МАТЕМАТИКА

НОВОЕ В ЗАРУБЕЖНОЙ НАУКЕ

РЕДАКТОРЫ СЕРИИ: А.Н. КОЛМОГОРОВ, С.П. НОВИКОВ

4

ГЛАДКИЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Перевод
М. И. БРИНА, А. Б. КАТКА,
Я. Б. ПЕСИНА

Под редакцией
Д. В. АНОСОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР» МОСКВА 1977

СОДЕРЖАНИЕ

УДК 513.8; 517.9; 531.3

В настоящий сборник включены работы зарубежных математиков по теории гладких динамических систем. Они дают хорошее представление о развитии этой области математики после 1970 г. Работы охватывают следующие направления: проблему типичных свойств, связь между динамическими и гомологическими инвариантами гладких отображений, классификацию У-систем, некоторые аспекты теории систем с интегральными инвариантами. Обзорные статьи содержат значительную информацию о работах по данной тематике, не вошедших в сборник.

Книга представляет интерес как для математиков — научных работников, занимающихся дифференциальными уравнениями и динамическими системами, так и для студентов старших курсов, аспирантов и преподавателей математических специальностей университетов.

Редакция литературы по математическим наукам

Г $\frac{20203-016}{041(01)-77}$ 16—77

ИВ № 179

ГЛАДКИЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Редактор А. Брядинская
Художник А. Шипов
Художественный редактор В. Шаповалов
Технический редактор Н. Толстякова
Корректор Е. Кочегарова

Сдано в набор 10/VI 1976 г. Подписано к печати 26/I 1977 г. Бум. тип. № 3 60×90$^{1}/_{16}$=8,00 бум. л. Печ. л. 16,00. Уч.-изд. л. 15,21. Изд. № 1/8810. Цена 1 р. 57 к. Зак. 208

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
198052, Ленинград, Л-52, Измайловский пр., 29.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий сборник содержит переводы восьми иностранных работ по гладким динамическим системам, появившихся начиная с 1970 г. Тематика большинства из них так или иначе связана с «гиперболическим» поведением траекторий (исключение составляет лишь небольшая статья Такенса «Контрпример класса C^1 к теореме Мозера о кольце»). Развитие этой тематики до 1970 г. достаточно хорошо отражено в имеющейся на русском языке оригинальной и переводной литературе, в том числе имеются и систематические изложения обзорного или учебного характера:

Смейл С. Дифференцируемые динамические системы. *Успехи матем. наук*, т. 25, № 1(1970), 113—185.

Алексеев В. М., Каток А. Б., Кушниренко А. Г. Гладкие динамические системы. Девятая летняя математическая школа, Изв. Ин-та математики АН УССР, Киев, 1972, 50—348.

Нитецки З., Введение в дифференциальную динамику, М., «Мир», 1975.

Для понимания работ, включенных в настоящий сборник, в большинстве случаев требуется знакомство с каким-нибудь из этих источников (наиболее доступным из которых является третий). Было бы бессмысленно дублировать последние, составляя пояснения всякий раз, когда имеющиеся в них термины и факты используются в статьях данного сборника. (Правда, во многих статьях сборника приводятся необходимые формулировки, но систематического изложения это заменить не может.) Во многих случаях необходимо также знакомство с элементами топологии. Наконец, настоящий сборник, как и вообще текущая исследовательская литература по любому разделу математики, предполагает наличие известной общематематической культуры.

Вместе с тем статьи при переводе были во многих местах снабжены довольно подробными примечаниями, что должно помочь читателю свободно вникать во все детали рассуждений.

Исключение составляют две статьи — обзор Шуба «Динамические системы, фильтрации и энтропия» и примыкающая к нему статья Шуба и Сулливана «Теория гомологий и динамические системы», относящиеся к новому направлению в теории динамических систем, которая широко использует идеи и методы дифференциальной топологии. Доказательства в этих работах не претендуют на полноту. Подробные доказательства требуют значительного места и помимо стандартного минимума сведений из алгебраической топологии и гомологической алгебры предполагают владение геометрическими конструкциями дифференциальной топологии в объеме книги: Милнор, Теорема об h-кобордизме, М., «Мир», 1969, и моего приложения к книге: Милнор, Теория Морса, М., «Мир», 1965.

Восемь статей составляют лишь небольшую часть появившихся за то же время (с 1970 г.) публикаций, многие из которых безусловно заслуживают внимания и только из-за ограничений в объеме не попали в настоящий сборник. Чтобы хоть в какой-то мере информировать о них читателя, специально для сборника написаны две статьи обзорного характера: моя вступительная статья и статья А. Б. Катка «Гипотеза об энтропии».

В связи с имеющимся в статьях (как и вообще в современной литературе) разнобоем в терминологии в конце сборника помещены некоторые замечания по этому поводу.

Д. В. Аносов

ВСТУПИТЕЛЬНАЯ СТАТЬЯ

Д. В. Аносов

1. Начиная примерно с 1960 г. теория гладких динамических систем получила значительное развитие и оформилась в самостоятельный раздел математики с развитой системой понятий, методов, определенными задачами и достаточно глубокими достижениями. Разумеется, и раньше, начиная с Пуанкаре, существовали замечательные работы о гладких динамических системах, не уступающие современным достижениям, но полученные результаты не объединялись в единое целое из-за отсутствия необходимых понятий и методов, которые выделили бы их из общей массы работ о дифференциальных уравнениях.

На протяжении последних 10 лет состоялось несколько конференций и симпозиумов, на которых теория гладких динамических систем была единственной темой или одной из главных тем. Их результаты отражены в сборниках [1], [2], [3], [4], содержащих много ценной информации. Суммарный объем публикаций по этой тематике, появившихся за это же время в различных математических журналах, в несколько раз превышает объем этих четырех сборников.

Естественно, что за пределами настоящего сборника остались целые направления, о которых здесь можно только упомянуть.

1) Работы аналитического характера (включая исследование окрестностей положений равновесия и периодических решений).

2) Теория бифуркаций. Здесь можно сослаться на обзорный доклад [5]. Многие иностранные работы последних лет по бифуркациям входят в сборники [3], [4].

3) Вопросы, относящиеся к эргодической теорни или смежные с ней (например, марковские разбиения для гиперболических множеств). Они отражены в вышедшем недавно обзоре [6].

4) Изолирующие блоки, служащие для локализации изолированных инвариантных множеств, их «продолжения» по

теории динамических систем, которая широко использует идеи и методы дифференциальной топологии. Доказательства в этих работах не претендуют на полноту. Подробные доказательства требуют значительного места и помимо стандартного минимума сведений из алгебраической топологии и гомологической алгебры предполагают владение геометрическими конструкциями дифференциальной топологии в объеме книги: Милнор, Теорема об h-кобордизме, М., «Мир», 1969, и моего приложения к книге: Милнор, Теория Морса, М., «Мир», 1965.

Восемь статей составляют лишь небольшую часть появившихся за то же время (с 1970 г.) публикаций, многие из которых безусловно заслуживают внимания и только из-за ограничений в объеме не попали в настоящий сборник. Чтобы хоть в какой-то мере информировать о них читателя, специально для сборника написаны две статьи обзорного характера: моя вступительная статья и статья А. Б. Катка «Гипотеза об энтропии».

В связи с имеющимся в статьях (как и вообще в современной литературе) разнобоем в терминологии в конце сборника помещены некоторые замечания по этому поводу.

Д. В. Аносов

ВСТУПИТЕЛЬНАЯ СТАТЬЯ

Д. В. Аносов

1. Начиная примерно с 1960 г. теория гладких динамических систем получила значительное развитие и оформилась в самостоятельный раздел математики с развитой системой понятий, методов, определенными задачами и достаточно глубокими достижениями. Разумеется, и раньше, начиная с Пуанкаре, существовали замечательные работы о гладких динамических системах, не уступающие современным достижениям, но полученные результаты не объединялись в единое целое из-за отсутствия необходимых понятий и методов, которые выделили бы их из общей массы работ о дифференциальных уравнениях.

На протяжении последних 10 лет состоялось несколько конференций и симпозиумов, на которых теория гладких динамичеких систем была единственной темой или одной из главных тем. Их результаты отражены в сборниках [1], [2], [3], [4], содержащих много ценной информации. Суммарный объем публикаций по этой тематике, появившихся за это же время в различных математических журналах, в несколько раз превышает объем этих четырех сборников.

Естественно, что за пределами настоящего сборника остались целые направления, о которых здесь можно только упомянуть.

1) Работы аналитического характера (включая исследование окрестностей положений равновесия и периодических решений).

2) Теория бифуркаций. Здесь можно сослаться на обзорный доклад [5]. Многие иностранные работы последних лет по бифуркациям входят в сборники [3], [4].

3) Вопросы, относящиеся к эргодической теории или смежные с ней (например, марковские разбиения для гиперболических множеств). Они отражены в вышедшем недавно обзоре [6].

4) Изолирующие блоки, служащие для локализации изолированных инвариантных множеств, их «продолжения» по

параметру и выяснения некоторых их свойств [1]). За неимением новых обзоров приходится ссылаться на старый [7] и на подробную статью [8], не содержащую, однако, приложений. См. также одну из последних публикаций в этой области [45].

С другой стороны, на некоторых работах я остановлюсь подробнее в последующих разделах. Эти разделы не зависят друг от друга, и порядок их расположения более или менее случаен.

2. Рюэль и Такенс [10] построили пример, когда при разрушении квазипериодического движения на многомерном торе рождается некоторое притягивающее гиперболическое множество. Сам по себе этот пример ничем не выделяется среди многих других примеров бифуркаций, появившихся в последнее время. Но он получил особый резонанс, ибо его авторы высказали предположение, что он может служить моделью возникновения турбулентности при потере устойчивости ламинарного течения.

Значение работы [10] состоит не в предложенной конкретной модели, а в другом: она помогла специалистам по математической гидродинамике понять, что ресурсы современной математики не исчерпываются квазипериодическими движениями и что имеет смысл попробовать связать турбулентность с притягивающими гиперболическими множествами. Привлекательность последних в этом отношении обусловлена сочетанием неустойчивости индивидуальных траекторий с устойчивостью множества в целом (устойчивостью как относительно возмущений начальных данных, коль скоро оно притягивающее, так и относительно возмущений динамической системы, коль скоро оно гиперболическое). Привлекательность еще усиливается, если учесть, что в принципе гиперболичность способна привести к появлению у системы статистических свойств. (Неясно, правда, какую из многих инвариантных мер следует в данном случае предпочесть [2])).

В настоящее время многими исследователями проводятся численные эксперименты с системами нескольких (обычно трех) обыкновенных дифференциальных уравнений, которые являются галёркинскими приближениями для системы урав-

---

[1]) Собственно, многое здесь не связано с гладкостью и переносится в более общую обстановку [9]. С этой точки зрения изолирующие блоки можно отнести к так называемой топологической динамике, однако по своему духу они весьма далеки от этой дисциплины в ее теперешнем виде.

[2]) По этой причине я, как и ряд других советских математиков, предпочитаю говорить о «квазислучайности» или «стохастичности». По-видимому, в современной математической литературе на русском языке всегда, когда употребляется слово «случайный» или «статистический», подразумевается ситуация, где так или иначе играет роль некоторая мера («вероятность»).

нений в частных производных Навье — Стокса, и поэтому рассматриваются как упрощенная модель последней. Впервые такие эксперименты были проведены более 10 лет назад Лоренцем, обратившим внимание на то, что при некоторых значениях параметров, от которых зависит система, в поведении ее траекторий проявляется стохастичность. Именно, при ограниченной точности начальных данных движение остается более или менее определенным лишь в течение сравнительно небольшого отрезка времени, в дальнейшем же для него могут реализовываться различные варианты в зависимости от неизвестных нам начальных данных. В траектории можно выделить отрезки, которые время от времени довольно точно повторяются, но эти повторения происходят весьма нерегулярно и вслед за приблизительным повторением одного отрезка следующий за ним отрезок может и не повториться. В то время работа Лоренца не привлекла особого внимания (быть может, из-за отсутствия понятий, которые помогли бы теоретически интерпретировать наблюдения Лоренца?). Теперь же Рюэль высказал мнение, что Лоренц наблюдал движения в притягивающем гиперболическом множестве [11]. Надо надеяться, что довольно скоро новые численные эксперименты вместе с попытками теоретического осмысления их результатов позволят, если и не абсолютно строго, то по крайней мере достаточно убедительно, судить о том, действительно ли гиперболические множества имеют отношение к поведению траекторий этих модельных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Другой вопрос — удастся ли хоть с какой-то степенью убедительности перенести полученные выводы на настоящие уравнения Навье — Стокса.

Что касается самой модели из [10], то, как отмечают сами авторы, не понятно, как в гидродинамической ситуации мог бы возникнуть многомерный тор. Хорошо известно, что при достаточно общих условиях потеря устойчивости периодического решения сопровождается рождением двумерного тора (бифуркация Хопфа), однако в [10] нужен тор бо́льшей размерности. Можно, конечно, представить себе, что происходят бифуркации тора, приводящие к увеличению его размерности, однако этот процесс еще совершенно не изучен и не ясно, не происходит ли он лишь при каком-то маловероятном стечении обстоятельств. (Ведь родившийся «по Хопфу» двумерный тор может вскоре после этого «развалиться».)

Независимо от этого следующие соображения делают сомнительным, чтобы пример из [10] действительно мог служить подходящей моделью возникновения турбулентности. В этом примере родившееся предельное множество близко к разрушившемуся тору, тогда как турбулентное течение едва ли может считаться близким к ламинарному. В то же время экспериментальные данные производят такое впечатление, что турбулентность возникает, когда ламинарное течение еще устойчиво, но его область устойчивости очень мала.

Здесь речь шла о неконсервативной динамической системе. К консервативным (гамильтоновым) системам теория гладких динамических систем (как теория Колмогорова — Арнольда — Мозера, так и «гиперболическая» идеология) еще раньше применялась (на аналогичном физическом уровне строгости и с широким использованием численного эксперимента) группой новосибирских физиков — Чириковым, Заславским и др. [12], [13].

3. Швейцер [14] доказал, что *на любом трехмерном многообразии в каждом гомотопическом классе векторных полей без особых точек существует гладкое векторное поле класса C^1, не имеющее периодических решений.* Аналогичный результат справедлив и для трехмерных многообразий с краем, если рассматривать векторные поля, трансверсальные к краю (и если, конечно, на данном многообразии вообще существуют векторные поля без особых точек, трансверсальные к краю). Наконец, для многообразий бо́льшей размерности аналогичные результаты справедливы уже в классе C^∞.

Для трехмерной сферы и сплошного тора (прямого произведения $S^2 \times D^2$ окружности на диск) это дает решение известных проблем, первая из которых была поставлена Зейфертом [15], а вторую автор приписывает Смейлу (фольклорная традиция, обоснованно или нет, связывает ее с именем Пуанкаре). Ранее Фуллер [16] построил более простой пример трансверсального к краю векторного поля без особых точек в сплошном торе, которое хотя и имеет периодическую траекторию, но она вопреки наивным ожиданиям не делает оборота вдоль S^1, а лежит в некотором диске $x_0 \times D^2$.

Коль скоро известно, что у векторного поля без особенностей на трехмерной сфере может и не быть периодических траекторий, это повышает значение результатов о существовании периодических траекторий при выполнении различных специальных условий [15] (см. также [19], [17], 18]).

Неизвестно, какова ситуация в трехмерном случае с более гладкими векторными полями. Естественно также специально поставить вопрос о векторных полях, определяющих потоки с гладкой инвариантной мерой. Наконец, Уилсон [20] предложил постановку вопроса, в которой вместо периодических траекторий речь идет о минимальных множествах коразмерности $\geqslant 2$.

В более широком плане следует заметить, что это уже не первый случай, когда существование системы с определенным качественным поведением удается установить только в классе C^1. Такова ситуация в знаменитой лемме о замыкании (ссылки в статье Ф. Такенса о гомоклинических точках), а также в задачах, рассматриваемых в двух работах Такенса, включенных в настоящий сборник[1]. В большинстве случаев, как и в проблеме Зейферта, соответствующий вопрос в случае большей гладкости остается открытым. Исключение составляет задача об инвариантных кривых для сохраняющих площадь отображений кольца, которой посвящена вторая работа Такенса. Здесь усилиями ряда математиков (Колмогорова, Арнольда, Мозера, Рюссмана) доказано, что в случае высокой гладкости ситуация иная. Хотя между «рекордным» результатом Рюссмана и примером Такенса остается «лакуна», этот пример представляет большой интерес, так как обнаруживает эффект, принципиально связанный с малой гладкостью (правда, здесь речь идет не о гладкости самого преобразования, а о малости возмущения в C^r-топологии).

4. Мезер [21] обнаружил, что в задаче $n \geqslant 4$ тел (с ньютоновским потенциалом) возможен принципиально новый тип особенностей по сравнению с $n = 2, 3$. Как известно, еще Пенлеве в конце прошлого века полностью выяснил характер особенностей в задаче трех тел: таковыми могут быть лишь столкновения (двойные или тройные), при которых по определению расстояние между сталкивающимися телами стремится к нулю; при этом в течение конечного времени может произойти лишь конечное число столкновений. (Обзор классических исследований конца XIX — начала XX вв. об аналитических свойствах решений задачи трех тел и литературные ссылки см. в лекциях Алексеева, цитированных в предисловии.) Теперь же выяснилось, что уже в задаче четырех тел ситуация иная: *существуют траектории, на которых за конечное время t_0 происходит бесконечное число двойных столкновений, причем в итоге при $t \to t_0$ три тела уходят в бесконечность — одно в одну сторону, а два других, неограниченно сближаясь между собой (что и дает энергию для всех процессов), — в другую; четвертое же тело осциллирует между ними.* Наиболее интересен здесь, конечно, уход в бесконечность за конечное время t_0 — в момент t_0 мы имеем совершенно новый тип особенности. Вполне возможно, что уход

[1] Отметим еще вопрос о метрических свойствах У-систем, где хотя отсутствует C^1-контрпримеры к естественным гипотезам, которые доказаны для более гладких отображений, но предпосылки, на которых основаны эти доказательства, по-видимому, не верны в C^1-ситуации (см. [40]). В близком вопросе о мере нигде не плотных гиперболических множеств имеется контрпример Боуэна [41], показывающий, что ситуация для C^1-диффеоморфизмов не такая, как в более гладком случае (см. [42]).

в бесконечность может произойти и без предшествующих столкновений в строгом смысле слова, но в примере, который пока что разобран, все четыре тела движутся по одной прямой линии, и ясно, что без столкновений тут не обойтись. Естественно, сразу возникает вопрос, что́ происходит в трехмерном случае в малой окрестности разобранного движения, не будет ли и здесь возможен уход в бесконечность за конечное время, но без столкновений? Это пока не выяснено.

Исследование Мезера существенно опирается на предшествующую работу Мак-Гехи [22] о регуляризации особенностей в задаче трех тел при движении по прямой (в связи с чем публикация [21] является совместной. Когда «осциллирующее» тело подходит близко к двум «сближающимся», происходит почти что тройное столкновение; Мезер использует проведенный Мак-Гехи анализ движений в окрестности тройного столкновения). Используемая техника представляет собой комбинацию техники исследования «квазислучайных движений» Алексеева и регуляризации особенностей типа проведенной Мозером в задаче двух тел одновременной регуляризации всех особенностей на поверхности постоянной энергии.

5. В самое последнее время Херману удалось существенно продвинуть исследование свойств каскадов, порождаемых диффеоморфизмами окружности [23], [46] (см. также доклад Делиня о его работе [24]).

С преобразованием $\varphi\colon S^1 \to S^1$ окружности $\{x \bmod 1\}$ удобно работать в терминах накрывающего отображения $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которое я буду называть угловой функцией отображения φ. (Две различные угловые функции одного и того же отображения φ различаются на константу, являющуюся целым числом.) Например, если φ — диффеоморфизм класса C^n, сохраняющий ориентацию, то в терминах угловой функции это формулируется так: $f \in C^n$ и при всех x

$$\frac{df(x)}{dx} > 0, \qquad f(x+1) = f(x). \tag{1}$$

Для любого гомеоморфизма φ, сохраняющего ориентацию, предел

$$\alpha(f) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} f^n(x)$$

(f^n, как обычно, обозначает n-кратную итерацию f) существует и не зависит от x; он называется числом вращения (этого гомеоморфизма). Собственно инвариантом гомеоморфизма φ является $\alpha(f) \bmod 1$, ибо если $k \in \mathbb{Z}$, то $\alpha(f+k) = \alpha(f) + k$.

Согласно классической теореме Данжуа, *если для диффеоморфизма φ, сохраняющего ориентацию и имеющего иррациональное число вращения, производная $\frac{df}{dx}$ угловой функции f является функцией ограниченной вариации (на конечных интервалах), то существует гомеоморфизм χ: $S^1 \to S^1$, сопрягающий φ с поворотом*

$$\psi: x \mapsto x + \alpha(f) \bmod 1.$$

Этот гомеоморфизм определен практически однозначно — с точностью до поворота окружности. Возникает вопрос о его гладкости.

Легко видеть, что сопрягающий гомеоморфизм χ в данном случае либо абсолютно непрерывен, либо сингулярен (переводит некоторое множество меры нуль в множество полной меры). Последний случай действительно возможен даже при аналитичности f ([25] и, несколько менее аккуратно, [26], 27]). Нетрудно убедиться, что для диффеоморфизма с угловой функцией

$$f_\lambda(x) = x + \lambda + \frac{1}{4\pi}\sin 2\pi x \tag{2}$$

при некотором λ имеет место именно такая ситуация. Действительно, в [25] — [27] доказано следующее. *Пусть имеется функция двух переменных $f_\lambda(x)$, определенная и аналитическая при $x \in \mathbb{R}$, $\lambda \in [\beta, \gamma]$, причем $f_\lambda(x)$ как функция от x при каждом фиксированном λ (и всех x) удовлетворяет* (1), *определяя тем самым аналитический диффеоморфизм окружности φ_λ. Пусть число вращения $\alpha(f_\beta) \neq \alpha(f_\gamma)$, и пусть ни для одного λ, для которого $\alpha(f_\lambda)$ рационально, φ_λ не сопряжен топологически с поворотом окружности $x \mapsto x + \alpha(f_\lambda)$.* Эквивалентная формулировка последнего условия: *ни при каких n, λ не может выполняться тождество*

$$f_\lambda^n(x) = x + \text{const} \quad (\textit{при всех } x). \tag{3}$$

Тогда существует λ, при котором $\alpha(f_\lambda)$ иррационально, а сопрягающий гомеоморфизм сингулярен. Чтобы убедиться в невозможности (3) для семейства (2), заметим, что в данном случае $f_\lambda(x)$ — целая функция x, поэтому из выполнения (3) при всех $x \in \mathbb{R}$ следовало бы, что то же самое равенство имеет место при всех комплексных x. Продифференцируем его:

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{df_\lambda\left(f_\lambda^{i-1}(x)\right)}{dx} = 1.$$

Слева стоит произведение целых функций, причем одна из них, а именно та, которая получается при $i = 1$, т. е. функция

$$\frac{df_\lambda(x)}{dx} = 1 + \frac{1}{2}\cos 2\pi x,$$

имеет нуль в комплексной области. Тем самым получается противоречие[1]).

Рассуждение, приводящее к построению λ, при котором сопрягающий гомеоморфизм для φ_λ сингулярен, таково, что число вращения $\alpha(f_\lambda)$ получается чрезвычайно быстро аппроксимирующимися рациональными числами. Опыт, связанный с «малыми знаменателями», подсказывает, что подобная аномально быстрая аппроксимация может быть источником «патологии». Поэтому Арнольд выдвинул следующую гипотезу [25]: существует такое множество M полной меры, что для каждого $\mu \in M$ и каждого сохраняющего ориентацию аналитического диффеоморфизма φ: $S^1 \to S^1$ с числом вращения μ гомеоморфизм χ, сопрягающий φ с поворотом окружности, является аналитическим. В [25] эта гипотеза доказана, грубо говоря, для диффеоморфизмов, достаточно близких к повороту $x \to x + \mu$; позднее были получены аналоги этого результата для конечной гладкости. Финзи утверждал [26], что если $\varphi \in C^3$ и число вращения достаточно медленно приближается рациональными числами, то $\chi \in C^1$. Однако Дж. Глимм обнаружил ошибку: на стр. 269 Финзи неправильно оценивает сумму дробей.

Эрман доказал гипотезу Арнольда [46]. Пока опубликована полученная Эрманом до этого менее сильная теорема [23], [24]. Она относится к таким μ, которые настолько медленно приближаются рациональными числами, насколько это вообще возможно: *если a_i — коэффициенты разложения μ в цепную дробь, то требуется, чтобы*

$$\sup_n \frac{1}{n}\sum_1^n a_i < \infty.$$

(Такие μ образуют множество меры 0.) Теорема утверждает, что если *число вращения диффеоморфизма φ удовлетворяет сформулированному условию*, то из $\varphi \in C^n$, *где $n \geqslant 3$, следует*, *что $\chi \in C^{n-2}$ (более того, $(n-2)$-я производная соответствующей угловой функции удовлетворяет условию Гёльдера*

---

[1]) Вообще ни для какой целой функции f, кроме линейной, не может иметь место тождество $f^n(x) = x + \mathrm{const}$ — из него следовала бы инъективность отображения $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

с любым показателем, меньшим 1), *а из аналитичности* φ *следует аналитичность* χ.

6. В этом и следующем пункте более детально рассматриваются некоторые специальные вопросы, непосредственно примыкающие к проблематике первых четырех статей сборника.

В статьях настоящего сборника, посвященных У-системам коразмерности 1 (т. е. таким У-системам, для которых в стандартных обозначениях слои слоений W^u или W^s имеют коразмерность 1), наряду с «динамическими» соображениями используются соображения из теории слоений, принадлежащие Хефлигеру, Новикову и Секстедеру. Интересно посмотреть, что может дать здесь теория слоений «в чистом виде».

Напомню сперва несколько определений. При этом слоение ради простоты можно считать гладким (как это имеет место для интересующих нас слоений коразмерности 1 в У-системах класса C^2).

Обозначим n-мерное многообразие, на котором задано рассматриваемое слоение, через M, а слой, проходящий через точку x, — через $W(x)$. Пусть γ: $[0, 1]\to W(x_0)$ — замкнутый путь в слое $W(x_0)$ с началом и концом в точке x_0. Построим в каждой точке $\gamma(t)$ маленькую площадку $\Pi(t)$, трансверсальную к слоению и непрерывно зависящую от t, причем ее касательные плоскости тоже зависят от t непрерывно, а $\Pi(0) = \Pi(1)$. Формально это означает следующее: пусть слои k-мерны, $l = n - k$; мы рассматриваем отображение f: $D^l \times [0, 1] \to M^n$ (здесь D^l — l-мерный шар), для которого $f(0, t) = \gamma(t)$, $f(x, 0) = f(x, 1)$, $f|D^l \times \{t\}$ — гладкое вложение, трансверсальное к слоям, и производная по x в точке (x, t) непрерывна по (x, t). Тогда $\Pi(t) = f(D^l \times \{t\})$. Если на площадке $\Pi(0)$ взять точку x в достаточно малой окрестности U точки x_0, то существует ровно один непрерывный путь γ_x: $[0, 1] \to M$, для которого $\gamma_x(t) \in \Pi(t) \cap W(x)$. Тем самым определено *отображение последования* вдоль пути γ — отображение $U \to \Pi(0)$, переводящее x в $\gamma_x(1)$. (Его называют также *отображением монодромии.*) Замкнутый путь γ называется *предельным циклом* (данного слоения), если отображение последования не тождественно ни в какой окрестности точки x_0 (т. е. сколь угодно близко к x_0 имеются точки, которые оно сдвигает). Это определение не зависит от случайностей построения (выбора $\Pi(t)$); кроме того, два замкнутых пути, лежащих на одном и том же слое и свободно гомотопных на нем, одновременно являются или не являются предельными циклами.

Я буду называть слоение *коориентируемым*, если нормали к его касательному полю $T_xW(x)$ (построенные с помощью какой-нибудь вспомогательной римановой метрики) могут быть согласованным образом ориентированы во всех точках $x \in M$ (согласованность подразумевает, что ориентация непрерывно зависит от x). Эквивалентная формулировка того же условия: расслоение над M, слой которого над точкой x есть факторпространство $T_xM/T_xW(x)$, ориентируемо. Надо предупредить, что Новиков [28] и Брахман [29], результаты которых цитируются ниже, коориентируемость называют ориентируемостью, в настоящем же сборнике ориентируемость слоения означает ориентируемость его касательного поля $T_xW(x)$.

Пусть теперь слоение имеет коразмерность 1, так что «площадки» $\Pi(t)$ суть дуги, каждая из которых разбивается точкой $\gamma(t)$ на две половины, локально лежащие по разные стороны от W (т. е. в некоторой окрестности U точки $\gamma(t)$ они лежат по разные стороны от связной компоненты пересечения $U \cap W$, содержащей $\gamma(t)$). Если слоение коориентируемо, то для всех путей на слое W можно согласованным образом объявить одни из этих полудуг «правыми», другие «левыми». Рассматривая отображение последования только на правых или только на левых полудугах, можно определить *правые и левые предельные циклы.* К ним вполне применимо все сказанное выше о независимости от случайностей построения и от гомотопии на слое. *Односторонний предельный цикл* — это правый предельный цикл, не являющийся левым, или левый, не являющийся правым.

Пусть путь γ в слое $W(x_0)$ не является правым предельным циклом. Тогда его можно сдвинуть по «правым» трансверсальным полудугам в близкий слой $W(x_\varepsilon)$, где получится некоторый замкнутый путь γ_ε. Может случиться, что путь γ нельзя стянуть в точку на слое $W(x_0)$, а сдвинутые пути γ_ε стягиваемы в точку на слоях $W(x_\varepsilon)$ при всех (достаточно малых) $\varepsilon > 0$. Тогда говорят, что γ — *исчезающий справа цикл* (термин предложен Хефлигером; Новиков говорил о «цикле, предельно гомотопном нулю справа»). Как обычно, данное свойство не зависит от конкретного выбора трансверсальных дуг и не меняется при свободной гомотопии. В частности, потому и говорят «цикл», а не путь, что выбор начальной точки на замкнутой кривой (разумеется, с установленным на ней порядком обхода) безразличен.

Из результатов Новикова [28] для нас представляют интерес следующие утверждения о коориентируемом слоении на замкнутом многообразии M^n.

1) *Если слоение не имеет предельных циклов, то универсальное накрытие $\widehat{M}$ многообразия M диффеоморфно*[1]) *пря-*

[1]) В нашем предположении о гладкости слоеиий. В противном случае, естественно, речь шла бы о гомеоморфизме.

мому произведению $\tilde{W} \times \mathbb{R}$ универсального накрытия $\tilde{W}$ любого слоя W на прямую $\mathbb{R}$ посредством диффеоморфизма, переводящего каждый слой слоения, накрывающего исходное слоение на M, в $\tilde{W} \times \{t\}$.

2) *При этих условиях вложение i: $W \to M$ индуцирует мономорфизм i_*: $\pi_1(W) \to \pi_1(M)$ фундаментальных групп, образ которого — нормальный делитель, а факторгруппа $\pi_1(M)/i_*\pi_1(W)$ — свободная абелева группа с конечным числом образующих.*

(Эти два утверждения, по существу, составляют теорему 5.1.)

3) *Если слоение не имеет исчезающих циклов, то либо имеется слой W, для которого гомотопическая группа $\pi_2(W) \neq 0$, либо $\pi_2(M) = 0$.*

4) *При том же условии ни одна замкнутая трансверсаль не стягивается в точку.*

(Эти два утверждения составляют часть теоремы 6.1. Путем перехода к подходящему двулистному накрытию легко убедиться, что они не зависят от коориентируемости.)

В У-каскадах слоения W^u, W^s не могут иметь предельных циклов (поскольку все слои стягиваемы), а для У-потока коразмерности 1 соответствующее слоение не может иметь исчезающих циклов (поскольку нестягиваемые замкнутые кривые имеются только на слоях, проходящих через периодические траектории, и там они являются двусторонними предельными циклами). Отсюда можно вывести следующие заключения:

а) *Если на замкнутом многообразии M существует У-каскад коразмерности 1 и соответствующее слоение коориентируемо, то M имеет гомотопический тип тора.*

Кроме того, получается (независимо от предположения о коориентируемости слоения, поскольку можно сперва перейти к двулистному накрытию) информация о накрывающем слоении на универсальном накрытии, см. 1).

б) *Если на замкнутом многообразии M существует У-поток коразмерности один, то $\pi_2(M) = 0$ и ни одна замкнутая трансверсаль не стягиваема.*

Последнее утверждение о замкнутых трансверсалях используется (и доказывается) в статье Планте и Тёрстена, помещенной в настоящем сборнике (см. также примечания к переводу). Результат о π_2, кажется, никем не дублировался. В трехмерном случае из него легко вывести, что универсальное накрытие $\tilde{M}$ стягиваемо. Это несколько слабее[1]), чем следующий результат Маргулиса [30], доказанный

[1]) Поскольку существует стягиваемое трехмерное открытое многообразие, не гомеоморфное $\mathbb{R}^3$.

с использованием обоих слоений W^u, W^s: *универсальное накрытие замкнутого трехмерного многообразия M, на котором существует У-поток, гомеоморфно евклидову пространству.* (У Маргулиса это получается в ходе доказательства утверждения, что $\pi_1(M)$ имеет экспоненциальный рост, которое теперь перекрыто Планте — Тёрстеном.)

Для У-каскадов использование «динамических» соображений позволяет несколько усилить утверждение а) (см. статьи Френкса и Ньюхауса в настоящем сборнике). Френкс существенно использует сформулированные выше свойства накрытия $\tilde{M}$ и слоения $\{\tilde{W}\}$ на нем, при этом в приводимом им доказательстве (принадлежащем, как он отмечает, Новикову) делается предположение, что все точки в M неблуждающие. Избавиться от этого предположения можно двумя способами. С одной стороны, Ньюхаус доказал, что для У-каскада коразмерности 1 оно выполняется автоматически. С другой стороны, из приведенных выше формулировок видно, что теория слоений способна привести к требуемым выводам о $\tilde{M}$ и $\{\tilde{W}\}$ на основании одного только отсутствия предельных циклов.

В свое время здесь возникла сложная ситуация. Дело в том, что в [28] утверждение 1) доказано неверно. Вследствие ошибки, вызванной недостаточным вниманием автора к своему же собственному рис. 8, рассуждения на стр. 261 нуждаются в серьезных исправлениях. Таковые и были предложены — сперва самим Новиковым, но не в полной общности (именно это рассуждение и приводит Френкс), а затем Брахманом [29].

Пусть на замкнутом многообразии M имеется коориентируемое слоение коразмерности 1 без предельных циклов. Построим какое-нибудь гладкое векторное поле, всюду трансверсальное к слоям. Поток, определяемый этим полем, естественно называть *трансверсальным потоком* (в [29] говорится о «потоке нормалей»). В [29] доказано, что утверждение 1) справедливо, если выполняется следующее условие: каждая траектория трансверсального потока пересекает все слои. В то время осталось незамеченным, что в действительности это дополнительное условие автоматически выполняется для любого коориентируемого слоения коразмерности 1 на замкнутом многообразии, так что утверждение 1) справедливо в том общем виде, как оно сформулировано выше.

Нужный нам факт легко вывести из теоремы 4 и предложения 3.4 статьи Секстедера и Шварца [31]. Непосредственное сопоставление этих двух результатов из [31] приводит к следствию. *Пусть на замкнутом многообразии M задано коориентируемое слоение коразмерности 1. Если какая-нибудь замкнутая трансверсаль пересекает не все слои, то у слоения* *имеются предельные циклы*[1]). Таким образом, остается рассмотреть незамкнутую траекторию $x(t)$ трансверсального потока. Возьмем какую-нибудь ее ω-предельную точку x_0. У последней существуют такая окрестность U и такие координаты $u_1, \ldots, u_n$ в U, изменяющиеся от $-\varepsilon$ до ε каждая, что слои (точнее, связные компоненты пересечений слоев с U) задаются уравнениями $u_1 = \text{const}$, а траектории трансверсального потока — уравнениями $u_2 = \text{const}, \ldots, u_n = \text{const}$. Пусть некоторый отрезок траектории $x(t)$, попавший в U, имеет уравнение $u_2 = a_2, \ldots, u_n = a_n$, причем координаты $\left(\frac{\varepsilon}{2}, a_2, \ldots, a_n\right)$ имеет точка $x(t_1)$, а следующее по времени пересечение $x(t)$ с U имеет уравнение $u_2 = b_2, \ldots, u_n = b_n$, причем координаты $\left(-\frac{\varepsilon}{2}, b_2, \ldots, b_n\right)$ имеет точка $x(t_2)$. Возьмем такую гладкую функцию φ, что $0 \leqslant \varphi(t) \leqslant 1$ при всех t, $\varphi(t) = 0$ при $t \leqslant -\frac{\varepsilon}{2}$, $\varphi(t) = 1$ при $t \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$, и замкнем петлю траектории $x(t)$ от $x(t_1)$ до $x(t_2)$, соединив $x(t_2)$ с $x(t_1)$ посредством гладкой дуги, которая лежит в U и задается уравнениями

$$u_i = a_i + (b_i - a_i)\varphi(u_1), \quad |u_1| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \quad i = 2, \ldots, n.$$

Получится некоторая замкнутая трансверсаль к слоению (которая, конечно, уже не является траекторией нашего потока). По сравнению с $x(t)$ эта замкнутая трансверсаль не пересекает новых слоев; значит, если бы $x(t)$ пересекала не все слои, то, согласно сформулированному следствию из результатов [31], у слоения имелись бы предельные циклы.

