

VAN NOSTRAND MATHEMATICAL STUDIES

Editors

Paul R. HALMOS, The University of Michigan

Frederick W. GEHRING. The University of Michigan

LECTURES ON
QUASICONFORMAL MAPPINGS

BY

Lars V. AHLFORS

HARVARD UNIVERSITY

Manuscript prepared with the assistance of

Clifford J. EARLE Jr.

CORNELL UNIVERSITY

D. Van Nostrand Company, Inc.
Princeton, New Jersey

TORONTO • NEW YORK • LONDON

1966

Ларс АЛЬФОРС

ЛЕКЦИИ
ПО
КВАЗИКОНФОРМНЫМ
ОТОБРАЖЕНИЯМ

Перевод с английского

В. В. КРИВОВА

Под редакцией

В. А. ЗОРИЧА и Б. В. ШАБАТА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

Москва, 1969

Книга написана на основе специального курса, читанного автором — одним из виднейших современных аналитиков — в Гарвардском университете (США). В ней дано краткое изложение основ теории квазиконформных отображений — раздела современной теории функций комплексного переменного, который интенсивно развился за последние десятилетия.

Эта книга заинтересует математиков различных специальностей. Она доступна студентам старших курсов механико-математических факультетов университетов.

Редакция литературы по математическим наукам

ОТ РЕДАКТОРОВ ПЕРЕВОДА

Теория квазиконформных отображений является сейчас одним из наиболее интенсивно развивающихся разделов теории функций комплексного переменного. К ней привлекают внимание ее особенно богатые связи с разнообразными ветвями математики (уравнения с частными производными, топология, алгебра, дифференциальная геометрия и др.), а также с приложениями (газовая динамика, теория упругости и т. д.). Основателями этой теории являются Г. Греч и М. А. ЛавреТЬев, которые в конце 20-х годов впервые ввели понятие квазиконформного отображения, обобщающее классическое понятие конформного отображения. В дальнейших исследованиях М. А. Лаврентьева и его школы понятие квазиконформного отображения существенно расширилось и привело к созданию геометрической теории систем уравнений с частными производными. ЛавреТЬеву же принадлежат основные идеи теории квазиконформных отображений пространственных областей.

Книга, перевод которой предлагается вниманию читателей, несколько необычна. Она представляет собой конспект лекций, читанных одним из крупнейших аналитиков наших дней Ларсом Альфорсом¹⁾. В этих лекциях с присущей Альфорсу элегантностью излагаются избранные вопросы теории плоских квазиконформных отображений — те, которые близки ему

¹⁾ Л. В. Альфорс — профессор Гарвардского университета, член Академии наук США. Известен своими работами по теории конформных и квазиконформных отображений, теории римановых поверхностей и другим разделам теории функций комплексного переменного. На Международном конгрессе математиков (1936 г.) он был удостоен филдсовской медали, в 1968 г. — специальной премии в связи со столетием Финского математического общества.

самому. Вдумчивый читатель найдет в лекциях много блестящих идей, гипотез и эскизов еще не вполне разработанных теорий.

Именно по этой причине книгу нельзя рассматривать как законченную монографию или, тем более, как учебник для первоначального ознакомления с предметом. Однако мы не сомневаемся, что она принесет очень много пользы и удовольствия тем, кто прочитает ее с карандашом и с бумагой и восстановит коротко намеченные доказательства. После этого можно с уверенностью браться за самостоятельные исследования в теории квазиконформных отображений.

При переводе этой книги были лишь исправлены замеченные опечатки. Мы намеренно отказались от многих поясняющих примечаний, которые нам хотелось сделать, ибо они нарушили бы принятый автором стиль. Перевод гл. 6, посвященный пространствам Тейхмюллера, просмотрел С. Л. Крускаль. Он сделал ряд ценных замечаний, за которые мы ему весьма признательны.

B. A. Зорич, B. V. Шабат

ОТ АВТОРА

Рукопись этой книги подготовлена к печати Клиффордом Ирлом, который привел в порядок черновые заметки автора. К. Ирл внес много существенных исправлений, проверил вычисления и проложил мосты, связавшие фрагменты отдельных рассуждений. Без его преданной помощи рукопись никогда не была бы приведена к удобочитаемой форме.

В соответствии с неформальным характером этой маленькой книжки в ней нет указателя и очень мало литературных ссылок. Специалисты знают, что трактуемые в книге разделы теории квазиконформных отображений постоянно эволюционируют и не всегда можно точно указать, кому именно принадлежит та или иная идея.

Глава I

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ КВАЗИКОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Введение

Квазиконформные отображения в последние годы стали весьма активно развивающейся частью теории аналитических функций одного комплексного переменного по нескольким причинам.

1. Во-первых, квазиконформные отображения являются естественным обобщением конформных, однако если бы эта причина была единственной, то теория квазиконформных отображений была бы вскоре забыта.

2. Уже давно было замечено, что при доказательстве многих теорем о конформных отображениях используется только свойство квазиконформности. Следовательно, интересно, в каких случаях конформность существенна.

3. Квазиконформные отображения являются менее жесткими по сравнению с конформными, и поэтому их намного легче использовать в качестве рабочего инструмента. Именно так с утилитарной целью они вначале и появились. Например, квазиконформные отображения использовались для доказательства теорем о конформном типе односвязных римановых поверхностей (теперь почти забытых).

4. Квазиконформные отображения играют важную роль при изучении некоторых эллиптических уравнений в частных производных.

5. Экстремальные задачи теории квазиконформных отображений приводят к аналитическим функциям, связанным с областями или римановыми поверхностями. Это глубокое и неожиданное открытие принадлежит Тейхмюллеру.

6. При помощи квазиконформных отображений была решена проблема модулей. Они пролили свет на структуру фуксовых и клейновых групп.

7. В пространственном случае конформные отображения тривиальны, а квазиконформные образуют достаточно широкий класс. Теория квазиконформных отображений в пространстве до сих пор находится в начальной стадии развития.

A. Первоначальное определение и задача Грёча

Понятие квазиконформного отображения (но не само название) было введено Г. Грёчем в 1928 году в связи со следующей задачей. Если Q — квадрат и R — прямоугольник, не являющийся квадратом, то не существует конформного отображения Q на R , переводящего вершины в вершины. Грёч поставил вопрос о построении такого отображения, наиболее близкого к конформному. Для этого понадобилось ввести меру близости отображения к конформному, и, введя такую меру, Грёч сделал первый шаг к созданию теории квазиконформных отображений.

Работа Грёча получила признание позже, а эта идея была воспринята лишь как любопытная и предана забвению на несколько лет. Квазиконформные отображения снова появились в 1935 г. в работе Лаврентьева, на этот раз в связи с уравнениями в частных производных. В 1936 г. я включил упоминание о квазиконформном случае в мою теорию накрывающих поверхностей. С тех пор это понятие стало широко известным, и в 1937 г. Тейхмюллер получил важные теоремы, используя квазиконформные отображения, а позднее и теоремы о самих квазиконформных отображениях.

Вернемся к определению Грёча. Пусть $w = f(z)$ ($z = x + iy$, $w = u + iv$) — гомеоморфизм класса C^1 одной области на другую. В точке z_0 он порождает линейное отображение дифференциалов

$$\begin{aligned} du &= u_x dx + u_y dy, \\ dv &= v_x dx + v_y dy, \end{aligned} \tag{1}$$

которое можно записать также в комплексной форме

$$dw = f_z dz + \bar{f}_{\bar{z}} d\bar{z}, \quad (2)$$

где

$$f_z = \frac{1}{2} (f_x - if_y), \quad \bar{f}_{\bar{z}} = \frac{1}{2} (f_x + if_y). \quad (3)$$

Геометрически (1) представляет собой аффинное отображение плоскости (dx, dy) на плоскость (du, dv) . Оно переводит круги с центром в начале координат в подобные эллипсы. Вычислим отношение длин осей этих эллипсов и их направление.

В классических обозначениях

$$du^2 + dv^2 = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2, \quad (4)$$

где

$$E = u_x^2 + v_x^2, \quad F = u_x u_y + v_x v_y, \quad G = u_y^2 + v_y^2.$$

Соответствующие собственные значения определяются из уравнения

$$\begin{vmatrix} E - \lambda & F \\ F & G - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (5)$$

и равны

$$\lambda_{1,2} = \frac{E + G \pm [(E - G)^2 + 4F^2]^{1/2}}{2}. \quad (6)$$

Отношение $a : b$ осей эллипсов равно

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{1/2} = \frac{E + G + [(E - G)^2 + 4F^2]^{1/2}}{2(EG - F^2)^{1/2}}. \quad (7)$$

Здесь гораздо удобнее использовать комплексные обозначения. Сначала заметим, что

$$\begin{aligned} f_z &= \frac{1}{2} (u_x + v_y) + \frac{i}{2} (v_x - u_y), \\ \bar{f}_{\bar{z}} &= \frac{1}{2} (u_x - v_y) + \frac{i}{2} (v_x + u_y). \end{aligned} \quad (8)$$

Это дает

$$|f_z|^2 - |\bar{f}_{\bar{z}}|^2 = u_x v_y - u_y v_x = J, \quad (9)$$

т. е. якобиан отображения $w = f(z)$. Якобиан положителен для отображений, сохраняющих ориентацию, и отрицателен для отображений, меняющих ориентацию. Рассмотрим сначала только случай сохранения ориентации, когда $|f_z| < |f_{\bar{z}}|$.

Из (2) следует, что

$$(|f_z| - |f_{\bar{z}}|)|dz| \leq |dw| \leq (|f_z| + |f_{\bar{z}}|)|dz|, \quad (10)$$

причем обе оценки могут достигаться. Мы получаем, что отношение большой оси к малой равно

$$D_f = \frac{|f_z| + |f_{\bar{z}}|}{|f_z| - |f_{\bar{z}}|} \geq 1. \quad (11)$$

Эта величина называется *отклонением* в точке z . Часто удобнее рассматривать величину

$$d_f = \frac{|f_{\bar{z}}|}{|f_z|} < 1, \quad (12)$$

связанную с D_f соотношениями

$$D_f = \frac{1 + d_f}{1 - d_f}, \quad d_f = \frac{D_f - 1}{D_f + 1}. \quad (13)$$

Отображение конформно в точке z тогда и только тогда, когда $D_f = 1$, $d_f = 0$.

Максимум величины $\left| \frac{dw}{dz} \right|$ достигается, когда отношение

$$\frac{\bar{f}_{\bar{z}} d\bar{z}}{f_z dz}$$

положительно, а минимум — когда оно отрицательно.

Введем теперь *комплексное отклонение*

$$\mu_f = \frac{f_{\bar{z}}}{f_z}, \quad (14)$$

где $|\mu_f| = d_f$. Тогда максимум $\left| \frac{dw}{dz} \right|$ соответствует направлению

$$\arg dz = \alpha = \frac{1}{2} \arg \mu_f, \quad (15)$$

минимум — направлению $\alpha \pm \frac{\pi}{2}$. Учитывая это, из (1) находим направление большой оси получаемого в плоскости $d\omega$ эллипса:

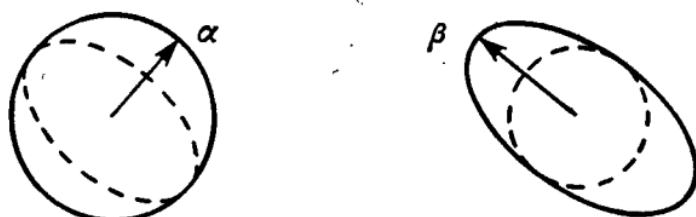
$$\arg d\omega = \beta = \frac{1}{2} \arg v_f, \quad (16)$$

где мы положили

$$v_f = \frac{f_{\bar{z}}}{f_z} = \left(\frac{f_z}{|f_z|} \right)^2 \mu_f. \quad (17)$$

Величину v_f можно назвать *вторым комплексным отклонением*.

Пояснением к сказанному может служить следующий рисунок, смысл которого ясен сам собой:



Легко видеть, что $\beta - \alpha = \arg f_z$.

Определение 1. Отображение f называется *квазиконформным*, если D_f ограничено. Оно называется *K-квазиконформным*, если $D_f \leq K$.

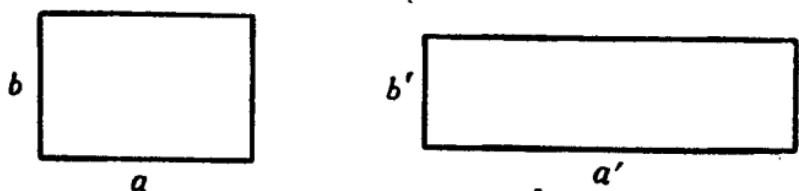
Условие $D_f \leq K$ эквивалентно следующему: $d_f \leq k = (K - 1)/(K + 1)$. Очевидно, что 1-квазиконформное отображение конформно.

Заметим сразу же, что ограничиваться отображениями класса C^1 неестественно. Одной из наших ближайших целей будет избавиться от этого ограничения. В данный момент, однако, мы предпочтем оставить эту трудность в стороне.

В. Решение задачи Грёча

Вернемся теперь к задаче Грёча и приадим ей точный смысл, считая отображение f наиболее близким к конформному, если $\sup D_f$ принимает наименьшее возможное значение.

Пусть R, R' — два прямоугольника со сторонами a, b и a', b' . Можно считать, что $a : b \leq a' : b'$ (в противном случае надо поменять местами a и b). При этом предположим, что стороны, равные a , переходят при отображении f в стороны, равные a' , а стороны, равные b , — в стороны, равные b' .



Вычисления дают

$$a' \leq \int_0^a |df(x+iy)| \leq \int_0^a (|f_z| + |f_{\bar{z}}|) dx,$$

$$a'b \leq \int_0^a \int_0^b (|f_z| + |f_{\bar{z}}|) dx dy,$$

$$\begin{aligned} a'^2 b^2 &\leq \int_0^a \int_0^b \frac{|f_z| + |f_{\bar{z}}|}{|f_z| - |f_{\bar{z}}|} dx dy \int_0^a \int_0^b (|f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2) dx dy = \\ &= a'b' \int_0^a \int_0^b D_f dx dy, \end{aligned}$$

или¹⁾

$$\frac{a'}{b'} : \frac{a}{b} \leq \frac{1}{ab} \int_R \int D_f dx dy, \quad (1)$$

откуда

$$\frac{a'}{b'} : \frac{a}{b} \leq \sup D_f.$$

Минимум величины $\sup D_f$ достигается для аффинного отображения

$$f(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} \right) z + \frac{1}{2} \left(\frac{a'}{a} - \frac{b'}{b} \right) \bar{z}.$$

¹⁾ Величина, стоящая в правой части соотношения (1), называется *средним отклонением* отображения f в R . — Прим. ред.

Итак, доказана

Теорема 1. В задаче Грёча экстремальным является аффинное отображение, имеющее наименьшее максимальное и наименьшее среднее отклонения.

Отношения $m = \frac{a}{b}$ и $m' = \frac{a'}{b'}$ называются модулями прямоугольников R и R' (с учетом ориентации). Мы доказали, что K -квазиконформное отображение R на R' существует тогда и только тогда, когда

$$\frac{1}{K} \leq \frac{m'}{m} \leq K. \quad (2)$$

С. Суперпозиции отображений

Определим теперь комплексные производные и комплексные отклонения суперпозиции отображений $g \circ f$. Для удобства обозначений введем промежуточную переменную $\zeta = f(z)$.

Применяя правила дифференцирования сложной функции, находим

$$\begin{aligned} (g \circ f)_z &= (g_\zeta \circ f) f_z + (g_{\bar{\zeta}} \circ f) \bar{f}_z, \\ (g \circ f)_{\bar{z}} &= (g_\zeta \circ f) \bar{f}_z + (g_{\bar{\zeta}} \circ f) f_z. \end{aligned} \quad (1)$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} g_\zeta \circ f &= \frac{1}{J} [(g \circ f)_z \bar{f}_z - (g \circ f)_{\bar{z}} f_z], \\ g_{\bar{\zeta}} \circ f &= \frac{1}{J} [(g \circ f)_{\bar{z}} \bar{f}_z - (g \circ f)_z f_z], \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$J = |f_z|^2 - |\bar{f}_z|^2.$$

Для $g = f^{-1}$ приходим к формулам

$$(f^{-1})_\zeta \circ f = \bar{f}_z/J, \quad (f^{-1})_{\bar{\zeta}} \circ f = -\bar{f}_{\bar{z}}/J. \quad (3)$$

Отсюда, например, получаем

$$\mu_{f^{-1}} = -v_f \circ f^{-1} \quad (4)$$

и, переходя к абсолютным величинам,

$$d_{f^{-1}} = d_f \circ f^{-1}. \quad (5)$$

Другими словами, взаимно обратные отображения имеют в соответствующих точках одинаковое отклонение.

Из (2) получаем

$$\mu_g \circ f = \frac{f_z}{\bar{f}_z} \cdot \frac{\mu_{g \circ f} - \mu_f}{1 - \bar{\mu}_f \mu_{g \circ f}}. \quad (6)$$

Если g конформно, то $\mu_g = 0$ и

$$\mu_{g \circ f} = \mu_f. \quad (7)$$

Если f конформно, то $\mu_f = 0$ и

$$\mu_g \circ f = \left(\frac{f'}{|f'|} \right)^2 \mu_{g \circ f}, \quad (8)$$

что можно переписать в виде

$$v_g \circ f = v_{g \circ f}. \quad (9)$$

В любом случае отклонение инвариантно по отношению к конформным отображениям.

Полагая $g \circ f = h$, находим из (6), что

$$\mu_{h \circ f^{-1}} \circ f = \frac{f_z}{\bar{f}_z} \cdot \frac{\mu_h - \mu_f}{1 - \bar{\mu}_f \mu_h}, \quad (10)$$

откуда

$$d_{h \circ f^{-1}} \circ f = \left| \frac{\mu_h - \mu_f}{1 - \bar{\mu}_f \mu_h} \right| \quad (11)$$

и

$$\log D_{h \circ f^{-1}} \circ f = [\mu_h, \mu_f], \quad (12)$$

где $[\cdot, \cdot]$ — неевклидово расстояние (в метрике $ds = 2|dw|/(1 - |w|^2)$ при $|w| < 1$).

Мы можем, очевидно, ввести в качестве расстояния между отображениями¹⁾ f и h величину $\sup [\mu_h, \mu_f]$

¹⁾ Предполагается, что отображения f и h имеют общую область определения. — Прим. ред.

(расстояние Тейхмюллера). Это будет метрика при условии отождествления отображений, получающихся друг из друга конформным преобразованием.

Для проверки этого утверждения достаточно заметить, что суперпозиция K_1 -квазиконформного и K_2 -квазиконформного отображений является $K_1 K_2$ -квазиконформным отображением.

D. Экстремальная длина

Пусть Γ — семейство кривых на плоскости. Предполагается, что каждая кривая $\gamma \in \Gamma$ является объединением счетного числа открытых дуг, замкнутых дуг или замкнутых кривых и локально спрямляема. Введем геометрическую характеристику $\lambda(\Gamma)$, называемую экстремальной длиной семейства Γ . Ее важность для наших рассмотрений объясняется ее инвариантностью при конформных отображениях и квазинвариантностью при квазиконформных отображениях (последнее означает, что при таких отображениях она умножается на ограниченный множитель).

Функцию ρ , определенную во всей плоскости, мы будем называть *допустимой*, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) $\rho \geq 0$ и измерима,

2) $A(\rho) = \int \int \rho^2 dx dy \neq 0, \infty$ (интеграл берется по всей плоскости).

Для такой функции ρ положим

$$L_\gamma(\rho) = \int_{\gamma} \rho |dz|,$$

если ρ измерима на γ ¹⁾, $L_\gamma(\rho) = \infty$ в противном случае. Положим

$$L(\rho) = \inf_{\gamma \in \Gamma} L_\gamma(\rho).$$

¹⁾ Как функция длины дуги,

Определение. Экстремальной длиной семейства Γ называется

$$\lambda(\Gamma) = \sup_{\rho} \frac{L(\rho)^2}{A(\rho)},$$

где \sup берется по всем допустимым ρ .

Будем говорить, что $\Gamma_1 < \Gamma_2$, если каждая кривая $\gamma_2 \in \Gamma_2$ содержит некоторую $\gamma_1 \in \Gamma_1$ (т. е. класс Γ_2 беднее, а его кривые длиннее).

Замечание. Отметим, что из $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$ вытекает $\Gamma_2 < \Gamma_1$.

Теорема 2. Если $\Gamma_1 < \Gamma_2$, то $\lambda(\Gamma_1) \leq \lambda(\Gamma_2)$.

Доказательство. Если $\gamma_1 \subseteq \gamma_2$, то

$$L_{\gamma_1}(\rho) \leq L_{\gamma_2}(\rho),$$

$$\inf L_{\gamma_1}(\rho) \leq \inf L_{\gamma_2}(\rho),$$

откуда немедленно следует, что $\lambda(\Gamma_1) \leq \lambda(\Gamma_2)$.

Пример 1. Пусть Γ — совокупность всех кривых в замкнутом прямоугольнике R , соединяющих пару противоположных сторон, например стороны длины b .

Для любой функции ρ

$$\int_0^a \rho(x + iy) dx \geq L(\rho),$$

$$\int_R \int \rho dx dy \geq bL(\rho),$$

$$b^2 L(\rho)^2 \leq ab \int_R \int \rho^2 dx dy \leq ab A(\rho),$$

$$\frac{L(\rho)^2}{A(\rho)} \leq \frac{a}{b}.$$

Это значит, что $\lambda(\Gamma) \leq a/b$.

С другой стороны, положим $\rho = 1$ в R , $\rho = 0$ вне R . Тогда $L(\rho) = a$, $A(\rho) = ab$, поэтому $\lambda(\Gamma) \geq a/b$. Итак, мы доказали, что

$$\lambda(\Gamma) = \frac{a}{b}.$$

Пример 2. Пусть Γ — совокупность всех кривых в кольце $r_1 \leq |z| \leq r_2$, соединяющих граничные окружности.

Произведем вычисление:

$$\int_{r_1}^{r_2} \rho dr \geq L(\rho), \quad \int \int \rho dr d\theta \geq 2\pi L(\rho),$$

$$4\pi^2 L(\rho)^2 \leq 2\pi \log \frac{r_2}{r_1} \int \int \rho^2 r dr d\theta,$$

$$\frac{L(\rho)^2}{A(\rho)} \leq \frac{1}{2\pi} \log \frac{r_2}{r_1}.$$

Равенство достигается для $\rho = 1/r$.

Пример 3. Модуль кольца.

Пусть G — двусвязная область в конечной плоскости, и пусть C_1 — ограниченная, C_2 — неограниченная компонента дополнения к G . Будем говорить, что замкнутая кривая $\gamma \subset G$ разделяет C_1 и C_2 , если γ имеет ненулевой индекс относительно точек C_1 . Пусть Γ — семейство замкнутых кривых в G , разделяющих C_1 и C_2 . Модулем области G называется число $M(G) = \lambda(\Gamma)^{-1}$. Рассмотрим, например, кольцо $G = \{r_1 \leq |z| \leq r_2\}$. Имеем

$$L(\rho) \leq \int_0^{2\pi} \rho(re^{i\theta}) r d\theta,$$

$$\frac{L(\rho)}{r} \leq \int_0^{2\pi} \rho d\theta,$$

$$L(\rho) \log \frac{r_2}{r_1} \leq \int \int \rho dr d\theta,$$

$$L(\rho)^2 \log^2 \frac{r_2}{r_1} \leq 2\pi \log \frac{r_2}{r_1} \int \int \rho^2 r dr d\theta,$$

$$\frac{L(\rho)^2}{A(\rho)} \leq \frac{2\pi}{\log(r_2/r_1)}.$$

С другой стороны, для $\rho = 1/2\pi r$ реализуется равенство. В самом деле, для любой $\gamma \in \Gamma$ имеем

$$1 \leq |n(\gamma, 0)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma} \frac{dz}{z} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{|dz|}{|z|} = L_{\rho}(\gamma).$$

Поэтому $L(\rho) = 1$ и $A(\rho) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{r_2}{r_1}$. Мы заключаем, что $M(G) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{r_2}{r_1}$.

Предположим, что все $\gamma \in \Gamma$ содержатся в некоторой области Ω , и пусть φ — некоторое K -квазиконформное отображение Ω на Ω' . Пусть Γ' — образ семейства кривых Γ .

Теорема 3. $K^{-1}\lambda(\Gamma) \leq \lambda(\Gamma') \leq K\lambda(\Gamma)$.

Доказательство. Для данной функции $\rho(z)$ определим $\rho'(\xi)$, полагая $\rho'(\xi) = 0$ вне Ω' и

$$\rho'(\xi) = \frac{\rho}{|\Phi_z| - |\Phi_{\bar{z}}|} \circ \varphi^{-1}$$

в Ω' . Тогда¹⁾

$$\int_{\gamma'} \rho' |d\xi| \geq \int_{\gamma} \rho |dz|,$$

$$\int \int \rho'^2 d\xi d\eta = \int \int \rho^2 \frac{|\Phi_z| + |\Phi_{\bar{z}}|}{|\Phi_z| - |\Phi_{\bar{z}}|} dx dy \leq K A(\rho).$$

Этим доказано, что $\lambda' \geq K^{-1}\lambda$, а второе неравенство получается при рассмотрении обратного отображения.

Следствие. Величина $\lambda(\Gamma)$ является конформным инвариантом.

Приведем два важных принципа композиции семейств кривых. В первом из них²⁾

$$\Gamma_1 + \Gamma_2 = \{\gamma_1 + \gamma_2 \mid \gamma_1 \in \Gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_2\},$$

во втором $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ означает обычное объединение.

¹⁾ Локальная спрямляемость кривых семейства Γ' и измеримость $\rho'(\xi)$ вытекают из принадлежности φ классу C^1 . — Прим. ред.

²⁾ Символ $\gamma_1 + \gamma_2$ означает, что γ_1 продолжается кривой γ_2 . [Подчеркнем, что символ $\Gamma_1 + \Gamma_2$ означает, что каждая кривая $\gamma_1 \in \Gamma_1$ продолжается некоторой кривой $\gamma_2 \in \Gamma_2$, и обратно. — Прим. ред.]

Теорема 4. Если Γ_1 и Γ_2 расположены соответственно в непересекающихся измеримых множествах E_1 , E_2 , то¹⁾

- a) $\lambda(\Gamma_1 + \Gamma_2) \geq \lambda(\Gamma_1) + \lambda(\Gamma_2)$,
- b) $\lambda(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)^{-1} \geq \lambda(\Gamma_1)^{-1} + \lambda(\Gamma_2)^{-1}$.

Доказательство. а) Мы можем считать, что $0 < \lambda(\Gamma_1), \lambda(\Gamma_2) < \infty$, ибо в противном случае неравенство тривиально.

Произведем нормировку так, чтобы иметь

$$\begin{aligned}L_1(\rho_1) &= A(\rho_1), \\L_2(\rho_2) &= A(\rho_2).\end{aligned}$$

Выберем $\rho = \max(\rho_1, \rho_2)$. Тогда

$$\begin{aligned}L(\rho) &\geq L_1(\rho_1) + L_2(\rho_2) = A(\rho_1) + A(\rho_2), \\A(\rho) &\leq A(\rho_1) + A(\rho_2), \\ \lambda = \sup \frac{L(\rho)^2}{A(\rho)} &\geq A(\rho_1) + A(\rho_2) = \frac{L_1(\rho_1)^2}{A(\rho_1)} + \frac{L_2(\rho_2)^2}{A(\rho_2)}.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\lambda \geq \lambda_1 + \lambda_2$.

б) Если $\lambda = \lambda(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) = 0$, то доказывать нечего. Рассмотрим некоторую допустимую функцию ρ , для которой $L(\rho) > 0$, и положим $\rho_1 = \rho$ на E_1 , $\rho_2 = \rho$ на E_2 , 0 в остальных точках. Тогда $L_1(\rho_1) \geq L(\rho)$, $L_2(\rho_2) \geq L(\rho)$ и $A(\rho) = A(\rho_1) + A(\rho_2)$. Таким образом,

$$\frac{A(\rho)}{L(\rho)^2} \geq \frac{A(\rho_1)}{L_1(\rho_1)^2} + \frac{A(\rho_2)}{L_2(\rho_2)^2}$$

и, следовательно,

$$\lambda^{-1} \geq \lambda_1^{-1} + \lambda_2^{-1},$$

что и требовалось доказать.

Е. Принцип симметрии

Для любой кривой γ обозначим через $\bar{\gamma}$ ее отражение относительно действительной оси, а через γ^+ —

¹⁾ В соотношении б) на самом деле имеет место равенство. — *Прим. ред.*

кривую, которая получается путем объединения отражения части γ , лежащей ниже действительной оси, с частью γ , лежащей не ниже действительной оси (ясно, что $\gamma \cup \bar{\gamma} = \gamma^+ \cup (\overline{\gamma^+})$). Обозначения $\bar{\Gamma}$ и Γ^+ не требуют пояснений.

Теорема 5. Если $\Gamma = \bar{\Gamma}$, то $\lambda(\Gamma) = \frac{1}{2} \lambda(\Gamma^+)$.

Доказательство. 1. Для данной функции ρ положим $\hat{\rho}(z) = \max(\rho(z), \rho(\bar{z}))$. Тогда

$$L_\gamma(\hat{\rho}) = L_{\gamma^+}(\hat{\rho}) \geq L_{\gamma^+}(\rho) \geq L^+(\rho)$$

и

$$A(\hat{\rho}) \leq A(\rho) + A(\rho(\bar{z})) = 2A(\rho).$$

Это дает

$$\frac{L^+(\rho)^2}{A(\rho)} \leq 2 \frac{L(\hat{\rho})^2}{A(\hat{\rho})} \leq 2\lambda(\Gamma)$$

и, следовательно, $\lambda(\Gamma^+) \leq 2\lambda(\Gamma)$.

2. Для данной функции ρ положим

$$\rho^+(z) = \begin{cases} \rho(z) + \rho(\bar{z}) & \text{в верхней полуплоскости,} \\ 0 & \text{в нижней полуплоскости.} \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} L_{\gamma^+}(\rho^+) &= L_{\gamma^+ + (\bar{\gamma}^+)}(\rho) = L_{\gamma + \bar{\gamma}}(\rho) = \\ &= L_\gamma(\rho) + L_{\bar{\gamma}}(\rho) \geq 2L(\rho). \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$A(\rho^+) \leq 2 \int \int [\rho(z)^2 + \rho(\bar{z})^2] dx dy = 2A(\rho)$$

и, следовательно,

$$\frac{L(\rho)^2}{A(\rho)} \leq \frac{1}{2} \frac{L_{\gamma^+}(\rho^+)^2}{A(\rho^+)} \leq \frac{1}{2} \lambda(\Gamma^+),$$

$$\lambda(\Gamma) \leq \frac{1}{2} \lambda(\Gamma^+),$$

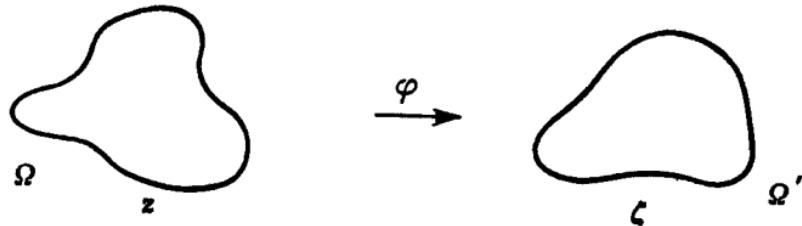
что и требовалось доказать.

