak{X}, 2) = O\left(\frac{1}{2^{2\alpha n}}\right),$$

а потому

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_k|^\beta = \sum_{n=0}^{\infty} O\left(2^{\left(\frac{2-\beta}{2} - \alpha\beta\right)n}\right).$$

Далее, из условия $\beta > 2/(2\alpha + 1)$ находим

$$\frac{2-\beta}{2} - \alpha\beta = \gamma < 0;$$

следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_k|^\beta = \sum_{n=0}^{\infty} O\left(\frac{1}{2^{\gamma n}}\right) < \infty.$$

Используя аппроксимативные свойства алгебраических и тригонометрических полиномов, из этой теоремы мы легко выводим следующие теоремы:

4.8.8. *Пусть $\{p_n(x)\}$ — ортонормированная по мере $\mu(x)$ полиномиальная система и пусть $\{c_n\}$ — последовательность коэффициентов разложения функции $f(x)$, удовлетворяющей условию Липшица порядка $\alpha > \frac{1}{2}$. Тогда*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| < \infty;$$

таким образом, разложение функции $f(x)$ по системе $\{p_n(x)\}$ абсолютно сходится на каждом интервале ограниченности системы $\{p_n(x)\}$.

4.8.9. *Если функция $f(x)$ периода 2π удовлетворяет только L^2-условию Липшица $\omega_2(f, \delta) = O(\delta^\alpha)$ порядка $\alpha > \frac{1}{2}$ и если $\{a_n, b_n\}$ есть последовательность коэффициентов Фурье функции $f(x)$, то справедливо соотношение*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) < \infty.$$

Пусть $\mathfrak{K}$ — класс функций $f(x)$, для которых $\omega(f, \delta) = O(\delta^\alpha)$. По теореме 4.6.6 приближение этих функций ортогональными полиномами оценивается таким образом:

$$\varrho_n(\mathfrak{K}) = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right),$$

а потому, используя неравенство

$$\varrho_n(\mathfrak{K}, 2) \leqslant \varrho_n(\mathfrak{K}) \left\{ \int_a^b d\mu(x) \right\}^{1/2},$$

мы выводим соотношение

$$\varrho_n(\mathfrak{K}, 2) = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Так как $\alpha > \frac{1}{2}$, то $1 > \frac{2}{2\alpha + 1}$; поэтому 4.8.8 следует из 4.8.7 при $\beta = 1$.

Пусть $\mathfrak{K}$ — класс всех функций $f(x)$ периода 2π, для которых $\omega_2(f, \delta) = O(\delta^\alpha)$. По теореме 4.6.7, L^2-приближение єтих функций тригонометрическими полиномами оценивается таким образом:

$$\varrho_n(\mathfrak{X},\ 2) = O\left(\frac{1}{n^a}\right),$$

а потому непосредственно из 4.8.7 и вытекает 4.8.9.

Теорема 4.8.7, по существу, доказана Сасом [1], хотя и не в такой общей формулировке; 4.8.8 является перенесением на общие разложения по ортогональным полиномам теоремы Бернштейна [2], доказанной им для рядов Фурье. Теорема 4.8.9, являющаяся обобщением упомянутой теоремы Бернштейна, доказана Стечкиным [1]. В случае специальных разложений, в частности для рядов Фурье, можно вывести и другие теоремы об абсолютной сходимости.

Отметим еще, что теорема 4.8.7 не обязательна при доказательстве теорем 4.8.8 и 4.8.9. Мы привели ее только для полноты картины; теоремы 4.8.8 и 4.8.9 на самом деле являются непосредственным следствием из 4.7.3.

Наконец, отметим интересную работу Стечкина [3], в которой устанавливаются необходимые и достаточные условия абсолютной сходимости ортогональных рядов.

ЛИТЕРАТУРА

(Ссылки на учебники и монографии даны в тех местах текста, где они используются. Здесь мы приводим только работы, опубликованные в различной периодической литературе.)

Алексич (Alexits G.)