7. Здесь излагается еще несколько различных результатов об У-системах.

а) Обычно У-системы рассматриваются на замкнутом многообразии, при этом в определении фигурирует риманова метрика, но ввиду компактности ее выбор на самом деле безразличен. Определение можно дословно перенести и на тот случай, когда фазовое многообразие является открытым (т. е. некомпактным и без края). При этом, однако, определение уже существенно зависит от используемой римановой метрики. (Метрику естественно считать полной. Кроме того, кажется целесообразным добавить какие-то требования

[1]) В других и притом более известных работах Секстедера и Шварца требуется гладкость класса C^2 (и это связано с существом дела). Поэтому следует подчеркнуть, что в [31] (как, скажем, и в [29]) требования гладкости минимальны — достаточно гладкости класса C^1 (и даже выполнения более слабых условий, например, гладкости слоев и непрерывности касательного поля).

равномерности. Сразу приходит в голову требование ограниченности производной отображения или векторного поля, но возможно, что стоит потребовать еще чего-нибудь, скажем чтобы метрика имела ограниченную кривизну, а производная отображения или векторного поля была равномерно непрерывна).

В свое время в теории геодезических потоков на многообразиях отрицательной кривизны открытые многообразия рассматривались наравне с замкнутыми и для них получались вполне содержательные результаты [32, [33]. Это довод в пользу того, чтобы рассматривать У-системы на открытых многообразиях. Но при этом даже в простейших (казалось бы) случаях возможны неожиданные сюрпризы, пример чему обнаружил Уайт [34]. Он построил пример У-диффеоморфизма на плоскости (с нестандартной метрикой) [1]), весьма отличный по своим свойствам от обычного гиперболического автоморфизма (со стандартной евклидовой метрикой). В этом примере, в частности, нет неподвижной точки, а каждый неустойчивый слой пересекает лишь часть устойчивых (и обратно). Невольно возникает сомнение, окажется ли обобщение У-систем на открытые многообразия плодотворным. (Быть может, лучше модифицировать определение, включив какие-то дополнительные требования.)

Приведу формулы, задающие пример Уайта, оставляя читателю расшифровку их геометрического смысла. Обозначим через $\psi(x)$ функцию класса C^∞, которая равна 0 при $x \leqslant 0$, возрастает от 0 до $\frac{\pi}{2}$ при $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{4}$ и равна $\frac{\pi}{2}$ при $x \geqslant \frac{1}{4}$. Определим периодическую функцию $\varphi(x)$ с периодом 2, положив при $0 \leqslant x \leqslant 2$

$$\varphi(x) = \psi\left(x - \frac{1}{4}\right) - \psi\left(x - \frac{3}{4}\right) - \psi\left(x - \frac{5}{4}\right) + \psi\left(x - \frac{7}{4}\right).$$

Обозначим через $e(\varphi)$ вектор $\cos\varphi \frac{\partial}{\partial x} + \sin\varphi \frac{\partial}{\partial y}$ и положим $e_1(x, y) = e(\varphi)$, $e_2(x, y) = e\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$. Введем новую риманову метрику на плоскости, приняв, что если $X, Y \in T_{(x, y)}\mathbb{R}^2$ и в базисе $e_1(x, y)$, $e_2(x, y)$ эти векторы имеют компоненты (X_1, X_2) и (Y_1, Y_2), то

$$\langle X, Y \rangle = \lambda^{2x} X_1 Y_1 + \lambda^{-2x} X_2 Y_2,$$

[1]) В этом примере очевидна ограниченность производной, но не очевидно, как обстоит дело с другими вариантами равномерности. Уайт этого не обсуждает, но, видимо, вопрос можно выяснить без особых усилий.

где $\lambda > 1$ — фиксированное число. По отношению к этой метрике преобразование $(x, y) \mapsto (x+1, -y)$ является У-диффеоморфизмом. При этом интегральные кривые поля e_1 образуют неустойчивое, а поля e_2 — устойчивое слоение.

б) Вернемся к У-системам на замкнутых многообразиях. Желательно иметь разнообразные примеры таких систем. Для дискретного времени обширный запас примеров доставляют получающиеся алгебраическим путем гиперболические автоморфизмы инфранильмногообразий, о которых говорится в настоящем сборнике. Для построения У-потоков тоже можно использовать алгебраические конструкции. Это хорошо известно, если речь идет о геодезических потоках на многообразиях постоянной отрицательной кривизны (и некоторых других многообразиях), но таким путем можно получить и новые примеры. См. статьи Томтера [35, 36].

в) Геодезические потоки на многообразиях отрицательной кривизны помимо свойств, общих всем У-потокам, имеют ряд специфических свойств геометрического характера. Клингенберг [37] показал, что ряд таких свойств (фактически все основные свойства, которыми вообще занимались) выполняется для геодезических потоков, удовлетворяющих условию (У). (См. также [38] относительно необратимых финслеровых метрик.)

г) В переведенной статье Френкса уделяется некоторое внимание У-накрытиям. Выделение этого класса объектов мотивируется желанием унифицировать У-диффеоморфизмы и растягивающие отображения. Оказывается, однако, что унификация достигается довольно относительная. Именно, У-диффеоморфизмы и растягивающие отображения все равно занимают особое положение среди всех У-накрытий: только в этих двух случаях У-накрытие является структурно устойчивым [43], [44]. (По-видимому, из этих работ можно вывести и то, что только в этих двух случаях оно является π_1-накрытием. Конечно, сказанное не означает, что У-накрытия вообще нецелесообразно рассматривать. Например, вполне разумной задачей представляется исследование их эргодических свойств.) Ниже объясняется в общих чертах, в чем тут дело. Мы увидим, что даже само определение У-накрытия следует несколько изменить, если мы хотим, чтобы при малом (в смысле C^1) возмущении У-накрытия получалось снова У-накрытие.

Проще всего начать именно с этого последнего вопроса. Пусть f: $M \to M$ — У-накрытие в том смысле, как это понимается у Френкса, $T_xM = E_x^u \oplus E_x^s$ — соответствующее разложение касательного пространства. Подпространство E_x^s однозначно определяется тем требованием, чтобы под действием

$(df)^n$ (при $n \to \infty$) все его векторы стремились к нулю. При этом не надо даже требовать, чтобы $(df) E^s_x = E^s_{f(x)}$, — это выполняется автоматически. Что же до E^u_x, то само по себе условие роста образующих его векторов под действием $(df)^n$ (при $n \to \infty$) ничего не выделяет. Ведь этим свойством обладают все векторы из $T_x M \setminus E^s_x$, причем соответствующие оценки имеют место с тем же показателем в экспоненте и только постоянный множитель перед ней зависит от угла, образуемого рассматриваемым вектором с E^s_x. Выделение E^u_x обеспечивается лишь при добавлении к условию роста условия инвариантности: $(df) E^u_x = E^u_{f(x)}$. Перефразируем это определение в других терминах.

При накрытии каждая точка имеет несколько прообразов, поэтому нельзя говорить об отрицательной траектории точки x_0 в обычном смысле слова. Будем называть траекторией (точки x_0 под действием f) такую последовательность x_n, $-\infty < n < \infty$, что $f(x_n) = x_{n+1}$. При $n \geqslant 0$ получается положительная полутраектория в обычном смысле слова, отрицательных же полутраекторий $\{x_n,\ n \leqslant 0\}$ у каждой точки x_0 имеется континуум. Вдоль каждой отрицательной полутраектории имеем последовательность отображений

$$(df(x_n))^{-1}\colon T_{x_{n+1}}M \to T_{x_n}M \qquad (n = -1,\ -2,\ \ldots).$$

Композицию первых $|n|$ отображений естественно обозначить через $(df)^n_{x_n}$, ибо это есть отображение, обратное к

$$(df)^{|n|}_{x_n} = df(x_{-1}) \circ df(x_{-2}) \circ \ \ldots \ \circ df(x_n).$$

Рассматривая эти отображения, можно выделить подпространство $E^u_{x_0}$ посредством условия, чтобы все его векторы под действием $(df)^n_{x_n}$ стремились к нулю (при $n \to -\infty$).

Разумеется, надо иметь в виду, что оценки, выражающие оба эти условия убывания (для E^s_x при $n \to \infty$, для E^u_x при $n \to -\infty$), являются экспоненциальными и равномерными. К числу обычных равномерностей добавляется еще равномерность по всем отрицательным полутраекториям.

Пусть теперь g — накрытие, C^1-близкое к f. Так же, как и для У-диффеоморфизмов, доказывается следующее:

1) Для любой точки $x_0 \in M$ в $T_{x_0}M$ имеется подпространство $\widehat{E}^s_{x_0}$, состоящее из тех векторов v, для которых $(dg)^n v \to 0$ при $n \to \infty$. В действительности это убывание является экспоненциальным равномерно по x_0 и по $v \in \widehat{E}^s_{x_0}$ (соответствую-

щие оценки имеют место с чуть худшими показателем и предэкспоненциальным множителем, чем для f). Пространство $\hat{E}^s_{x_0}$ близко к $E^s_{x_0}$ и имеет ту же размерность. Оно непрерывно зависит от x_0 и $(dy)\,\hat{E}^s_{x_0} = \hat{E}^s_{g\,(x_0)}$.

2) Для любой точки x_0 и любой ее отрицательной полутраектории $\{\hat{x}_n,\ n \leqslant 0\}$ (под действием g) в $T_{x_0}M$ имеется подпространство $\hat{E}^u_{x_0}$, состоящее из тех векторов v, для которых $(dg)^n_{\hat{x}_n}\, v \to 0$ при $n \to -\infty$. В действительности это убывание является экспоненциальным равномерно по x_0, по $v \in \hat{E}^u_{x_0}$ и по всем отрицательным полутраекториям точки x_0 под действием g (соответствующие оценки имеют место с чуть худшими показателем и предэкспоненциальным множителем, чем для f). Пространство $\hat{E}^u_{x_0}$ близко к $E^u_{x_0}$ и имеет ту же размерность, при этом $(dg\,(x_n))^{-1}\,\hat{E}_{x_{n+1}} = \hat{E}_{x_n}$.

Однако вполне может случиться, что для одной и той же точки x_0 различным ее отрицательным полутраекториям будут отвечать различные подпространства $\hat{E}^n_{x_0}$, так что лучше писать $\hat{E}^u_{x_0}(\{\hat{x}_n\})$. В тех примерах алгебраического происхождения, о которых говорит Френкс, это не так, но при сколь угодно малом возмущении такая независимость от отрицательной полутраектории, вообще говоря, исчезнет.

Если мы хотим, чтобы У-накрытия образовывали открытое множество в пространстве всех гладких отображений, определение надо изменить так, чтобы оно допускало зависимость неустойчивого подпространства от отрицательных полутраекторий. Полагаю, что из сказанного достаточно ясно, какой должна быть соответствующая формулировка, и не буду на ней останавливаться. Вместо этого приведу эквивалентную формулировку, более короткую, хотя и менее наглядную.

Накрытие f: $M \to M$ называется У-накрытием, если имеется такое непрерывное распределение $E^s \subset TM$, что

1) *E^s инвариантно относительно df и $df\,|\,E^s$ является сжимающим отображением*, т. е. существуют такие $C > 0$ и λ, $0 < \lambda < 1$, что

$$|(df)^n v| \leqslant C\lambda^n |v| \quad \text{при всех} \quad n \geqslant 0,\ x \in M, \quad v \in E^s_x.$$

2) *Факторотображение $\overline{df}$: $TM/E^s \to TM/E^s$ является растягивающим отображением*, т. е. существуют такие $c > 0$ и $\mu > 1$, что

$$|(\overline{df})^n w| \geqslant c\mu^n |w| \quad \text{при всех} \quad n \geqslant 0, \quad x \in M, \quad w \in T_xM/E^s.$$

(Норма $|\varpi|$ в факторпространстве определяется обычным образом — как наименьшая из норм векторов, принадлежащих смежному классу ϖ.)

В [43], откуда эта формулировка заимствована, У-накрытия в этом смысле называются «weakly Anosov endomorphisms». Мне кажется, нет необходимости утяжелять название лишним наречием из-за того только, что первоначально это название использовалось в не совсем удачном определении.

Как обычно, можно построить устойчивые и неустойчивые многообразия. Новым здесь будет то, что последние, вообще говоря, зависят не только от точки x_0, но и от ее отрицательной полутраектории, так что следует писать $W^u_{x_0}(\{x_n\})$. Заметим, что, хотя W^u и W^s строятся с использованием гладкости (так или иначе используется представление f возле точек траектории в виде суммы линейного приближения и нелинейной части), они могут быть охарактеризованы в чисто топологических терминах. Например: $y \in W^u_{x_0}(\{x_n\})$ в том и только том случае, когда точка y имеет отрицательную полутраекторию $\{y_n\}$, для которой расстояние $\rho(y_n, x_n) \to 0$. Поэтому при топологическом сопряжении двух У-накрытий неустойчивые многообразия одного из них должны переходить в неустойчивые многообразия другого. Отсюда ясно, что У-накрытия в смысле Френкса не могут быть структурно устойчивыми, ибо для них $W^u_{x_0}(\{x_n\})$ совпадают для всех отрицательных полутраекторий $\{x_n\}$ точки x_0, тогда как при сколь угодно малом возмущении это совпадение может нарушиться.

В общем случае аргументация несколько сложнее, но ее суть все та же: то, что делается вдоль одной отрицательной полутраектории, не связано с тем, что делается вдоль другой отрицательной полутраектории той же точки.

8. Здесь будет изложена работа Френкса [39], которая используется в помещенной в настоящем сборнике статье Мэннинга [1]).

Пусть f — У-диффеоморфизм тора $\mathbb{T}^n$. Поскольку имеют место естественные отождествления

$$\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n, \quad \mathbb{Z}^n = \pi_1(\mathbb{T}^n) = H_1(\mathbb{T}^n, \mathbb{Z}), \quad \mathbb{R}^n = H_1(\mathbb{T}^n, \mathbb{R}),$$

то естественно сравнить f с алгебраическим автоморфизмом g тора $\mathbb{T}^n$, получающимся из индуцированного линейного отображения $f_*: H_1(\mathbb{T}^n, \mathbb{R}) \to H_1(\mathbb{T}^n, \mathbb{R})$.

---

[1]) Поскольку в последней речь идет об У-диффеоморфизмах тора. По поводу У-диффеоморфизмов на инфранильмногообразиях Мэнинг ссылается на свою статью, содержащую технически несколько более сложные аналоги результатов Френкса.

Первый шаг в этом направлении состоит в доказательстве того факта, что это последнее отображение — гиперболическое (так что g — тоже У-диффеоморфизм). В этом направлении Френкс доказал только то, что среди собственных значений f_* нет корней из единицы. Это очень просто. Если неустойчивое слоение ориентируемо, то индексы всех неподвижных точек отображения f^k одинаковы (и равны ± 1), а поскольку заведомо имеются периодические точки, то при некотором q число Лефшеца $L(f^{nq}) \neq 0$ при всех n. Но для тора легко доказать, что $L(f) = \prod_{i=1}^{n} (1 - \lambda_i)$, где λ_i — собственные значения f_* (с учетом кратности). Поэтому из наличия в спектре f_* корней k-й степени из единицы следовало бы, что $L(f^{kq}) = 0$. Если же неустойчивое слоение $\{W^u\}$ неориентируемо, то возьмем другой экземпляр того же тора $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, который удобнее обозначить через $\tilde{\mathbb{T}}^n$, и рассмотрим накрытие

$$\tilde{\mathbb{T}}^n \to \mathbb{T}^n \cdot \quad x \mapsto 2x.$$

Оно отвечает подгруппе $(2\mathbb{Z})^n \subset \mathbb{Z}^n$, которую f_*, очевидно, сохраняет; поэтому отображение f поднимается до непрерывного отображения $\tilde{f}\colon \tilde{T}^n \to \tilde{T}^n$. Последние индуцируют автоморфизм пространства $H_1(\tilde{\mathbb{T}}^n, \mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$, совпадающий с f_*; в то же время $\tilde{f}$ является У-диффеоморфизмом и его неустойчивое слоение $\{\tilde{W}^u\}$ накрывает $\{W^u\}$. Но $\{\tilde{W}^u\}$ ориентируемо. Ведь при накрытии $\tilde{\mathbb{T}}^n \to \mathbb{T}^n$ замкнутый путь на $\tilde{\mathbb{T}}^n$, обращающий ориентацию слоения $\{\tilde{W}^u\}$, проектировался бы в замкнутый путь на $\mathbb{T}^n$, обращающий ориентацию слоения $\{W^u\}$. Между тем при проекции получается такой путь на $\mathbb{T}^n$, который гомотопен некоторому дважды пройденному пути, а дважды пройденный путь сохраняет ориентацию даже в том случае, если однократно пройденный путь ее меняет. Тем самым „неориентируемый“ случай сводится к „ориентируемому“.

Окончательно гиперболичность f_* доказана в статье Мэннинга, перевод которой помещен в настоящем сборнике.

Предполагая, что f_* гиперболично, а $NW(f) = \mathbb{T}^n$ (последнее также доказано у Мэннинга), Френкс доказал топологическую сопряженность f с g. Доказательство осуществляется в несколько шагов.

1) Накрывающее отображение $\bar{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ имеет ровно одну неподвижную точку. Существование таковой легко следует из того, что (при наших отождествлениях) $\bar{f}(x) = f_*(x) + \varphi(x)$, где $\varphi(x) = \varphi(x + m)$ при $m \in \mathbb{Z}^n$, так что φ равно-

мерно ограничено. А именно, поле смещения $\bar{f}(x) - x$ имеет на сфере достаточно большого радиуса то же вращение, что и поле $f_*(x) - x$, т. е. вращение ± 1. Что же касается единственности, то всюду вне этой сферы $\bar{f}(x) - x \neq 0$, а ввиду условия (У) внутри нее могут быть лишь изолированные неподвижные точки с одинаковыми индексами (в $\mathbb{R}^n$ все слоения ориентируемы!), сумма которых равна вращению поля смещений на сфере.

2) Следствие: единственной периодической точкой отображения $\bar{f}$ является его единственная неподвижная точка x_0, а гомоклинических точек у $\bar{f}$ нет.

Действительно, если $x_1 \neq x$ и $\bar{f}^k x_1 = x_1$, то получим противоречие с утверждением 1), примененным к $f_1 = f^k$ и его накрытию $\bar{f}_1 = \bar{f}^k$. Далее, в любой окрестности гомоклинической точки существовала бы периодическая точка (см. подробнее в примечаниях к переводам).

3) Обозначая слои устойчивого и неустойчивого слоений в $\mathbb{R}^n$ через $\bar{W}^u$ и $\bar{W}^s$, докажем, что ни одно пересечение $\bar{W}^u \cap \bar{W}^s$ не может содержать двух точек.

В этом месте используется предположение, что $NW(f) = \mathbb{T}^n$, и вытекающее отсюда следствие, что периодические точки всюду плотны на $\mathbb{T}^n$. Допустим, что некоторое пересечение $\bar{W}^u \cap \bar{W}^s$ содержит две различные точки x, y. Тогда найдется такая точка x' возле x и y' возле y, что при накрытии π: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$ точка x' накрывает некоторую периодическую точку для f, скажем $f^k \pi x' = \pi x'$, а y' принадлежит пересечению неустойчивого и устойчивого слоев точки x'. Рассмотрим У-диффеоморфизм $f_1 = f^k$ и поднимем его на универсальное накрытие, приняв точку x' за базисную. Полученное отображение $\bar{f}_1$ (отличающееся, кстати, от $\bar{f}^k$ только сдвигом на целочисленный вектор) имеет те же слоения, что и $\bar{f}$, точка x' для него неподвижная, а y' — гомоклиническая. Это противоречит 2).

4) Пусть γ: $[0, 1] \to \bar{W}^u(x_0)$, ρ: $[0, 1] \to \bar{W}^s(x_0)$ — пути в соответствующих слоях, исходящие из точки x_0; тогда при всех r, t $(0 \leqslant r, t \leqslant 1)$

$$\bar{W}^s(\gamma(r)) \cap \bar{W}^u(\rho(t)) \neq \varnothing.$$

Положим

$$G = \{(r, t) \mid \bar{W}^s(\gamma(r)) \cap \bar{W}^u(\rho(t)) \neq \varnothing\}.$$

Тогда $0 \times [0, 1] \subset G$, $[0, 1] \times 0 \subset G$ и G — открытое подмножество единичного квадрата $0 \leqslant r$, $t \leqslant 1$. Ввиду 3) $\theta(r, t) = \bar{W}^s(\gamma(r)) \cap \cap \bar{W}^u(\rho(t))$ — однозначно определенная и, как легко видеть, непрерывная функция на G. Докажем прежде всего, что $\theta(G)$ — ограниченное подмножество $\mathbb{R}^n$. В силу результатов § 2 работы Френкса из настоящего сборника, существует отображение h: $\mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$, гомотопное тождественному и полусопрягающее f с g, т. е. $h \circ f = g \circ h$. Легко видеть, что под действием h каждый устойчивый (неустойчивый) слой для f переходит в устойчивый (неусточивый) слой для g. Поднимем h на $\mathbb{R}^n$. Полученное отображение $\bar{h}$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ обладает следующими свойствами:

$$\bar{h} \circ \bar{f} = f_* \circ \bar{h}; \quad \sup_x |\bar{h}(x) - x| < \infty;$$

если E_0^u, E_0^s — инвариантные подпространства линейного отображения f_*, отвечающие его собственным значениям, лежащим вне (внутри) единичного круга, то

$$\bar{h}(\bar{W}^u(x)) \subset \bar{h}(x) + E_0^u, \quad \bar{h}(\bar{W}^s(x)) \subset \bar{h}(x) + E_0^s$$

(например, первое включение означает, что $\bar{h}(\bar{W}^u(x))$ содержится в неустойчивом слое для f_*, проходящем через $\bar{h}(x)$); наконец, $\bar{h}$ — собственное отображение (см. § 3 указанной статьи Френкса). Поэтому

$$\bar{h}\theta(G) \subset \{(\bar{h}(\gamma(r)) + E_0^s) \cap (\bar{h}(\rho(t)) + E_0^u) \quad | \, 0 \leqslant r, \ t \leqslant 1\},$$

а так как стоящее справа множество, очевидно, компактно, то $\theta(G)$ содержится в прообразе компакта и потому является ограниченным множеством.

Чтобы убедиться в совпадении G с единичным квадратом $0 \leqslant r$, $t \leqslant 1$, докажем следующее утверждение: если $r_0 > 0$, $t_0 > 0$ и $[0, r_0] \times [0, t_0] \setminus (r_0, t_0) \subset G$, то $(r_0, t_0) \in G$. (Этого достаточно. Действительно, допустим, что замкнутое множество $[0, 1] \times [0, 1] \setminus G$ непусто, и рассмотрим на нем функцию $r + t$. Она достигает минимума в некоторой точке (r_0, t_0) этого множества, которая удовлетворяет условиям сформулированного утверждения и потому принадлежит G.)

Возьмем возрастающие последовательности $r_n \to r_0$, $t_n \to t_0$. Ввиду ограниченности $\theta(G)$ можно считать, что существует $\lim \theta(r_n, t_n) = v$. Пусть N — окрестность v со структурой произведения. Можно считать, что все $\theta(r_n, t_n) \in N$. В N имеются такие координаты ξ и η ($|\xi| < \varepsilon, |\eta| < \varepsilon$), что связные компоненты пересечений с N слоев $\bar{W}^s$ имеют уравнение $\xi = \mathrm{const}$, а слоев $\bar{W}^u$ — уравнение $\eta = \mathrm{const}$. Точку с координатами (ξ, η) будем обозначать $\varphi(\xi, \eta)$; пусть $v = \varphi(\xi_0, \eta_0)$. Заметим, что, как следует из 3), каждый слой $\bar{W}^s$, $\bar{W}^u$ может иметь лишь одну связную компоненту пересечения с N. Пусть $\xi = \xi_n$ —

уравнение $\overline{W}^s(\gamma(r_n)) \cap N$, а $\eta = \eta_n$ — уравнение $\overline{W}^u(\rho(t_n)) \cap \cap N$, т. е. $\theta(r_n, t_n) = \varphi(\xi_n, \eta_n)$; тогда $\xi_n \to \xi_0$, $\eta_n \to \eta_0$. Имеем $(r_1, t_0) \in G$, поэтому

$$\overline{W}^s(\gamma(r_1)) \cap \overline{W}^u(\rho(t_0)) = \theta(r_1, t_0) = \lim \theta(r_1, t_n).$$

Но $\theta(r_1, t_n) = \varphi(\xi_1, \eta_n) \to \varphi(\xi_1, \eta_0) \in N$. Итак, $\overline{W}^u(\rho(t_0)) \cap N \neq \varnothing$. Аналогично доказывается, что $\overline{W}^s(\gamma)r_0)) \cap N \neq \varnothing$. Но тогда $\overline{W}^u(\rho(t_0)) \cap \overline{W}^s(\gamma(r_0)) \neq \varnothing$ и $(r_0, t_0) \in G$.

5) Каждые два слоя $\overline{W}^u$ и $\overline{W}^s$ пересекаются ровно в одной точке.

Из 4) сразу следует, что если существует устойчивый слой, пересекающий два данных неустойчивых слоя, то и любой устойчивый слой, пересекающий один из них, должен пересечь и второй. Возьмем теперь произвольный слой $\overline{W}^u(x)$ и докажем, что каждый устойчивый слой его пересекает, т. е. что $\mathbb{R}^n$ совпадает с множеством

$$Q = \bigcup_{y \in \overline{W}^u(x)} \overline{W}^s(y).$$

Q — открытое множество, и если $Q \neq \mathbb{R}^n$, то существует точка $z \in Q$, предельная для некоторых точек $z_n \in Q$. Пусть $z_n \in \overline{W}^s(x_n)$, $x_n \in \overline{W}^u(x)$. Если z_n достаточно близко к z, то $\overline{W}^u(z) \cap \overline{W}^s(z_n) \neq \varnothing$, т. е. слой $\overline{W}^s(z_n) = \overline{W}^s(x_n)$ пересекает и $\overline{W}^u(x)$ и $\overline{W}^u(z)$. Но тогда $\overline{W}^s(z) \cap \overline{W}^u(x) \neq \varnothing$ и $z \in Q$.

6) Докажем, наконец, инъективность $\bar{h}$ (тогда из гомотопических свойств будет следовать, что $\bar{h}$ биективно, а h — накрытие, которое, будучи гомотопно тождественному отображению, может быть только гомеоморфизмом). Из предыдущих результатов легко вывести, что достаточно доказать инъективность $\bar{h}$ на слоях $\overline{W}^u$, $\overline{W}^s$ (причем можно ограничиться первыми — чтобы заключить затем о вторых, достаточно заменить $\bar{f}$ на $\bar{f}^{-1}$). Действительно, пусть $\bar{h}(a) = \bar{h}(c) = v$ и $c \notin \overline{W}^s(a)$. Тогда для $b = \overline{W}^u(a) \cap \overline{W}^s(e)$ имеем

$$\bar{h}(b) \in (\bar{h}(a) + E_0^u) \cap (\bar{h}(c) + E_0^s) = (v + E_0^u) \cap (v + E_0^s) = v,$$

т. е. $b \in \overline{W}^u(a)$, $b \neq a$ и $\bar{h}(b) = \bar{h}(a)$.

Пусть $C = \sup |\bar{h}(x) - x|$. Тогда из $\bar{h}(\bar{f}^n(b)) = \bar{h}(\bar{f}^n(a))$ следует, что $|\bar{f}^n(b) - \bar{f}^n(a)| \leqslant 2C$. С другой стороны, в метрике слоя расстояние d^u между этими двумя точками неограниченно возрастает:

$$d^u(\bar{f}^n(b), \bar{f}^n(a)) \to \infty.$$

Итак, остается доказать существование такого R, что для любых двух точек x и y, лежащих на одном слое, из того, что расстояние между ними в метрике слоя $d^u(x, y) > R$, следует $|x - y| > 2C$.

Обозначая r-окрестность какой-нибудь точки x_0 на слое $\overline{W}^u(x_0)$, $\overline{W}^s(x_0)$ в метрике этого слоя через $\overline{W}^u_r(x_0)$, $\overline{W}^s_r(x_0)$, положим

$$\theta\colon \overline{W}^u(x_0) \times \overline{W}^s(x_0) \to \mathbb{R}^n \quad \theta(x, y) = \overline{W}^s(x) \cap \overline{W}^u(y),$$
$$\rho(x, y) = d^u(y, \theta(x, y)),$$
$$D_r = \theta\left(\overline{W}^u_r(x_0) \times \overline{W}^s_r(x_0)\right).$$

Диаметр любого пересечения $\overline{W}^u \cap D_r$ (очевидно, имеющего вид $\theta\left(\overline{W}^u_r(x_0) \times y\right)$ с некоторым $y \in \overline{W}^s_r(x_0)$) в метрике слоя не превосходит числа

$$R(r) = 2 \max\left\{\rho(x, y) \mid x \in \overline{W}^u_r(x_0),\ y \in \overline{W}^s_r(x_0)\right\}.$$

D_r образуют возрастающее семейство компактных окрестностей, покрывающее все $\mathbb{R}^n$. Предположим, что r столь велико, что D_r содержит $2C$ — окрестность единичного „куба" $\{x = (x_1, \ldots, x_n) \mid 0 \leqslant x_i \leqslant 1\}$; тогда для любых двух точек x и y, для которых $|x - y| \leqslant 2C$, найдется такое $m \in \mathbb{Z}^n$, что $x + m \in D_r$ и $y + m \in D_r$. Поскольку $\overline{W}^u(x + m) = \overline{W}^u(x) + m$, то $d^u(x, y) = d^u(x + m, y + m) \leqslant R(r)$.

Список литературы

1. Global Analysis. Proc. symp. in pure math., **14**, Publ. Am. Math. Soc., Providence, R. J., 1970.
2. Symposium on differential equations and dynamical systems, Univ. of Warwick, 1968—1969, Lect. Notes in Math., № 206, Springer-Verlag, Berlin — Heidelberg — N. Y., 1971.
3. Dynamical Systems, Proc. sympos. Univ. of Bahia, Salvador, Brazce 1971, Acad. Press, N. Y., 1973.
4. Dynamical Systems — Warwick 1974, Proc. sympos. Univ. of Warwick 1973/74, Lect. Notes in Math., **468**, Springer-Verlag, Berlin — Heidelberg — N. Y., 1975.
5. Peixoto M. M., On bifurcations of dynamical systems, Proc. Intern. Congress of Math., 1974, Canad. Math. Congress, 1975, **2**, 315—319.
6. Каток А. Б., Синай Я. Г., Стёпин А. М., Теория динамических систем и общих групп преобразований с инвариантной мерой, в сб. Мат. анализ, т. 13, Итоги науки и техники, ВИНИТИ, М., 1975, 129—262.
7. Conley Ch., On the continuation of invariant sets of a flow, Actes Congrès Int. Math., 1970, Gauthier — Villars, Paris, 1971, **2**, 909—913.
8. Conley Ch., Easton R., Isolated invariant sets and isolating blocks, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **158** (1971), 35—61.
9. Churchill R. E., Isolated invariant sets in compact metric space, *J. of diff. equations*, **12, № 2** (1972), 330—352.

10. Ruelle D., Takens F., On the nature of turbulence, *Comm. Math. Phys.*, **20** (1971), 167—192.
11. Ruelle D., The Lorenz attractor and the problem of turbulence, Report at the conference on quantum dynamics models and mathematics in Billifeld, September 1975 (препринт).
12. Чириков Б. В., Исследования по теории нелинейного резонанса и стохастичности, препринт № 267, ИЯФ СО АН СССР, Новосибирск, 1969.
13. Заславский Г. М., Статистическая необратимость в нелинейных системах, серия «Современные проблемы физики», М., «Наука», 1970.
14. Schweitzer P. A., Counterexamples to the Seifert conjecture and opening closed leaves of foliations, *Annals of Math.*, 100, № 2 (1974), 386—400.
15. Seifert H., Closed integral curves in 3-space and isotopic 2-dimensional deformations, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **1** (1950), 287—302.
16. Fuller F. B., Note on trajectories in a solid torus, *Annals of Math.*, **56**, № 3 (1952), 438—439.
17. Schwartz A. J., Flows on the solid torus asymptotic to the boundary, *J. of diff. equations*, **4**, № 3 (1968), 314—326.
18. Chu H., A remark on a conjecture of Seifert, *Topology*, **9**, № 3 (1970), 275—281.
19. Reeb G., Sur un théorème de Seifert sur les trajectoires fermées de certains champs de vecteurs, «Semin. méc. analyt. et méc. céleste M. Janet. Fac. sci. Paris», 1960—1961, 4 année, Paris, 1962, 9/1—9/7.
20. Wilson F. W., On the minimal sets of non-singular vector fields, *Ann. of Math.*, **84** (1966), 529—536.
21. Mather J., McGehee R., Solutions of the collinear four-body problem which become unbounded in finite time, Dynamical Systems, Theory and applications, Seattle 1974. Lecture Notes in Physics, № 38, Springer-Verlag, Berlin — Heidelberg — N. Y., 1975, 573—597.
22. McGehee R., Triple collisions in the collinear three-body problem, *Inventiones math.*, **27**, № 3 (1974), 191—227.
23. Herman M. R., Conjugaison C^∞ des difféomorphismes du cercle dont le nombre de rotation satisfait à une condition arithmétique. *C. r. Acad. Sci. Paris*, **282**, № 10 (1976), 504—506
24. Deligne P., Les difféomorphismes du cercle (d'apres M. R. Herman), Séminaire Bourbaki, 28e année, 1975/76, 477.
25. Арнольд В. И., Малые знаменатели. I. Об отображениях окружности на себя, *Изв. АН СССР*, сер. матем., **25** (1961), 21—86.
26. Finzi A., Sur le problème de la génération d'une transformation donnée d'une courbe fermée par une transformation infinitesimale, *Annalles de l'Ecole Norm. Super.*, **67**, № 3 (1950), 243—305.
27. Finzi A., Sur le problème de la génération d'une transformation donnée d'une courbe fermée par une transformation infinitésimale, *Annalles de l'Ecole Norm. Sup.*, **69**, № 3 (1952), 371—430.
28. Новиков С. П., Топология слоений, *Труды Московского матем. о-ва*, т. 14 (1965), 248—278.
29. Брахман А. Л., Слоения без предельных циклов, *Математические заметки*, т. 9, № 2 (1971), 181—191.
30. Маргулис Г. А., У-потоки на трехмерных многообразиях, *Успехи матем. наук*, **22**, № 5 (1967), 169—171.
31. Sacksteder R., Schwartz A. J., Limit sets of foliations, *Annalles de l'Institut Fourier*, **15**, № 2 (1965), 201—213.
32. Hedlund G. A., The dynamics of geodesic flows, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **45**, № 4 (1939), 241—260.
33. Хопф Э., Статистика геодезических линий на многообразиях отрицательной кривизны. *Успехи матем. наук*, **4**, № 2 (1949), 129—170.