F. Интеграл Дирихле

Интегралом Дирихле действительной функции $u(\zeta)$ класса C^1 называется величина

$$D(u) = \int \int_{\Omega} (u_x^2 + u_y^2) d\xi d\eta = 4 \int \int |u_\zeta|^2 d\xi d\eta.$$

Пусть φ — некоторое K -квазиконформное отображение области Ω на область Ω' .



Для сложной функции $u \circ \varphi$ имеем

$$\begin{aligned} (u \circ \varphi)_z &= (u_\zeta \circ \varphi) \Phi_z + (u_{\bar{\zeta}} \circ \varphi) \bar{\Phi}_z, \\ |(u \circ \varphi)_z| &\leqslant (|u_\zeta| \circ \varphi) (|\Phi_z| + |\Phi_{\bar{z}}|), \\ D(u \circ \varphi) &\leqslant 4 \int \int_{\Omega} (|u_\zeta| \circ \varphi)^2 (|\Phi_z| + |\Phi_{\bar{z}}|)^2 dx dy = \\ &= 4 \int \int_{\Omega'} |u_\zeta|^2 \left(\frac{|\Phi_z| + |\Phi_{\bar{z}}|}{|\Phi_z| - |\Phi_{\bar{z}}|} \right) \circ \varphi^{-1} d\xi d\eta, \end{aligned}$$

а потому

$$D(u \circ \varphi) \leqslant K D(u). \quad (1)$$

Итак, интеграл Дирихле квазинвариантен при квазиконформных отображениях.

Известна другая формулировка этого утверждения. Достаточно рассматривать отображение жордановых областей с границами γ и γ' . Пусть v на γ и $v \circ \varphi$ на γ' — соответствующие граничные значения. Минимум интеграла Дирихле $D_0(v)$ среди функций с граничными значениями v достигается для гармонической функции с теми же граничными значениями. Ясно, что

$$D_0(v \circ \varphi) \leqslant K D_0(v). \quad (2)$$

Сделаем теперь следующий шаг и предположим, что v задана только на части границы. Например, полагая $v = 0$ на одной граничной дуге и $v = 1$ на другой, мы получим новое доказательство квазинвариантности модуля.

Для того чтобы определить интеграл Дирихле, не обязательно предполагать, что u — функция класса C^1 . Предположим, что $u(z)$ непрерывна и имеет компактный носитель. Рассмотрим ее преобразование Фурье

$$a(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int \int_{\Omega} e^{i(x\xi + y\eta)} u(x, y) dx dy;$$

как известно,

$$\widehat{(u_x)} = -i\xi \hat{u},$$

$$\widehat{(u_y)} = -i\eta \hat{u}.$$

Из формулы Планшереля вытекает, что

$$D(u) = \int \int (\xi^2 + \eta^2) |\hat{u}|^2 d\xi d\eta,$$

и это равенство можно взять в качестве определения $D(u)$.

Глава II

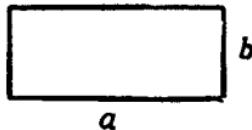
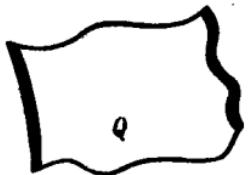
ОБЩЕЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ

А. Геометрический подход

Все отображения ϕ области Ω на область Ω' предполагаются топологическими и сохраняющими ориентацию.

Определение А. Отображение ϕ называется *K-квазиконформным*, если модули всех четырехсторонников *K-квазиинвариантны*.

Четырехсторонник — это жорданова область Q , $\bar{Q} \subset \Omega$, рассматриваемая вместе с парой замкнутых непересекающихся дуг на ее границе (*b*-дуг). Его модуль $m(Q) = a/b$ определяется при помощи конформного отображения на прямоугольник, такого, что *b*-дуги переходят в вертикальные стороны:



Сопряженным четырехсторонником Q^* назовем ту же самую область Q , рассматриваемую вместе с парой дополнительных дуг на границе (*a*-дуг). Ясно, что $m(Q^*) = m(Q)^{-1}$.

Условие квазиконформности состоит в том, что $m(Q') \leq K m(Q)$. Ясно, что это влечет за собой двойное неравенство

$$K^{-1}m(Q) \leq m(Q') \leq Km(Q).$$

Перечислим тривиальные свойства квазиконформных отображений:

1. Если ϕ принадлежит классу C^1 , то определение А согласуется с принятым ранее.

2. Отображения ϕ и ϕ^{-1} одновременно K -квазиконформны.

3. Класс K -квазиконформных отображений инвариантен относительно конформных отображений.

4. Суперпозиция K_1 -квазиконформного и K_2 -квазиконформного отображений будет K_1K_2 -квазиконформным отображением.

Свойство K -квазиконформности является локальным:

Теорема 1. *Если ϕ является K -квазиконформным в некоторой окрестности каждой точки из Ω , то оно K -квазиконформно в Ω .*

Доказательство. Пусть Q и Q' – два четырехсторонника, соответствующие друг другу при данном отображении. Рассмотрим разбиение Q' на четырехсторонники Q'_i , которому при конформном отображении Q' на прямоугольник R' соответствует разбиение R' вертикальными отрезками на равные прямоугольники. Это разбиение индуцирует разбиение Q на четырехсторонники Q_i и, пользуясь естественными обозначениями, мы можем написать

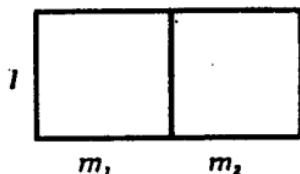
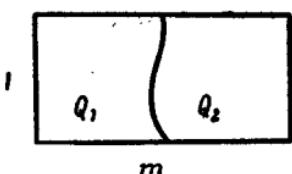
$$m' = \sum_i m'_i, \quad m \geq \sum_i m_i.$$

Рассмотрим далее разбиение каждого четырехсторонника Q_i на четырехсторонники Q_{ij} , соответствующее разбиению конформно эквивалентного прямоугольника R_i горизонтальными отрезками на равные прямоугольники. Тогда

$$\frac{1}{m_i} = \sum_j \frac{1}{m_{ij}}, \quad \frac{1}{m'_i} \geq \sum_j \frac{1}{m'_{ij}}.$$

Если такое подразделение достаточно мелко, то мы будем иметь $m'_{ij} \leq K m_{ij}$. Это дает неравенство $m' \leq K m$.

Лемма. В обозначениях, ясных из рисунка, $m = m_1 + m_2$ только в том случае, когда разделяющая линия — прямая $x = m_1$.



Доказательство. Пусть $m = m_1 + m_2$ и конформные отображения задаются функциями f_1 и f_2 . Положим $\rho = |f'_1|$ в Q_1 , $\rho = |f'_2|$ в Q_2 , $\rho = 0$ в остальных точках. Тогда, интегрируя по Q , найдем

$$\int \int (\rho^2 - 1) dx dy = 0,$$

$$\int \int (\rho - 1) dx dy \geq 0.$$

Но $\int \int (\rho - 1)^2 dx dy = \int \int [(\rho^2 - 1) - 2(\rho - 1)] dx dy \leq 0$.

Следовательно, $\rho = 1$ почти всюду, а это возможно только в том случае, когда $f_1 = f_2 = z$.

Теорема 2. Всякое 1-квазиконформное отображение является конформным.

Доказательство. В этом случае всюду в доказательстве теоремы 1 мы имеем равенства. Это с учетом доказанной леммы показывает, что отображение прямоугольников тождественно¹⁾.

В. Аналитическое определение

Будем говорить, что функция $u \in \text{ACL}$ (абсолютно непрерывна на линиях) в области Ω , если для любого замкнутого прямоугольника $R \subset \Omega$ со сторонами, параллельными осям x и y , функция $u(x, y)$ абсолютно непрерывна на почти всех горизонтальных и почти

¹⁾ Речь идет о канонических прямоугольниках, конформно эквивалентных соответствующим друг другу при данном отображении четырехсторонникам. — Прим. ред.

всех вертикальных отрезках в R . Такая функция имеет, конечно, частные производные u_x , u_y почти всюду в Ω .

Определение В. Топологическое отображение ϕ области Ω называется *K-квазиконформным*, если

1) $\phi \in \text{ACL}$ в Ω ,

2) $|\phi_{\bar{z}}| \leq k |\phi_z|$ почти всюду ($k = (K - 1)/(K + 1)$).

Мы докажем, что это определение эквивалентно геометрическому определению. Из определения В вытекает, что ϕ сохраняет ориентацию.

Будем говорить, что ϕ дифференцируемо в точке z_0 (в смысле Дарбу), если

$$\phi(z) - \phi(z_0) = \phi_z(z_0)(z - z_0) + \phi_{\bar{z}}(z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) + o(|z - z_0|).$$

Первая лемма, которую мы докажем, представляет собой красивый результат, принадлежащий Герингу и Лехто.

Лемма 1. *Если ϕ – топологическое¹⁾ отображение, имеющее почти всюду частные производные, то оно дифференцируемо почти всюду.*

По теореме Егорова пределы

$$\begin{aligned}\varphi_x(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(z + h) - \varphi(z)}{h}, \\ \varphi_y(z) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\varphi(z + ik) - \varphi(z)}{k}\end{aligned}\tag{1}$$

достигаются равномерно, исключая некоторое измеримое множество $\Omega - E$ произвольно малой меры. Достаточно доказать, что ϕ дифференцируемо почти всюду на E .

Замечание. Обычно теорема Егорова формулируется для последовательностей. Мы получим (1),

¹⁾ Утверждение верно и для открытых отображений.

если применим ее к последовательности функций

$$\sup_{0 < |h| < \frac{1}{n}} \left| \frac{\varphi(z+h) - \varphi(z)}{h} - \varphi_x(z) \right|$$

и аналогичной ей последовательности.

Множество E измеримо, следовательно, оно пересекает почти все горизонтальные прямые по измеримым множествам. На каждой такой прямой почти все точки пересечения ее с множеством E будут точками линейной плотности 1. То же справедливо и для вертикальных прямых. Следовательно, почти все точки $(x_0, y_0) \in E$ являются точками линейной плотности 1 для пересечений E с прямыми $x = x_0$ и $y = y_0$. Достаточно доказать, что φ дифференцируемо в каждой такой точке $z_0 = x_0 + iy_0$, которую для простоты мы будем считать точкой $z_0 = 0$.

В силу равномерности предельного перехода в (1) φ_x и φ_y непрерывны на E . Поэтому для данного $\varepsilon > 0$ мы можем найти такое $\delta > 0$, что

$$\begin{aligned} |\varphi_x(z) - \varphi_x(0)| &< \varepsilon, \\ |\varphi_y(z) - \varphi_y(0)| &< \varepsilon, \\ \left| \frac{\varphi(z+h) - \varphi(z)}{h} - \varphi_x(z) \right| &< \varepsilon, \\ \left| \frac{\varphi(z+ik) - \varphi(z)}{k} - \varphi_y(z) \right| &< \varepsilon \end{aligned} \quad (2)$$

при $|x| < \delta$, $|y| < \delta$, $|h| < \delta$, $|k| < \delta$ и $z \in E$.

Будем следовать рассуждению, которое применяется при доказательстве дифференцируемости функции с непрерывными частными производными. Оно основано на тождестве

$$\begin{aligned} \varphi(x+iy) - \varphi(0) - x\varphi_x(0) - y\varphi_y(0) &= \\ &= [\varphi(x+iy) - \varphi(x) - y\varphi_y(x)] + [\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi_x(0)] + \\ &\quad + [y(\varphi_y(x) - \varphi_y(0))]. \end{aligned}$$

Если $x \in E$, то из (2) мы можем заключить, что

$$|\varphi(x+iy) - \varphi(0) - x\varphi_x(0) - y\varphi_y(0)| \leq 3\varepsilon |z|. \quad (3)$$

Те же рассуждения можно повторить, если $y \in E$. Таким образом, мы доказали наше утверждение в случае, когда $x \in E$ или $y \in E$.

Воспользуемся теперь тем, что 0 есть точка линейной плотности 1. Пусть $m_1(x)$ — мера той части E , которая лежит на сегменте $(-x, x)$. Тогда $m_1(x)/2|x| \rightarrow 1$ при $x \rightarrow 0$ и мы можем выбрать δ настолько малым, что

$$m_1(x) > \frac{2+\varepsilon}{1+\varepsilon} |x|$$

при $|x| < \delta$. Для каждого такого x интервал $(x/(1+\varepsilon), x)$ не может не содержать точек множества E , ибо тогда мы имели бы

$$m_1(x) \leq |x| + \frac{|x|}{1+\varepsilon} = \frac{2+\varepsilon}{1+\varepsilon} |x|.$$

Те же рассуждения годятся и для оси y . Если $|z| < \delta/(1+\varepsilon)$, то мы заключаем, что существуют точки $x_1, x_2, y_1, y_2 \in E$, для которых¹⁾

$$\frac{x}{1+\varepsilon} < x_1 < x < x_2 < (1+\varepsilon)x, \quad \frac{y}{1+\varepsilon} < y_1 < y < y_2 < (1+\varepsilon)y.$$

Отсюда выводим, что (3) выполняется на границе прямоугольника $(x_1, x_2) \times (y_1, y_2)$.

Чтобы закончить доказательство, воспользуемся принципом максимума для φ . Существует точка $z^* = x^* + iy^*$ на границе, такая, что

$$\begin{aligned} |\varphi(x+iy) - \varphi(0) - x\varphi_x(0) - y\varphi_y(0)| &\leq \\ &\leq |\varphi(x^*+iy^*) - \varphi(0) - x\varphi_x(0) - y\varphi_y(0)| \leq \\ &\leq 3\varepsilon|z^*| + |x-x^*||\varphi_x(0)| + |y-y^*||\varphi_y(0)| \leq \\ &\leq 3\varepsilon(1+\varepsilon)|z| + \varepsilon|\varphi_x(0)||z| + \varepsilon|\varphi_y(0)||z|. \end{aligned}$$

Итак, получена оценка требуемого вида и лемма доказана.

Мы можем сказать несколько больше. Для борелевского множества E в Ω рассмотрим величину $A(E)$,

¹⁾ Для удобства предположим, что z лежит в первом квадранте.

равную площади его образа. Это определяет локально конечную аддитивную меру, и, согласно теореме Лебега, каждая такая мера почти всюду имеет симметрическую производную, а именно

$$J(z) = \lim \frac{A(Q)}{m(Q)},$$

где Q — квадрат с центром в z , сторона которого стремится к нулю. Кроме того,

$$\int_E J(z) dx dy \leq A(E)$$

(мы еще не можем гарантировать равенство). Но если ϕ дифференцируемо в z , то ясно, что $J(z)$ — якобиан, и мы доказали, что якобиан локально интегрируем.

Но $J = |\phi_z|^2 - |\phi_{\bar{z}}|^2$, и если выполняется условие 2), то мы получаем

$$|\phi_{\bar{z}}|^2 \leq |\phi_z|^2 \leq \frac{J}{1-k^2}.$$

Отсюда следует, что частные производные ϕ локально интегрируемы с квадратом.

Кроме того, если h — пробная функция ($h \in C^1$ и имеет компактный носитель), то, интегрируя по горизонтальным и вертикальным направлениям и применяя теорему Фубини, сразу находим

$$\begin{aligned} \int \int \phi_x h dx dy &= - \int \int \phi h_x dx dy, \\ \int \int \phi_y h dx dy &= - \int \int \phi h_y dx dy. \end{aligned} \tag{4}$$

Другими словами, ϕ_x и ϕ_y являются обобщенными производными от ϕ .

Еще более важно следующее утверждение:

Лемма 2. *Если ϕ имеет локально интегрируемые обобщенные производные, то $\phi \in \text{ACL}$.*

Доказательство. Предположим, что существуют интегрируемые функции φ_1, φ_2 , такие, что

$$\begin{aligned} \int \int \varphi_1 h dx dy &= - \int \int \varphi h_x dx dy, \\ \int \int \varphi_2 h dx dy &= - \int \int \varphi h_y dx dy \end{aligned} \quad (5)$$

для всех пробных функций.

Рассмотрим прямоугольник $R_\eta = \{0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq \eta\}$ и выберем $h = h(x)k(y)$ с носителем в R_η . В равенстве

$$\int \int_{R_\eta} \varphi_1 h(x) k(y) dx dy = - \int \int_{R_\eta} \varphi h'(x) k(y) dx dy$$

мы можем сначала устремить k к 1. Это дает

$$\int \int_{R_\eta} \varphi_1 h(x) dx dy = - \int \int_{R_\eta} \varphi h'(x) dx dy$$

и, следовательно,

$$\int_0^a \varphi_1(x, \eta) h(x) dx = - \int_0^a \varphi(x, \eta) h'(x) dx$$

для почти всех η . Пусть теперь $h = h_n$ — последовательность пробных функций, такая, что $0 \leq h_n \leq 1$ и $h_n = 1$ на интервале $(\frac{1}{n}, a - \frac{1}{n})$. Мы получим

$$\varphi(a, \eta) - \varphi(0, \eta) = \int_0^a \varphi_1(x, \eta) dx \quad (6)$$

для почти всех η . Множество исключительных значений η , вообще говоря, зависит от a , но можно считать, что (6) имеет место почти всюду по η при всех рациональных значениях a . Тогда по непрерывности при тех же η соотношение (6) сохраняется для всех a , и мы доказали, что $\varphi(x, \eta)$ абсолютно непрерывна при почти всех η . Кроме того, имеем $\varphi_x = \varphi_1, \varphi_y = \varphi_2$ почти всюду, что и требовалось.

Иными словами, определение В эквивалентно следующему:

Определение В'. Топологическое отображение φ называется *k-квазиконформным*, если функция φ имеет локально интегрируемые обобщенные производные, удовлетворяющие неравенству

$$|\varphi_z| \leq k |\varphi_z|.$$

Легко видеть, что определение В инвариантно относительно конформных отображений. Мы докажем несколько более общее утверждение.

Лемма 3. Если φ является топологическим отображением класса C^2 , а φ имеет локально интегрируемые обобщенные производные, то это же верно и для $\varphi \circ \omega$, причем

$$(\varphi \circ \omega)_x = (\varphi_\xi \circ \omega) \frac{\partial \xi}{\partial x} + (\varphi_\eta \circ \omega) \frac{\partial \eta}{\partial x},$$

$$(\varphi \circ \omega)_y = (\varphi_\xi \circ \omega) \frac{\partial \xi}{\partial y} + (\varphi_\eta \circ \omega) \frac{\partial \eta}{\partial y}.$$

Доказательство. Сначала заметим, что

$$\begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{pmatrix}$$

являются взаимно обратными матрицами (в соответствующих точках). Поэтому

$$\begin{pmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{pmatrix} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \eta_y & -\xi_y \\ -\eta_x & \xi_x \end{pmatrix},$$

где $J = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x$ — якобиан отображения ω .

Для всех пробных функций $h \circ \omega$ можно написать

$$\begin{aligned} & \int \int [(\varphi_\xi \circ \omega) \xi_x + (\varphi_\eta \circ \omega) \eta_x] (h \circ \omega) dx dy = \\ & = \int \int \left[(\varphi_\xi \circ \omega) \frac{\xi_x}{J} + (\varphi_\eta \circ \omega) \frac{\eta_x}{J} \right] (h \circ \omega) J dx dy = \\ & = \int \int (\varphi_\xi y_\eta - \varphi_\eta y_\xi) h d\xi d\eta = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int \int \varphi(-(hy_\eta)_\xi + (hy_\xi)_\eta) d\xi d\eta = \\
 &= \int \int \varphi(-h_\xi y_\eta + h_\eta y_\xi) d\xi d\eta = \\
 &= \int \int (\varphi \circ \omega) \left(-(h_\xi \circ \omega) \frac{\xi_x}{f} - (h_\eta \circ \omega) \frac{\eta_x}{f} \right) J dx dy = \\
 &= \int \int (\varphi \circ \omega) (- (h_\xi \circ \omega) \xi_x - (h_\eta \circ \omega) \eta_x) dx dy = \\
 &\quad = - \int \int (\varphi \circ \omega) (h \circ \omega)_x dx dy,
 \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Последняя лемма дает нам возможность доказать, что

$$B \Rightarrow A.$$

В самом деле, с учетом этой леммы нам остается только доказать, что прямоугольник с модулем m преобразуется в четырехсторонник с модулем $m' \leq Km$, а это доказывается точно так же, как и в случае дифференцируемого отображения.

Остановимся теперь на доказательстве обратного утверждения

$$A \Rightarrow B.$$

Сначала докажем следующее: если φ квазиконформно в геометрическом смысле, то $\varphi \in \text{ACL}$.

Пусть $A(\eta)$ — площадь образа прямоугольника $a \leq x \leq b$, $y_0 \leq y \leq \eta$ при отображении φ . Поскольку $A(\eta)$ не убывает, производная $A'(\eta)$ существует почти всюду, и мы предположим, что $A'(0)$ существует.



На рисунке Q_i — прямоугольники с высотой η и основанием b_i . Пусть b'_i — длина образа b_i . Прежде всего мы покажем, что если η достаточно мало, то

длина любой кривой в Q'_i , соединяющей „вертикальные“ стороны, почти равна b'_i .



Фиксируем вначале ломаную так, чтобы

$$\sum_1^n |\zeta_k - \zeta_{k-1}| \geq b'_i - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть, далее, η взято настолько малым, что изменение ϕ на вертикальных сегментах меньше $\varepsilon/4n$. Проведем через ζ_k линии, соответствующие вертикалям. Любая траисверсаль должна пересекать все эти линии. Поэтому ее длина не меньше, чем

$$\sum_1^n |\zeta_k - \zeta_{k-1}| - \frac{\varepsilon}{2} \geq b'_i - \varepsilon.$$

Используя евклидову метрику, получаем, что если $\varepsilon < \min \frac{1}{2} b'_i$, то¹⁾

$$m_i(Q'_i) \geq \frac{b'_i}{4A_i}, \quad \frac{b'_i}{4A_i} \leq K \frac{b_i}{\eta},$$

$$(\sum b'_i)^2 \leq \sum \frac{b'_i}{b_i} \sum b_i \leq 4K \frac{A(\eta)}{\eta} (\sum b_i).$$

Но $A(\eta)/\eta \rightarrow A'(0) < \infty$. Это показывает, что $\sum b'_i \rightarrow 0$ вместе с $\sum b_i$, и, следовательно, ϕ абсолютно непрерывна, что и требовалось доказать.

Наконец, если ϕ является K -квазикоформным в геометрическом смысле, то легко доказать, что

¹⁾ Доказательство нужно очевидным образом видоизменить, если $b'_i = \infty$.

неравенство

$$|\varphi_z| \leq k |\varphi_z| \quad \left(k = \frac{K-1}{K+1} \right)$$

справедливо во всех точках, где φ дифференцируемо. Тем самым доказано, что $A \Rightarrow B$.

Теперь эквивалентность геометрического и аналитического определений доказана, причем мы можем пользоваться двумя аналитическими определениями.

Следствие 1. Если для топологического отображения φ почти всюду $\varphi_z = 0$ и если $\varphi \in \text{ACL}$ или φ имеет локально интегрируемые обобщенные производные, то φ конформно.

Отметим тесную связь этого утверждения с леммой Вейля.

Следствие 2. Если φ квазиконформно и $\varphi_z = 0$ почти всюду, то φ конформно.

Докажем, наконец, следующее утверждение:

Теорема 3. При квазиконформном отображении площадь образа является абсолютно непрерывной функцией множества. Это означает, что множества меры нуль отображаются на множества меры нуль и что площадь образа всегда можно представить в виде интеграла

$$A(E) = \int \int_E J dx dy.$$

Доказательство. Функцию $\varphi = u + iv$ можно аппроксимировать функциями $u_n + iv_n$ класса C^2 , так что $u_n \rightarrow u$, $v_n \rightarrow v$ и

$$\int \int |u_x - (u_n)_x|^2 dx dy \rightarrow 0,$$

$$\int \int |v_x - (v_n)_x|^2 dx dy \rightarrow 0 \quad \text{и т. д.}$$

Рассмотрим прямоугольник R , такой, что u и v абсолютно непрерывны на всех его сторонах. Имеем

$$\int\int_R [(u_m)_x(v_n)_y - (u_m)_y(v_n)_x] dx dy = \int_{\partial R} u_m dv_n.$$

Если $m, n \rightarrow \infty$, то двойной интеграл стремится к $\int\int_R J dx dy$. Для $m \rightarrow \infty$ интеграл по контуру стремится к

$$\int_{\partial R} u dv_n = - \int_{\partial R} v_n du,$$

и при $n \rightarrow \infty$ это дает

$$- \int_{\partial R} v du = \int_{\partial R} u dv$$

(поскольку u и v и, следовательно, uv абсолютно непрерывны на ∂R).

Мы доказали, что для такого R

$$\int\int_R J dx dy = \int_{\partial R} u dv.$$

Не совсем тривиально, но довольно легко показать, что стоящий справа интеграл по контуру представляет собой площадь образа, а это доказывает теорему.

Следствие. *Почти всюду $\varphi_z \neq 0$.*

В противном случае существует множество положительной меры, которое отображается на множество меры нуль, и, рассматривая обратное отображение, мы придем к противоречию.

Замечание. Теперь можно заключить, что интеграл Дирихле K -квазинвариантен при произвольных K -квазиконформных отображениях. То же самое можно доказать для экстремальных длин.

Глава III

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА

A. Три экстремальные задачи

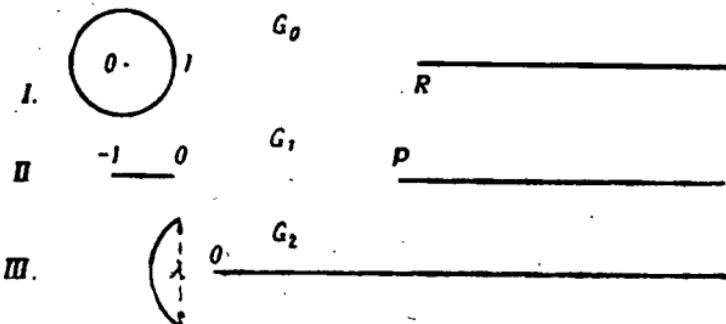
Пусть G — двусвязная область в конечной плоскости, C_1 — ограниченная, C_2 — неограниченная компоненты ее дополнения. Мы хотим найти наибольшее значение модуля $M(G)$ при одном из следующих условий:

I. (Греч) C_1 — единичный круг ($|z| \leq 1$), а C_2 содержит точку $R > 1$.

II. (Тейхмюллер) C_1 содержит 0 и -1 ; C_2 содержит хотя бы одну точку на расстоянии P от начала координат.

III. (Мори) Диаметр $(C_1 \cap \{|z| \leq 1\}) \geq \lambda$; C_2 содержит начало координат.

Мы утверждаем, что максимум величины $M(G)$ достигается соответственно в следующих симметричных случаях:



Случай I. Пусть Γ — семейство замкнутых кривых, разделяющих C_1 и C_2 . Мы знаем, что $\lambda(\Gamma) = 1/M(G)$.

Сравним Γ с семейством $\tilde{\Gamma}$ замкнутых кривых, лежащих в дополнении множества $C_1 \cup \{R\}$, у которых индекс относительно точки R равен нулю, а индекс

относительно начала координат отличен от нуля. Очевидно, что $\Gamma \subset \tilde{\Gamma}$ и, следовательно, $\lambda(\Gamma) \geq \lambda(\tilde{\Gamma})$. Но $\tilde{\Gamma}$ — симметричное семейство, и, следовательно, в силу нашего принципа симметрии $\lambda(\tilde{\Gamma}) = \frac{1}{2} \lambda(\tilde{\Gamma}^+)$. Аналогично, если Γ_0 — семейство Γ в упомянутом экстремальном случае¹⁾, то $\lambda(\Gamma_0) = \frac{1}{2} \lambda(\Gamma_0^+)$.

Покажем, что $\tilde{\Gamma}^+ = \Gamma_0^+$. Каждая кривая $\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}$ имеет точки P_1, P_2 в интервалах $(-\infty, -1)$ и $(1, R)$ соответственно. Они разделяют $\tilde{\gamma}$ на дуги $\tilde{\gamma}_1$ и $\tilde{\gamma}_2$, так что $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2$. Далее, $\tilde{\gamma}^+ = \tilde{\gamma}_1^+ + \tilde{\gamma}_2^+ = (\tilde{\gamma}_1^+ + \tilde{\gamma}_2^+)^+$. Здесь $\tilde{\gamma}_1^+ + \tilde{\gamma}_2^+$ принадлежит Γ_0 , и мы заключаем, что $\tilde{\gamma}^+ \in \Gamma_0^+$. Итак, $\tilde{\Gamma}^+ \subset \Gamma_0^+$, а обратное включение тривиально.

Мы доказали, что $\lambda(\Gamma) \geq \lambda(\tilde{\Gamma}) = \lambda(\Gamma_0)$, следовательно, $M(G) \leq M(G_0)$, что и требовалось доказать.

Случай II. Пусть $z = f(\zeta)$ конформно отображает круг $|\zeta| < 1$ на область $C_1 \cup G$, причем $f(0) = 0$. Теорема Кёбе дает: $|f'(0)| \leq 4P$, причем равенство здесь достигается для $G = G_1$. Предположим, что $f(a) = -1$. По теореме об искажении

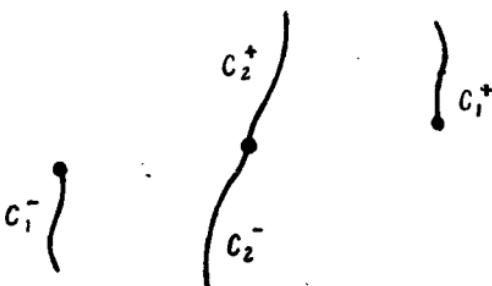
$$1 = |f(a)| \leq \frac{|a| |f'(0)|}{(1 - |a|)^2} \leq \frac{4P |a|}{(1 - |a|)^2},$$

а равенство снова достигается, когда $G = G_1$. Другими словами, $|a| \geq |a_1|$, где a_1 соответствует симметричному случаю $G = G_1$. Модуль $M(G)$ равен модулю области, ограниченной прообразом C_1 и единичным кругом.

Наконец, делая инверсию и применяя доказанное в случае I, получим, что при данном $|a|$ модуль будет наибольшим для отрезка, причем этот модуль увеличивается с уменьшением $|a|$. Следовательно, область G_1 экстремальна.

¹⁾ Мы расширим семейство Γ_0 , добавив к нему кривые, содержащие отрезки луча (R, ∞) . Это, конечно, не изменит модуля.

Случай III. Рассмотрим отображение плоскости z , осуществляемое функцией $\zeta = \sqrt{z}$. Взяв оба значения корня, получим фигуру, симметричную относительно начала координат.



