ФИЗИКА

ПОДПИСНАЯ НАУЧНО-ПОПУЛЯРНАЯ СЕРИЯ

1989/2

И. В. Андрианов
Л. И. Маневич

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И ФИЗИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ

ЗНАНИЕ

НОВОЕ В ЖИЗНИ, НАУКЕ, ТЕХНИКЕ

НОВОЕ В ЖИЗНИ, НАУКЕ, ТЕХНИКЕ

ПОДПИСНАЯ НАУЧНО-ПОПУЛЯРНАЯ СЕРИЯ

ФИЗИКА

2/1989

Издается ежемесячно с 1967 г.

И. В. Андрианов,
Л. И. Маневич

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И ФИЗИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ

Издательство «Знание» Москва 1989

ББК 22.3
А 65

АНДРИАНОВ Игорь Васильевич — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Днепропетровского инженерно-строительного института. Область научных интересов — применение асимптотических методов в задачах механики.

МАНЕВИЧ Леонид Исакович — доктор технических наук, заведующий сектором Института химической физики АН СССР, профессор Московского физико-технического института. Основные научные интересы связаны с разработкой и применением асимптотических методов, теорией нелинейных колебаний и волн, физикой и механикой полимеров.

Редактор: *КУТУЗОВА К. А.*

Андрианов И. В., Маневич Л. И.

А 65 Асимптотические методы и физические теории. — М.: Знание, 1989. — 64 с. — (Новое в жизни, науке, технике. Сер. «Физика»; № 2).

15 к.

В брошюре рассматриваются вопросы применения асимптотических методов для построения приближенных решений сложных физических задач, установления связи между различными физическими теориями и формирования новых физических понятий. Изложение ведется на ряде примеров из различных областей физики.

Брошюра рассчитана на широкий круг читателей, интересующихся актуальными проблемами физики.

1604010000 **ББК 22.3**

ISBN 5—07—000314—3 © Издательство «Знание», 1989 г.

Асимптотический анализ — одно из важнейших направлений в современной теории физических моделей. Не будет преувеличением сказать, что оно представляет целую систему взглядов.

Н. Н. Моисеев

Почти любая физическая теория, сформулированная во всей своей общности, очень сложна с математической точки зрения. Поэтому и при создании теории, и в дальнейшем ее развитии особую роль играют простейшие предельные случаи, допускающие аналитическое решение. При этом обычно уменьшается число уравнений, понижается их порядок, нелинейное уравнение заменяется линейным, исходная система в некотором смысле усредняется и т. п. За этими идеализациями, сколь бы различными они ни казались, стоит высокая степень симметрии, присущая в соответствующем пределе математической модели рассматриваемого явления.

В действительности же «природа не терпит точных симметрий. Большинство симметрий возникает при некоторой идеализации задач, учет влияния более сложных взаимодействий приводит к их нарушению.

Даже законы сохранения, связанные с пространственной симметрией, крайне мало, но все же нарушаются неоднородностью Вселенной во времени и пространстве» (А. Б. Мигдал).

Асимптотический подход к сложной задаче состоит, по сути, в трактовке исходной (недостаточно симметричной) системы как близкой к некоторой симметричной. Принципиально важно, что определение поправок, учитывающих отклонения от предельного случая, гораздо проще, чем непосредственное исследование исходной системы.

На первый взгляд возможности такого подхода ограничены узким диапазоном изменения параметров, определяющих систему. Однако опыт исследования различных физических задач показывает, что при значительном изменении параметров системы и удалении ее от предельного симметричного случая существует другая предельная система, часто с менее очевидной симметрией, к которой также применим асимптотический анализ.

Это позволяет описать поведение системы во всем диапазоне изменения параметров, опираясь на небольшое число предельных случаев.

Такой подход, в максимальной степени соответствуя физической интуиции и способствуя ее развитию, в то же время приводит к формированию новых физических понятий. Так, одно из важнейших в гидромеханике понятий пограничного слоя имеет ярко выраженный асимптотический характер и связано с локализацией той области, где влиянием вязкости жидкости пренебречь нельзя — у границ обтекаемого тела. Аналогичные явления в механике деформируемого твердого тела и теории электричества называются соответственно краевыми и скин-эффектами. Подобные примеры далеко не единичны.

Не менее важно, что асимптотический метод помогает установить связь между различными физическими теориями. А. Эйнштейн отмечал, что «лучший жребий физической теории — послужить основой для более общей теории, оставаясь в ней предельным случаем».

Таким образом, асимптотический подход — не только полезный рабочий инструмент, но и некоторый философский принцип, позволяющий выявить соответствие между сменяющими друг друга физическими теориями и определить область применимости «старой» теории.

I. ЧТО ТАКОЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ?

Если смысл слова «симметрия» — «соразмерность», то построение асимптотики часто сводится к поиску резких, отчетливо выраженных несоразмерностей (большое — малое, длинное — короткое, медленное — быстрое и т. д.). Физик или инженер обычно использует представление о различном характере процессов или параметров уже на этапе построения физической модели или расчетной схемы. Остановимся на некоторых идеях асимптотического упрощения, часто используемых в физике и технике, не прибегая к строгим определениям.

Уменьшение размерности системы

Высокий порядок алгебраических или дифференциальных уравнений, большое число таких уравнений — все это проявление одной из принципиальных трудно-

тей, возникающих при решении физических задач, которую называют иногда «проклятием размерности». Для ее преодоления выработаны два диаметрально противоположных подхода. Если отдельные элементы рассматриваемой системы сильно различаются по своим характеристикам, то можно ввести малые параметры, представляющие их отношения, и осуществить асимптотическую редукцию размерности (уменьшить число степеней свободы).

Типичный пример такой ситуации — задача трех тел в небесной механике. Как правило, массы этих тел (например, Солнца, Юпитера и Земли) заметно различаются, поэтому в системе есть малые параметры, отражающие «неравноправие» масс, и возможна асимптотическая редукция размерности. Такая редукция лежит в основе классических методов небесной механики, причем в качестве предельного высокосимметричного случая выступает точно решаемая задача двух тел. Небесная механика — первая область естествознания, в которой асимптотический метод (теория возмущений) сыграл фундаментальную роль. Более того, сам этот метод был фактически вызван к жизни насущной необходимостью ответа на вопросы, поставленные небесной механикой.

Вот что писал об этом П. С. Лаплас — один из создателей той модификации асимптотического подхода, которая и получила название «метод возмущений»: «Если бы планеты подчинялись только действию Солнца, то описывали бы вокруг него эллиптические орбиты. Но они влияют одна на другую, а также и на само Солнце. Из-за этих взаимных притяжений происходят возмущения в их эллиптических движениях. Эти возмущения необходимо определить. Точное решение этой проблемы превосходит существующие в настоящее время возможности асимптотического анализа (и в наше время тоже.— *Авт.*). К счастью, малость масс планет по сравнению с массой Солнца, небольшие эксцентриситеты и взаимные наклоны большинства их орбит сильно облегчают эту задачу».

Так что сам термин «возмущение» в названии метода берет свое начало в небесной механике.

Использование асимптотических методов далеко не всегда оговаривается специально, а иногда даже и не осознается до конца.

Так, в инженерной практике чрезвычайно широкое

распространение получили модельные системы с одной степенью свободы. Ясно, что использование таких моделей всегда предполагает асимптотическую редукцию размерности и принципиальную возможность определения соответствующих поправок, но четкое указание этого факта можно встретить нечасто.

Континуализация

Если рассматриваемая система состоит из множества однотипных элементов, то асимптотический подход приводит уже не к редукции размерности, а напротив, к ее повышению. Так мы приходим к весьма важному классу физических моделей, в котором дискретные системы заменяются континуальными (непрерывными).

Рассмотрим для примера продольные колебания цепочки, состоящей из равных масс m, соединенных пружинами одинаковой длины L и жесткости C (рис. 1, *а*). При плавной пространственной форме колебаний, характеризуемых в каждой точке kL ($k=0, \pm1, \pm2...$; рис. 1, *б*) смещением u_k, эту цепочку можно заменить сплошным стержнем, переходя таким образом от системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$m\frac{d^2u_k}{dt^2} = C(u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1})$$

к одному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{cL^2\partial^2 u}{m\,\partial x^2}.$$

Степеней свободы стало больше, а относительная простота этого предельного случая медленных колебаний обусловлена симметрией уравнения в частных производных, не меняющегося при произвольном сдвиге вдоль стержня. С уменьшением пространственного периода колебаний растет погрешность приближенных решений, получаемых таким путем. Второй предельный случай для той же системы соответствует колебаниям с минимальной возможной длиной волны (рис. 1, *в*). Их форму легко рассчитать и использовать как первое приближение при исследовании коротковолновых колебаний системы. При этом решение разыскивается в виде произведения предельной пилообразной формы на медленную модулирующую функцию (рис. 1, *г*).

Переход от дискретных моделей к непрерывным широко применяется в физике: по существу, на этом построена вся механика сплошных сред.

Приведем в заключение высказывание Э. Шрединге-

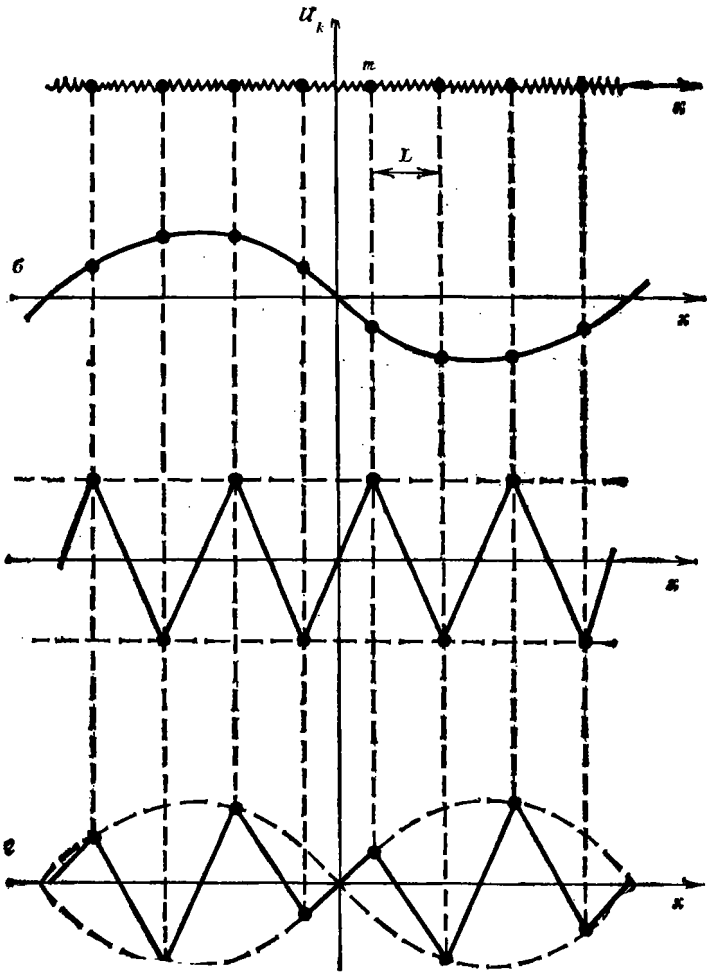

Рис. 1. Различные формы колебаний цепочки масс: *а* — цепочка масс, соединенных пружинами; *б* — гладкая форма колебаний; *в* — пилообразные колебания; *г* — представление решения в виде произведения «пилы» на модулирующую функцию

ра, раскрывающее эффективность этого приема: «Допустим, мы бы рассказали древнему греку... что возможно проследить путь отдельной частички жидкости... Древний эллин не поверил бы, что ограниченный человеческий ум может дать решение столь запутанной задачи... Дело заключается в том, что мы научились владеть всем процессом с помощью одного дифференциального уравнения».

Метод осреднения

Во многих физических задачах одни переменные меняются медленно, а другие — быстро. Возникает естественная мысль: нельзя ли сначала изучить глобальную структуру рассматриваемой системы, отвлекаясь от ее локальных особенностей, а затем уже исследовать систему локально. На это и направлен метод осреднения, основная идея которого — разделение быстрых и медленных составляющих решения.

П. С. Лаплас писал: «Самый простой способ анализа различных возмущений заключается в том, чтобы вообразить себе планету, движущуюся в согласии с законами эллиптического движения по эллипсу, элементы которого плавно изменяются, и одновременно представить себе, что настоящая планета колеблется вокруг этой воображаемой линии по очень малой траектории, свойства которой зависят от ее периодических возмущений».

Современный метод осреднения дифференциальных уравнений с частными производными на идейном уровне можно описать так. Сначала выделяется некоторая периодически повторяющаяся краевая задача — зада-

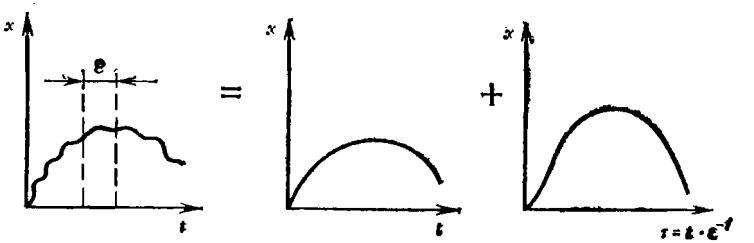

Рис. 2. Графическое представление метода осреднения

ча на ячейке (рис. 2). Решение ее в местных (локальных) координатах строится известными аналитическими или численными методами.

Далее производится осреднение по локальным переменным, и получается уравнение с медленно изменяющимися коэффициентами, описывающее глобальное поведение среды.

Существенно, что при подобном подходе определяются не только интегральные, но и локальные характеристики среды или процесса.

Первоначально этот метод получил широкое распространение в задачах небесной механики и теории нелинейных колебаний, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Сегодня он успешно применяется для решения дифференциальных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами в таких важных для практики дисциплинах, как теория композитов (рис. 3) или теория ребристых, гофрированных, складчатых и других оболочек. Исходная неоднородная среда либо конструкция сводится к однородной (вообще говоря, анизотропной) с некоторыми эффективными характеристиками. Метод осреднения позволяет не только получать эффективные характеристики, но и исследовать распределение механических напряжений в различных материалах и конструкциях, что очень важно для определения прочности.