34. White W., An Anosov translation, в сб. [3], 667—670.
35. Tomter P., Anosov flows on infrahomogeneous spaces. В сб. [1], 299—327.
36. Tomter P., On the classification of Anosov flows, *Topology*, **14**, № 2 (1975), 179—189.
37. Klingenberg W., Riemannian manifolds with geodesic flow of Anosov type, *Annals of Math.*, **99**, № 1 (1974), 1—13.
38. Аносов Д. В., Геодезические в финслеровой геометрии, Proc. Intern. Congress of Math. 1974. Canad. Math. Congress, 1975, 2, 293—297.
39. Franks J., Anosov diffeomorphisms on tori, *Trans. Am. Math. Soc.*, **145** (1969), 117—124.
40. Palis J., Pugh C., Robinson R. C., Nondifferentiability of invariant foliations, Dynamical systems, Warwick 1974, Lect. Notes Math., **468** (1975) 234—240.
41. Bowen R., A horseshoe with positive measure, *Invent. Math.*, **29**, № 3 (1975), 203—204.
42. Bowen R., Ruelle D., The ergodic theory of Axiom A flows, *Invent. Math.*, **29**, № 3 (1975), 181—202.
43. Mañé R., Pugh Ch., Stability of endomorphisms, в сб. [4], 175—184.
44. Przytycki F., Anosov endomorphisms, препринт.
45*. Churchill R. C., Rod D. L., Pathology in dynamical systems. I: General theory. II: Applications, *J. of differential equations*, **21**, № 1 (1974), 39—65, 66—112.
46*. Herman M. R., C^∞-conjugacy of diffeomorphisms of the circle for almost every rotation number, *C. r. Acad. Sci. Paris*, **283**, № 8 (1976) A579—582.
47. Trois études en dynamique qualitative, Asterisque, 31 Société mathématique de France, Paris, 1976.

У-ДИФФЕОМОРФИЗМЫ[1])

Джон Франкс

Введение. В последние годы большое внимание уделяется изучению структуры траекторий диффеоморфизмов. По-видимому, топологическая сопряженность — самое сильное отношение эквивалентности, которое оказывается при этом полезным. Мы скажем, что диффеоморфизмы $f\colon M \to M$ и $g\colon N \to N$ топологически сопряжены, если существует такой гомеоморфизм $h\colon N \to M$, что $f \circ h = h \circ g$. Очевидно, в этом случае любая траектория диффеоморфизма g переходит при отображении h в соответствующую траекторию f.

При этих исследованиях оказался интересным следующий пример. Рассмотрим квадратную матрицу второго порядка $\bar{f}$ с целыми коэффициентами, с определителем $+1$ или -1, не имеющую собственных значений, по модулю равных единице. Например, матрицу

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица $\bar{f}$ определяет линейное преобразование плоскости $\mathbb{R}^2$, сохраняющее решетку L, состоящую из точек с целочисленными координатами. Это отображение индуцирует автоморфизм двумерного тора $\mathbb{T}^2$ — факторгруппы $\mathbb{R}^2/L$. Этот пример представляет интерес с точки зрения структуры траекторий, так как можно показать, что периодические точки диффеоморфизма f плотны на $\mathbb{T}^2$ и что любой диффеоморфизм, достаточно близкий к f в C^1-топологии, также обладает этим свойством. На самом деле этот диффеоморфизм обладает значительно более сильным свойством *структурной устойчивости*. Диффеоморфизм f называется структурно устойчивым, если существует такая окрестность $N(f)$ диффеоморфизма f в пространстве $\mathrm{Diff}(M)$, снабженном C^1-топологией, что любой диффеоморфизм $g \in N(f)$ топологически сопряжен с f.

---

[1]) Franks J., Anosov Diffeomorphisms, Global Analysis, Proc. Symp. in Pure Math., v. 14, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1970, 61—94.

Обобщая этот пример, Д. В. Аносов определил гораздо более широкий класс диффеоморфизмов (см. [2]).

Определение. C^∞-диффеоморфизм f C^∞-многообразия M на себя называется *У-диффеоморфизмом*, если он удовлетворяет следующим условиям:

(а) Существует непрерывное разложение касательного расслоения $TM = E^s \oplus E^u$, инвариантное относительно дифференциала Df.

(b) Существуют такие константы C, C' и $\lambda \in (0, 1)$ и такая риманова метрика $\| \ \|$ на TM, что

$$\|Df^n(v)\| \leqslant C \cdot \lambda^n \cdot \|v\| \quad \text{для} \quad v \in E^s,$$
$$\|Df^n(v)\| \geqslant C' \cdot \lambda^{-n} \cdot \|v\| \quad \text{для} \quad v \in E^u.$$

У-диффеоморфизмы довольно подробно рассматриваются в работе С. Смейла [19]. В частности, в дополнении к этой статье приведено изложение Дж. Мезера доказательства Ю. Мозера структурной устойчивости У-диффеоморфизмов на компактных многообразиях (эта теорема первоначально была доказана Д. В. Аносовым [2]).

Если многообразие M компактно, условие (b) не зависит от выбора римановой метрики.

Упомянутый выше автоморфизм тора является У-диффеоморфизмом, так как линейное отображение $\bar{f}$ гиперболично (не имеет собственных значений, модуль которых равен единице). В некоторой мере мы будем рассматривать также несколько более общий объект, чем У-диффеоморфизмы, а именно У-накрытие — накрывающее отображение класса C^∞ многообразия на себя, удовлетворяющее приведенным выше условиям (а) и (b). Всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что У-диффеоморфизмы и У-накрытия являются C^∞-отображениями компактных многообразий без края класса C^∞.

Мы будем изучать У-диффеоморфизм с точки зрения проблемы сопряженности, которую можно сформулировать в самом общем виде следующим образом. Пусть задан диффеоморфизм f: $M \to M$. Для каких диффеоморфизмов g: $N \to N$ существует нетривиальное отображение h: $N \to M$, для которого диаграмма

$$\begin{array}{ccc} M & \xleftarrow{h} & N \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ M & \xleftarrow{h} & N \end{array}$$

коммутативна?

Для некоторых диффеоморфизмов этот вопрос целиком сводится к гомотопической задаче. Введем следующее определение.

Определение. Диффеоморфизм (C^∞-накрытие) f: $M \to M$ называется π_1-*диффеоморфизмом* (π_1-*накрытием*), если для любого гомеоморфизма (непрерывного накрытия) g: $K \to K$ компактного CW-комплекса на себя и непрерывного отображения h: $K \to M$, для которых коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(M) & \xleftarrow{h_*} & \pi_1(K) \\ {\scriptstyle f_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g_*} \\ \pi_1(M) & \xleftarrow{h_*} & \pi_1(K), \end{array}$$

существует единственное отображение h': $K \to M$, переводящее базисную точку на K в базисную точку на M, гомотопное h и такое, что $f \circ h' = h' \circ g$.

Мы докажем теорему 2.1, которая утверждает, что упомянутый выше гиперболический автоморфизм тора является π_1-диффеоморфизмом. Этот факт используется потом в теореме (7.3), утверждающей, что любой У-диффеоморфизм двумерного многообразия топологически сопряжен гиперболическому автоморфизму тора. Это, однако, только частные случаи более общих результатов.

Основная цель настоящей статьи состоит в том, чтобы дать частичное решение следующих двух проблем:

(1) Классифицировать все У-диффеоморфизмы с точностью до топологической сопряженности.

(2) Классифицировать все π_1-диффеоморфизмы с точностью до топологической сопряженности.

Представляется целесообразным рассматривать обе эти проблемы одновременно, так как, насколько мне известно, множество всех известных примеров У-диффеоморфизмов совпадает (с точностью до топологической сопряженности) с множеством всех известных примеров π_1-диффеоморфизмов. Более того, это обстоятельство оказывается весьма полезным при рассмотрении первой проблемы.

Для дальнейшего изложения нам потребуются еще несколько примеров У-диффеоморфизмов и У-накрытий.

(1) *Гиперболические эндоморфизмы тора.* Это непосредственное обобщение приведенного выше примера.

Пусть $\bar{f}$ — гиперболический автоморфизм $\mathbb{R}^n$, сохраняющий решетку целочисленных векторов L (гиперболичность означает, что $\bar{f}$ не имеет собственных значений, по модулю равных единице). Индуцированный эндоморфизм f n-мерного тора $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/L$ является У-накрытием. Если $\det(\bar{f}) = \pm 1$, то f — диффеоморфизм.

(2) *Гиперболические эндоморфизмы нильмногообразий.* Обобщение предыдущего примера можно получить, рассмотрев такой автоморфизм $\bar{f}$ односвязной нильпотентной группы Ли N, что дифференциал $d\bar{f}$ в единице группы N гиперболичен. Если $\bar{f}$ сохраняет равномерную дискретную подгруппу Γ, то индуцированное отображение нильмногообразия N/Γ является У-диффеоморфизмом [1]). Конкретный пример такого рода построен в статье Смейла [19].

(3) *Гиперболические эндоморфизмы инфранильмногообразий.* Пусть N — односвязная нильпотентная группа Ли, A — конечная группа автоморфизмов N и G — равномерная дискретная подгруппа без кручения полупрямого произведения $A \cdot N$. Как показал Л. Ауслендер [3], пересечение $N \cap G$ является равномерной дискретной подгруппой в N и подгруппа $N \cap G$ имеет конечный индекс в G. Элемент группы $A \cdot N$ — это пара (x, a), где $x \in N$, а $a \in A$, которая действует на N как композиция действия a и произведенного затем левого сдвига на x. Подгруппа G действует на N свободно, так как если $g \in G$, а $x \in N$ и $g(x) = x$, то $g^n(x) = x$ при всех n, но при некотором n отображение g^n — это просто левый сдвиг на некоторый элемент N. Следовательно, из того, что $g^n(x) = x$, вытекало бы, что g^n — единица группы G, но это противоречит тому, что G — группа без кручения. Таким образом, факторпространство N/G (пространство орбит действия G на N) является компактным многообразием.

Автоморфизм $\bar{f}\colon A \cdot N \to A \cdot N$, для которого $\bar{f}(G) = G$ и $\bar{f}(N) = N$ индуцирует накрытие $f\colon N/G \to N/G$ [2]). Используя термин, предложенный М. Хиршем, мы будем называть пространство N/G инфранильмногообразием, а отображение f — эндоморфизмом инфранильмногообразия. Если дифференциал $\bar{f}$ гиперболичен, то f — У-накрытие. Конкретный пример такого отображения построен в [18].

Насколько я знаю, все известные примеры У-диффеоморфизмов на компактных многообразиях топологически сопряжены диффеоморфизмам одного из описанных выше типов. В § 2 мы докажем следующую теорему.

(2.2) Теорема. *Гиперболические автоморфизмы инфранильмногообразий являются π_1-диффеоморфизмами.*

Естественно, возникает следующий вопрос, который пока не решен.

---

[1]) Если $\bar{f}\Gamma = \Gamma$. Если же $\bar{f}\Gamma \subset \Gamma$, то индуцированное отображение будет У-накрытием. — *Прим. перев.*

[2]) На самом деле в этой ситуации отображение f является диффеоморфизмом. Если же $\bar{f}(N) > N$ и $\bar{f}(G) \subset G$, то f — накрытие. — *Прим. перев.*

Проблема. *Все ли У-диффеоморфизмы являются π_1-диффеоморфизмами?*

Определение. Два диффеоморфизма (накрытия) $f\colon M \to M$ и $g\colon N \to N$ называются π_1-*сопряженными*, если существует такой изоморфизм фундаментальных групп $\phi\colon \pi_1(M) \to \pi_1(N)$, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(M) & \xrightarrow{\phi} & \pi_1(N) \\ {\scriptstyle f_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g_*} \\ \pi_1(M) & \xrightarrow{\phi} & \pi_1(N) \end{array}$$

коммутативна.

Нетрудно показать (см. теорему (3.2)), что два π_1-накрытия топологически сопряжены тогда и только тогда, когда они π_1-сопряжены.

В § 3 мы рассматриваем проблему классификации π_1-диффеоморфизмов и получаем следующее частичное обращение теоремы (2.2).

(3.6) Теорема. *Пусть $f\colon M \to M$ — π_1-диффеоморфизм и $\pi_1(M)$ — группа без кручения. Тогда*

(a) *Если группа $\pi_1(M)$ содержит нильпотентную подгруппу конечного индекса, то диффеоморфизм f топологически сопряжен гиперболическому автоморфизму инфранильмногообразия.*

(b) *Если $\pi_1(M)$ — нильпотентная группа, то диффеоморфизм f топологически сопряжен гиперболическому автоморфизму нильмногообразия.*

(c) *Если $\pi_1(M)$ — коммутативная группа, то f топологически сопряжен гиперболическому автоморфизму тора.*

Если бы удалось доказать, что все У-диффеоморфизмы являются π_1-диффеоморфизмами, то это было бы хорошей основой для классификации У-диффеоморфизмов. Однако наши результаты несколько скромнее.

Определение. *У-диффеоморфизмом коразмерности один* называется У-диффеоморфизм, у которого либо $\dim E^u = 1$, либо $\dim E^s = 1$.

Мы рассматриваем класс У-диффеоморфизмов, которые мы называем метрически разложимыми (определение приведено в § 1), и показываем в § 4, что эти диффеоморфизмы являются π_1-диффеоморфизмами.

В § 5 и 6 мы доказываем, что любой У-диффеоморфизм f коразмерности один, для которого множество неблуждающих точек $NW(f)$ совпадает со всем многообразием, метрически разложим[1]). С помощью этого факта мы доказываем следующую теорему.

(6.3) Теорема. *Пусть f: $M \to M$ — У-диффеоморфизм коразмерности один и $NW(f) = M$, тогда диффеоморфизм f топологически сопряжен гиперболическому автоморфизму тора. Если g — другой такой диффеоморфизм, то диффеоморфизмы f и g топологически сопряжены тогда и только тогда, когда они π_1-сопряжены.*

Условие $NW(f) = M$ всегда выполняется, если существует мера Лебега[2]) на многообразии M, инвариантная относительно диффеоморфизма f. Если $\dim M \leqslant 3$, то любой У-диффеоморфизм на многообразии M является диффеоморфизмом коразмерности один, так что мы получаем следующий результат.

(6.4) Следствие. *Если f: $M \to M$ — У-диффеоморфизм, причем $NW(f) = M$ и $\dim M \leqslant 3$, то диффеоморфизм f топологически сопряжен гиперболическому автоморфизму тора.*

В § 7 мы показываем, что если $\dim M = 2$, то условие $NW(f) = M$ всегда выполняется.

(7.3) Теорема. *Если f: $M^2 \to M^2$ — У-диффеоморфизм, то диффеоморфизм f топологически сопряжен гиперболическому автоморфизму тора. Любые два таких диффеоморфизма топологически сопряжены тогда и только тогда, когда они π_1-сопряжены.*

В заключительном параграфе мы рассматриваем растягивающие отображения на компактных многообразиях. Растягивающим отображением называется У-накрытие, для которого $TM = E^u$. Растягивающие отображения довольно подробно изучались М. Шубом [18]. Используя технику, подобную той, которая применяется при доказательстве теоремы (3.6), мы доказываем следующую теорему.

(8.2) Теорема. *Если f: $M \to M$ — растягивающее отображение и группа $\pi_1(M)$ имеет нильпотентную подгруппу конечного индекса, то отображение f топологически сопряжено с эндоморфизмом инфранильмногообразия.*

Мы показываем далее (теорема (8.3)), что фундаментальная группа $\pi_1(M)$ многообразия M, на котором существует растягивающее отображение, имеет полиномиальный рост,

---

[1]) В работе Ш. Ньюхауса, перевод которой публикуется в настоящем сборнике, доказано, что для любого У-диффеоморфизма f коразмерности один множество $NW(f)$ совпадает со всем многообразием. — *Прим. перев.*

[2]) Или даже конечная мера, положительная на открытых множествах. — *Прим. перев.*

и, используя этот факт, получаем утверждение теоремы (8.2) также и в том случае, когда группа $\pi_1(M)$ имеет разрешимую подгруппу конечного индекса.

При подготовке этой работы чрезвычайно полезными оказались обсуждения со многими лицами. Несколько ссылок на эти обсуждения приводятся по ходу изложения. Я особенно признателен М. Хиршу, Ч. Пью, М. Шубу и в первую очередь моему руководителю С. Смейлу.

1. В этом параграфе мы установим ряд геометрических свойств У-накрытий, которые используются в дальнейшем. Пусть $f\colon M \to M$ — У-накрытие. Обозначим через $\bar{M}$ универсальное накрывающее многообразие для M, через $P\colon \bar{M} \to M$ — проекцию, $\bar{f}\colon \bar{M} \to \bar{M}$ — отображение, накрывающее f. Заметим, что $\bar{f}$ — диффеоморфизм. Обозначим через d полную метрику на многообразии $\bar{M}$, полученную поднятием некоторой римановой метрики на M.

(1.1) Предложение. *На многообразии $\bar{M}$ существуют два слоения U и S со следующими свойствами:*

(a) *Диффеоморфизм $\bar{f}$ сохраняет оба слоения U и S. Если обозначить через $u(x)$ (соответственно $s(x)$) слой слоения U (соответственно S), проходящий через точку x, то $u(x) = u(y)$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty} d(\bar{f}^{-n}(x), \bar{f}^{-n}(y)) = 0$, и $s(x) = s(y)$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty} d(\bar{f}^{n}(x), \bar{f}^{n}(y)) = 0$*

(b) *Каждый слой слоения U (S) является образом евклидова пространства $\mathbb{R}^k(\mathbb{R}^{n-k})$ при инъективной иммерсии класса C^∞ в $\bar{M}$, где $k = \dim E^u$, а касательные пространства к слоям $u(x)$ $(s(x))$ совпадают с пространствами $P^*E^u_x(P^*E^s_x)$.*

(c) *Оба слоения ориентируемы.*

Доказательство. Существование слоений U и S, удовлетворяющих условиям (a) и (b) — это, по существу, теорема об устойчивом многообразии для диффеоморфизма $\bar{f}$ (см. [7]). Слоения ориентируемы, потому что многообразие $\bar{M}$ односвязно, и, следовательно, подрасслоения P^*E^u и P^*E^s ориентируемы.

Начиная с этого момента мы будем обозначать пространство слоев слоения U также буквой U, а пространство слоев слоения S — буквой S. Пространства U и S снабжены фактортопологией, индуцированной отображениями $u\colon \bar{M} \to U$ и $s\colon \bar{M} \to S$, где $u(x)$ — слой слоения U, проходящий через точку $x \in \bar{M}$, а $s(x)$ — слой слоения S, проходящий через точку x. Так как $u(\bar{f}(x)) = \bar{f}(u(x))$, то диффеоморфизм $\bar{f}$ индуцирует отображение пространства U на себя (которое мы тоже будем обозначать $\bar{f}$). Аналогично определяется отображение $\bar{f}$: $S \to S$.

Так как слой $u(x)$ гладко иммерсирован в многообразие $\bar{M}$, то можно определить риманову метрику на слое $u(x)$, индуцированную римановой метрикой на многообразии $\bar{M}$. Эта риманова метрика определяет полную метрику на слое $u(x)$. Расстояние между точками в этой метрике мы будем обозначать $d(u(x);\ x_1,\ x_2)$. Иначе расстояние $d(u(x);\ x_1,\ x_2)$ можно определить как точную нижнюю грань длин кусочно гладких путей, лежащих на слое $u(x)$ и соединяющих точки x_1 и x_2. Аналогичным образом определяется расстояние $d(s(x);\ x,\ y)$.

(1.2) Лемма. *Если $u \in U$ и $x,\ y \in u$, то*

$$d(\bar{f}^n(u);\ \bar{f}^n(x),\ \bar{f}^n(y)) \geqslant C \cdot \lambda^{-n} \cdot d(u;\ x,\ y).$$

Если $s \in S$ и $x,\ y \in s$, то

$$d(\bar{f}^n(s);\ \bar{f}^n(x),\ \bar{f}^n(y)) \leqslant C' \cdot \lambda^n \cdot d(s;\ x,\ y).$$

Здесь C, C' и λ — константы, участвующие в определении У-накрытия, а n — произвольное неотрицательное целое число.

Доказательство. Пусть $x,\ y \in u$, а h — кусочно гладкий путь на слое u, соединяющий точки x и y. Обозначим через $l(h) = \int_0^1 \| h'(t) \| \, dt$ длину пути h. Тогда

$$d(u;\ x,\ y) = \inf_h l(h) \quad \text{и} \quad d(\bar{f}^n(u);\ \bar{f}^n(x),\ \bar{f}^n(y)) = \inf_h l(\bar{f}^n h),$$

где оба раза точная нижняя грань берется по множеству всех кусочно гладких путей на слое u, соединяющих точки x и y. Но

$$l(\bar{f}^n h) = \int_0^1 \| D\bar{f}^n(h'(t)) \| \, dt > C\lambda^{-n} \int_0^1 \| h'(t) \| \, dt = C \cdot \lambda^{-n} l(h).$$

Отсюда немедленно следует первое неравенство. Второе неравенство устанавливается аналогично.

Мы будем отождествлять фундаментальную группу $\pi_1(M)$ с группой скольжений накрытия P: $\bar{M} \to M$.

Определение. *Компактной фундаментальной областью* называется компактное множество $K \subset \bar{M}$, которое является замыканием множества своих внутренних точек и для которого $P(K) = M$ [1]).

(1.3) Следствие. *Скольжение $\alpha \in \pi_1(M)$ накрытия P отображает слой слоения U в слой слоения U, а слой S — в слой слоения S.*

Доказательство. Отображение α является изометрией относительно римановой метрики на многообразии $\bar{M}$, а его дифференциал сохраняет подрасслоения P^*E^u и P^*E^s. Если точки x и y лежат на слое u, а путь h соединяет эти точки, то путь $\alpha \circ h$ соединяет точки αx и αy. Но из свойств отображения α следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} l\left(\bar{f}^{-n} \circ \alpha \circ h\right) = 0$, поэтому, согласно утверждению (а) предложения (1.1), $u(\alpha x) = u(\alpha y)$. Утверждение о слоении S получается аналогично.

Из (1.3) следует, что слоения U и S не зависят от выбора отображения $\bar{f}$, накрывающего f. Согласно следствию (1.3), элемент $\alpha \in \pi_1(M)$ индуцирует отображение пространства U на себя (которое мы также будем обозначать α). Аналогично определяется отображение α: $S \to S$.

Поскольку $\pi_1(M)$ сохраняет U и S, мы можем получить два слоения на M простым применением P к слоению $\bar{M}$. Если $x \in M$ и $x = P(\bar{x})$, то через $W^u(x)$ и $W^s(x)$ будем обозначать $P(u(\bar{x}))$ и $P(s(\bar{x}))$ соответственно.

(1.4) Предложение. *Ограничение накрытия P: $\bar{M} \to M$ на слой $s \in S$ — инъективное отображение.*

Доказательство. Отображение P является локальным гомеоморфизмом; действительно, существует такое $\varepsilon > 0$, для которого из условия $0 < d(x, y) < \varepsilon$ вытекает, что $P(x) \neq P(y)$. Пусть теперь $x, y \in s$ и $P(x) = P(y)$, тогда $P(\bar{f}^i(x)) = P(\bar{f}^i(y))$ при всех i. Но, в силу предложения (1.1), найдется такое n, при котором

$$d(\bar{f}^n(x), \bar{f}^n(y)) < \varepsilon,$$

что противоречит равенству $P(x) = P(y)$.

Таким образом, слой $W^s(x)$ — это образ $\mathbb{R}^{n-k}$ при инъективной иммерсии в M. Заметим, что наше определение многообразия $W^s(x)$ для $x \in \mathrm{Per}(f)$ не совпадает с обычным определением устойчивого многообразия периодической точки эн-

[1]) Обычно в определение фундаментальной области включают ряд других условий, но в данной работе этот термин употребляется только в смысле, соответствующем приведенному определению. — *Прим. ред.*

доморфизма (см. Шуб [18]). В самом деле, многообразие $W^s(x)$ представляет собой связную компоненту устойчивого многообразия точки x. Многообразие $W^u(x)$ — это в точности неустойчивое многообразие точки x, а если f — диффеоморфизм, то многообразие $W^s(x)$ также совпадает с устойчивым многообразием.

Пусть $p \in M$ и $\varepsilon > 0$. Обозначим через $W^u(p, \varepsilon)$ связную компоненту точки p в пересечении многообразия $W^u(p)$ с шаром радиуса ε с центром в точке p; множество $W^s(p; \varepsilon)$ определяется аналогично.

(1.5) Предложение (локальная структура произведения). *Существует $\varepsilon > 0$, не зависящее от точки $p \in M$, для которого корректно определено вложение h: $W^u(p; \varepsilon) \times W^s(p; \varepsilon) \to M$, задаваемое следующим образом: $h(x_1, x_2)$ — единственная точка пересечения множеств $W^s(x_1; \varepsilon)$ и $W^u(x_2; \varepsilon)$*[1].

Доказательство. Утверждение следует из предложения (1.1), трансверсальности подпространств E_p^s и E_p^u и непрерывной зависимости E_x^s и E_x^u от x. (Ср. с теоремой (7.4) из статьи С. Смейла [18].) Возможность выбрать число ε независимым от точки p вытекает из компактности многообразия M.

Образ N отображения h называется окрестностью точки p со структурой произведения. Если окрестность N достаточно мала, то ограничение каждой ветви отображения P^{-1} на N является гомеоморфизмом и мы будем называть множество $P^{-1}(N)$ окрестностью со структурой произведения на многообразии $\bar{M}$. Положим $u(x, \varepsilon) = P^{-1}(W^u(x; \varepsilon))$ и аналогично определим множество $s(x, \varepsilon)$.

Если локальная структура произведения на самом деле оказывается глобальной, то мы будем называть диффеоморфизм f разложимым. Приведем точное определение.

Определение. У-накрытие называется *разложимым*[2], если существует гомеоморфизм, отображающий многообразие $\bar{M}$ на прямое произведение $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, так что каждый слой $u \in U$

---

[1]) В действительности если x_1 и x_2 взять очень близко к „краям" $W^u(p; \varepsilon)$ и $W^s(p; \varepsilon)$, то вполне возможно, что $W^s(x_1; \varepsilon)$ и $W^u(x_1; \varepsilon)$ не будут пересекаться. Пересекающиеся „кусочки" слоев надо брать с некоторым „запасом"„ скажем $W^s(x_1; 2\varepsilon)$ и $W^u(x_2; 2\varepsilon)$. — *Прим. ред.*

[2]) В оригинале «splitting», что буквально означает «расщепление», но «разложение» лучше соответствует существу дела. Надеемся, что не возникнет путаницы с употреблением появляющегося ниже термина «метрическая разложимость» совсем в другом смысле в эргодической теории. В настоящем сборнике «метрическая разложимость» в этом втором смысле нигде не употребляется. — *Прим. ред.*

отображается на k-мерное пространство $\mathbb{R}^k \times \{x_0\}$, $x_0 \in \mathbb{R}^{n-k}$, а каждый слой $s \in S$ отображается на $(n-k)$-мерное пространство $\{x_0\} \times \mathbb{R}^{n-k}$. Заметим, что в этом случае пространство U гомеоморфно $\mathbb{R}^{n-k}$, а S гомеоморфно $\mathbb{R}^k$.

Определение. Отображение T полного метрического пространства X в себя называется *сжимающим*, если найдутся такие константы $C > 0$ и $\lambda \in (0, 1)$, что $d(T^n x, T^n y) \leqslant C\lambda^n d(x, y)$ при всех $n \geqslant 0$ и $x, y \in X$.

Следующий хорошо известный результат будет часто использоваться в дальнейшем.

(1.6) Лемма. *Сжимающее отображение T: $X \to X$ имеет единственную неподвижную точку $x \in X$.*

Нас будут интересовать У-накрытия, которые удовлетворяют несколько более сильному условию, чем разложимость.

Определение. У-накрытие называется *метрически разложимым* (*metrically splitting*), если оно разложимо и, кроме того, на пространстве S существует такая полная метрика, что

(a) $\bar{f}^{-1}$: $S \to S$ — сжимающее отображение;

(b) группа $\pi_1(M)$ действует на S изометриями.

Точка $x \in M$ называется блуждающей, если существует такая окрестность N точки x, что множества $f^n(N)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, попарно не пересекаются. Точка, которая не является блуждающей, называется неблуждающей. Как легко видеть, множество всех неблуждающих точек $NW(f)$ замкнуто и инвариантно относительно диффеоморфизма f. Очевидно, что множество $NW(f)$ содержит множество Per (f) всех периодических точек диффеоморфизма f.

Вопрос. Верно ли, что $NW(f) = M$ для любого У-накрытия f: $M \to M$? Легко видеть, что для всех примеров, приведенных во введении, это так.

Следующий результат был анонсирован Д. В. Аносовым для случая диффеоморфизмов несколько лет назад[1]. Приводимое здесь доказательство сообщил мне М. Хирш.

(1.7) Предложение. *Пусть f: $M \to M$ — У-накрытие. Тогда множество* Per (f) *плотно в множестве* $NW(f)$.

Доказательство. Пусть V — окрестность точки $x \in NW(f)$. Нам нужно найти периодическую точку, лежащую в окрест-

[1]) Изложение доказательства Д. В. Аносова см. в лекциях А. Б. Катка, упомянутых в предисловии к сборнику, и в его же добавлении I к книге З. Нитецки (см. там же). — *Прим. перев.*

ности V. Пусть $N \approx W^u(x; \varepsilon) \times W^s(x; \varepsilon)$ — локальная окрестность точки x со структурой произведения, содержащаяся в окрестности V, N' — меньшая окрестность, гомеоморфная произведению $W^u(x; \varepsilon/4) \times W^s(x; \varepsilon/4)$. Так как x — неблуждающая точка, то найдется точка $x' \in N'$, такая, что $W^u(x'; \varepsilon/8) \subset \subset N'$ и $f^n(x') \in N'$ для некоторого столь большого n, что $C\lambda^{-n} > 8$ и $C'\lambda^n < 1/8$. Тогда множество $D = f^n(W^u(x'; \varepsilon/8)) \cap N$ содержит множество $W^u(f^n(x'); \varepsilon/2)$.

Обозначим через D_0 связную компоненту множества D, содержащую точку $f^n(x')$. Определим отображение h: $D_0 \to D_0$ следующим образом: сначала отобразим множество D_0

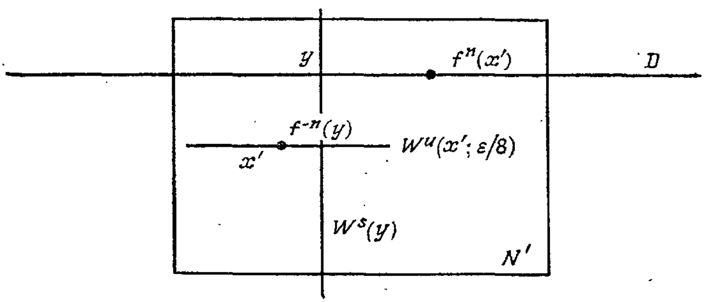


Рис. 1.

в $W^u(x'; \varepsilon/8)$ с помощью отображения f^{-n}, а затем спроектируем множество $W^u(x'; \varepsilon/8)$ в D_0 вдоль связных компонент пересечений многообразий W^s с N'. Так как множество D_0 гомеоморфно шару, то отображение h имеет неподвижную точку y. Очевидно, что $f^n(W^s(y)) = W^s(y)$.

Обозначим $D' = W^s(y; 3\varepsilon/2)$. Тогда $f^n(D') \subset W^s(f^n(y); 3\varepsilon/16) \subset D'$, так что отображение f^n имеет в множестве D' неподвижную точку x_0. Очевидно, что $x_0 \in N$ — искомая периодическая точка.

Замечание. По существу те же самые рассуждения показывают, что множество $\operatorname{Per} \bar{f}$ плотно в $NW(\bar{f})$, где $\bar{f}$: $\bar{M} \to \bar{M}$ — отображение универсального накрывающего пространства $\bar{M}$, накрывающее У-накрытие f: $M \to M$.

(1.8) Лемма. *Пусть f: $M \to M$ — У-накрытие и $NW(f) = M$. Тогда любое многообразие $W^u(x)$ для $x \in \operatorname{Per}(f)$ всюду плотно на многообразии M.*

Доказательство. Обозначим замыкание множества $W^u(x)$ через K и покажем, что K — открытое множество. Пусть $y \in \in K$, а N — окрестность точки y со структурой произведения, а именно $N \approx W^s(y; \varepsilon) \times W^u(y; \varepsilon)$. В силу предложения (1.7), достаточно доказать, что периодические точки, лежащие в окрестности N, принадлежат K. Пусть $y' \in N$ — периодическая точка накрытия f, n — произведение периодов точек x и y'. Очевидно, что $g = f^n$ — У-накрытие на многообразии M, имеющее те же устойчивое и неустойчивое слоения, что и накрытие f, причем $g(y') = y'$. Если выбрать точку y' в качестве базисной точки на многообразии M, а точку $\bar{y} \in P^{-1}(y')$ в качестве базисной точки на многообразии $\bar{M}$, то существует единственное отображение $\bar{g}$: $\bar{M} \to \bar{M}$, накрывающее g и такое, что $\bar{g}(\bar{y}) = \bar{y}$.

По построению найдется точка $\bar{x} \in s(\bar{y}; \varepsilon)$, для которой $P(\bar{x}) \in W^u(x)$. Очевидно, $\lim\limits_{i \to \infty} \bar{g}^i(\bar{x}) = \bar{y}$, так что $\lim\limits_{i \to \infty} g^i(P(\bar{x})) = y'$. Но $g^i(P(\bar{x})) \in W^u(x)$ при всех $i \geqslant 0$, поэтому $y' \in K$.

(1.9) Предложение. *Пусть f: $M \to M$ — У-накрытие и $NW(f) = M$. Тогда любое многообразие $W^u(x)$, $x \in M$, всюду плотно в M.*

Доказательство. Обозначим $R(x) = \bigcup\limits_{n \geqslant 0} f^{-n}(W^s(x))$ и покажем сначала, что для любого $x \in M$ множество $R(x)$ всюду плотно в M. Воспользовавшись леммой Лебега о покрытиях, найдем такое число $\delta > 0$, что из $d(x_1, x_2) < \delta$ следует существование некоторой окрестности со структурой произведения, содержащей обе точки x_1 и x_2. Пусть $x_0 \in M$ и V — открытое подмножество в M; мы хотим показать, что $R(x_0) \cap V \neq \varnothing$. Пусть y — периодическая точка накрытия f, содержащаяся в V (такая точка существует в силу предложения (1.7)). Выберем ε столь малым, чтобы множество $B = W^u(y, \varepsilon)$ содержалось в V.

Пусть период точки y равен m, а $U_n = \{x \mid d(x, f^{mn}(B)) < \delta\}$. Так как множество $W^u(y)$ плотно в M, а любая точка из $W^u(y)$ содержится в образе $f^{mn}(B)$ при некотором n, то $M = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n$. В силу компактности многообразия M, это означает, что $M = U_q$ для некоторого $q > 0$. Следовательно, у любой точки $x \in M$ найдется локальная окрестность со структурой произведения $N(x)$, которая пересекается с множеством $f^{mq}(B)$. Отсюда следует, что (быть может, увеличив q) можно обеспечить непустоту пересечения $W^s(x) \cap f^{mq}(B)$ для каждой точки $x \in M$.

В частности, $W^s(x_0) \cap f^{mq}(B) \neq \varnothing$, так что найдется точка $y_0 \in B$, для которой $f^{mq}(y_0) \in W^s(x_0)$. Очевидно, что $y_0 \in R(x_0)$ и $y_0 \in V$. Таким образом, каждое множество $R(x)$ всюду плотно в M.

Пусть теперь $x' \in M$ и V' — открытое подмножество M. Мы покажем, что $W^u(x') \cap V' \neq \varnothing$. Пусть y' — периодическая точка накрытия f, принадлежащая множеству V', а B' — достаточно малая окрестность точки y' в $W^s(y')$, так что $B' \subset V'$. Легко проверить, что $R(y') = \bigcup\limits_{n \geqslant 0} f^{-n}(B')$. Пусть $U'_n = \{x \mid d(x, f^{-n}(B')) < \delta\}$. Так как множество $R(y')$ всюду плотно в M, то $M = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} U'_n$. Из компактности многообразия M следует существование такого $r > 0$, что $M = U'_r$. Так же, как и выше, отсюда следует, что (быть может, увеличив r) можно добиться того, чтобы пересечение $W^u(x) \cap f^{-r}(B') \neq \varnothing$ при всех $x \in M$.

Пусть, в частности, $x'' \in f^{-r}(x')$. Тогда $W^u(x'') \cap f^{-r}(B') \neq \varnothing$. Если $y'_0 \in W^u(x'') \cap f^{-r}(B')$, то $f^r(y'_0) \in W^u(f^r(x'')) \cap B' = W^u(x') \cap B'$. Следовательно, $W^u(x') \cap V \neq \varnothing$.

Замечание. Если f — диффеоморфизм, то устойчивые многообразия для диффеоморфизма f являются неустойчивыми многообразиями для диффеоморфизма f^{-1}, так что при любом $x \in M$ многообразие $W^s(x)$ также всюду плотно в M. Даже если f — накрытие, то для всех $x \in \operatorname{Per}(f)$ множество $R(x)$ является устойчивым многообразием точки x (в смысле Шуба [18]) и наше утверждение показывает, что оно плотно в M.