Для каждого из множеств C_1 и C_2 мы получим две компоненты образа. Пользуясь одним из принципов композиции семейств, убеждаемся, что $M(G) \leq \frac{1}{2} M(\hat{G})$, где \hat{G} — область, заключенная между C_1^- и C_1^+ . Ясно, что равенство достигается в симметричном случае.

По предположению C_1 содержит точки z_1, z_2 , такие, что $|z_1| \leq 1, |z_2| \leq 1, |z_1 - z_2| \geq \lambda$. Пусть $\zeta_1, \zeta_2 \in C_1^+$, $-\zeta_1, -\zeta_2 \in C_1^-$ — соответствующие точки на плоскости ζ . Дробно-линейное преобразование

$$w = \frac{\zeta + \zeta_1}{\zeta - \zeta_1} \cdot \frac{\zeta_1 + \zeta_2}{\zeta_1 - \zeta_2}$$

переводит точки $-\zeta_1, -\zeta_2, \zeta_1$ соответственно в $0, -1, \infty$, а точку ζ_2 в w_0 , где

$$w_0 = -\left(\frac{\zeta_2 + \zeta_1}{\zeta_2 - \zeta_1}\right)^2.$$

Полагая $u = (\zeta_2 + \zeta_1)/(\zeta_2 - \zeta_1)$, получаем

$$u + \frac{1}{u} = \frac{2(\zeta_2^2 + \zeta_1^2)}{\zeta_2^2 - \zeta_1^2} = \frac{2(z_1 + z_2)}{z_2 - z_1}.$$

Поскольку

$$|z_2 + z_1|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) - |z_2 - z_1|^2 \leq 4 - \lambda^2,$$

мы имеем

$$|u| - \frac{1}{|u|} \leq \frac{2}{\lambda} \sqrt{4 - \lambda^2},$$

$$|u| \leq \frac{2 + \sqrt{4 - \lambda^2}}{\lambda},$$

$$|w_0| \leq \left(\frac{2 + \sqrt{4 - \lambda^2}}{\lambda} \right)^2.$$

Можно проверить, что равенство достигается для симметричной области. Используя утверждение, доказанное ранее для случая II, мы заключаем, что максимальное значение $M(G)$ достигается для области, изображенной на рис. III.

Следуя Кюнци¹⁾, введем обозначения для экстремальных модулей:

I. $\frac{1}{2\pi} \log \Phi(R).$

II. $\frac{1}{2\pi} \log \Psi(P).$

III. $\frac{1}{2\pi} \log X(\lambda).$

Приведем простые формулы, связывающие эти функции. Присоединяя к области G_0 симметричную с ней относительно единичной окружности область, мы получим область типа G_1 и, очевидно, будем иметь

$$\Phi(R)^2 = \Psi(R^2 - 1). \quad (1)$$

Другая формула получается, если отобразить внешность единичного круга на внешность отрезка $[-1, 0]$. Это дает

$$\Phi(R) = \Psi \left(\frac{1}{4} \left(\sqrt{R} - \frac{1}{\sqrt{R}} \right)^2 \right); \quad (2)$$

сравнивая с (1), получаем тождество

$$\Phi(R) = \Phi \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{R} + \frac{1}{\sqrt{R}} \right) \right]^2. \quad (3)$$

¹⁾ K ü n z i H. P., Quasikonforme Abbildungen, Springer, Berlin, 1960.

Вычисления, проделанные ранее для случая III, дают

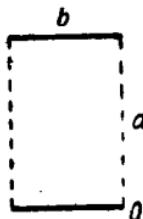
$$X(\lambda) = \Phi\left(\frac{\sqrt{4+2\lambda} + \sqrt{4-2\lambda}}{\lambda}\right). \quad (4)$$

В. Эллиптическая и модулярная функции

Эллиптический интеграл

$$w = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(z+1)z(z-P)}} \quad (1)$$

отображает верхнюю половину области G_1 на прямоугольник



со сторонами

$$\begin{aligned} a &= \int_0^P \frac{dz}{\sqrt{(z+1)z(P-z)}}, \\ b &= \int_P^\infty \frac{dz}{\sqrt{(z+1)z(z-P)}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Очевидно, что

$$\frac{1}{2\pi} \log \Psi(P) = \frac{a}{2b}. \quad (3)$$

Однако это точное выражение не совсем удобно для изучения асимптотического поведения $\Psi(P)$. Во всяком случае мы хотим более детально рассмотреть связь с эллиптическими функциями.

Напомним, что функция Вейерштрасса \wp определяется равенством

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum' \left[\frac{1}{(z-m\omega_1-n\omega_2)^2} - \frac{1}{(m\omega_1+n\omega_2)^2} \right] \quad (4)$$

и удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\wp'(z)^2 = 4(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3), \quad (5)$$

где $e_1 = \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right)$, $e_2 = \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right)$, $e_3 = \wp\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)$. (6)

Как следует из (5), величины e_k различны.

Положим $\tau = \omega_2/\omega_1$ и рассмотрим верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} \tau > 0$. В этой полуплоскости

$$\rho(\tau) = \frac{e_3 - e_1}{e_2 - e_1} \quad (7)$$

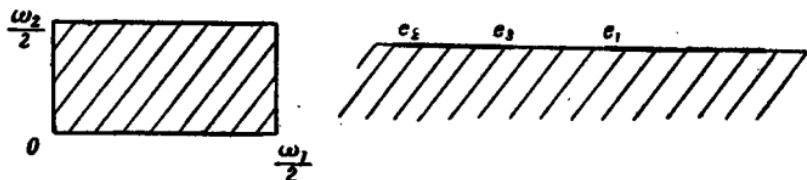
представляет собой аналитическую функцию, не принимающую значений 0, 1. Рассмотрим некоторые ее свойства.

Функция ρ инвариантна относительно модулярных преобразований $\frac{a\tau + b}{c\tau + d}$, где $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{2}$, так как \wp не меняется при таких преобразованиях, а $\frac{e_k}{2}$ меняются на полные периоды. При преобразовании $\tau' = \tau + 1$ функция ρ переходит в $1/\rho$, а при преобразовании $\tau' = -1/\tau$ в $1 - \rho$. Иначе говоря, формулы

$$\begin{aligned} \rho(\tau + 1) &= \rho(\tau)^{-1}, \\ \rho\left(-\frac{1}{\tau}\right) &= 1 - \rho(\tau) \end{aligned} \quad (8)$$

описывают характер изменения $\rho(\tau)$ под действием любого преобразования модулярной группы.

Рассмотрим отображение, осуществляющее функцией \wp в случае чисто мнимого τ .



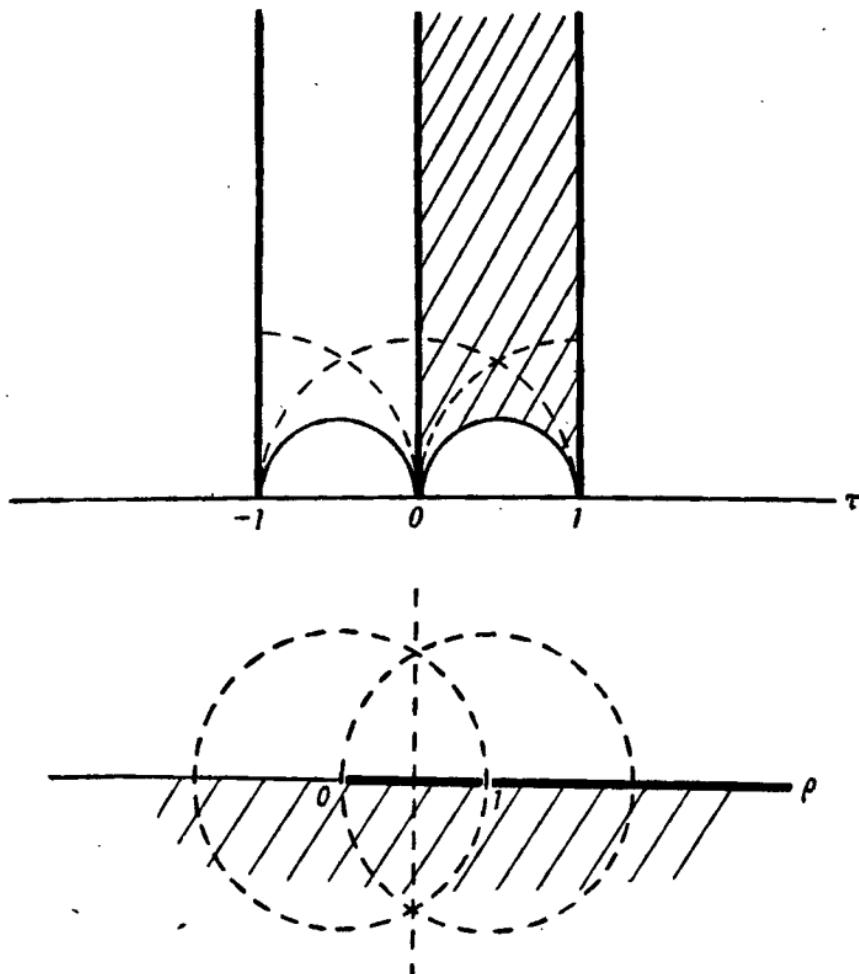
Дополнительным дробно-линейным отображением образ прямоугольника $(0, \frac{\omega_2}{2}, \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \frac{\omega_1}{2})$ переведем в нижнюю по овчину области G_1 , для которой $P = \rho/(1 - \rho)$, и получим¹⁾

$$\tau(\rho) = \frac{i}{\pi} \log \Psi\left(\frac{\rho}{1-\rho}\right), \quad 0 < \rho < 1. \quad (9)$$

¹⁾ См. разд. А этой главы. — Прим. ред.

Из этой формулы видно, что ρ монотонно возрастает от 0 до 1, когда τ изменяется от 0 до ∞ вдоль мнимой оси.

Непосредственным вычислением можно убедиться в том, что $\rho \rightarrow 1$ при $\operatorname{Im} \tau \rightarrow \infty$ равномерно во всей полуплоскости. Пользуясь формулами (8), легко видеть, что соответствие между τ и ρ получается таким:



Пусть $\tau(\rho)$ — та ветвь обратной функции, которая определяется указанной на рисунке областью значе-

ний. В силу принципа симметрии

$$\begin{aligned}\tau\left(\frac{1}{2}\right) &= i, & \tau(-1) &= \frac{1+i}{2}, \\ \tau(2) &= \pm 1 + i, & \tau\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right) &= \frac{1+i\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}\quad (10)$$

Из формул (8) получаем

$$\begin{aligned}\tau\left(\frac{1}{\rho}\right) &= \tau(\rho) \pm 1, \\ \tau(1-\rho) &= -\frac{1}{\tau(\rho)};\end{aligned}\quad (11)$$

кроме того,

$$\tau(\bar{\rho}) = -\bar{\tau}(\rho).$$

Ясно, далее, что $e^{\pi i \tau}$ — аналитическая функция в окрестности точки $\rho = 1$, и $\rho = 1$ является для нее простым нулем. Поэтому

$$1 - \rho \sim ae^{i\pi\tau}, \quad a > 0, \quad (12)$$

но определение константы a требует более подробных рассмотрений.

Выясним, как меняется $|\rho - 1|$, когда $\operatorname{Im} \tau$ фиксировано. Иными словами, полагая $\tau = s + it$, попытаемся найти знак величины $\frac{\partial}{\partial s} \log |\rho - 1|$. Эта гармоническая функция равна, очевидно, нулю на лучах $s = 0$, $s = 1$ и, как можно понять из рисунка, положительна на полуокружности между 0 и 1. Согласно принципу максимума, если он здесь применим,

$$\frac{\partial}{\partial s} \log |\rho - 1| > 0$$

в правой половине упомянутой области значений. Но из соотношения (12) вытекает, что $\frac{\partial}{\partial s} \log |\rho - 1| \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$. Как видно из формул (8), то же верно и для всех таких областей, поэтому применение принципа максимума обосновано.

Итак, $|\rho - 1|$ принимает наименьшее значение на мнимой оси и наибольшее на прямых $\operatorname{Re} \tau = \pm 1$.

Оценки функции $\rho(\tau)$, получаемые геометрическим путем, недостаточно точны, но известны точные классические разложения. Ради полноты изложения выведем наиболее важную формулу.

Функция

$$\frac{\rho(z) - \rho(u)}{\rho(z) - \rho(v)}$$

имеет нули в точках $z = \pm u + m\omega_1 + n\omega_2$ и полюсы в точках $z = \pm v + m\omega_1 + n\omega_2$. Те же периоды, нули и полюсы имеет функция

$$F(z) = \prod_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{2\pi i \frac{n\omega_2 \pm u - z}{\omega_1}}}{1 - e^{2\pi i \frac{n\omega_2 \pm v - z}{\omega_1}}}$$

(произведение содержит по одному множителю для каждого n и для каждого из знаков \pm). Легко видеть, что это бесконечное произведение сходится.

Удобно использовать обозначение $q = e^{\pi i \tau} = e^{\pi i \omega_2 / \omega_1}$. Выделим множитель для $n=0$ и объединим множители для $\pm n$. Получим

$$F(z) = \frac{1 - e^{2\pi i \frac{u-z}{\omega_1}}}{1 - e^{2\pi i \frac{v-z}{\omega_1}}} \cdot \frac{1 - e^{-2\pi i \frac{u+z}{\omega_1}}}{1 - e^{-2\pi i \frac{v+z}{\omega_1}}} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - q^{2n} e^{2\pi i \frac{\pm u \pm z}{\omega_1}}}{1 - q^{2n} e^{2\pi i \frac{\pm v \pm z}{\omega_1}}},$$

где множители берутся по одному для каждой комбинации знаков.

Ясно, что

$$\frac{\rho(z) - \rho(u)}{\rho(z) - \rho(v)} = \frac{F(z)}{F(0)}.$$

Чтобы вычислить величину

$$1 - \rho = \frac{e_2 - e_3}{e_2 - e_1},$$

положим $z = \frac{\omega_2}{2}$, $u = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, $v = \frac{\omega_1}{2}$. Получим

$$e^{\frac{2\pi i z}{\omega_1}} = q, \quad e^{\frac{2\pi i u}{\omega_1}} = -q, \quad e^{\frac{2\pi i v}{\omega_1}} = -1.$$

Подставляя эти значения, найдем

$$F(z) = \frac{2}{1+q^{-1}} \cdot \frac{1+q^{-2}}{1+q^{-1}} \cdot \prod_1^{\infty} \frac{(1+q^{2n+2})(1+q^{2n})^2(1+q^{2n-2})}{(1+q^{2n+1})^2(1+q^{2n-1})^2} = \\ = 4 \prod_1^{\infty} \left(\frac{1+q^{2n}}{1+q^{2n-1}} \right)^4$$

и

$$F(0) = \frac{1+q}{2} \cdot \frac{1+q^{-1}}{2} \prod_1^{\infty} \frac{(1+q^{2n+1})^2(1+q^{2n-1})^2}{(1+q^{2n})^4} = \\ = \frac{1}{4q} \prod_1^{\infty} \left(\frac{1+q^{2n-1}}{1+q^{2n}} \right)^4.$$

Наконец,

$$1 - \rho = 16q \prod_1^{\infty} \left(\frac{1+q^{2n}}{1+q^{2n-1}} \right)^8. \quad (13)$$

Аналогичное вычисление дает

$$\rho = \prod_1^{\infty} \left(\frac{1-q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}} \right)^8 \quad (14)$$

((14) получается при помощи формулы $\tau(1/\rho) = \tau(\rho) \pm 1$).

Вернемся к формуле (9). Имеем

$$\log \Psi(P) = \pi \operatorname{Im} \tau \left(\frac{P}{1+P} \right) = \pi \operatorname{Im} \tau \left(1 + \frac{1}{P} \right), \quad (15)$$

или

$$\Psi(P) = q(\rho)^{-1} \quad \text{для} \quad \rho = \frac{P}{P+1},$$

и в силу (13)

$$1 - \rho = \frac{1}{P+1} = 16q \prod_1^{\infty} \left(\frac{1+q^{2n}}{1+q^{2n-1}} \right)^8,$$

или

$$\frac{\Psi(P)}{P+1} = 16 \prod_1^{\infty} \left(\frac{1+q^{2n}}{1+q^{2n-1}} \right)^8. \quad (16)$$

Это дает основное неравенство

$$\Psi(P) \leq 16(P+1). \quad (17)$$

Далее, поскольку $\Phi(R) = \Psi(R^2 - 1)^{1/2}$, то

$$\frac{\Phi(R)}{R} = 4 \prod_1^{\infty} \left(\frac{1+q^{2n}}{1+q^{2n-1}} \right)^4 \quad (18)$$

и

$$\Phi(R) \leq 4R. \quad (19)$$

Для $X(\lambda)$ получаем

$$\begin{aligned} \lambda X(\lambda) &\leq 4(\sqrt{4+2\lambda} + \sqrt{4-2\lambda}), \\ \lambda X(\lambda) &\leq 16. \end{aligned} \quad (20)$$

С. Теорема Мори

Пусть $\zeta = \phi(z)$ — некоторое K -квазиконформное отображение круга $|z| < 1$ на круг $|\zeta| < 1$ с нормировкой $\phi(0) = 0$.

Теорема Мори.

$$|\phi(z_1) - \phi(z_2)| < 16 |z_1 - z_2|^{1/K} \quad (z_1 \neq z_2), \quad (1)$$

причем константа 16 не может быть уменьшена.

Замечание. Из теоремы вытекает, что ϕ удовлетворяет условию Гельдера, и это было известно ранее. Из нее следует также, что ϕ допускает непрерывное продолжение на замкнутый круг $|z| \leq 1$. Применив теорему к обратному отображению, убеждаемся, что это продолжение будет гомеоморфизмом.

Следствие. Всякое квазиконформное отображение круга на круг можно продолжить до гомеоморфизма замкнутых кругов.

Для доказательства теоремы Мори сначала предположим, что ϕ допускает продолжение на замкнутый круг. В дальнейшем мы избавимся от этого ограничения.

Для доказательства нам понадобится также следующая лемма:

Лемма. Если $\phi(z)$ — некоторое K -квазиконформное отображение единичного круга на себя с нормировкой $\phi(0) = 0$, гомеоморфное вплоть до границы, то продолженное отображение, определенное вне круга формулой $\phi(z) = 1/\phi\left(\frac{1}{z}\right)$, является K -квазиконформным во всей плоскости.

Доказательство. Ясно, что продолженное отображение является K -квазиконформным внутри и вне единичного круга. Легко видеть также, что оно абсолютно непрерывно на линиях во всех прямоугольниках со сторонами, параллельными осям координат, пересекающих единичный круг. Отсюда и вытекает K -квазиконформность во всей плоскости.

Доказательство неравенства (1). Если $|z_1 - z_2| \geq 1$, то доказывать нечего. Предположим, что $|z_1 - z_2| < 1$. Построим круговое кольцо A , диаметром внутреннего круга которого служит отрезок $[z_1, z_2]$, а радиус внешнего круга равен $1/2$.



Случай (i). A лежит внутри единичного круга.
Рассмотрим отображение

$$\omega = \frac{\xi - \xi_1}{1 - \xi_1 \xi}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|z_2 - z_1|} &\leqslant \frac{K}{2\pi} \log \Phi\left(\left|\frac{1 - \xi_1 \xi_2}{\xi_2 - \xi_1}\right|\right) \leqslant \\ &\leqslant \frac{K}{2\pi} \log \frac{8}{|\xi_2 - \xi_1|}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$|\zeta_2 - \zeta_1| \leq 8 |z_2 - z_1|^{1/K}.$$

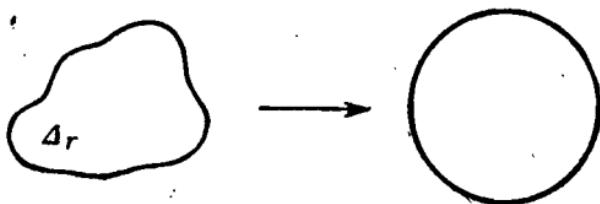
Случай (ii). Внешний круг кольца A не содержит начала координат. Тогда пересечение образа внутреннего круга с кругом $|\zeta| < 1$ имеет диаметр $\geq |\zeta_1 - \zeta_2|$, а образ дополнения к внешнему кругу содержит начало координат. Поэтому, согласно лемме,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|z_2 - z_1|} &\leq \frac{K}{2\pi} \log X(|\zeta_1 - \zeta_2|) < \\ &< \frac{K}{2\pi} \log (16/|\zeta_1 - \zeta_2|), \end{aligned}$$

и мы получаем

$$|\zeta_2 - \zeta_1| < 16 |z_2 - z_1|^{1/K}.$$

Чтобы избавиться от предположения о непрерывности отображения ϕ на окружности $|z| = 1$, рассмотрим образ Δ_r круга $|z| < r$ и отобразим его конформно на круг $|\omega| < 1$ с помощью функции ψ_r , такой, что



$\psi_r(0) = 0$, $\psi'_r(0) > 0$. Отображение $\psi_r(\phi(rz))$ будет K -квазиконформным и непрерывным в круге $|z| \leq 1$. Следовательно,

$$|\psi_r(\phi(rz_2)) - \psi_r(\phi(rz_1))| < 16 |z_2 - z_1|^{1/K}.$$

Пусть теперь $r \rightarrow 1$. Легко видеть, что тогда отображение ψ_r стремится к тождественному, и мы получаем

$$|\phi(z_2) - \phi(z_1)| \leq 16 |z_2 - z_1|^{1/K}.$$

Но отсюда вытекает непрерывность вплоть до границы и, стало быть, верно строгое неравенство.

Покажем, что константа 16 — наилучшая; для этого рассмотрим две области Мори (случай III) $G(\lambda_1)$ и $G(\lambda_2)$. Каждую из них отобразим конформно на круговое кольцо, а эти кольца отобразим друг на друга растяжением вдоль радиусов с постоянным коэффициентом

$$K = \frac{\log X(\lambda_1)}{\log X(\lambda_2)} > 1 \quad (\lambda_1 < \lambda_2).$$

Мы получили K -квазиконформное отображение области $G(\lambda_1)$ на $G(\lambda_2)$. Теперь имеем

$$\frac{16 - e}{\lambda_2} \leq X(\lambda_2) = X(\lambda_1)^{1/K} \leq \left(\frac{16}{\lambda_1}\right)^{1/K}$$

для достаточно малых λ_2 . Следовательно,

$$\lambda_2 \geq (\lambda_1)^{1/K} \frac{16 - e}{16^{1/K}}$$

и для больших K постоянный множитель сколь угодно близок к 16.

Приведем важные следствия о нормальных и компактных семействах квазиконформных отображений.

Теорема 1. K -квазиконформные отображения единичного круга на себя, нормированные условием $\phi(0) = 0$, образуют секвенциально компактное семейство относительно равномерной сходимости.

Доказательство. По теореме Мори функции ϕ равнотекущи непрерывны. Отсюда по теореме Асколи получаем, что любая бесконечная последовательность таких функций содержит равномерно сходящуюся подпоследовательность $\phi_n \rightarrow \phi$. Так как теорема Мори применима и к обратным функциям ϕ_n^{-1} , то функция ϕ осуществляет однолистное отображение. Его K -квазиконформность очевидна.

Конформные отображения нормируются обычно условиями $\phi(0) = 0$, $|\phi'(0)| = 1$. Для квазиконформных отображений это не имеет смысла: нужно производить нормировку в двух точках.

Для произвольной области Ω введем нормировку $\phi(a_1) = b_1$, $\phi(a_2) = b_2$, где, разумеется, $a_1 \neq a_2$, $b_1 \neq b_2$.

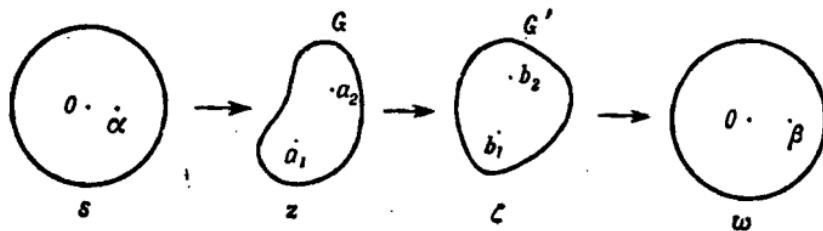
Теорема 2. *K-квазиконформные отображения с указанной фиксированной нормировкой удовлетворяют в Ω условию Гельдера*

$$|\phi(z_1) - \phi(z_2)| \leq M |z_1 - z_2|^{1/K}$$

на любом компактном множестве. Семейство таких отображений секвенциально компактно относительно равномерной сходимости на компактных множествах.

Доказательство. Для любых $z_1, z_2 \in \Omega$ существует односвязная область $G \subset \Omega$, отличная от всей плоскости, которая содержит z_1, z_2, a_1, a_2 . Если A — некоторое компактное множество в Ω , то $A \times A$ можно покрыть конечным числом областей $G \times G$. Достаточно, следовательно, доказать существование константы M для области G .

Отобразим G и $G' = \phi(G)$ конформно на единичные круги следующим образом:



В качестве компактного множества возьмем замкнутый круг $|s| \leq r_0 < 1$. Теорема Мори дает

$$(1 - |s|) \leq 16(1 - |w|)^{1/K}.$$

Следовательно, если $|s| \leq r_0$, то $|w| \leq \rho_0$ (где ρ_0 зависит только от r_0), и из аналогичных соображений $\beta \leq \beta_0$. Но, как мы знаем,

$$|w_1 - w_2| \leq 16 |s_1 - s_2|^{1/K}.$$

Если мы теперь покажем, что $\zeta(w)$ и $s(z)$ удовлетворяют условию Липшица

$$|\zeta_1 - \zeta_2| \leq C_1 |w_1 - w_2|, \quad |s_1 - s_2| \leq C_2 |z_1 - z_2|,$$

то доказательство будет закончено. Но это — простое следствие теоремы об искаjении.

Имеем

$$\begin{aligned} |z_2 - z_1| &\geq \frac{|z'(s_1)|}{4} \left| \frac{s_1 - s_2}{1 - s_1 \bar{s}_2} \right| \geq C |z'(s_1)| |s_1 - s_2|, \\ |z'(s_1)| &\geq C_0 |z'(0)|, \\ |a_2 - a_1| &\leq C' |z'(0)| \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$|s_1 - s_2| \leq \frac{C'}{CC_0 |a_2 - a_1|} |z_1 - z_2|.$$

Первое неравенство получается еще проще.

Итак, каждая последовательность квазиконформных отображений содержит сходящуюся подпоследовательность. Чтобы доказать, что предельное отображение является однолистным, нужно обратить эти неравенства. Хотя G' — переменная область, это возможно, так как $\beta < \beta_0$ и β_0 зависит только от α (т. е. от G , a_1 , a_2).

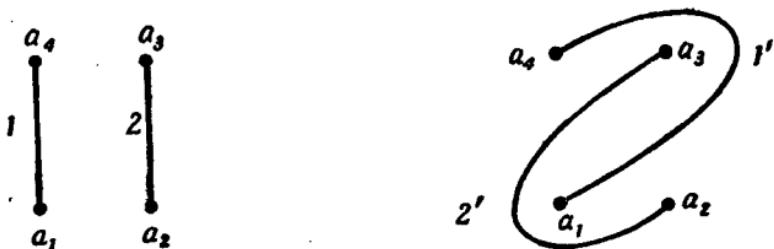
D. Четверки точек

Пусть (a_1, a_2, a_3, a_4) и (b_1, b_2, b_3, b_4) — две упорядоченные четверки различных комплексных чисел. Конформное отображение расширенной плоскости на себя, переводящее a_k в b_k , существует тогда и только тогда, когда двойные отношения этих четверок равны между собой. Если же они не равны, естественно рассмотреть следующую задачу:

Проблема 1. Для каких K существует K -квазиконформное отображение, переводящее одну четверку в другую.

Тейхмюллер первый обратил внимание на то, что задача эта становится более естественной, если ввести некоторые топологические ограничения.

Для иллюстрации рассмотрим следующий рисунок:



Существует топологическое отображение расширенной плоскости, переводящее линию l в l' и линию 2 в $2'$. Очевидно, что как автоморфизм сферы с выколотыми точками (a_1, a_2, a_3, a_4) это отображение сильно отличается от тождественного (негомотопно ему). Поэтому, хотя двойные отношения в этом случае равны, имеет смысл поставить вопрос о существовании K -квазиконформного отображения одной из этих областей на другую.

Введем необходимые уточнения. Во-первых, существуют периоды ω_1, ω_2 , такие, что для $\tau = \omega_2/\omega_1$

$$\rho(\tau) = \frac{e_3 - e_1}{e_2 - e_1} = \frac{a_3 - a_1}{a_2 - a_1} : \frac{a_3 - a_4}{a_2 - a_4}.$$

Так как существует дробно-линейное преобразование, переводящее (a_1, a_2, a_3, a_4) в (e_1, e_2, e_3, ∞) , то мы можем считать, что это и есть первоначальная четверка.

Пусть Ω — конечная плоскость ζ с выколотыми точками e_1, e_2, e_3 , и пусть P — плоскость z с выколотыми точками $m(\omega_1/2) + n(\omega_2/2)$ для всех целых m, n .

Рассматривая φ как проекцию, мы можем считать P накрывающей поверхностью для Ω . В этом случае, как известно, фундаментальная группа F области Ω имеет нормальную подгруппу G , изоморфную фундаментальной группе области P , а группа Γ накрытия изоморфна факторгруппе F/G . Мы точно знаем структуру групп F, G и Γ . Именно, F представляет собой свободную группу с тремя образующими $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, которые соответствуют петлям вокруг

точек e_1, e_2, e_3 ; G есть наименьшая нормальная подгруппа, содержащая элементы $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2, (\sigma_1\sigma_2\sigma_3)^2$, а Γ — группа всех преобразований $z \rightarrow \pm z + m\omega_1 + n\omega_2$. Подгруппа параллельных переносов Γ_0 состоит из всех преобразований вида $z \rightarrow z + m\omega_1 + n\omega_2$. Она имеет образующие $A_1 z = z + \omega_1$ и $A_2 z = z + \omega_2$.

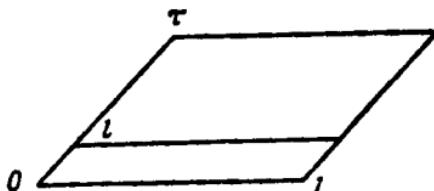
Рассмотрим теперь вторую четверку $(e_1^*, e_2^*, e_3^*, \infty)$ и воспользуемся соответствующими обозначениями Ω^* , F^* и т. д. Топологическое отображение $\phi: \Omega \rightarrow \Omega^*$ индуцирует изоморфизм групп F и F^* , отображающий G на G^* . Это означает, что накрытия $\phi \circ \rho: P \rightarrow \Omega^*$ и $\rho^*: P^* \rightarrow \Omega^*$ соответствуют одной и той же подгруппе G^* группы F^* , а потому существует топологическое отображение $\psi: P \rightarrow P^*$, такое, что $\phi \circ \rho = \rho^* \circ \psi$. Ясно, что $A_1^* = \phi \circ A_1 \circ \psi^{-1}$ и $A_2^* = \phi \circ A_2 \circ \psi^{-1}$ являются образующими группы Γ_0^* . Напишем равенства $A_1^* z = z + \omega_1^*$, $A_2^* z = z + \omega_2^*$ и назовем (ω_1^*, ω_2^*) базисом, определенным отображением ψ . Поскольку ϕ неоднозначно определяет ψ , следует выяснить, как влияет изменение ψ на базис. Заменим ψ на $T^* \circ \psi$, где $T^* \in \Gamma^*$, находим, что базис либо не меняется, либо переходит в $(-\omega_1^*, -\omega_2^*)$. Во всяком случае отношение $\tau^* = \omega_2^*/\omega_1^*$ определяется гомеоморфизмом ϕ однозначно; мы назовем два гомеоморфизма Ω на Ω^* эквивалентными, если они определяют одинаковые значения τ^* . Методами, выходящими за рамки наших рассмотрений, можно показать, что два отображения Ω на Ω^* эквивалентны тогда и только тогда, когда они гомотопны.