Отметим, что дискретные системы, состоящие из большого числа элементов, можно заменить квазиконтинуумом по некоторым известным правилам. В результате получится среда с быстро меняющимися свойствами,

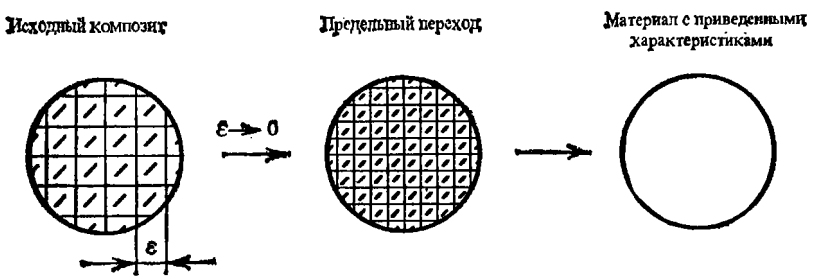

Рис. 3. Замена композитного материала однородным с эквивалентными свойствами

для которой можно применять метод осреднения. Поэтому различие между континуализацией и осреднением в значительной мере условно.

Прицип осреднения является одним из глобальных философских принципов, на которых зиждется наше знание. Последнее время даже высказываются мысли о том, что пространство и время имеют дискретный характер, а мы воспринимаем лишь их средние характеристики. В то же время метод осреднения является и мощным аналитическим аппаратом решения разнообразных задач нелинейной механики, механики сплошных сред, описываемых уравнениями в частных производных, и т. д.

Ренормализация

К сожалению, простое усреднение мелкомасштабных движений применимо не во всех случаях. Встречаются такие задачи, в которых даже на макроскопическом уровне заметно проявляются движения нескольких различных масштабов. К ним относится, например, изучение так называемых критических явлений, связанных с фазовыми переходами, или турбулентности. При этом приходится проводить усреднение последовательно для всех масштабов. Такова суть процедуры ренормализации, составляющей основу метода ренормгруппы. Но строгая реализация этой процедуры сопряжена с огромными техническими трудностями. Один из способов их преодоления подсказывает совершенно неожиданная асимптотика.

Дело в том, что в воображаемом мире с четырьмя пространственными измерениями эти трудности не возникают и удается осуществить обычное усреднение. Нельзя ли рассматривать этот случай как предельный, а величину $\varepsilon=4-d$ (d — размерность пространства) как малый параметр? В реальном трехмерном мире $d=3$ и $\varepsilon=1$. И все же асимптотическое разложение по параметру ε оказалось весьма эффективным при решении сложнейших задач физики критических явлений.

Регулярные асимптотики и пограничные слои

Отклонения реальной системы от ее предельной идеализации могут иметь различный характер. Иногда

они малы во всей области изменения параметров. Так бывает, если параметры исходной системы a_{i0} претерпевают незначительные изменения: $a_i = a_{i0} + \varepsilon a_{i1}$, $\varepsilon \ll 1$. Например, если рассматривается слабо анизотропная среда, то для построения первого приближения можно перейти к изотропному случаю. Если отклонения реального процесса от идеализированного (первого приближения) малы во всей рассматриваемой области (или во всем рассматриваемом временном диапазоне), то говорят о регулярном возмущении.

Не останавливаясь на подробностях, отметим лишь, что построение теории и в этом, относительно простом случае далеко не тривиально. Основные результаты получены здесь А. Пуанкаре и А. М. Ляпуновым. Как отмечает Н. Н. Моисеев, «эта теория дает очень много для понимания того, как должны строиться методы исследования новых задач. Изучение генезиса целого ряда современных исследований может показать, что у их истоков находятся идеи и методы, впервые сформулированные в теории Ляпунова—Пуанкаре».

С другой стороны, часто отклонения истинного решения от первого приближения велики, но локализованы в малой области. Так, если жидкость обтекает тело, то всюду, за исключением узкой зоны у поверхности тела, течение можно считать потенциальным и не учитывать вязкость жидкости. Правда, вблизи поверхности учет вязкости необходим, но он упрощается именно за счет малости этой зоны пограничного слоя.

Это видно из приведенной на первой странице обложки фотографии эксперимента по обтеканию кругового цилиндра потоком вязкой жидкости, заимствованной из «Альбома течений жидкости и газа» под редакцией М. Ван-Дайка (прекрасного собрания фотографий гидро- и аэродинамических экспериментов). Локализованные быстроизменяющиеся состояния могут возникать не только у границ, но и во внутренних зонах рассматриваемой области. Явление внутреннего пограничного слоя проиллюстрировано на последней странице обложки, где изображена компьютерная модель деформации сферической оболочки под действием внешнего давления.

Математически подобные задачи называются сингулярно возмущенными.

Любопытный пример скин-эффекта можно наблюдать в задачах теплопроводности. Речь идет о распро-

странении годовых колебаний температуры в глубь Земли. Скорость тепловой волны для грунта средней влажности составляет 9 м/год. Почва оттаивает приблизительно на глубину скин-эффекта δ (приблизительно 1,5 м/год). При глубине 10 м годовые колебания температуры составляют $\approx 0{,}1°$. Из-за скин-эффекта при глубине, существенно большей δ, температура приближенно равна средней годовой температуре и, если она меньше нуля, то образуется вечная мерзлота.

Интересное развитие получил метод пограничного слоя в сочетании с идеей «промежуточной асимптотики». Грубо ее можно описать так. Пусть исходное дифференциальное уравнение имеет некоторое семейство автомодельных, самоподобных решений. Вообще говоря, они не удовлетворяют заданным начальным и (или) граничным условиям. При наложении этих условий возможны два случая. Первый — автомодельное решение разрушается (в этом случае можно говорить о его неустойчивости). Второй — появляются локализованные состояния, «выбирающие» определенное решение из данного класса автомодельных.

Невырожденность пограничного слоя обеспечивает устойчивость. В частности, идея промежуточной асимптотики в сочетании с понятием пограничного слоя позволяет понять роль частных асимптотических решений в нелинейных теориях. А именно: «В нелинейных задачах точные частные решения иногда кажутся бесполезными: поскольку нет принципа суперпозиции, нельзя непосредственно найти решение задачи с произвольными начальными условиями. Асимптотическое поведение является ключом, который частично играет роль, утраченную принципом суперпозиции. Дело в том, что, как правило, эти частные решения представляют собой асимптотики широкого класса других решений, отвечающих другим начальным условиям» (Я. Б. Зельдович).

Отметим в заключение этого раздела, что ряды теории возмущений не обязательно должны сходиться. Впервые понятие о рядах, расходящихся, но в некотором смысле приближающих рассматриваемые функции, ввел А. Пуанкаре. Кратко можно сказать, что сходящийся ряд представляет функцию при $\varepsilon = \varepsilon_0$, $n \to \infty$, а асимптотический — при $n = n_0$, $\varepsilon \to 0$ (рис. 4).

О нетривиальности понятия асимптотического ряда говорит следующий факт: «Самая мысль, что функция

может быть определена расходящимся асимптотическим рядом, была совершенно чужда сознанию девятнадцатого века.

Когда Борель открыл, что его методы суммирования дают «правильный» ответ для многих классических расходящихся рядов, он решил совершить путешествие в Стокгольм к Миттаг-Леффлеру. Миттаг-Леффлер вежливо выслушал все то, что Борель хотел ему сказать, и затем, положив руку на полное собрание сочинений своего учителя Вейерштрасса, сказал по латыни: «Мастер запрещает это» (М. Кац).

Сам Вейерштрасс в письме к С. В. Ковалевской подчеркивал, что «достоинство исследований Пуанкаре состоит больше в их отрицательных, а не в положительных результатах». Он же писал Миттаг-Леффлеру: «Работа Пуанкаре* астрономов** не очень-то ободрит, так как уничтожает некоторые их давнишние иллюзии и оп-

* Речь идет о «Новых методах небесной механики».
** Т. е. прикладных математиков.

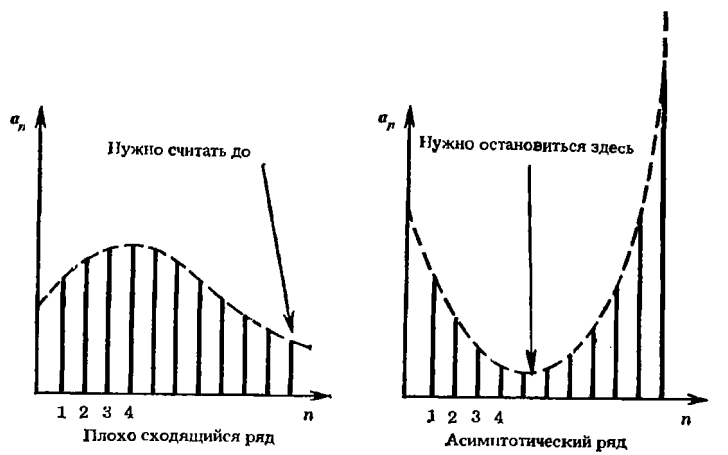

Рис. 4. Сравнение медленно сходящегося и асимптотического рядов

Многие плохо сходящиеся ряды ведут себя вначале как расходящиеся. Поэтому при их использовании приходится суммировать большое количество членов ряда. Асимптотический же ряд, оборванный на минимальном или первом возрастающем члене (такое ограничение является оптимальным), позволяет обойтись значительно меньшими вычислительными затратами

ровергает многое из того, что казалось им прежде обоснованным.

Например, доказывается расходимость рядов, к которым приводят методы Ньюкома, Линдстедта и других».

Однако быстро пришло понимание того факта, что на самом деле исследователи получили новый высокоэффективный аппарат.

Первый том «Новых методов небесной механики» вышел в 1892 г., а уже в 1898 г. Парижская академия объявила конкурс на тему «Исследование возрастающей роли расходящихся рядов в анализе», на котором большим призом был отмечен мемуар Э. Бореля.

Локальная и нелокальная линеаризации

Даже малое число степеней свободы или локализованность решения не гарантируют преодоления математических трудностей, если уравнения физической теории нелинейны. В этом случае на помощь приходит линеаризация — асимптотический метод, использующий представление о процессах малой интенсивности.

Линейный подход позволил сформировать такие фундаментальные понятия, как спектр, собственная функция, нормальные колебания. Последнее означает, что для линейной системы с n степенями свободы при отсутствии трения всегда можно выбрать такие («нормальные») координаты, в которых она описывается уравнениями колебаний не связанных между собой маятников. Это понятие естественно обобщается и на непрерывные системы, для которых решение выбирается в виде ряда Фурье по тригонометрическим или другим периодическим функциям пространственных переменных. Иными словами, любое движение линейной системы представляется в виде линейной комбинации нормальных колебаний.

Принципиально важно, что такие колебания выделены не только математически, но и физически. Так, под действием внешней силы «резонировать» в системе будут именно нормальные колебания.

Если рассматривать линейную систему как первое приближение к нелинейной (в этом суть локальной линеаризации), то при учете нелинейных поправок в уравнениях второго и последующих приближений появляются фиктивные внешние нагрузки, вызывающие резонан-

сы нормальных колебаний. Избежать этого удается, «подправив» параметры нормальных линейных колебаний.

Однако сильно нелинейные системы, особенно высокой размерности, нельзя описать ни в каком приближении метода локальной линеаризации. Поэтому до недавнего времени сочетание высокой размерности с сильной нелинейностью выглядело непреодолимой преградой для конструктивного исследования физической системы. Но в последние годы был открыт весьма широкий класс многомерных нелинейных систем, допускающих такое исследование. Эти системы, получившие название интегрируемых, имеют частные решения в виде уединенных волн — солитонов, представляющих собой в некотором смысле аналог нормальных колебаний в линейных системах. Возникло нелинейное обобщение метода Фурье— метод обратной задачи рассеяния, в котором солитоны играют фундаментальную роль, во многом заменяя собой привычные фурье-компоненты. Метод обратной задачи рассеяния можно трактовать как нелокальную линеаризацию исходного нелинейного уравнения. Иначе говоря, скрытая симметрия нелинейного уравнения позволяет найти преобразование, сводящее построение широкого класса решений к анализу линейных уравнений.

В рамках асимптотического подхода интегрируемые системы, в свою очередь, могут выступать в качестве приближения при анализе близких к ним, но не интегрируемых.

Оценка погрешности асимптотических решений

Вопрос: «До каких значений ε его можно считать малым (большим)?» — одна из наиболее острых проблем в асимптотических методах. М. Гелл-Ман пишет: «На деле всякий теоретик в своей собственной работе полагает какие-то параметры малыми, а затем нападает на других, поступающих так же, обвиняя их в «неестественности».

В приложениях полученные ряды часто являются сходящимися в достаточно широкой области, однако доказать сходимость и определить ее область, как правило, не просто. Даже в тех случаях, когда это удается сделать, оценки носят слишком пессимистический характер, так как получаются на основе ряда усиливающихся

неравенств. Доказательство асимптотического характера построенных разложений получить обычно легче, однако и дает оно значительно меньше. По сути, асимптотичность свидетельствует, что данное решение равномерно пригодно или равномерно непригодно — и не более того, так как входящие в оценки постоянные обычно неизвестны. Самый честный (и, как естественное следствие, самый трудный) путь состоит в доказательстве асимптотичности с последующей оценкой погрешности в некоторых предельных — «лучшем», «худшем» и «промежуточном» случаях. Эти понятия трудно формализуемы, но, как правило, достаточно ясны в конкретных физических задачах. Если же не приводить таких оценок, то нет никаких оснований выдавать доказательство асимптотичности за полное обоснование построенных приближений.

Отметим еще, что доказательство асимптотичности часто требует большого труда. На практике бывает проще получить решение задачи другим приближенным методом (численным, вариационным и т. д.), по крайней мере в некоторых частных случаях, и сравнить его с решением на основе метода возмущения.

Большое значение имеют точные решения. Если в некоторых случаях (например, для определенных значений параметров) они существуют, возможно не только численное, но и аналитическое сравнение путем разложения этих решений в ряды по используемым малым параметрам. В любом случае «честность — лучшая политика», и всегда следует приводить доводы, на которых зиждется уверенность в правильности полученных тем или иным методом результатов.

Кредо физика было изящно сформулировано В. И. Юдовичем, предложившим «теорему»: «Любая разумная асимптотика может быть обоснована».

Расширение области применимости метода возмущений

Общий недостаток асимптотических методов — локальность получаемых решений. Иными словами, они позволяют найти решение задачи лишь в небольших пределах изменения параметров системы. На практике же часто нужно выйти за эти пределы. Поэтому в последнее время большое внимание уделяется методам

расширения области применимости асимптотических методов.