1. Über die Annäherung einer stetigen Funktion durch die Cesároschen Mittel ihrer Fourierreihe, *Math. Ann.*, **100** (1928), 264—277.
2. Sur la convergence des séries de polynomes orthogonaux, *Comment. Math. Helvetici*, **16** (1944), 200—208.
3. Sur la convergence des séries orthonormales lacunaires, *Acta scient. math.*, **13** (1949/50), 14—17.
4. Sur la convergence et la sommabilité presque partout des séries de polynomes orthogonaux, *Acta scient. math.*, **12 B** (1950), 223—225.
5. Sur les sommes de fonctions orthogonales, *Ann. Soc. math. Polonaise*, **25** (1952), 183—187.
6. Über den Einfluss der Struktur einer Funktion auf die Konvergenz fast überall ihrer Fourierreihe, *Acta math. Acad. sci. Hung.*, **4** (1953), 95—101.
7. Sur la sommabilité des séries orthogonales, *Acta math. Acad. sci. Hung.*, **4** (1953), 181—188.
8. Eine Bemerkung zur starken Summierbarkeit der Ofthogonalreihen, *Acta scient. math.*, **16** (1955), 127—129.
9. Sur la convergence et la sommabilité des séries orthogonales lacunaires, *Acta scient. math.*, **18** (1957), 179—188.
10. Sur la convergence absolue de certains développements orthogonaux, *Acta math. Acad. sci. Hung.*, **8** (1957), 303—310.
11. Une contribution à la théorie constructive des fonctions, *Acta scient. math.*, **19** (1958), 149—157.
12. Über die Konvergenz fast überall der Orthogonalreihen bei jeder Anordnung ihrer Glieder, *Acta scient. math.*, **19** (1958), 158—161.

Алексич и Кралик (Alexits G., Králik D.)

1. Über die Bedeutung der strukturellen Eigenschaften einer Funktion für die Konvergenz ihrer Orthogonalentwicklungen, *Acta sci. math.*, **18** (1957), 131—139.
2. Über Approximationen mit den arithmetischen Mitteln allgemeiner Orthogonalreihen, *Acta math. Acad. sci. Hung.*, **11** (1960), 387—399.

Алексич и Тандори (Alexits G., Tandori K.)

1. Über das Konvergenzverhalten einer Klasse von Orthogonalreihen, *Ann. Univ. Budapestiensis*, **3** (1961).

Банах (Banach S.)
1. Sur la divergence des séries orthogonales, *Studia math.*, **9** (1940), 139—154.

Банах и Штейнгауз (Banach S., Steinhaus H.)
1. Sur le principe de la condensation des singularités, *Fundam. math.*, **9** (1927), 50—61.

Бернштейн С. Н.
1. О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени (1912), Собрание сочинений, т. I, стр. 11—104, Изд. АН СССР, 1952.
2. Об абсолютной сходимости тригонометрических рядов (1934), Собрание сочинений, т. II, стр. 166—169, 1954.

Борген (Borgen S.)
1. Über (C, 1)-Summierbarkeit von Reihen orthogonaler Funktionen, *Math. Ann.*, **98** (1928), 125—150.

Вальфиш А. З.
1. Über einige Orthogonalreihen, *Сообщение АН Гр. ССР*, **1** (1940), 411—420.

Вейль (Weyl H.)
1. Über die Konvergenz von Reihen, die nach Orthogonalfunktionen fortschreiten, *Math. Ann.*, **67** (1909), 225—245.

Вейль и Ерош (Weyl H., Jerosch F.)
1. Über die Konvergenz von Reihen, die nach periodischen Funktionen fortschreiten, *Math. Ann.*, **66** (1909), 67—80.

Виленкин Н. Я.
1. К теории лакунарных ортогональных систем, *Изв. АН СССР, сер. матем.*, **13** (1949), 245—252.

Гал (Gál S.)
1. Sur les séries orthogonales $(C, 1)$-sommables et $\lambda(n)$-lacunaires, *C. r. Acad. sci.*, **227** (1948), 1140—1142.