(1.10) Следствие. *Пусть* $f\colon M \to M$ — *У-накрытие и* $NW(f) = M$. *Тогда для любого слоя* $u \in U$ *объединение* $\bigcup\limits_{\alpha \in \pi_1(M)} \alpha u$ *всюду плотно в* $\bar{M}$.

Доказательство. Пусть $u \in U$ и V — открытое подмножество в $\bar{M}$. Пусть $W^u(x) = P(u)$, тогда, в силу предложения (1.9), существует точка $y \in P(V) \cap W^u(x)$. Следовательно, найдутся точки $\bar{y}_1 \in V$, для которой $P(\bar{y}_1) = y$, и $\bar{y}_2 \in u$, для которой $P(\bar{y}_2) = y$. Поэтому существует такой элемент $\alpha \in \pi_1(M)$, что $\alpha \bar{y}_2 = \bar{y}_1$.

Замечание. Если слой $u(x)$ одномерен, а $\hat{u}$ — одна из двух компонент связности множества $u(x) \setminus \{x\}$, то доказательства предложения (1.9) и следствия (1.10) сохраняют силу для $P(\hat{u})$ и $\hat{u}$. Таким образом, в этом случае множество $\bigcup\limits_{\alpha \in \pi(M)} \alpha \hat{u}$ также всюду плотно в $\bar{M}$.

2. В этом параграфе мы докажем существование π_1-диффеоморфизмов. Все примеры У-диффеоморфизмов, приведенные во введении, оказываются π_1-диффеоморфизмами. Все топологические пространства, рассматриваемые в этом параграфе, будут иметь выделенную базисную точку, в частности в группах такой точкой будет единичный элемент.

Предполагается также, что все отображения (за исключением скольжений) сохраняют базисную точку.

(2.1) Предложение. *Гиперболический автоморфизм тора $f\colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ является π_1-диффеоморфизмом.*

Доказательство. Пусть $g\colon K \to K$ — гомеоморфизм компактного CW-комплекса на себя и $h_0\colon K \to \mathbb{T}^n$ — непрерывное отображение, причем коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(K) & \xrightarrow{\phi} & \pi_1(\mathbb{T}^n) \\ {\scriptstyle g_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_*} \\ \pi_1(K) & \xrightarrow{\phi} & \pi_1(\mathbb{T}^n) \end{array}$$

в которой ϕ обозначает гомеоморфизм фундаментальных групп, индуцированный отображением h_0. Пусть $\bar{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — линейный автоморфизм пространства $\mathbb{R}^n$, накрывающий диффеоморфизм f. Обозначим через $\overline{K}$ универсальное накрывающее пространство для K, а через $\bar{g}\colon \overline{K} \to \overline{K}$ — гомеоморфизм, накрывающий g. Так как $\bar{f}$ — гиперболический автоморфизм, существует инвариантное разложение $\mathbb{R}^n = E^u \oplus E^s$, причем

$$\|\bar{f}^n(v)\| \leqslant C\lambda^n \|v\| \text{ для } v \in E^s \text{ и } n \geqslant 0$$

и

$$\|\bar{f}^n(v)\| \leqslant C'\lambda^{-n} \|v\| \text{ для } v \in E^u \text{ и } n \geqslant 0,$$

где $C, C' > 0$ и $0 < \lambda < 1$.

Обозначим $Q = \{h \mid h \in C_0(\overline{K}, \mathbb{R}^n), h(\alpha x) = h(x)$, при всех $x \in \overline{K}$ и $\alpha \in \pi_1(K)\}$, где $C_0(\overline{K}, \mathbb{R}^n)$ — пространство непрерывных отображений пространства $\overline{K}$ в $\mathbb{R}^n$, переводящих базисную точку в базисную точку.

Множество Q, снабженное равномерной нормой $\|h\| = \sup \|h(x)\|$, превращается в банахово пространство.

Выделим в Q подмножества $Q^s = \{h \mid h \in Q, h(\overline{K}) \subset E^s\}$ и $Q^u = \{h \mid h \in Q, h(\overline{K}) \subset E^u\}$.

Легко проверить, что $Q \cong Q^u \oplus Q^s$. Определим изоморфизм $F\colon Q \to Q$, положив $F(h) = \bar{f}^{-1} \circ h \circ \bar{g}$. Нетрудно видеть, что F — линейное отображение, сохраняющее подпространства Q^u и Q^s. Используя норму в пространстве Q, получаем также, что $\|F^n(h)\| \leqslant C'\lambda^n \|h\|$ при $n \geqslant 0$ и $h \in Q^u$ и $\|F^n(h)\| \geqslant C\lambda^{-n}\|h\|$ при $n \geqslant 0$ и $h \in Q^s$.

Пусть I: $Q \to Q$ — тождественное отображение. Тогда $F - I$ — изоморфизм, так как на Q^u

$$(F - I)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} F^n.$$

Ряд в правой части этого равенства сходится, потому что $\|F^n\| \leqslant C'\lambda^n$. Аналогичным образом имеем на Q^s

$$(I - F^{-1})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} F^{-n},$$

так что существует обратный оператор

$$(F - I)^{-1} = F^{-1}(I - F^{-1})^{-1}.$$

Следовательно, $F - I$ — автоморфизм пространства Q.

Пусть $\bar{h}_0$: $\bar{K} \to \mathbb{R}^n$ — отображение, накрывающее h_0 и $h' = F(\bar{h}_0) - \bar{h}_0 = \bar{f}^{-1} \circ \bar{h}_0 \circ \bar{g} - \bar{h}_0$. Тогда $h' \in Q$, так как [1])

$$\begin{aligned} h'(\alpha x) &= F(\bar{h}_0)(\alpha x) - \bar{h}_0(\alpha x) = \\ &= f_*^{-1} \circ \phi \circ g_*(\alpha) F(\bar{h}_0)(x) - \phi(\alpha)\bar{h}_0(x) = \\ &= \phi(\alpha) F(\bar{h}_0)(x) - \phi(\alpha)\bar{h}_0(x) = \\ &= F(\bar{h}_0)(x) - \bar{h}_0(x). \end{aligned}$$

Последнее равенство следует из того, что $\phi(\alpha)$ — просто параллельный перенос в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Так как $h' \in Q$, то найдется такое отображение $\hat{h} \in Q$, что $(F - I)\hat{h} = h'$. Зададим отображение k: $\bar{K} \to \mathbb{R}^n$, положив $k(x) = \bar{h}_0(x) - \hat{h}(x)$. Тогда $k(\alpha x) = \phi(\alpha)k(x)$, так что k является накрывающим отображением для некоторого отображения k_0: $K \to \mathbb{T}^n$, и из стандартных результатов теории гомотопий (см. [21], стр. 549)[2]) следует, что отображение k_0 гомотопно h_0. Далее

$$\begin{aligned} \bar{f}^{-1} \circ k \circ \bar{g} - k &= F(\bar{h}_0 - \hat{h}) - (\bar{h}_0 - \hat{h}) = \\ &= (F - I)\bar{h}_0 - (F - I)\hat{h} = h' - h' = 0. \end{aligned}$$

---

[1]) Здесь используется тот факт, что для скольжения α накрытия $\bar{K} \to K$ и скольжения β накрытия $\mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$ $\bar{g} \circ \alpha = g_*(\alpha) \circ \bar{g}$, $\bar{h}_0 \circ \alpha = \phi(\alpha) \circ \bar{h}_0$, $\bar{f}^{-1} \circ \beta = \bar{f}_*^{-1}(\beta) \circ \bar{f}^{-1}$. — *Прим. ред.*

[2]) Ссылка на страницу дана по русскому переводу — *Прим. перев.*

Таким образом, $\bar{f} \circ k = k \circ \bar{g}$. Если k' — какое-нибудь другое отображение, обладающее таким свойством, то легко видеть, что $k - k' \in Q$ и $(F - I)(k - k') = 0$, так что $k - k' = 0$, т. е. $k = k'$. Следовательно, k_0 — единственное отображение, гомотопное h_0 и такое, что $f \circ k_0 = k_0 \circ g$.

Предложение (2.1) является частным случаем следующего результата.

(2.2) Теорема. *Гиперболические автоморфизмы инфранильмногообразий являются π_1-диффеоморфизмами.*

Доказательство. Пусть f: $M \to M$ — гиперболический автоморфизм инфранильмногообразия. Напомним, что M — факторпространство N/G, где N — односвязная нильпотентная группа Ли, A — конечная группа автоморфизмов группы N, а G — равномерная дискретная подгруппа полупрямого произведения $A \cdot N$. Обозначим через $\bar{f}$: $N \to N$ гиперболический автоморфизм, накрывающий f.

Пусть теперь g: $K \to K$ — такой гомеоморфизм компактного CW-комплекса K на себя, что существует непрерывное отображение h_0: $K \to M$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(K) & \xrightarrow{\phi} & \pi_1(M) = G \\ {\scriptstyle g_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_*} \\ \pi_1(K) & \xrightarrow{\phi} & \pi_1(M). \end{array}$$

Здесь ϕ — гомоморфизм фундаментальных групп, индуцированный отображением h_0. Пусть ψ: $\pi_1(K) \to A$ обозначает композицию отображений $\pi_1(K) \xrightarrow{\phi} G \xrightarrow{\rho} A$, где ρ — ограничение на подгруппу G естественной проекции группы $A \cdot N$ на A.

Если $\alpha \in \pi_1(K)$, то $\psi(\alpha)$ — некоторый автоморфизм группы N.

Пусть $\bar{K}$—универсальное накрывающее пространство для K и $Q = \{h \mid h \in C_0(\bar{K}, N)$ и $h(\alpha x) = \psi(\alpha) h(x)$ при всех $\alpha \in \pi_1(K)$ и $x \in \bar{K}\}$, где $C_0(\bar{K}, N)$ обозначает пространство непрерывных отображений из $\bar{K}$ в N, переводящих базисную точку в базисную точку.

Каждый элемент группы G имеет вид (y, a), где $y \in G \cap N$ и $a \in A$. Такой элемент действует на группе N как композиция действия автоморфизма a и левого сдвига на элемент y. Введем в пространстве Q операцию умножения, положив $h_1h_2(x) = h_1(x) h_2(x)$. Заметим, что

$$h_1h_2(\alpha x) = h_1(\alpha x) h_2(\alpha x) = (\psi(\alpha) h_1(x)) (\psi(\alpha) h_2(x)) =$$
$$= \psi(\alpha)(h_1(x) h_2(x)) = \psi(\alpha) h_1h_2(x),$$

Читатель без труда проверит, что Q — нильпотентная группа.

Обозначим через $\bar{g}$; $\bar{K} \to \bar{K}$ отображение, накрывающее g, и определим гомоморфизм F_0: $Q \to Q$, положив $F_0(h) = \bar{f}^{-1} \circ h \circ \bar{g}$. Покажем, что отображение F_0 действительно переводит Q в Q. В силу теоремы 2 из [3] автоморфизм f_*: $G \to G$ можно расширить до автоморфизма $\bar{\theta}$: $A \cdot N \to A \cdot N$, который индуцирует автоморфизм θ: $A \to A$, такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(K) & \xrightarrow{\psi} & A \\ {\scriptstyle g_*}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\theta} \\ \pi_1(K) & \xrightarrow{\psi} & A \end{array}$$

коммутативна[1]). Поэтому

$$\begin{aligned} F_0(h)(\alpha x) &= \bar{f}^{-1} \circ h \circ \bar{g}(\alpha x) = \bar{f}^{-1}(\psi(g_*(\alpha))\, h \circ \bar{g}(x)) = \\ &= \bar{f}^{-1}(\theta(\psi(\alpha))\, h \circ \bar{g}(x)) = \\ &= \psi(\alpha)\, \bar{f}^{-1} \circ h \circ \bar{g}(x) = \psi(\alpha)\, F_0(h)(x). \end{aligned}$$

Определим теперь отображение T: $Q \to Q$, положив $T(h) = F_0(h) \cdot h^{-1}$. Мы хотим показать, что отображение T является локальным гомеоморфизмом в окрестности единицы c группы Q (c — это отображение множества K в единицу группы N). Мы докажем это, вычислив дифференциал отображения T. Пространство Q диффеоморфно банаховому пространству; в самом деле, если Σ — алгебра Ли группы N и exp: $\Sigma \to N$ — экспоненциальное отображение, то отображение Log: $Q \to \Delta = \{h \mid h \in C_0(K, \Sigma),\ h(\alpha x) = d\psi(\alpha) h(x)$ при всех $\alpha \in \pi_1(K)\}$[2]), определяемое соотношением $\operatorname{Log}(h) = \exp^{-1} \circ h$, является диффеоморфизмом пространства Q на банахово пространство Δ (так как группа N односвязна и нильпотентна, то отображение exp является диффеоморфизмом; см. [8], стр. 136[3])).

---

[1]) Ссылка на теорему 2 из [3] в данном случае представляется излишней. Ведь в § 1 определение гиперболического автоморфизма инфраниильмногообразия начиналось с гиперболического автоморфизма $\bar{f}$: $A \cdot N \to A \cdot N$. Теперь это отображение автор обозначает через $\bar{\theta}$, обозначение $\bar{f}$ сохраняется только для его ограничения на подгруппу, которая состоит из элементов вида (e, x) (здесь e — единица A) и отождествляется с N, а $\bar{\theta} \mid G = f_*$. Заметим еще, что $\bar{f}(ax) = \theta(a) \bar{f}(x)$ (здесь $a \in A$, $x \in N$) и $\bar{f}^{-1}(ax) = \theta^{-1}(a) \bar{f}^{-1}(x)$ (поскольку θ^{-1} соответствует $\bar{f}^{-1}$ так же, как θ соответствует $\bar{f}$). — *Прим. ред.*

[2]) Начиная с этого момента дифференциал отображения обозначается символом d, а не D, как это делалось выше. — *Прим. перев.*

[3]) Или [23*], стр. 263. — *Прим. ред.*

Равенство $F = \mathrm{Log} \circ F_0 \circ \mathrm{Log}^{-1}$ определяет отображение F: $\Delta \to \Delta$. Поскольку $\exp \circ df = \bar{f} \circ \exp$, где df — дифференциал отображения $\bar{f}$ в единице, то из определения отображения F следует, что $F(h) = df^{-1} \circ h \circ \bar{g}$, т. е. F — линейное отображение пространства Δ. Определим также отображение T': $\Delta \to \Delta$, положив $T' = \mathrm{Log} \circ T \circ \mathrm{Log}^{-1}$. Очевидно, что отображение T будет локальным гомеоморфизмом в точке c, если отображение T' является локальным гомеоморфизмом в точке $\mathrm{Log}^{-1}(c)$.

Имеем

$$\begin{aligned} T'(h) &= \mathrm{Log} \circ T \circ \mathrm{Log}^{-1}(h) = \mathrm{Log}\left(F_0(\exp \circ h)(\exp \circ h)^{-1}\right) = \\ &= \mathrm{Log}\left(\bar{f}^{-1} \circ \exp \circ h \circ \bar{g}\right)(\exp \circ h)^{-1}\Big) = \\ &= \mathrm{Log}\,(\exp \circ F(h))(\exp \circ h)^{-1} \end{aligned}$$

или, если обозначить $\mathrm{Exp} = \mathrm{Log}^{-1}$,

$$T'(h) = \mathrm{Log}\left(\mathrm{Exp}\,(F(h))\,\mathrm{Exp}\,(h)^{-1}\right).$$

Элемент $\mathrm{Log}(c)$, очевидно, является нулем пространства Δ. Теперь мы вычислим дифференциал отображения T' в нуле. Этот дифференциал dT'_0 равен $F - I$, где I: $\Delta \to \Delta$ — тождественное отображение. В самом деле, пусть $h \in \Delta$; тогда

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} T'(th) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \mathrm{Log}\,(\mathrm{Exp}\,(F(th))\,\mathrm{Exp}\,(-th)$$

и по формуле Кемпбелла — Хаусдорфа (см., например, [8], стр. 112[1])

$$\mathrm{Log}\,(\mathrm{Exp}\,(F(th))\,\mathrm{Exp}\,(-th)) = \\ = F(th) - th + t^2 \text{ (члены высших порядков)}.$$

Следовательно,

$$\lim \frac{1}{t} T'(th) = F(h) - h.$$

Покажем теперь, что dT'_0 — изоморфизм. Так как df — гиперболическое отображение, то существует такое разложение пространства Σ в сумму подпространств $\Sigma = \Sigma^u \oplus \Sigma^s$, что $\|df^n(v)\| \leqslant C\lambda^n \|v\|$ при $n > 0$, $v \in \Sigma^s$, $C > 0$, $0 < \lambda < 1$ и $\|df^{-n}(v)\| \leqslant C'\lambda^n \|v\|$ при $n > 0$, $v \in \Sigma^u$. Положим $\Delta^u = \{h \mid h \in \Delta$ и $h(\bar{K}) \subset \Sigma^u\}$ и аналогично определим подпространство Δ^s. Очевидно, что $\Delta = \Delta^s \oplus \Delta^u$, подпространства Δ^u и Δ^s инвариантны относительно F и $\|F^n(h)\| \leqslant C'\lambda^n \|h\|$ при $n > 0$ и $h \in \Delta^u$. Ограничение оператора F на подпростран-

[1]) Или [23*], стр. 259—261. — *Прим. ред.*

ство Δ^s — обратимый оператор и $\|F^{-n}(h)\| \leqslant C \cdot \lambda^n \|h\|$ при $n > 0$ и $h \in \Delta^s$. На подпространстве Δ^u справедливо разложение $(F-I)^{-1} = -\sum\limits_{n=0}^{\infty} F^n$, причем ряд в правой части этого равенства сходится, так как $\|F^n\| \leqslant C'\lambda^n$. Аналогично, на подпространстве Δ^s имеем $\left(I - F^{-1}\right)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} F^{-n}$, так что существует оператор $(F-I)^{-1} = F^{-1}\left(I - F^{-1}\right)^{-1}$.

Следовательно, $F - I$ — это изоморфизм пространства Δ.

Из теоремы об обратной функции теперь следует, что T' — локальный гомеоморфизм в 0 и, следовательно, отображение T — локальный гомеоморфизм в точке c.

Мы используем этот факт для того, чтобы доказать, что T отображает пространство Q на все пространство Q. Так как окрестность единичного элемента c в группе Q порождает Q (см. [15], стр. 76), то достаточно показать, что $h_1, h_2 \in \operatorname{Im}(T)$ влечет за собой $h_1h_2 \in \operatorname{Im}(T)$. Пусть $Q = Q^n \supset Q^{n-1} \supset \ldots \ldots \supset Q^0 = c$ — центральный ряд группы Q. Каждая группа Q^i связна, так как центральный ряд группы N состоит из стягиваемых групп. Предположим теперь, что $T(h_1), T(h_2) \in Q^1$ — центру группы Q, тогда

$$T(h_1)T(h_2) = F_0(h_1)h_1^{-1}T(h_2) = F_0(h_1)T(h_2)h_1^{-1} = \\ = F_0(h_1)F_0(h_2)h_2^{-1}h_1^{-1} = T(h_1h_2).$$

Значит, $Q^1 \in \operatorname{Im}(T)$. Предположим теперь, что $Q^i \subset \operatorname{Im}(T)$ и $T(h_1), T(h_2) \in Q^{i+1}$. Тогда

$$T(h_1)T(h_2) = F_0(h_1)h_1^{-1}T(h_2) = F_0(h_1)h'T(h_2)h_2^{-1} = \\ = F_0(h_1)F_0(h_2)h''h_2^{-1}h_1^{-1},$$

где $h' = \left[h_1, T(h_2)^{-1}\right] \in Q^i$, $h'' \in Q^i$.

По предположению существует такой элемент h_3, что $T(h_3) = h''$. Таким образом,

$$T(h_1)T(h_2) = F_0(h_1)F_0(h_2)F_0(h_3)h_3^{-1}h_2^{-1}h_1^{-1} = T(h_1h_2h_3).$$

Следовательно, $Q^{i+1} \subset \operatorname{Im}(T)$ и по индукции $Q \subset \operatorname{Im}(T)$.

Заметим также, что отображение T инъективно, так как отображение F имеет единственную неподвижную точку 0 и, следовательно, отображение F_0 имеет единственную неподвижную точку c. Таким образом, из того, что $T(h) = c$, следует, что $h = c$, и если $T(h_1) = T(h_2)$, то $T\left(h_1h_2^{-1}\right) = c$, так что $h_1 = h_2$.

Возвратимся теперь к отображению h_0: $K \to N$ и обозначим через $\bar{h}_0$: $\bar{K} \to \bar{N}$ отображение, накрывающее h_0. Положим $\bar{h} = F_0(\bar{h}_0^{-1})\bar{h}_0$ и покажем, что $\bar{h} \in Q$;

$$\bar{h}(\alpha x) = F_0(\bar{h}_0(\alpha x)^{-1})\bar{h}_0(\alpha x) = \bar{f}^{-1}([\bar{h}_0(\bar{g}(\alpha x))]^{-1})(\bar{h}_0(\alpha x)) =$$
$$= \bar{f}^{-1}([\phi(g_*(\alpha))\bar{h}_0(\bar{g}(x))]^{-1})(\phi(\alpha)\bar{h}_0(x)).$$

Но по предположению $\phi \circ g_* = f_* \circ \phi$. Следовательно,

$$\bar{h}(\alpha x) = [f_*^{-1} \circ \phi \circ g_*(\alpha)\bar{f}^{-1}(\bar{h}_0(\bar{g}(x)))]^{-1}(\phi(\alpha)\bar{h}_0(x)) =$$
$$= [\phi(\alpha)\bar{f}^{-1}(\bar{h}_0(\bar{g}(x)))]^{-1}(\phi(\alpha)\bar{h}_0(x)).$$

Пусть $\phi(\alpha) = (y, a) \in G$, тогда $a = \psi(\alpha)$ и

$$\bar{h}(\alpha x) = [ya(\bar{f}^{-1}\bar{h}_0\bar{g}(x))]^{-1} ya(\bar{h}_0(x))) =$$
$$= a([F_0(\bar{h}_0)(x)]^{-1}) y^{-1}y \cdot a(\bar{h}_0)(x)) =$$
$$= \psi(\alpha)[(F_0(\bar{h}_0)(x))^{-1}\bar{h}_0(x)] =$$
$$= \psi(\alpha)\bar{h}(x). \text{ То есть } \bar{h} \in Q.$$

Положим $\hat{h} = T^{-1}(\bar{h})$, рассмотрим отображение $\bar{k} = \bar{h}_0\hat{h}$. Оператор T можно применять к отображениям $\bar{k}$ и $\bar{h}_0$, несмотря на то, что оии не принадлежат пространству Q. Имеем

$$T(\bar{k}) = F_0(\bar{h}_0\hat{h})\hat{h}^{-1}\bar{h}_0^{-1} = F_0(\bar{h}_0)T(\hat{h})\bar{h}_0^{-1} =$$
$$= F_0(\bar{h}_0)F_0(\bar{h}_0^{-1})\bar{h}_0\bar{h}_0^{-1} = c.$$

Таким образом, $\bar{f}^{-1} \circ \bar{k} \circ \bar{g} = \bar{k}$, или $\bar{f} \circ \bar{k} = \bar{k} \circ \bar{g}$.

Для завершения доказательства остается только показать, что отображение $\bar{k}$ накрывает некоторое отображение k: $K \to N$, гомотопное h_0. Это следует из того, что $\pi_i(N) = 0$ при $i > 1$ и

$$\bar{k}(\alpha x) = \bar{h}_0(\alpha x)\hat{h}(\alpha x) = (\phi(\alpha)h_0(x))(\psi(\alpha)\hat{h}(x)) =$$
$$= y\psi(\alpha)(\bar{h}_0(x))\psi(\alpha)(\hat{h}(x)),$$

где $\phi(\alpha) = (y, \psi(\alpha))$,

так что $\bar{k}(\alpha x) = y\psi(\alpha)(\bar{h}_0\hat{h}(x)) = \phi(\alpha)\bar{k}(x)$.

Если k' — другое отображение с теми же свойствами, что и k, то накрывающее его отображение $\bar{k}'$ обладает всеми свойствами $\bar{k}$. Рассмотрим отображение $\bar{k}^{-1}\bar{k}'$

$$\bar{k}^{-1}\bar{k}'(\alpha x)=[\phi(\alpha)\bar{k}(x)]^{-1}(\phi(\alpha)\bar{k}'(x))=$$
$$=\psi(\alpha)\left(\bar{k}(x)^{-1}\right)y^{-1}y\,(\psi(\alpha)\bar{k}'(x)),$$

где $\phi(\alpha)=(y, \psi(\alpha))$. Поэтому $\bar{k}^{-1}\bar{k}'(\alpha x)=\psi(\alpha)\bar{k}^{-1}\bar{k}'(x)$, и, следовательно, $\bar{k}^{-1}k'\in Q$. Но $T(\bar{k}^{-1}\bar{k}')=F_0(\bar{k}^{-1})F_0(\bar{k}')\bar{k}'^{-1}\bar{k}=c$, так что $\bar{k}^{-1}\bar{k}'=c$. Таким образом, $\bar{k}=\bar{k}'$, т. е. отображение k единственно.

Замечание. Из приведенного выше доказательства следует, что полусопрягающее[1]) отображение k: $K\to M$ непрерывно зависит от g: $K\to K$.

Вопрос. *Будет ли накрытие f: $M\to M$, которое является гиперболическим эндоморфизмом инфранильмногообразия, π_1-накрытием?*

Доказательство, приведенное выше для случая диффеоморфизма, не проходит, так как отображение F_0: $Q\to Q$ не будет гомеоморфизмом[2]) и, следовательно, теряет силу рассуждение, с помощью которого доказывались, что T: $Q\to Q$ — сюръективное отображение. Однако в частном случае растягивающих отображений ответ на этот вопрос положительный (см. § 8).

3. Мы рассмотрим некоторые свойства π_1-диффеоморфизмов и π_1-накрытий и докажем частичное обращение теоремы (2.2). Как и раньше, предполагается, что все рассматриваемые отображения переводят базисную точку в базисную точку.

---

[1]) Если бы вдобавок к тому, что $k\circ g=f\circ k$, отображение k было гомеоморфизмом, то о нем говорили бы, что оно сопрягает f и g. Термин „полусопряжение“ напоминает, что в действительности k обладает только первым свойством. — *Прим. ред.*

[2]) Пусть g — накрытие $K\to K$, x_0 — базисная точка K, $x_1\neq x_0$ и $g(x_1)=x_0$. Возьмем на K какой-нибудь путь $\beta(t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$, ведущий из x_0 в x_1. Тогда $g\beta$ — замкнутый путь на K, и пусть α — содержащий его класс гомотопных путей из $\pi_1(K, x)$. Незамкнутому пути β на K, исходящему из x_0, однозначно соответствует точка $\bar{x}_1$ на универсальном накрывающем пространстве $\bar{K}$: строим путь $\bar{\beta}(t)$, накрывающий $\beta(t)$ и исходящий из базисной точки $\bar{x}_0$, тогда $\bar{x}_1=\bar{\beta}(1)$. Тогда $\bar{g}(\bar{x}_1)$ аналогичным образом соответствует пути $g\beta\in\alpha$, т. е. это есть точка $\alpha\bar{x}_0$. Как видно, последняя обладает тем свойством, что $\bar{g}^{-1}(\alpha\bar{x}_0)$ ни при каком скольжении не получается из $\bar{x}_0$. Поэтому существует такая функция $h\in Q$, что $h(\bar{g}^{-1}(\alpha x_0))\neq 1$ (единице группы N). Если бы теперь было $h=F_0(h_1)$, где $h_1\in Q$, то тогда $h\bar{g}^{-1}=\bar{f}^{-1}h_1$, откуда $h(\bar{g}^{-1}(\alpha x_0))=$ $=\bar{f}h_1(\alpha\bar{x}_0)=\bar{f}^{-1}(\psi(\alpha)h_1(\bar{x}_0))=\bar{f}^{-1}(\psi(\alpha)1)=\bar{f}^{-1}(1)=1$. — *Прим. ред.*

(3.1) Лемма. *Если $f\colon M \to M$ — π_1-накрытие, то $\pi_i(M) = 0$ при всех $i \geqslant 2$.*

Доказательство. Пусть отображение $h\colon S^i \to M$ принадлежит нетривиальному элементу гомотопической группы $\pi_i(M)$. Тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(S^i) & \xrightarrow{h_*} & \pi_1(M) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle f_*} \\ \pi_1(S^i) & \xrightarrow{h_*} & \pi_1(M) \end{array}$$

коммутативна. Так как $f\colon M \to M$ — π_1-накрытие, то найдется гомотропное h отображение $h'\colon S^i \to M$, для которого $h' \circ \mathrm{id} = f \circ h'$. Пусть p — базисная точка на сфере S^i, а q — базисная точка на многообразии M. Так как отображение h' принадлежит нетривиальному элементу группы $\pi_i(M)$, то найдется точка $x \in S^i$, для которой $h'(x) \neq q$. Пусть S^1 — большой круг на сфере S^i, проходящий через точки p и x, а $k\colon S^1 \to M$ — ограничение отображения h' на окружность S^1. Очевидно, что отображение k гомотопно тривиальному отображению $c\colon S^1 \to q$.

Таким образом, $k \circ \mathrm{id} = f \circ k$ и $c \circ \mathrm{id} = f \circ c$. Но по определению π_1-накрытия существует только одно отображение с таким свойством. Так как $k(x) \neq p = c(x)$, то предположение о нетривиальности группы $\pi_i(M)$ приводит к противоречию.

(3.2) Теорема. *Для того чтобы два π_1-накрытия были топологически сопряжены, необходимо и достаточно, чтобы они были π_1-сопряжены.*

Доказательство. Пусть $f\colon M \to M$ и $g\colon N \to N$ — два π_1-сопряженных π_1-накрытия. Пусть $\Phi\colon \pi_1(M) \to \pi_1(N)$ — сопрягающий изоморфизм. Так как группы $\pi_i(M)$ и $\pi_i(N)$ тривиальны при $i > 1$, то из стандартных результатов теории гомотопий (см. [21], стр. 549) вытекает существование отображений $h\colon M \to N$ и $k\colon N \to M$, для которых $h_* = \Phi$ и $k_* = \Phi^{-1}$. Так как f и g — π_1-накрытия, то существует единственное гомотопное h отображение h', для которого $f \circ h' = h' \circ g$, и единственное отображение k', гомотопное k, для которого $g \circ k' = k' \circ f$. Отсюда следует, что $f \circ h' \circ k' = h' \circ g \circ k' = h' \circ k' \circ f$. Из теории гомотопий ([21], стр. 549) известно, что отображение $h' \circ k'\colon M \to M$ гомотопно тождественному отображению $\mathrm{id}\colon M \to M$. Очевидно, что $\mathrm{id} \circ f = f \circ \mathrm{id}$, и так как f — π_1-накрытие, то из условия единственности следует, что $h' \circ k' = \mathrm{id}$, т. е. h' и k' — гомеоморфизмы.

(3.3) Лемма. *Пусть T: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — линейное отображение с собственным значением λ, $|\lambda| = 1$.* Тогда *или* $\lambda = \pm 1$, *или найдется такое двумерное подпространство $V \subset \mathbb{R}^n$, что ограничение отображения T на подпространство V топологически сопряжено повороту.*

Доказательство. Если λ — вещественное число, то из того, что $|\lambda| = 1$, следует, что $\lambda = \pm 1$. Если λ — комплексное число, то из стандартных результатов о каноническом виде линейных преобразований следует, что найдется такое инвариантное относительно T подпространство $W \subset \mathbb{R}^n$, для которого ограничение отображения T на подпространство W представляется матрицей

$$\begin{pmatrix} \begin{array}{cc:c} \alpha & \beta & \\ -\beta & \alpha & \\ \hdashline 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \end{array} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & -\beta & \alpha \end{array} \end{pmatrix}$$

где $\lambda = \alpha + i\beta$. Пусть $e_1, \ldots, e_i$ — базис в W, относительно которого отображение T задается этой матрицей. Тогда в качестве V можно выбрать подпространство, порождаемое векторами e_{i-1} и e_i. Ограничение отображения T на подпространство V представляет собой поворот на угол θ, где $\sin\theta = \beta$, $\cos\theta = \alpha$.

Пусть M и N — компактные многообразия, $\bar{M}$, $\bar{N}$ — их универсальные накрывающие пространства; h: $M \to N$ — непрерывное отображение, $\bar{h}$: $\bar{M} \to \bar{N}$ — отображение, накрывающее h.

(3.4) Лемма. *Если h: $M \to N$ — гомотопическая эквивалентность, то $\bar{h}$: $\bar{M} \to \bar{N}$ — собственное отображение.*

Доказательство. Пусть $p \in \bar{N}$ — базисная точка на многообразии $\bar{N}$ и K — какая-нибудь компактная фундаментальная область в $\bar{N}$, содержащая точку p. Сначала мы покажем, что любое компактное множество $Q \subset \bar{N}$ пересекается только с конечным числом множеств вида $\alpha(K)$, где $\alpha \in \pi_1(N)$. Так как множество Q компактно, то найдется такое r, что шар

$B_r(p) = \{x \mid x \in \tilde{N}$ и $d(p, x) \leqslant r\}$ содержит множество Q. Выберем $t > r + \operatorname{diam} K$. Тогда из того, что $\alpha(p) \notin B_t(p)$, вытекает, что $\alpha(K) \cap Q = \varnothing$. Но шар $B_t(p)$-компактен, и поэтому $\alpha(p) \in B_t(p)$ только для конечного множества элементов α. Таким образом, $\alpha(K) \cap Q \neq \varnothing$ только для конечного множества элементов α.

Пусть теперь D — компактная фундаментальная область в $\tilde{M}$. Гомотопическая эквивалентность компактных многообразий является сюръективным отображением, поэтому $\tilde{h}(D)$ — компактная фундаментальная область на многообразии $\tilde{N}$. Положим $K = \tilde{h}(D)$. Тогда множество $\Psi = \{\alpha \mid \alpha \in \pi_1(N)$ и $\alpha(K) \cap Q \neq \varnothing\}$ конечно. Так как $\alpha(K) = \tilde{h}[h_*^{-1}(\alpha)(D)]$, то $\tilde{h}^{-1}(Q) \subset \bigcup_{\alpha \in \Psi} h_*^{-1}(\alpha)(D)$, а это объединение компактно.

Следующий результат, принадлежащий Л. Ауслендеру, сообщил мне М. Хирш.

(3.5) Предложение (существование модели). *Если $f\colon K \to K$ — накрытие, а группа $\pi_1(K)$ без кручения и содержит нильпотентную подгруппу конечного индекса, то существует эндоморфизм инфранильмногообразия $g\colon M \to M$, π_1-сопряженный с f. Если сама группа $\pi_1(K)$ нильпотентна, то g — эндоморфизм нильмногообразия, а если группа $\pi_1(K)$ коммутативна, то g — эндоморфизм тора.*

Доказательство. Напомним, что инфранильмногообразие представляет собой факторпространство $M = N/G$, где N — односвязная нильпотентная группа Ли, A — конечная группа автоморфизмов N, а G — равномерная дискретная подгруппа полупрямого произведения $A \cdot N$. Эндоморфизм инфранильмногообразия M индуцируется автоморфизмом $\bar{g}\colon A \cdot N \to A \cdot N$, таким, что $\bar{g}(G) \subset G$ и $\bar{g}(N) = N$.

Пусть G — группа, изоморфная $\pi_1(M)$, а Γ — нильпотентная подгруппа группы G конечного индекса. Можно предположить, что подгруппа Γ нормальна (в противном случае пересечение Γ со всеми сопряженными подгруппами является нормальной нильпотентной подгруппой группы G конечного индекса). По теореме Мальцева (теорема 6 из [10]) подгруппу Γ можно вложить как равномерную дискретную подгруппу в односвязную нильпотентную группу Ли N. Обозначим через A конечную факторгруппу G/Γ.

Таким образом, имеем точную последовательность

$$1 \to \Gamma \to G \xrightarrow{\varphi} A \to 1.$$

Мы построим расширение Δ группы N с помощью группы A

$$1 \to N \to \Delta \to A \to 1$$

и покажем, что это расширение расщепляется.