Проблема 2. Для каких K существует K -квазиконформное отображение Ω на Ω^* , эквивалентное данному отображению ϕ_0 .

Нам понадобится предварительно подсчитать экстремальную длину некоторого семейства кривых. Обозначим через $\{\gamma_1\}$ семейство замкнутых кривых в Ω , которым в P соответствуют кривые с концами z и $z + \omega_1$. Вообще через $\{m\gamma_1 + n\gamma_2\}$ обозначим семейство кривых в Ω , которым в P соответствуют кривые с концами z и $z + m\omega_1 + n\omega_2$.

Лемма. Экстремальная длина λ семейства $\{\gamma_i\}$ равна $2/\operatorname{Im} \tau$ ($\tau = \omega_2/\omega_1$).

Доказательство. Можно считать, что $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = \tau$. Рассмотрим сегмент l :



Его проекцией является кривая $\gamma \in \{\gamma_i\}$. Для данной функции ρ в Ω положим $\tilde{\rho} = \rho(\varphi(z))|\varphi'(z)|$. Получим

$$\int_l \tilde{\rho} dx \geq L(\rho), \quad L(\rho)^2 \leq \int_l \tilde{\rho}^2 dx,$$

$$L(\rho)^2 \frac{\operatorname{Im} \tau}{2} \leq \int \int \tilde{\rho}^2 dx dy = A(\rho),$$

откуда выводим, что

$$\lambda \leq \frac{2}{\operatorname{Im} \tau}.$$

С другой стороны, выберем ρ таким, что $\tilde{\rho} = 1$. Для кривой $\gamma \in \{\gamma_i\}$ ее прообраз $\tilde{\gamma}$ в P ведет из точки z в $z + 1$. Следовательно, длина $\tilde{\gamma}$ не меньше 1, и мы имеем

$$L(\rho) = 1, \quad A(\rho) = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \tau.$$

Доказательство закончено.

Разумеется, ω_1 можно заменить на $c\omega_2 + d\omega_1$, где c, d — целые, взаимно простые. Тогда

$$\lambda \{c\gamma_2 + d\gamma_1\} = \frac{2}{\operatorname{Im} \left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d} \right)} = \frac{2|c\tau + d|^2}{\operatorname{Im} \tau}, \quad (1)$$

где $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ — унимодулярная матрица с целочисленными элементами.

Приступим теперь к решению проблемы 2. Рассмотрим отображение $\psi: P \rightarrow P^*$, соответствующее отображению $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega^*$, и выберем базис (ω_1^*, ω_2^*) , определенный отображением ψ . Ясно, что образом семейства $\{\gamma_i\}$ при преобразовании φ является класс $\{\gamma_i^*\}$, соответствующий ω_i^* . Если φ есть K -квазиконформное отображение, то отсюда следует, что

$$K^{-1} \operatorname{Im} \tau \leq \operatorname{Im} \tau^* \leq K \operatorname{Im} \tau.$$

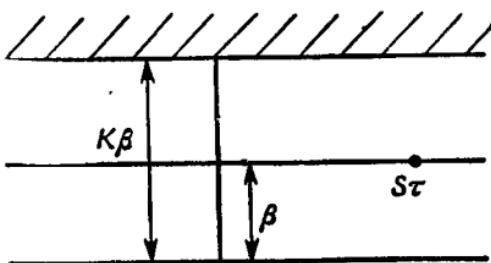
Но $\{c\gamma_2 + d\gamma_1\}$ также отображается на $\{c\gamma_2^* + d\gamma_1^*\}$ и мы имеем

$$\operatorname{Im} \frac{a\tau^* + b}{c\tau^* + d} \leq K \operatorname{Im} \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

для всех унимодулярных преобразований.

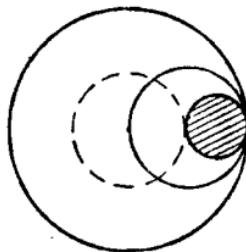
Чтобы получить геометрическую интерпретацию этого результата, возьмем унимодулярное преобразование S и вспомогательное дробно-линейное преобразование U , отображающее единичный круг $|w| < 1$ на верхнюю полуплоскость с нормировкой $U(0) = \tau$.

Рассмотрим полуплоскости, ограниченные горизонтальными прямыми, проходящими через точки $S\tau$ и $K\tau$.



Как мы знаем, $S\tau^*$ не может лежать в заштрихованной области. Выполняя обратное отображение $U^{-1}S^{-1}$, мы видим, что $U^{-1}\tau^*$ не лежит в заштрихованном круге, который касается единичной окруж-

ности в точке $U^{-1}S^{-1}(\infty)$ и радиус которого зависит только от K .



Но множество точек $S^{-1}(\infty)$ для всех унимодулярных S плотно на действительной оси, следовательно, множество точек $U^{-1}S^{-1}(\infty)$ плотно на единичной окружности. Это показывает, что $U^{-1}\tau^*$ может лежать лишь в пунктирном круге.

Этот результат эквивалентен тому, что неевклидово расстояние между τ и τ^* не превосходит неевклидова расстояния между $i\beta$ и $iK\beta$, или

$$d[\tau, \tau^*] \leq \log K.$$

Теорема 3. Для того чтобы существовало K -квазиконформное отображение, эквивалентное Φ_0 , необходимо и достаточно, чтобы $d[\tau, \tau^*] \leq \log K$.

Мы еще не доказали существования. Но это можно сделать непосредственно; достаточно рассмотреть аффинное отображение

$$\psi(z) = \frac{(\tau^* - \bar{\tau})z + (\tau - \tau^*)\bar{z}}{\tau - \bar{\tau}},$$

для которого $\psi(-z) = -\psi(z)$, $\psi(z+1) = \psi(z) + 1$ и $\psi(z+\tau) = \psi(z) + \tau^*$. Ясно, что ψ накрывает соответствующее отображение φ области Ω на Ω^* , которое эквивалентно Φ_0 , и отклонение его в точности равно $e^{d[\tau, \tau^*]}$.

Несколько замечаний о проблеме 1. Здесь предполагается, что Φ_0 отображает e_1, e_2, e_3 соответственно в e_1^*, e_2^*, e_3^* . Когда φ обладает тем же свойством? Предположим, что φ_0 накрыто отображением $\varphi_0: P \rightarrow P^*$, которое определяет базис (ω_1^*, ω_2^*) , и что φ соответствует отображению ψ , определяющему

базис $(c\omega_2^* + d\omega_1^*, a\omega_2^* + b\omega_1^*)$. Установлено, что φ отображает e_1, e_2, e_3 в e_1^*, e_2^*, e_3^* тогда и только тогда,

когда $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{2}$.

Совокупность дробно-линейных преобразований $\frac{a\tau + b}{c\tau + d}$, таких, что матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ унимодулярна и сравнима с единичной по модулю 2, есть конгруэнтная подгруппа (второго порядка) модулярной группы. Следовательно, решение проблемы 1 формулируется так:

Теорема 4. *K-квазиконформное отображение области Ω на область Ω^* , сохраняющее порядок точек, e_i , существует тогда и только тогда, когда неевклидово расстояние от τ до ближайшего образа точки τ^* при отображениях из конгруэнтной подгруппы не превосходит $\log K$.*

В связи с леммой представляет интерес определить дробно-линейное преобразование $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{2}$, для которого экстремальная длина (1) минимальна. Рассмотрим случай, когда точка τ лежит в фундаментальной области

$$\left| \tau \pm \frac{1}{2} \right| \geq \frac{1}{2}, \quad |\operatorname{Re} \tau| \leq 1.$$

Тогда

$$|c\tau + d| \geq |c \operatorname{Re} \tau + d| \geq |d| - |c|$$

и

$$\begin{aligned} |c\tau + d| - \left| c\left(\tau \pm \frac{1}{2}\right) \mp \frac{c}{2} + d \right| &\geq \\ &\geq \frac{1}{2}|c| - \left| |d| - \frac{1}{2}|c| \right| - |d| \text{ или } |c| - |d|. \end{aligned}$$

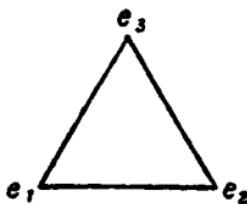
Из соображений четности $|d| \geq 1$ и либо $|d| - |c| \geq 1$, либо $|c| - |d| \geq 1$. Поэтому $|c\tau + d|^2 \geq 1$ и, следовательно, λ будет наименьшим для тождественного преобразования.

Следствие. Пусть ϕ — некоторое K -квазиконформное отображение конечной плоскости на себя, причем $K < \sqrt{3}$. Тогда вершины любого равностороннего треугольника отображаются на вершины некоторого треугольника с той же ориентацией.

Такое отображение можно аппроксимировать кусочно аффинными. Для треугольника

$$\rho = \frac{e_3 - e_1}{e_2 - e_1} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$$

и, как мы знаем, соответствующее τ равно $\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$.



Ближайшая точка с действительным ρ есть $\frac{-1 + i}{2}$, а соответствующее неевклидово расстояние равно $\log \sqrt{3}$. Следовательно, если $K < \sqrt{3}$, то $\text{Im } \rho^* > 0$, а это и означает сохранение ориентации.

Замечательной особенностью этого следствия является то, что оно не требует нормировки. Этот результат является одновременно глобальным и локальным.

Глава IV

СООТВЕТСТВИЕ ГРАНИЦ

A. M-условие

Мы видели, что квазиконформное отображение круга на себя порождает топологическое отображение граничной окружности. Насколько регулярно это отображение? Можно ли охарактеризовать его некоторыми простыми условиями? Неожиданно оказалось, что это действительно можно сделать.

Все несколько упрощается, если изучать отображения верхней полуплоскости на себя и предполагать, что бесконечная точка остается неподвижной. При этом соответствие границ задается непрерывной возрастающей вещественной функцией $h(x)$, такой, что $h(-\infty) = -\infty$ и $h(+\infty) = +\infty$. Каким условиям удовлетворяет эта функция?

Предположим сначала, что существует K -квазиконформное отображение φ верхней полуплоскости на себя с граничными значениями $h(x)$. При помощи отражения его можно продолжить до K -квазиконформного отображения всей плоскости, а тогда можно применить результаты предыдущей главы. Именно, пусть $e_1 < e_3 < e_2$ — точки на действительной оси, а e'_1, e'_2, e'_3 — их образы. Если

$$\rho = \frac{e_3 - e_1}{e_2 - e_1}, \quad \rho' = \frac{e'_3 - e'_1}{e'_2 - e'_1},$$

а τ, τ' — соответствующие значения на мнимой оси, то

$$K^{-1} \operatorname{Im} \tau \leqslant \operatorname{Im} \tau' \leqslant K \operatorname{Im} \tau.$$

Ограничимся простейшим случаем, когда точки e_1, e_3, e_2 расположены на равном расстоянии друг от друга, т. е. имеют вид $x - t, x, x + t$; при этом $\rho = \frac{1}{2}$,

а соответствующее значение $\tau = i$. В этом случае

$$K^{-1} \leq \operatorname{Im} \tau(\rho) \leq K.$$

В эквивалентной записи имеем

$$\rho(iK^{-1}) \leq \rho' \leq \rho(iK),$$

или

$$1 - \rho(iK) \leq \rho' \leq \rho(iK). \quad (1)$$

В данный момент нас интересуют оценки для

$$\frac{\rho'_2 - \rho'_3}{\rho'_3 - \rho'_1} = \frac{1 - \rho'}{\rho'}.$$

Из (1) получаем

$$\frac{1 - \rho(iK)}{\rho(iK)} \leq \frac{h(x+t) - h(x)}{h(x) - h(x-t)} \leq \frac{\rho(iK)}{1 - \rho(iK)}.$$

Вспомним теперь, что $\rho(\tau+1) = \frac{1}{\rho(\tau)}$. По этой причине нижнюю оценку можно записать в виде $\rho(1+iK) - 1$, а по формуле (13) из главы III, В

$$\rho(1+iK) - 1 = 16e^{-\pi K} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 + e^{-2n\pi K}}{1 - e^{-(2n-1)\pi K}} \right)^8.$$

Итак, доказано, что

$$M(K)^{-1} \leq \frac{h(x+t) - h(x)}{h(x) - h(x-t)} \leq M(K), \quad (2)$$

где

$$M(K) = \frac{1}{16} e^{\pi K} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - e^{-(2n-1)\pi K}}{1 + e^{-2n\pi K}} \right)^8. \quad (3)$$

Мы будем называть (2) M -условием. Очевидно, (3) дает наилучшее значение, а оценка сверху имеет вид

$$M(K) < \frac{1}{16} e^{\pi K}.$$

Теорема 1. Границные значения K -квазиконформного отображения удовлетворяют M -условию (2).

Интересно изучить следствия *M*-условия

$$M^{-1} \leq \frac{h(x+t) - h(x)}{h(x) - h(x-t)} \leq M, \quad (4)$$

даже независимо от их важности для квазиконформных отображений. Пусть $H(M)$ обозначает семейство всех функций h , удовлетворяющих этому условию. Заметим, что оно инвариантно по отношению к линейным преобразованиям S : $x \rightarrow ax + b$ как зависимой, так и независимой переменной. Иначе говоря, если $h \in H(M)$, то $S_1 \circ h \circ S_2 \in H(M)$. Обозначим через $H_0(M)$ подмножество $H(M)$, состоящее из функций h , нормированных условиями $h(0) = 0$, $h(1) = 1$.

Для $h \in H_0(M)$ непосредственно имеем

$$\frac{1}{M+1} \leq h\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{M}{M+1}, \quad (5)$$

откуда по индукции

$$\frac{1}{(M+1)^n} \leq h\left(\frac{1}{2^n}\right) \leq \left(\frac{M}{M+1}\right)^n. \quad (6)$$

Это же верно, но с обращением знаков неравенств, и для отрицательных n . Другими словами, мы, например, имеем

$$h(2^n) \leq (M+1)^n,$$

откуда видно, что функции $h \in H_0(M)$ равномерно ограничены на любом компактном множестве (надо применить неравенство к $h(x)$ и $1 - h(1-x)$).

Имеет место также равностепенная непрерывность. Действительно, для любого фиксированного a функция

$$\frac{h(a+x) - h(a)}{h(a+1) - h(a)}$$

нормирована. Поэтому из $0 \leq x \leq 1/2^n$ вытекает

$$h(a+x) - h(a) \leq (h(a+1) - h(a)) \left(\frac{M}{M+1}\right)^n,$$

что и доказывает равностепенную непрерывность h на компактных множествах. В качестве следствия получается

Лемма 1. Пространство $H_0(M)$ есть компакт (относительно равномерной сходимости на компактных множествах).

В самом деле, предельная функция сходящейся последовательности должна удовлетворять условию (4), откуда сразу следует, что она строго возрастающая. Более того, компактность характеризует $H_0(M)$.

Лемма 2. Пусть H_0 — некоторое множество нормированных гомеоморфизмов h , компактное и инвариантное относительно линейных преобразований. Тогда $H_0 \subset H_0(M)$ для некоторого M .

Доказательство. Положим $\alpha = \inf h(-1)$, $\beta = \sup h(-1)$ для $h \in H_0$. Существует такая последовательность, что $h_n(-1) \rightarrow \alpha$, и подпоследовательность ее, сходящаяся к некоторому гомеоморфизму. Поэтому $\alpha > -\infty$ и, аналогично, $\beta < 0$.

Для любого $h \in H_0$ отображение

$$k(x) = \frac{h(y+tx) - h(y)}{h(y+t) - h(y)}, \quad t > 0,$$

принадлежит H_0 . Следовательно,

$$\alpha \leq \frac{h(y-t) - h(y)}{h(y+t) - h(y)} \leq \beta,$$

или

$$-\frac{1}{\alpha} \leq \frac{h(y+t) - h(y)}{h(y) - h(y-t)} \leq -\frac{1}{\beta},$$

т. е. M -условие удовлетворяется.

Нам понадобится также следующее более специальное утверждение.

Лемма 3. Если $h \in H_0(M)$, то

$$\frac{1}{M+1} \leq \int_0^1 h(x) dx \leq \frac{M}{M+1}.$$

Доказательство. Положим $F(x) = \sup h(x)$, $h \in H_0(M)$. Это довольно любопытная функция, которую, по-видимому, трудно явно определить. Тем не менее некоторые оценки для нее получить нетрудно.

Мы уже доказали, что $F\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{M}{M+1}$. Поскольку при $h \in H_0(M)$ и

$$\frac{h(tx)}{h(t)} \in H_0(M),$$

то для $x = 1/2$ получаем

$$\frac{h(t/2)}{h(t)} \leq F(1/2)$$

и, следовательно,

$$F(t/2) \leq F(1/2)F(t) \quad \text{для } t > 0. \quad (7)$$

Аналогично, поскольку

$$\frac{h((1-t)x+t) - h(t)}{1-h(t)} \in H_0(M),$$

получаем

$$\frac{h\left(\frac{1+t}{2}\right) - h(t)}{1-h(t)} \leq F\left(\frac{1}{2}\right).$$

Для $t < 1$ это дает

$$h\left(\frac{1+t}{2}\right) \leq F\left(\frac{1}{2}\right) + \left(1 - F\left(\frac{1}{2}\right)\right)h(t)$$

и

$$F\left(\frac{1+t}{2}\right) \leq F\left(\frac{1}{2}\right) + \left(1 - F\left(\frac{1}{2}\right)\right)F(t). \quad (8)$$

Складывая (7) и (8), получаем

$$F\left(\frac{t}{2}\right) + F\left(\frac{1+t}{2}\right) \leq F\left(\frac{1}{2}\right) + F(t). \quad (9)$$

Теперь мы имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 F(t) dt &= \frac{1}{2} \int_0^2 F\left(\frac{t}{2}\right) dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(F\left(\frac{t}{2}\right) + F\left(\frac{1}{2} + \frac{t}{2}\right)\right) dt \leq \\ &\leq \frac{1}{2} F\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \int_0^1 F(t) dt. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int_0^1 F(t) dt \leq F\left(\frac{1}{2}\right),$$

откуда вытекает правое неравенство.

Левое неравенство получается применением этого результата к функции $1 - h(1-t)$.

Замечание. Из неравенств

$$\frac{1}{M+1} \leq h\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{M}{M+1}$$

можно непосредственно получить более грубые оценки

$$\frac{1}{2(M+1)} \leq \int_0^1 h(t) dt \leq \frac{2M+1}{2(M+1)},$$

а поскольку они служат тем же целям, что и лемма 3, то эта лемма является своего рода роскошью.

В. Достаточность M -условия

Докажем обратное утверждение.

Теорема 2. *Всякое отображение h , удовлетворяющее M -условию, можно продолжить до K -квазиконформного отображения плоскости, причем K зависит только от M .*

Для доказательства построим искомое отображение в явном виде. Положим $\varphi(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$, где

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{1}{2y} \int_{-y}^y h(x+t) dt, \\ v(x, y) &= \frac{1}{2y} \int_0^y (h(x+t) - h(x-t)) dt. \end{aligned} \tag{1}$$

Ясно, что $v(x, y) \geq 0$ при $y > 0$ и стремится к 0, если $y \rightarrow 0$. Кроме того, $u(x, 0) = h(x)$, что и требуется.

Переписав формулы (1) в виде

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2y} \int_{x-y}^{x+y} h(t) dt, \\ v &= \frac{1}{2y} \left(\int_x^{x+y} h(t) dt - \int_{x-y}^x h(t) dt \right), \end{aligned} \quad (1)$$

мы убеждаемся, что частные производные функций *u* и *v* существуют и равны следующим величинам:

$$u_x = \frac{1}{2y} (h(x+y) - h(x-y)),$$

$$u_y = -\frac{1}{2y^2} \int_{x-y}^{x+y} h dt + \frac{1}{2y} (h(x+y) + h(x-y)),$$

$$v_x = \frac{1}{2y} (h(x+y) - 2h(x) + h(x-y)),$$

$$v_y = -\frac{1}{2y^2} \left(\int_x^{x+y} h dt - \int_{x-y}^x h dt \right) + \frac{1}{2y} (h(x+y) - h(x-y)).$$

Возможно следующее упрощение: если заменить *h*(*t*) на *h*₁(*t*) = *h*(*at* + *b*), *a* > 0, то *M*-условие остается в силе, а $\Phi(z)$ заменяется на $\Phi_1(z) = \Phi(az + b)$. Таким образом, $\Phi_1(i) = \Phi(ai + b)$, а поскольку *ai* + *b* произвольно, то нам нужно изучить отклонение только в точке *i*. Кроме того, мы можем считать, что *h*(0) = 0, *h*(1) = 1.

Теперь производные получают такой вид:

$$u_x = \frac{1}{2} (1 - h(-1)),$$

$$u_y = -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 h dt + \frac{1}{2} (1 + h(-1)),$$

$$v_x = \frac{1}{2} (1 + h(-1)),$$

$$v_y = -\frac{1}{2} \left(\int_0^1 h dt - \int_{-1}^0 h dt \right) + \frac{1}{2} (1 - h(-1)).$$

Отклонение дается равенством

$$d = \left| \frac{(u_x - v_y) + i(v_x + u_y)}{(u_x + v_y) + i(v_x - u_y)} \right|.$$

Чтобы упростить вычисления, положим

$$\xi = 1 - \int_0^1 h dt, \quad \beta = -h(-1),$$

$$\eta\beta = -h(-1) + \int_{-1}^0 h dt (> 0).$$

Таким образом,

$$u_x = \frac{1}{2}(1 + \beta), \quad v_x = \frac{1}{2}(1 - \beta),$$

$$u_y = \frac{1}{2}(\xi - \eta\beta), \quad v_y = \frac{1}{2}(\xi + \eta\beta)$$

и

$$d = \left| \frac{((1 - \xi) + \beta(1 - \eta)) + i((1 + \xi) - \beta(1 + \eta))}{((1 + \xi) + \beta(1 + \eta)) + i((1 - \xi) - \beta(1 - \eta))} \right|,$$

$$d^2 = \frac{1 + \xi^2 + \beta^2(1 + \eta^2) - 2\beta(\xi + \eta)}{1 + \xi^2 + \beta^2(1 + \eta^2) + 2\beta(\xi + \eta)},$$

$$\frac{1 + d^2}{1 - d^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\beta} \cdot \frac{1 + \xi^2}{\xi + \eta} + \beta \cdot \frac{1 + \eta^2}{\xi + \eta} \right].$$

Мы доказали оценки

$$M^{-1} \leq \beta \leq M, \quad \frac{1}{M+1} \leq \xi \leq \frac{M}{M+1},$$

$$\frac{1}{M+1} \leq \eta \leq \frac{M}{M+1}$$

(последнее получается по симметрии).

Это дает, например,

$$\frac{1 + d^2}{1 - d^2} < M(M+1),$$

$$D < 2M(M+1).$$

Эта оценка влечет за собой положительность якобиана отображения ϕ , откуда следует, что это отображение локально взаимно однозначно.

Далее нужно убедиться в том, что $\varphi(z) \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow \infty$. В силу (1)' имеем

$$u = \frac{1}{2y} \left(\int_{x-y}^x h dt + \int_x^{x+y} h dt \right),$$

$$v = \frac{1}{2y} \left(\int_x^{x+y} h dt - \int_{x-y}^x h dt \right),$$

$$u^2 + v^2 = \frac{1}{2y^2} \left[\left(\int_x^{x+y} h dt \right)^2 + \left(\int_{x-y}^x h dt \right)^2 \right].$$

Если $x \geq 0$, то $u^2 + v^2 > \frac{1}{2y^2} \left(\int_0^y h dt \right)^2$.

Если $x \leq 0$, то $u^2 + v^2 > \frac{1}{2y^2} \left(\int_{-y}^0 h dt \right)^2$, и обе величины справа стремятся к ∞ при $y \rightarrow \infty$.

Если y ограничено, то ясно также, что $u^2 + v^2 \rightarrow \infty$ вместе с z .

Мы доказали, что $\zeta = \varphi(z)$ определяет верхнюю полуплоскость как гладкое безграничное накрытие самой себя. По теореме о монодромии это отображение является гомеоморфизмом.

Замечание 1. Бёрлинг и Альфорс доказали, что $D < M^2$. Чтобы сделать это, понадобилось ввести дополнительный параметр в определении φ .

Замечание 2. Можно поставить вопрос, насколько регулярна функция h , если она удовлетворяет M -условию. Долгое время считалось, что соответствие границ всегда абсолютно непрерывно. Однако это не так: можно построить функцию h , удовлетворяющую M -условию, которая не является абсолютно непрерывной.

С. Квазизометрия

Для конформных отображений полуплоскости на себя неевклидово расстояние является инвариантом. Будет ли оно квазинвариантом для квазиконформных

отображений? Конечно, нет. Если неевклидово расстояние при некотором отображении умножается на ограниченный (с двух сторон) множитель, то мы назовем это отображение *квазизометрическим*.

Теорема 3. *Отображение ϕ , построенное в B , является квазизометрическим, т. е. удовлетворяет условию*

$$A^{-1}d[z_1, z_2] \leq d[\phi(z_1), \phi(z_2)] \leq Ad[z_1, z_2] \quad (1)$$

с константой A , зависящей только от M .

Достаточно доказать (1) в бесконечно малом, т. е. установить неравенства

$$A^{-1} \frac{|dz|}{y} \leq \frac{|d\phi|}{v} \leq A \frac{|dz|}{y}. \quad (2)$$

Линейные отображения плоскости z не нарушают квазизометричности, и, следовательно, достаточно рассмотреть точку $(0, 1)$. Имеем

$$v(i) = \frac{1}{2} \left(\int_0^1 h dt - \int_{-1}^0 h dt \right),$$

и оценки

$$\frac{1}{2M} \leq v(i) \leq \frac{M}{2}$$

получаются непосредственно (с помощью леммы 3).

Используя еще неравенства

$$\frac{1}{D} |\phi_z| |dz| \leq |d\phi| \leq 2 |\phi_z| |dz|$$

и формулу

$$|\phi_z|^2 = \frac{1}{8} [(1 + \xi^2) + \beta^2(1 + \eta^2) + 2\beta(\xi + \eta)],$$

получаем (1) со значением

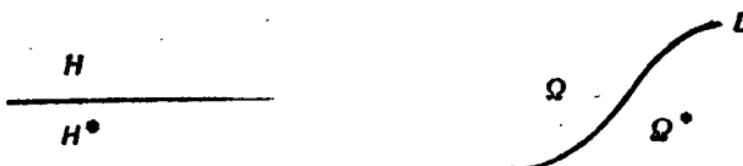
$$A = 4M^2(M + 1).$$

Детали рассуждений мы опускаем.

D. Квазиконформное отражение

Рассмотрим теперь K -квазиконформное отображение ϕ всей плоскости на себя. Действительная ось отображается на простую кривую L , уходящую в бесконечность в обоих направлениях. Можно ли охарактеризовать L геометрическими свойствами¹⁾?

Сделаем сначала несколько общих замечаний. Предположим, что L разделяет плоскость на области Ω и Ω^* , соответствующие верхней полуплоскости H и нижней полуплоскости H^* . Пусть j обозначает отражение $z \rightarrow \bar{z}$, которое меняет местами H и H^* . Тогда $\phi \circ j \circ \phi^{-1}$ является K^2 -квазиконформным отображением, меняющим ориентацию, которое переводит Ω и Ω^* друг в друга и оставляет точки L неподвижными. Мы будем говорить что L допускает K^2 -квазиконформное отражение.



Обратно, предположим, что L допускает K -квазиконформное отражение ω . Пусть f — конформное отображение полуплоскости H на область Ω . Положим

$$F = \begin{cases} f & \text{в } H, \\ \omega \circ f \circ j & \text{в } H^*. \end{cases} \quad (1)$$

Ясно, что F является K^2 -квазиконформным отображением. Итак, мы видим, что L тогда и только тогда допускает отражение, когда она является образом прямой линии при некотором квазиконформном отображении всей плоскости. Более того, это отображение можно выбрать так, что оно будет конформным в одной из полуплоскостей. Мы будем говорить, что такое конформное отображение

¹⁾ Например, мы уже знаем, что площадь кривой L равна нулю.

f допускает K^2 -квазиконформное продолжение на всю плоскость.

Рассмотрим также конформное отображение f^* полуплоскости H^* на область Ω^* . Отображение $j \circ f^{*-1} \circ \omega \circ f$ является квазиконформным отображением полуплоскости H на себя. Его сужением на ось x является некоторая функция $h(x) = f^{*-1} \circ f$, которая, как мы знаем, удовлетворяет M -условию. Заметим, что L определяет h однозначно с точностью до линейных преобразований ($h(x)$ можно заменить на $Ah(ax + b) + B$).

С другой стороны, пусть функция h задана и удовлетворяет M -условию. Мы знаем, что тогда существует квазиконформное отображение H на себя, граничные значения которого совпадают с h ; построим меняющее ориентацию отображение полуплоскости H на полуплоскость H^* с соответствующими граничными условиями. Существует, хотя мы это еще и не доказали, отображение ϕ всей плоскости на себя, конформное в H и такое, что $\phi \circ j$ конформно в H^* . (Это условие определяет коэффициент μ во всей плоскости, а в теореме 3 главы V будет доказано, что при заданном μ_ϕ можно определить ϕ). Таким образом, ϕ отображает действительную ось на некоторую кривую L , которая в свою очередь определяет функцию h .

Каков произвол в выборе L ? Пусть L_1 и L_2 допускают квазиконформные отражения ω_1 и ω_2 ; обозначим соответствующие конформные отображения f_1, f_1^*, f_2, f_2^* . Предположим, что они определяют одинаковые функции $h = f_1^{*-1} \circ f_1 = f_2^{*-1} \circ f_2$. Отображение

$$g = \begin{cases} f_2 \circ f_1^{-1} & \text{в } \Omega_1, \\ f_2^* \circ f_1^{*-1} & \text{в } \Omega_1^* \end{cases}$$

конформно в $\Omega_1 \cup \Omega_1^*$ и непрерывно на L_1 . Будет ли оно конформным во всей плоскости? Чтобы доказать, что это именно так, покажем, что g является квазиконформным отображением, поскольку, как мы знаем,

квазиконформное отображение, конформное почти всюду, является конформным.