Если представленный ряд сходится при $a \leqslant \varepsilon \leqslant b$, то можно попытаться расширить область его сходимости при помощи аналитического продолжения. Так, в гидромеханике часто эффективно преобразование Эйлера

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon/(1+\varepsilon),$$

переносящее особенность из точки $\varepsilon = -1$ в бесконечно удаленную точку. Трудность здесь в определении точки особенности при наличии небольшого числа членов разложения. Для расходящихся рядов возмущений часто эффективны методы суммирования Бореля, Чезаро и других, однако и здесь трудности возникают из-за малого числа членов. Более эффективными могут оказаться методы мероморфного продолжения — метод Паде-аппроксимации, перестройка ряда в цепную дробь или в рациональную функцию по другой схеме. Остановимся кратко на Паде-аппроксимантах. Если задан ряд Маклорена для функции $\varphi(\varepsilon)$

$$\varphi(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \varepsilon^i, \qquad (1)$$

то Паде-аппроксимантой $[m/n]$ называется дробно-рациональная функция, коэффициенты которой определяются из того условия, что первые $m+n+1$ членов ряда (1) совпадают с первыми $m+n+1$ членами ряда Маклорена для $\varphi[m/n](\varepsilon)$. Основные преимущества перехода к дробно-рациональной функции состоят в возможности учета особенностей функции и описания нетривиального поведения при $\varepsilon \to \infty$.

Сращивание предельных асимптотик

Анализ многочисленных примеров подтверждает, что часто реализуется своеобразный «принцип дополнительности»: если при $\varepsilon \to 0$ можно построить физически содержательную асимптотику, то, как правило, существует нетривиальная асимптотика и при $\varepsilon \to \infty$ *.

---

* Н. Бор: «Есть два вида истины: тривиальная, которую отрицать нелегко, и глубокая, для которой обратное утверждение — тоже глубокая истина».

О том, что метод исследования, основанный на изучении предельных случаев, является, по существу, основным инструментом ученого, говорит А. Пуанкаре. Отмечая, что объектом науки являются в первую очередь повторяющиеся, в некотором смысле элементарные (простые), факты, он пишет: «Но где же они — эти простые факты? Ученые искали их в двух крайних областях, в области бесконечно большого и в области бесконечно малого. Их нашел астроном, ибо расстояния между светилами громадны, настолько громадны, что каждое из светил представляется только точкой; настолько громадны, что качественные различия сглаживаются, ибо точка проще, чем тело, которое имеет форму и качество. Напротив, физик искал элементарное явление, мысленно разделяя тело на бесконечно малые кубики, ибо условия задачи, которые испытывают медленные непрерывные изменения, когда мы переходим от одной точки тела к другой, могут рассматриваться как постоянные в пределах каждого из этих кубиков».

Далее А. Пуанкаре приводит простой пример — исследование некоторой кривой и отмечает: «Так как он (ученый) желает изучить кривую саму по себе, то он правильно распределит точки, подлежащие наблюдению, и, как только он их будет знать, он соединит их непрерывной линией и тогда будет иметь в своем распоряжении кривую целиком. Но что же он для этого сделает? Если он первоначально определил крайнюю точку кривой, то он не будет оставаться все время вблизи этой точки, а напротив, он перейдет прежде всего к другой крайней точке. После двух конечных точек наиболее интересной будет середина между ними и т. д.».

Наиболее трудным с точки зрения асимптотического подхода оказывается промежуточный случай ($0 \ll \varepsilon \ll \infty$). Правда, в этой области часто хорошо работают численные методы. Однако если стоит задача исследовать решение в зависимости от параметра ε, то по крайней мере неудобно пользоваться различными решениями в разных областях. Построение единого решения — нетривиальная задача. На наш взгляд, прогресс в ее решении во многом будет способствовать прогрессу асимптотических методов в целом. Вообще говоря, в рассматриваемом примере мы имеем дело с задачей теории аппроксимации функций. А именно: известно поведение функции

в зонах I и III (рис. 5), нужно определить ее в зоне II. С этой целью можно использовать разные подходы. Например, иногда удается «сшить» предельные значения исходного оператора и синтезировать краевую задачу, которая, будучи проще исходной, позволяет осуществить гладкую склейку решений. В некоторых случаях для сращивания предельных разложений можно использовать вариационные методы, принимая в качестве аппроксимирующих функций эти предельные разложения. Есть и другие «народные приемы».

Весьма перспективным в настоящее время, как нам кажется, является метод двухточечных аппроксимаций Паде.

Дадим определение двухточечных Паде-аппроксимаций. Пусть

$$f(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varepsilon^n, \qquad \varepsilon \to 0, \tag{2}$$

$$f(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \varepsilon^{-n}, \qquad \varepsilon \to \infty, \tag{3}$$

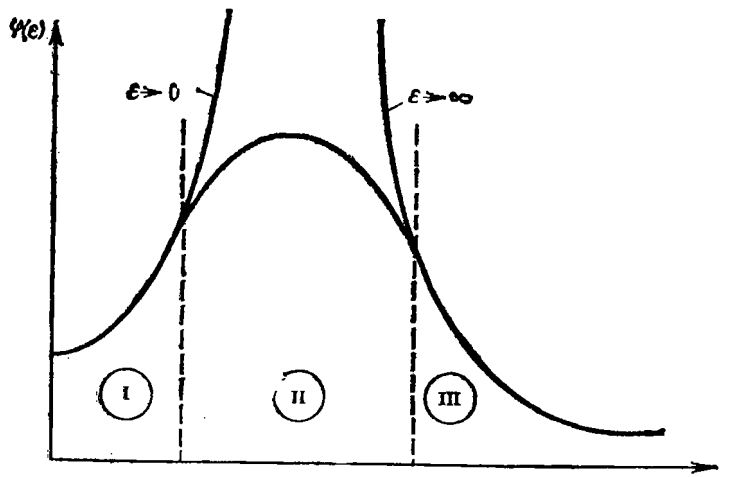

Рис. 5. Восстановление значения функции $\varphi(\varepsilon)$ по двум асимптотическим представлениям $\varepsilon \to 0$ и $\varepsilon \to \infty$

Тогда двухточечная Паде-аппроксиманта имеет вид:

$$f(\varepsilon)=\frac{\sum_{i=0}^{m}\alpha_i\varepsilon^i}{\sum_{j=0}^{n}\beta_j\varepsilon^j}, \qquad (4)$$

где α_i, β_j подбираются из условия: разложения выражения (4) при $\varepsilon\to 0$ и $\varepsilon\to\infty$ должны совпадать с выражениями (2) и (3) соответственно.

Говоря о сращивании, нельзя не упомянуть о «нобелевской премии за сращивание». Речь идет о построении Планком формулы для интенсивности излучения черного тела.

Суть здесь состоит в следующем. Для энергии излучения абсолютно черного тела в интервале длин волн от ν до $\nu+d\nu$ классической физикой были даны две формулы: формула Вина

$$E=C\nu^5\exp\left(-\frac{b}{T\nu}\right)d\nu$$

(b, C=const, T — температура) и формула Рэлея—Джинса

$$E=8\pi kT\nu^{-1}d\nu,$$

где k — постоянная Больцмана. Формула Вина асимптотически верна в области коротких волн ($\nu T\to 0$) и дает резкие расхождения с опытом в области длинных волн. Формула Рэлея—Джинса асимптотически верна для длинных волн, но неприменима для коротких. М. Планком была получена единая (сращенная) формула

$$E=\frac{8\pi\nu^3 h}{C^3(\exp(\nu/kT)-1)}.$$

«Это едва ли не единственный случай в истории физики, когда выражение, пригодное во всей области изменения переменных, было найдено по двум предельным случаям, т. е. когда точное соотношение было угадано с помощью интерполяционной процедуры», — пишет А. Б. Мигдал.

Анри Паде

Наука создается людьми, и наш интерес к создателям науки совсем не случаен. О выдающихся ученых

написаны книги, статьи в энциклопедиях и справочниках. Так, например, легко найти хотя бы основные сведения о жизни Лагранжа, Лапласа, Пуанкаре, А. М. Ляпунова. Но бывают и другие ученые, чей вклад весьма скромен, а при жизни и малозаметен. Вспомним хотя бы уравнение Кортевега—Де Вриза, которое приобрело такую известность в связи с открытием солитонов. Только после этого появился интерес к биографиям этих ученых. Похожая судьба и у французского ученого Анри Паде. Предложенное им преобразование долгое время использовалось мало, и только примерно с 60-х годов нашего века началось его широкое применение. Регулярно стали проводиться конференции, посвященные Паде-преобразованию и его приложениям в физике и механике. Выяснилось, что А. Паде воздвиг себе «нерукотворный памятник», хотя при жизни и не узнал об этом.

Анри Эжен Паде родился 17 декабря 1863 г. в городе Абвиль (Франция), в 1988 г. исполнилось 125 лет со дня его рождения.

В 1883 г. он поступил в Высший педагогический институт, который окончил в 1886 г., получив степень бакалавра по математике. После преподавания в школах Лиможа, Каркассона и Монтпелье А. Паде продолжил обучение в Германии, сначала в Лейпциге, потом в Геттингене. 21 июня 1892 г. в Парижском университете А. Паде защитил докторскую диссертацию, в которой и было предложено преобразование, получившее его имя.

Впоследствии диссертация А. Паде была опубликована в научных записках Высшего педагогического института. Далее А. Паде работал преподавателем в Лилле с 1897 г., профессором теоретической и прикладной механики в Пуатье с 1902 г. и профессором механики в Бордо с 1903 г.

В 1906 г. он был избран деканом факультета в Бордо и стал лауреатом почетной премии по математике, присужденной Французской Академией наук по представлению Пикара. В 1908 г. А. Паде назначается ректором академии в Безансоне (самым молодым ректором Франции в это время). В 1917 г. он становится ректором академии в Дижоне, в 1923 г. — ректором университета Экс-Марсель и остается на этом посту вплоть до ухода на пенсию в 1934 г. Умер А. Паде в 1953 г., в возрасте 89 лет.

Активное применение преобразования Паде в механике и физике началось значительно позднее, после работы Шенкса 1955 г.

Интересно, что метод аппроксимации Паде был независимо открыт по меньшей мере дважды. Паде сделал это в своей диссертации в 1892 г., не зная, по-видимому, о более ранней работе Якоби (1846 г.). Впрочем, еще в 1740 г. Андерсон использовал аналогичную аппроксимацию для логарифмической функции. Подобные случаи далеко не редкость в науке.

Общие черты асимптотических подходов

С математической точки зрения асимптотические методы основаны на разложениях в ряды Тейлора или Фурье.

В первом случае речь идет о построении некоторых локальных уточнений. Сюда относятся различные варианты метода возмущений, локальной линеаризации, асимптотической редукции, пограничного слоя.

Разложение по степеням малого параметра появилось в небесной механике еще в работах И. Ньютона. Детальная разработка этого метода принадлежит А. Пуанкаре и А. М. Ляпунову. В том случае, если нужно разделить решения с различной глобальной изменяемостью («быстрые» и «медленные» решения), естественно использовать метод осреднения, являющийся, по существу, обобщением разложения в ряд Фурье. Осреднение в задачах небесной механики встречалось уже у П. Лапласа и Ж. Лагранжа. Дальнейшее развитие метод получил в работах А. Пуанкаре, Б. Ван-дер-Поля, Н. М. Крылова, Н. Н. Боголюбова, Ю. А. Митропольского, Н. С. Бахвалова и других авторов.

В последнее время, в связи с открытием солитонов, описываемых некоторыми дробно-рациональными соотношениями, усилился интерес к более общим, чем ряды, представлениям решений. Здесь нужно отметить цепные дроби, преобразования Паде, Шенкса и целый ряд других приемов. Интерес к различного вида единым разложениям, получающимся, например, при помощи двухточечных Паде-аппроксимант, обусловлен повышением интереса к синтезу в современной науке.

Асимптотические методы и ЭВМ

У читателя, возможно, уже возник вопрос: а стоит ли применять асимптотические методы, если в последнее время такое развитие получили ЭВМ? Может быть, проще запрограммировать исходную задачу во всей ее сложности и решать, применяя универсальные численные методы?

На это можно ответить так. Во-первых, применение асимптотических методов оказывается весьма полезным предварительным этапом анализа задачи и в тех случаях, когда результаты получаются численно. Они позволяют выбрать наилучший численный прием и разобраться в обширном, но не упорядоченном числовом материале. «Эффективные вычислительные методы решения той или иной задачи, экономные с точки зрения затраты машинного времени, всегда должны использовать информацию об аналитической природе задачи» (Н. Н. Моисеев). Во-вторых, асимптотические методы хорошо работают в области экстремальных параметров — там, где численные методы вообще отказывают или встречают большие трудности. Недаром Лаплас говорил, что асимптотические методы «тем более точны, чем более нужны». Нельзя не отметить роль асимптотических методов в многомерных задачах. Хотя многие считают, что на хорошей ЭВМ можно решить любую задачу, это далеко не так. Если речь идет о задачах на собственные значения, то пока численные расчеты дают надежные результаты только в одномерном случае. Даже двумерная задача представляется уже очень сложной с точки зрения численного счета.

Вот еще компетентное мнение Нобелевского лауреата К. Вильсона: «Компьютеры расширяют возможности теоретиков, но даже численные компьютерные методы ограничены на практике числом степеней свободы. Методы численного интегрирования неприменимы при числе переменных интегрирования свыше 5—10; уравнения в частных производных также становятся чрезвычайно сложными, когда число независимых переменных превышает 3. Методы Монте-Карло и статистического усреднения позволяют рассматривать некоторые случаи тысяч и даже миллионов переменных, но медленная сходимость этих методов приводит к большим затратам вы-

числительного времени даже на быстродействующих ЭВМ.

Моделирование на компьютере атмосферного потока, покрывающего все масштабы длин турбулентности, потребовало бы создания сетки с миллиметровым шагом, покрывающей тысячи миль по горизонтали и десятки миль по вертикали; общее число точек сетки было бы порядка 10^{25} — далеко за пределами возможностей любого мыслимого компьютера».

В то же время есть обоснованная надежда на эффективное исследование подобных систем при помощи, например, ренормгруппы.

Возможно создание таких алгоритмов, которые гладкие части решений определяют численно, а для областей резкого их изменения (например, пограничных слоев) используют асимптотические подходы. Наконец, асимптотические методы развивают нашу интуицию и играют большую роль в формировании мышления современного ученого — естественника и инженера (об этом подробнее см. далее). Поэтому асимптотические и численные методы можно рассматривать не как конкурирующие, а как взаимодополняющие.

Развитие ЭВМ, кстати, весьма способствует и развитию асимптотических методов. Например, один из самых трудных этапов их применения — построение высших приближений. Как правило, для сложных задач «вручную» удается построить два, от силы три приближения. Теперь появилась возможность переложить эту рутинную работу на плечи компьютеров, что в некоторых случаях уже сделано.

II. КАК РАБОТАЮТ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

> Деятельность физика в значительной мере состоит в том, чтобы приходить к трудным уравнениям и затем искать что-нибудь, что заменило бы их решение.
>
> **Т. Постон, И. Стюарт**

Мы очень кратко охарактеризовали различные модификации асимптотического подхода, применяемые в физических задачах. Если теперь сосредоточить внимание на какой-либо конкретной области физики, можно убедиться, что достигнутый ею уровень развития определяется в значительной степени существованием естественных для этой области малых (больших) параметров.