Пусть $\psi\colon G \to A$ обозначает естественную проекцию. Для каждого элемента $a \in A$ выберем элемент $\sigma(a) \in G$ так, чтобы $\psi(\sigma(a)) = a$, в частности положим $\sigma(1) = 1$. Сопряжение с помощью элемента $\sigma(a)$ порождает автоморфизм группы Γ, который мы будем обозначать $\theta(a)$. Согласно результату Мальцева (теорема 5 из [10]), автоморфизм $\theta(a)$ однозначно продолжается до автоморфизма $\bar{\theta}(a)\colon N \to N$. Произведение $\sigma(a)\sigma(b)$ отличается от $\sigma(ab)$ на элемент группы Γ, который мы обозначим $\varepsilon(a, b)$, т. е.

$$\sigma(a)\,\sigma(b) = \varepsilon(a, b)\,\sigma(ab).$$

Пусть $\Delta = \{(n, a) \mid n \in N,\ a \in A\}$. Определим умножение в множестве Δ, положив $(n, a)\cdot(m, b) = (n\cdot\bar{\theta}(a)(m)\cdot\varepsilon(a, b),\ ab)$. Из леммы 8.1 на стр. 165 книги [9] следует (впрочем, в этом можно убедиться прямой проверкой), что относительно введенного умножения множество Δ является группой и что гомоморфизмы $i\colon N \to \Delta$ и $\bar{\psi}\colon \Delta \to A$, где $i(n) = (n, 1)$ и $\bar{\psi}(n, a) = a$, порождают точную последовательность

$$1 \to N \xrightarrow{i} \Delta \xrightarrow{\bar{\psi}} A \to 1.$$

Кроме того, группа G изоморфна подгруппе группы Δ, состоящей из пар (n, a), для которых $n \in \Gamma$. Таким образом, получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \to & N & \xrightarrow{i} & \Delta & \to & A & \to & 1 \\
 & & \uparrow \cup & & \uparrow \cup & & \uparrow \mathrm{id} & & \\
1 & \to & \Gamma & \to & G & \to & A & \to & 1
\end{array}$$

Мы хотим показать, что верхняя последовательность расщепляется. Обозначим через (A, N, ϕ) абстрактное ядро верхнего расширения [1])

$$\phi\colon A \to \mathrm{Aut}(N)/\mathrm{In}(N);$$

здесь $\mathrm{Aut}(N)$ — группа автоморфизмов N, а $\mathrm{Jn}(N)$ — подгруппа внутренних автоморфизмов, ϕ — отображение, индуцированное расширением Δ.

Пусть Z — центр группы N. Согласно следствию 5.4 на стр. 156 книги [9], $H^2(A, Z) = 0$. Из этого факта и из теоремы 8.8 на стр. 169 [9] вытекает единственность расширения N с абстрактным ядром (A, N, ϕ).

[1]) См. [9], стр. 165. — *Прим. ред.*

Доказательство того, что это расширение расщепляется, мы проведем индукцией по нильпотентной длине группы N. Если N — коммутативная группа, то всегда существует расщепляющееся расширение с ядром (A, N, ϕ), так что, в силу единственности, расширение Δ должно совпасть с этим расширением. Предположим теперь, что доказываемый результат справедлив для всех односвязных нильпотентных групп нильпотентной длины $\leqslant n$ и пусть группа N имеет нильпотентную длину $n+1$.

Рассмотрим расширение

$$1 \to N/Z \to \Delta/Z \xrightarrow{\bar{\psi}'} A \to 1,$$

где $\bar{\psi}'$ — естественное отображение, индуцированное $\bar{\psi}$. Оно имеет ядро $(A, N/Z, \bar{\phi})$, где $\bar{\phi}$: $A \to \mathrm{Aut}(N/Z)/\mathrm{In}(N/Z)$ — отображение, индуцированное ϕ. По предположению индукции, это расширение расщепляется, и, следовательно, существует гомоморфизм $\hat{\sigma}$: $A \to \Delta/Z$, такой, что $\psi' \circ \sigma = \mathrm{id}$. Обозначим через ϕ': $A \to \mathrm{Aut}(N)$ гомоморфизм, который сопоставляет элементу $a \in A$ ограничеиие на группу N внутреннего автоморфизма расширения Δ, порожденного любым элементом смежного класса $\hat{\sigma}(a)$.

Тогда можно образовать полупрямое произведение $A \times_{\phi'} N$, являющееся расширением

$$1 \to N \to A \times_{\phi'} N \to A \to 1.$$

Пусть $\hat{\phi}$: $A \to \mathrm{Aut}\ (N)/\mathrm{In}\ (N)$ — отображение, индуцированное ϕ'. Тогда $\hat{\phi}(a)$ определяется ограничением на группу N внутреннего автоморфизма группы Δ, порожденного любым элементом смежного класса $\hat{\sigma}(a)$. Но $\phi(a)$ определяется как ограничение на N внутреннего автоморфизма группы Δ, порожденного элементом $\sigma(a)$. Так как $\bar{\psi}'(\hat{\sigma}(a)) = a$ и $\bar{\psi}(\sigma(a)) = a$, то любой элемент из смежного класса $\bar{\sigma}(a)$ отличается от элемента $\sigma(a)$ самое большее на элемент из группы N. Следовательно, они определяют один и тот же элемент факторгруппы $\mathrm{Aut}\ (N)/\mathrm{In}\ (N)$, т. е. $\hat{\phi} = \phi$.

Таким образом, построенное выше полупрямое произведение имеет ядро (A, N, ϕ) и должно быть изоморфным расширению Δ. Поэтому расширение $1 \to N \to \Delta \to A \to 1$ расщепляется. В дальнейшем мы будем писать $A \cdot N$ вместо Δ.

Пусть H — подгруппа группы A, которая действует на группе N тривиально, положим $A' = A/N$. Тогда композиция $G \hookrightarrow A \cdot N \to A \cdot N/H$ является инъективным отображением, потому что группа G без кручения, а подгруппа H конечна. Легко показать, что группа $\Delta' = A \cdot N/H$ изоморфна группе $A' \cdot N$, так что группа G изоморфна подгруппе группы $A' \cdot N$, причем A' действует на группе N эффективно.

Пусть ϕ: $\pi_1(K) \to G$ — изоморфизм. Определим гомоморфизм g_*: $G \to G$, положив $g_* = \phi \circ f_* \circ \phi^{-1}$. Так как f — конечнолистное накрытие, то подгруппа $f_*(\pi_1(K))$ имеет конечный индекс в группе $\pi_1(K)$ и отображение f_* инъективно. Следовательно, подгруппа $g_*(G)$ имеет конечный индекс в группе G и отображение g_* инъективно. Так как Γ — равномерная дискретная подгруппа группы N, то G — равномерная дискретная подгруппа группы $A' \cdot N$. А так как подгруппа $g_*(G)$ имеет конечный индекс в группе G, то она также является равномерной дискретной подгруппой группы $A' \cdot N$.

Поскольку g_* — изоморфизм между группами G и $g_*(G)$, то, согласно результату Ауслендера (теорема 2 из [3]), отображение g_* можно расширить до автоморфизма $\bar{g}$ группы $A' \cdot N$. Топологически полупрямое произведение $A' \cdot N$ является прямым произведением $A' \times N$, а N — связная компонента единицы в группе $A' \cdot N$, следовательно, $\bar{g}(N) = N$.

Пусть M — инфранильмногообразие N/G, и g: $M \to M$ — отображение, индуцированное автоморфизмом $\bar{g}$. Тогда $\pi_1(M) \simeq G$ и отображение g_*: $\pi_1(M) \to \pi_1(M)$ совпадает с определенным выше гомоморфизмом g_*: $G \to G$, так что эндоморфизм инфранильмногообразия g: $M \to M$ π_1-сопряжен накрытию f: $K \to K$.

Очевидно, если сама группа G нильпотентна, то $\Delta = N$, так что M — нильмногообразие. Если, сверх того, группа G коммутативна, то группа $N = \Delta$ также коммутативна и M — тор.

(3.6) Теорема. *Пусть f: $M \to M$ — π_1-диффеоморфизм и группа $\pi_1(M)$ без кручения. Тогда*

(a) *Если группа $\pi_1(M)$ содержит нильпотентную подгруппу конечного индекса, то диффеоморфизм f топологически сопряжен гиперболическому автоморфизму инфранильмногообразия.*

(b) *Если группа $\pi_1(M)$ нильпотентна, то диффеоморфизм f топологически сопряжен гиперболическому автоморфизму нильмногообразия.*

(c) *Если группа $\pi_1(M)$ коммутативна, то диффеоморфизм f топологически сопряжен гиперболическому автоморфизму тора.*

Доказательство. Пусть g: $M' \to M'$ — эндоморфизм инфранильмногообразия, π_1-сопряженный с диффеоморфизмом f (этот диффеоморфизм существует в силу предложения (3.5)).

Пусть $M' = N/G$, а $\bar{g}$ — автоморфизм группы N, накрывающий g. Мы покажем, что автоморфизм $\bar{g}$ гиперболический.

Пусть ϕ: $\pi_1(M') \to \pi_1(M)$ — гомоморфизм, осуществляющий π_1-сопряженность. Так как $\pi_i(M) = 0$ при $i > 1$ (согласно лемме (3.1)), то из стандартных результатов теории гомотопий (см. [21], стр. 549) следует существование гомотопической эквивалентности h: $M' \to M$, такой, что $h_* = \phi$. Так как f — π_1-диффеоморфизм, то отображение h можно выбрать так, чтобы $f \circ h = h \circ g$.

Пусть $\bar{h}$: $N \to \bar{M}$ — отображение, накрывающее h. Согласно лемме (3.4), $\bar{h}$ — собственное отображение. Обозначим через Σ алгебру Ли группы N и через exp: $\Sigma \to N$ — экспоненциальное отображение. Дифференциал $d\bar{g}$ отображения $\bar{g}$ в единице группы N является автоморфизмом алгебры Σ, а отображение exp осуществляет топологическую сопряженность между отображениями $\bar{g}$ и $d\bar{g}$ (см. [8], стр. 136 [1])). Пусть $k = \bar{h} \circ \exp$, тогда k — собственное отображение алгебры Σ в многообразие $\bar{M}$, причем $f \circ k = k \circ d\bar{g}$. Мы хотим доказать, что $\bar{g}$ — гиперболическое отображение, т. е. что линейное отображение $d\bar{g}$ не имеет собственных значений, модуль которых равен единице.

Предположим, что такое собственное значение λ с $|\lambda| = 1$ существует. В силу леммы (3.3), либо $\lambda = \pm 1$, либо найдется двумерное инвариантное подпространство V, такое, что ограничение отображения $d\bar{g}$ на подпространство V представляет собой поворот.

Мы рассмотрим эти два случая по отдельности. Пусть P: $\bar{M} \to M$ — проекция. Если $\lambda = \pm 1$, обозначим через x такой собственный вектор, что точка $Pk(x)$ не совпадает с базисной точкой на многообразии M (такой вектор x существует, потому что k — собственное отображение). Обозначим через D интервал $\{tx \mid t \in [-1, 1]\}$ в алгебре Σ и определим отображение T: $D \to D$, положив $T(y) = y$, если $\lambda = 1$, и $T(y) = -y$, если $\lambda = -1$. Введем, наконец, отображение k': $D \to M$, положив $k'(y) = P \circ k(y)$.

Очевидно, что $k' \circ T = f \circ k'$, но так как f — π_1-диффеоморфизм, а D — односвязное множество, то единственным отображением множества D, обладающим таким свойством, является отображение, переводящее все точки D в базисную точку многообразия M. Однако по построению точка $k'(x)$ не совпадает с базисной точкой на многообразии M, что приводит к противоречию.

---

[1]) Или [23*], стр. 263. — *Прим. ред.*

В случае когда λ — комплексное число, обозначим через D' диск на плоскости V с центром в точке 0, инвариантный относительно дифференциала $d\bar{g}$ и содержащий точку x', для которой точка $k'(x')$ не совпадает с базисной точкой на многообразии M (такая точка x' существует, потому что k — собственное отображение). Пусть T': $D' \to D'$ обозначает ограничение дифференциала $d\bar{g}$ на диск D'. Тогда, как и выше, $k' \circ T' = f \circ k'$ и D' — односвязное множество, а k' — непостоянное отображение, что приводит к противоречию. Таким образом, отображение $d\bar{g}$ не может иметь собственных значений, модуль которых равен единице, т. е. g — гиперболический эндоморфизм инфранильмногообразия. Так как g_* — автоморфизм, то отображение g на самом деле является диффеоморфизмом.

По теореме (2.2), g — π_1-диффеоморфизм, который π_1-сопряжен π_1-диффеоморфизму f. Согласно теореме (3.2), диффеоморфизмы f и g топологически сопряжены.

4. В этом параграфе мы установим некоторые свойства метрически разложимых У-диффеоморфизмов. Непосредственно из определения вытекает следующий результат.

(4.4) Предложение. *Метрически разложимое У-накрытие имеет неподвижную точку.*

Доказательство. В факторпространстве S определена метрика ρ, относительно которой отображение $\bar{f}^{-1}$ ($\bar{f}$ — некоторое отображение, накрывающее f) является сжатием. Из этого следует (см. лемму 1.6), что найдется слой $s \in S$, для которого $\bar{f}^{-1}(s) = s$. Согласно лемме (1.2), ограничение отображения $\bar{f}$ на слой s является сжатием во внутренней метрике $d(s;\ )$ и следовательно. имеет неподвижную точку x. Очевидно, что $\bar{f}(x) = x$, так что точка $P(x) \in M$ является неподвижной точкой для отображения f.

Вопрос. *Всегда ли У-накрытие на компактном многообразии имеет неподвижную точку?*

На протяжении этого параграфа мы будем выбирать в качестве базисной точки на многообразии M, на котором задано метрически разложимое У-накрытие f, какую-нибудь неподвижную точку x_0 этого накрытия и пользоваться обозначением $\pi_1(M)$ вместо $\pi_1(M, x_0)$.

Мы будем предполагать в этом параграфе, что на каждом многообразии выбрана базисная точка, а все отображения (кроме скольжений) переводят базисную точку в базисную точку.

(4.2) Теорема. *Метрически разложимый У-диффеоморфизм является π_1-диффеоморфизмом.*

Доказательство. Пусть $f\colon M \to M$ — метрически разложимый У-диффеоморфизм, $g\colon N \to N$ — гомеоморфизм компактного CW-комплекса, $k\colon N \to M$ — непрерывное отображение, причем диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(N) & \xrightarrow{\phi} & \pi_1(M) \\ {\scriptstyle g_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_*} \\ \pi_1(N) & \xrightarrow{\phi} & \pi_1(M), \end{array}$$

где $\phi = k_*$, коммутативна.

Пусть $\bar{N}$ — односвязное накрывающее пространство для комплекса N. Рассмотрим следующие пространства непрерывных отображений:

$$H = \{h\colon \bar{N} \to \bar{M} \mid h \circ \alpha = \phi(\alpha) \circ h \text{ для всех } \alpha \in \pi_1(N)\},$$

$$H^s = \{h\colon \bar{N} \to S \mid h \circ \alpha = \phi(\alpha) \circ h \text{ для всех } \alpha \in \pi_1(N)\},$$

$$H^u = \{h\colon \bar{N} \to U \mid h \circ \alpha = \phi(\alpha) \circ h \text{ для всех } \alpha \in \pi_1(N)\}.$$

Пространство H является замкнутым подпространством пространства всех непрерывных отображений с топологией равномерной сходимости. Отображение $h \to (s \circ h,\ u \circ h)$ задает гомеоморфизм между пространствами H и $H^s \times H^u$.

Так как диффеоморфизм f метрически разложим, то в факторпространстве S существует полная метрика ρ, такая, что

$$\rho(\bar{f}^{-n}s,\ \bar{f}^{-n}s') \leqslant C \cdot \lambda^n \cdot \rho(s,\ s').$$

Определим полную метрику D в пространстве H^s, положив $D(h_1, h_2) = \sup\limits_{x \in \bar{N}} \rho(h_1(x), h_2(x))$. Так как $h_i(\alpha x) = \phi(\alpha) h_i(x)$ $(i = 1, 2)$, то $D(h_1, h_2) = \sup\limits_{x \in K} \rho(h_1(x), h_2(x))$ для любой компактной фундаментальной области $K \subset \bar{N}$, причем эта точная верхняя грань конечна. Остальные свойства метрики D, которые нужно проверить, чтобы показать, что это действительно полная метрика, совсем очевидны.

Рассмотрим отображение $F\colon H \to H$, где $F(h) = \bar{f}^{-1} \circ h \circ \bar{g}$. Очевидно, $F = F_1 \times F_2\colon H^s \times H^u \to H^s \times H^u$, где

$$F_1(h^s) = \bar{f}^{-1} \circ h^s \circ \bar{g} \text{ и } F_2(h^u) = \bar{f}^{-1} \circ h^u \circ \bar{g}.$$

Если $h_1, h_2 \in H^s$, то

$$D(F_1^n(h_1), F_1^n(h_2)) = \sup_{x\in\overline{N}} \rho(\bar{f}^{-n}\circ h_1\circ \bar{g}^n(x), \bar{f}^{-n}\circ h_2\circ \bar{g}^n(x)) =$$
$$= \sup_{x\in\overline{N}} \rho(\bar{f}^{-n}\circ h_1(x), \bar{f}^{-n}\circ h_2(x)) \leqslant$$
$$\leqslant C\cdot\lambda^n (\sup_{x\in\overline{N}} \rho(h_1(x), h_2(x))),$$

где $C > 0$ и $\lambda \in (0, 1)$.

Последнее неравенство вытекает из того, что отображение $\bar{f}^{-1}$ является сжатием на факторпространстве S. Следовательно,

$$D(F_1^n(h_1), F_1^n(h_2)) \leqslant C\cdot\lambda^n D(h_1, h_2).$$

Таким образом, отображение F_1 является сжатием на пространстве H^s и, согласно лемме (1.6), имеет единственный инвариантный элемент h_0^s: $F_1(h_0^s) = h_0^s$.

Пусть $Q = h_0^s \times H^u \subset H$. Подпространство Q замкнуто и инвариантно относительно отображения F, так как

$$F(h_0^s, h^u) = (F_1(h_0^s), F_2(h^u)) = (h_0^s, F_2(h^u)) \in Q.$$

Определим в пространстве Q метрику $\overline{D}$, положив $\overline{D}(h_1 h_2) = \sup_{x\in\overline{N}} d(s(h_1(x)); h_1(x), h_2(x))$. Это определение имеет смысл, так как из $h_1, h_2 \in Q$ следует, что $s\circ h_1 = s\circ h_2$. Чтобы установить конечность метрики $\overline{D}(h_1, h_2)$, заметим, что для всех $\alpha \in \pi_1(N)$ и $h_1, h_2 \in Q$

$$d(s(h_1(\alpha x)); h_1(\alpha x), h_2(\alpha x)) =$$
$$= d(\phi(\alpha)s(h_1(x)); \phi(\alpha)h_1(x), \phi(\alpha)h_2(x)) =$$
$$= d(s(h_1(x)); h_1(x), h_2(x)).$$

Таким образом, достаточно брать точную верхнюю грань на компактной фундаментальной области $K \subset \overline{N}$. Проверка выполнения для функций $\overline{D}$ аксиом метрики не представляет затруднений. Пусть, как и раньше, d обозначает полную метрику на многообразии $\overline{M}$, полученную из римановой метрики на $\overline{M}$, которая в свою очередь поднимается с многообразия M. Введем в пространстве Q полную метрику $\bar{d}$, положив $\bar{d}(h_1, h_2) = \sup_{x\in\overline{N}} d(h_1(x), h_2(x))$. Так как для любых $y_1, y_2 \in s \in S$ имеем $d(y_1, y_2) \leqslant d(s; y_1, y_2)$, то для любых $h_1, h_2 \in Q$ имеет место неравенство $\bar{d}(h_1, h_2) \leqslant \overline{D}(h_1, h_2)$.

Из леммы (1.2) следует, что

$$\bar{D}\left(F^{-n}(h_1),\ F^{-n}(h_2)\right) =$$
$$= \sup_{x \in \bar{N}} d\left(\bar{f}^n(s(h_1 \circ \bar{g}^{-n}(x));\ \bar{f}^n \circ h_1 \circ \bar{g}^{-n}(x),\ \bar{f}^n \circ h_2 \circ \bar{g}^{-n}(x)\right) \leqslant$$
$$\leqslant C'\lambda^n \sup_{x \in \bar{N}} d\left(s(h_1(x));\ h_1(x),\ h_2(x)\right) = C' \cdot \lambda^n \cdot \bar{D}(h_1, h_2),$$

где $C' > 0$, $\lambda \in (0, 1)$. Отсюда легко видеть, что для любого элемента $h \in Q$ последовательность h, $F^{-1}(h)$, $F^{-2}(h)$, ... является фундаментальной в метрике $\bar{D}$, а следовательно, и в $\bar{d}$, так как $\bar{d} \leqslant \bar{D}$. Так как метрика $\bar{d}$ полна [1]), эта последовательность имеет предел $h_0 \in Q$. Очевидно, что $F(h_0) = h_0$, т. е, $\bar{f}^{-1} \circ h_0 \circ \bar{g} = h_0$. Так как отображение F^{-1} является сжатием в метрике $\bar{D}$, эта неподвижная точка в пространстве Q единственна. Пусть h_0' — какая-нибудь другая неподвижная точка отображения F в пространстве H. Тогда, так как h_0^s — единственная неподвижная точка F_1 в пространстве H^s, имеем $s \circ h_0' = h_0^s$, так что $h_0' \in Q$ и, следовательно, $h_0' = h_0$.

Так как $h_0 \in H$, то отображение h_0 накрывает некоторое отображение h: $N \to M$, такое, что $h_* = \phi$. Так как $\bar{f}^{-1} \circ h_0 \circ \bar{g} = h_0$, то очевидно, что $f \circ h = h \circ g$.

(4.3) Теорема. *Пусть f: $M \to M$ — метрически разложимый У-диффеоморфизм, и группа $\pi_1(M)$ содержит нильпотентную подгруппу конечного индекса. Тогда диффеоморфизм f топологически сопряжен с гиперболическим автоморфизмом инфранильмногообразия. Если группа $\pi_1(M)$ коммутативна, то диффеоморфизм f топологически сопряжен автоморфизму тора.*

Доказательство. Так как диффеоморфизм f разложим, то накрывающее пространство $\bar{M}$ гомеоморфно пространству $\mathbb{R}^n$. Согласно теореме П. А. Смита (см. [4], стр. 43), не существует свободного действия группы $\mathbb{Z}_p$ в пространстве $\mathbb{R}^n$, следовательно, $\pi_1(M)$ — группа без кручения. После этого замечания утверждение теоремы вытекает из теорем (4.2) и (3.6).

Замечание. Предложение (2.1) является частным случаем теоремы (4.2), так как гиперболический автоморфизм тора метрически разложим. Однако кажется маловероятным, что все гиперболические автоморфизмы нильмногообразий метри-

---

[1]) Метрику $\bar{d}$ можно ввести не только в Q, но и во всем H; эта метрика задает в H ту самую топологию, с которой мы все время работаем. Полнота Q в метрике $\bar{d}$ следует из полноты H в этой метрике и замкнутости Q. — *Прим. ред.*

чески разложимы. Это легко доказать в том случае, когда подпространства Σ^s и Σ^u, описанные в теореме (2.2), коммутируют, т. е. для любых $v \in \Sigma^s$, $w \in \Sigma^u$ $[v, w] = 0$. Один из примеров С. Смейла на нильмногообразии ([19], стр. 128, пример 2) не удовлетворяет этому условию. Легко показать, что все примеры У-диффеоморфизмов, описанные во введении, разложимы. Если бы удалось доказать, что разложимый У-диффеоморфизм является π_1-диффеоморфизмом, то этот результат перекрыл бы предложение (2.1) теоремы (2.2) и (4.2).

5. Цель этого параграфа состоит в доказательстве того факта, что У-диффеоморфизм коразмерности один f: $M \to M$ разложим, если $NW(f) = M$. Доказательства в этом параграфе используют некоторые сведения о слоениях. Хорошим источником, где можно найти эти сведения, служит работа А. Хефлигера [5].

(5.1) Лемма. *Пусть f: $M \to M$ — У-накрытие коразмерности один. Тогда для любых двух точек $x, y \in M$ пересечение $u(x) \cap s(y)$ содержит не более одной точки.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. существование точек x, $y \in \bar{M}$, таких, что $x \neq y$ и x, $y \in u(x) \cap s(y)$. Мы придем от этого предположения к противоречию. Без ограничения общности можно считать, что размерность слоя $s(x)$ равна единице. Покажем сначала, что существует замкнутая петля, трансверсальная к слоению U.

Пусть h: $[0, 1] \to s(x)$ — диффеоморфизм отрезка на дугу слоя $s(x)$, соединяющую точки x и y; для определенности положим $h(0) = x$, $h(1) = y$. Пусть $\bar{f}$: $\bar{M} \to \bar{M}$ — какой-нибудь диффеоморфизм, накрывающий f. Так как $u(x) = u(y)$, то из леммы (1.2) и предложения (1.7) следует, что найдется такое натуральное число n, что точки $\bar{f}^{-n}(x)$ и $\bar{f}^{-n}(y)$ лежат в одной окрестности V со структурой произведения. Положим $h'(t) = \bar{f}^{-n} \circ h(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Дуга $h'(t)$, так же как и дуга $h(t)$, всюду трансверсальна к слоям слоения U. Кроме того, дуга h' должна пересекать слой $u(\bar{f}^{-n}(x))$ в точках $h'(0)$ и $h'(1)$ с одинаковой ориентацией, так как в противном случае существовала бы точка $h'(t_0)$, $0 < t_0 < 1$, в которой ориентация меняется, т. е. точка, где дуга h' касается слоев слоения U. Теперь легко видеть, как можно изменить дугу h' внутри окрестности V (и оставить без изменения вне V), чтобы получить гладкую замкнутую петлю $k(t)$, трансверсальную к слоям слоения U (см. рис. 2). Так как многообразие $\bar{M}$ односвязно, то петля k стягиваема. Можно считать, что $\dim M > 1$ (так как в размерности 1 лемма тривиальна), поэтому дуга k ограничивает гладко иммерсированный в многообразие $\bar{M}$ двумерный диск[1]). Другими словами, существует такая гладкая иммерсия ϕ: $D^2 \to \bar{M}$, что $\phi \mid \partial D^2 = k$. Для любой точки $t \in \partial D^2$ отображение ϕ трансверсально в точке t к слою и $u(\phi(t))$. Отсюда следует, что диск $\phi(D^2)$ трансверсален к слоям слоения U в некоторой окрестности $\phi(\partial D^2)$. Пересечения множества $\phi(D^2)$ со слоями слоения U образуют семейство кривых на диске D^2 (возможно, с особенностями в тех точках, где $\phi(D^2)$ касается слоев слоения U). Так как отображение ϕ является локальным диффеоморфизмом, эти кривые можно перенести

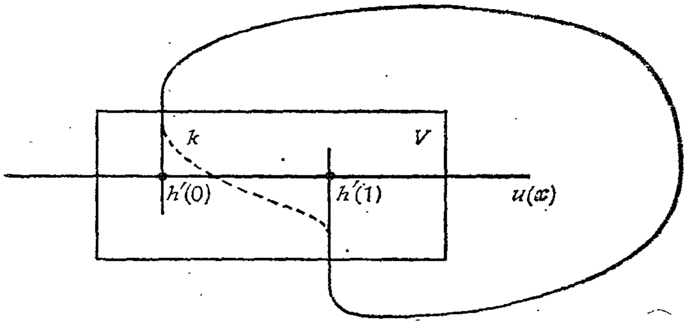


Рис. 2.

обратно на диск D^2 и получить семейство интегральных кривых векторного поля (с особенностями) на диске D^2. Из построения иммерсии ϕ следует, что это векторное поле невырождено в окрестности границы ∂D^2.

Мы фиксируем ориентацию на каждой кривой, ориентировав образ $\phi(D^2)$ и затем снабдив пересечение слоя и образа $\phi(D^2)$ ориентацией, которая обычным образом получается из ориентации многообразия $\bar{M}$, ориентации u и ориентации множества $\phi(D^2)$. Так как диск $\phi(D^2)$ трансверсален к слоям слоения U в некоторой окрестности границы $\phi(\partial D^2)$ и граница $\phi(\partial D^2)$ связна, то либо все интегральные кривые на диске D, пересекающие границу ∂D, входят внутрь диска D, либо все выходят из диска D. Без ограничения общности мож-

[1]) При $\dim M = 2$ это известный (хотя и редко доказываемый) факт двумерной топологии (восходящее к Шёнфлису уточнение теоремы Жордана), правда в относительно простом гладком случае. (Диск даже вложен, а не только иммерсирован.) При $\dim M > 2$ проводится обычное рассуждение о приведении в общее положение посредством малых шевелений (например, можно использовать теоремы о трансверсальности, см. следующую сноску). — *Прим. ред.*

но считать, что все интегральные кривые входят внутрь диска D.

Если $\dim M = 2$, то немедленно получается противоречие, так как ϕ — локальный диффеоморфизм и интегральные кривые на диске D получаются из слоев слоения U действием отображения ϕ^{-1}. Следовательно, внутри диска D векторное поле не может иметь особенностей. Но так как все интегральные кривые входят внутрь D, этот факт противоречит формуле Пуанкаре — Хопфа (см. [13]).

В случае бóльших размерностей мы используем соображения, весьма похожие на те, которые использует Хефлигер в доказательстве предложения (4.2) в [5].

Мы собираемся изменить отображение ϕ, оставляя его неизменным около границы ∂D так, чтобы диск $\phi(D)$ стал трансверсальным к слоям слоения U, за исключением изолированных точек касания «общего положения». Сначала выберем столь мелкую C^∞-триангуляцию диска D, чтобы для любого симплекса σ этой триангуляции ограничение $\phi|\sigma$ было вложением и чтобы образ $\phi(\sigma)$ лежал в окрестности со структурой произведения. Построение измененного отображения ϕ мы будем вести по остовам этой триангуляции.

Пусть D_0 — нульмерный остов D, $x_0 \in D_0$ и Q — такая компактная окрестность границы ∂D, что многообразие $\phi(Q)$ трансверсально к слоям слоения U. Предположим, что $x_0 \notin Q$, и выберем окрестность R точки x_0, которая не пересекается ни с множеством Q, ни с множеством $D_0 \setminus \{x_0\}$. Пусть $A = \{\psi \mid \psi \in C^3(D, \overline{M}),\ \ \psi(x_0) = \phi(x_0),\ \ \psi \mid D \setminus R = \phi \mid D \setminus R\}$. Отображение значения ev: $A \times D \to \overline{M}$, очевидно, трансверсально к слою $u(\phi(x_0))$ в точке $\phi(x_0)$. Следовательно, можно применить стандартную теорему трансверсальности (19.1) из [1])[1]) и заключить, что существует аппроксимация отображения ϕ, совпадающая с ϕ на множестве $D \setminus R$ и трансверсальная к слоям слоения U в точке x_0. Поступая аналогичным образом с другими точками множества D_0, мы можем построить отображение ϕ_1: $D \to \overline{M}$, совпадающее с ϕ на множестве Q и трансверсальное к слоям слоения U в точках множества D_0[2]). Кроме того, можно считать, что отображение ϕ_1 достаточно

---

[1]) См. также приложение III в русском переводе книги Ленга [24*].— *Прим. ред.*

[2]) Это рассуждение неубедительно: ведь сказанное обеспечивает трансверсальность отображения ψ: $D \to \overline{M}$ в точке x_0 к слою $u(\varphi(x_0))$, а не ко всем слоям. Очевидно, трансверсальность к данному слою будет достигнута, если $\psi(x_0)$ не принадлежит этому слою, что еще не мешает диску касаться в точке $\psi(x_0)$ другого слоя. Аккуратное доказательство можно провести подобно тому, как это делается ниже для одномерного остова.

Поскольку автор неудачно ссылается на теорему Абрагама о трансверблизко к ϕ, так что ограничение отображения ϕ_1 на каждый симплекс по-прежнему является вложением и образ каждого симплекса лежит в локальной окрестности со структурой произведения на многообразии $\overline{M}$.

Перейдем теперь к одномерному остову D_1. Пусть Q_1 — компактная окрестность $Q \cup D_0$, в которой отображение ϕ_1 трансверсально к слоям слоения U, а L — одномерный симплекс из D_1. Тогда $\phi_1(L)$ целиком содержится в некоторой локальной окрестности V со структурой произведения на многообразии $\overline{M}$. Так как слоение U имеет коразмерность один, то оно является C^1-слоением (см. [7]). Таким образом, существует координатное отображение класса C^1 $h\colon V \to \mathbb{R}^n$, которое переводит локальные слои слоения U в $(n-1)$-мерные гиперплоскости в $\mathbb{R}^n$. Выберем окрестность R симплекса L с компактным замыканием $\overline{R}$ и такую окрестность W множества особых точек[1]), лежащих в L, что $\overline{W} \subset R \setminus Q_1$.

сальности, стоит заметить, что с ее помощью можно заметно сократить доказательство. Для любого векторного пространства V обозначим через $G_2(V)$ грассманово многообразие двумерных плоскостей этого пространства (проходящих через O). Рассмотрим расслоение $G_2(T\overline{M}) \to \overline{M}$, слой которого над точкой $x \in \overline{M}$ есть $G_2(T_x\overline{M})$, и его подрасслоение $G_2(E^u)$ со слоем $G_2(E^4_x)$. Существенно, что ввиду C^1-гладкости слоения W^u в данном случае $G_2(E^u)$ является гладким класса C^1 подмногообразием $G_2(T\overline{M})$. Иммерсия $\psi\colon D \to \overline{M}$ определяет отображение $\overline{\psi}\colon D \to G_2(T\overline{M})$, сопоставляющее каждой точке $x \in D$ плоскость $(d\psi)T_xD$, рассматриваемую как элемент $G_2(T\overline{M})$. Пусть A — пространство иммерсий $D \to \overline{M}$, совпадающих с ϕ в фиксированной малой окрестности ∂D (где ϕ уже сама трансверсальна к слоям W^u). Очевидно, что отображение

$$A \times D \to G_2(T\overline{M}) \quad (\psi,\ x) \longmapsto \overline{\psi}(x)$$

трансверсально к $G_2(E^u)$. Легко подсчитать, что $\dim G_2(\mathbb{R}^n) = 2n-4$, поэтому слои расслоений $G_2(T\overline{M})$ и $G_2(E^u)$ имеют размерности $2n-4$ и $2n-6$; значит, коразмерность $G_2(E^4)$ в $G_2(T\overline{M})$ равна 2. Итак, $\dim D - \operatorname{codim}(G_2E^u) = 0$, поэтому теорема о трансверсальности «работает» уже при гладкости класса C^1 и гарантирует, что сколь угодно малым возмущением ψ иммерсии ϕ можно достичь, чтобы $\overline{\psi}D$ пересекало $G_2(E^u)$ лишь в конечном числе точек $\phi(x_1), \ldots, \overline{\psi}(x_N)$. Если $x \neq x_i$, то плоскость $(d\psi)T_xD$ трансверсальна к $E^u_{\psi(x)}$.

После этого надо рассмотреть ψ в малых окрестностях точек ψ_i и путем малого шевеления, не меняющего ψ вне этих окрестностей, добиться, чтобы все касания иммерсированного диска со слоями W^u имели желаемый характер (см. далее у Френкса). Это приходится делать с помощью таких же рассуждений, какие проводятся Френксом для двумерного остова, ибо для «автоматизации» с помощью теоремы Абрагама не хватает гладкости. — *Прим. ред.*

[1]) То есть точек, в которых диск касается слоя. — *Прим. ред.*

Выберем число $\delta > 0$ столь малым, чтобы любое отображение, δ-близкое к $h \circ \phi_1$ в метрике пространства C^1-отображений, было трансверсально к $(n-1)$-мерным гиперплоскостям в $L \setminus W$. Тогда из стандартной аппроксимационной теоремы (см. 4.1 из [14]) следует, что существует отображение ψ достаточно малой окрестности Y множества $\bar{R}$ в пространстве $\mathbb{R}^n$, такое, что $\psi = h \circ \phi_1$ вне множества $R \setminus Q$, отображение ψ принадлежит классу C^∞ на множестве $\bar{W}$ и отображение ψ всюду на Y δ-близко к отображению $h \circ \phi_1$ в метрике пространства C^1-отображений.

Пусть p: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ — проекция, соответствующая координате, перпендикулярной $(n-1)$-мерным плоскостям. С помощью стандартных результатов теории Морса (см. [11] или

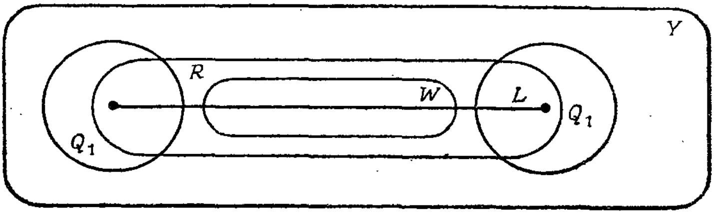


Рис. 3.