Определим F_1 и F_2 по формуле (1). Положим¹⁾

$$G = F_2^{-1} \circ f_2^* \circ f_1^{*-1} \circ F_1$$

в H^* . Отображение G на действительной оси сводится к тождественному, и мы положим $G = z$ в H . Тогда G будет квазиконформным. Следовательно, отображение $F_2 \circ G \circ F_1^{-1}$ тоже квазиконформно. Оно сводится к $f_2^* \circ f_1^{*-1}$ в Ω_1^* и к $f_2 \circ f_1^{-1}$ в Ω_1 , т. е. к g .

Отсюда мы заключаем, что отображение g конформно. Следовательно, f_2 получается из f_1 линейным преобразованием, и L по существу определяется однозначно.

Сформулируем теперь две главные проблемы.

Проблема 1. Охарактеризовать L геометрическими свойствами.

Проблема 2. Охарактеризовать f (и f^*).

Сейчас мы займемся решением проблемы 1. Решение проблемы 2 мне неизвестно. Оно должно формулироваться в терминах аналитических свойств инварианта f''/f' .

Покажем сначала, что для квазиконформных отражений сохраняются некоторые свойства обычного отражения.



Полагая $\zeta^* = \omega(\zeta)$, допустим, что $\zeta = \varphi(z)$, $\zeta^* = \varphi(\bar{z})$, $\zeta_0 = \varphi(z_0)$, где z_0 действительно.

Любая числовая функция от K , не обязательно одна и та же, будет обозначаться через $C(K)$.

¹⁾ $G = j \circ F_2^{-1} \circ \omega_2 \circ f_2^* \circ f_1^{*-1} \circ \omega_1 \circ f_1 \circ j$.

Лемма 1.

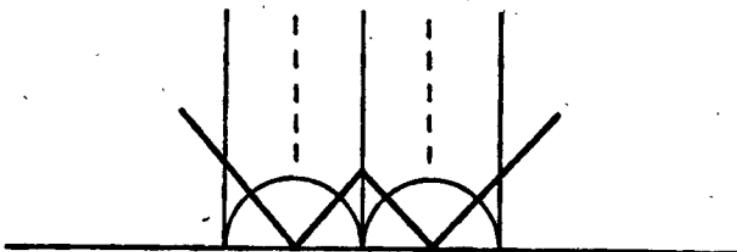
$$C(K)^{-1} \leq \left| \frac{\zeta^* - \zeta_0}{\zeta - \zeta_0} \right| \leq C(K).$$

Доказательство. Заметим, что

$$\rho = \frac{z_0 - z}{z_0 - \bar{z}}$$

удовлетворяет условию $|\rho| = 1$. Для любого такого ρ соответствующее значение τ расположено на лучах $\operatorname{Re} \tau = \pm \frac{1}{2}$, $\operatorname{Im} \tau \geq \frac{1}{2}$.

Отсюда заключаем, что τ' , соответствующее $\rho' = \frac{\zeta_0 - \zeta}{\zeta_0 - \zeta^*}$, находится от этих прямых на неевклидовом расстоянии, не превосходящем $\log K$. Это означает, что τ' лежит в W -образной области, показанной на рисунке.



Заметим, что точки ± 1 , где $\rho = \infty$, отделены от этой W -образной области. Кроме того, $\rho \rightarrow 1$ при $\operatorname{Im} \tau \rightarrow \infty$ и $\rho \rightarrow -1$ при подходе к точкам $\pm \frac{1}{2}$ внутри некоторого угла. Следовательно, ρ' ограничено константой $C(K)$, а это и доказывает лемму.

Замечание. Нет необходимости исследовать поведение функции $\rho(\tau)$ в точках $\tau = \pm \frac{1}{2}$, ибо они находятся вне области изменения τ' .

Пусть $\delta(\zeta)$ обозначает кратчайшее евклидово расстояние от ζ до L .

Лемма 2.

$$C(K)^{-1} \leq \frac{\delta(\zeta^*)}{\delta(\zeta)} \leq C(K).$$

Доказательство тривиально.

Области Ω и Ω^* имеют свои неевклидовы метрики, определенные соотношением

$$\lambda |d\zeta| = \frac{|dz|}{y}$$

для $\zeta = f(z)$. Отражение ϕ индуцирует K -квазиконформное отображение полуплоскости H на полуплоскость H^* , а мы знаем, что его можно заменить на $C(K)$ -квазизометрическое отображение. Отсюда следует, что можно заменить ϕ на отражение ϕ' , так что (в точках $\zeta^* = \omega'(\zeta)$)

$$C(K)^{-1} \lambda |d\zeta| \leq \lambda^* |d\zeta^*| \leq C(K) \lambda |d\zeta|.$$

Теперь уже легко оценить $\lambda(\zeta)$ в терминах $\delta(\zeta)$.



С этой целью отобразим Ω конформно на круг $|w| < 1$ с нормировкой $w(\zeta_0) = 0$. По лемме Шварца

$$|\omega'(\zeta_0)| \leq \frac{1}{\delta(\zeta_0)}.$$

Но неевклидов линейный элемент в начале координат равен $2|dw|$. Итак,

$$\lambda(\zeta_0) = 2 |\omega'(\zeta_0)| \leq \frac{2}{\delta(\zeta_0)}.$$

С другой стороны, по теореме Кёбе

$$\delta(\zeta_0) \geq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{|\omega'(\zeta_0)|},$$

$$\lambda(\zeta_0) \geq \frac{1}{2\delta(\zeta_0)}.$$

Комбинируя эти результаты с леммой 2, получим следующее утверждение:

Лемма 3. Если существует K -квазиконформное отражение относительно L , то существует также $C(K)$ -квазиконформное отражение, которое дифференцируемо и изменяет евклидовы длины самое большое в $C(K)$ раз.

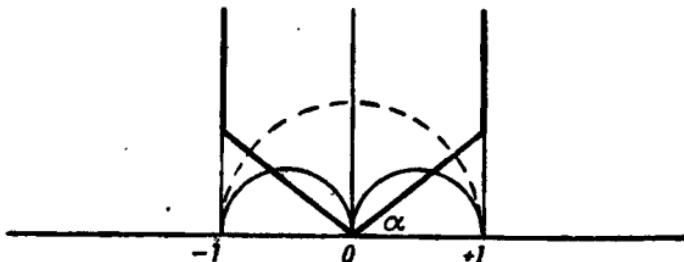
Это неожиданный результат, ибо можно было ожидать лишь, что растяжение удовлетворяет условию Гельдера.



Рассмотрим теперь три точки на L , такие, что ζ_3 расположена между ζ_1 и ζ_2 . Тогда $\rho = (z_1 - z_3)/(z_1 - z_2)$ заключено между 0 и 1, а это означает, что τ лежит на мнимой оси. Следовательно, τ^* находится внутри угла

$$2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} K^{-1} \leq \arg \tau^* \leq \pi - 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} K^{-1}.$$

Его выбор можно подчинить еще условию $|\operatorname{Re} \tau^*| \leq 1$, а тогда τ^* находится в следующей области:



Теперь ясно, что $|\rho|$ имеет максимум $C(K)$, и доказана следующая

Теорема 4. Если $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ – произвольные три точки на L , такие, что ζ_3 разделяет ζ_1 и ζ_2 , то

$$\left| \frac{\zeta_3 - \zeta_1}{\zeta_1 - \zeta_2} \right| \leq C(K).$$

Это неравенство можно переписать более симметрично:

$$\left| \zeta_3 - \frac{\zeta_1 + \zeta_2}{2} \right| \leq C(K) |\zeta_1 - \zeta_2|,$$

и в этой форме наибольшее значение $C(K)$ может быть вычислено. Оно соответствует точке e^{ia} и может быть найдено в явном виде.

Е. Обратное утверждение

Докажем, что условие, полученное в последней теореме, является не только необходимым, но и достаточным. Другими словами, верна следующая

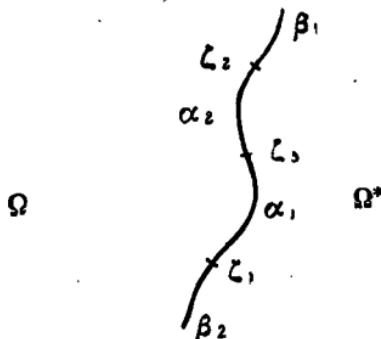
Теорема 5. Для того чтобы кривая L допускала квазиконформное отражение, необходимо и достаточно, чтобы существовала постоянная C , такая, что

$$\left| \frac{\zeta_3 - \zeta_1}{\zeta_2 - \zeta_1} \right| \leq C \quad (1)$$

для любых трех точек L , таких, что ζ_3 лежит между ζ_1 и ζ_2 .

Более точно, если задано K , то C зависит только от K , а если задано C , то существует K -квазиконформное отражение, где K зависит только от C :

Используем обозначения, указанные на рисунке.



Пусть λ_k — экстремальное расстояние¹⁾ от a_k до β_k в Ω , а λ_k^* — соответствующее расстояние в Ω^* . Таким

¹⁾ Экстремальное расстояние от α до β в E — это экстремальная длина семейства кривых, соединяющих α и β в E .

образом, $\lambda_1 \lambda_2 = 1$, $\lambda_1^* \lambda_2^* = 1$. Пусть $\zeta_1, \zeta_3, \zeta_2$ — прообразы точек $x-t, x, x+t$ при конформном отображении области Ω . Это означает, что $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Точки $\zeta_1, \zeta_3, \zeta_2$ преобразуются в точки $h(x-t), h(x), h(x+t)$ при конформном отображении области Ω^* . Если мы покажем, что λ_1^* ограничено, то отсюда немедленно будет следовать, что h удовлетворяет M -условию, и, значит, существует квазиконформное отражение.

Сначала покажем, что из $\lambda_1 = 1$ вытекают неравенства

$$C^{-2}e^{-2\pi} \leq \frac{|\zeta_2 - \zeta_1|}{|\zeta_3 - \zeta_2|} \leq C^2 e^{2\pi}. \quad (2)$$

Действительно, из (1) следует, что точки из β_2 находятся на расстоянии $\geq C^{-1}|\zeta_2 - \zeta_1|$ от ζ_2 , в то время как точки из α_2 находятся на расстоянии $\leq C|\zeta_3 - \zeta_2|$ от ζ_2 . Если бы оценка сверху в (2) не имела места, то α_2 и β_2 разделялись бы круговым кольцом, отношение радиусов которого равно $e^{2\pi}$. В таком кольце экстремальное расстояние между его граничными окружностями равно 1, и, сравнивая экстремальные длины, мы получили бы, что $\lambda_2 > 1$ вопреки предположению. Этим доказана справедливость оценки сверху; оценку снизу мы получим, меняя местами ζ_1 и ζ_3 .

Рассмотрим теперь точки $\zeta \in \alpha_2, \zeta' \in \beta_2$. Повторное применение неравенства (1) дает

$$|\zeta - \zeta'| \geq C^{-1}|\zeta - \zeta_1| \geq C^{-2}|\zeta_1 - \zeta_2|,$$

откуда с помощью (2) мы заключаем, что кратчайшее расстояние между α_2 и β_2 не меньше, чем $C^{-4}e^{-2\pi}|\zeta_2 - \zeta_3|$. Для упрощения обозначений положим

$$M_1 = C|\zeta_2 - \zeta_3|, \quad M_2 = C^{-4}e^{-2\pi}|\zeta_2 - \zeta_3|.$$

В силу (1) все точки из α_2 находятся на расстоянии, не превосходящем M_1 , от точки ζ_2 .

Пусть Γ^* — семейство всех дуг в Ω^* , соединяющих α_2 и β_2 . Тогда

$$\lambda_2^* = \lambda(\Gamma^*) \geq \frac{L(\rho)^2}{A(\rho)},$$

где ρ — произвольная допустимая функция (см. гл. I, D). Положим $\rho = 1$ в круге $\{|\zeta - \zeta_2| \leq M_1 + M_2\}$ и $\rho = 0$ вне этого круга. Тогда $L_\gamma(\rho) \geq M_2$ для всех кривых $\gamma \in \Gamma^*$, независимо от того, остается или нет кривая γ внутри упомянутого круга. Отсюда мы заключаем, что

$$\lambda_2^* \geq \frac{1}{\pi} \left(\frac{M_2}{M_1 + M_2} \right)^2.$$

Но так как $\lambda_1^* \lambda_2^* = 1$, то λ_1^* не превосходит некоторой константы, что и доказывает теорему.

Глава V

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ

A. Два интегральных оператора

Займемся теперь доказательством существования квазиконформных отображений f с данным комплексным отклонением μ_f . Иначе говоря, мы будем рассматривать решения уравнения Бельтрами

$$f_z = \mu f_{z\bar{z}}, \quad (1)$$

где μ — измеримая функция и $|\mu| \leq k < 1$ почти всюду. Решение f должно быть топологическим, а f_z и $f_{z\bar{z}}$, понимаемые как обобщенные производные, — локально интегрируемыми. Напомним, что, как было показано в главе II, они будут также и локально интегрируемыми с квадратом. На самом деле они оказываются принадлежащими (локально) L^p и для любого $p > 2$.

Введем оператор P , действующий на функции $h \in L^p$, $p > 2$ (относительно всей плоскости) по формуле

$$Ph(\xi) = -\frac{1}{\pi} \int \int h(z) \left(\frac{1}{z-\xi} - \frac{1}{z} \right) dx dy. \quad (2)$$

(Все интегралы берутся по всей плоскости.)

Лемма 1. *Функция Ph непрерывна и удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $1 - \frac{2}{p}$.*

Интеграл (2) сходится, поскольку $h \in L^p$ и $\zeta/(z(z-\xi)) \in L^q$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. В самом деле, $1 < q < 2$, а для каждого такого показателя интеграл от $|z(z-\xi)|^{-q}$ сходится в точках 0, $\zeta (\neq 0)$ и ∞ . Из неравенства Гёльдера при $\zeta \neq 0$ получаем

$$|Ph(\xi)| \leq \frac{|\zeta|}{\pi} \|h\|_p \left\| \frac{1}{z(z-\xi)} \right\|_q.$$

При помощи замены переменной найдем, что

$$\int \int |z(z-\zeta)|^{-q} dx dy = |\zeta|^{2-2q} \int \int |z(z-1)|^{-q} dx dy$$

и

$$|Ph(\zeta)| \geq K_p \|h\|_p |\zeta|^{1-\frac{2}{p}}, \quad (3)$$

где константа K_p зависит только от p . (Если $\zeta = 0$, то неравенство (3) тривиально выполняется.)

Применим этот результат к функции $h_1(z) = h(z + \zeta_1)$. Поскольку

$$\begin{aligned} Ph_1(\zeta_2 - \zeta_1) &= -\frac{1}{\pi} \int h(z + \zeta_1) \left(\frac{1}{z + \zeta_1 - \zeta_2} - \frac{1}{z} \right) dx dy = \\ &= -\frac{1}{\pi} \int h(z) \left(\frac{1}{z - \zeta_2} - \frac{1}{z - \zeta_1} \right) dx dy = Ph(\zeta_2) - Ph(\zeta_1), \end{aligned}$$

мы получаем

$$|Ph(\zeta_1) - Ph(\zeta_2)| \leq K_p \|h\|_p |\zeta_1 - \zeta_2|^{1-\frac{2}{p}}, \quad (4)$$

что и утверждает лемма.

Второй оператор, который мы обозначим буквой T , определим вначале для функций $h \in C_0^2$ (функций из C^2 с компактным носителем) как главное значение в смысле Коши

$$Th(\zeta) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ -\frac{1}{\pi} \int \int_{|z-\zeta|>\varepsilon} \frac{h(z)}{(z-\zeta)^2} dx dy \right\}. \quad (5)$$

Докажем следующее утверждение:

Лемма 2. Для $h \in C_0^2$ функция Th существует и принадлежит классу C^1 . Кроме того,

$$\begin{aligned} (Ph)_{\bar{z}} &= h, \\ (Ph)_z &= Th \end{aligned} \quad (6)$$

и

$$\int \int |Th|^2 dx dy = \int \int |h|^2 dx dy. \quad (7)$$

Доказательство. Начнем с того, что проверим справедливость соотношения (6) при более слабом предположении $h \in C_0^1$. Легко убедиться в том, что

$$(Ph)_{\bar{z}} = -\frac{1}{\pi} \iint \frac{h_{\bar{z}}}{z-\zeta} dx dy, \quad (8)$$

$$(Ph)_z = -\frac{1}{\pi} \iint \frac{h_z}{z-\zeta} dx dy.$$

Обозначим через γ_e окружность с центром ζ радиуса e . Используя формулу Стокса, найдем, что

$$-\frac{1}{\pi} \iint \frac{h_{\bar{z}}}{z-\zeta} dx dy = \frac{1}{2\pi i} \iint \frac{h_{\bar{z}}}{z-\zeta} dz d\bar{z} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \iint \frac{dh dz}{z-\zeta} = \lim_{e \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_e} \frac{h dz}{z-\zeta} = h(\zeta)$$

и

$$-\frac{1}{\pi} \iint \frac{h_z}{z-\zeta} dx dy = \frac{1}{2\pi i} \iint \frac{dh d\bar{z}}{z-\zeta} =$$

$$= \lim_{e \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_e} \frac{h d\bar{z}}{z-\zeta} + \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-\zeta|=e} \int \frac{h dz d\bar{z}}{(z-\zeta)^2} \right] = Th(\zeta).$$

Мы доказали соотношения (6).

Заметим, что формулы (8) можно записать в виде

$$P(h_{\bar{z}}) = h - h(0), \quad (9)$$

$$P(h_z) = Th - Th(0).$$

Предполагая, что $h \in C_0^2$, применим (6) к h_z , после чего, используя второе из равенств (9), получим

$$(Th)_z = P(h_z)_{\bar{z}} = h_z, \quad (10)$$

$$(Th)_z = P(h_z)_z = Th_z = P(h_{zz}) + Th_z(0).$$

Эти соотношения показывают, что $Th \in C^1$, $Ph \in C^2$.

Так как h имеет компактный носитель, то непосредственно из определений вытекает, что $Ph = O(1)$ и $Th = O(|z|^{-2})$ при $z \rightarrow \infty$.

Теперь мы можем считать обоснованными все промежуточные этапы следующей выкладки:

$$\begin{aligned} \int \int |Th|^2 dx dy &= -\frac{1}{2i} \int \int (Ph)_z (\bar{P}h)_{\bar{z}} dz d\bar{z} = \\ &= -\frac{1}{2i} \int \int Ph (\bar{P}h)_{zz} dz d\bar{z} = \frac{1}{2i} \int \int (Ph) h_{\bar{z}} dz d\bar{z} = \\ &= -\frac{1}{2i} \int \int h (Ph)_{\bar{z}} dz d\bar{z} = \int \int |h|^2 dx dy, \end{aligned}$$

которая доказывает изометрию. Лемма полностью доказана.

Функции класса C^2_0 образуют всюду плотное множество в L^2 . По этой причине, а также ввиду только что доказанной изометричности оператора T его можно продолжить по непрерывности на все L^2 . К сожалению, мы не можем тем же путем продолжить оператор P , потому что соответствующий интеграл теряет смысл, если h только принадлежит L^2 ; даже при использовании главного значения остаются существенные трудности.

Ключ к их преодолению дает лемма Зигмунда и Кальдерона, в силу которой соотношение изометрии (7) можно заменить неравенством

$$\|Th\|_p \leq C_p \|h\|_p, \quad (11)$$

справедливым для любого $p > 1$, причем $C_p \rightarrow 1$ при $p \rightarrow 2$. Этого, разумеется, достаточно для того, чтобы продолжить T на все L^p , а для $p > 2$ преобразование P задается сходящимся интегралом.

Доказательство неравенства Зигмунда – Кальдерона будет дано в пункте D этой главы. Здесь мы докажем еще одну лемму.

Л е м м а 3. Для $h \in L^p$, $p > 2$, соотношения

$$\begin{aligned} (Ph)_{\bar{z}} &= h, \\ (Ph)_z &= Th \end{aligned} \quad (12)$$

справедливы в смысле теории обобщенных функций.

Мы должны показать, что

$$\begin{aligned} \int \int (Ph) \Phi_{\bar{z}} &= - \int \int \varphi h, \\ \int \int (Ph) \Phi_z &= - \int \int \varphi Th \end{aligned} \quad (13)$$

для всех пробных функций $\varphi \in C_0^1$. Как мы видели, эти соотношения выполняются, если $h \in C_0^2$. Пусть последовательность $h_n \in C_0^2$ сходится к h по норме L^p . Правые части в (13) имеют тогда пределы, поскольку $\|Th - Th_n\|_p \geq C_p \|h - h_n\|_p$. Применяя к левым частям неравенство из леммы 1

$$|P(h - h_n)| \leq K_p \|h - h_n\|_p |z|^{1-\frac{2}{p}}$$

и пользуясь тем, что φ имеет компактный носитель, получаем требуемое утверждение.

B. Решение задачи о существовании отображения

Нас интересует решение уравнения

$$f_{\bar{z}} = \mu f_z, \quad (1)$$

где $\|\mu\|_\infty \leq k < 1$. Обратимся сначала к случаю, когда μ имеет компактный носитель, так что f аналитична в точке ∞ .

Зафиксируем показатель $p > 2$, такой, что $kC_p < 1$.

Теорема 1. Если μ имеет компактный носитель, то существует единственное решение f уравнения (1), такое, что $f(0) = 0$ и $f_z - 1 \in L^p$.

Доказательство. Установим сначала единственность решения. Наше рассуждение подскажет и идею доказательства существования.

Пусть f — решение. Тогда $f_{\bar{z}} = \mu f_z$ принадлежит классу L^p , и поэтому существует $P(f_{\bar{z}})$. Функция

$$F = f - P(f_{\bar{z}})$$

удовлетворяет условию $F_{\bar{z}} = 0$ в смысле теории обобщенных функций.

Следовательно, F аналитична (лемма Вейля). Из условия $f_z - 1 \in L^p$ вытекает, что $F' - 1 \in L^p$, а это возможно только в том случае, когда $F' = 1$, $F = z + a$. Ввиду принятой нормировки $a = 0$, и мы имеем

$$f = P(f_{\bar{z}}) + z. \quad (2)$$

Отсюда следует, что

$$f_z = T(\mu f_z) + 1. \quad (3)$$

Если g — другое решение, то

$$f_z - g_z = T[\mu(f_z - g_z)],$$

откуда в силу неравенства Зигмунда — Кальдерона получаем

$$\|f_z - g_z\|_p \leq kC_p \|f_z - g_z\|_p,$$

а так как $kC_p < 1$, то $f_z = g_z$ почти всюду. Из уравнения Бельтрами получаем также $f_{\bar{z}} = g_{\bar{z}}$. Следовательно, функции $f - g$ и $\bar{f} - \bar{g}$ аналитичны. Разность $f - g$ должна быть константой, и вследствие нормировки $f = g$.

Для доказательства существования изучим уравнение

$$h = T(\mu h) + T\mu. \quad (4)$$

Линейный оператор $h \rightarrow T(\mu h)$ на L^p имеет норму $\leq kC_p < 1$. Поэтому ряд

$$h = T\mu + T\mu T\mu + T\mu T\mu T\mu + \dots \quad (5)$$

сходится в L^p . Сумма его, очевидно, и будет решением уравнения (4).

Если h задается формулой (5), то мы получаем, что функция

$$f = P[\mu(h + 1)] + z \quad (6)$$

является искомым решением уравнения Бельтрами. В самом деле, во-первых, $\mu(h + 1) \in L^p$ (здесь используется предположение о том, что μ имеет компактный носитель), поэтому функция $P[\mu(h + 1)]$ опреде-

лена и непрерывна. Во-вторых, мы получаем

$$\begin{aligned} f_z &= \mu(h+1), \\ f_z &= T[\mu(h+1)] + 1 = h+1 \end{aligned} \tag{7}$$

и $f_z - 1 = h \in L^p$.

Функцию f мы будем называть *нормальным решением* уравнения (1).

Проведем теперь некоторые нужные нам оценки. Из (4) получаем

$$\|h\|_p \leq kC_p \|h\|_p + C_p \|\mu\|_p,$$

откуда

$$\|h\|_p \leq \frac{C_p}{1-kC_p} \|\mu\|_p, \tag{8}$$

а в силу (7) это дает

$$\|f_z\|_p \leq \frac{1}{1-kC_p} \|\mu\|_p. \tag{9}$$

Пользуясь условием Гёльдера для P , из (2) и (9) получаем

$$|f(\zeta_1) - f(\zeta_2)| \leq \frac{K_p}{1-kC_p} \|\mu\|_p |\zeta_1 - \zeta_2|^{1-\frac{2}{p}} + |\zeta_1 - \zeta_2|. \tag{10}$$

Пусть v — другой коэффициент в уравнении Бельтрами, удовлетворяющий тому же неравенству $\|v\|_\infty \leq k < 1$, и пусть g — соответствующее нормальное решение. Имеем

$$f_z - g_z = T(\mu f_z - vg_z)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \|f_z - g_z\|_p &\leq \|T[v(f_z - g_z)]\|_p + \|T[(\mu - v)f_z]\|_p \leq \\ &\leq kC_p \|f_z - g_z\|_p + C_p \|(\mu - v)f_z\|_p. \end{aligned}$$

Предположим, что задана последовательность таких v , сходящаяся к μ почти всюду, и что носители функций v равномерно ограничены. Тогда верна следующая

Лемма 1. $\|g_z - f_z\|_p \rightarrow 0$ и $g \rightarrow f$ равномерно на компактных множествах¹⁾.

Более важно то обстоятельство, что если μ имеет производные, то f тоже их имеет. Чтобы доказать это утверждение, нам понадобится сначала слегка обобщить лемму Вейля:

Лемма 2. Если p и q непрерывны и имеют локально интегрируемые обобщенные производные, удовлетворяющие условию $p_{\bar{z}} = q_z$, то существует функция $f \in C^1$, такая, что $f_z = p$, $f_{\bar{z}} = q$.

Достаточно показать, что

$$\int_{\gamma} p dz + q d\bar{z} = 0$$

для границы γ любого прямоугольника. Произведем сглаживание. Для $\varepsilon > 0$ положим $\delta_\varepsilon(z) = \frac{1}{\pi\varepsilon^2}$ при $|z| \leq \varepsilon$, $\delta_\varepsilon(z) = 0$ при $|z| > \varepsilon$. Свертки $p * \delta_\varepsilon * \delta_{\varepsilon'}$ и $q * \delta_\varepsilon * \delta_{\varepsilon'}$ принадлежат классу C^2 и

$$(p * \delta_\varepsilon * \delta_{\varepsilon'})_{\bar{z}} = (q * \delta_\varepsilon * \delta_{\varepsilon'})_z.$$

Поэтому

$$\int_{\gamma} (p * \delta_\varepsilon * \delta_{\varepsilon'}) dz + (q * \delta_\varepsilon * \delta_{\varepsilon'}) d\bar{z} = 0,$$

откуда, устремляя ε и ε' к нулю, получим требуемое.

Применим этот результат для доказательства следующего утверждения:

Лемма 3. Если μ имеет обобщенную производную μ_z , причем

$$\mu_z \in L^p, \quad p > 2,$$

то отображение f топологическое, причем $f \in C^1$.

¹⁾ Поскольку $f - g$ аналитична в ∞ , сходимость будет на самом деле равномерной во всей плоскости.

Доказательство. Попробуем найти такое λ , чтобы система

$$\begin{aligned} f_z &= \lambda, \\ f_{\bar{z}} &= \mu\lambda \end{aligned} \tag{11}$$

имела решение. Из предыдущей леммы вытекает, что это так в случае, когда

$$\lambda_{\bar{z}} = (\mu\lambda)_z = \lambda_z\mu + \lambda\mu_z, \tag{12}$$

или

$$(\log \lambda)_{\bar{z}} = \mu (\log \lambda)_z + \mu_z.$$

Уравнение

$$q = T(\mu q) + T\mu_z$$

имеет решение $q \in L^p$; положим

$$\sigma = P(\mu q + \mu_z) + \text{const};$$

а постоянную подберем так, чтобы $\sigma \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$. Таким образом, функция σ непрерывна и

$$\sigma_{\bar{z}} = \mu q + \mu_z,$$

$$\sigma_z = T(\mu q + \mu_z) = q.$$

Следовательно, $\lambda = e^\sigma$ удовлетворяет условиям (12), и система (11) имеет решение $f \in C^1$. Мы можем, разумеется, ввести нормировку $f(0) = 0$, и тогда f будет нормальным решением, поскольку $\sigma \rightarrow 0$, $\lambda \rightarrow 1$, $f_z \rightarrow 1$ при $z \rightarrow \infty$.

Якобиан полученного отображения $|f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2 = (1 - |\mu|^2)e^{2\sigma}$ строго положителен. Поэтому отображение локально взаимно однозначно, а так как $f(z) \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow \infty$, то оно является гомеоморфизмом.

Замечание. Нужно еще проверить справедливость равенства $(e^\sigma)_z = e^\sigma \sigma_z$ для обобщенных производных. Для этого заметим, что функцию σ можно аппроксимировать гладкими функциями σ_n так, что $\sigma_n \rightarrow \sigma$ почти всюду и $(\sigma_n)_z \rightarrow \sigma_z$ в L^p (локально). Тогда

для любой пробной функции φ

$$\int e^\sigma \varphi_z = \lim \int e^{\sigma_n} \varphi_z = \lim \left(- \int \varphi e^{\sigma_n} (\sigma_n)_z \right) = - \int \varphi e^\sigma \sigma_z,$$

что и требовалось доказать.

В предположениях леммы 3 обратная функция f^{-1} является также K -квазиконформной с комплексным отклонением $\mu^{-1} = \mu_{f^{-1}}$, причем $|\mu^{-1} \circ f| = |\mu|$.

Оценим величину $\|\mu^{-1}\|_p$. Имеем

$$\begin{aligned} \int \int |\mu^{-1}|^p d\xi d\eta &= \int \int |\mu|^p (|f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2) dx dy \leqslant \\ &\leqslant \int |\mu|^p |f_z|^2 dx dy = \int |\mu|^{p-2} |f_{\bar{z}}|^2 dx dy \leqslant \\ &\leqslant \left(\int |\mu|^p dx dy \right)^{\frac{p-2}{p}} \left(\int |f_{\bar{z}}|^p dx dy \right)^{\frac{2}{p}} \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\|\mu^{-1}\|_p \leqslant (1 - kC_p)^{-2/p} \|\mu\|_p.$$

Применяя оценку (10) к обратной функции, найдем

$$\begin{aligned} |z_1 - z_2| &\leqslant K_p (1 - kC_p)^{-1 - \frac{2}{p}} \|\mu\|_p |f(z_1) - f(z_2)|^{1 - \frac{2}{p}} + \\ &\quad + |f(z_1) - f(z_2)|. \quad (13) \end{aligned}$$

Теперь ясно, как доказывается

Теорема 2. Для любой функции μ , имеющей компактный носитель и удовлетворяющей неравенству $\|\mu\|_\infty \leqslant k < 1$, нормальное решение уравнения Бельтрами есть квазиконформный гомеоморфизм, для которого $\mu_f = \mu$.