Гобсон (Hobson E. W.)
1. On the corvergence of series of orthogonal functions, *Proc. London Math. Soc.*, (2) **12** (1913), 297—308.

Грам (Gram J. P.)
1. Über die Entwicklung reeller Funktionen in Reihen mittels der Methode der kleinsten Quadrate, *J. Reine und Angew. Math.*, **94** (1883), 41—73.

Данжуа (Denjoy A.)
1. Sur l'absolue convergence des séries trigonométriques, *C. r. Acad. sci.*, **155** (1912), 135—136.

Джексон (Jackson D.)
1. Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrische Summen gegebener Ordnung, Dissertation, Göttingen, 1911.

Дюбуа-Реймон (Du Bois-Reymond P.)
1. Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Fourierschen Darstellungsformeln, *Abhand. Acad. München*, XII (1876), 1—103.

Загорский (Zahorski Z.)
1. Sur les ensembles des points de divergence de certaines intégrales singulières, *Ann. Soc. math. Polonaise*, **19** (1947), 66—105.

Зальцвассер (Zalcwasser Z.)
1. Sur la sommabilité des séries de Fourier, *Studia math.*, **6** (1936), 82—88.

Зигмунд (Zygmund A.)
1. Sur l'application de la premiére moyenne arithmétique dans la théorie des séries orthogonales, *Fundam. math.*, **10** (1927), 356—362.
2. Sur la sommation des séries de fonctions orthogonales, *Bull. Inter. Acad. Polonaise sci. lettres (Cracovie)*, A (1927), 293—308.
3. On the convergence of lacunary trigonometric series, *Fundam. math.*, **16** (1930), 90—107 и **18** (1932), 312.

Зигмунд и Пэли (Zygmund A., Paley R. E. A. C.)
1. On some series of functions, *Proc. Philos. Soc. Cambridge*, **26** (1930), 337—357; 458—474.

Канторович Л. В.
1. Некоторые теоремы о сходимости почти везде, *Докл. АН СССР*, **14** (1937), 537—540.

Карлеман (Carleman T.)
1. A theorem concerning Fourier series, *Proc. London Math. Soc.*, **21** (1923), 483—492.

Качмаж (Kaczmarz S.)
1. Über die Konvergenz der Reihen von Orthogonalfunktionen, *Math. Z.*, **23** (1925), 263—270.
2. Über die Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen, *Math. Ann.*, **96** (1925), 148—151.
3. Über die Summierbarkeit der Orthogonalreihen, *Math. Z.* **26** (1927), 99—105.
4. Sur la convergence et la sommabilité des développements orthogonaux, *Studia math.*, **1** (1929), 87—121.
5. Über ein Orthogonalsystem, *Comptes rendus I. Congrès pays slaves* (Warszawa, 1929), 189—192.
6. Notes on orthogonal series, I, *Studia math.*, **5** (1935), 24—28.
7. Notes on orthogonal series, II, *Studia math.*, **5** (1935), 103—106.

Качмаж и Штейнгауз (Kaczmarz S., Steinhaus H.)
1. Le système orthogonal de M. Rademacher, *Studia math.*, **2** (1930), 231—247.

Колмогоров А. Н.
1. Une série de Fourier—Lebesgue divergente presque partout, *Fundam. math.*, **4** (1923), 324—328.
2. Une contribution à l'étude de la convergence des séries de Fourier, *Fundam. math.*, **5** (1924), 96—97.
3. Über die Summen durch den Zufall bestimmter unabhängiger Grössen, *Math. Ann.* **99** (1928), 309—319.
4. О сходимости рядов по ортогональным полиномам, *Докл. АН СССР*, **1** (1934), 291—294.

Колмогоров А. Н. и Меньшов Д. Е.
1. Sur la convergence des séries orthogonales, *Math. Z.*, **26** (1927), 432—441.

Колмогоров А. Н. и Селиверстов Г. А.
1. Sur la convergence des séries de Fourier, *C. r. Acad. sci.*, **178** (1925), 303—305.
2. Sur la convergence des séries de Fourier, *Rend. R. Acad. Lincei*, **3** (1926), 307—310.