Подчас сам прогресс в той или иной области физики неразрывно связан с существованием характерных асимптотических параметров. В частности, малость знаменитой постоянной тонкой структуры $\alpha = e^2/\hbar c \simeq {}^1/_{137}$ (e — заряд электрона, $\hbar$ — постоянная Планка, c — скорость света) позволяет в рамках квантовой электродинамики с высокой точностью рассчитать взаимодействие фотона и электронов. Этот безразмерный параметр определяет интенсивность электромагнитных взаимодействий.

Все основные результаты квантовой электродинамики, с поразительной точностью описывающие экспериментальные данные, получены именно благодаря возможности применения теории возмущений, в которой решения уравнений ищутся в виде разложений по степеням α. Аналогичные параметры для сильновзаимодействующих частиц — адронов (к которым относятся, например, протоны и нейтроны) превышают α во много раз. Это главная причина принципиальных трудностей, в свое время тормозивших развитие теории сильных взаимодействий. Только открытие кварковой структуры адронов и явления «асимптотической свободы», заключающегося в ослаблении взаимодействия между кварками и связывающими их глюонами на малых расстояниях, резко изменило ситуацию и привело к рождению но-

вой теории сильных взаимодействий — квантовой хромодинамики.

Рассмотрим с этой точки зрения несколько примеров.

Небесная механика

Роль небесной механики в становлении и развитии асимптотических методов исключительно велика. Выше уже неоднократно отмечалось, что и метод возмущений (и даже сам этот термин), и различные варианты метода осреднения, и понятие асимптотического ряда зародились в небесной механике. Асимптотические методы сыграли важную роль в разработке теории движения Луны и других планет, вычислении времен солнечных и лунных затмений, открытиях новых планет. Вот на последнем вопросе стоит задержаться несколько подробнее. Одно из самых замечательных достижений не только небесной механики, но и всех точных наук — это открытие Нептуна. Обычно, когда говорят об открытии Адамсом и Леверье «на кончике пера» новой планеты, то подчеркивают, что это было триумфом системы Коперника (Ф. Энгельс), закона всемирного тяготения Ньютона. Это, конечно, верно, но в не меньшей степени открытие Нептуна было одним из первых триумфов метода возмущений.

Приведенный пример интересен еще и тем, что здесь, по-видимому, в первый раз была решена обратная задача теории возмущений. Методы решения прямой задачи (определения возмущения данного небесного тела от другого) были уже разработаны. Адамсу и Леверье пришлось по известным возмущениям, производимым неизвестным небесным телом, определить траекторию движения последнего. Далее эта методика была усовершенствована Ловеллом, который предсказал положение Плутона.

В настоящее время расчеты движения искусственных небесных тел основываются, как правило, на методах осреднения или возмущений.

Теория пластин и оболочек

Важным разделом теории упругости является теория пластин и оболочек, т. е. тел, у которых два размера существенно превышают третий. В результате появляется

естественный малый параметр относительной тонкостенности (h). Отсюда вытекает свойство оболочки локализовать изгиб в малой окрестности зоны действия возмущения. Поэтому в теории оболочек асимптотические методы являются наиболее адекватными сути дела как с физической, так и с математической точек зрения. Кроме того, в теории оболочек, как науке с явно выраженным прикладным характером, наиболее важным является вопрос о построении приближенных методов расчета и, в частности, вопрос об устранении в исходных соотношениях тех величин, которые не могут заметно повлиять на окончательные результаты и лишь вносят в расчет неоправданные существом дела трудности.

Не удивительно поэтому, что именно в теории оболочек получили значительное развитие идеи современной асимптотической теории дифференциальных уравнений.

Высокая прочность оболочек определяется способностью воспринимать краевые и поверхностные нагрузки за счет равномерных по толщине деформаций растяжения. Это область безмоментного состояния, которое описывается исходными уравнениями в пределе $h \to 0$.

В хорошо спроектированной оболочке при надлежащем закреплении торцов зоны сильного изгиба имеют малую протяженность. Здесь реализуются напряженные состояния, называемые в теории оболочек краевыми эффектами. Определение их существенно облегчается за счет локализации и быстрой изменяемости.

Интересно отметить, что сами уравнения теории оболочек могут быть получены из уравнений трехмерной теории упругости в результате асимптотического перехода $h \to 0$. При этом оказывается, что известные гипотезы Кирхгофа—Лява (нормальными напряжениями на площадках, параллельных срединной поверхности, можно пренебречь, а прямолинейные волокна, перпендикулярные срединной поверхности, остаются перпендикулярными ей и после деформации) описывают первое приближение. В окрестности же торцов оболочки и в местах резкого изменения напряженного состояния возникают существенно трехмерные напряженные состояния.

В теории пластин и оболочек малый параметр вполне очевиден. Однако нередко случается, что в общей математической формулировке проблемы малые параметры, казалось бы, отсутствуют. Так, зависимость свойств в некоторой точке среды от выбранного направ-

ления (анизотропия) или положения (неоднородность) долгое время считалась лишь усложняющим фактором. Действительно, многие методы, развитые ранее для изотропной однородной среды со свойственными только ей симметриями, оказываются в этой ситуации непригодными. Однако, как выяснилось впоследствии, возможно и целесообразно рассматривать особые предельные случаи сильной анизотропии или неоднородности, на которые до этого просто не обращали внимания. Разработка и применение соответствующих асимптотических методов вызвали быстрое и всестороннее развитие теории таких сред. Полученные при этом уравнения в ряде случаев выглядят даже проще, чем их «изотропные и однородные» аналоги. Подобная ситуация характерна и для теории подкрепленных оболочек.

Тонкостенная оболочка, сочетающая высокую прочность и малый вес, простоту и технологичность изготовления, стала одной из наиболее распространенных конструкций в современной механике — авиа-, ракето-, судостроении, химическом машиностроении. Важнейшая «издержка» тонкостенности — опасность потери устойчивости, возникающая при действии в оболочке сжимающих напряжений. Как правило, для повышения несущей способности целесообразно не увеличивать тол-

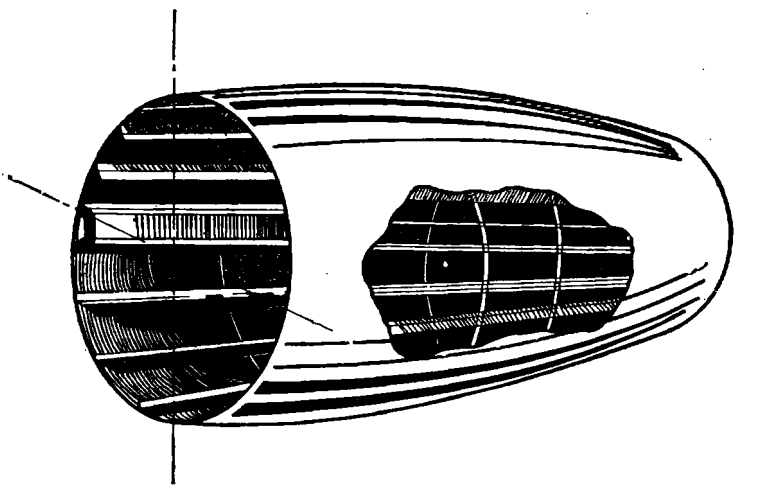

Рис. 6. Оболочка, укрепленная продольными (спринтеры) и поперечными (шпангоуты) ребрами

щину оболочки, а подкреплять ее продольными и поперечными силовыми элементами (рис. 6). С точки зрения проектирования конструкций постановка ребер представляет сложную и требующую всестороннего анализа задачу. Введение ребер жесткости может привести к сильной неоднородности напряженно-деформированного состояния конструкции и ухудшить условия ее работы. Все это требует достаточно детального анализа. На практике обычно переходят к схеме однородной анизотропной оболочки. Жесткостные и инерционные характеристики подкрепляющих элементов «размазываются» по поверхности оболочки, которая теперь рассматривается как однородная, но наделенная некоторыми новыми свойствами в соответствии с конструктивными особенностями объекта («конструктивная ортотропия»).

Введение конструктивной ортотропии дает возможность отвлечься от особенностей силового взаимодействия между ребрами и обшивкой и радикально упростить задачу. В то же время конструктивно-ортотропная схема позволяет достаточно точно определять только глобальные характеристики (частоты колебаний, перемещения), но не локальные (напряжения).

Оказалось, что преодолеть этот недостаток можно, последовательно применяя метод осреднения, основанный на разделении быстрых и медленных составляющих решения. В качестве осредненного решения выступает решение уравнений конструктивно-ортотропной теории, а для построения следующих приближений используется метод нескольких масштабов. Очень существенно, что уточненное решение, позволяющее определять все компоненты напряженно-деформированного состояния, оказывается не более сложным, чем полученное по конструктивно-ортотропной схеме.

Здесь проявляется интересная особенность асимптотических методов. Ребристая оболочка, естественно, более сложна для расчета, чем гладкая. Однако наличие новых параметров и новой структуры (системы ребер) приводит к новым, более широким, чем в изотропном случае, возможностям при асимптотическом интегрировании.

Второй пример связан с перфорированными пластинами и оболочками, роль которых особенно велика в современных химических технологических процессах. Расчет подобной системы (рис. 7, *а*) сильно осложнен

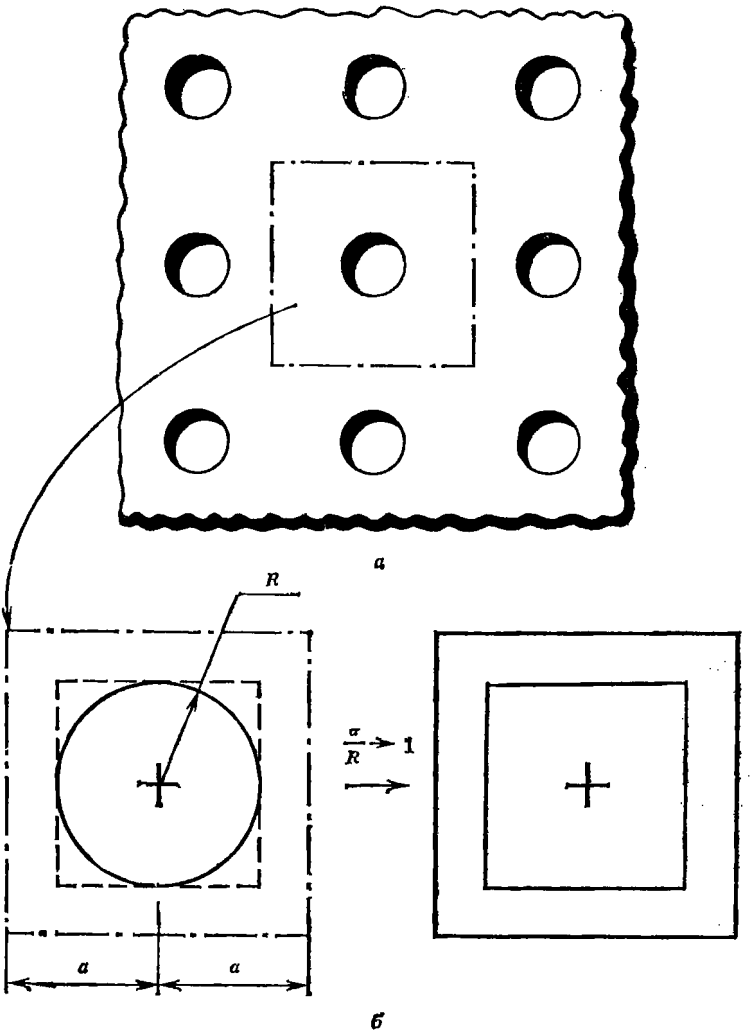

Рис. 7 Схема расчета перфорированной пластины: *а* — перфорированная пластина с выделенной ячейкой периодичности; *б* — замена ячейки с большим круглым отверстием рамкой, составленной из прямоугольных пластин

из-за многосвязности области. Ясно, что и здесь можно применить метод осреднения, но как быть с решением задачи на ячейке (т. е. выделенном и периодически продолжающемся участке с одним отверстием)? Это тоже не простой вопрос. На практике рассматривают два случая. Если отверстие мало, то рассчитывают полуплоскость с отверстием. Если же отверстия велики, то круглое отверстие заменяется квадратным (рис. 7, *б*), а исходная пластина (оболочка) — стержневой решеткой. При асимптотическом подходе оба эти результата получаются с использованием разложения по параметру $\varepsilon = R/a$. В первом случае $\varepsilon \to 0$, во втором $\varepsilon \to 1$. Далее можно эти предельные решения срастить (например, при помощи двухточечной аппроксиманты Паде) и получить решение для отверстия любого радиуса.

Анализ как приведенных, так и множества других инженерных методов расчета показывает, что природа почти всякого разумного упрощения — асимптотическая. Какова же в этом случае могла бы быть роль строгих асимптотических подходов (могла бы, потому что, к сожалению, случаи непосредственного применения асимптотических методов в технической практике не слишком многочисленны)? Это, во-первых, строгая оценка области применимости того или иного упрощения. Иначе эту область пришлось бы устанавливать путем дорогостоящих (часто даже натурных) экспериментов или длительных расчетов на ЭВМ. Во-вторых, часто асимптотика указывает на тонкие эффекты, существенно влияющие на работоспособность конструкции. Это, например, различные концентрации напряжений, обусловленные пограничными слоями, не учитываемыми в грубых схемах.

Наконец, рассмотрим важнейший для техники вопрос об оптимальном проектировании. Это обратная по отношению к расчету исходной системы задача. При решении ее нужно многократно обращаться к решению прямых задач. Как эти решения определять? Можно использовать, например, весьма точные численные алгоритмы. Но тогда на каждом шаге оптимизации придется тратить много машинного времени, а таких шагов могут быть тысячи! Можно взять грубую инженерную схему — но велика опасность попасть в область, где она неприменима, или же «пропустить» важные эффекты.

Именно здесь, на наш взгляд, хороши асимптотические подходы, сочетающие простоту с достаточной точностью и четкой оценкой области применимости.

Физика полимеров

Возможности и пути использования присущих конкретной области физики малых или больших параметров могут быть осознаны в полной мере далеко не сразу. Яркий пример — физика полимеров, которая долгое время находилась на периферии теоретической физики, хотя и имела ряд важных достижений, включая объяснение физической природы упругости резины.