Возьмем последовательность функций $\mu_n \in C^1$, таких, что $\mu_n \rightarrow \mu$ почти всюду, $|\mu_n| \leqslant k$ и $\mu_n = 0$ вне некоторого фиксированного круга. Соответствующие нормальные решения f_n удовлетворяют неравенству (13), в котором μ заменено на μ_n . Так как $f_n \rightarrow f$ и $\|\mu_n\|_p \rightarrow \|\mu\|_p$, то отображение f тоже удовлетворяет этому неравенству и, следовательно, является взаимно однозначным.

Напомним теперь результаты главы II. Поскольку отображение f есть предел равномерно сходящейся

последовательности K -квазиконформных отображений f_n , оно само K -квазиконформно. Поэтому оно имеет локально интегрируемые частные производные, которые являются также обобщенными производными. Кроме того, как мы знаем, $f_z \neq 0$ почти всюду, так что $\mu_f = f_{\bar{z}}/f_z$ почти всюду определено и совпадает с μ .

[Между прочим, тот факт, что f отображает множества меры нуль на множества меры нуль, можно доказать значительно проще, чем это было сделано выше. Пусть e — открытое множество конечной меры. Тогда

$$\begin{aligned} \text{mes } f_n(e) &= \int_e (|(f_n)_z|^2 - |(f_n)_{\bar{z}}|^2) dx dy \leqslant \\ &\leqslant \int \int |(f_n)_z|^2 dx dy \leqslant \left(\int |(f_n)_z|^p \right)^{\frac{2}{p}} (\text{mes } e)^{1-\frac{2}{p}}, \end{aligned}$$

а так как нормы $\|(f_n)_z\|_p$ ограничены, мы заключаем, что функция f действительно является абсолютно непрерывной относительно плоской меры.]

Избавимся теперь от предположения, что μ имеет компактный носитель.

Теорема 3. Для любой измеримой μ , такой, что $\|\mu\|_\infty < 1$, существует единственное нормированное квазиконформное отображение f^μ , комплексное отклонение которого равно μ и для которого точки $0, 1, \infty$ являются неподвижными.

Доказательство. 1) Если μ имеет компактный носитель, то достаточно нормировать f .

2) Пусть $\mu = 0$ в окрестности точки 0 . Положим

$$\tilde{\mu}(z) = \mu\left(\frac{1}{z}\right) \frac{z^2}{\bar{z}^2}.$$

Тогда $\tilde{\mu}$ имеет компактный носитель. Мы утверждаем, что

$$f^\mu(z) = \frac{1}{f^\mu\left(\frac{1}{z}\right)}.$$

Действительно,

$$f_z^\mu(z) = \frac{1}{f_z^{\bar{\mu}}\left(\frac{1}{z}\right)^2} \cdot \frac{1}{z^2} \cdot f_z^{\bar{\mu}}\left(\frac{1}{z}\right),$$

$$f_{\bar{z}}^\mu(z) = \frac{1}{f_{\bar{z}}^{\bar{\mu}}\left(\frac{1}{z}\right)^2} \cdot \frac{1}{\bar{z}^2} \cdot f_{\bar{z}}^{\bar{\mu}}\left(\frac{1}{z}\right).$$

Замечание. Вычисления законны, поскольку f_z^μ дифференцируема почти всюду.

3) Рассматривая общий случай, положим $\mu = \mu_1 + \mu_2$, где $\mu_1 = 0$ в окрестности точки ∞ , а $\mu_2 = 0$ в окрестности точки 0. Подберем λ , для которого

$$f^\lambda \circ f^{\mu_2} = f^\mu, \quad f^\lambda = f^\mu \circ (f^{\mu_2})^{-1}.$$

В главе I было показано, что эти соотношения выполняются для

$$\lambda = \left[\left(\frac{\mu - \mu_2}{1 - \mu \bar{\mu}_2} \right) \left(\frac{f_z^{\mu_2}}{f_{\bar{z}}^{\mu_2}} \right) \right] \circ (f^{\mu_2})^{-1},$$

а такое λ имеет компактный носитель. Тем самым теорема доказана и в общем случае.

Теорема 4. В тех же предположениях существует квазиконформное отображение верхней полуплоскости на себя с неподвижными точками 0, 1, ∞ , имеющее данное комплексное отклонение μ .

Продолжим μ на нижнюю полуплоскость, полагая

$$\hat{\mu}(z) = \overline{\mu(\bar{z})}.$$

Из свойства единственности решения вытекает, что $f_z^\mu(\bar{z}) = \overline{f_z^\mu(z)}$. Поэтому действительная ось отображается на себя, и, следовательно, верхняя полуплоскость тоже отображается на себя.

Следствие. Любое квазиконформное отображение может быть представлено в виде суперпозиции конечного числа квазиконформных отображений, отклонения которых сколь угодно близки к 1.

Можно считать, что $f = f^\mu$ задано как квазиконформное отображение всей плоскости. Каждой точке z сопоставим неевклидову геодезическую, соединяющую точки 0 и $\mu(z)$, разделим эту геодезическую на n одинаковых по длине частей и обозначим последовательные точки деления $\mu_k(z)$. Положим

$$f_k = f^{\mu_k}.$$

Тогда

$$\mu_{(f_{k+1} \circ f_k^{-1})} = \left(\frac{\mu_{k+1} - \mu_k}{1 - \mu_{k+1}\bar{\mu}_k} \frac{(f_k)_z}{(f_k)_{\bar{z}}} \right) \circ f_k^{-1}.$$

Если f^μ является K -квазиконформным, то ясно, что $g_k = f_{k+1} \circ f_k^{-1}$ будет $K^{1/n}$ -квазиконформным, причем

$$f = g_n \circ \dots \circ g_2 \circ g_1.$$

C. Зависимость от параметров

В дальнейшем f^μ всегда будет обозначать решение уравнения Бельтрами, имеющее точки $0, 1, \infty$ неподвижными. Нам понадобится следующая

Лемма. *Если $k = \|\mu\|_\infty \rightarrow 0$, то $\|f_z^\mu - 1\|_{1,p} \rightarrow 0$ для всех p .*

(Символ $\|\cdot\|_{R,p}$ обозначает p -норму по кругу $|z| \leq R$.)

Предположим сначала, что μ имеет компактный носитель, и пусть F^μ — нормальное решение, получаемое по теореме 1. Как мы знаем, $h = F_z^\mu - 1$ находится из уравнения

$$h = T(\mu h) + T\mu,$$

из которого вытекает, что $\|h\|_p \leq C_p \|\mu\|_p \rightarrow 0$. Здесь p можно взять произвольно, а условие $kC_p < 1$ будет выполняться для достаточно малых k .

Так как $f^\mu = F^\mu / F^\mu(1)$ и $F^\mu(1) \rightarrow 1$, то утверждение леммы доказано, если все μ имеют компактные носители.

Положим $\tilde{f}(z) = 1/f\left(\frac{1}{z}\right)$. Тогда $\|\tilde{f}_z - 1\|_{1,p} \rightarrow 0$, если μ имеет компактный носитель. Снова достаточно доказать соответствующее утверждение для нормального решения F^μ . Имеем

$$\int \int_{|z|<1} |\tilde{F}_z - 1|^p dx dy = \int \int_{|z|>1} \left| \frac{z^2 F_z(z)}{F(z)^2} - 1 \right|^p \frac{dx dy}{|z|^4}.$$

Последний интеграл разобьем на два интеграла и один из них, а именно $\int \int_{1<|z|<R}$, запишем в виде

$$\int \int_{1<|z|<R} \left| \frac{z^2 (F_z(z) - 1)}{F(z)^2} + \frac{z^2}{F(z)^2} - 1 \right|^p \frac{dx dy}{|z|^4}.$$

Поскольку $\|F_z - 1\|_{R,p} \rightarrow 0$, этот интеграл стремится к нулю. Но для $|z|>R$ функцию F можно считать аналитической и, следовательно, $F(z) \rightarrow z$ равномерно.

В общем случае мы можем положить $f = \check{g} \circ h$, где $\mu_h = \mu_f$ внутри единичного круга и h аналитична вне этого круга. Тогда μ_h и μ_g ограничены константой k и имеют компактный носитель. Так как

$$f_z = (\check{g}_z \circ h) h_z + (\check{g}_z \circ h) \bar{h}_z = (\check{g}_z \circ h) h_z,$$

то мы получаем

$$\|f_z - 1\|_{1,p} \leq \|[(\check{g}_z - 1) \circ h] h_z\|_{1,p} + \|h_z - 1\|_{1,p}.$$

Для первого интеграла находим:

$$\begin{aligned} \int \int_{|z|<1} |(\check{g}_z - 1) \circ h|^p |h_z|^p dx dy &\leq \\ &\leq \frac{1}{1-k^2} \int \int_{h\{|z|<1\}} |\check{g}_z - 1|^p |h_z \circ h^{-1}|^{p-2} dx dy \leq \\ &\leq \frac{1}{1-k^2} \left(\int \int_{h\{|z|<1\}} |\check{g}_z - 1|^{2p} dx dy \int \int_{|z|<1} |h_z|^{2p-4} dx dy \right)^2 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Один из полученных интегралов берется по области несколько большей, нежели единичный круг, но это обстоятельство не имеет значения. Лемма доказана.

Предположим теперь, что μ зависит от действительного или комплексного параметра t и что

$$\mu(z, t) = tv(z) + te(z, t),$$

где v и e принадлежат L^∞ , причем $\|e(z, t)\|_\infty \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$. Мы сейчас покажем, что тогда функция $f^\mu = f(z, t)$ имеет производную по t в точке $t = 0$.

Для любого $|\zeta| < 1$ можно написать

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f(z) dz}{z - \zeta} - \frac{1}{\pi} \int_{|z|<1} \int \frac{f_z(z)}{z - \zeta} dx dy$$

(формула Помпейю). Заменим здесь в криволинейном интеграле z на $\frac{1}{z}$. Это дает

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f(1/z) dz}{z(1 - z\zeta)} &= A + B\zeta + \frac{\zeta^2}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{z dz}{(1 - z\zeta) f(z)} = \\ &= A + B\zeta - \frac{\zeta^2}{\pi} \int_{|z|<1} \int \frac{f_z(z) z dx dy}{f(z)^2 (1 - z\zeta)}. \end{aligned}$$

Сходимость интегралов будет обеспечена, если t взять настолько малым, чтобы иметь $K < 2$. Действительно, функция, обратная к f , удовлетворяет условию Гельдера с показателем $1/K$. Поэтому для достаточно малых $|z|$ справедливо неравенство $|f(z)| > m|z|^K$ и, следовательно, при $\delta \rightarrow 0$

$$\int_{|z|=\delta} \frac{|z| |dz|}{|1 - z\zeta| |f(z)|} = O(\delta^{2-K}) \rightarrow 0.$$

Постоянные A и B можно определить из условий нормировки $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Учитывая все это, получаем

$$\begin{aligned} f(\zeta) &= \zeta - \frac{1}{\pi} \int_{|z|<1} \int f_z(z) \left(\frac{1}{z - \zeta} - \frac{\zeta}{z - 1} + \frac{\zeta - 1}{z} \right) dx dy - \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_{|z|<1} \int \frac{f_z(z)}{f(z)^2} \left(\frac{\zeta^2 z}{1 - z\zeta} - \frac{\zeta z}{1 - z} \right) dx dy. \end{aligned}$$

В первом интеграле положим

$$f_z = \mu f_z = \mu (f_z - 1) + \mu,$$

а также воспользуемся соответствующим соотношением для f_z при $\mu(z) = (z/\bar{z})^2 \mu(1/z)$. Поскольку

$$\|f_z - 1\|_{1,p} \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \frac{\mu}{t} \rightarrow v,$$

мы получаем

$$\begin{aligned} f(\zeta) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\zeta) - \zeta}{t} = \\ &= -\frac{1}{\pi} \int \int_{|z|<1} v(z) \left(\frac{1}{z-\zeta} - \frac{\zeta}{z-1} + \frac{\zeta-1}{z} \right) dx dy - \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int \int_{|z|<1} v\left(\frac{1}{z}\right) \frac{1}{\bar{z}^2} \left(\frac{\zeta^2 z}{1-z\zeta} - \frac{\zeta z}{1-z} \right) dx dy. \end{aligned}$$

Сходимость будет, очевидно, равномерной на любом компактном подмножестве круга $|\zeta| < 1$.

Наконец, выбирая во втором из только что написанных интегралов в качестве переменной интегрирования $1/z$, получим то же подинтегральное выражение, что и в первом из них, откуда

$$f(\zeta) = -\frac{1}{\pi} \int \int v(z) R(z, \zeta) dx dy,$$

где

$$R(z, \zeta) = \frac{1}{z-\zeta} - \frac{\zeta}{z-1} + \frac{\zeta-1}{z} = \frac{\zeta(\zeta-1)}{z(z-1)(z-\zeta)}.$$

Рассматривая функцию $f(rz)$, мы легко проверяем, что полученная формула справедлива для всех ζ и что сходимость равномерна на компактных множествах.

Теперь возьмем произвольное t_0 и предположим, что

$$\mu(t) = \mu(t_0) + v(t_0)(t - t_0) + o(t - t_0)$$

в том же смысле, что и раньше; рассмотрим функцию

$$f^{\mu(t)} = f^\lambda \circ f^{\mu(t_0)},$$

где

$$\lambda = \lambda(t) = \left(\frac{\mu(t) - \mu(t_0)}{1 - \mu(t)\bar{\mu}(t_0)} \cdot \frac{f_z^{\mu_0}}{\bar{f}_z^{\mu_0}} \right) \circ (f^{\mu_0})^{-1}.$$

Ясно, что $\lambda(t) = (t - t_0) \dot{\lambda}(t_0) + o(t - t_0)$, где

$$\dot{\lambda}(t_0) = \left(\frac{v(t_0)}{1 - |\mu_0|^2} \cdot \frac{f_z^{\mu_0}}{\bar{f}_z^{\mu_0}} \right) \circ (f^{\mu_0})^{-1},$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f(z, t) &= \dot{f} \circ f^{\mu_0} = \\ &= -\frac{1}{\pi} \int \int \left(\frac{v(t_0)}{1 - |\mu_0|^2} \cdot \frac{f_z^{\mu_0}}{\bar{f}_z^{\mu_0}} \right) \circ (f^{\mu_0})^{-1} R(z, f^{\mu_0}(\zeta)) dx dy = \\ &= -\frac{1}{\pi} \int \int v(t_0, z) (f_z^{\mu_0})^2 R(f^{\mu_0}(z), f^{\mu_0}(\zeta)) dx dy. \end{aligned}$$

Следующая теорема подытоживает полученные результаты.

Теорема 5. Предположим, что

$$\mu(t+s)(z) = \mu(t)(z) + s v(t)(z) + s \varepsilon(s, t)(z),$$

где

$$v(t), \mu(t), \varepsilon(s, t) \in L^\infty, \quad \|\mu(t)\|_\infty < 1$$

и $\|\varepsilon(s, t)\|_\infty \rightarrow 0$ при $s \rightarrow 0$.

Тогда

$$f^{\mu(t+s)}(\zeta) = f^{\mu(t)}(\zeta) + t \dot{f}(\zeta, t) + o(s),$$

где

$$\dot{f}(\zeta, t) = -\frac{1}{\pi} \int \int v(t)(z) R(f^{\mu(t)}(z), f^{\mu(t)}(\zeta)) (f_z^{\mu(t)}(z))^2 dx dy,$$

причем сходимость равномерна на компактных множествах.

Более того, если $v(t)$ непрерывна по t (в смысле L^∞), то можно доказать, что $\frac{\partial}{\partial t} f(z, t)$ также непрерывна по t . Достаточно доказать это для случая $t = 0$,

так что нужно убедиться в том, что

$$\int \int v(t, z) (f_z^\mu(z))^2 R(f^\mu(z), f^\mu(\zeta)) dx dy \rightarrow \\ \rightarrow \int \int v(z) R(z, \zeta) dx dy.$$

Пользуясь инверсией, можно записать интеграл по всей плоскости в виде суммы двух интегралов по кругу $|z| \leq 1$ и рассмотреть для них упомянутый предельный переход. Мы ограничимся только первым слагаемым.

Важно, что интересующий нас несобственный интеграл сходится равномерно, т. е. неравенство

$$\int_{\substack{|z-\zeta| < \delta \\ |z| < 1}} |f_z^\mu(z)|^2 |R(f^\mu(z), f^\mu(\zeta))| dx dy < \varepsilon$$

выполняется при малых δ равномерно относительно параметра. В самом деле, этот интеграл сравним с интегралом

$$\int \int_{f^\mu \{z: |z-\zeta| < \delta\}} |R(z, f^\mu(\zeta))| dx dy,$$

а в нем область интегрирования можно заменить кругом с центром $f^\mu(\zeta)$ радиуса $< 2\delta$. Значение интеграла будет поэтому порядка $O(\delta)$ (равномерно относительно параметра).

Для остальной части плоскости (при фиксированном δ) разность

$$\int \int |f_z^\mu(z)|^2 |R(f^\mu(z), f^\mu(\zeta)) v(t, z) - R(z, \zeta) v(z)| dx dy,$$

очевидно, стремится к 0, и ясно также, что

$$\int \int |f_z^\mu(z)^2 - 1| |R(z, \zeta) v(z)| dx dy \rightarrow 0,$$

поскольку $\|f^\mu - 1\|_p \rightarrow 0$, а второй сомножитель ограничен.

D. Неравенство Зигмунда — Кальдерона

Перейдем к доказательству того, что оператор

$$Th(\xi) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ -\frac{1}{\pi} \int \int_{|z-\xi| > \epsilon} \frac{h(z)}{(z-\xi)^2} dx dy \right\},$$

определенный ранее для функций $h \in C_0^2$, можно продолжить на пространство L^p , $p \geq 2$, так что

$$\| Th \|_p \leq C_p \| h \|_p. \quad (1)$$

Сначала докажем одномерный аналог этого утверждения, принадлежащий Риссу. Доказательство взято из книги Зигмунда¹⁾.

Л е м м а. *Пусть функция f определена на действительной оси и $f \in C_0^1$. Положим*

$$Hf(\xi) = V.P. \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x-\xi} dx.$$

Тогда $\| Hf \|_p \leq A_p \| f \|_p$ ($p \geq 2$), причем $A_2 = 1$.

Доказательство. Положим

$$F(\xi) = u + iv = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x-\xi} dx,$$

$$\xi = \xi + i\eta, \quad \eta > 0.$$

Мнимая часть v представляет собой интеграл Пуассона, и ясно, что

$$v(\xi) = f(\xi).$$

Преобразуем действительную часть:

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-\xi}{(x-\xi)^2 + \eta^2} f(x) dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{f(\xi+x) - f(\xi-x)}{x} \cdot \frac{x^2}{x^2 + \eta^2} dx \rightarrow Hf(\xi) \text{ при } \eta \rightarrow 0. \end{aligned}$$

¹⁾ Русский перевод: Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М. — Л., 1939 (первое издание); „Мир“, М., 1965 (второе издание).

Теперь заметим, что

$$\Delta|u|^p = p(p-1)|u|^{p-2}(u_x^2 + u_y^2),$$

$$\Delta|v|^p = p(p-1)|v|^{p-2}(u_x^2 + u_y^2),$$

$$\Delta|F|^p = p^2|F|^{p-2}(u_x^2 + u_y^2).$$

Отсюда

$$\Delta\left(|F|^p - \frac{p}{p-1}|u|^p\right) = p^2(|F|^{p-2} - |u|^{p-2})(u_x^2 + u_y^2) \geq 0.$$

Применяя формулу Стокса к верхнему полукругу



и устремляя его радиус к ∞ , легко найдем, что

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(|F(\xi)|^p - \frac{p}{p-1}|u(\xi)|^p \right) d\xi \leq 0.$$

С другой стороны, легко видеть, что входящий в это выражение интеграл стремится к нулю при $\eta \rightarrow \infty$. Следовательно, для фиксированного $\eta > 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x + i\eta)|^p dx \geq \frac{p}{p-1} \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x + i\eta)|^p dx.$$

Но, как можно заметить,

$$\left(\int |F|^p d\xi \right)^{2/p} = \|u^2 + v^2\|_{p/2} \leq \|u^2\|_{p/2} + \|v^2\|_{p/2}.$$

Поэтому

$$\left(\frac{p}{p-1} \right)^{2/p} \|u^2\|_{p/2} \leq \|u^2\|_{p/2} + \|v^2\|_{p/2},$$

$$\|u^2\|_{p/2} \leq \frac{1}{\left(\left(\frac{p}{p-1} \right)^{2/p} - 1 \right)} \|v^2\|_{p/2},$$

$$\int |u|^p d\xi \leq \frac{1}{\left(\left(\frac{p}{p-1} \right)^{2/p} - 1 \right)^{p/2}} \int |\psi|^p d\xi.$$

При $\eta \rightarrow 0$ это и дает требуемое неравенство.

Продолжим доказательство неравенства Зигмунда — Кальдерона (1), следуя методу, изложенному в книге И. Н. Векуа „Обобщенные аналитические функции“ (Физматгиз, М., 1959).

Определим оператор

$$T^*f(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int \int f(z + \zeta) \frac{dx dy}{z|z|}, \quad f \in C_0^2,$$

где интеграл снова понимается в смысле главного значения. Полагая $z = re^{i\theta}$, запишем правую часть в виде

$$T^*f(\zeta) = \frac{1}{2} \int_0^\pi \left(\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{f(\zeta + re^{i\theta}) - f(\zeta - re^{i\theta})}{r} dr \right) e^{-i\theta} d\theta \right).$$

Отсюда получим

$$\|T^*f\|_p \leq \frac{\pi}{2} \max_\theta \left\| \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{f(\zeta + re^{i\theta}) - f(\zeta - re^{i\theta})}{r} dr \right\|_p.$$

Величина нормы, стоящей в правой части, не изменится, если заменить ζ на $\zeta e^{i\theta}$, а интеграл тогда станет равным $Hf_\theta(\zeta)$, где $f_\theta(z) = f(ze^{i\theta})$. Под нормой в правой части понимается, конечно, двумерная норма. Однако ясно, что может быть использована наша оценка одномерной нормы, ибо

$$\begin{aligned} \|Hf_\theta\|_p^p &= \int \int |Hf_\theta(u + iv)|^p du dv \leq \\ &\leq A_p^p \int dv \int |f_\theta(u + iv)|^p du = A_p^p \|f_\theta\|_p^p, \end{aligned}$$

так что окончательно

$$\|T^*f\|_p \leq \frac{\pi}{2} A_p \|f\|_p.$$

Продолжим T^* на L^p по непрерывности. Доказательство неравенства (1) будет закончено, если мы покажем, что $Tf = -T^*T^*f$ для $f \in C_0^2$. А это, конечно, даст и продолжение по непрерывности оператора T на все L^p .

Имеем $\frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{|z|} = -\frac{1}{2z|z|}$. Для $f \in C_0^1$ получаем

$$\begin{aligned} T^*f(\zeta) &= -\frac{1}{\pi} \int \int f(z + \zeta) \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{|z|} dx dy = \\ &= \frac{1}{\pi} \int \int f_z(z + \zeta) \frac{1}{|z|} dx dy = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial \zeta} \int \int f(z) \frac{dx dy}{|z - \zeta|} = \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial \zeta} \int \int f(z) \left(\frac{1}{|z - \zeta|} - \frac{1}{|z|} \right) dx dy. \quad (2) \end{aligned}$$

Отсюда следует, что для любой пробной функции φ

$$\begin{aligned} \int \int T^*f(\zeta) \varphi_\zeta(\zeta) d\xi d\eta &= \\ &= -\frac{1}{\pi} \int \int \int \int f(z) \left(\frac{1}{|z - \zeta|} - \frac{1}{|z|} \right) \varphi(\zeta) dx dy d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Последнее равенство остается в силе и для функций $f \in L^p$, потому что интеграл в правой части будет абсолютно сходящимся (ср. с доказательством для Pf). Это означает, что соотношения (2) справедливы в смысле теории обобщенных функций.

Теперь мы можем написать

$$\begin{aligned} T^*T^*f(w) &= \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial w} \int \int T^*f(\zeta) \left(\frac{1}{|\zeta - w|} - \frac{1}{|\zeta|} \right) d\xi d\eta = \\ &= \frac{1}{\pi^2} \frac{\partial}{\partial w} \left[\int \int \left(\frac{1}{|\zeta - w|} - \frac{1}{|\zeta|} \right) d\xi d\eta \int \int \frac{f_z dx dy}{|z - \zeta|} \right] = \\ &= \frac{1}{\pi^2} \frac{\partial}{\partial w} \left[\int \int f_z dx dy \int \int \frac{1}{|z - \zeta|} \left(\frac{1}{|\zeta - w|} - \frac{1}{|\zeta|} \right) d\xi d\eta \right] = \\ &= -\frac{1}{\pi^2} \frac{\partial}{\partial w} \int \int f \frac{\partial}{\partial z} \left(\int \int \frac{1}{|z - \zeta|} \left(\frac{1}{|\zeta - w|} - \frac{1}{|\zeta|} \right) d\xi d\eta \right) dx dy. \end{aligned}$$

[Здесь еще требуется исследовать поведение внутреннего интеграла при подходе к точкам $z = 0$ и $z = w$. Он стремится к ∞ как логарифм, а внешний интеграл, взятый по маленькому кругу, стремится к 0.] Подсчитаем производную

$$\frac{\partial}{\partial z} \lim_{R \rightarrow \infty} \int \int_{|\zeta - w| < R} \frac{1}{|z - \zeta|} \left(\frac{1}{|\zeta - w|} - \frac{1}{|\zeta|} \right) d\xi d\eta.$$

Знаки дифференцирования и предела можно поменять местами, ибо вполне очевидно, что

$$\frac{\partial}{\partial z} \int \int_{|\zeta-w| > R} \frac{1}{|z-\zeta|} \left(\frac{1}{|\zeta-w|} - \frac{1}{|\zeta|} \right) d\xi d\eta$$

стремится к нулю равномерно на компактных множествах. Более того, рассматриваемое выражение можно записать в виде разности

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \int \int_{|\zeta-w| < R} \frac{1}{|z-w|} \cdot \frac{1}{|\zeta-w|} d\xi d\eta - \\ - \frac{\partial}{\partial z} \int \int_{|\zeta| < R} \frac{d\xi d\eta}{|\zeta||z-\zeta|}, \end{aligned}$$

которая равномерно стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$.

Сделаем очевидную замену переменной, чтобы преобразовать первый из интегралов к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \int \int_{|\zeta| < R/|z-w|} \frac{d\xi d\eta}{|\zeta||1-\zeta|} = \frac{\partial}{\partial z} \int_0^{R/|z-w|} \int_0^{2\pi} \frac{dr d\theta}{|1-re^{i\theta}|} = \\ = -\frac{1}{2} \frac{R}{(z-w)|z-w|} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\left| 1 - \frac{Re^{i\theta}}{z-w} \right|}; \end{aligned}$$

легко видеть, что в пределе это дает $-\pi/(z-w)$. Аналогично предел второго интеграла равен $-\pi/z$.

Теперь получаем

$$\begin{aligned} T^*T^*f(w) = \frac{\partial}{\partial w} \left[\frac{1}{\pi} \int \int f(z) \left(\frac{1}{z-w} - \frac{1}{z} \right) dx dy \right] = \\ = -\frac{\partial}{\partial w} Pf(w) = -Tf(w). \end{aligned}$$

Этим заканчивается доказательство неравенства (1).

Остается доказать, что $C_p \rightarrow 1$ при $p \rightarrow 2$. Это свойство вытекает из следующего утверждения.

Теорема Рисса — Торина о выпуклости. Наилучшая константа C_p обладает тем свойством, что $\log C_p$ есть выпуклая функция от $1/p$.

Доказательство. Рассмотрим два значения $p_1 = 1/a_1$ и $p_2 = 1/a_2$, причем $p_1, p_2 \geq 2$. Предположим, что

$$\|Tf\|_{1/a_1} \leq C_1 \|f\|_{1/a_1},$$

$$\|Tf\|_{1/a_2} \leq C_2 \|f\|_{1/a_2}.$$

Достаточно доказать, что для $\alpha = (1-t)a_1 + ta_2$ имеем

$$\|Tf\|_{1/\alpha} \leq C_1^{1-t} C_2^t \|f\|_{1/\alpha} \quad (0 \leq t \leq 1).$$

Пусть α' таково, что α и α' соответствуют сопряженным показателям, так что $\alpha + \alpha' = 1$. Аналогично введем α'_1, α'_2 . Заметим сначала, что

$$\|Tf\|_{1/\alpha} = \sup_g \int Tf \cdot g \, dx \, dy,$$

где верхняя грань берется по всем таким функциям g , норма которых в $L^{1/\alpha'}$ равна 1. Так как простые функции (измеримые функции, принимающие конечное число значений) с компактным носителем плотны в каждом L^p , то, не уменьшая общности, можно предположить, что f и g — такие функции.

Фиксируя две такие функции f и g , положим

$$I = \int Tf \cdot g \, dx \, dy.$$

Идея доказательства заключается в том, чтобы сделать f и g аналитически зависящими от комплексного параметра ζ . Тогда I будет значением аналитической функции $\Phi(\zeta)$, и мы сможем оценить его модуль с помощью принципа максимума.

Для любого комплексного ζ определим функции

$$F(\zeta) = |f|^{\alpha(\zeta)/\alpha} \frac{f}{|f|},$$

$$G(\zeta) = |g|^{\alpha(\zeta)/\alpha'} \frac{g}{|g|},$$

где $\alpha(\zeta) = (1 - \zeta)a_1 + \zeta a_2$ и $\alpha'(\zeta) = 1 - \alpha(\zeta)$. Заметим, что ζ входит в качестве параметра, так как функции $F(\zeta)$ и $G(\zeta)$ зависят и от z . Мы будем считать, что $F(\zeta) = 0, G(\zeta) = 0$, если $f = 0, g = 0$. Следует

заметить еще, что $F(t) = f$, $G(t) = g$. Положим

$$\Phi(\zeta) = \int \int TF(\zeta) \cdot G(\zeta) dx dy.$$

Поскольку $F(\zeta)$ — простая функция, т. е. $F(\zeta) = \sum F_i \chi_i$, где χ_i — характеристическая функция некоторого отрезка, то $TF(\zeta) = \sum F_i T \chi_i$. Аналогично $G(\zeta) = \sum G_j \chi_j$, и мы получаем

$$\Phi(\zeta) = \sum F_i G_j \int \int T \chi_i \cdot \chi_j dx dy.$$

Отсюда следует, что $\Phi(\zeta)$ имеет вид экспоненциального полинома $\Phi(\zeta) = \sum a_i e^{\lambda_i \zeta}$ с действительными λ_i . Следовательно, $\Phi(\zeta)$ ограничена, если ограничена $\xi = \operatorname{Re} \zeta$.

Рассмотрим теперь частные случаи $\xi = 0$ и $\xi = 1$. Для $\xi = 0$ имеем $\operatorname{Re} a(\xi) = a_1$ и, следовательно,

$$|F(\zeta)| = |f|^{a_1/a},$$

$$|G(\zeta)| = |g|^{a'_1/a'}.$$

Это дает

$$\|F(\zeta)\|_{1/a_1} = (\|f\|_{1/a})^{a_1/a},$$

$$\|G(\zeta)\|_{1/a'_1} = (\|g\|_{1/a'})^{a'_1/a'} = 1.$$

Для простоты можно считать, что $\|f\|_{1/a} = 1$ (это всего лишь нормирование).