Колмогоров А. Н. и Хинчин А. Я.
1. Konvergenz der Reihen, deren Glieder durch den Zufall bestimmt werden, *Матем сб.*, **32** (1925), 668—677.

Кораус (Korous J.)
1. Über die Entwicklung einer Funktionen einer reellen Veränderlichen nach gewissen orthogonalen Polynomen (Czechic), *Rozpr. Ceské akad.* (2), **48** (1938), N° 1, 12.

Крейн С. Г. и Левин Б. Я.
1. О сильной представимости функций сингулярными интегралами, *Докл. АН СССР*, 60 (1948), 195—198.

Лебег (Lebesgue H.)
1. Recherches sur la convergence des séries de Fourier, *Math. Ann.*, **61** (1905), 251—280.
2. Sur les intégrales singulières, Annales de Toulouse, **1** (1909), 25—117.
3. Sur la représentation trigonométrique approchée des fonctions satisfaisant à une condition de Lipschitz, *Bull. soc. math. France*, **38** (1910), 184—210.

Лейндлер (Leindler L.)
1. Über die orthogonalen Polynomsysteme, *Acta Sci. Math.*, **21** (1960), 19—46.
2. Über die absolute Summierbarkeit der Orthogonalreihen, *Acta sci. math.*

Литтлвуд и Харди (Littlewood J. E., Hardy G. H.)
1. Sur la série de Fourier d'une fonction à carré sommable, *C. r. Acad. sci.*, **156** (1913), 1307—1309.
2. The strong summability of Fourier series, *Fundam. math.*, **25** (1935), 162—189.

Лоренц (Lorentz G. G.)
1. Riesz method of summation and orthogonal series, *Trans. Roy. Soc. Canada*, **45** (1951), 19—32.

Лузин Н. Н.
1. К абсолютной сходимости тригонометрических рядов (1912), Собрание сочинений, т. 1, стр. 39—40, изд. АН СССР, 1953.

Марцинкевич (Marcinkiewicz J.)
1. On the convergence of Fourier series, *J. London Math. Soc.*, **10** (1935), 264—268.
2. Sur la convergence des séries orthogonales, *Studia math.*, **6** (1936), 39—45.
3. Sur les séries de Fourier, *Fundam. math.*, **27** (1936), 38—69.

4. Sur la sommabilité forte de séries de Fourier, *J. London Math. Soc.*, **14** (1939), 162—168.

Медер (Meder J.)
1. On the summability almost everywhere of orthonormal series by the method of first logarithmic means, Math. Diss, Math. Institut Polish Acad. Sci. *(Rozpr. Mat. Polska akad. nauk, Inst. mat.)*, **17** (1959), 1—34.

Меньшов Д. Е.
1. Sur les séries de fonctions orthogonales. I, *Fundam. math.*, **4** (1923), 82—105.
2. Sur la sommation des séries orthogonales, *C. R. Acad. sci.*, **180** (1925), 2011—2013.
3. Sur les séries de fonctions orthogonales. II, *Fundam. math.*, **8** (1926), 56—108.
4. Sur les séries de fonctions orthogonales. III, *Fundam. math.*, **10** (1927), 375—420.
5. Sur la convergence et la sommation des séries de fonctions orthogonales, *Bull. soc., math. France*, **64** (1936), 147—170.
6. Суммирование рядов по ортономинальным функциям линейными методами, *Изв. АН СССР, сер. матем.*, (1937), 203—230.
7. Sur les séries de fonctions orthogonales bornées dans leur ensemble, *Матем. сб.*, **3** (1938), 103—118.
8. Sur les multiplicateurs de convergence pour les séries de polynômes orthogonaux, *Матем. сб.*, **6** (1939), 27—52.
9. Sur la sommation des séries de fonctions orthogonales par des méthodes de Cesàro, *Матем. сб.*, **8** (1940), 121—134.
10. О частных суммах тригонометрических рядов, *Матем. сб.*, **20** (1947), 197—236.
11. О частных суммах рядов по ортогональным функциям, М., *Учен. зап. ун-та (математика)*, **135** (1948), 3—9.