Несколько лет назад академик А. Б. Мигдал, выступая в телевизионной программе «Очевидное — невероятное», на вопрос о его отношении к полимерной тематике ответил примерно так: «Молекулы здесь слишком длинные...» И это, безусловно, указывает на главную трудность, если иметь в виду детальную теорию, описывающую физические эффекты на всех пространственных и временных масштабах. Но стоит изменить постановку задачи и поставить вопрос о свойствах полимерного вещества, обусловленных именно спецификой макромолекул, как возникает основа для создания содержательной и глубокой теории. При этом ее достижения решающим образом обусловлены наличием естественных для полимерных систем малых и больших параметров.

Первым очевидным большим параметром для таких систем является число атомов в цепи $N \gg 1$. Наличие этого параметра позволяет рассматривать даже отдельную полимерную молекулу как макроскопическую систему и использовать эффективную процедуру усреднения, лежащую в основе статистической физики. Изучение асимптотического поведения полимерных систем при $N \to \infty$ стало одной из важнейших задач физики полимеров. В частности, такая фундаментальная характеристика, как средний размер r_0 полимерного клубка в растворе или расплаве полимера, определяется соотношением $r_0 \sim N^{\alpha}$, где величина показателя степени α зависит от физических условий, в которых находится полимерная система. Кроме того, полимерным системам присущи малые параметры, обусловленные характерной для них иерархией взаимодействий. Ковалентное взаимодействие (химическая связь) атомов вдоль цепи намно-

го сильнее всех других («физических») взаимодействий. Это позволяет в обычных условиях считать последовательность атомов вдоль цепи фиксированной. Различные физические взаимодействия также заметно отличаются по интенсивности. Простейшая асимптотика соответствует пренебрежению всеми физическими взаимодействиями (при фиксированных длинах связей). Следующий шаг состоит в учете физических взаимодействий между звеньями полимерной цепи, «ответственных» за ее сопротивление изгибу и скручиванию (по-прежнему без изменения длин связей). Наконец, могут быть «включены» и взаимодействия между близкими в пространстве (но не соседними по цепи!) звеньями скрученной и изогнутой полимерной цепи.

Пример решения сложной технической задачи

Интересен пример применения асимптотических методов для анализа теплового режима активной зоны аварийного блока Чернобыльской атомной электростанции. Ситуация здесь неизмеримо осложнялась недостатком натурных данных, отсутствием аналогов и необходимостью принятия быстрых решений.

«Ясно, что ни любое конечное число сценариев, «проигранных» на ЭВМ, ни набор конкретных упрощенных точно решаемых моделей не могут дать надежного прогноза поведения реального процесса...

Успех математического моделирования связан с правильным определением доминирующего фактора среди множества явлений, составляющих процесс.

Наличие доминирующих факторов в моделируемом процессе означало существование больших параметров в данной системе уравнений. Именно это дало нам надежду выявить «катастрофические» асимптотические решения соответствующего класса задач. Мы считали, что... малые параметры и коэффициенты, которые фигурировали в модели, находятся в «общем положении». Были обнаружены уравнения и законы, которые справедливы для асимптотических решений модели «почти для всего» разумного класса неопределимых величин» (В. П. Маслов и др.).

Пришлось рассматривать задачу о фильтрации раскаленного газа через пористую среду. Применение метода осреднения позволило получить относительно прос-

тые дифференциальные уравнения и аналитически исследовать процесс. Оказалось, что наиболее приемлемой является модель фильтрационного охлаждения — модель фильтрации газа через саморазогревающуюся пористую среду в поле сил тяжести.

Исследование устойчивости стационарного процесса привело к открытию нового физического явления — сухого кипения, которое возникает при превышении критического значения тепловыделения в завале. В свою очередь, понимание физики процесса позволило правильно сконструировать «саркофаг», оставив отверстия для воздушного охлаждения активной зоны аварийного реактора.

Неупорядоченные системы

Основы теории неупорядоченных систем были заложены в работах И. М. Лифшица на основе асимптотических методов.

«Все, знавшие Илью Михайловича, хорошо помнят, что всякий раз, приступая к обсуждению какой-либо работы, он прежде всего спрашивал: «А какой у вас малый параметр?» — имея в виду, что в подавляющем большинстве решаемых теорфизических задач непременно используется малость той или иной величины» (М. И. Каганов).

Сам И. М. Лифшиц в своей пионерской работе по теории неупорядоченных систем принимал следующие предположения: «Малые возмущения могут быть двух принципиально различных родов:

(I) Значительный процент узлов занят чужими атомами, однако эти чужие атомы мало отличаются от «своих»...

(II) Чужими атомами занято сравнительно малое число узлов, однако эти атомы существенно отличны от «законных».

На основе этих предположений И. М. Лифшиц исследовал самоусредняющиеся величины (величины, которые становятся достоверными в макроскопическом пределе) и показал, что свойством самоусредняемости обладает дипольный момент единицы объема.

Далее при построении теории использовались разложения по степеням возмущения и концентрации.

Асимптотика и изобразительное искусство

Вопрос о соотношении симметрии и искусства широко освещен в литературе. Достаточно вспомнить книги Г. Вейля, А. В. Шубникова и В. А. Копцика, И. И. Шафрановского и многих других. Гораздо меньше уделено внимания соотношению асимптотики и искусства. Между тем многое говорит о том, что для искусства интересно именно первое несимметричное приближение. Приведем слова О. Ренуара: «Природа не терпит пустоты, как говорят физики; но они могли бы и дополнить свою аксиому, прибавив, что она не терпит также и симметрии... Два глаза, даже на самом красивом лице, всегда чуть-чуть различны, нос никогда не находится в точности над серединой рта, долька апельсина, листья на деревьях, лепестки цветка никогда не бывают в точности одинаковыми».

Итак, именно «ε-отклонения» представляют интерес для живописи. С другой стороны, П. Сезан считал, что нужно рассматривать лишь «предельные соотношения», поскольку «все в природе сферично и цилиндрично». Такой подход в изобразительном искусстве, по сути, есть асимптотическая аппроксимация сложных пространственных тел при помощи набора простых геометрических объектов. И. И. Шафрановский отмечает: «Думается, что правильный путь лежит посередине. Важно исходить из основных законов природной симметрии, выявляя вместе с тем и чуть заметные отклонения от них, обусловленные динамикой движущейся и развивающейся материи».

Понятие об отклонении от симметрии как о переходе от статики к динамике поддерживает и Г. Вейль. В частности, он цитирует статью Фрея «К проблеме симметрии в изобразительном искусстве»: «Симметрия означает покой и скованность, асимметрия же, являющаяся ее полярной противоположностью, означает движение и свободу». Итак, малое отклонение от симметрии (первое приближение по ε) означает движение от одной симметрии к другой. Современному изобразительному искусству часто присуще резкое, «асимптотическое» выделение присущих объекту черт (цвета — В. Кандинский, К. Малевич, формы — П. Пикассо, Ж. Брак и т. д.).

Асимптотический подход позволяет с единых позиций

рассмотреть существующие в живописи системы перспективы — «скелета» художественного изображения, не касаясь психологических и биофизических аспектов зрительного восприятия. Можно убедиться, что зрительная перспектива в живописи отнюдь не исчерпывается наиболее распространенной линейной ренессансной перспективой (рис. 8).

Построение перспективы реального мира — геометрическая задача, которой посвящены серьезные теоретические исследования.

Реальная зрительная, так называемая перцептивная, перспектива является нелинейной, причем степень нелинейности существенно зависит от угловых размеров изображаемого объекта и в некоторых случаях проявляется весьма существенно (рис. 9, *а, б*).

Эффекты нелинейной перспективы объективно проявляются, например, при широкоугольном фотографировании при помощи камеры-обскуры. Так, рис. 8. — «Художник, рисующий забор» — иллюстрирует нелинейность реальной перспективы. Перспективное уменьшение высоты забора по мере удаления вправо и влево приводит к тому, что объективно прямые линии — края забора — переходят в кривые линии на изображении. Очевидно, дальше края забора можно приближенно изобразить в сходящейся линейной перспективе, а центральную часть — в параллельной.

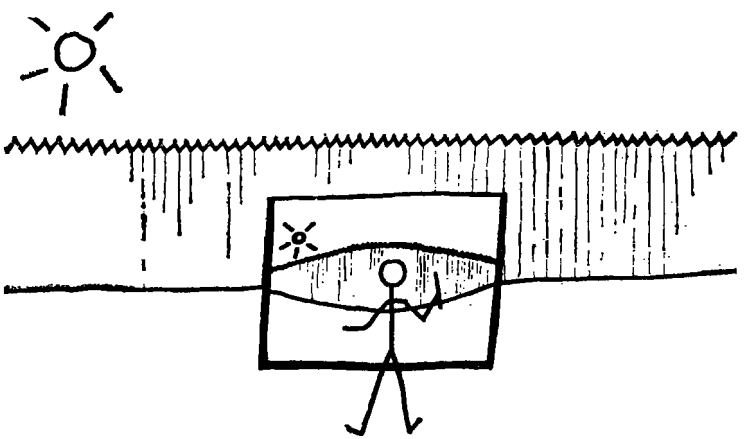

Рис. 8. Художник, рисующий забор

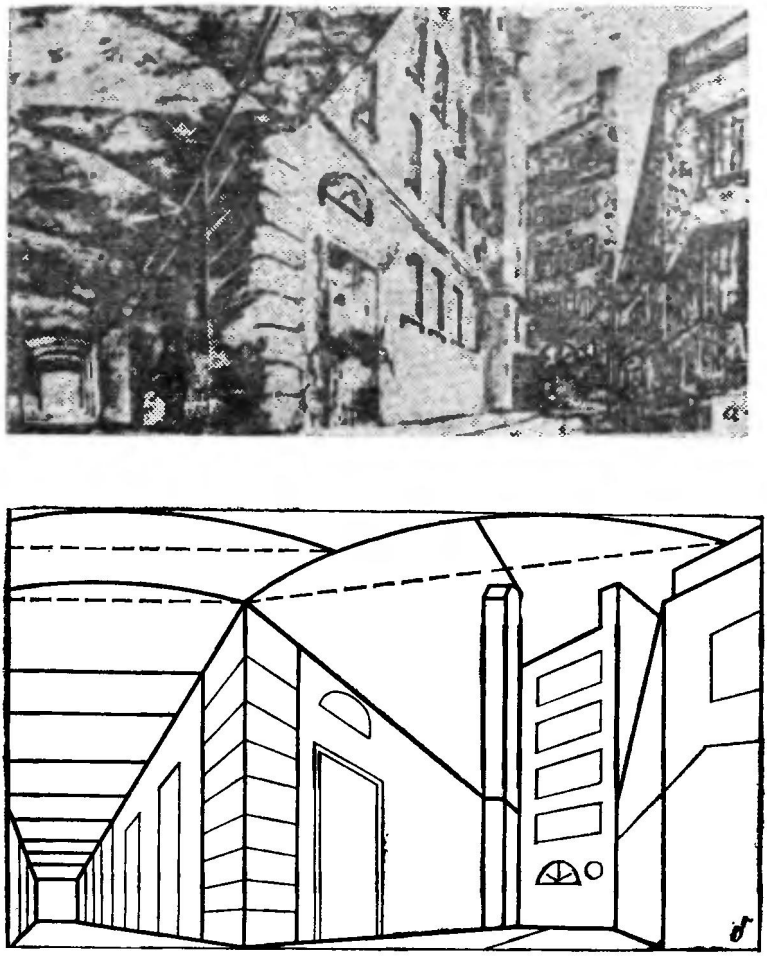

Рис. 9. И. Меллер. Тоннель. Художник видит одновременно перспективу улицы и подворотню (угол между ними 90°, а угол зрения человека ~130°) (*а*). Чтобы увязать эти два плана на плоскости картины, он использует «сращивание» двух линейных перспектив (кусочно-линейная перспектива) (*б*).

Рассматривая нелинейную перспективу с позиций асимптотического метода, можно математически осуществить переход от нелинейной перспективы к различным вариантам линейной.

Введем параметры, характеризующие относительные размеры объекта:

$$\varepsilon_x = H/L, \quad \varepsilon_y = a/L, \quad \varepsilon_z = b/L,$$

где H, a, b — высота, ширина (перпендикулярно лучу зрения) и длина (вдоль луча зрения) объекта, L — расстояние до него.

В случае малых и примерно одинаковых ε_x, ε_y и ε_z получаем параллельную перспективу («коробок спичек в интерьере»), при малых ε_x и ε_y и немалом ε_z получаем линейную ренессансную перспективу.

Если угловые размеры объекта велики и существенно проявляются нелинейные эффекты, для преодоления психологического противоречия между натурной прямой и ее криволинейным отображением нелинейную перспективу заменяют кусочно-линейным приближением. Изображение изломов перспективных прямых при этом, как правило, избегают, маскируя их другими объектами.

На примере картины художника И. Меллера, изображенной в системе ренессансной перспективы, видно, что для «стыковки» двух перспектив пришлось «задрать» поток тоннеля (см. рис. 9, *а*). Для сравнения на прорисовке (см. рис. 9, *б*) пейзаж изображен в нелинейной (сплошные линии) и кусочно-линейной перспективе.

III. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И ФИЗИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ

Асимптотическое соответствие физических теорий

«Движение науки нужно сравнивать не с перестройкой какого-нибудь города, где старые здания немилосердно разрушаются, чтобы дать место новым постройкам, но с непрерывной эволюцией зоологических видов, которые беспрестанно развиваются и в конце концов становятся неузнаваемыми для простого глаза, но в которых опытный глаз всегда откроет следы предшествовавшей работы прошлых веков. Итак, не нужно думать, что вышедшие из моды теории были бесплодны и не нужны».

Эти положения, столь ясно высказанные А. Пуанкаре, не сразу стали общепризнанными. В процессе развития науки каждая новая теория рассматривалась обычно как отрицание уже существующей, т. е. на первый план выдвигалась несовместимость старых и пришедших им на смену представлений и концепций. Лишь после того как сформулированный Н. Бором принцип соответствия сыграл важную конструктивную роль в создании квантовой механики, преемственность научных теорий стала предметом всестороннего изучения физиков и философов.

Хотя и сегодня есть различные, в том числе и взаимоисключающие, точки зрения на соотношение сменяющих друг друга теорий, можно непосредственно убедиться в существовании вполне определенной математической связи между ними. Эта связь и выражается асимптотическим соответствием, появляющимся в разнообразных, зачастую далеко не очевидных формах. Иначе говоря, существуют различные типы предельных переходов от новой теории к старой, как правило, при нулевых или бесконечных значениях некоторых параметров или переменных.

Новая теория может рассматриваться как обобщение существующей (вспомним приведенные слова А. Эйнштейна), однако это обобщение не только количествен-

ное, но и качественное, поэтому она включает и совершенно непредвиденные в рамках старой теории возможности. Часто такие возможности наиболее отчетливо проявляются в противоположных предельных случаях, когда параметр, полагавшийся малым, становится большим, или наоборот. Эффекты, игравшие ранее главную роль, оказываются теперь несущественными, так что новое содержание физической теории воспринимается, как говорится, в чистом виде. Попытаемся ниже на некоторых примерах проследить это соответствие для различных физических теорий.