Получаем

$$|\Phi(\zeta)| \leq \|TF(\zeta)\|_{1/a_1} \|G(\zeta)\|_{1/a'_1} \leq C_1.$$

Из соображений симметрии найдем, что при $\xi = 1$

$$|\Phi(\zeta)| \leq C_2.$$

Отсюда мы заключаем, что

$$\log |\Phi(\zeta)| - (1 - \xi) \log C_1 - \xi \log C_2 \leq 0$$

на границе полосы $0 \leq \xi \leq 1$. Так как функция в левой части субгармонична, неравенство верно для всей полосы, а при $\zeta = t$ это дает требуемый результат.

Глава VI

ПРОСТРАНСТВА ТЕЙХМЮЛЛЕРА

А. Предварительные сведения

Пусть S — риманова поверхность, универсальная накрывающая которой \tilde{S} конформно изоморфна верхней полуплоскости H . Преобразования наложения поверхности \tilde{S} можно представить дробно-линейными преобразованиями полуплоскости H на себя, образующими дискретную подгруппу Γ группы Ω всех таких преобразований. Мы можем написать

$$S = H/\Gamma \text{ (орбиты);}$$

каноническое отображение

$$\pi: H \rightarrow H/\Gamma$$

является комплексно аналитической проекцией H на S .

Сопряженные подгруппы представляют конформно эквивалентные римановы поверхности. В самом деле, если $\Gamma_0 = B_0\Gamma B_0^{-1}$, где $B_0 \in \Omega$, то отображение $z \mapsto B_0 z$ переводит орбиты группы Γ в орбиты группы Γ_0 (так как $B_0 A z = (B_0 A B_0^{-1}) B_0 z$). Поэтому B_0 определяет взаимно однозначное конформное отображение поверхности $S_0 = H/\Gamma_0$ на S .

Обратно, пусть задано топологическое отображение

$$g: S_0 \rightarrow S.$$

Оно порождает топологическое отображение универсальных накрывающих $\tilde{g}: \tilde{S}_0 \rightarrow \tilde{S}$ и, очевидно, удовлетворяет условию

$$\pi \circ \tilde{g} = g \circ \pi_0,$$

т. е. коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\tilde{g}} & H \\ \pi_0 \downarrow & & \downarrow \pi \\ S_0 & \xrightarrow[g]{} & S \end{array}$$

Если g конформно, то \tilde{g} тоже конформно, и мы получаем $\tilde{g} = B_0 \in \Omega$ и $\Gamma_0 = B_0 \Gamma B_0^{-1}$.

Классы конформно эквивалентных римановых поверхностей соответствуют классам сопряженных дискретных подгрупп группы Ω (без эллиптических неподвижных точек).

Но даже если g не конформно, по-прежнему

$$A = \tilde{g} \circ A_0 \circ \tilde{g}^{-1} \in \Gamma,$$

когда $A_0 \in \Gamma_0$, так как

$$\pi \circ A = \pi \circ \tilde{g} \circ A_0 \circ \tilde{g}^{-1} = g \circ \pi_0 \circ A_0 \circ \tilde{g}^{-1} = g \circ \pi_0 \circ \tilde{g}^{-1} = \pi.$$

Иначе говоря, \tilde{g} определяет изоморфизм θ , такой, что

$$A_0^\theta = \tilde{g} \circ A_0 \circ \tilde{g}^{-1}.$$

Этот изоморфизм определяется не вполне однозначно, потому что \tilde{g} можно заменить на $B \circ \tilde{g} \circ B_0$, где $B \in \Gamma$, $B_0 \in \Gamma_0$. Тогда θ заменится на θ' , причем

$$A_0^{\theta'} = B \circ \tilde{g} \circ (B_0 A_0 B_0^{-1}) \circ \tilde{g} \circ B^{-1},$$

которое означает, что θ' является композицией θ с внутренними автоморфизмами групп Γ_0 и Γ . В таком случае будем говорить, что θ и θ' — эквивалентные изоморфизмы.

Л е м м а. *Отображения g_1 и g_2 определяют эквивалентные изоморфизмы θ_1 и θ_2 тогда и только тогда, когда они гомотопны.*

Доказательство. Если g_1 и g_2 гомотопны, то они могут быть деформированы друг в друга с помощью некоторого семейства отображений $g(t)$, непрерывно зависящего от t . Тогда существует и

соответствующее семейство $\tilde{g}(t)$, непрерывно зависящее от t , а поскольку значения

$$A_0^{\theta(t)}(z) = \tilde{g}(t) \circ A_0 \circ \tilde{g}(t)^{-1}$$

составляют дискретное множество, то оно сводится к константе.

Обратно, пусть g_1 и g_2 определяют эквивалентные изоморфизмы θ_1 , θ_2 . Заменой отображений \tilde{g}_1 и \tilde{g}_2 можно добиться того, чтобы θ_1 и θ_2 совпали, а тогда

$$\tilde{g}_2^{-1} \tilde{g}_1 A_0 = A_0 \tilde{g}_2^{-1} \tilde{g}_1.$$

Определим $\tilde{g}(t, z)$ как точку, которая делит неевклидов отрезок, соединяющий точки $\tilde{g}_1(z)$ и $\tilde{g}_2(z)$, в отношении $t : (1 - t)$.

Так как

$$\begin{aligned}\tilde{g}_1(Az) &= A\tilde{g}_1(z), \\ \tilde{g}_2(Az) &= A\tilde{g}_2(z),\end{aligned}\quad A \neq A_0^\theta,$$

то

$$\tilde{g}(t, Az) = A\tilde{g}(t, z).$$

Поэтому $g(t) = \pi \circ \tilde{g}(t) \circ \pi_0^{-1}$ отображает S_0 на S , откуда следует, что g_1 и g_2 гомотопны.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА ТЕЙХМЮЛЛЕРА $T(S_0)$. Рассмотрим все пары (S, f) , где S — риманова поверхность, а f — сохраняющее ориентацию квазиконформное отображение поверхности S_0 на S . Введем эквивалентность: $(S_1, f_1) \sim (S_2, f_2)$, если отображение $f_2 \circ f_1^{-1}$ гомотопно конформному отображению поверхности S_1 на S_2 . Получаемые классы эквивалентности и будут точками пространства $T(S_0)$; а класс, содержащий (S_0, I) , где I — тождественное отображение, называется начальной точкой пространства $T(S_0)$.

Каждое отображение f определяет некоторое квазиконформное отображение \tilde{f} полуплоскости H на себя, а это последнее задает некоторый изоморфизм θ группы Γ_0 . Два изоморфизма соответствуют одной и той же точке пространства Тейхмюллера тогда и только тогда, когда они отличаются лишь внутренним автоморфизмом группы Ω .

Пространство $T(S_0)$ имеет естественную метрику Тейхмюлера: в качестве расстояния между классами, содержащими (S_1, f_1) и (S_2, f_2) , берется величина $\log K$, где K – наименьшее из максимальных отклонений отображений, гомотопных $f_2 \circ f_1^{-1}$.

Сравним теперь $T(S_0)$ и $T(S_1)$. Пусть g – некоторое квазиконформное отображение поверхности S_0 на поверхность S_1 . Тогда отображение

$$(S, f) \rightarrow (S, f \circ g)$$

индуцирует отображение пространства $T(S_1)$ на $T(S_0)$. В самом деле, если $(S, f) \sim (S', f')$, то $(S, f \circ g) \sim \sim (S', f' \circ g)$. А это отображение, очевидно, изометрично.

В. Дифференциалы Бельтрами

Квазиконформное отображение $f: S_0 \rightarrow S$ индуцирует отображение \tilde{f} полуплоскости H на себя, такое, что

$$\tilde{f} \circ A_0 = A \circ \tilde{f}, \quad (1)$$

где $A = A_0^{\theta}$. Обратно, если \tilde{f} удовлетворяет соотношению (1), то оно индуцирует квазиконформное отображение f^1).

Из (1) получаем

$$(A' \circ f) f_z = (\tilde{f}_z \circ A_0) A'_0,$$

$$(A' \circ f) \bar{f}_z = (\tilde{f}_{\bar{z}} \circ A) \bar{A}'_0$$

и, следовательно, комплексное отклонение μ_f удовлетворяет соотношению

$$\mu_f = (\mu_{\tilde{f}} \circ A_0) \bar{A}'_0 / A'_0,$$

или

$$\mu(A_0 z) = \mu(z) A'_0(z) / \overline{A'_0(z)}. \quad (2)$$

¹⁾ Для упрощения записи оба отображения впредь обозначаются через \tilde{f} .

Измеримая и ограниченная (с точностью до множества меры нуль) функция μ , удовлетворяющая соотношению (2) для всех $A_0 \in \Gamma_0$, называется дифференциалом Бельтрами относительно Γ_0 . Это условие можно также выразить так: величина

$$\mu(z) \frac{dz}{dz}$$

инвариантна относительно Γ_0 .

Обратно, если μ_f удовлетворяет соотношению (2), то

$$\mu_{f \circ A} = \mu_f,$$

откуда следует, что $f \circ A_0$ есть аналитическая функция от f , или что преобразование

$$A = f \circ A_0 \circ f^{-1}$$

аналитично и, значит, дробно-линейно.

Линейное пространство дифференциалов Бельтрами обозначим через $B(\Gamma_0)$, а открытый единичный шар относительно нормы L^∞ в этом пространстве — через $B_1(\Gamma_0)$.

Для любого $\mu \in B_1(\Gamma_0)$ существует, как мы знаем, соответствующее отображение f^μ полуплоскости H на себя. Нормируем это отображение так, чтобы точки $0, 1, \infty$ были неподвижными. Тогда оно определится однозначно.

Положим

$$A^\mu = f^\mu \circ A_0 \circ (f^\mu)^{-1}$$

и обозначим через Γ^μ и θ^μ соответствующие группу и изоморфизм.

Так как θ^μ представляет некоторую точку в пространстве Тейхмюллера, то мы получаем тем самым отображение

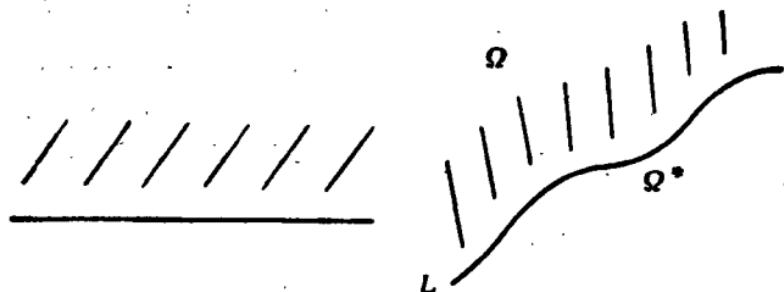
$$B_1(\Gamma_0) \rightarrow T(S_0).$$

Ясно, что это отображение непрерывно относительно введенных в этих пространствах метрик нормы L^∞ и метрики Тейхмюллера.

Очевидно следующее соотношение эквивалентности: $\mu_1 \sim \mu_2$, если изоморфизмы θ^{μ_1} и θ^{μ_2} эквивалентны. Но установить эту эквивалентность прямым сравнением μ_1 и μ_2 очень трудно. Поскольку мы не можем решить задачу в такой глобальной постановке, нам придется довольствоваться решением локально поставленной задачи для инфинитезимальных деформаций.

Прежде чем встать на этот путь, обсудим другой подход, который имеет несколько преимуществ. Отображение f^μ можно получить продолжением μ на нижнюю полуплоскость по симметрии. Если же вместо этого мы продолжим μ на нижнюю полуплоскость тождественным нулем, то получим другое отображение, которое обозначим f_μ (его мы тоже нормируем так, чтобы точки $0, 1, \infty$ были неподвижными).

Ясно, что отображение f_μ квазиконформно в верхней и конформно в нижней полуплоскости. При этом действительная ось отображается на некоторую линию L , допускающую квазиконформное отражение.



Так же, как и раньше, отображение

$$A_\mu = f_\mu \circ A_0 \circ f_\mu^{-1}$$

конформно (потому что оно конформно в Ω и Ω^* и квазиконформно в целом), следовательно, оно дробно-линейно. Мы снова получаем некоторую дискретную группу Γ_μ на $\Omega \cup \Omega^*$. Будем называть ее фуксоидной группой. Кроме того, мы опять получаем некоторую поверхность $\bar{\Omega}/\Gamma_\mu = \bar{S}_0$ и квазиконформное отображение $\bar{S}_0 \rightarrow S$, а также конформное отображение $\bar{S}_0 \rightarrow \Omega^*/\Gamma_\mu$.

где \bar{S}_0 имеет сопряженную по отношению к S_0 комплексную структуру.

Заметим, что f^μ и f_μ определены для всех $\mu \in L^\infty$, таких, что $\|\mu\|_\infty < 1$ ($\mu \in B_1$), даже если группа Γ_0 сводится к тривиальной. Обратимся теперь к доказательству следующей леммы:

Лемма 1. Равенство $f^\mu = f^\nu$ имеет место для всех точек действительной оси тогда и только тогда, когда для них (i , значит, во всей нижней полуплоскости H^*) справедливо равенство $f_\mu = f_\nu$.

Доказательство. 1) Равенство $f_\mu = f_\nu$ на действительной оси справедливо в том и только в том случае, когда $f_\mu(H)$ и $f_\nu(H)$ совпадают. Следовательно,

$$f_\mu \circ (f^\mu)^{-1} = f_\nu \circ (f^\nu)^{-1},$$

ибо правая и левая части здесь представляют собой нормированные конформные отображения полуплоскости H на одну и ту же область.

2) Предположим, что $f^\mu = f^\nu$ на действительной оси. Тогда отображение $h = (f^\nu)^{-1} \circ f^\mu$ сводится к тождественному на действительной оси, так что h можно продолжить до квазиконформного отображения всей плоскости, если, например, положить $h(z) = z$ в нижней полуплоскости H^* . Рассмотрим теперь квазиконформное отображение $A = f_\nu \circ h \circ (f_\mu)^{-1}$. Оно конформно в $f_\mu(H^*)$, потому что там $A = f_\nu \circ (f_\mu)^{-1}$. Но оно также конформно в $f_\mu(H)$, так как в этом случае

$$A = f_\nu \circ (f^\nu)^{-1} \circ f^\mu \circ (f_\mu)^{-1}.$$

Следовательно, преобразование A дробно-линейно, и указанная выше нормировка сводит его к тождественному. Поэтому $f_\nu = f_\mu$ в H^* , что и требовалось доказать.

Предположим теперь, что группа Γ_0 — первого рода, т. е. не дискретна ни в какой точке действительной оси. Тогда, как известно, орбиты плотны на

действительной оси. В частности, плотно расположены неподвижные точки. При этих условиях справедлива

Лемма 2. *Функции μ_1 и μ_2 из $B(\Gamma_0)$ определяют одну и ту же точку в пространстве Тейхмюллера в том и только в том случае, когда $f^{\mu_1} = f^{\mu_2}$ на действительной оси.*

Доказательство. Если $f^{\mu_1} = f^{\mu_2}$ на действительной оси, то функции A^{μ_1} и A^{μ_2} принимают на ней одинаковые значения и, следовательно, совпадают тождественно. Поэтому $\theta^{\mu_1} = \theta^{\mu_2}$, и μ_1 и μ_2 определяют одну и ту же точку в пространстве Тейхмюллера.

Обратно, пусть изоморфизмы θ^{μ_1} и θ^{μ_2} эквивалентны. Это означает, что существует дробно-линейное преобразование $S \in \Omega$, такое, что

$$A^{\mu_2} \circ S = S \circ A^{\mu_1} \quad \text{для всех } A \in \Gamma_0.$$

Отсюда мы заключаем, что S переводит неподвижные точки преобразования A^{μ_1} в неподвижные точки преобразования A^{μ_2} (притягивающие в притягивающие). Так как они соответствуют друг другу, то на действительной оси имеет место равенство

$$S \circ f^{\mu_1} = f^{\mu_2}.$$

В силу принятой нормировки преобразование S должно быть тождественным, что и доказывает лемму.

Следствие. *Если группа Γ_0 – первого рода, то μ_1 и μ_2 определяют одну и ту же точку в пространстве Тейхмюллера в том и только в том случае, когда*

$$f_{\mu_1} = f_{\mu_2} \quad \text{в } H^*.$$

Тем самым пространство Тейхмюллера $T(S_0)$ отождествляется с пространством конформных отображений нижней полуплоскости H^* , имеющих вид f_μ , $\mu \in B_1(\Gamma_0)$.

Еще лучшая характеристика пространства Тейхмюллера получается при помощи производной

Шварца

$$\{f_\mu, z\} = \frac{f'''_\mu}{f'_\mu} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''_\mu}{f'_\mu} \right)^2.$$

Напомним ее свойства, относящиеся к сложным функциям. Дифференцированием функции

$$F(z) = f(\zeta(z))$$

получим

$$F'(z) = f'(\zeta) \zeta'(z),$$

$$\frac{F''}{F'} = \frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} \zeta' + \frac{\zeta''}{\zeta'},$$

$$\begin{aligned} \frac{F'''}{F'} - \left(\frac{F''}{F'} \right)^2 &= \left(\frac{f'''(\zeta)}{f'(\zeta)} - \left(\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} \right)^2 \right) \zeta'^2 + \\ &\quad + \frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} \zeta'' + \frac{\zeta'''}{\zeta'} - \left(\frac{\zeta''}{\zeta'} \right)^2, \end{aligned}$$

$$\{F, z\} = \{f, \zeta\} \zeta'(z)^2 + \{\zeta, z\}.$$

Для удобства записи обозначим производную Шварца символом $[f]$. Полученная формула примет вид

$$[f \circ g] = ([f] \circ g)(g')^2 + [g].$$

Остановимся на двух частных случаях. Если A — дробно-линейное преобразование, то при $f = A$ получим

$$[A \circ g] = [g],$$

а при $g = A$ найдем

$$[f \circ A] = ([f] \circ A)(A')^2.$$

Полагая $\Phi_\mu = [f_\mu]$, получаем

$$(\Phi_\mu \circ A) A'^2 = [f_\mu \circ A] = [A_\mu \circ f_\mu] = [f_\mu] = \Phi_\mu.$$

Мы доказали, что Φ_μ удовлетворяет соотношению

$$(\Phi_\mu \circ A)(A')^2 = \Phi_\mu,$$

т. е. Φ_μ можно интерпретировать как квадратичный дифференциал (Φdz^2 является инвариантом).

Следующий результат принадлежит Нехари.

Лемма 3. Если функция f однолистна и голоморфна в полуплоскости H^* , то $|[f]| \leq \frac{3}{2} y^{-2}$.

Доказательство. Предположим, что функция $F(\zeta) = \zeta + \frac{b_1}{\zeta} + \frac{b_2}{\zeta^2} + \dots$ однолистна в области $|\zeta| > 1$.

Тогда интеграл $\frac{1}{2i} \int_{|\zeta|=r} \bar{F} dF$ равен площади, заключенной внутри образа окружности $|\zeta|=r$, и, следовательно, положителен. Вычисления дают

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i} \int_{|\zeta|=r} \bar{F} dF &= \frac{1}{2i} \int \left(\zeta + \frac{b_1}{\zeta} + \dots \right) \left(1 - \frac{b_1}{\zeta^2} - \dots \right) d\zeta = \\ &= \pi \left(r^2 - \frac{|b_1|}{r^2} - \dots \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $|b_1| \leq 1$. (Более точный вывод дает неравенство $|b_1|^2 + 2|b_2|^2 + \dots + n|b_n|^2 + \dots \leq 1$, которое выражает теорему площадей Бибербаха.)

Заметив, что

$$F' = 1 - \frac{b_1}{\zeta^2} + \dots,$$

$$F'' = \frac{2b_1}{\zeta^3} + \dots,$$

$$F''' = -\frac{6b_1}{\zeta^4} + \dots,$$

получим $[F] = -\frac{6b_1}{\zeta^4} + \dots$ и, следовательно,

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} |\zeta^4 [F]| \leq 6.$$

Полагая $\zeta = Uz = (z - z_0)/(z - z_0)$, где $z_0 = x_0 + iy_0$, $y_0 < 0$, рассмотрим функцию $F(\zeta) = f(U^{-1}\zeta)$. Имеет место равенство

$$[f] = ([F] \circ U) U'^2.$$

Здесь

$$U' = \frac{-2iy_0}{(z - z_0)^2},$$

$$U \sim \frac{2iy_0}{z - z_0} \quad (\text{при } z \rightarrow z_0),$$

$$U'^2 \sim -\frac{1}{4y_0^2} U^4 \quad (\text{при } z \rightarrow z_0).$$

Переходя к пределу, находим

$$[f](z_0) = -\frac{1}{4y_0^2} \lim [F] \cdot \zeta^4$$

и, значит,

$$|[f]| \leq \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{y^2},$$

что и требовалось доказать.

Ввиду этой леммы естественно определить норму упомянутого квадратичного дифференциала по формуле

$$\|\varphi\| = \sup |\varphi(z)| y^2.$$

С. Открытость образа шара

Мы определили отображение $\mu \rightarrow \Phi_\mu$ единичного шара $B_1(\Gamma)$ в пространство $Q(\Gamma)$ квадратичных дифференциалов, имеющих конечную норму. Образ шара $B_1(\Gamma)$ при таком отображении обозначим через $\Delta(\Gamma)$. Мы хотим доказать, что $\Delta(\Gamma)$ представляет собой открытое подмножество пространства $Q(\Gamma)$.

Утверждение имеет смысл и в том случае, когда группа Γ тривиальна, т. е. состоит из одного лишь тождественного преобразования. В этом случае соответствующие пространства обозначим просто B_1 , Δ , Q .

Теорема 1. Множество Δ открыто в Q .

Как легко видеть, множество Δ состоит из производных Шварца $[f]$ функций f , однолистных и голоморфных в нижней полуплоскости и допускающих квазиконформное продолжение на верхнюю полуплоскость.

Как нам уже известно, $\varphi \in \Delta$ удовлетворяют неравенству $\|\varphi\| \leq 3/2$.

Лемма 1. Любая голоморфная функция φ , удовлетворяющая неравенству $\|\varphi\| < 1/2$, содержится в Δ .

Доказательство. Возьмем два линейно независимых решения дифференциального уравнения

$$\eta'' = -\frac{1}{2}\varphi\eta \quad (1)$$

и подчиним их дополнительному условию $\eta'_1\eta_2 - \eta'_2\eta_1 = 1$. Легко проверить, что если $f = \eta_1/\eta_2$, то $[f] = \varphi$. Заметим теперь, что решения уравнения (1) могут иметь только простые нули. Поэтому все особые точки функции f являются простыми полюсами, а в остальных точках $f' \neq 0$.

Мы хотим показать, что f однолистна и допускает квазиконформное продолжение на верхнюю полуплоскость. Чтобы построить это продолжение, рассмотрим функцию

$$F(z) = \frac{\eta_1(z) + (\bar{z} - z)\eta'_1(z)}{\eta_2(z) + (\bar{z} - z)\eta'_2(z)} \quad (z \in H^*).$$

Заметим прежде всего, что числитель и знаменатель не обращаются в нуль одновременно (так как $\eta'_1\eta_2 - \eta'_2\eta_1 = 1$). Поэтому F определена всюду, но может обращаться в ∞ .

Простые вычисления дают

$$\begin{aligned} F_{\bar{z}} &= \frac{1}{(\eta_2 + (\bar{z} - z)\eta'_2)^2}, \\ F_z &= \frac{\frac{1}{2}\varphi(\bar{z} - z)^2}{(\eta_2 + (\bar{z} - z)\eta'_2)^2} \end{aligned} \quad (2)$$

и, следовательно,

$$\frac{F_z}{F_{\bar{z}}} = \frac{1}{2}\varphi(\bar{z} - z)^2.$$

Из предположения леммы вытекает, что $|F_z| \leq k |f_z|$ для некоторого $k < 1$. Отсюда следует, что отображение F квазиконформно, но меняет ориентацию.

Искомое продолжение определим теперь так:

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z), & z \in H^*, \\ F(\bar{z}), & z \in H. \end{cases} \quad (3)$$

Нам нужно показать, что отображение \tilde{f} взаимно однозначно и квазиконформно.

Это легко сделать, если φ — достаточно регулярная функция. Предположим сначала, что φ аналитична на действительной оси и что в точке ∞ она имеет нуль по крайней мере четвертого порядка. Непосредственно видно, что f и F совпадают на действительной оси; ясно также, что функция \tilde{f} локально однолистна. Предположение относительно точки ∞ позволяет заключить, что найдутся решения уравнения (1), для которых разложения в ряд в окрестности точки ∞ начинаются с 1 и z соответственно. Поэтому мы имеем

$$\eta_1 = a_1 z + b_1 + O\left(\frac{1}{|z|}\right),$$

$$\eta_2 = a_2 z + b_2 + O\left(\frac{1}{|z|}\right),$$

причем $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 1$. Это дает

$$F(z) = \frac{a_1 \bar{z} + b_1 + O(|z|^{-1})}{a_2 \bar{z} + b_2 + O(|z|^{-1})} \rightarrow \frac{a_1}{a_2},$$

что совпадает с пределом функции \tilde{f} .

Однолистность функции \tilde{f} вытекает теперь из теоремы о монодромии. Дополнительным дробно-линейным преобразованием можно, конечно, нормировать \tilde{f} .

Для доказательства в общем случае воспользуемся аппроксимацией. Пусть $S_n z = (2nz - i)/(iz + 2n)$. Тогда $S_n H^* \subsetneq H^*$ и $S_n z \rightarrow z$ при $n \rightarrow \infty$. Положим $\Phi_n(z) = \varphi(S_n z) S'_n(z)^2$. Тогда

$$y^2 |\Phi_n(z)| = |\varphi(S_n z)| |S'_n(z)|^2 y^2 < |\varphi(S_n z)| (\operatorname{Im} S_n(z))^2$$

и, следовательно, $\|\varphi_n\| \leq \|\varphi\|$. Функции φ_n обладают указанными выше свойствами регулярности. По доказанному найдутся отображения \tilde{f}_n , такие, что $[\tilde{f}_n] = \varphi_n$ в H^* , отклонения которых равномерно ограничены. В силу компактности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность таких отображений, предел которой \tilde{f}_0 и будет искомым продолжением в общем случае.

Если $\varphi_n \rightarrow \varphi$, то, как нетрудно видеть, нормированные решения уравнения $\eta'' = -\frac{1}{2} \varphi_n \eta$ сходятся к нормированному решению уравнения $\eta'' = -\frac{1}{2} \varphi \eta$. Поэтому, выбирая одинаковые нормирования, мы заключаем, что $\tilde{f}_0 = \tilde{f}$ в H и в H^* . Следовательно, функция \tilde{f} продолжается по непрерывности на действительную ось и является решением поставленной задачи, причем

$$\mu = -2\tilde{f}\eta^2.$$

Но если $\varphi \in Q(\Gamma)$, то можно проверить, что $\mu \in B(\Gamma)$ и, значит, верна следующая

Лемма 2. *Начало координат пространства $Q(\Gamma)$ является внутренней точкой множества $\Delta(\Gamma)$.*

Предположим теперь, что $\varphi_0 \in \Delta$ и $[\tilde{f}_0] = \varphi_0$, где $\tilde{f}_0 = \tilde{f}_{\mu_0}$. Пусть \tilde{f}_0 отображает H на Ω , а H^* на Ω^* . Тогда граничная кривая L области Ω допускает квазиконформное отражение λ . В соответствии с леммой 3 главы IV, D, это отражение можно выбрать так, что отношение соответствующих евклидовых длии ограничено. Это означает, что отражение λ является $C(K)$ -квазиконформным и

$$C(K)^{-1} \leq |\lambda_{\bar{z}}| \leq C(K),$$

что обеспечивает K -квазиконформность отображения \tilde{f}_0 .

Если $[f] = \varphi$, то правило вычисления производной Шварца сложной функции дает

$$\varphi - \varphi_0 = \{f, f_0\} f_0'^2.$$

Невклидова метрика в Ω^* определяется равенством

$$\rho(\zeta) |d\zeta| = \frac{|dz|}{-y}.$$

Поэтому если $\|\varphi - \varphi_0\| \leq \varepsilon$, то функция $g = f \circ f_0^{-1}$ удовлетворяет неравенству

$$|[g](\zeta)| \leq \varepsilon \rho(\zeta)^2.$$

Покажем, что для достаточно малых ε отображение g допускает квазиконформное продолжение.

Положим $\Psi = [g]$ и возьмем нормированные решения η_1 и η_2 уравнения

$$\eta'' = -\frac{1}{2} \Psi \eta.$$

Затем рассмотрим функции

$$g(\zeta) = \eta_1(\zeta)/\eta_2(\zeta), \quad \zeta \in \Omega^*,$$

$$\hat{g}(\zeta) = \frac{\eta_1(\zeta^*) + (\zeta - \zeta^*) \eta'_1(\zeta^*)}{\eta_2(\zeta^*) + (\zeta - \zeta^*) \eta'_2(\zeta^*)}, \quad \zeta \in \Omega.$$

(Напомним, что $\zeta^* = \lambda(\zeta)$.) Вычисления дают

$$\mu_g(\zeta) = \frac{\frac{1}{2} (\zeta - \zeta^*)^2 \psi(\zeta^*) \lambda_\zeta(\zeta)}{1 + \frac{1}{2} (\zeta - \zeta^*)^2 \psi(\zeta^*) \lambda_\zeta(\zeta)}, \quad \zeta \in \Omega.$$

Но $|\lambda_\zeta| < |\lambda_{\zeta^*}| \leq C(K)$ и $|\zeta - \zeta^*| < C\rho(\zeta^*)^{-1}$. Поэтому

$$|\mu_g| \leq \frac{\varepsilon \cdot C(K)}{1 - \varepsilon \cdot C(K)} < 1, \quad (4)$$

если только ε взято достаточно малым.

Снова надо показать, что отображение \hat{g} непрерывно и однолистно. Это нетрудно сделать, если L — аналитическая кривая, а функция ψ аналитична на L и имеет в ∞ нуль по крайней мере четвертого порядка.

Общий случай опять доказывается с помощью аппроксимации. Пусть $f_n = f_0 \circ S_n$, где отображение S_n — такое же, как в доказательстве леммы 1, и

пусть L_n — образ действительной оси при преобразовании f_n . Тогда L_n — аналитическая кривая и, следовательно, она допускает K -квазиконформное отражение, а функция ψ аналитична на L_n .