[12]) можно построить такую достаточно близкую аппроксимацию ψ' отображения ψ, что $\psi = \psi'$ вне множества $\bar{W}$, а в некоторой окрестности симплекса L все точки, в которых $d(p \circ \psi') = 0$, изолированные. Следовательно, образ при отображении ψ' касается семейства n-мериых гиперплоскостей только в изолированных точках. Пошевелив, если это необходимо, кривую L, можно добиться, чтобы ни одна из этих точек не принадлежала L. Положим теперь $\phi_1' = \phi_1$ вне Y и $\phi_1'(x) = h^{-1} \circ \psi'(x)$ для $x \in Y$. Отображение ϕ' трансверсально к слоям слоения U на множестве $Q_1 \cup L$. Более того, можно предположить, что аппроксимация была выбрана настолько хорошей, что ограничение отображения ϕ_1' на любой симплекс является вложением и образ любого симплекса принадлежит некоторой окрестности со структурой произведения. Заметим, что $\phi_1 = \phi_1'$ в некоторой окрестности концов симплекса L.

Осуществив подобные изменения для каждого симплекса из остова D_1, получим в конце концов отображение ϕ_2: $D \to \bar{M}$, которое трансверсально к слоям слоения U на множестве $Q \cup D_1$, причем ограничение ϕ_2 на любой симплекс из D является вложением, а образ каждого симплекса под действием отображения ϕ_2 целиком принадлежит некоторой окрестности со структурой произведения.

Перейдем теперь к двумерному остову. Пусть Q_2 — компактная окрестность объединения множеств Q и D_1. Пусть K — двумерный симплекс из D. Мы хотим изменить отображение ϕ_2 на внутренности этого симплекса так, чтобы у измененного отображения были только изолированные «грубые» (или «типичные» (generic)) касания со слоями слоения U. Пусть W' — окрестность множества особых точек в симплексе K, такая, что $W' \subset K \setminus Q_2$. Мы знаем, что существует такая окрестность V со структурой произведения, что $\phi(K) \subset V$. Пусть $h\colon V \to \mathbb{R}^n$ и $p\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ — такие же отображения, как и выше.

Используя аппроксимационную теорему, мы, как и выше, получим такое отображение $\psi_2\colon K \to \mathbb{R}^n$, что ψ_2 близко в C^1-топологии к отображению $h \circ \phi_2$, $\psi_2 = h \circ \phi_2$ на множестве $K \cap Q_2$, ψ_2 — отображение класса C^∞ на W' и все особые точки отображения ψ_2 по-прежнему сосредоточены во внутренности окрестности W'.

Теперь при помощи результатов из теории Морса мы заменим ψ_2 на отображение ψ_2', обладающее следующими свойствами:

(1) $\psi_2 = \psi_2'$ вне W' и ψ_2' — вложение K.

(2) Все критические точки функции $p \circ \psi_2'$ суть изолированные и невырожденные; они сосредоточены во внутренности W'. То есть критические точки являются максимумами, минимумами или седловыми точками.

(3) Отображение h^{-1} никакие две критические точки функции $p \circ \psi_2'$ не отображает в один и тот же слой в $\bar{M}$.

Выполнение условия (3) может быть достигнуто, потому что имеется не более, чем счетное число слоев, которые при отображении h^{-1} попадают в один и тот же слой на многообразии $\bar{M}$.

Пронумеруем теперь все двумерные симплексы из D: $K = K_0, K_1, \ldots, K_n$. Допустим, что мы уже изменили отображение ψ_2 на $K_0, \ldots, K_{-i1}$, теперь мы изменим ψ_2 на симплексе K_i так, чтобы ограничение $\psi_2^{(i)} | K_i$ удовлетворяло условиям (1), (2), (3) и еще одному условию:

(4) Никакая критическая точка отображения $p \circ \psi_2^{(i)}$ не переводится посредством отображения h_i^{-1} в тот же самый слой, что одна из критических точек в симплексах $K_0, K_1, \ldots, K_{i-1}$.

Это может быть достигнуто по той же причине, что и выполнение (3).

Теперь зададим отображение $\phi_3\colon D \to \bar{M}$ по формуле $\phi_3 | K_i = h_i^{-1} \circ \psi_2^{(i)}$. Тогда ϕ_3 — иммерсия и, как и прежде, индуцирует семейство кривых на D. Из конструкции отображения ϕ_3 следует, что семейство кривых имеет только изолированные особенности и они могут быть только типа максимума, минимума [1]) или седловой точки. Кроме того, в силу (4), никакие две особенности не соединяются кривой.

Применим теперь к этой ситуации теорию Пуанкаре — Бендиксона (см. [6], стр. 186—192). Пусть $c\colon [0, \infty) \to D$ — одна из кривых, пересекающих границу ∂D. Пусть $\omega(c) = \{x \mid \exists t_0, t_1, \ldots$, такие, что $x = \lim\limits_{n\to\infty} c(t_n)\}$. Если $\omega(c) = x_0$ — единственная точка, то точка x_0 является одной из седловых точек, а для каждой седловой точки могут существовать только две такие кривые. Следовательно, можно найти кривую c', такую, что множество $\omega(c')$ состоит более чем из одной точки.

Предположим, что множество $\omega(c')$ содержит особую точку. Тогда $\omega(c')$ состоит из конечного числа особых точек и набора кривых, соединяющих их (см. теорему 4.2 на стр. 190 из [6]). Но в рассматриваемой ситуации никакие две особые точки не могут быть соединены кривой. Легко видеть также, что множество $\omega(c')$ отделено от границы ∂D, таким образом единственная возможность — это восьмерка с центром в особой точке. С другой стороны, если $\omega(c')$ состоит из неособых точек, то $\omega(c')$ — это окружность, которая является одной из индуцированных кривых на D (см. теорему 4.1, стр. 186 из [6]).

В любом случае множество $\phi_3(\omega(c'))$ — петля на одном слое слоения U, которая представляет собой нетривиальный элемент группы голономии этого слоя (см. [5], в частности 4.2). Но это противоречит тому факту, что каждый слой слоения U односвязен и, следовательно, имеет тривиальные голономии. Это завершает доказательство леммы (5.1).

Набросок доказательства следующей леммы мне сообщил в личной беседе С. П. Новиков.

(5.2) Лемма. *Пусть $f\colon M \to M$ — У-диффеоморфизм коразмерности один, для которого $NW(f) = M$. Тогда для любых точек $x, y \in \bar{M}$ слои $u(x)$ и $s(y)$ пересекаются по крайней мере в одной точке.*

Доказательство. Предположим без потери общности, что $\dim u(y) = 1$ (в противном случае рассмотрим диффеоморфизм f^{-1}). Метод доказательства состоит в том, чтобы, зафиксировав точку $y = y_0$, показать, что множество $Q = \{x \mid s(x) \cap u(y_0) \neq \varnothing\}$ является одновременно открытым и замкнутым в $\bar{M}$ и, следовательно, поскольку многообразие $\bar{M}$ связно, $Q = \bar{M}$.

Тот факт, что множество Q открыто, вытекает немедленно из локальной структуры произведения на многообразии $\bar{M}$ и из

[1]) То есть локально кривые выглядят как линии уровня функции в окрестности максимума или минимума. — *Прим. ред.*

следующего хорошо известного свойства слоений: объединение слоев, пересекающихся с заданным открытым множеством, открыто [16].

Следовательно, нам нужно только показать, что множество Q замкнуто. Пусть $p \in \overline{Q}$ (черта сверху обозначает замыкание), тогда ввиду наличия локальной структуры произведения точка p является пределом последовательности точек, лежащих в множестве $Q \cap u(p)$. Слой $u(p)$ — это кривая линия,

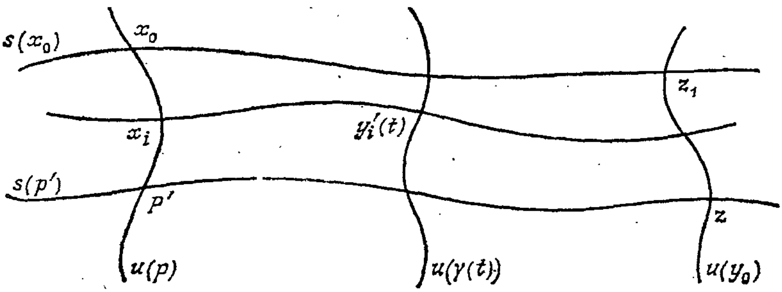


Рис. 4.

гомеоморфная $\mathbb{R}$, и мы зафиксируем на ней отношение порядка $<$. Пусть $x_0 \in Q \cap u(p)$ и $x_0 < p$. Поскольку множество Q открыто, то для того, чтобы показать, что $p \in Q$, достаточно установить, что точка

$$p' = \sup \{x \mid \text{если } x \geqslant y \geqslant x_0, \text{ то } y \in Q\}$$

лежит в множестве Q. Пусть $\gamma(t)$ — такая дуга в $s(x_0)$, для которой $\gamma(0) = x_0$ и $\gamma(1) = z_1 = s(x_0) \cap u(y_0)$.

Сделаем временно следующее предположение: Для всех $t \in [0, 1]$ и для всех тех $x \in u(p')$, для которых $x_0 \leqslant x < p'$, множество $s(x) \cap u(\gamma(t))$ не пусто, более того, если $\{x_i\}$ — любая возрастающая последовательность на полуинтервале $[x_0, p') \subset u(x_0)$, то последовательность точек $y_i'(t) = u(\gamma(t)) \cap \cap s(x_i)$ сходится на слое $u(\gamma(t))$. Мы покажем, что в этом случае $p' \in Q$. Пусть $\{x_i'\}$ — возрастающая последовательность на полуинтервале $[x_0, p')$, сходящаяся к точке p'. Тогда очевидно, что для малых t последовательность $\{y_i'(t)\}$ сходится к некоторой точке на слое $s(p')$. Из наличия структуры произведения вытекает, что множество тех t, для которых последовательность $\{y_i'(t)\}$ сходится к некоторой точке на слое $s(p)$, является одновременно открытым и замкнутым. Следовательно, в частности, если $z = \lim y_i'(1)$, то $z \in u(y_0) \cap s(p')$, поэтому точка p' лежит в множестве Q.

Если же введенное выше предположение ложно, мы получим противоречие, завершив тем самым доказательство. В этом случае существует такое $r \in [0, 1]$ и такая возрастающая последовательность $\{x_i\}$ на полуинтервале $[x_0, p')$, для которых последовательность $\{y_i\}$, где $y_i = u(\gamma(r)) \cap s(x_i)$, не сходится на слое $u(\gamma(r))$.

Заметим, что из леммы (5.1) следует, что слоение S — собственное, поэтому из леммы 1 § 3 в [5] вытекает, что для любой точки x множество $\bar{M} \setminus s(x)$ имеет две связные компоненты[1]). Отсюда следует, что последовательность y_i монотонна на линии $u(y_1)$.

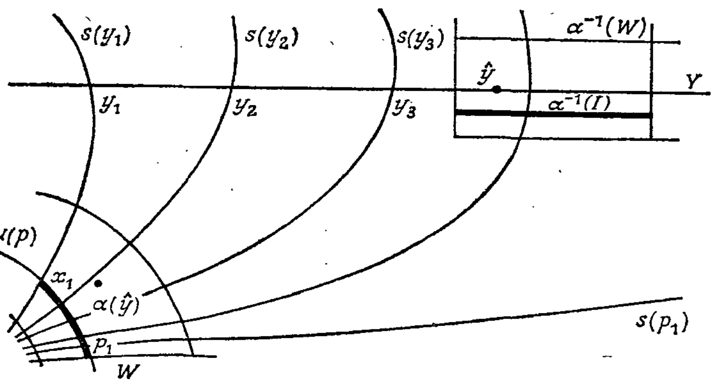


Рис. 5.

Пусть $\lim x_i = p_1 \in u(p')$. Рассмотрим некоторую окрестность $W \ni p_1$ со структурой произведения и предположим, что $\{x_i\} \subset W$. Пусть I обозначает сегмент $W \cap u(p_1)$.

Если точка $x \in I$ лежит между точками x_1 и p_1, то слой $s(x)$ пересекается со слоем $u(y_1)$, поскольку в противном слу-

[1]) Используется следующее свойство: тождественное вложение $s(x) \to \bar{M}$ является собственным отображением, т. е. для любого компакта $K \subset \bar{M}$ пересечение $K \cap s(x)$ компактно в топологии слоя. (Это следует из леммы (5.1).)

Проведем через какую-нибудь точку слоя $s(x)$ небольшую дугу, трансверсально пересекающую слой. Локально (т. е. в пределах маленькой координатной окрестности, в которой слои задаются уравнением $x_n = \text{const}$) концы этой дуги лежат по разные стороны слоя $s(x)$. Докажем, что и во всем $\bar{M}$ не существует пути, который соединял бы эти две точки и не пересекал бы $s(x)$. Допустим, что такой путь существует, «замкнем» его с помощью нашей дуги, сгладим полученную замкнутую кривую и избавимся (путем приведения в общее положение) от возможных самопересечений. Получим некоторую замкнутую кривую γ, трансверсально пересекающую $s(x)$ ровно в одной точке. Так как $\bar{M}$ односвязно, то на γ можно натянуть диск, гладко иммерсированный в $\bar{M}$. Путем малого возчае слой $u(y_1)$ лежал бы целиком в одной из двух компонент множества $\bar{M} \setminus s(x)$, в то же время в каждой из компонент содержатся точки из последовательности $\{x_i\}$ и для всех i слои $s(x_i)$ и $u(y_1)$ пересекаются. Аналогичное рассуждение показывает, что $s(p_1) \cap u(y_1) = \varnothing$. Пусть Y обозначает объединение точки y_1 с той компонентой линии $u(y_1) \setminus y_1$, которая содержит остальные точки y_i. Тогда имеется гомеоморфизм j полуинтервала $[x_1p_1) \subset I$ в Y, задаваемый соотношением $j(x) = s(x) \cap u(y_1)$. Непрерывность j и обратного отображения вытекает из того, что отображение j сохраняет порядок, кроме того, отображение j является инъективным в соответствии с леммой (5.1) и отображением «на», поскольку множество Y связно. Заметим, что $s(j(x)) = s(x)$.

Из замечания, приведенного после следствия (1.10), вытекает, что множество $\{\alpha(Y) \mid \alpha \in \pi_1(M)\}$ всюду плотно на многообразии $\bar{M}$ и, следовательно, найдутся такие элементы $\hat{y} \in Y$ и $\alpha \in \pi_1(M)$, что $\alpha(\hat{y}) \in W$. Рассмотрим отображение $h\colon I \to Y$, задаваемое формулой $h(x) = s(\alpha^{-1}x) \cap u(y_1)$. Определим теперь отображение $g\colon I \to I$ следующим образом: $g(x) = j^{-1} \circ h(x)$. Поскольку I — сегмент, отображение g имеет неподвижную точку $\hat{x}$. Из определений вытекает, что $s(g(x)) = s(\alpha^{-1}x)$, поэтому так как $g(\hat{x}) = \hat{x}$, то мы имеем $s(\hat{x}) = s(\alpha^{-1}\hat{x})$. Но если $P\colon \bar{M} \to M$ — накрывающее отображение, то $P(\hat{x}) = P(\alpha^{-1}\hat{x})$, а это противоречит утверждению из предложения (1.4) об инъективности ограничения проекции P на слой $s(\hat{x})$.

(5.3) Теорема. *Пусть $f\colon M \to M$ — У-диффеоморфизм коразмерности один и $NW(f) = M$, тогда диффеоморфизм f разложимый.*

Доказательство. Пусть $u_0 \in U$ и $s_0 \in S$, тогда отображение $h\colon \bar{M} \to u_0 \times s_0$, задаваемое формулой $h(x) = (s(x) \cap u_0, u(x) \cap s_0)$, — это требуемый гомеоморфизм.

6. Теперь мы можем доказать, что У-диффеоморфизм коразмерности один, для которого множество неблуждающих точек совпадает со всем многообразием, топологически сопряжен с гиперболическим автоморфизмом тора. Сначала мы покажем, что фундаментальная группа многообразия, допускаю-

---

мущения, ничего не меняющего возле γ, можно достичь, чтобы во всех точках, где диск пересекает $s(x)$, это пересечение было трансверсальным. Оно должно быть компактным гладким одномерным многообразием, т. е. состоять из нескольких кривых, каждая из которых либо замкнута, либо соединяет две точки, лежащие на крае γ диска. Это противоречит тому, что на γ имеется ровно одна точка пересечения с $s(x)$. — *Прим. ред.*

щего такой диффеоморфизм, является свободной абелевой и что диффеоморфизм является метрически разложимым.

(6.1) Предложение. *Если f: $M \to M$ — разложимый У-диффеоморфизм коразмерности один, то группа $\pi_1(M)$ является свободной абелевой.*

Доказательство. Предположим, что $\dim E^u = 1$, тогда факторпространство S гомеоморфно прямой линии. Группа $\pi_1(M)$ действует гомеоморфизмами на пространстве S. Эти гомеоморфизмы действуют свободно (без неподвижных точек), потому что если $\alpha \neq 0$ и $\alpha(s) = s$, то для любой точки $x \in s$ равенство $P(x) = P(\alpha x)$ противоречит предложению (1.4).

Более того, поскольку f — диффеоморфизм, то из следствия (1.10) вытекает, что любая орбита группы $\pi_1(M)$ плотна в S. Следовательно, по теореме 3 из [17] группа $\pi_1(M)$ — свободная абелева[1]).

(6.2) Предложение. *Пусть f: $M \to M$ — У-диффеоморфизм, причем $NW(f) = M$ и $\dim E^u = 1$, тогда диффеоморфизм $\bar{f}$ метрически разложим.*

Доказательство. Выберем некоторую базисную точку $p \in M$ и обозначим через $\bar{f}$ поднятие f: $(M, p) \to (M, f(p))$.

Ло теореме (5.3) диффеоморфизм f разложимый, поэтому факторпространство S гомеоморфно прямой $\mathbb{R}$. Мы должны построить полную метрику на факторпространстве S, по отношению к которой отображение $\bar{f}^{-1}$ является сжатием.

Пусть s_1, $s_2 \in S$, тогда существует естественное отображение $T(s_1, s_2)$: $s_1 \to s_2$, соответствующее проекции вдоль слоев слоения U. Мы определим метрику ρ на S следующим образом: $\rho(s, s') = \sup_{x \in s} d(u(x); x, T(s, s')(x))$. Необходимо проверить несколько свойств.

Для каждого элемента $\alpha \in \pi_1(M, p)$ мы определим гомеоморфизм многообразия $\bar{M}$ на себя, $T(\alpha)(x) = \alpha s(x) \cap u(x)$. По предложению (6.1) группа $\pi_1(M)$ абелева, поэтому если

---

[1]) В конце доказательства использован следующий факт: если конечно порожденная группа π свободно действует на прямой линии $\mathbb{R}$ и любая ее орбита плотна в $\mathbb{R}$, то π — свободная абелева группа. Пользуясь естественным порядком в $\mathbb{R}$, упорядочим π, полагая $\alpha > \beta$, если для каких-нибудь (а значит, и для всех) t будет $\alpha t > \beta t$. Очевидно, что это действительно упорядочение и что оно линейное (т. е. для любых α, $\beta \in \pi$ либо $\alpha > \beta$, либо $\alpha = \beta$, либо $\alpha < \beta$), а также что оно архимедово (т. е. если $\alpha > 1$ и $\beta > 1$, где 1 — единица группы, то существует такое n, что $\alpha^n > \beta$). По теореме Гёльдера [25*] π изоморфна некоторой подгруппе аддитивной группы $\mathbb{R}$. Теперь из конечной порожденности π сразу следует, что π — свободная абелева. — *Прим. ред.*

$\alpha, \beta \in \pi_1(M, p)$, то

$$T(\alpha)(\beta x) = \alpha s(\beta x) \cap u(\beta x) = \beta\alpha s(x) \cap \beta u(x) = \beta T(\alpha)(x).$$

Предположим теперь, что $s' = \alpha s$, тогда отображение $T(s, s')$ совпадает с ограничением гомеоморфизма $T(\alpha)$ на слой s, поэтому

$$\rho(s, s') = \sup_{x \in s} d(u(x);\ x,\ T(\alpha)(x)) \leqslant \sup_{x \in \bar{M}} d(u(x);\ x,\ T(\alpha)(x)).$$

Но для любого элемента $\beta \in \pi_1(M, p)$

$$d(u(\beta x);\ \beta x,\ T(\alpha)(\beta x)) = d(\beta u(x);\ \beta x,\ \beta T(\alpha)(x)) = \\ = d(u(x);\ x,\ T(\alpha)(x)),$$

так как β — изометрия относительно метрики на многообразии $\bar{M}$. Таким образом, если K — компактная фундаментальная область для накрытия $\bar{M}$, то

$$\sup_{x \in \bar{M}} d(u(x);\ x,\ T(\alpha)(x)) = \sup_{x \in K} d(u(x);\ x,\ T(\alpha)(x)) < \infty,$$

поскольку K — компакт. Следовательно, в этом случае метрика $\rho(s, s')$ конечна.

Теперь зафиксируем слой s. Из следствия (1.10) вытекает, что множество $\{\alpha s \mid \alpha \in \pi_1(M, p)\}$ плотно в S. Для произвольного слоя s' выберем такой элемент $\alpha \in \pi_1(M, p)$, чтобы слой s' лежал между слоями s и αs, тогда

$$\rho(s, s') = \sup_{x \in s} d(u(x);\ x,\ T(s, s')(x)) \leqslant \\ \leqslant \sup_{x \in s} d(u(x);\ x,\ T(\alpha)(x)) = \rho(s, \alpha s) < \infty.$$

Таким образом, метрика $\rho(s, s')$ всегда конечна. Из определения ρ легко следует, что это действительно метрика. Мы должны проверить, что метрика ρ индуцирует на S естественную топологию.

Если u — слой слоения U, то естественная топология на S индуцируется метрикой d_u, которая определяется следующим образом: $d_u(s, s') = d(u;\ y,\ y')$, где $y = u \cap s$ и $y' = u \cap s'$. Положим

$$B_r(s_0) = \{s \mid \rho(s, s_0) < r\} \quad \text{и} \quad B'_r(s_0) = \{s \mid d_u(s, s_0) < r\},$$

Очевидно, что $B_r(s_0) \subset B'_r(s_0)$. Следовательно, нам остается показать, что для любых r и s_0 найдется такое $t > 0$, для которого $B'_t(s_0) \subset B_r(s_0)$.

Если $\alpha \in \pi_1(M, p)$, то $\bar{f} \circ \alpha \circ \bar{f}^{-1} = f_*(\alpha) \in \pi_1(M, f(p))$. Определим отображение $T(f_*^{-1}(\alpha))$ так же, как $T(\alpha)$. Легко видеть, что $T(f_*^{-1}(\alpha)) = \bar{f}^{-1} \circ T(\alpha) \circ \bar{f}$.

Пусть $y = \bar{f}^n(x)$, тогда по лемме (1.2)

$$d(u(x);\ x,\ T(f_*^{-n}(\alpha))(x)) = d(u(x);\ x,\ \bar{f}^{-n} \circ T(\alpha) \circ \bar{f}^n(x)) =$$
$$= d(\bar{f}^{-n}u(y);\ \bar{f}^{-n}(y),\ \bar{f}^{-n} \circ T(\alpha)(y)) \leqslant C \cdot \lambda^n d(u(y);\ y, T(\alpha)(y)).$$

Поэтому

$$\sup_{x \in \bar{M}} d(u(x);\ x,\ T(f_*^{-n}(\alpha))(x)) \leqslant C \cdot \lambda^n \sup_{y \in \bar{M}} d(u(y);\ y,\ T(\alpha)(y)).$$

Следовательно, мы можем найти такое $m > 0$, что для элемента $f_*^{-m}(\alpha) = \alpha' \in \pi_1(M,\ f^{-m}(p))$ мы имеем

$$\sup_{x \in \bar{M}} d(u(x);\ x,\ T(\alpha')(x)) < r.$$

Элемент α' передвигает слой s_0 в одну сторону, а α'^{-1} — в противоположную. Положим $s_1 = \alpha' s_0$ и $s_2 = \alpha'^{-1} s_0$. Из определения элемента α' мы имеем $\rho(s_0, s_1) < r$ и $\rho(s_0, s_2) < r$. Положим $t = \min\{d_u(s_0, s_1),\ d_u(s_0, s_2)\}$, тогда $B'_t(s_0) \subset B_r(s_0)$. Таким образом, топология, индуцированная метрикой ρ на S, является естественной. Предположим, что $\{s_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность слоев в S, удовлетворяющая критерию Коши в метрике ρ, тогда поскольку $d_u \leqslant \rho$, то эта последовательность удовлетворяет критерию Коши в полной метрике d_u и, следовательно, имеет предел. Таким образом, метрика ρ полна.

Нам осталось только проверить, что отображение $\bar{f}^{-1}$ является сжимающим в метрике ρ и что группа $\pi_1(M, p)$ действует изометриями на S в метрике ρ. Но так как любой элемент $\alpha \in \pi_1(M, p)$ является изометрией относительно римановой метрики на многообразии $\bar{M}$, то из определения метрики ρ немедленно вытекает, что $\rho(s, s') = \rho(\alpha s, \alpha s')$. Кроме того, по лемме (1.2)

$$\rho(\bar{f}^{-n}s,\ \bar{f}^{-n}s') = \sup_{x \in \bar{f}^{-n}s} d(u(x);\ x,\ T(\bar{f}^{-n}s,\ \bar{f}^{-n}s')(x)) =$$
$$= \sup_{x \in s} d(u(\bar{f}^{-n}(x));\ \bar{f}^{-n}(x),\ \bar{f}^{-n}T(s,\ s')(x)) \leqslant$$
$$\leqslant C \cdot \lambda^n \sup_{x \in s} d(u(x);\ x,\ T(s, s')(x)) = C \cdot \lambda^n \cdot \rho(s, s'),$$

поэтому отображение $\bar{f}^{-1}$ сжимает.

(6.3) Теорема. *Пусть $f\colon M \to M$ — У-диффеоморфизм коразмерности один, причем $NW(f) = M$, тогда диффеоморфизм f топологически сопряжен с гиперболическим автоморфизмом тора. Если g — другой такой диффеоморфизм, то f и g топологически сопряжены тогда и только тогда, когда они π_1-сопряжены.*

Доказательство. Согласно предложению (6.2), диффеоморфизм f (или f^{-1}) метрически разложим и, следовательно, по теореме (4.3) топологически сопряжен с эндоморфизмом инфранильмногообразия. По предложению (6.1) группа $\pi_1(M)$ абелева, поэтому в действительности диффеоморфизм f топологически сопряжен с гиперболическим автоморфизмом тора. Если g — другой такой диффеоморфизм, то по теореме (3.2) диффеоморфизмы f и g сопряжены тогда и только тогда, когда они π_1-сопряжены.

Если $\dim M \leqslant 3$, то любой У-диффеоморфизм имеет коразмерность один. Поэтому мы имеем следующее

(6.4) Следствие. *Если $f\colon M \to M$ — У-диффеоморфизм, причем $NW(f) = M$ и $\dim M \leqslant 3$, то диффеоморфизм f топологически сопряжен гиперболическому автоморфизму тора. Если g — другой такой диффеоморфизм, то f и g топологически сопряжены тогда и только тогда, когда они π_1-сопряжены.*

7. В случае двумерных многообразий предположение о том, что $NW(f) = M$, можно исключить. С. Смейл сообщил мне прямое доказательство того факта, что для любого У-диффеоморфизма двумерного многообразия все точки являются неблуждающими. Мы приводим ниже, по существу, его доказательство.

В этом параграфе рассматриваются диффеоморфизмы, удовлетворяющие следующим двум аксиомам.

Аксиома А. (1) *На множестве $NW(f)$ имеется гиперболическая структура.*

(2) *Множество* Per (f) *плотно в $NW(f)$.*

Аксиома В. *Если Ω_1 и Ω_2 — базисные множества и $W^s(\Omega_1) \cap W^u(\Omega_2) \neq \varnothing$, то найдутся такие периодические точки $p \in \Omega_1$, $q \in \Omega_2$, для которых многообразия $W^s(p)$ и $W^u(q)$ имеют точку трансверсального пересечения.*

Эти свойства и диффеоморфизмы, обладающие ими, рассматриваются подробно в статье Смейла [19]. Мы считаем известными терминологию и результаты этой работы. Из определений и предложения (1.7) легко следует, что все У-диффеоморфизмы удовлетворяют аксиомам А и В.

(7.1) Предложение. *Пусть f: $M \to M$ — диффеоморфизм, удовлетворяющий аксиомам* А *и* В, *и $p \in \Omega \subset NW(f)$, где Ω — базисное множество. Тогда многообразия $W^s(p)$ и $W^u(p)$ плотны в компоненте точки p множества Ω*[1]).

На множестве $NW(f)$ имеется локальная структура произведения (см. 7.4) из [19]), поэтому доказательство этого предложения в точности повторяет доказательства леммы (1.8) и предложения (1.9).

Пусть M^2 — двумерное компактное многообразие без края.

(7.2) Предложение. *Пусть f: $M^2 \to M^2$ — У-диффеоморфизм. Тогда $NW(f) = M^2$.*

Доказательство. Предположим сначала, что многообразие M^2 ориентируемо. Тогда поскольку оно допускает не обращающееся в нуль поле одномерных направлений, то многообразие M^2 должно быть тором.

Так как диффеоморфизм f удовлетворяет аксиомам А и В, мы можем применить теорему о спектральном разложении из [19]. Возьмем базисное множество Λ, которое является стоком. Предположим, что $\Lambda \neq M^2$, и получим отсюда противоречие. Согласно предложению 5.1 из [20], существует такая компактная окрестность V множества Λ, для которой $f(V) \subset \subset \operatorname{int}(V)$, и если $\Lambda \neq M^2$, то $V \neq M^2$. Мы можем выбрать окрестность V таким образом, чтобы граница ∂V состояла из конечного числа окружностей, вложенных в многообразие M^2.

Мы хотим показать, что $\operatorname{rank} \check{H}_1(V) \geqslant 2$. Предположим, что это не так, тогда легко проверить, что отображение

---

[1]) Не совсем ясно, что́ в данном случае означает слово «компонента». Во всяком случае, ситуация здесь такова. Каждое базисное множество Ω_i состоит из конечного числа непересекающихся замкнутых подмножеств $\Omega_{i1}, \ldots, \Omega_{ik_i}$, которые циклически переходят друг в друга под действием f, причем $f^{k_i}\,|\,\Omega_{ij}$ обладает свойством топологического перемешивания (перемешивания областей); наконец, если $p \in \Omega_{ij}$, то $W^s(p)$ и $W^u(p)$ всюду плотны в Ω_{ij} (точнее: если p, $q \in \Omega_{ij}$, то замыкание $\overline{W^s(p) \cap W^u(q)} = \Omega_{ij}$). Из этого можно было бы заключить, что автор понимает под «компонентой» точки $p \in \Omega_i$ то из множеств Ω_{ij}, которому она принадлежит. Следует, однако, заметить, что у Смейла в [19] под «компонентой» понимается все Ω_i; при этом Смейл ошибочно утверждает, будто $W^s(p)$ и $W^u(p)$ плотны в Ω_i. Ниже Френкс ссылается на это неверное утверждение, однако на самом деле здесь, как и у Смейла, эта небрежность ничего по существу не портит. — *Прим. ред.*

f_*: $H_1(V) \to H_1(V)$ — изоморфизм [1]), и, заменяя, если необходимо, f на f^2, мы можем предположить, что f_*: $H_1(V) \to H_1(V)$ — тождественное отображение. Пусть p — периодическая точка в Λ. Тогда из того, что $\bigcap\limits_{n \geq 0} f^n(V) = \Lambda$ (по (5.1) из [20]), вытекает, что $W^u(p) \subset \Lambda$. Поскольку многообразие $W^s(p)$ всюду плотно в множестве Λ по предложению (7.1), то его пересечение с многообразием $W^u(p)$ плотно в $W^u(p)$ [2]).

Поскольку $NW(f) = NW(f^n)$ для всех n, мы можем предположить, что p — неподвижная точка диффеоморфизма f.

Пусть $\gamma(t)$ — петля на многообразии M^2, состоящая из двух дуг, одна — на многообразии $W^u(p)$, другая — на многообразии $W^s(p)$, причем $\gamma(0) = \gamma(1) = p$. Последовательное применение диффеоморфизма f уменьшит дугу на многообразии $W^s(p)$, следовательно, если мы заменим петлю γ на петлю $f^n \circ \gamma$ при некотором большом n, то образ новой петли будет лежать целиком в окрестности V.

Пусть P: $\bar{V} \to V$ — односвязная накрывающая для окрестности V и $\bar{f}$: $\bar{V} \to \bar{V}$ — поднятие диффеоморфизма f. Мы возьмем p в качестве базисной точки на V и $p_1 \in P^{-1}(p)$ в качестве базисной точки на $\bar{V}$. Поднятием петли γ является некоторая дуга $\bar{\gamma}$ на многообразии $\bar{V}$, причем $\bar{\gamma}(0) = p_1$; положим $p_2 = \bar{\gamma}(1)$. Пусть $\gamma'(t) = f \circ \gamma(t)$. Тогда так как f_*: $H_1(V) \to H_1(V)$ — тождественное отображение, то петля γ' поднимается в дугу $\bar{\gamma}'$ на многообразии $\bar{V}$, причем $\bar{\gamma}'(0) = p_1$ и $\bar{\gamma}'(1) = p_2$.

---

[1]) Если $\operatorname{rank} H_1(V) = 0$, то это ясно. Если $\operatorname{rank} H_1(V) = 1$, то область V гомеоморфна цилиндру $S^1 \times I$ (S^1 — окружность, I — отрезок), и при вложении j: $V \to M^2$ гомоморфизм j_*: $H_1(V) \to H_1(M^2)$ — либо мономорфизм, либо отображение в нуль. Если бы в первом случае отображение $(f|V)_*$: $H_1(V) \to H_1(V)$ не было изоморфизмом, то нетрудно видеть, что и f_*: $H_1(M^2) \to H_1(M^2)$ не могло бы быть изоморфизмом. Во втором случае V можно «подвять» на накрывающую плоскость $\bar{M}^2$, и там получится «кольцо» V', ограниченное двумя окружностями — внутренней C_1 и внешней C_2. Обозначим через U' всю замкнутую область, ограниченную на плоскости окружностью C_2, а образ U' при проекции на тор — через U. На U' эта проекция инъективна, ибо нетрудно убедиться, что в противном случае окружность C_2 пересекалась бы с одним из своих образов под действием скольжений, а тогда одна из кривых, ограничивающих V на торе, имела бы самопересечения. Наконец, ясно, что $H_1(U) = 0$ и $fU \subset U$, поэтому в данном случае можно проводить дальнейшие рассуждения, заменив V на U.— *Прим. ред.*

[2]) В свете одного из предыдущих примечаний ясно, что первое из этих двух утверждений не всегда справедливо, но это не отражается на справедливости второго. Легко видеть, что $W^u(p)$ в данном случае целиком содержится в одном из тех множеств, на которые распадается Λ подобно тому, как Ω_i в упомянутом примечании распадается на Ω_{ij}. — *Прим. ред.*

Слоения в окрестности V поднимаются в слоения на $\overline{V}$ (слои этих слоений будут обозначаться теми же буквами, что и слои слоений на многообразии $\overline{M}$). Дуга $\bar{\gamma}$ состоит из дуги I на слое $u(p_1)$ и дуги J на слое $s(p_2)$. Если q — общий конец этих двух дуг, то $q \in u(p_1) \cap s(p_2)$. Аналогично, $\bar{f}(q) \in u(p_1) \cap s(p_2)$, поэтому дуга $I' = \bar{f}(I)$ пересекает слой $s(p_2)$ в двух местах. Существует вложение j: $V \to M^2$. Его поднятие $\bar{j}$: $\overline{V} \to \overline{M}^2$ сохраняет слоения. Следовательно, $\bar{j}(I')$ — дуга на слое $u(\bar{j}(p_1))$, пересекающая слой $s(\bar{j}(p_2))$ в двух местах, а именно $\bar{j}(q)$ и $\bar{j}(\bar{f}(q))$. Однако по лемме (5.1) это невозможно. Следовательно, мы получили противоречие с тем, что $\operatorname{rank} H_1(V) < 2$.

Пусть теперь W — замыкание дополнения к окрестности V на многообразии M^2. Пусть $W = \bigcup W_i$, где W_i — связные компоненты множества W. Имеем $f^{-1}(W) \subset \operatorname{int}(W)$ и, заменяя, если необходимо, f^{-1} на f^{-n} для некоторого большого n, мы можем утверждать, что $f^{-1}(W_i) \subset \operatorname{int}(W_i)$ для всех i. Тогда точно такое же рассуждение, как выше, показывает, что $\operatorname{rank} H_1(W_i) \geqslant 2$ для всех i.