Как отмечает Н. Н. Моисеев, «наряду с феноменологическими моделями стали возникать еще и модели асимптотические. Дальнейшее накопление знаний приводило к появлению новых феноменологических моделей, а те модели, которые раньше были феноменологическими, постепенно превращались в асимптотические модели. Количество асимптотических моделей отражает в известной степени зрелость науки. Оно показывает достигнутую глубину понимания связей между отдельными фактами и явлениями.

Современная физика — это логически связанная система математических моделей. Огромную роль в этом процессе сыграло развитие идей асимптотического анализа».

Механика Аристотеля и механика Ньютона

Проанализируем в этом аспекте прежде всего переход от теории принудительных движений Аристотеля к механике Ньютона, который дает хороший пример радикального изменения научных концепций, отхода от господствующих длительное время представлений, взглядов и методов. Тем не менее даже при столь революционном изменении обнаруживается асимптотическое соответствие, оставляющее аристотелеву механику действенной для поступательных движений при сильном трении. Но это не так уж удивительно, ведь Аристотель в своих рассуждениях опирался на интуитивные представления, вытекающие из повседневного опыта наблюдений за движущимися объектами при ограниченном диапазоне изменения внешних условий и, безусловно, содержащие зерно истины.

Очень интересны в этом плане исследования психо-

логов, которые показывают, что, не зная выводов современной теории или недостаточно глубоко усвоив их, люди и сегодня приходят к объяснениям, типичным для Аристотеля и его последователей. Сюда относятся представления о силе как причине движения, об остановке движущегося тела вследствие исчерпания сообщенной ему движущей силы — «импетуса», о вертикальном падении тела, брошенного с горизонтально движущегося объекта, наконец, о различном времени падения тел разного веса. В упомянутых исследованиях психологов отмечается удивительное сходство взглядов античных или средневековых философов и многих наших современников, взглядов, представляющих собой естественный итог наблюдений в земных условиях.

Как правило, в этих исследованиях делается упор на несовместимость основных представлений Аристотеля с ньютоновской механикой. Между тем в сфере обычного человеческого опыта, т. е. в земных условиях, эти представления не часто терпят фиаско. И такое положение дел можно объяснить с позиций механики Ньютона именно асимптотическим соответствием, о котором шла речь в предыдущем разделе. Это соответствие удается установить, несмотря на глубочайшие идейные различия старой и новой теории и кардинальное противоречие философских концепций, из которых они проистекали.

В подтверждение сказанного рассмотрим, например, движение тела под действием постоянной силы F в среде с коэффициентом трения α. Аристотель не выделял силу трения как таковую, трение для него было естественным и неотъемлемым атрибутом движения. Он также не формулировал закон движения на математическом языке. Но если это сделать, то «закон движения по Аристотелю» (в предположении линейной зависимости силы сопротивления от скорости v) запишется так: $\alpha v = F$. Если сила постоянна, то постоянна и скорость. Увеличение силы вызывает рост скорости, а при отсутствии силы движения нет. Эти выводы, в общем-то, соответствуют наблюдениям за движением в земных условиях, когда трение достаточно велико.

По Ньютону сила трения относится к внешним силам, а закон движения материальной точки массой m при тех же предположениях имеет вид:

$$m\frac{dv}{dt} = F - \alpha v,$$

так что при отсутствии начальной скорости и постоянной силе

$$v=\frac{F}{\alpha}\left(1-\exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right)\right).$$

Спустя некоторое время второе слагаемое окажется пренебрежимо малым по сравнению с единицей, и мы имеем «закон Аристотеля». Но как могли оставаться незамеченными отклонения от этого закона при меньших временах? Дело в том, что при большом трении переходный режим, описываемый вторым членом, заканчивается очень быстро после «включения» силы (по сравнению с достаточно длительным временем наблюдения). Остается главное, наиболее заметное, и это главное соответствует механике Аристотеля. Наблюдения за движением при малом трении сразу же показали бы значительные отклонения от постоянной скорости, медленное приближение к ней на большом интервале времени. Но таких наблюдений не было в сфере повседневного опыта древних греков. Лишь идеализированный мысленный эксперимент привел Галилея через 2000 лет к представлению о движении по инерции — одному из основных исходных представлений физики Нового времени.

С физической точки зрения приближение Аристотеля сохраняет значение как асимптотика движения при достаточно больших временах; чем значительнее трение, тем раньше это приближение становится применимым. С математической же точки зрения мы сталкиваемся здесь с сингулярным возмущением. В этом случае существует дополнительная асимптотика, которую легко обнаружить, анализируя поведение точного решения при малом показателе экспоненты: $v\simeq\frac{F}{m}t$. Она описывает равноускоренное движение тела под действием силы в среде без сопротивления. Это решение справедливо при любом трении для достаточно малых времен. Чем меньше коэффициент трения, тем шире область его применимости (и тем позднее мы выходим на асимптотику Аристотеля). Соответствующее малым временам уравнение движения

$$m\frac{dv}{dt}=F.$$

представляет собой математическую запись знакомого всем второго закона Ньютона.

Здесь мы попадаем в область механики консервативных или гамильтоновых систем (для них справедлив закон сохранения механической энергии), которая допускает и виды движения, абсолютно чуждые механике Аристотеля: колебания, периодические вращения. Теория консервативных систем — важнейшая асимптотика в механике Ньютона, поскольку описываемые ею режимы движения (в частности, периодические и почти периодические) во многих физических системах оказываются очень хорошим приближением к реальности.

Но и приближение Аристотеля имеет свою область применимости, когда трение становится достаточно большим, как, например, при движении молекул полимеров в растворах. Такие системы называют сверхдемпфированными, а динамические процессы в них — релаксационными, т. е. стремящимися к равновесию.

Механика Ньютона и специальная теория относительности

Создание теории относительности привело к ломке глубоко укоренившихся и считавшихся единственно возможными представлений ньютоновской механики о независимости пространства и времени, об абсолютном времени и т. д. Однако механика Ньютона, как и следовало ожидать, не была отвергнута специальной теорией относительности, а стала ее асимптотическим пределом. Характер асимптотического соответствия этих двух теорий легко проследить на примере частицы с массой покоя, движущейся под действием постоянной по времени силы F со скоростью v. Согласно специальной теории относительности

$$v = \frac{v_0}{\sqrt{1 + v_0^2 c^{-2}}}$$

где c — скорость света,

$$v_0 = Ft/m_0.$$

Решение в рамках механики Ньютона ($v = v_0$) соответствует асимптотике «малых» времен или скоростей ($v_0/c \ll 1$). Первая поправка к этому решению при $v \to c$ очень мала:

$$v = v_0(1 - 0{,}5v_0^2c^{-2}).$$

В теории относительности есть и дополнительная асимптотика «больших времен», уже не имеющая никакого отношения к ньютоновской механике. Действительно, $v \to c$ при $t \to \infty$, а выражение для скорости при учете первой поправки примет вид:

$$v = c(1 - 0{,}5v_0^2c^{-2}).$$

Именно в области «больших времен» отчетливо проявляются основные релятивистские эффекты: новое правило сложения скоростей, новое понятие одновременности, невозможность существования абсолютно твердых тел и т. д., отражающие всю глубину идейного переворота, совершенного теорией относительности.

Геометрическая и волновая оптика

Изучение соотношения между волновой и геометрической оптикой интересно как само по себе, так и для понимания связи между классической и квантовой механиками.

Долгое время считалось, что для описания распространения света достаточно элементарных геометрических построений, лежащих в основе геометрической оптики. После обнаружения дифракции света надолго восторжествовала волновая оптика, при этом геометрическая оптика казалась лишь кустарным рецептом, не отражающим фундаментальных закономерностей природы. Лишь в 20-х годах удалось четко установить, что переход от волновой оптики к геометрической связан с пренебрежением длиной волны $\lambda (\lambda \to 0)$ по сравнению с размерами объекта. Поскольку для видимого света $\lambda \approx 10^{-7}$ м, во многих случаях геометрическая оптика оказывается хорошим приближением.

Математически переход от волновой оптики к геометрической осуществляется при помощи так называемого метода ВКБ (Вентцеля—Крамерса—Бриллюэна).

В точке с координатами (x, y, z) составляющая электромагнитного поля в световой волне представляется в виде

$$u = A(x, y, z, \lambda) \exp(-i\varphi(x, y, z)/\lambda),$$
$$A = A_0 + A_1\lambda + \ldots,$$

где A — амплитуда волны, а φ — ее фаза.

После подстановки выражения для u в волновое уравнение и группировки членов, содержащих одинаковые степени λ, получается нелинейное дифференциальное уравнение для определения φ, называемое уравнением эйконала. Именно оно и соответствует приближению геометрической оптики. Для определения коэффициентов разложения A получается рекуррентная последовательность линейных дифференциальных уравнений, называемых уравнениями переноса.

В геометрической оптике предполагается, что световые лучи распространяются вдоль определенных кривых. Край пучка кажется резким, однако на самом деле интенсивность границы света меняется хотя и быстро, но непрерывно в пограничном слое, толщина которого порядка длины волны λ.

Асимптотику, описывающую чисто волновое явление дифракции, можно построить, используя понятие пограничного слоя.

Классическая и квантовая механики

Связь между классической и квантовой механикой в определенном смысле аналогична той, что существует между геометрической и волновой оптикой. В квантовой механике волновую функцию квазиклассической физической формально описывается методов ВКБ $\hbar/S \to 0$. S — так называемое действие, $\hbar = 10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка. Роль малого параметра при этом играет отношение $\hbar/S$. Переход от квантовой механики к классической формально описывается методом ВКБ $\hbar/\overline{S} \to 0$. Суть такого перехода заключается в том, что заданное в некоторый начальный момент времени распределение вероятностей координат частицы «перемещается» по законам классической механики.

При очень малом импульсе частицы p квазиклассическое приближение теряет смысл. Это происходит, в частности, вблизи «точек поворота», в которых $p=0$ и где по законам классической механики частица остановилась бы и стала двигаться в обратном направлении. В квантовой механике возможно принципиально неклассическое явление — туннелирование частицы через потенциальный барьер. Оно также описывается асимптотикой, использующей именно малость импульса.

При создании квантовой механики в наибольшей ме-

ре проявилась эвристическая роль идеи асимптотического соответствия. Эта роль особенно возрастает в наше время, когда предпринимаются попытки построения единой теории, объединяющей все фундаментальные взаимодействия природы. В рамках такой теории самн понятия электромагнитного, слабого, сильного и гравитационного взаимодействий должны стать асимптотическими.

Асимптотические методы и формирование физического мышления

«В процессе обучения физике мы, по всей видимости, переоцениваем роль совершенно исключительных проблем, поддающихся точному решению с помощью элементарных функций, и не уделяем достаточного внимания гораздо более общей ситуации, в которой используются различные приближенные методы решения... Искусство выбора подходящего приближения, проверки его непротиворечивости и отыскания, по крайней мере интуитивных соображений по поводу удовлетворительности данного приближения, является куда более утонченным, чем искусство нахождения строгого решения уравнения» (Р. Пайерлс).

На наш взгляд, для механиков и физиков был бы весьма полезен курс асимптотических методов. Разумеется, многие понятия могут быть изложены при чтении курса дифференциальных уравнений, классической механики и др. Даже в курсах математического анализа можно дать понятие о шкалах роста и убывания, главных членах в сумме, асимптотических выражениях, проверке формул на основе предельных переходов. И все же нельзя не учитывать особую роль асимптотических подходов, являющихся, в определенном смысле, формализацией «физического» образа мышления.

Подобный спецкурс должен уделять существенное внимание таким трудноформализуемым понятиям, как выбор малых параметров и оптимального метода упрощения, «дополнительности» асимптотик ($\varepsilon \to 0$ и $\varepsilon \to \infty$). Определенное место должны найти в нем методы расширения области применимости полученных разложений, сращивания асимптотик при различных предельных значениях параметров, оценки погрешностей построенных разложений на «физическом уровне строгости».

Связь между физическими теориями и установление их иерархии должны прослеживаться на протяжении всего обучения, но могут найти определенное место и в указанном спецкурсе.

Полезно подчеркивать асимптотический характер понятий (пограничный слой, эффективная жесткость и т. д.) и соотношений. Например, говоря о методе линеаризации, Р. Пайерлс подчеркивает: «...многие привыкают считать закон Ома в качестве закона природы, а не обычного (линейного. — *Авт.*) приближения. Поучительно поэтому представить себе те эффекты, которыми пренебрегли при формулировке линейного закона, и оценить их величину в некоторых практически интересных случаях». Поучительны также такие примеры, как закон Гука, закон теплопроводности Фурье и т. д. Чтобы понять физические законы, мы должны усвоить себе раз и навсегда, что все они в какой-то степени приближенны.

При изложении гидромеханики также полезно подчеркнуть, что «...модель Навье—Стокса — это асимптотика больцмановского течения газа при $\lambda \to 0$ (λ — длина свободного пробега молекул) и при некоторых дополнительных предположениях о распределении скоростей. Этот асимптотический подход позволяет ввести понятия плотности, температуры, давления, скорости потока — понятия, которые в условиях свободного молекулярного течения непосредственного смысла не имеют» (Н. Н. Моисеев).

Хороший повод пояснить «асимптотический» характер развития науки может дать следующая идея, высказанная А. Пуанкаре: «Все эти соотношения (законы отражения света Френеля. — *Авт.*) остались бы неоткрытыми, если бы с самого начала существовала догадка о сложности взаимодействующих объектов. Давно уже было сказано, что если бы инструменты Тихо Браге были в десять раз точнее, то мы никогда не имели бы ни Кеплера, ни Ньютона, ни астрономии. Для научной дисциплины составляет несчастье возникнуть слишком поздно, когда средства наблюдения стали слишком совершенными».

Элементы асимптотического подхода, на наш взгляд, были бы полезны и в школьных программах физики и математики. Разумеется, ни в коем случае не за счет введения новых формальных приемов. Соответствующие

возможности есть в разделах введения в анализ, в курсах физики. Например, те же законы Ома, Гука можно представить как линеаризацию истинных соотношений (как касательные к кривым).

Что же такое асимптотический подход (попытка определения) *.

Знакомство с асимптотикой обычно начинается с понятия асимптоты, определяемой в школьной геометрии как линия, к которой неограниченно приближается рассматриваемая кривая с удалением на бесконечность. Слово asymptotos по-гречески означает несовпадающий. Конечно, одна лишь несовпадаемость еще не дает асимптотичности, так что этимологически этот термин звучит односторонне. Однако он удачно подчеркивает, что приближение не превращается в совпадение. Это свойство приближения, не переходящего в совпадение, как раз и характеризует асимптотические явления в широком смысле.