Метрика Пуанкаре ρ_n для области $\Omega_n^* = f_n(H^*)$ больше или равна ρ , так что из неравенства $|\psi| \leq \varepsilon \rho^2$ вытекает неравенство $|\psi| \leq \varepsilon \rho_n^2$. Поэтому можно построить последовательность нормированных квазиконформных отображений \hat{g}_n , таких, что $[\hat{g}_n] = \psi$ в Ω_n^* , а $\mu_{\hat{g}_n}$ удовлетворяет неравенству (4). Выберем из нее сходящуюся подпоследовательность. Пределом будет квазиконформное отображение \hat{g} , равное g в Ω^* . Тем самым теорема 1 доказана. Поскольку μ_g удовлетворяет неравенству (4), мы получаем

Следствие. Для любой последовательности $\Phi_n \Subset \Delta$, сходящейся к $\Phi_0 = [f_{\mu_0}] \Subset \Delta$, существует последовательность $\mu_n \rightarrow \mu_0$, такая, что $[f_{\mu_n}] = \Phi_n$.

Для доказательства достаточно написать $\phi = [\hat{g} \circ f_0]$.

Мы подошли к наиболее тонкой части этого раздела.

Теорема 2. *Множество $\Delta(\Gamma)$ является открытым подмножеством пространства $Q(\Gamma)$.*

Замечание. Впервые это было доказано Берсом. Идея приведенного ниже доказательства принадлежит К. Ирлу.

Для любого фиксированного $\mu_0 \Subset B$ построим отображение

$$\beta_0 : \Delta \rightarrow \Delta$$

следующим образом: для заданной $\phi \Subset \Delta$ существует $\mu \Subset B_1$, такое, что $\phi = \Phi_\mu$. Зная μ , найдем λ из условия

$$f^\lambda = f^\mu \circ (f^{\mu_0})^{-1}, \quad (5)$$

а затем положим $\beta_0(\phi) = \Phi_\lambda$. Покажем, что Φ_λ определено однозначно. В самом деле, если $\Phi_\mu = \Phi_{\mu_1}$, то

границные значения функции f^μ совпадают с границными значениями функции f^{μ_1} . Поэтому f^λ имеет те же граничные значения, что и f^{λ_1} , и, следовательно, $\Phi_\lambda = \Phi_{\lambda_1}$.

Ясно, что отображение β_0 является взаимно однозначным и переводит Φ_{μ_0} в нуль. Кроме того, β_0 непрерывно. Чтобы убедиться в этом, заметим, что в силу следствия существует последовательность $\mu_n \rightarrow \mu$, такая, что $\Phi_n = [f_{\mu_n}]$. Соответствующие Φ_{λ_n} сходятся тогда к Φ_λ .

Лемма (К. Ирл). Для того чтобы $\Phi_\mu \in Q(\Gamma)$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $A \in \Gamma$ существовало дробно-линейное преобразование B , такое, что

$$f^\mu \circ A \circ (f^\mu)^{-1} = B \text{ на } \mathbb{R}.$$

Доказательство. Если $\Phi_\mu \in Q(\Gamma)$, то имеет место равенство $[f_\mu \circ A] = [f_\mu]$, и обратно. А это равенство верно тогда и только тогда, когда преобразование $f_\mu \circ A \circ f_\mu^{-1} = C$ дробно-линейно в Ω_μ^{-1} .

1. Если существует B , то

$$C = f_\mu \circ A \circ f_\mu^{-1} = f_\mu \circ (f^\mu)^{-1} \circ B \circ f^\mu \circ (f_\mu)^{-1}$$

на $f^\mu(\mathbb{R})$. Первое выражение голоморфно в Ω_μ^* , а второе в Ω_μ . Следовательно, преобразование C дробно-линейно¹⁾.

2. Если существует C , то

$$B = f^\mu \circ A \circ (f_\mu)^{-1} = f^\mu \circ f_\mu^{-1} \circ C \circ f_\mu \circ (f^\mu)^{-1}$$

на \mathbb{R} . Но последнее преобразование конформно отображает H на себя, следовательно, оно дробно-линейно. Лемма доказана.

¹⁾ Потому что оно квазиконформно и конформно почти всюду.

Предположим теперь, что $\mu_0 \in B_1(\Gamma)$. Тогда β_0 отображает $\Delta(\Gamma)$ на $\Delta(\Gamma^{\mu_0})$, так как

$$f^\lambda \circ A^{\mu_0} \circ (f^\lambda)^{-1} = f^\mu \circ A \circ (f^\mu)^{-1} = A^\mu.$$

Из леммы выводим, что $Q(\Gamma) \cap \Delta$ отображается на $Q(\Gamma^{\mu_0}) \cap \Delta$. Начало координат в $Q(\Gamma^{\mu_0})$ имеет окрестность N , содержащуюся в $\Delta(\Gamma^{\mu_0})$. Мы можем написать: $N = Q(\Gamma^{\mu_0}) \cap N_0 = Q(\Gamma^{\mu_0}) \cap \Delta \cap N_0$, где N_0 — окрестность в Δ . Тогда

$$\beta^{-1}(N) = Q(\Gamma) \cap \Delta \cap \beta^{-1}(N_0) = Q(\Gamma) \cap \beta^{-1}(N_0)$$

есть окрестность точки Φ_{μ_0} в $Q(\Gamma)$. Так как $N \subset \Delta(\Gamma^{\mu_0})$, то $\beta^{-1}(N) \subset \Delta(\Gamma)$, а это и показывает, что Φ_{μ_0} имеет окрестность в $Q(\Gamma)$, содержащуюся в $\Delta(\Gamma)$.

Заключение. Если группа Γ преобразований наложения полуплоскости H над S_0 есть группа первого рода, то пространство Тейхмюллера $T(S_0)$ отождествляется с открытым подмножеством $\Delta(\Gamma)$ пространства $Q(\Gamma)$. При этом метрика Тейхмюллера определяет ту же топологию, что и норма в $Q(\Gamma)$.

Рассмотрим случай, когда S_0 — компактная риманова поверхность рода $g > 1$. Тогда $Q(\Gamma)$ имеет комплексную размерность $3g - 3$. Выберем какой-нибудь базис $\varphi_1, \dots, \varphi_{3g-3}$. Каждое $\varphi \in Q(\Gamma)$ представляется в виде линейной комбинации

$$\varphi = \tau_1 \varphi_1 + \dots + \tau_{3g-3} \varphi_{3g-3}$$

с комплексными коэффициентами. Отсюда выводим, что $\Delta(\Gamma)$ топологически эквивалентно некоторому ограниченному открытому множеству в \mathbb{C}^{3g-3} .

Более того, можно показать, что параметры $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_{3g-3})$ определяют семейство римановых поверхностей рода g как голоморфное семейство.

Согласно Кодайре и Спенсеру, голоморфное семейство может быть описано следующим образом.

Дано $(n+1)$ -мерное комплексное многообразие V и голоморфное отображение $\pi: V \rightarrow M$, где M — ком-

плексное многообразие размерности n . Каждый слой $\pi^{-1}(\tau)$, $\tau \in M$, есть риманова поверхность.

Комплексные структуры на многообразиях V и M связаны следующим образом: существует открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ многообразия V , такое, что каждому α соответствует голоморфный гомеоморфизм $h_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{C} \times M$, причем если U_α и U_β пересекаются, то в пересечении функция $\Phi_{\alpha\beta} = h_\alpha \circ h_\beta^{-1}$ такова, что для любого $\tau \in M$ сужение ее на $h_\beta(U_\alpha \cap U_\beta \cap \pi^{-1}(\tau))$ должно быть комплексно аналитическим (фактически эти функции определяют комплексную структуру слоев $\pi^{-1}(\tau)$).

В нашем случае роль M играет множество $\Delta(\Gamma)$. Каждое $\tau \in \Delta(\Gamma)$ определяет $\varphi = [f_\mu]$, а f_μ однозначно определено в H^* . Следовательно, Ω_μ^* , Ω_μ и группа Γ_μ определяются элементом τ . Чтобы подчеркнуть зависимость от τ , заменим обозначения на φ_τ , Ω_τ , Γ_τ и т. д. Так как f_τ определено в H^* дифференциальным уравнением $[f_\tau] = \varphi_\tau$, то оно, как мы знаем, голоморфно зависит от параметра τ . Для любого $A \in \Gamma$ соответствующее преобразование $A_\tau \in \Gamma_\tau$ определяется из условия $f_\tau \circ A = A_\tau \circ f_\tau$ в H^* . Отсюда вытекает тот важный факт, что A_τ голоморфно зависит от τ .

Римановы поверхности, принадлежащие рассматриваемому семейству, можно задать в виде $S(\tau) = \Omega_\tau / \Gamma_\tau$, а V будет их объединением. Таким образом, точки множества V являются орбитами $\Gamma_\tau \zeta$, где $\zeta \in \Omega_\tau$ и $\tau \in \Delta(\Gamma)$. Проекция $\pi: V \rightarrow M$ задается так, что $\pi^{-1}(\tau) = S(\tau)$.

Рассмотрим некоторую точку $\Gamma_{\tau_0} \zeta_0$ множества V . Выбирая и фиксируя точку ζ_0 на орбите, определим открытую окрестность $N(\zeta_0)$ так, что \bar{N} компактно содержится в Ω_{τ_0} и не пересекает свои образы при преобразованиях из Γ_{τ_0} . Окрестность $N(\varepsilon, \zeta_0, \tau_0)$ точки $\Gamma_{\tau_0} \zeta_0$ определяется как совокупность всех таких $\Gamma_\tau \zeta$, для которых $\|\varphi_\tau - \varphi_{\tau_0}\| < \varepsilon$, а $\zeta \in N(\zeta_0)$. Здесь ε надлежит выбрать настолько малым, чтобы \bar{N} не пересекало свои образы при преобразованиях из Γ_τ .

Это возможно, так как из близости φ_τ и φ_{τ_0} вытекает близость A_τ и A_{τ_0} . Следовательно, существует только одна точка $\zeta \in N(\zeta_0) \cap \Gamma_\tau \zeta$ и отображение $h: \Gamma_\tau \zeta \rightarrow (\zeta, \tau)$ вполне определено в $N(e, \zeta_0, \tau_0)$.

Окрестности $N(e, \zeta_0, \tau_0)$ образуют базу топологии, заданной в V . Кроме того, мы утверждаем, что параметрические отображения $h: \Gamma_\tau \zeta \rightarrow (\zeta, \tau)$, определенные на базисных окрестностях, делают семейство проекций $\pi: V \rightarrow M$ голоморфным. В самом деле, если две базисные окрестности U_0 и U_1 пересекаются, то в пересечении $U_0 \cap U_1$ для некоторого $A_\tau \in \Gamma_\tau$ имеем $h_0(\Gamma_\tau \zeta) = (\zeta, \tau)$ и $h_1(\Gamma_\tau \zeta) = (A_\tau \zeta, \tau)$. Следовательно, отображение $h_1 \circ h_0^{-1}$ задается так: $(\zeta, \tau) \rightarrow (A_\tau \zeta, \tau)$, а это последнее, как мы знаем, голоморфно как по τ , так и по ζ . Очевидно, что параметрические отображения h определяют комплексную структуру на V , согласованную с конформной структурой поверхности $S(\tau)$, и поэтому отображение $\pi: V \rightarrow M$ голоморфно.

D. Инфинитезимальный подход

Продолжим теперь прямое исследование отображений f^μ , A^μ без использования отображений f_μ .

Для любой функции $F(\mu)$ и любой $v \in L^\infty$ положим

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(\mu + tv) - F(\mu)}{t} = \dot{F}(\mu)[v],$$

если этот предел существует, причем если производная вычисляется при $\mu = 0$, то аргумент μ мы будем опускать. Параметр t предполагается действительным.

Напишем снова представление

$$\dot{f}[v](\zeta) = -\frac{1}{\pi} \int \int v(z) R(z, \zeta) dx dy,$$

где

$$R(z, \zeta) = \frac{1}{z - \zeta} - \frac{1 - \zeta}{z} - \frac{\zeta}{z - 1}.$$

Применим эту формулу к симметричному случаю, когда $v(\bar{z}) = \bar{v}(z)$; получим

$$\begin{aligned} \dot{f}[v](\zeta) &= -\frac{1}{\pi} \int_H \int v(z) R(z, \zeta) dx dy - \\ &- \frac{1}{\pi} \int_H \int \bar{v}(z) R(\bar{z}, \zeta) dx dy. \end{aligned} \quad (1)$$

Ясно, что $\dot{f}[v]$ линейно в действительном смысле, но не линейно в комплексном. Чтобы получить комплексный линейный функционал, положим

$$\Phi[v] = \dot{f}[v] + i\dot{f}[tv] \quad (2)$$

и получим

$$\Phi[v](\zeta) = -\frac{2}{\pi} \int_H \int \bar{v}(z) R(\bar{z}, \zeta) dx dy. \quad (3)$$

Функция Φ голоморфна для $\zeta \in H$. Вычислим ее третью производную:

$$\Phi'''(\zeta) = \varphi[v](\zeta) = -\frac{12}{\pi} \int_H \int \frac{\bar{v}(z)}{(\bar{z} - \zeta)^4} dx dy. \quad (4)$$

Если $v \in B(\Gamma)$, то, как можно проверить, φ является квадратичным дифференциалом ($\varphi \in Q(\Gamma)$).

Из соотношения

$$\dot{f}^\mu(Az) = A^\mu \dot{f}^\mu(z)$$

при $\mu = tv$ после дифференцирования получаем

$$\dot{f}[v] \circ A = \dot{A}[v] + A' \dot{f}[v] \quad (5)$$

(доказательство существования производной \dot{A} требует некоторых не очень больших усилий). Но, поскольку $\dot{f}[v]_{\bar{z}} = v$, дифференцирование равенства (5) дает

$$(v \circ A) \bar{A}' = \dot{A}_{\bar{z}} + A' v,$$

и так как $v \in B(\Gamma)$, то $\dot{A}_{\bar{z}} = 0$. Отсюда вытекает, что функция \dot{A} аналитична. Кроме того, функция $\dot{A}' A'$ действительна на действительной оси и, следовательно,

продолжается по симметрии на всю плоскость. Из выражения для $\dot{f}[v]$ получаем, что $\dot{f}[v]$ в окрестности точки ∞ имеет порядок $o(|z|^2)$. Следовательно, точка $A^{-1}\infty$ является устранимой особой точкой функции \dot{A}/A' , а в точке ∞ эта функция имеет полюс самое большое второго порядка. Отсюда заключаем, что

$$\frac{\dot{A}}{A'} = P_A, \quad (6)$$

где P_A — полином не выше второй степени. Из равенств

$$(A_1 A_2)^\circ = (\dot{A}_1 \circ A_2) + (A'_1 \circ A_2) \dot{A}_2,$$

$$(A_1 A_2)' = (A'_1 \circ A_2) A'_2$$

выводим, что

$$P_{A_1 A_2} = \frac{P_{A_1} \circ A_2}{A'_2} + P_{A_2}, \quad (7)$$

Будем говорить, что v *тривиально* (обозначается $v \in N(\Gamma)$), если все $\dot{A}[v]$ равны нулю. Приведем несколько эквивалентных условий тривиальности:

Лемма 1. *Следующие условия эквивалентны:*

a) $\dot{A}[v] = 0$ для всех $A \in \Gamma$, c) $\dot{f}[v] = 0$ на \mathbb{R} ,

b) $P_A = 0$ для всех $A \in \Gamma$, d) $\Phi[v] = 0$,

e) $\varphi[v] = 0$,

f) $\int \int v \varphi dx dy = 0$ для всех $\varphi \in Q(\Gamma)$ ¹.

Доказательство. a) \Leftrightarrow b) в силу (6); c) \Rightarrow a) в силу (5). Обратно, если $\dot{A} = 0$, то ввиду равенства $\dot{f}(0) = 0$ это дает $\dot{f}(A0) = 0$ для всех A . Точки $A0$ плотно расположены на \mathbb{R} (по предположению речь

¹) Для некомпактных H/Γ условие выполняется для всех $\varphi \in Q(\Gamma)$, таких, что $\int \int |\varphi| dx dy < \infty$.

идет о группе первого рода) и, следовательно, по непрерывности $\dot{f} = 0$ на \mathbb{R} .

Определение функции Φ вместе с (5) и (6) дает

$$\frac{\Phi \circ A}{A'} - \Phi = P_A[v] + iP_A[iv].$$

Если $\Phi \equiv 0$, то $P_A[v] + iP_A[iv] = 0$ на \mathbb{R} . Но оба полинома действительны на \mathbb{R} , и, значит, тождественно равны 0, так что d) \Rightarrow b). Обратно, если $\dot{f}[v] = 0$ на \mathbb{R} , то Φ принимает чисто мнимые значения на \mathbb{R} и, следовательно, может быть аналитически продолжена на всю плоскость. Так как $\Phi = o(|z|^2)$, то она сводится к полиному первой степени. Но $\Phi = 0$ в точках 0 и 1. Поэтому $\Phi \equiv 0$ и c) \Rightarrow d).

Далее, поскольку $\Phi''' = \varphi$, то d) \Rightarrow e). Обратно, если $\varphi = 0$, то Φ — полином, и, как и раньше, получаем $\Phi \equiv 0$.

Наиболее важно условие f). Мы докажем его только для случая компактной поверхности $S = H/\Gamma$, которую будем представлять в виде замкнутого фундаментального многоугольника с попарно отождествленными сторонами. Если $\dot{A} = 0$, то $\dot{f} \circ A = A' \dot{f}$. Далее, нам известно, что $\dot{f}_z = v$. По формуле Стокса найдем

$$\int \int_S v \varphi dx dy = - \frac{1}{2i} \int \int_S \dot{f}_z \varphi dz d\bar{z} = \frac{1}{2i} \int_{\partial S} \dot{f} \varphi dz.$$

Но по условию \dot{f}/dz — инвариант. Поэтому

$$\dot{f} \varphi dz = \frac{\dot{f}}{dz} \cdot \varphi dz^2$$

тоже инвариант, и интеграл по границе равен нулю.

Чтобы доказать обратное, запишем формулу (3) для действительного ζ :

$$\overline{\Phi(\zeta)} = - \frac{2}{\pi} \int_H \int v(z) R(z, \zeta) dx dy.$$

Введем θ -ряд Пуанкаре

$$\psi(z) = \sum R(Az, \zeta) A'(z)^2.$$

Из условия $\int_H |R(z, \zeta)| dx dy < \infty$ совсем легко вывести сходимость этого ряда. Получаем

$$\begin{aligned}\overline{\Phi(\zeta)} &= -\frac{2}{\pi} \sum_A \int_A \int v(z) R(z, \zeta) dx dy = \\ &= -\frac{2}{\pi} \sum_S \int_S \int v(Az) R(Az, \zeta) |A'(z)|^2 dx dy = \\ &= -\frac{2}{\pi} \sum_S \int_S \int v(z) R(Az, \zeta) A'(z)^2 dx dy = \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_S \int v \phi dx dy,\end{aligned}$$

а этот интеграл обращается в 0, если выполнено условие f). Поэтому Φ тождественно равна нулю. Лемма доказана.

Нам понадобится еще следующая

Л е м м а 2. *Предположим, что функция ϕ аналитична на H и*

$$\sup |\phi| y^2 < \infty.$$

Тогда

$$\Phi(\zeta) = \frac{12}{\pi} \int_H \int \frac{\phi(z) y^2}{(\bar{z} - \zeta)^4} dx dy. \quad (8)$$

Для доказательства заметим, что

$$\begin{aligned}\frac{y^2}{(\bar{z} - \zeta)^4} &= -\frac{1}{4} \frac{(\bar{z} - z)^2}{(\bar{z} - \zeta)^4} = \\ &= -\frac{1}{4} \left[\frac{1}{(\bar{z} - \zeta)^2} - \frac{2(\bar{z} - \zeta)}{(\bar{z} - \zeta)^3} + \frac{(\bar{z} - \zeta)^2}{(\bar{z} - \zeta)^4} \right] = \\ &= -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[-\frac{1}{(\bar{z} - \zeta)} + \frac{z - \zeta}{(\bar{z} - \zeta)^2} - \frac{1}{3} \frac{(\bar{z} - \zeta)^2}{(\bar{z} - \zeta)^3} \right].\end{aligned}$$

Предположим сначала, что ϕ аналитична и на \mathbb{R} . Тогда интегрирование по частям дает

$$\frac{12}{\pi} \int_H \int \frac{\phi y^2 dx dy}{(\bar{z} - \zeta)^4} = -\frac{3}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \left(-\frac{1}{3} \right) \frac{\phi(z)}{z - \zeta} dz = \Phi(\zeta).$$

Теперь легко завершить доказательство, применяя полученную формулу к функции $\varphi(z + ie)$, $e > 0$, потому что предположение леммы обеспечивает абсолютную сходимость интеграла.

Сравним формулы (8) и (4). Мы имеем антилинейное отображение

$$\Lambda: v \rightarrow \varphi[v]$$

пространства $B(\Gamma)$ на пространство $Q(\Gamma)$. С другой стороны, можно определить отображение

$$\Lambda^*: \varphi \rightarrow -\bar{\varphi}y^2$$

пространства $Q(\Gamma)$ на пространство $B(\Gamma)$. Лемма 2 говорит о том, что отображение $\Lambda\Lambda^*$ тождественно.

Согласно лемме 1, е), $v \in N(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда $\Lambda v = 0$. Из равенства $\Lambda\Lambda^* = I$ мы заключаем, что

$$v - \Lambda^*\Lambda v \in N(\Gamma).$$

Иначе говоря, v эквивалентна $-\bar{\varphi}[v]y^2$ по модулю $N(\Gamma)$. Разумеется, только $\Lambda^*\varphi$ эквивалентна v , потому что если $-\bar{\varphi}y^2 \in N(\Gamma)$, то

$$\int \int_{H/\Gamma} |\varphi(z)|^2 y^2 dx dy = 0 \text{ и, следовательно, } \varphi = 0.$$

Итак, мы получаем следующий результат:

Отображение Λ устанавливает изоморфизм факторпространства $B(\Gamma)/N(\Gamma)$ на $Q(\Gamma)$. Обратный изоморфизм пространства $Q(\Gamma)$ на $B(\Gamma)/N(\Gamma)$ дается отображением Λ^* .

Компактная поверхность S рода $g > 0$ определяет группу Γ , порожденную дробно-линейными преобразованиями A_1, \dots, A_{2g} , удовлетворяющими условию

$$A_1 A_2 A_1^{-1} A_2^{-1} \dots A_{2g-1} A_{2g} A_{2g-1}^{-1} A_{2g}^{-1} = I. \quad (9)$$

Будем говорить, что $\{A_1, \dots, A_{2g}\}$ — каноническая система образующих. Если она относится к некоторой поверхности, то A_1 и A_2 имеют четыре различные неподвижные точки. Переходя к сопряженной подгруппе, можно добиться того, что для A_1 неподвижными

будут точки 0 и ∞ , а для A_2 — точка 1. В этом случае будем говорить, что система образующих нормирована.

Пусть

V — множество нормированных канонических систем, T — множество нормированных канонических систем, соответствующих поверхностям рода g .

Можно показать, что V — действительное аналитическое многообразие размерности $6g - 6$. Докажем, что T — открытое подмножество многообразия V , снабженное естественной комплексной структурой.

Пусть S определяет Γ с нормированными образующими $(A) = (A_1, \dots, A_{2g})$. Выберем базис v_1, \dots, v_{3g-3} в факторпространстве $B(\Gamma)/N(\Gamma)$ и положим

$$v(\tau) = \tau_1 v_1 + \dots + \tau_{3g-3} v_{3g-3},$$

где $\tau_k = t_k + it'_k$. Для малых τ получим систему $(A)^{v(\tau)} \in T$. Точки многообразия V , близкие к (A) , можно выразить через локальные параметры u_1, \dots, u_{6g-6} , и отображение $\tau \rightarrow (A)^{v(\tau)}$ примет вид

$$u_j = h_j(t_1, t'_1, \dots, t_{3g-3}, t'_{3g-3}).$$

Покажем, что

- 1) все h_j непрерывно дифференцируемы,
- 2) якобиан рассматриваемого отображения $\neq 0$ в точке $\tau = 0$.

Утверждение 1) было уже доказано. Коэффициенты преобразования A_k являются дифференцируемыми функциями переменных u_k . Поэтому если все $\dot{u}_k[v]$ нули, то все $\dot{A}_k[v]$ и, следовательно, все $\dot{A}[v]$ тоже равны нулю. Заметим теперь, что

$$\frac{\partial h_j}{\partial t_k} = \dot{u}_j[v_k], \quad \frac{\partial h_j}{\partial t'_k} = \dot{u}_j[i v_k].$$

Если бы якобиан был равен нулю в начале координат, то существовали бы действительные числа ξ_k, η_k , такие, что

$$\sum \left(\xi_k \frac{\partial h_j}{\partial t_k} + \eta_k \frac{\partial h_j}{\partial t'_k} \right) = 0 \quad \text{для всех } j.$$

Это означало бы, что

$$\dot{u}_j \left[\sum (\xi_k + i\eta_k) v_k \right] = 0,$$

и, следовательно, что

$$\dot{A} \left[\sum (\xi_k + i\eta_k) v_k \right] = 0.$$

Отсюда $\sum (\xi_k + i\eta_k) v_k \in N(\Gamma)$, а это возможно только в том случае, когда все ξ_k , η_k равны нулю. Тем самым доказано, что якобиан не равен нулю.

Из доказательства видно, что T — открытое подмножество многообразия V . Из него следует также, что если $\|\mu\|$ достаточно мала, то существуют (однозначно определенные) комплексные числа $\tau_1(\mu), \dots, \tau_{3g-3}(\mu)$, такие, что

$$A^{\tau_1(\mu)} v_1 + \dots + \tau_{3g-3}(\mu) v_{3g-3} = A^\mu.$$

Положим теперь $\mu = t\rho$ и продифференцируем это равенство по t при $t = 0$. Получим

$$\dot{A} [\dot{\tau}_1[\rho] v_1 + \dots + \dot{\tau}_{3g-3}[\rho] v_{3g-3}] = \dot{A}[\rho].$$

Отсюда вытекает, что

$$\dot{\tau}_1[\rho] v_1 + \dots + \dot{\tau}_{3g-3}[\rho] v_{3g-3} - \rho \in N(\Gamma).$$

Заменим ρ на $i\rho$. Тогда ρ можно исключить, и мы будем иметь

$$\sum_1^{3g-3} (\dot{\tau}_k[\rho] + i\dot{\tau}_k[i\rho]) \cdot v_k \in N(\Gamma),$$

откуда

$$\dot{\tau}_k[i\rho] = i\dot{\tau}_k[\rho].$$

Иначе говоря, $\dot{\tau}_k$ являются комплексными линейными функционалами, а это означает, что $\tau_k(\mu)$ дифференцируемы в комплексном смысле при $\mu = 0$.

Эти соображения позволяют доказать, что отображения в пространство координат $(A^\mu) \rightarrow (\tau_1(\mu), \dots, \tau_{3g-3}(\mu))$ определяют комплексную структуру на T . Действительно, нам нужно показать, что на перекрывающихся окрестностях координаты являются

аналитическими функциями, а это достаточно проделать для окрестностей начала некоторой заданной системы координат. Положим $\mu(\tau) = \sum \tau_i v_i$ и будем считать, что $\mu_0 = \mu(\tau_0)$ близко к нулю в $B(\Gamma)$. Определим $\lambda(\tau)$ в $B(\Gamma^{\mu_0})$ равенством $f^{\mu(\tau)} = f^{\lambda(\tau)} \circ f^{\mu_0}$. По формуле (8) главы I, С, имеем

$$\lambda(\tau) \circ f^{\mu_0} = \frac{\mu(\tau) - \mu_0}{1 - \overline{\mu_0 \mu}(\tau)} \left(f_z^{\mu_0} / |f_z^{\mu_0}| \right)^2,$$

так что λ аналитически зависит от τ .

Выберем теперь базис $\lambda_1, \dots, \lambda_{3g-3}$ в $B(\Gamma^{\mu_0})/N(\Gamma^{\mu_0})$. Пусть $\sigma_1(\lambda), \dots, \sigma_{3g-3}(\lambda)$ — координатные функции вблизи (A^{μ_0}) . Это означает, что для τ , близких к τ_0 , можно написать

$$(A^{\mu(\tau)}) = ((A^{\mu_0})^{\lambda(\tau)}) = ((A^{\mu_0})^{\sum \sigma_i(\lambda(\tau)) \lambda_i}).$$

Так как функции $\sigma_i(\lambda)$ комплексно аналитические при $\lambda = 0$, то σ_i — комплексно аналитическая функция переменной τ в точке τ_0 . Именно это мы и хотели доказать.

ОГЛАВЛЕНИЕ

От редакторов перевода	5
От автора	7
Г л а в а I. Дифференцируемые квазиконформные отображения	
Введение	9
A. Первоначальное определение и задача Грёча	10
B. Решение задачи Грёча	13
C. Суперпозиции отображений	15
D. Экстремальная длина	17
E. Принцип симметрии	21
F. Интеграл Дирихле	23
Г л а в а II. Общее определение	25
A. Геометрический подход	25
B. Аналитическое определение	27
Г л а в а III. Экстремальные геометрические свойства	38
A. Три экстремальные задачи	38
B. Эллиптическая и модулярная функции	42
C. Теорема Мори	48
D. Четверки точек	53
Г л а в а IV. Соответствие границ	61
A. M -условие	61
B. Достаточность M -условия	66
C. Квазизометрия	69
D. Квазиконформное отражение	71
E. Обратное утверждение	77
Г л а в а V. Теорема существования	80
A. Два интегральных оператора	80
B. Решение задачи о существовании отображения	84
C. Зависимость от параметров	92
D. Неравенство Зигмунда – Кальдерона	98
Г л а в а VI. Пространства Тейхмюллера	105
A. Предварительные сведения	105
B. Дифференциалы Бельтрами	108
C. Открытость образа шара	115
D. Инфинитезимальный подход	124

Л. АЛЬФОРС

**Лекции
по квазиконформным отображениям**

Редактор *Н. И. Плужникова*

Художник *А. В. Шипов*

Художественный редактор *В. И. Шаповалов*

Технический редактор *Н. А. Турсукова*

Корректор *О. К. Румянцева*

Сдано в производство 19/VII 1968 г.

Подписано к печати 10/I 1969 г.

Бумага № 2 84×108^{1/2} — 2,13 бум. л.

Усл. печ. л. 7,14. Уч.-изд. л. 5,16. Изд. № 1/4994

Цена 36 коп. Зак. 1363.

Тем. план изд-ва "Мир" 1968 г., пор. № 1

ИЗДАТЕЛЬСТВО «М И Р»

Москва, Рижский пер., 2

Ленинградская типография № 2

имени Евгении Соколовой

Главполиграфпрома

Комитета по печати

при Совете Министров СССР.

Измайловский проспект, 29.

В ИЗДАТЕЛЬСТВЕ «МИР»
гото́вится к печати в 1969 г.

Ганнинг Р., Росси Х. Аналитические функции многих комплексных переменных. Энглвуд Клиффс (США), 1965 г., перевод с английского, 18 изд. л., тираж 15 тыс. экз.

В книге известных американских математиков — специалистов по теории функций и функциональному анализу — основное внимание удалено вопросам глобальной теории аналитических функций. Изложение ведется на хорошем современном уровне с использованием языка алгебраической топологии. Имеется обширная библиография.

Книга представляет интерес для математиков широкого профиля. Она построена таким образом, что доступна студентам математических специальностей, знакомым с основами теории аналитических функций одной переменной и традиционными разделами общей алгебры.