Мерсер (Mercer J.)
1. Sturm—Liouville series of normal functions in the theory of integral equations, *Philos. Trans. Roy. Soc. London* (A), **211** (1911), 111—148.

Натансон И. П.
1. Sur la représentation des fonctions aux points de continuité approximative par des intégrales singulières, *Fundam. math.*, **18** (1931), 99—109

Надь Б. (Szőkefalvi—Nagy B.)
1. Über die Konvergenz von Reihen orthogonaler Polynome, *Math. Nachr.*, **4** (1951), 50—55.
2. Approximation properties of orthogonal expansions, *Acta Sci. Math.*, **15** (1953/54), 31—37.

Орлич (Orlicz W.)
1. Zur Theorie der Orthogonalreihen, *Bull. Intern. Acad. sci. polonaise Cracovie*, (1927), 81—115.
2. Einige Gegenbeispiele zur Konvergenztheorie der allgemeinen Orthogonalentwicklungen, *Studia math.*, **6** (1936), 98—103.

Пал (Pál J.)
1. Über manche Verallgemeinerungen eines Weierstrassschen Satzes (Hung.), *Math. Phys. Lapok*, **24** (1915), 243—247.

Планшерель (Plancherel M.)
1. Sätze über Systeme beschrankter Orthogonalfunktionen, *Math. Ann.*, **68** (1910), 270—278.
2. Sur la convergence des séries de fonctions orthogonales, *C. r. Acad. Sci.*, **157** (1913), 539—542.

Плеснер А. И.
1. Über Konvergenz von trigonimetrischen Reihen, *J. Reine und Angew. Math.*, **155** (1926), 15—25.

Привалов И. И.
1. Интеграл Cauchy, Саратов, *Изв. ун-та, физ.-мат. ф-т*, **11** (1918), стр. 94.

Пэли (Paley R. E. A. C.)
1. A remarcable series of orthogonal functions, *Proc. London Math. Soc.*, (2) **34** (1932), 241—279.

Радемахер (Redemacher H.)
1. Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen, *Math. Ann.*, **87** (1922), 112—138.

Реньи (Rényi A.)
1. On a conjecture of Steinhaus, *Ann. soc. math. Polonaise*, **25** (1952), 279—287.

Рисс М. (Riesz M.)
1. Sur les séries de Dirichlet et les séries entières, *C. r. Acad. sci.*, **149** (1909), 309—312.
2. Sur la sommation des séries de Fourier, *Acta Sci. Math.*, **1** (1922|23), 104—113.

Рисс Ф. (Riesz F.)
1. Sur les ensembles de fonctions, *C. R. Acad. sci.*, **143** (1906), 738—741.
2. Sur les systèmes orthogonaux de fonctions, *C. r. Acad. sci.*, **144** (1907), 615—619, 734—736.

Романовский П. И.
1. Quelques considérations sur la théorie des integrales singulières, *Math. Z.*, **34** (1932), 35—49.

Рудин (Rudin W.)
1. L^2-approximation by partial sums of orthogonal developments, *Duke Math. J.*, **19** (1952), 1—4.

Салем (Salem R.)
1. Essais sur les séries trigonométriques (Paris, 1940).
2. A new prof of a theorem of Menschoff, *Duke Math. J.*, **8** (1941), 269—272.

Сас (Szász O.)
1. Über den Konvergenzexponent der Fourierschen Reihe, *Sitzungsber. d. Bayerischen Akad. Wiss.*, (1922), 135—150.

Сегё (Szegö G.)
1. Über die Lebesgueschen Konstanten bei den Fourierreihen, *Math. Z.*, **9** (1921), 163—166.

С и д о н (S i d o n S.)

1. Verallgemeinerung eines Satzes über die absolute Konvergenz von Fourierreihen mit Lücken, *Math. Ann.*, **97** (1927), 675—676.
2. Über orthogonale Entwicklungen, *Acta sci. math.*, **10** (1941/43), 206—253.