Если $\chi(M^2)$ — эйлерова характеристика, то мы имеем

$$0 = \chi(M^2) = \chi(V) + \sum \chi(W_i) - \chi(\partial V).$$

Но числа $\chi(V)$ и $\chi(W_i)$ отрицательны, поскольку $\operatorname{rank} H_1(V) \geqslant 2$ и $\operatorname{rank} H_1(W_i) \geqslant 2$ и $H_2(V) = H_2(W_i) = 0$. Так как граница ∂V состоит из конечного числа окружностей, то $\chi(\partial V) = 0$. Следовательно, величина $\chi(V) + \Sigma\chi(W_i) - \chi(\partial V)$ строго отрицательна.

Таким образом, мы получили противоречие с предположением о том, что $\Lambda \neq M^2$. Следовательно, $NW(f) = M^2$.

Предположим теперь, что многообразие M^2 неориентируемо. Тогда для поднятия $\tilde{f}$: $\widetilde{M}^2 \to \widetilde{M}^2$ диффеоморфизма f на ориентируемую накрывающую имеем $NW(\tilde{f}) = \widetilde{M}^2$. Поэтому по предложению (1.7) множество $\operatorname{Per}(\tilde{f})$ плотно в $\widetilde{M}^2$, и, следовательно, множество $\operatorname{Per}(f)$ плотно в M^2. Отсюда, очевидно, вытекает, что $NW(f) = M^2$.

(7.3) Теорема. *Пусть f: $M^2 \to M^2$ — У-диффеоморфизм. Тогда диффеоморфизм f топологически сопряжен с гиперболическим автоморфизмом тора. Любые два такие диффеоморфизма топологически сопряжены тогда и только тогда, когда они π_1-сопряжены.*

Доказательство вытекает немедленно из предложения (7.2) и следствия (6.4).

8. В этом последнем параграфе мы применим некоторые полученные результаты для изучения растягивающих отображений, т. е. таких У-накрытий, для которых $TM = E^u$. Растягивающие отображения подробно изучались М. Шубом в [18], и мы предполагаем некоторое знакомство с этой работой.

(8.1) Теорема. *Растягивающие отображения являются π_1-накрытиями.*

Это, по существу, теорема 4 из работы Шуба [18].

(8.2) Теорема. *Пусть f: $M \to M$ — растягивающее отображение и группа $\pi_1(M)$ имеет нильпотентную подгруппу конечного индекса. Тогда растягивающее отображение f топологически сопряжено с растягивающим эндоморфизмом инфранильмногообразия. Если группа $\pi_1(M)$ нильпотентна, то f сопряжено с растягивающим эндоморфизмом нильмногообразия, а если $\pi_1(M)$ абелева, то f сопряжено с растягивающим эндоморфизмом тора.*

Доказательство. Шуб показал в [18], что $\pi_1(M)$ — группа без кручения. Следовательно, согласно предложению (3.5), найдется эндоморфизм инфранильмногообразия g: $M' \to M'$ π_1-сопряженный с отображением f. $\pi_i(M) = \pi_i(M') = 0$ при $i > 1$, поэтому по стандартной гомотопической теореме ([21], стр. 549), существует такая гомотопическая эквивалентность h': $M' \to M$, что отображение h'_*: $\pi_1(M') \to \pi_1(M)$ является π_1-сопряжением отображений g и f. Поскольку f — π_1-накрытие, существует гомотопное h' отображение h: $M' \to M$, для которого $f \circ h = h \circ g$.

Пусть N — односвязная нильпотентная группа Ли, накрывающая M', и пусть $\bar{f}$: $\bar{M} \to \bar{M}$, $\bar{g}$: $N \to N$ и $\bar{h}$: $N \to \bar{M}$ — поднятия отображений f, g и h соответственно. Тогда $\bar{f} \circ \bar{h} = \bar{h} \circ \bar{g}$. Обозначим через Σ алгебру Ли группы N и через $\exp$: $\Sigma \to N$ — экспоненциальное отображение. Тогда отображение $k = \bar{h} \circ \exp$ удовлетворяет следующему соотношению: $\bar{f} \circ k = k \circ d\bar{g}$, где $d\bar{g}$: $\Sigma \to \Sigma$ — дифференциал отображения $\bar{g}$ в единице группы N.

Отсюда вытекает, что $\bar{f}^n \circ k = k \circ d\bar{g}^n$ при всех n. Мы хотим показать, что все собственные значения отображения $d\bar{g}$ по модулю больше единицы. Предположим, что отображение $d\bar{g}$ имеет такое собственное значение λ, что $|\lambda| \leqslant 1$. Тогда если $x \in \Sigma$ — соответствующий собственный вектор, то $\|d\bar{g}^n(x)\| \leqslant \|x\|$ при всех $n \geqslant 0$. Поскольку $\bar{f}$ — растягивающее отображение, то для всех точек $y \in \bar{M}$, кроме базисной точки p, точка $\bar{f}^n(y)$ стремится к бесконечности при $n \to \infty$

(т. е. для любого компактного подмножества в $\bar{M}$ при достаточно большом n точка $\bar{f}^n(y)$ лежит вне этого подмножества). Следовательно, поскольку $f^n \circ k = k \circ d\bar{g}^n$, то $k(x) = p$. Аналогичное рассуждение показывает, что для любого вещественного числа r $k(rx) = p$. Это противоречит утверждению леммы (3.4) о том, что отображения $\bar{h}$ и, следовательно, k — собственные (отображение exp — диффеоморфизм, см. [8], стр. 136) [1]).

Таким образом, дифференциал $d\bar{g}$ — растягивающее отображение, и легко вывести, что g — также растягивающее отображение. По теореме (8.1) отображение g — π_1-накрытие, поэтому по теореме (3.2) отображения f и g топологически сопряжены.

В связи с теоремой (8.2) интересно выяснить, какого рода группы могут быть фундаментальной группой многообразия, допускающего растягивающее отображение.

Если имеется конечно порожденная группа и некоторое множество ее образующих, то функция роста $\gamma(s)$ для группы определяется как количество различных элементов группы, которые могут быть записаны через образующие с помощью слов длины $\leqslant s$. Группа имеет полиномиальный рост, если функцию $\gamma(s)$ можно мажорировать полиномом.

(8.3) Теорема. *Если f: $M \to M$ — растягивающее отображение, то группа $\pi_1(M)$ имеет полиномиальный рост.*

Доказательство. Пусть P: $(\bar{M}, p) \to (M, p_0)$ — односвязное накрытие. Выберем систему образующих $\{\alpha_i\}$ группы $\pi_1(M)$ и положим $\mu = \max d(p, \alpha_i(p))$. Пусть функция множеств $\#(\ )$ ставит в соответствие любому конечному множеству число элементов в этом множестве; обозначим через $B(r)$ шар радиуса r с центром в точке p на многообразии $\bar{M}$. Положим $L = \{\alpha(p) \mid \alpha \in \pi_1(M)\}$.

Если $\gamma(s)$ — функция роста группы $\pi_1(M)$, соответствующая образующим $\{\alpha_i\}$, то мы имеем $\gamma(s) \leqslant \#(L \cap B(\mu s))$ для всех s.

Из леммы (1.2) следует, что $d(\bar{f}^n(x), \bar{f}^n(y)) \geqslant C\lambda^{-n} d(x, y)$ для любых $x, y \in \bar{M}$. Следовательно, заменяя f на f^N, где N выбрано так, чтобы $C\lambda^{-N} > 2$, мы можем предположить, что $d(\bar{f}^n(x), \bar{f}^n(y)) \geqslant 2^n d(x, y)$.

Выберем такое натуральное $t > 1$, чтобы шар $B(\mu t)$ был фундаментальной областью, и положим

$$q = \max_{x \in M} \# \left(P^{-1}(x) \cap B(\mu t)\right).$$

[1]) Или [23*], стр. 263. — *Прим. ред.*

Мы хотим получить оценку величины $\#(L \cap \bar{f}^n(B(\mu t))) = \#(\bar{f}^{-n}(L) \cap B(\mu t))$. Обозначим $k = \deg f$, тогда $k > 1$. Множество $\bar{f}^{-n}(p_0)$ на многообразии M содержит k^n точек [1]). Поскольку $\bar{f}^{-n}(L) = P^{-1}(f^{-n}(p_0))$, то мы имеем $\#(\bar{f}^{-n}(L) \cap B(\mu t)) \leqslant qk^n$. Таким образом, $\#(L \cap \bar{f}^n(B(\mu t))) \leqslant qk^n$.

Легко проверить, что $\bar{f}^n(B(\mu t)) \supset B(2^n \mu t)$ и, следовательно, $\#(L \cap B(2^n \mu t)) \leqslant \#(L \cap \bar{f}^n(B(\mu t)))$. Сопоставление этих неравенств дает

$$\gamma(2^n t) \leqslant \#(L \cap B(2^n \mu t)) \leqslant \#(L \cap \bar{f}^n(B(\mu t))) \leqslant q \cdot k^n.$$

Выберем теперь такое натуральное m, что $2^m > k$ и $t^m > q$. Тогда

$$\gamma(2^n t) \leqslant qk^n < 2^{mn} t^m = (2^n t)^m \quad \text{при всех} \quad n > 0.$$

Напомним, что функция $\gamma(s)$ монотонно растет, и рассмотрим произвольное натуральное $s > 2^m \cdot t$. Пусть $2^i t \leqslant s < 2^{i+1} t$, где $i \geqslant m$. Тогда мы имеем

$$\gamma(s) \leqslant \gamma(2^{i+1} t) \leqslant (2^{i+1} t)^m = 2^{mi+m} t^m.$$

Поскольку $i \geqslant m$, то $2^{mi+m} t^m \leqslant 2^{mi+i} t^{m+1} = (2^i t)^{m+1} \leqslant s^{m+1}$. Таким образом, для всех $s > 2^m t$ мы имеем $\gamma(s) \leqslant s^{m+1}$. Положим $c = \max\limits_{s \leqslant 2^m t} \gamma(s)$. Имеем $\gamma(s) \leqslant s^{m+1} + c$, поэтому функция $\gamma(s)$ имеет полиномиальный рост.

(8.4) Теорема. *Пусть f: $M \to M$ — растягивающее отображение, и группа $\pi_1(M)$ имеет разрешимую подгруппу конечного индекса. Тогда отображение f топологически сопряжено с растягивающим эндоморфизмом инфранильмногообразия.*

Доказательство. Пусть G — разрешимая подгруппа конечного индекса в группе $\pi_1(M)$. Тогда поскольку $\pi_1(M)$ — конечно порожденная группа, то подгруппа G тоже конечно порождена. Следовательно, по теореме (8.3) подгруппа G должна иметь полиномиальный рост. Из результатов Дж. Милнора и Дж. Вольфа (см. [22]) вытекает, что разрешимая группа с

---

[1]) Все, что здесь требуется, — это что число k прообразов $f^{-1}(x)$ одинаково для всех $x \in M$, тогда как для того, чтобы говорить о степени, нужно априори предположить ориентируемость. — *Прим. ред.*

полиномиальным ростом имеет нильпотентную подгруппу конечного индекса. Следовательно, группа $\pi_1(M)$ имеет нильпотентную подгруппу конечного индекса. Теперь доказываемое утверждение вытекает из теоремы (8.2).

Список литературы

1. Abraham R., Robbin J., Transversal mappings and flows, N. Y., Benjamin, 1967.
2. Аносов Д. В., Геодезические потоки на замкнутых римоновых многообразиях отрицательной кривизны, *Тр. матем. инст. им. В. А. Стеклова*, **90** (1967).
3. Auslander L., Bieberbach's theorems on space groups and discrete uniform subgroups of Lie groups, *Ann. of Math.*, **71** (1960), 579—590.
4. Borel A. et al., Seminar on transformation groups, Princeton Univ. Press, N. Y., 1960.
5. Haefliger A., Varietés feuilletées, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* (3), **16** (1962), 367—397.
6. Hartman P., Ordinary differential equations, N. Y., Wiley, 1964. (Русский перевод: Хартман Ф., Обыкновенные дифференциальные уравиенения, М., «Мир», 1970.)
7. Hirsch M. W., Pugh C. C., Stable manifolds and hyperbolic sets, Global Analysis, *Proc.* Symp. in Pure Math., **14**, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1970, 133—163.
8. Hochschild G., The structure of Lie groups, San Francisco, Holden Day, 1965.
9. MacLane S., Homology. Acad. Press, N. Y., 1963. (Русский перевод: Маклейн С., Гомология, М., «Мир», 1966.)
10. Мальцев А. И., Об одном классе однородных пространств, *Изв. АН СССР*, сер. матем., **13**, № 1 (1949), 9—32.
11. Милиор Дж., Теорема об h-кобордизме, М., «Мир», 1969.
12. Milnor J., Morse theory, Princeton Univ. Press, N. J., 1963. (Русский перевод: Милнор Дж., Теория Морса, М., «Мир», 1965.)
13. Milnor J., Topology from the differentiable viewpoint, Univ. of Virginia Press, Charlottesville, Virginia, 1965. (Русский перевод включен в кн.: Милнор Дж., Уоллес А., Дифференциальная топология. Начальный курс, М., «Мир», 1972.)
14. Munkres J. R., Elementary differential topology, Princeton Univ. Press, N. J., 1961.
15. Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, М., «Наука», 1973.
16. Reeb G., Sur certaines proprietés topologiques des varietés feuilletées, Actualites Sci. Indust., Hermann, Paris, 1952.
17. Sacksteder R., Groups and pseudogroups acting on S^1 and R^1, Columbia University.
18. Shub M., Endomorphisms of compact differentiable manifolds, Thesis. Univ. of California, Berkeley, 1967 (см. также Shub M., Endomorphisms of Compact Differentiable Manifolds, *Am. J. Math.*, **91**, № 1 (1969), 175—199.)
19. Smale S., Differentiable dynamical systems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 747—817. (Русский перевод: Смейл С., Дифференцируемые динамические системы. *Успехи матем. наук*, **25**, № 1 (1970), 113—185.)

20. Smale S., The Ω-stability theorem, Global Analysis, Proc. Symp. in Pure Math., 14, Amer. Math. Soc., Providence R. I., 1970, 289—298. (Русский перевод с препринта: Смейл С., Теорема Ω-устойчивости, сб. перев. *Математика*, 13 : 2 (1969), 161—169.)
21. Spanier E., Algebraic Topology. N. Y., McGraw-Hill, 1966. (Русский перевод: Спеньер Э., Алгебраическая топология, М., «Мир», 1971.)
22. Wolf J., The growth of finitely generated solvable groups and the curvature of Riemannian manifolds, *J. Diff. Geom.*, 2 (1968), 421—446.
23*. Теория алгебр Ли. Топология групп Ли, Семинар «Софус Ли», М., ИЛ, 1962.
24*. Ленг С., Введение в теорию дифференцируемых многообразий, М., «Мир», 1967.
25*. Курош А. Г., Лекции по общей алгебре, М., Физматгиз, 1962.

ОБ У-ДИФФЕОМОРФИЗМАХ КОРАЗМЕРНОСТИ ОДИН [1])

Ш. Е. Ньюхаус

1. Всюду в этой статье буквой M будет обозначаться компактное связное C^∞-многообразие без края. Диффеоморфизм $f\colon M \to M$ класса C^r, $1 \leqslant r \leqslant \infty$, называется *У-диффеоморфизмом*, если существуют непрерывное разложение касательного пучка $TM = E^s \oplus E^u$, риманова метрика $\|\cdot\|$ на TM и константы $c, c' < 0$, $0 < \lambda < 1$, такие, что,

(i) $T_x f\left(E^s_x\right) = E^s_{f(x)}$, $T_x f\left(E^u_x\right) = E^u_{f(x)}$;

(ii) для $v \in E^s$, $\|Tf^n(v)\| \leqslant c\lambda^n \|v\|$, а для $v \in E^u$, $\|Tf^{-n}(v)\| \leqslant \leqslant c'\lambda^n \|v\|$,

где $T_x f$ обозначает дифференциал f в точке x. Можно показать, что условие (ii) не зависит от выбора римановой метрики на TM.

В течение нескольких последних лет У-диффеоморфизмы широко изучались с различных сторон. Предварительные сведения, литературные ссылки, определения терминов, которые не определяются в тексте, читатель может найти в работах [2] и [8].

Говорят, что У-диффеоморфизм имеет *коразмерность один*, если размерность слоев одного из подрасслоений E^s или B^u равна единице.

Пусть A — целочисленная $(n \times n)$-матрица с определителем $+1$ или -1, собственные значения которой не лежат на единичной окружности. Тогда A индуцирует диффеоморфизм $\bar{A}$ n-мерного тора $\mathbb{T}^n$. Отображение $\bar{A}$ называется *гиперболическим автоморфизмом тора*. Два отображения $f\colon M \to M$ и $g\colon N \to N$ называются π_1-*сопряженными*, если существует такой изоморфизм $\phi\colon \pi_1(M) \to \pi_1(N)$, что $\phi f_* = g_* \phi$, где $\pi_1(M)$ и $\pi_1(N)$ — фундаментальные группы, а f_* и g_* — гомоморфизмы этих групп, индуцированные f и g. Отображения f и g называются топологически сопряженными, если существует такой гомеоморфизм $h\colon M \to N$, что $hf = gh$.

Обозначим через $NW(f)$ множество неблуждающих точек диффеоморфизма $f\colon M \to M$, т. е. $NW(f) = \{x \in M\colon$ для лю-

---

[1]) Newhouse S. E., On codimension one Anosov diffeomorphisms, *Amer. J. Math*, **92**, № 3 (1970), 761—770.

20. Smale S., The Ω-stability theorem, Global Analysis, Proc. Symp. in Pure Math., **14**, Amer. Math. Soc., Providence R. I., 1970, 289—298. (Русский перевод с препринта: Смейл С., Теорема Ω-устойчивости, сб. перев. *Математика*, 13 : 2 (1969), 161—169.)
21. Spanier E., Algebraic Topology. N. Y., McGraw-Hill, 1966. (Русский перевод: Спеньер Э., Алгебраическая топология, М., «Мир», 1971.)
22. Wolf J., The growth of finitely generated solvable groups and the curvature of Riemannian manifolds, *J. Diff. Geom.*, **2** (1968), 421—446.
23*. Теория алгебр Ли. Топология групп Ли, Семинар «Софус Ли», М., ИЛ, 1962.
24*. Ленг С., Введение в теорию дифференцируемых многообразий, М., «Мир», 1967.
25*. Курош А. Г., Лекции по общей алгебре, М., Физматгиз, 1962.

ОБ У-ДИФФЕОМОРФИЗМАХ КОРАЗМЕРНОСТИ ОДИН [1])

Ш. Е. Ньюхауc

1. Всюду в этой статье буквой M будет обозначаться компактное связное C^{∞}-многообразие без края. Диффеоморфизм $f\colon M \to M$ класса C^r, $1 \leqslant r \leqslant \infty$, называется *У-диффеоморфизмом*, если существуют непрерывное разложение касательного пучка $TM = E^s \oplus E^u$, риманова метрика $\|\cdot\|$ на TM и константы $c, c' < 0$, $0 < \lambda < 1$, такие, что,

(i) $T_x f(E_x^s) = E_{f(x)}^s$, $T_x f(E_x^u) = E_{f(x)}^u$;

(ii) для $v \in E^s$, $\|Tf^n(v)\| \leqslant c\lambda^n \|v\|$, а для $v \in E^u$, $\|Tf^{-n}(v)\| \leqslant$ $\leqslant c'\lambda^n \|v\|$,

где $T_x f$ обозначает дифференциал f в точке x. Можно показать, что условие (ii) не зависит от выбора римановой метрики на TM.

В течение нескольких последних лет У-диффеоморфизмы широко изучались с различных сторон. Предварительные сведения, литературные ссылки, определения терминов, которые не определяются в тексте, читатель может найти в работах [2] и [8].

Говорят, что У-диффеоморфизм имеет *коразмерность один*, если размерность слоев одного из подрасслоений E^s или B^u равна единице.

Пусть A — целочисленная $(n \times n)$-матрица с определителем $+1$ или -1, собственные значения которой не лежат на единичной окружности. Тогда A индуцирует диффеоморфизм $\bar{A}$ n-мерного тора $\mathbb{T}^n$. Отображение $\bar{A}$ называется *гиперболическим автоморфизмом тора*. Два отображения $f\colon M \to M$ и $g\colon N \to N$ называются π_1-*сопряженными*, если существует такой изоморфизм $\phi\colon \pi_1(M) \to \pi_1(N)$, что $\phi f_* = g_* \phi$, где $\pi_1(M)$ и $\pi_1(N)$ — фундаментальные группы, а f_* и g_* — гомоморфизмы этих групп, индуцированные f и g. Отображения f и g называются топологически сопряженными, если существует такой гомеоморфизм $h\colon M \to N$, что $hf = gh$.

Обозначим через $NW(f)$ множество неблуждающих точек диффеоморфизма $f\colon M \to M$, т. е. $NW(f) = \{x \in M$: для лю-

---

[1]) Newhouse S. E., On codimension one Anosov diffeomorphisms, *Amer. J. Math*, **92**, № 3 (1970), 761—770.

бой окрестности U точки x найдется положительное число $n(U)$, для которого $f^{n(U)}(U) \cap U \neq \varnothing\}$. В [2] Френкс доказал следующую теорему.

(1.1) Теорема. *Пусть* f: $M \to M$ — *У-диффеоморфизм коразмерности один, причем* $NW(f) = M$. *Тогда* f *топологически сопряжен гиперболическому автоморфизму тора. Два У-диффеоморфизма коразмерности один* f: $M \to M$ *и* g: $N \to N$, *для которых* $NW(f) = M$, $NW(g) = N$, *топологически сопряжены тогда и только тогда, когда они* π_1*-сопряжены.*

Частичный результат в направлении теоремы (1.1) при дополнительном предположении о том, что подрасслоения E^s и E^u принадлежат классу C^2, независимо получил Г. Розенберг.

В этой статье мы доказываем следующее утверждение.

(1.2) Теорема. *Пусть* f: $M \to M$ — *У-диффеоморфизм коразмерности один. Тогда* $NW(f) = M$.

В том случае, когда $\dim M = 2$, теорему (1.2) раньше доказал Смейл (см. [2], (7.2)).

Объединяя (1.1) и (1.2), получаем

(1.3) Следствие. *Любой У-диффеоморфизм коразмерности один топологически сопряжен гиперболическому автоморфизму тора. Два У-диффеоморфизма коразмерности один топологически сопряжены тогда и только тогда, когда они* π_1*-сопряжены.*

Используя хорошо известные факты, получаем

(1.4) Следствие. *Пусть* f: $M \to M$ — *У-диффеоморфизм коразмерности один. Тогда*

(1) *периодические точки* f *плотны в* M [8] *и* (2) f *имеет инвариантную лебеговскую меру*[1]), *относительно которой он эргодичен* ([7] *или* [1]).

Я благодарен Дж. Френксу, М. Хиршу, З. Нитецки и Ч. Пью за полезные замечания.

2. В этом пункте мы докажем теорему (1.2). Хорошо известно, что У-диффеоморфизм удовлетворяет аксиомам А и В Смейла [8; (6.1) и (6.4)], и мы хотим воспользоваться этим фактом и некоторыми его следствиями. Таким образом, мы предполагаем, что читатель знаком с результатами § I. 3, I. 6 и I. 7 работы [8].

---

[1]) Существует много конечных инвариантных мер с «хорошими» свойствами, ио «меры Лебега», т. е. меры, которая в локальных координатах задается положительной плотностью, среди них, вообще говоря, нет [10*].— *Прим. ред.*

Так как на окружности не существует У-диффеоморфизмов, можно считать, что $\dim M \geqslant 2$. Поскольку $NW(f) = NW(f^{-1})$, то можно считать, что $\dim E^u = 1$, а $\dim E^s = n - 1$, где $\dim M = n \geqslant 2$. Далее, перейдя, если это необходимо, к двулистному накрытию над M, мы можем предполагать, что многообразие M ориентируемо, касательное расслоение TM ориентировано и одномерное подрасслоение E^u также ориентировано. Таким образом, неустойчивые многообразия диффеоморфизма f суть ориентированные дуги. Заменив, если это потребуется, f на f^2 или f^4, мы будем считать, что дифференциал Tf сохраняет ориентации E^u и TM.

Пусть $NW(f) = \Omega_1 \cup \ldots \cup \Omega_n$ — спектральное разложение множества $NW(f)$. Обозначим через $W^s(x)$ (соответственно $W^u(x)$) устойчивое (соответственно неустойчивое) многообразие f, проходящее через точку $x \in M$. Для подмножества $\Lambda \subset M$ положим

$$W^s(\Lambda) = \bigcup_{x \in \Lambda} W^s(x), \quad W^u(\Lambda) = \bigcup_{x \in \Lambda} W^u(x).$$

Базисное множество Ω_i называется *источником*, если $W^s(\Omega_i) = \Omega_i$, и *стоком*, если $W^u(\Omega_i) = \Omega_i$. Легко видеть, что для источника Ω_i $W^u(\Omega_i)$ — открытое подмножество M, и аналогично для стока Ω_i $W^s(\Omega_i)$ — открытое подмножество M. Если мы докажем, что некоторый источник является в то же время стоком, то это будет означать, что $NW(f) = M$. Действительно, если Ω_i — источник и сток одновременно, то $W^s(\Omega_i) = \Omega_i = W^u(\Omega_i)$ — открытое и в то же время замкнутое подмножество M, т. е. $\Omega_i = M$.

Мы приступаем к доказательству того, что для У-диффеоморфизма коразмерности один любой источник должен также быть стоком.

Пусть Ω_1 — источник. Мы покажем, что

$$W^u(\Omega_1) = \Omega_1. \tag{2.1}$$

Пусть $y_1, y_2 \in W^u(x)$. Мы будем писать $y_1 < y_2$, если $y_1 \neq y_2$ и ориентация на $W^u(x)$ в направлении от точки y_1 к точке y_2 совпадает с заданной ориентацией $W^u(x)$. В этом случае обозначим через $[y_1, y_2]$ дугу $W^u(x)$, идущую из точки y_1 в y_2, вместе с ее концами. Обозначим длину этой дуги через $l[y_1, y_2]$. Для данных $0 < \alpha < \infty$ и $y_1 \in W^u(x)$ положим

$$B_\alpha^+(y_1) = \{y \in W^u(x) : y_1 < y,\ l[y_1, y] < \alpha\}$$

и

$$B^+(y_1) = \{y \in W^u(x) : y_1 < y\}.$$

Аналогичным образом определим множества

$$B_\alpha^-(y_1) = \{y \in W^u(x) : y < y_1,\ l[y, y_1] < \alpha\}$$

и

$$B^-(y_1) = [y \in W^u(x) : y < y_1\}.$$

(2.2) Лемма. *Для каждой точки* $x \in \Omega_1$

(2.2.1) $B^+(x) \cap \Omega_1 \neq \varnothing$,

(2.2.2) $B^-(x) \cap \Omega_1 \neq \varnothing$.

Прежде чем доказывать лемму (2.2), мы покажем, что утверждение (2.1) следует из этой леммы. Первоначальное доказательство упрощено благодаря замечаниям М. Хирша и Дж. Френкса.

Пусть $x \in \Omega_1$. Мы докажем, что $W^u(x) \subset \Omega_1$. Выберем возрастающую последовательность целых чисел $n_1 < n_2 < n_3 < < \ldots$ и точку $y \in M$, такую, что $f^{n_i}(x) \to y$ при $i \to \infty$. Так как множество Ω_1 замкнуто и инвариантно относительно f, то $y \in \Omega_1$. Согласно (2.2), можно найти такое $\alpha > 0$, что $B_\alpha^+(y) \cap \Omega_1 \neq \varnothing$. Но тогда существует также такое натуральное число $N > 0$, что для $i \geqslant N$ $B_\alpha^\pm(f^{n_i}(x)) \cap \Omega_1 \neq \varnothing$. Так как f^{-n_i} сжимает неустойчивые многообразия, то x — предельная точка множества $B^\pm(x) \cap \Omega_1$. Таким образом, на многообразии W^u с обеих сторон от точки x сколь угодно близко к этой точке имеются точки множества Ω_1. Так как пересечение $W^u(x) \cap \Omega_1$ замкнуто в $W^u(x)$, то для точки $y \in \in W^u(x) \setminus \Omega_1$ можно найти дугу $[x_1, x_2]$ на $W^u(x)$, содержащую y и такую, что внутренность этой дуги не пересекается с множеством Ω_1, а $x_1, x_2 \in \Omega_1$. Но тогда точки из $W^u(x) \setminus \Omega_1$ должны накапливаться с обеих сторон от каждой из точек x_1 и x_2. Это противоречит тому, что $(x_1, x_2) \cap \Omega_1 = \varnothing$. Таким образом, упомянутая точка y не может существовать, $W^u(x) \subset \subset \Omega_1$ и равенство (2.1) доказано.

Напомним теперь некоторые определения и результаты, которые понадобятся нам для доказательства леммы (2.2).

Обозначим через $W_\varepsilon^u(x)$ шар с центром в точке x радиуса ε во внутренней метрике слоя $W^u(x)$. Точнее это можно определить следующим образом. Риманова метрика на TM индуцирует риманову метрику на $TW^u(x)$, которая в свою очередь индуцирует метрику на многообразии $W^u(x)$. Тогда $W_\varepsilon^u(x)$ — шар радиуса ε с центром в точке x в этой последней метрике. Аналогично определяется шар радиуса ε во внутренней метрике слоя $W^s(x)$, который мы обозначим $W_\varepsilon^s(x)$. Этот шар диффеоморфен $(n-1)$-мерному диску $(n = \dim M)$ Пусть Λ — подмножество M, $y \in \Lambda$. Обозначим через $W^s(y, \Lambda)$ связную компоненту множества $W^s(y) \cap \Lambda$, содержащую точку y. Аналогично, $W^u(y, \Lambda)$ обозначает связную компоненту $W^u(y) \cap \Lambda$, содержащую y. Следующий факт легко следует из теоремы (7.3) работы [8], которая доказана в [4].

(2.3) Существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого $x \in M$ найдется окрестность $V_\varepsilon(x)$ точки x со следующими свойствами:

(2.3.1) Окрестность $V_\varepsilon(x)$ гомеоморфна $W^u_\varepsilon(x) \times W^s_\varepsilon(x)$.

(2.3.2) Если $y_1, y_2 \in V_\varepsilon(x)$ и $W^u(y_1, V_\varepsilon(x)) \cap W^u(y_2, V_\varepsilon(x)) \neq \varnothing$, то $W^u(y_1, V_\varepsilon(x)) = W^u(y_2, V_\varepsilon(x))$;
аналогично, если

$$W^s(y_1, V_\varepsilon(x)) \cap W^s(y_2, V_\varepsilon(x)) \neq \varnothing,$$

то

$$W^s(y_1, V_\varepsilon(x)) = W^s(y_2, V_\varepsilon(x)).$$

(2.3.3) Для $y_1\ y_2 \in V_\varepsilon(x)$ пересечение $W^u(y_1, V_\varepsilon(x)) \cap \cap W^s(y_2, V_\varepsilon(x))$ состоит из одной точки.

Внутренность $V_\varepsilon(x)$ обычно называют *локальной окрестностью со структурой произведения*, а утверждение (2.3) — *теоремой о локальной структуре произведения*.

Для наших целей удобно использовать понятие множества со структурой произведения, которое представляет собой нечто вроде растянутой локальной окрестности со структурой произведения. Пусть $x \in M$, $\varepsilon > 0$. *Множество со структурой произведения над устойчивой базой* [1]) $W^s_\varepsilon(x)$ — это множество, обозначаемое N или $N(W^s_\varepsilon(x))$ и удовлетворяющее следующим условиям:

$$(2.4) \quad N = \bigcup_{y \in W^s_\varepsilon(x)} W^u(y, N)$$

(2.5) Если $y_1, y_2 \in N$, то либо

$$W^u(y_1, N) \cap W^u(y_2, N) = \varnothing, \quad \text{либо} \quad W^u(y_1, N) = W^u(y_2, N);$$

аналогично, либо $W^s(y_1, N) \cap W^s(y_2, N) = \varnothing$, либо $W^s(y_1, N) = W^s(y_2, N)$.

---

[1]) В оригинале «A stable product set relative to $W^s_\varepsilon(x)$». «Устойчивость» здесь означает только то, что «база» $W^s_\varepsilon(x)$ лежит в устойчивом (сжимающемся) слое. — *Прим. ред.*

(2.6) Для каждой точки $y \in N$ множество $W^s(y, N)$ (соответственно $W^u(y, N)$) гомеоморфно замкнутому шару в $W^s(y)$ (соответственно в $W^u(y)$).

(2.7) Существует такое $\varepsilon_1 > 0$, что для всех

$y_1 \in W^s_\varepsilon(x)$ $W^u_{\varepsilon_1}(y_1) \subset W^u(y_1, N)$.

(2.8). Для любых двух точек $y_1, y_2 \in N$ пересечение $W^u(y_1, N) \cap W^s(y_2, N)$ состоит из одной точки.

Для $K \subset W^s_\varepsilon(x)$ определим *множество со структурой произведения над устойчивой базой* K как $\bigcup_{y \in K} W^u(y, N(W^s_\varepsilon(x)))$, где $N(W^s_\varepsilon(x))$ — некоторое множество со структурой произведения над устойчивой базой $W^s_\varepsilon(x)$. Это множество мы будем обозначать также N или $N(K)$.

Аналогично для $x \in M$, $\varepsilon > 0$ можно определить множество со структурой произведения над неустойчивой базой $W^u_\varepsilon(x)$ или $K \subset W^u_\varepsilon(x)$.

(2.9) *Замечания.* 1. Используя (2.3) и компактность множеств $W^u_\varepsilon(x)$ и $W^s_\varepsilon(x)$, легко установить существование множеств со структурой произведения над базой $W^u_\varepsilon(x)$ и $W^s_\varepsilon(x)$ для любой точки $x \in M$ и любого $\varepsilon > 0$.

2. Пусть N — множество со структурой произведения над устойчивой базой $W^s_\varepsilon(x)$, $K \subset W^s_\varepsilon(x)$ и $y \in N$. Тогда пересечение $N(K) \cap W^s(y, N)$ гомеоморфно K. Аналогичное утверждение справедливо относительно множества со структурой произведения над неустойчивой базой.

Перейдем к доказательству леммы (2.2). Мы ограничимся доказательством утверждения (2.2.1), так как (2.2.2) доказывается точно таким же методом. Положим $A = \{x \in \Omega_1: B^+(x) \cap \Omega_1 \neq \varnothing\}$. Мы покажем, что $A = \Omega_1$. Доказательство состоит из ряда шагов.

1 шаг. Множество A инвариантно относительно f, т. е. $f(A) = A$.

Доказательство. Это утверждение легко следует из того, что f сохраняет ориентацию E^u, и из того, что для $x \in M$ $f(W^s(x)) = W^s(f(x))$ и $f(W^u(x)) = W^u(f(x))$.

2 шаг. Если $x \in \Omega_1$ — непериодическая точка f, то $x \in A$.

Доказательство. Выберем число $\varepsilon > 0$, удовлетворяющее заключению утверждения (2.3). Так как x — непериодическая точка, то траектория x, которую мы обозначим $o(x)$, состоит из бесконечного множества точек. Тогда справедливо следующее утверждение.

(2.10) Существует бесконечная последовательность точек $\{x_i\}_{i\leqslant 1} \subset o(x)$, таких, что из $x_i \neq x_j$ следует, что $W^s_\varepsilon(x_i) \cap \cap W^s_\varepsilon(x_j) = \varnothing$.

Если для каждой пары целых чисел n_1, n_2, где $n_1 > n_2$ $W^s(f^{n_1}(x)) \cap W^s(f^{n_2}(x)) = \varnothing$, то (2.10) выполнено. Если же существуют целые числа $n_1 > n_2$, для которых

$$W^s(f^{n_1}(x)) \cap W^s(f^{n_2}(x)) \neq \varnothing,$$

то $W^s(f^{n_1}(x)) = W^s(f^{n_2}(x))$ и, следовательно, $f^{n_1-n_2}(W^s(x)) = = W^s(x)$. Так как отображение $f^{-(n_1-n_2)}$ растягивает слой $W^s(x)$, то найдется возрастающая последовательность целых чисел m_1, m_2, ..., такая, что при $i \neq j$ расстояние по слою $W^s(x)$ между точками $f^{-m_i(n_1-n_2)}(x)$ и $f^{-m_j(n_1-n_2)}(x)$ больше, чем 2ε. Таким образом,

$$W^s_\varepsilon(f^{-m_i(n_1-n_2)}(x)) \cap W^s_\varepsilon(f^{-m_j(n_1-n_2)}(x)) = \varnothing.$$

Полагая $x_i = f^{-m_i(n_1-n_2)}(x)$, получаем утверждение (2.10).