В физике и других областях науки мы постоянно встречаемся с процессами, имеющими асимптотический характер. Например, затухание колебаний, выход на орбиту, стабилизация возмущенных движений и т. п. Если под параметром процесса понимать не только время, а любую переменную, от которой зависит рассматриваемая величина, то круг асимптотических явлений значительно расширяется. Сюда относится и действие взрыва на больших расстояниях, и поведение материалов вблизи границ, и влияние малой вязкости на течение жидкости. Общим свойством таких явлений оказывается наличие особых выделенных подпространств, окрестность которых изучается. В перечисленных примерах это бесконечно удаленная точка, граница материала, невязкая жидкость.

Взглянем теперь на асимптотические явления в обобщенном плане. Любой объект исследования, вообще говоря, не является однородным. Существуют области резкого изменения количества: разрыв, излом, обращение в нуль или в бесконечность и т. д. Переход количества в качество воспринимается как особенность, и такие области, естественно, выделяются как особые. Они могут

* Этот раздел написан по просьбе авторов проф. Р. Г. Баранцевым.

быть точками, линиями, поверхностями и вообще некоторыми многообразиями размерности $m<n$, где n — число независимых координат и параметров рассматриваемого объекта. Асимптотическая ситуация возникает, когда исследуют окрестности особых многообразий, причем не фиксированные, а уменьшающиеся. Явления, характерные для такого подхода, принято называть асимптотическими.

Это определение, очевидно, не претендует на строгость, ибо включает понятия особенности и характерности, в значительной мере условные. Действительно, какое изменение количества считать качественным и какое поведение характерным, остается не вполне ясным. Однако было бы рискованным спешить освобождаться от этой условности, если мы стремимся ухватить суть асимптотического подхода.

Недоопределенность упорно сопровождает асимптотическое мышление, привлекая к нему математиков романтического склада и отталкивая сторонников предельно строгих рассуждений. После того как А. Пуанкаре в 1886 г. ввел понятие асимптотического ряда, в курсах математического анализа появились разделы, посвященные асимптотическим разложениям. Однако первая половина XX века не стала периодом расцвета асимптотических методов. К середине века асимптотические главы не только не выросли в монографии, но в большинстве курсов вовсе исчезли. Оканчивая университеты, студенты не знали ни метода перевала, ни явлений Стокса.

За последние десятилетия положение заметно изменилось. Актуальность асимптотических методов в прикладной математике выросла многократно. Методы возмущений, усреднения, пограничного слоя становятся предметом монографических исследований. Квазиклассическая механика, теория дифракции, теория оболочек сформировались во многом благодаря асимптотическому подходу. Жизненность и перспективность асимптотических методов подтверждается также тем фактом, что активное взаимодействие численных методов с аналитическими происходит как раз через асимптотику.

С оживлением асимптотической деятельности возродился интерес и к самим методам, к тем общим свойствам асимптотики, которые можно изучать независимо от объектов приложения. При этом обнаружилось, что по-

нятие асимптотических методов упрямо не поддается достаточно строгому определению. Так, Н. де Брейн, пытаясь ответить на вопрос «Что такое асимптотика?», не находит ничего лучшего, как назвать асимптотическими оценками раздел анализа, имеющий дело с задачами того же типа, что и в рассматриваемой книге. Разумеется, перечисление с многоточием вряд ли может сойти за удовлетворительное определение. Тем более что, с одной стороны, асимптотические оценки пронизывают почти все разделы математики, с другой—асимптотические методы фактически не ограничиваются теми оценками, которые уже формализованы.

Видимо, спецификацию асимптотики надо искать не в предметном, а в методологическом пространстве. Но здесь обнаруживается, что арсенал асимптотических методов включает немало приемов, которые относятся скорее к искусству, чем к науке. М. Крускал ввел даже специальный термин «асимптотология», определив его как искусство обращения с прикладнымн математическими системами в предельных случаях. Правда, он призвал при этом к формализации накопленного опыта, с тем чтобы превратить искусство асимптотологии в науку.

Таким образом, причина затруднений состояла в том, что формализованные определения оказывались слишком узкими, а достаточно широкие определения не удовлетворяли требованиям научности. Реально сложившаяся конкретная методология не допускала строгой дефиниции в рамках классической математики — должно быть, не случайно.

Попытаемся подойти к определению асимптотических методов с общей точки зрения, руководствуясь прежде всего критерием адекватности реальному объекту, не стремясь загонять его в прокрустово ложе абсолютно строгих дефиниций. В качестве первого приближения проще всего назвать асимптотическими методами те, что приспособлены для исследования асимптотических явлений. Однако содержание их таким образом еще не раскрывается.

Цель асимптотического подхода заключается в упрощении объекта. Это упрощение достигается за счет уменьшения окрестности рассматриваемой особенности. Причем характерно, что вместе с такой локализацией возрастает и точность асимптотических представлений. Точность и простота обычно встречаются как понятия

противоположные, дополнительные. Стремясь к простоте, мы жертвуем точностью, добиваясь точности, не ждем простоты. Однако при локализации эти антиподы сходятся, противоречие разрушается, снимается в синтезе, имя которому — асимптотика.

Итак, суть асимптотических методов состоит в том, что они осуществляют синтез простоты и точности за счет локализации: в окрестности некоторого предельного состояния находится упрощенное решение задачи, которое тем точнее, чем меньше эта окрестность.

Асимптотическими методами мы фактически пользуемся не только при решении сформулированных задач, но и при постановке задач и вообще в процессе познания мира. Хотя все в природе взаимосвязаио, связи эти неодинаковы, и благодаря этой неравномерности появляется возможность выделения и изучения относительно изолированных систем. Но сами такие системы можно рассматривать как особенности в мире всеобщей связи. А выделение их — локализация в пространстве отношений. Так что постановка задачн выглядит как локализация особенности, а уточненная постановка — как исследование окрестности этой особениости.

Таким образом, асимптотические методы действительно «больше», чем математические. Но и внутри математики они занимают особое положение, не находя четкого места в ортодоксальной классификации. Совмещая в себе простоту эвристических представлений с точностью аналитических оценок, асимптотические методы не ограничиваются ролью «золотой середины». Главное отличие от методов классической математики состоит в том, что уровень точности конкурирует с размерами области действия; в заданной области точность асимптотического разложения ограничена.

Итак, асимптотические методы осуществляют синтез простоты и точности за счет локализации. Фиксируя размеры области, мы ограничиваем возможности как упрощения, так и уточнения. Иными словами, простота и точность связаны соотношением дополнительности, а мерой неопределенности является величина области. Соотношение неопределенности имеет место для каждой пары из этих трех компонентов асимптотики, а третий параметр всегда выступает в роли регулятора.

Пусть имеется разложение функции $f(x)$ по всимптотической последовательности $\{\varphi_n(x)\}$:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x), \quad x \to 0.$$

Частную сумму этого ряда обозначим через $S_N(x)$, а точность аппроксимации будем характеризовать величиной

$$\Delta_N(x) = |f(x) - S_N(x)|.$$

Простота характеризуется здесь числом N, локальность — длиной интервала x, на котором рассматривается разложение.

Рассмотрим попарно взаимозависимость величин x, N, Δ, опираясь на известные свойства асимптотических разложений. При фиксированном x разложение вначале сходится, т. е. точность увеличивается за счет простоты. Если зафиксировать N, то конкурентами становятся точность и величина области. Заданное значение Δ достигается тем проще, чем меньше область.

Проиллюстрируем эти закономерности на примере. Рассмотрим интегральную показательную функцию

$$E_i(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\xi} \xi^{-1} d\xi, \quad y < 0.$$

Интегрируя по частям, получаем следующее асимптотическое разложение при $y \to -\infty$:

$$E_i(y) \sim e^y \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) y^{-k}.$$

Положим

$$f(x) = -e^{-y} E_i(y), \quad y = -x^{-1}.$$

Вычисляя частные суммы ряда (4) и величину (2) для различных значений x, составим таблицу

x^{-1}	$f(x)$	$\Delta_m(x)$	m	x^{-1}	$f(x)$	$\Delta_m(x)$	m
3	0,262	0,0340	3	7	0,127	0,0340	7
4	0,207	0,0110	4	8	0,112	0,0314	9
5	0,170	0,0237	5	9	0,101	0,0429	9
6	0,145	0,0212	6	10	0,092	0,0418	11

где m — то значение N, при котором достигается наилучшая точность.

Таким образом, при заданном x точность с ростом N увеличивается до $\Delta_{n'}$. Фиксируя N, можно наблюдать улучшение точности с уменьшением x. Заданная точность Δ достигается с ростом N тем дальше, чем больше область, и самое интересное, начиная с некоторого x, не достигается вообще.

Ограниченная точность — существенное свойство асимптотической математики, отличающее ее от математики классической. Лишь в случае сходящихся рядов может быть достигнута абсолютная точность при заданном значении x, но путем, так сказать, абсолютного усложнения, т. е. при $N \to \infty$. В общем случае неопределенность принципиальна. Поэтому асимптотическую математику можно соотносить с классической так же, как квантовую механику с классической.

IV. НЕМНОГО МАТЕМАТИКИ

При изучении наук примеры полезнее правил.

И. Ньютон

Простой пример

Для иллюстрации технической стороны асимптотического метода рассмотрим простой алгебраический пример. Биквадратное уравнение

$$x^4-2x^2-8=0$$

заменой $z=x^2$ сводится к квадратному и легко решается ($x_{1,2}=\pm 2$, $x_{3,4}=j\sqrt{2}$, $j=\sqrt{-1}$). Возможность такого упрощения — следствие симметрии уравнения: замена x на $-x$ не меняет его.

Пусть исходное уравнение описывает некоторую физическую систему, и ее параметры претерпевают малые изменения, вследствие чего уравнение приобретает вид:

$$y^4-\varepsilon y^3-2y^2-8=0. \qquad (5)$$

При этом говорят, что система получила малое возмущение, выражение εy^3 называют возмущающим членом, а ε — малым параметром. Отмеченная ранее симметрия нарушилась, и решение нового уравнения уже нельзя записать в простой форме. Но корни его y_i ($i=1, 2, 3, 4$) не должны сильно отличаться от x_i, поэтому можно положить $y_i \cong x_i$. Погрешность такой замены определяется величиной отброшенного члена εy^3. Чтобы уточнить решение, представим его в виде ряда

$$y_i=x_i+\varepsilon y_i^{(1)}+\ldots,$$

где многоточие соответствует членам с более высокими степенями.

Подставляя это выражение в возмущенное уравнение и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, найдем

$$y_i^{(1)}=x_i^2/4\,(x_i^2-1).$$

Вычисление поправок можно без труда продолжить, но

с ростом ε отклонения от точного решения неизбежно будут увеличиваться.

Рассмотрим теперь противоположный случай больших возмущений. Тогда обратная величина ε^{-1} мала, причем корни уравнения (5) разделяются на две группы. При $\varepsilon^{-1}\to 0$ три корня стремятся к нулю, а четвертый неограниченно возрастает.

Но для обеих групп по-прежиему можно построить разложения по малому параметру ε^{-1}.

Однако существует область, в которой асимптотика не дает удовлетворительного результата. Это область, где «малые» ε уже велики, а «большие» — еще малы.

Двухточечная аппроксиманта Паде для первого корня уравнения (5)

$$y_1 \cong \frac{2+0{,}573\varepsilon+0{,}12\varepsilon^2}{1+0{,}12\varepsilon},$$

полученная на основе асимптотик при $\varepsilon\to 0$ и $\varepsilon\to\infty$, удовлетворительно описывает точное решение при любых значениях ε.

«Падеоны»

Как уже отмечалось, в физике в последнее время большую популярность приобрело исследование уединенных волн — солитонов. Для построения их используется обычно техника обратной задачи рассеяния, позволяющая линеаризовать задачу (нелокальная линеаризация). Ясно, что такие существенно нелинейные решения, как солитоны, нельзя достаточно хорошо аппроксимировать отрезком ряда квазилинейной теории возмущений при любом числе членов. Однако это можно сделать, применив к отрезку указанного ряда нелинейное Паде-преобразование. Объекты, получающиеся в результате такой процедуры, получили название «падеоны» (по аналогии с солитонами, инстантонами и т. д.). Приведем сначала простой пример.

Краевая задача

$$y''-y+2y^3=0,\quad y(0)=1,\quad y(\infty)=0$$

имеет точное решение («солитон»)

$$y=\mathrm{ch}^{-1}x. \tag{6}$$

Решение в виде ряда по экспонентам (ряда Дирихле) таково:

$$y = Ce^{-x}\ (1 - 0{,}25C^2e^{-2x} + 0{,}0625C^4e^{-4x} + \ldots),$$
$$C = \text{const}.$$

После перестройки этого ряда в диагональную аппроксиманту Паде и определения постоянной C приходим к точному решению.

Запишем теперь уравнение Кортевега—Де Вриза:

$$q_t + q_{xxx} + 6\lambda q q_x = 0.$$

Обычно его приводят к другому виду путем замены $q = -V_x$:

$$V_t + V_{xxx} - 3\lambda V^2{}_x = 0.$$

Далее решение можно разыскивать в виде

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-1} V_n\ (x, t).$$

В первом приближении имеем линейное уравнение

$$V_{1t} + V_{1xxx} = 0,$$

далее — рекуррентную последовательность

$$V_{nt} + V_{nxxx} = 3 \sum_{j=1}^{n-1} V_{j,x} V_{n-j,x}.$$

Перестройка первых трех членов ряда (52) дает точное выражение солитона.

Указанная техника допускает обобщение и на более сложные случаи, в том числе и на такие, в которых традиционная техника обратной задачи рассеяния не работает.

Еще о ренормгруппе

Об исключительной важности понятия ренормгруппы говорит С. Вайнберг в статье с красноречивым названием: «Почему ренормгруппа хорошая вещь?» Им сформулированы «три закона теоретической физики»:

1. Любая информация, имеющаяся в постановке задачи, должна быть использована.

2. Не доверяйте первому приближению теории возмущений.

3. Можно выбрать любые переменные, но если выбор окажется неудачен — будете жалеть!

Суть ренормгруппы состоит, грубо говоря, в синтезе глобальной групповой (симметричной) и локальной (найденной при помощи методов возмущений) информаций.

Приведем простейший пример — уравнение

$$\frac{du}{dt} + u = 0. \tag{7}$$

Его общее решение в виде ряда таково:

$$u = C(1 - t + t^2/2 + \ldots). \tag{8}$$

Нетрудно видеть, что уравнение (7) остается инвариантным при произвольном сдвиге независимой переменной по t $(t \to t + \alpha)$ и произвольном растяжении зависимой переменной u $(u \to \beta u)$.