С т е к л о в В. А.

1. Sur la théorie de fermeture des systèmes de fonctions orthogonales dépendant d'un nombre quelconque de variables, *Записки Академии наук (Петербург)* (8) **30**, № 4 (1911), 1—86.

С т е ч к и н С. Б.

1. Об абсолютной сходимости ортогональных рядов. I, *Матем. сб.*, **29** (1951), 225—232.
2. О теореме Колмогорова — Селиверстова, *Изв. АН СССР, сер. матем.*, **17** (1953), 499—512.
3. Об абсолютной сходимости ортогональных рядов, *Докл. АН СССР*, **102** (1955), 37—40.

С т о у н (S t o n e M. H.)

1. A note on the theory of infinite series, *Ann. Math.*, (2) **32** (1931), 233—238.

С у н о у т и и Я н о (S u n o u c h i G., Y a n o S.)

1. Convergence and summability of orthogonal series. (Notes on Fourier analysis XXXIX.), *Proc. Acad. Japan*, **26** (1950), 10—16.

Т а л а л я н А. А.

1. О сходимости ортогональных рядов, *Докл. АН СССР*, **110** (1956), 515—516.
2. Сходимость почти всюду ортогональных рядов, Диссертация, Москва, 1956.

Т а н д о р и (T a n d o r i K.)

1. Über die Cesàrosche Summierbarkeit der orthogonalen Reihen, *Acta, Sci. Math.*, **14** (1951/52), 85—95.
2. Über die Cesàrosche Summierbarkeit der orthogonalen Polynomreihen. I. *Acta math. Acad. sci. Hung.*, **3** (1952), 73—81.
3. Über die Cesàrosche Summierbarkeit der orthogonalen Polynomreihen. II, *Acta math. Acad. sci. Hung.*, **5** (1954), 236—253.
4. Über die Starke Summation von Fourierreihen, *Acta Sci. Math.*, **16** (1955), 65—73.
5. Über die orthogonalen Funktionen. I, *Acta Sci. Math.*, **18** (1957), 57—130.
6. Über die orthogonalen Funktionen. II (Summation), *Acta Sci. Math.*, **18** (1957), 149—168.
7. Über die orthogonalen Funktionen. III (Lebesguesche Funktionen), *Acta Sci. Math.*, **18** (1957), 169—178.
8. Über die orthogonalen Funktionen IV. (Starke Summation), *Acta Sci. Math.*, **19** (1958), 18—25.
9. Über die orthogonalen Funktionen V. (Genaue Weylische Multiplikatorfolgen), *Acta Sci. Math.*, **20** (1959), 1—13.
10. Über die orthogonalen Funktionen VI. (Eine genaue Bedingung für die starke Summation), *Acta Sci. Math.*, **20** (1959), 14—18.

11. Über die Konvergenz singulärer Integrale, *Acta Sci. Math.*, **15** (1953/54), 223—230.
12. Über die orthogonalen Funktionen IX. (Absolute Summation), *Acta Sci. Math.*, **21** (1960), 292—299.

Тёплиц (Toeplitz O.)
1. Über lineare Mittelbildungen, *Prace mat. Fiz.*, **22** (1911), 113—119.

Туран (Turan P.)
1. On the strong summability of Fourier series, *J. Indian Math. Soc.*, **12** (1948), 8—12.

Ульянов П. Л.
1. Обобщение теоремы Марцинкевича, *Изв. АН СССР, сер. матем.*, **17** (1953), 513—524.
2. О безусловной сходимости почти всюду, *Матем. сб.*, **40** (1956), 95—100

Уолш (Walsh J. L.)
1. A closed set of normal orthogonal functions, *Amer. J. Math.*, **45** (1923), 5—24.

Фабер (Faber G.)
1. Über die Orthogonalfunktionen des Herrn Haar, *Jahresber. Desch. Math. Ver.*, **19** (1910), 104—112.

Фавар (Favard J.)
1. Sur les polynomes de Tchébycheff, *C. r. Acad sci.*, **200** (1935), 2052—2053.

Фаддеев П. К.
1. О представлении суммируемых функций сингулярными интегралами в точках Лебега, *Матем. сб.*, **1** (1936), 351—368.

Файн (Fine N. J.)
1. On the Walsh functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **65** (1949), 372—414.

Фату (Fatou P.)
1. Séries trigonométriques et séries de Taylor, *Acta Math.*, **30** (1906), 335—400.

Фейер (Fejér L.)
1. Sur les fonctions bornées et intégrables, *C. r. Acad. sci.*, **131** (1900), 984—987.
2. Untersuchungen über Fouriersche Reihen, *Math. Ann.*, **58** (1904), 501—569.
3. Über die Konvergenz der Potenzreihe an der Konvergenzgrenze in Fällen der konformen Abbildung auf die schlichte Ebene, *Schwartz Festschrift* (Berlin, 1914), 42—53.

Фишер (Fischer E.)
1. Sur la convergence en moyenne, *C. r. Acad. Sci.* **144** (1907), 1022—1024, 1148—1150.

Франклин (Franklin Ph.)
1. A set of continuous orthogonal functions, *Math. Ann.*, **100** (1928), 522—529.

Фрайд (Freud G.)
1. Über die starke (C, 1)-summierbarkeit von orthogonalen Polynomreihen, *Acta Math. Acad. sci. Hung.*, **3** (1952), 83—88.

2. Über die Konvergenz orthogonaler Polynomreihen, *Acta Math. Acad. sci. Hung.*, **3** (1952), 89—98.

Хаар (Haar A.)
1. Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme, Dissertation (Göttingen, 1909); *Math. Ann.*, **69** (1910), 331—371, **71** (1912), 33—53.

Хан (Hahn H.)
1. Über Fejer's Summierung der Fourierschen Reihe, *Jahresber. Dtsch. Math. Ver.*, **25** (1916), 359—366.

Харди (Hardy G. H.)
1. On the summability of Fourier's series, *Proc. London Math. Soc.*, (2) **13** (1913), 13—28.

Хельсон (Helson H.)
1. Proof of a conjecture of Steinhaus, *Proc. Nat. Acad. USA*, **40** (1954), 205—206.

Чень Цзянь-гун (Chen Kien Kwong)
1. On the series of orthogonal functions, *Proc. Imp. Akad. Japan*, **4** (1928), 36—37.

Чепмен (Chapmen S.)
1. On non integral orders of summability of series and integrals, *Proc. London Math. Soc.*, **9** (1911), 369—409.

Шмидт (Schmidt E.)
1. Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener, Dissertation (Göttingen, 1905); *Math. Ann.*, **63** (1907), 433—476.

Штейнгауз (Steinhaus H.)
1. Les probabilités dénombrables et leur rapport à la théorie de la mesure, *Fundam. Math.*, **4** (1923), 286—310.

Юнг (Young G. H.)
1. On the convergence of the derived series of Fourier series, *Proc. London Math. Soc.*, (2) **17** (1916), 195—236.

Якоб (Jacob M.)
1. Über die Summierbarkeit von Fourierschen Reihen und Integralen, *Math. Z.*, **29** (1928), 20—33.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОБОЗНАЧЕНИЯ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Г. Алексич

ПРОБЛЕМЫ СХОДИМОСТИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

Редактор *А. А. Рывкин*
Художник *В. М. Новоселов*
Художественный редактор *В. И. Шаповалов*
Технический редактор *Ф. Х. Джатиева*

Сдано в производство 23/I 1963 г.
Подписано к печати 15/VII 1963 г.
Бумага 84×108 1/32 = 5,6 бум. л.
18,5 печ. л.,
Уч.-изд. л. 17,6. Изд. № 1/0893
Цена 1 р. 43 к. Зак. 6007

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.
Москва, 1-й Рижский пер., 2

63.2381. Типография Едьетеми, Будапешт