Тогда и решение должно быть инвариантным относительно указанных преобразований

$$\beta u(t + \alpha) = u(t).$$

Считая $\beta \neq \beta(\alpha)$, а α — непрерывной переменной, можно составить дифференциальное уравнение для определения u:

$$\frac{d\beta}{d\alpha} u + \beta \frac{du}{dt} = 0.$$

Отсюда

$$u = \exp \lambda t, \tag{9}$$

где

$$\lambda = -\frac{d\beta}{d\alpha} \beta^{-1}.$$

Определить λ можно из сравнения разложения выражения (9) для $u(t)$ в ряде Тейлора с рядом (8)

$$u = C(1 - \lambda t + (\lambda t)^2/2 + \ldots).$$

Следовательно,

$$u = C \exp(-t).$$

Исключительная важность метода ренормгруппы для критических явлений обусловлена тем, что, как пишет лауреат Нобелевской премии К. Вильсон, «подход, основанный на ренормгруппе, дает стратегию для решения проблем, в которых участвует много масштабов длин. Стратегия сводится к тому, чтобы двигаться маленьки-

ми шагами — по шагу на каждый масштаб длин.

Подход ренормгруппы сводится к интегрированию по флуктуациям по очереди, начиная с флуктуаций на атомном масштабе, постепенно двигаясь к большим масштабам, пока не будет произведено усреднение по флуктуациям всех масштабов».

А. Пуанкаре об асимптотических рядах

В асимптотических методах используется математический аппарат особой природы — асимптотические ряды. Впервые четкое понятие об этих рядах — расходящихся, но в некотором смысле приближающих рассматриваемые функции — ввели Ситльтьес и А. Пуанкаре. Часто для понимания сложных вещей нет ничего лучше, чем читать классиков, поэтому приведем обширную цитату из «Новых методов небесной механики» А. Пуанкаре:

«Геометры и астрономы* по-разному понимают слово «сходимость». Геометры, всецело озабоченные достижением безукоризненной строгости и зачастую совершенно безразличные к продолжительности сложных вычислений (выполнимость которых они предполагают, не задумываясь о ее практическом осуществлении), говорят, что некоторый ряд сходится, если сумма его членов стремится к какому-то определенному пределу, даже в том случае, когда первые члены ряда убывают чрезвычайно медленно. В противоположность этому астрономы обычно говорят, что некоторый ряд сходится, если, например, первые двадцать членов этого ряда убывают очень быстро, несмотря на то что последующие члены неограниченно возрастают.

В качестве простого примера рассмотрим два ряда, общий член которых имеет вид:

$$\frac{1000^n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n} \quad \text{и} \quad \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n}{1000_n}.$$

Геометры скажут, что первый ряд сходится и причем быстро, поскольку его миллионный член много меньше 1/999 999. Но второй ряд они будут считать расходящимся, поскольку общий член этого ряда неограниченно возрастает.

---

* Сейчас мы бы сказали «чистые» и «прикладные» математики.

Астрономы же, наоборот, будут считать первый ряд расходящимся, поскольку первые 1000 членов этого ряда возрастают, а второй ряд сходящимся, так как его первые 1000 членов убывают, причем сначала это убывание происходит очень быстро.

Обе точки зрения законны: первая в теоретических исследованиях, вторая в численных приложениях. Обе господствуют безраздельно, но в различных областях, и границы этих областей необходимо четко различать.

Астрономы не всегда четко знают границы применимости своих методов, но ошибаются они редко. То приближение, которым они довольствуются, обычно лежит в тех пределах, где их методы применимы. Кроме того, интуиция позволяет им предвидеть правильный результат, если бы они и совершили ошибку, то сравнение с наблюдениями позволило бы исправить ее надлежащим образом.

Все же я полагаю, что будет уместно внести в этот вопрос несколько большую точность, и именно это я собираюсь сделать, хотя по самой своей природе рассматриваемый вопрос не слишком пригоден для этого.

Итак, мы должны рассмотреть соотношение новой природы, которое может существовать между функцией аргументов x и ε, которую мы будем обозначать символом $\varphi(x, \varepsilon)$, и расходящимся рядом, расположенным по степеням ε:

$$f_0+\varepsilon f_1+\varepsilon^2 f_2+ \ldots +\varepsilon^p f_p+ \ldots \qquad (10)$$

Коэффициенты $f_0, f_1, \ldots$ могут быть функциями, зависящими лишь от x и не зависящими от ε или же зависящими одновременно и от x и от ε.

Положим

$$\varphi_p = f_0+\varepsilon f_1+\varepsilon^2 f_2+ \ldots +\varepsilon^p f_p.$$

Если

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varphi-\varphi_p}{\varepsilon^p} = 0,$$

то я буду говорить, что ряд (11) является асимптотическим представлением функций φ и употреблять запись

$$\varphi(x, \varepsilon) = f_0+\varepsilon f_1+\varepsilon^2 f_2+ \ldots \qquad (11)$$

Соотношения вида (11) я буду называть асимптотическими равенствами.

Ясно, что если параметр ε очень мал, то разность $\varphi - \varphi_p$ также будет очень мала, и хотя ряд (11) и будет расходиться, сумма $p+1$ его первых членов будет служить очень хорошей аппроксимацией функции φ».

Асимптотические методы и прикладные задачи

Асимптотическое решение прикладной задачи можно условно разделить на три этапа. Первый — выделение (или введение) малых (больших) параметров в системе, второй — собственно асимптотическое упрощение, третий — оценка погрешности.

Первый этап наименее формализуем. Именно здесь лежит существенное отличие в подходах прикладника и чистого математика, для которого исследование начинается с момента, когда в системе уже появился малый параметр. Общих рецептов для прикладника, естественно, нет, однако предварительный анализ размерностей и порядков входящих в исходные краевые задачи величин, рациональное обезразмеривание и выделение естественных безразмерных параметров являются правилом. Одним из критериев естественной асимптотики может быть следующее положение: если при $\varepsilon \to 0$ получается содержательная асимптотика, то, как правило, при $\varepsilon \to \infty$ также можно получить радикальные упрощения (своеобразный «принцип дополнительности» асимптотики).

Однако не следует думать, что творческий этап применения асимптотики кончается на выборе или введении малых параметров.

Сам выбор вида, в котором разыскивается асимптотическое представление решения, диктуется не какими-либо общими, формализуемыми соображениями, а проникновением в конкретное математическое содержание рассматриваемой задачи. На этом этапе решающую помощь могут оказать физическая интуиция и опыт асимптотического исследования различных задач.

Вопрос об оценке погрешности весьма нетривиален. Ему посвящена обширная литература, в которой высказываются подчас прямо противоположные взгляды. Свое личное мнение и некоторые рекомендации, основанные на собственном опыте, мы высказали ранее.

Достоинства и недостатки асимптотических методов

Кратко сформулируем основные достоинства и недостатки асимптотических подходов.

К достоинствам в первую очередь относятся:

1. Существенное упрощение решения. Часто удается получить даже аналитическое решение.

2. Асимптотический метод легко сочетается с другими подходами — численными, вариационными и т. д. Так, после упрощения исходной краевой задачи можно эффективно использовать метод конечных элементов или прогонки. Асимптотический метод позволяет уловить структуру решения и тем самым вид аппроксимирующих функций в вариационных подходах.

3. Асимптотические методы тесно связаны с физической сутью задачи и в то же время дают возможность глубже проникнуть в нее.

4. Асимптотические методы позволяют выявить математическую и физическую основу различных приближенных теорий, уточнить их и повысить достоверность решений, получаемых на основе таких теорий.

5. Асимптотические методы часто открывают возможность единого подхода к различным на первый взгляд задачам, выявляя их скрытое внутреннее единство и общность.

В то же время, естественно, асимптотические методы не панацея. Главный их недостаток заключается в том, что не всегда первое приближение обеспечивает нужную точность, построение же последующих приближений часто представляет очень трудоемкую задачу. Далее, оценка точности асимптотических решений и пределов применимости полученных при их помощи решений — весьма нетривиальная проблема.

Наконец, чисто субъективное препятствие к применению асимптотических методов в настоящее время заключается, по-видимому, в следующем. Представим ситуацию, когда перед исследователем стоит выбор: использовать имеющийся пакет прикладных программ, основанный, например, на методе конечных элементов, или попытаться подвергнуть предварительно исходную задачу анализу и упрощению. Какой путь он выберет? Обращение к пакету, казалось бы, проще (другое дело, что «отрезвление» часто наступает после больших зат-

рат времени, сил и средств, когда все равно приходится переходить к анализу).

Подчеркнем еще раз простую мысль: основные идеи асимптотического упрощения все равно (часто неосознанно) используются при решении физических и технических задач. Более того, выбор метода асимптотического исследования, введение малых параметров в систему — это вообще неформализуемая часть исследования. Здесь исследователю должны помочь опыт и интуиция, анализ физической сути задачи, экспериментальных и численных результатов. Но после того как малые параметры уже введены и метод исследования выбран, можно воспользоваться каким-либо известным и хорошо разработанным приемом, например, одним из описанных в этой книге.

Несколько слов о малых параметрах. Они могут входить в систему с самого начала или вводиться искусственно. Например, в качестве естественных малых параметров в теории оболочек выступают величины:

$\frac{h}{R}$ — отношение толщины оболочки к ее радиусу;

a/b — отношение характерных размеров (например, длины пластинки к ее ширине); λ^{-1}, где λ — частота; A — амплитуда колебаний.

Параметр $\varepsilon \ll 1$ может также характеризовать малое отклонение исходной области от круговой, исходной переменной толщины от постоянной, отношение стрелы подъема пологой оболочки H_k к радиусу кривизны R и т. д. Возможны различные варианты, когда некоторый параметр может быть как малым, так и большим.

Если «подходящего» малого (большого) физического параметра найти не удается, то можно попытаться ввести его в уравнения искусственно. Однако здесь возникает нетривиальная и не поддающаяся формализации проблема выбора исходного приближения, которое должно быть достаточно простым и в то же время отражающим существенные черты исследуемого явления. Ясно, что, как и при «угадывании» вида асимптотического разложения, здесь господствуют физическая интуиция, опыт решения родственных задач, аналогии, правдоподобные рассуждения. С другой стороны, именно удачный выбор исходного приближения во многом определяет успех исследования.

Простейший способ состоит во введении параметра ε

таким образом, чтобы при $\varepsilon=0$ получалась упрощенная задача, а при $\varepsilon=1$ — исходная. Однако при этом встает серьезный вопрос о сходимости ряда теории возмущений при $\varepsilon=1$. Здесь могут оказаться полезными методы аналитического и мероморфного продолжений, обобщенного суммирования и т. д.

Наконец, в асимптотических методах еще недостаточно обращается внимания на такой вопрос. Если можно построить асимптотику при $\varepsilon \ll 1$ ($\varepsilon \gg 1$), то нельзя ли получить разумные упрощения при $\varepsilon \gg 1$ ($\varepsilon \ll 1$)? Часто подобный вопрос физически обоснован. Далее можно попробовать построить по предельным решениям составное выражение, описывающее решение при любом ε.

Литература

Андрианов И. В., Маневич Л. И. Две ипостаси асимптотики // Природа. — 1987. — № 4. — С. 85—97.

Бабич В. М., Булдырев В. С. Искусство асимптотики // Вестник Ленинградского университета. — 1977. — № 13. — С. 5—12.

Баранцев Р. Г. Об асимптотологии // Вестник Ленинградского университета. — 1976. — № 1. — С. 69—76.

Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. — М.: Наука, 1984.

Бейкер Дж., Грейвс-Морис П. Аппроксимации Паде. — М.: Мир, 1986.

Бутузов В. Ф. Сингулярные возмущения. — М.: Знание, 1988.

Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. — М.: Наука, 1967.

Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. — М.: Мир, 1972.

Найфэ А. Введение в методы возмущений. — М.: Мир, 1984.

Пайерлс Р. Построение физических моделей // Успехи физических наук. — 1983. — Т. 140. — № 2. — С. 315—332.

Паули В. Физические очерки. — М.: Наука, 1975.

Пуанкаре А. О науке. — М.: Наука, 1983.

Раушенбах Б. В. Системы и перспективы в изобразительном искусстве. — М.: Наука, 1986.

Тер-Крикоров А. М. Нелинейные задачи и метод малого параметра. — М.: Знание, 1984.

Фок В. А. Принципиальное значение приближенных методов в теоретической физике // Успехи физических наук. — 1936. — Т. 16. — № 8. — С. 1070—1083.

Фридрихс К. О. Асимптотические явления в математической физике // Математика. — 1952. — № 2. — С. 79—84.

Широков Д. В. Новый метод теоретической физики // Наука и человечество. 1987. — М.: Знание, 1987. — С. 127—137.

СОДЕРЖАНИЕ

I. Что такое асимптотические методы? 4
II. Как работают асимптотические методы 25
III. Асимптотические методы и физические теории . . 39
IV. Немного математики 54
Литература 63

Научно-популярное издание

Игорь Васильевич АНДРИАНОВ,

Леонид Исакович МАНЕВИЧ

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
И ФИЗИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ

Гл. отраслевой редактор *Л. А. Ерлыкин*
Зам. главного отраслевого редактора *Г. Г. Карвовский*
Редактор *К. А. Кутузова*
Мл. редактор *Н. А. Сергеева*
Обложка художника *Г. Ш. Басырова*
Худож. редактор *П. Л. Храмцов*
Техн. редактор *О. А. Найденова*
Корректор *В. И. Гуляева*

ИБ № 9829

Сдано в набор 10.11.88. Подписано к печати 30.12.88. Т 21628. Формат бумаги 84×108/$_{32}$. Бумага тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 3,36. Усл. кр.-отт. 3,57. Уч.-изд. л. 3,25. Тираж 28 722 экз. Заказ 2177. Цена 15 коп. Издательство «Знание». 101835, ГСП, Москва, Центр, проезд Серова, д. 4. Индекс заказа 894002.
Типография Всесоюзного общества «Знание». Москва, Центр, Новая пл., д 3/4.

15 коп. Индекс 70102

ДОРОГОЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Брошюры этой серии в розничную продажу не поступают, поэтому своевременно оформляйте подписку. Подписка на брошюры издательства „Знание" ежеквартальная, принимается в любом отделении „Союзпечати".

Напоминаем Вам, что сведения о подписке Вы можете найти в „Каталоге советских газет и журналов" в разделе „Центральные журналы", рубрика „Брошюры издательства „Знание".

Цена подписки на год 1 р. 80 к.

СЕРИЯ

ФИЗИКА