Пусть теперь y — предельная точка последовательности $\{x_i\}$ и подпоследовательность $\{x_{i_j}\}$ сходится к y при $j \to \infty$. Пусть $V_\varepsilon(y)$ — окрестность точки y, описанная в (2.3). Из (2.3) и из того, что устойчивое многообразие $(n-1)$-мерно, следует, что при $x_{i_j} \neq x_{i_k}$ и $x_{i_j}, x_{i_k} \in V_\varepsilon(y)$, либо $B^+(x_{i_j}) \cap W^s_\varepsilon(x_{i_k}) \neq \varnothing$, либо $B^+(x_{i_k}) \cap W^s_\varepsilon(x_{i_j}) \neq \varnothing$, так что либо $x_{i_j} \in A$, либо $x_{i_k} \in A$. Так как обе точки x_{i_j} и x_{i_k} принадлежат $o(x)$, а A — инвариантное относительно f множество (см. 1-й шаг доказательства), то $x \in A$.

Остается показать, что любая периодическая точка $p \in \Omega_1$ принадлежит A. Доказательство этого факта различно в случае $\dim M = 2$ и $\dim M > 2$.

Предположим сначала, что $\dim M = 2$ и $p \in \Omega_1$ — периодическая точка периода m, т. е. $f^m(p) = p$ [1]). Так как многообразие ориентируемо и на нем существует невырожденное поле направлений, то M — двумерный тор $\mathbb{T}^2$. Предположим,

[1]) Заметим, что в случае $\dim M = 2$ нетрудно непосредственно доказать, что диффеоморфизм f топологически сопряжен гиперболическому автоморфизму тора (см. [2]). Поэтому приводимое ниже (довольно длинное) рассуждение, относящееся к этому случаю, не очень существенно. — *Прим. перев.*

что $p \notin A$. Тогда $B^+(p) \cap W^s(p) = \varnothing$. Так как Ω_1 — источник, то

$$W^s(p) \subset \Omega_1 \subset NW(f) = NW(f^m).$$

Таким образом, существует источник Ω_1' для отображения f^m, содержащий неподвижную относительно f^m точку p. Так как устойчивое многообразие $W^s(p)$ плотно в Ω_1', оно должно снова возвращаться в окрестность p.

Пусть $V_\varepsilon(p)$ — окрестность, описанная в (2.3).

Так как неустойчивое подрасслоение E^u на M ориентировано, то E^s также ориентировано. Пусть q — самая близкая к p по многообразию $W^s(p)$ точка пересечения $W^s(p)$ с $B_\varepsilon^-(p)$, γ — петля, состоящая из дуги на $W^s(p)$, соединяющей точку p с точкой q, и дуги на $B_\varepsilon^-(p)$, соединяющей q с p. Если петля γ стягиваема, то, так как это топологическая окружность, вложенная в топологический тор, она является границей топологического круга. Поэтому если двигаться по $W^s(p)$ в направлении от p к q, а затем от q в том же направлении до точки q_1 первого пересечения с дугой $[q, p]$ на $B_\varepsilon^-(p)$, то дуги, идущие от p к q и от q к q_1, пересекают $B_\varepsilon^-(p)$ в противоположных направлениях. Это противоречит ориентируемости устойчивого подрасслоения E^s. Таким образом, петля γ не стягиваема. Так как M — тор, то $M \setminus \gamma$ — топологический цилиндр, на котором имеется неустойчивое слоение, индуцированное $\{W^u(x)\}_{x \in M}$. Не представляет труда определить ω-предельные множества и построить теорию Пуанкаре — Бендиксона на $M \setminus \gamma$ (см. [3] или [6]) для этого непрерывного слоения на $M \setminus \gamma$. (Другой вариант состоит в том, чтобы воспользоваться структурной устойчивостью f и аппроксимировать f C^2-диффеоморфизмом, для которого E^u — C^1-подрасслоение (см. теорему (6.5) из [4]) и применить обыкновенную теорию Пуанкаре — Бендиксона[1]). Так как замыкание множества $B^+(p) \setminus B_\varepsilon^+(p)$ принадлежит $M \setminus \gamma$, то ω-предельное множество слоя $B^+(p)$ является непустым подмножеством $M \setminus \gamma$. Так как слоение $\{W^u(x)\}$ не имеет особых точек, то, согласно теории Пуанкаре — Бендиксона, ω-предельное множество для $B^+(p)$ должно быть окружностью в $M \setminus \gamma$. Но это, очевидно, невозможно, так как любое неустойчивое многообразие является образом прямой при инъективной иммерсии. Таким образом,

---

[1]) Цилиндр $M \setminus \gamma$ гомеоморфен кольцу на плоскости, заключенному между двумя концентрическими окружностями. Поэтому для таких «половинок» слоев W^u, которые, как $B^+(p)$, войдя в этот цилиндр, больше не могут пересекать его сторон, теория Пуанкаре — Бендиксона применима непосредственно. — *Прим. ред.*

предположение $p \notin A$ приводит к противоречию. Это завершает доказательство утверждения (2.2.1) в случае $\dim M = 2$.

Для завершения доказательства (2.2.1) нам осталось рассмотреть случай, когда $\dim M \geqslant 3$, а $p \in \Omega_1$, как и прежде, периодическая точка f.

3 шаг. В силу утверждения шага 2, если $x \in W^s(p) \setminus \{p\}$, то $x \in A$. Положим для $x \in W^s(p) \setminus \{p\}$

$$\bar{\varphi}(x) = \inf_{y \in B^+(x) \cap \Omega_1} l[x, y].$$

Если существует такое x, что $\bar{\varphi}(x) = 0$, то $p \in A$. Действительно, этот факт немедленно следует из непрерывности устойчивого слоения и того, что из $x, y \in \Omega_1$ следует

$$W^u(x) \cap W^s(y) \in \Omega_1.$$

Следовательно, можно в дальнейшем предполагать, что $\bar{\varphi}(x) > 0$ для $x \in W^s(p) \setminus \{p\}$.

4 *шаг.* Определим для $x \in W^s(p) \setminus \{p\}$ $\varphi(x)$ как точку на $B^+(x)$, для которой $l[x, \varphi(x)] = \bar{\varphi}(x)$. Тогда $\varphi(x) \in W^s(z_0)$ для некоторой точки $z_0 \in M$ при всех $x \in W^s(p) \setminus \{p\}$; другими словами, все точки $\varphi(x)$ лежат на одном устойчивом многообразии, когда точка x пробегает $W^s(p) \setminus \{p\}$.

Доказательство. Положим для $z \in M$

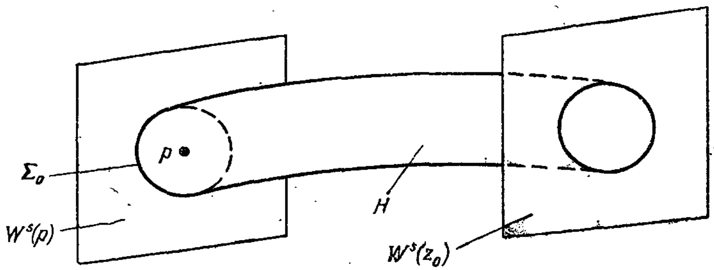
$$U_z = \{x \in W^s(p) \setminus \{p\}\colon \varphi(x) \in W^s(z)\}.$$

Очевидно, U_z — открытое множество в $W^s(p) \setminus \{p\}$. Очевидно, $U_{z_1} \cap U_{z_2} = \varnothing$, если $W^s(z_1) \neq W^s(z_2)$. Так как $\dim W^s(p) \geqslant 2$, то множество $W^s(p) \setminus \{p\}$ связно. Следовательно, если для некоторой точки z_0 множество U_{z_0} непусто, то $U_{z_0} = W^s(p) \setminus \{p\}$.

5 шаг. Отображение $\varphi\colon W^s(p) \setminus \{p\} \to W^s(z_0)$ непрерывно и инъективно.

Доказательство. Пусть $x \in W^s(p) \setminus \{p\}$, а γ обозначает дугу $[x, \varphi(x)]$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Существует множество со структурой произведения над неустойчивой базой γ (обозначим это множество N) такое, что $W^s(\varphi(x), N) \subset W^s_\varepsilon(\varphi(x))$ и $p \notin W^s(x, N)$. Тогда если $y \in W^s(x, N)$, то $\varphi(y) \in W^s(\varphi(x), N) \subset W^s_\varepsilon(\varphi(x))$. Таким образом, отображение φ непрерывно. Инъективность немедленно следует из определения φ.

Таким образом, если $K \subset W^s(p) \setminus \{p\}$ — компакт, то ограничение отображения φ на множество K — гомеоморфизм. Пусть E_0 — замкнутый $(n-1)$-мерный шар в $W^s(p)$, для которого p — внутренняя точка в топологии слоя $W^s(p)$. Пусть через Σ_0 обозначена граница шара E_0 в топологии $W^s(p)$, так что Σ_0 — $(n-2)$-мерная сфера в $W^s(p)\setminus\{p\}$. Пусть $H=\bigcup_{x\in\Sigma_0}[x, \varphi(x)]$. Очевидно, множество H гомеоморфно прямому произведению $\Sigma_0\times I$ — где I — единичный отрезок.



6 шаг. Обозначим для $x\in\Sigma_0$ $\gamma_x=[x, \varphi(x)]$, а для $y\in\gamma_x$ обозначим через Σ_y компоненту линейной связности пересечения $W^s(y)\cap H$, содержащую y. Тогда

(2.11) Множество Σ_y гомеоморфно $(n-2)$-мерной сфере; следовательно, по теореме Жордана — Брауэра [9; стр. 258] Σ_y разделяет $W^s(y)$.

Доказательство. Мы предположим сначала, что справедливо следующее утверждение:

(2.12) *Пусть x, $x_1\in\Sigma_0$, $y\in\gamma_x$. Тогда пересечение $\Sigma_y\cap\gamma_{x_1}$ состоит в точности из одной точки.*

Фиксируем точку $x\in\Sigma_0$ и определим отображение φ_y: $\Sigma_0\to\Sigma_y$, положив для $x_1\in\Sigma_0$ $\varphi_y(x_1)=\Sigma_y\cap\gamma_{x_1}$. Нетрудно установить, что отбражение φ_y инъективно, сюръективно и непрерывно и, следовательно, φ_y — гомеоморфизм. Таким образом, нужно доказать (2.12). Сначала мы докажем:

(2.13) *Если $y\in\gamma_x$, то $\Sigma_y\cap\gamma_{x_1}\neq\varnothing$ при любом $x_1\in\Sigma_0$.*

Фиксируем точку $y\in\gamma_x$. Пусть $\Sigma_0'=\{z\in\Sigma_0\colon \Sigma_y\cap\gamma_z\neq\varnothing\}$. Из теоремы о локальной структуре произведения (2.3) следует, что множество Σ_0' открыто в Σ_0. Мы покажем, что множество $\Sigma_0\setminus\Sigma_0'$ также открыто в Σ_0.

Пусть $z\in\Sigma_0\setminus\Sigma_0'$. Тогда $\Sigma_y\cap\gamma_z=\varnothing$, так что существует множество N со структурой произведения над неустойчивой базой γ_z, такое, что $N\cap\Sigma_y=\varnothing$. Тогда, используя свойство множеств со структурой произведения над неустойчивой базой, аналогичное (2.7), получаем, что множество $N\cap\Sigma_0$ является окрестностью точки z в Σ_0. Но $N\cap\Sigma_0\subset\Sigma_0\setminus\Sigma_0'$, так что $\Sigma_0\setminus\Sigma_0'$ — открытое подмножество Σ_0. Так как $\dim\Sigma_0\geqslant 1$

и $\Sigma_0' \neq \varnothing$, то $\Sigma_0' = \Sigma_0$. Таким образом, утверждение (2.13) доказано.

Фиксируем теперь точку $x \in \Sigma_0$ и рассмотрим множество D_x, состоящее из всех точек $y \in \gamma_x$, для которых пересечение $\Sigma_y \cap \gamma_{x_1}$ состоит из одной точки при всех $x_1 \in \Sigma_0$. Мы покажем, что D_x и $\gamma_x \setminus D_x$ — открытые подмножества γ_x. Тогда, рассмотрев множество со структурой произведения над устойчивой базой E_0, убедимся, что $D_x \neq \varnothing$, так что $D_x = \gamma_x$, откуда следует (2.12).

Множество D_x открытое; пусть $y \in D_x$. Тогда отображение φ_y: $\Sigma_0 \to \Sigma_y$, определенное выше, инъективно, сюръективно, непрерывно и, следовательно, гомеоморфизм. Пусть N_y — множество со структурой произведения над устойчивой базой Σ_y. Тогда множество $W^u(y, N_y) \cap \gamma_x$ — окрестность точки y в γ_x, которая содержится в D_x.

Множество $\gamma_x \setminus D_x$ открытое; пусть $y \in \gamma_x \setminus D_x$. Согласно (2.13) существует точка $x_1 \in \Sigma_0$, такая, что пересечение $\Sigma_y \cap \gamma_{x_1}$ содержит по крайней мере две точки. Используя множества со структурой произведения над устойчивыми базами — дугами в Σ_y, соединяющими y с каждой из двух точек пересечения $\Sigma_y \cap \gamma_{x_1}$ убеждаемся, что y — внутренняя точка множества $\gamma_x \setminus D_x$.

Таким образом (2.12) и, следовательно, (2.11) доказаны.

На следующем шаге используются соображения, сходные с теми, которые часто встречаются у Хефлигера.

7 шаг. Фиксируем $x \in \Sigma_0$. Ясно, что множество Σ_y непрерывно зависит от $y \in \gamma_x$, т. е. если точка y_1 близка к y_2 и обе эти точки лежат на γ_x, то существует гомеоморфизм ψ: $\Sigma_{y_2} \to \Sigma_{y_1}$, близкий в C^0-топологии к вложению i_{y_2}: $\Sigma_{y_2} \to M$. Каждое множество Σ_y, будучи гомеоморфным образом $(n-2)$-мерной сферы в $W^s(y)$, служит границей ограниченного открытого линейно связного подмножества $V_y \subset W^s(y)$. Можно показать, что множество V_y также непрерывно зависит от y, но нам это не понадобится. Положим $\gamma = \gamma_x$. Мы утверждаем, что

(2.14) $\quad B^+(p) \cap V_y \neq \varnothing \quad$ для любого $\quad y \in \gamma$.

Заметим, что из (2.14) следует непустота пересечения $B^+(p) \cap V_{\varphi(x)}$. Но так как $\varphi(x) \in \Omega_1$, то $V_{\varphi(x)} \subset \Omega_1$ [1]). Поэтому $B^+(p) \cap \Omega_1 \neq \varnothing$, а это означает, что $p \in A$. Таким образом, для

---

[1]) Напомним, что Ω_1 — источник. Поэтому из того, что $z \in \Omega_1$, следует, что $W^s(z) \subset \Omega_1$. — *Прим. перев.*

завершения доказательства (2.2.1) нам остается только доказать (2.14).

Доказательство (2.14). Пусть $D = \{y \in \gamma : B^+(p) \cap V_y \neq \emptyset\}$. Очевидно, D — открытое подмножество x в γ. Так как множество D содержит окрестность точки x в γ, то если мы докажем, что множество $\gamma \setminus D$ открыто в γ, то отсюда будет следовать, что $D = \gamma$.

Пусть $y \in \gamma \setminus D$. Рассмотрим множество N_y со структурой произведения над устойчивой базой V_y, такое, что $B^+(p) \cap N_y = \emptyset$. Из (2.7), непрерывной зависимости Σ_y от y и определения V_y следует, что для достаточно близкой к y точки y_1 $V_{y_1} \subset N$. Таким образом, y — внутренняя точка множества $\gamma \setminus D$.

Список литературы

1. Bowen R., Periodic points and measures for Axiom A, diffeomorphisms, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 154 (1971), 377—397.
2. Franks J., Thesis, University of California, Berkeley, 1968. См. также Френкс Дж., У-диффеоморфизмы, в настоящем сборнике, стр. 32—86.
3. Hartman P., Ordinary differential equations, N. Y., Wiley, 1964, (Русский перевод: Хартман Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., «Мир», 1970.)
4. Hirsch M., Pugh C., Stable manifolds and hyperbolic sets, Global Analysis, Proc. Symp. in Pure Math., 14, Amer. Math. Soc., Providence R. I., 1970, 135—165.
5. Hirsch M., Pugh C., Shub M., Invariant manifolds, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 76, № 5 (1970), 1015—1019. (Полное изложение — препринт, 210 стр.)
6. Lefshetz S., Differential equations: Geometric theory, Interscience, N. Y., 1957. (Русский перевод: Лефшец С., Геометрическая теория дифференциальных уравнений, ИЛ, М., 1961.)
7. Синай Я. Г., Марковские разбиения и У-диффеоморфизмы, *Функц. анализ и его прил.*, 2, № 1 (1968), 64—89.
8. Smale S., Differentiable dynamical systems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73 (1967), 747—817. (Русский перевод: Смейл С., Дифференцируемые динамические системы, *Успехи матем. наук*, 25, № 1 (1970), 113—185.)
9. Spanier E., Algebraic Topology, N. Y., McGraw-Hill, 1966. (Русский перевод: Спеньер Е., Алгебраическая топология, М., «Мир», 1971.)

10*. Лифшиц А. Н., Синай Я. Г., Об инвариантных мерах, совместимых с гладкостью, для транзитивных У-систем, *ДАН СССР*, 207, № 5 (1972), 1039—1041.

ОТСУТСТВИЕ НОВЫХ У-ДИФФЕОМОРФИЗМОВ НА ТОРАХ [1])

Энтони Мэннинг

1. Формулировка результатов. Диффеоморфизм f класса C^1 гладкого компактного многообразия M без края называется *У-диффеоморфизмом*, если f обладает гиперболической структурой на всем многообразии M, т. е. существует такое непрерывное инвариантное относительно Df разложение $TM = E^s \oplus E^u$, что для любой римановой метрики на M найдутся константы c, λ, $c > 0$, $0 < \lambda < 1$, для которых

$$\|Df^n(x) \mid E_x^s\| < c\lambda^n \quad \text{и} \quad \|Df^{-n}(x) \mid E_x^u\| < c\lambda^n$$

при любом $n > 0$ и $x \in M^n$.

Единственными известными до настоящего времени примерами У-диффеоморфизмов являются алгебраические примеры на следующих многообразиях (в порядке возрастания общности): торах $\mathbb{T}^n$, нильмногообразиях (которые являются некоторыми косыми призведениями торов) и инфранильмногообразиях (конечными накрытиями над которыми являются нильмногообразия). Эти диффеоморфизмы индуцируются гиперболическими автоморфизмами универсальных накрывающих и называются гиперболическими автоморфизмами тора (нильмногообразия или инфранильмногообразия), см. [5], стр. 63. Цель настоящей работы — заполнить два оставшихся до сих пор пробела в доказательстве того факта, что любой У-диффеоморфизм на торе топологически сопряжен с алгебраическим автоморфизмом. Используемые методы позволяют получить аналогичный результат для нильмногообразий и инфранильмногообразий.

В [6] Френкс доказал следующие две теоремы для торов.

Теорема 1. *Пусть f: $\mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ — У-диффеоморфизм, причем $\Omega(f) = \mathbb{T}^n$. Если отображение f_*: $H_1(\mathbb{T}^n, \mathbb{R}) \to H_1(\mathbb{T}^n, \mathbb{R})$ гиперболично (т. е. не имеет собственных значений, по модулю равных* 1), *то диффеоморфизм f топологически сопряжен с гиперболическим автоморфизмом тора.*

---

[1]) Manning A., There are no new Anosov diffeomorphisms on tori, *American Journal of Mathematics*, **96**, № 3 (1974), 422—429.

завершения доказательства (2.2.1) нам остается только доказать (2.14).

Доказательство (2.14). Пусть $D = \{y \in \gamma : B^{+}(p) \cap V_y \neq \varnothing\}$. Очевидно, D — открытое подмножество x в γ. Так как множество D содержит окрестность точки x в γ, то если мы докажем, что множество $\gamma \setminus D$ открыто в γ, то отсюда будет следовать, что $D = \gamma$.

Пусть $y \in \gamma \setminus D$. Рассмотрим множество N_y со структурой произведения над устойчивой базой V_y, такое, что $B^{+}(p) \cap N_y = \varnothing$. Из (2.7), непрерывной зависимости Σ_y от y и определения V_y следует, что для достаточно близкой к y точки y_1 $V_{y_1} \subset N$. Таким образом, y — внутренняя точка множества $\gamma \setminus D$.

Список литературы

1. Bowen R., Periodic points and measures for Axiom A, diffeomorphisms, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **154** (1971), 377—397.
2. Franks J., Thesis, University of California, Berkeley, 1968. См. также Френкс Дж., У-диффеоморфизмы, в настоящем сборнике, стр. 32—86.
3. Hartman P., Ordinary differential equations, N. Y., Wiley, 1964, (Русский перевод: Хартман Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., «Мир», 1970.)
4. Hirsch M., Pugh C., Stable manifolds and hyperbolic sets, Global Analysis, Proc. Symp. in Pure Math., **14**, Amer. Math. Soc., Providence R. I., 1970, 135—165.
5. Hirsch M., Pugh C., Shub M., Invariant manifolds, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **76**, № 5 (1970), 1015—1019. (Полное изложение — препринт, 210 стр.)
6. Lefshetz S., Differential equations: Geometric theory, Interscience, N. Y., 1957. (Русский перевод: Лефшец С., Геометрическая теория дифференциальных уравнений, ИЛ, М., 1961.)
7. Синай Я. Г., Марковские разбиения и У-диффеоморфизмы, *Функц. анализ и его прил.*, **2**, № 1 (1968), 64—89.
8. Smale S., Differentiable dynamical systems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 747—817. (Русский перевод: Смейл С., Дифференцируемые динамические системы, *Успехи матем. наук*; **25**, № 1 (1970), 113—185.)
9. Spanier E., Algebraic Topology, N. Y., McGraw-Hill, 1966. (Русский перевод: Спеньер Е., Алгебраическая топология, М., «Мир», 1971.)

10*. Лифшиц А. Н., Синай Я. Г., Об инвариантных мерах, совместимых с гладкостью, для транзитивных У-систем, *ДАН СССР*, **207**, № 5 (1972), 1039—1041.

ОТСУТСТВИЕ НОВЫХ У-ДИФФЕОМОРФИЗМОВ НА ТОРАХ [1])

Энтони Мэннинг

1. Формулировка результатов. Диффеоморфизм f класса C^1 гладкого компактного многообразия M без края называется *У-диффеоморфизмом*, если f обладает гиперболической структурой на всем многообразии M, т. е. существует такое непрерывное инвариантное относительно Df разложение $TM = E^s \oplus E^u$, что для любой римановой метрики на M найдутся константы c, λ, $c > 0$, $0 < \lambda < 1$, для которых

$$\|Df^n(x)\,|\,E_x^s\| < c\lambda^n \quad \text{и} \quad \|Df^{-n}(x)\,|\,E_x^u\| < c\lambda^n$$

при любом $n > 0$ и $x \in M^n$.

Единственными известными до настоящего времени примерами У-диффеоморфизмов являются алгебраические примеры на следующих многообразиях (в порядке возрастания общности): торах $\mathbb{T}^n$, нильмногообразиях (которые являются некоторыми косыми призведениями торов) и инфранильмногообразиях (конечными накрытиями над которыми являются нильмногообразия). Эти диффеоморфизмы индуцируются гиперболическими автоморфизмами универсальных накрывающих и называются гиперболическими автоморфизмами тора (нильмногообразия или инфранильмногообразия), см. [5], стр. 63. Цель настоящей работы — заполнить два оставшихся до сих пор пробела в доказательстве того факта, что любой У-диффеоморфизм на торе топологически сопряжен с алгебраическим автоморфизмом. Используемые методы позволяют получить аналогичный результат для нильмногообразий и инфранильмногообразий.

В [6] Френкс доказал следующие две теоремы для торов.

Теорема 1. *Пусть f: $\mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ — У-диффеоморфизм, причем $\Omega(f) = \mathbb{T}^n$. Если отображение f_*: $H_1(\mathbb{T}^n, \mathbb{R}) \to H_1(\mathbb{T}^n, \mathbb{R})$ гиперболично (т. е. не имеет собственных значений, по модулю равных* 1), *то диффеоморфизм f топологически сопряжен с гиперболическим автоморфизмом тора.*

---

[1]) Manning A., There are no new Anosov diffeomorphisms on tori, *American Journal of Mathematics*, **96**, № 3 (1974), 422—429.

Теорема 2. *Если f: $\mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ — У-диффеоморфизм, то отображение f_*: $H_1(\mathbb{T}^n, \mathbb{R}) \to H_1(\mathbb{T}^n, \mathbb{R})$ не имеет собственных значений, являющихся корнями из единицы*[1]).

Любое инфранильмногообразие M (остальные случаи содержатся в этом) является пространством типа $K(\pi_1(M), 1)$, так как его универсальное накрывающее стягиваемо. Поэтому (см. [14], стр. 551) два автоморфизма многообразия M свободно гомотопны, если они индуцируют сопряженные автоморфизмы $\pi_1(M)$, т. е. автоморфизмы, отличающиеся на внутренний автоморфизм. Из [1] следует, что любой автоморфизм φ фундаментальной группы инфранильмногообразия единственным образом продолжается до автоморфизма φ' нильпотентной группы Ли N, которая является универсальным накрытием над M. Мы назовем автоморфизм φ гиперболическим, если φ' (или $D\varphi'(e)$) — гиперболическое отображение, и скажем, что λ — собственное значение автоморфизма φ, если λ — собственное значение $D\varphi'(e)$. Наша первая теорема усиливает утверждение теоремы 2.

Теорема А. *Если f: $M \to M$ — У-диффеоморфизм инфранильмногообразия M, то отображение f_*: $\pi_1(M) \to \pi_1(M)$ гиперболично.*

Заметим, что каждый из классов гомотопных отображений многообразия M в себя, индуцирующий гиперболический автоморфизм $\pi_1(M)$, содержит (см. [1]) гиперболический автоморфизм инфранильмногообразия. Для любого У-диффеоморфизма из такого класса гомотопных отображений мы докажем следующую теорему.

Теорема В. *Если f: $M \to M$ — У-диффеоморфизм инфранильмногообразия M, гомотопный гиперболическому автоморфизму инфранильмногообразия, то $\Omega(f) = M$.*

Используя лемму 5 (см. ниже) вместо леммы 1.2 в [6], можно так модифицировать доказательство Френкса теоремы 1, чтобы оно проходило для инфранильмногообразий. Отсюда и из теорем А и В вытекает

Теорема С. *Пусть f: $M \to M$ — У-диффеоморфизм инфрамногообразия. Тогда диффеоморфизм f топологически сопряжен с гиперболическим автоморфизмом инфранильмногообразия.*

Таким образом, в будущем придется искать У-диффеоморфизмы на других многообразиях.

---

[1]) Изложенне работы [6] см. в п. 8 вступнтельной статьи к настоящему сборнику. — *Прим. ред.*

2. Доказательство теоремы А. *Замечание* 1. Поскольку мы не знаем, что диффеоморфизм f сохраняет базисную точку, то отображение f_* определено только с точностью до внутреннего автоморфизма $\pi_1(M)$. Продолжение f'_* отображения f_* на нильпотентную группу Ли N также определено только с точностью до внутреннего автоморфизма N. Однако можно показать (индукцией по классу нильпотентности, поскольку это очевидно для абелевой группы N), что внутренний автоморфизм не изменяет собственных значений отображения f'_*.

Замечание 2. Если h: $M \to M$ — любой гомеоморфизм инфранильмногообразия M и h_*: $\pi_1(M) \to \pi_1(M)$ — индуцированный автоморфизм $\pi_1(M)$, то в соответствии с предложением 2 из [1] отображение h_* оставляет инвариантной максимальную нильпотентную подгруппу группы $\pi_1(M)$. Эта подгруппа имеет конечный индекс в $\pi_1(M)$ и является фундаментальной группой нильмногообразия, накрывающего M с конечной кратностью. Поэтому гомеоморфизм h можно поднять до гомеоморфизма этого нильмногообразия.

Доказательство теоремы А. Предположим, что существует контрпример к теореме на инфранильмногообразии. Тогда в соответствии с замечанием 2 этот диффеоморфизм накрывается диффеоморфизмом нильмногообразия, который, как легко видеть, является другим контрпримером к теореме. Поэтому достаточно доказать теорему для нильмногообразий. Пусть N/D — нильмногообразие, где D — равномерная дискретная подгруппа N (см. [13], стр. 761, или [8]), и пусть f: $N/D \to N/D$ — контрпример к теореме. В [10] мы показали, что (так же, как и для торов)

$$L(f^m) = \prod (1 - \lambda^m),$$

где произведение берется по всем собственным значениям (с учетом кратности) отображения f_*: $\pi_1(N/D) = D \to D$.

Мы можем предположить, что неустойчивое распределение диффеоморфизма f ориентируемо, так что все точки из множества $\mathrm{Fix}(f^m)$ имеют одинаковый индекс Лефшеца (см. [6], стр. 123, или [10]). Действительно, в противном случае диффеоморфизм другого нильмногообразия, накрывающий f, обладал бы этим свойством. Таким образом, число неподвижных точек для диффеоморфизма f^m можно вычислить следующим способом:

$$N_m(f) = | L(f^m) | = \prod | 1 - \lambda^m |.$$

В [6] и [10] было показано, что среди собственных значений λ нет корней из единицы. Действительно, если одно из этих собственных значений является корнем j-й степени из единицы, то $N_{mj}(f) = 0$ для всех m. Так как отображение f_* по предположению не гиперболично, то среди собственных значений λ должны иметься равные единице по модулю, но не являющиеся корнями из единицы. Мы получим другое выражение для $N_m(f)$ и придем к противоречию, так как эти два выражения ведут себя по-разному при больших m [1]).

---

[1]) Идея автора состоит в следующем. Допустим, что имеется λ с $|\lambda| = 1$. Если λ^m близко к 1, то при таком m, как видно из формулы для $N_m(f)$, эта величина по сравнению с ее значениями для соседних m должна принимать гораздо меньшие значения. Надо доказать, что таких «резких падений» в действительности быть не может.

Автор реализует эту идею с помощью марковских разбиений. Поскольку эта техника не входит в упомянутый в предисловии «минимум», приведем другое доказательство.

Было бы достаточно доказать, для какого-нибудь фиксированного $l > 0$, что

$$N_{m-l}(f) \leqslant N_m(f) \quad \text{при всех} \quad m > l. \qquad (*)$$

Достаточно также доказать аналогичный факт не для f, а для какой-нибудь фиксированной степени f^k.

Рассмотрим сразу общий случай, не предполагая, что $\Omega(f) = N/D$. Заменив f некоторой степенью, можно считать, что f на каждом из базисных множеств (из которых по общей теории состоит Ω) обладает свойством топологического перемешивания, т. е. перемешивания областей. (Действительно, в общем случае каждое базисное множество Ω_i состоит из нескольких замкнутых множеств $\Omega_{i1}, \ldots, \Omega_{ik_i}$, которые под действием f циклически переходят друг в друга, причем $f^{k_i} | \Omega_{ij}$ обладает свойством топологического перемешивания. Если k кратно всем k_i, то Ω_{ij} будет базисными множествами для f^k со свойством перемешивания.)

Рассматривая $f | \Omega_i$, мы докажем, что для любого достаточно большого l (скажем, $l \geqslant l_i$)

$$N_m(f | \Omega_i) \leqslant N_{m+l}(f | \Omega) \quad \text{при всех} \quad m \geqslant 1. \qquad (**)$$

Очевидно, отсюда следует $(*)$ с $l = \max l_i$.

Пусть c — константа разделения для $f | \Omega_i$, а ε столь мало, что для любой замкнутой ε-траектории $x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i = x_0$ существует настоящая замкнутая траектория $f^n x$, для которой $f^i x = x$ и расстояние $\rho(f^n x, x_n) < \frac{c}{3}$ при всех n. Покроем Ω_i конечным набором шаров V_j радиуса $\frac{\varepsilon}{2}$ (имеются в виду шары в самом Ω_i). Поскольку $f | \Omega_i$ топологически перемешивает, то существует такое l_i, что $f^l V_j \cap V_k \neq \varnothing$ для всех j, k и всех $l \geqslant l_i$. Тогда, очевидно, для любых двух шаров U и U' (в Ω_i) радиуса ε имеем $f^l U \cap U' \neq \varnothing$. Пусть теперь $x \in \mathrm{Fix}(f^m)$. Существует такая точка u, что $\rho(u, x) < \varepsilon$ и $\rho(f^l u, x) < \varepsilon$. Образуем замкнутую ε-траекторию $\{w_n(x)\}$ длины $m + l$, положив, что w_n есть $f^n x$ при $0 \leqslant n < m$ и $f^{n-m} u$ при $m \leqslant n < m + l$. Существует такое z, что $f^{m+l} z = z$ и $\rho(w_n, f^n z) < \frac{c}{3}$ при всех n. Если $x \neq x'$, то существует такое n, при котором $\rho(w_n(x), w_n(x')) > c$. В $\frac{c}{3}$ окрестности замкнутой

Случай 1. Предположим, что диффеоморфизм f транзитивен, т. е. $\Omega(f) = N/D$. Для того чтобы получить второе выражение для $N_m(f)$, мы рассмотрим марковское разбиение C для диффеоморфизма f (см. [12] или [4]) и построим соответствующую топологическую цепь Маркова α_1: $\Lambda(A_1) \to \Lambda(A_1)$ с проекцией π: $\Lambda(A_1) \to N/D$, так что $\pi\alpha_1 = f\pi$. В соответствии с процедурой подсчета периодических точек, изложенной в [9],

$$N_m(f) = \sum_{j=1}^{s} \mu_j^m - \sum_{k=1}^{t} \nu_k^m, \tag{1}$$

где μ_j и ν_k — собственные значения некоторых матриц A_i, состоящих из нулей и единиц. Свойства собственных значений неотрицательных матриц изложены в [7], гл. 13. Собственным значениям $\mu_1, \ldots, \mu_u$ матрицы A_1 соответствуют первые u слагаемых первой суммы в (1). Так как диффеоморфизм f транзитивен, то некоторая степень матрицы A_1 имеет строго положительные элементы. Поэтому одно из собственных зна-

---

ε-траектории $\{w_n(x')\}$ лежит некоторая замкнутая траектория $\{f^n z'\}$, при этом $z \neq z'$, ибо имеется n, при котором

$$\rho(f^n z, f^n z') \geqslant \rho(w_n(x), w_n(x')) - 2\frac{c}{3} > \frac{c}{3}.$$

Мы сопоставили каждой точке $x \in \operatorname{Fix}(f^m)$ некоторую точку $z \in \operatorname{Fix}(f^{m+l})$ и при этом различным точкам x соответствуют различные z. Тем самым (**) доказано.

В связи с этим рассуждением уместно заметить, что аналогично легко доказать следующее: если A — локально максимальное гиперболическое множество каскада $\{f^n\}$ и $f|A$ топологически перемешивает, то при всех достаточно больших l для $N_i = N_i(f|A)$ выполняются неравенства

$$N_i N_j \leqslant N_{i+j+2l}, \quad N_{i+j} \leqslant N_{i+l} N_{j+l} \quad \text{при всех } i, j.$$

Отсюда легко получить уточнение известного результата

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln N_n = h_{\text{top}}(f \mid A),$$

где справа стоит топологическая энтропия. А именно, при сделанных предположениях существуют такие константы c, $C > 0$, что при всех n

$$ce^{hn} \leqslant N_n \leqslant Ce^{hn}, \quad \text{где} \quad h = h_{\text{top}}(f \mid A).$$

По-видимому, соображения такого рода впервые появились в [15*] (применительно к более общей задаче об оценке величины $\sum_{x \in \operatorname{Fix}(f^n)} \exp \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(f^i x)$, где φ — какая-нибудь функция на фазовом пространстве, удовлетворяющая условию Гёльдера; при $\varphi \equiv 0$ получается как раз $N_n(f)$). — *Прим. ред.*

чений, например, μ_1, вещественно и положительно (см. [7]) и обладает свойством $\mu_1 > |\mu_j|$, $2 \leqslant j \leqslant u$.

Лемма 1. $\mu_1 > |\mu_j|$ *при* $2 \leqslant j \leqslant s$ *и* $\mu_1 > |\nu_k|$ *при* $1 \leqslant k \leqslant t$.

Доказательство. Достаточно показать, что если A_i — любая другая матрица (не A_1), то ее максимальное собственное значение r_i (вещественное и положительное, согласно [7]) меньше μ_1. Имеем $N_m(\alpha_i) = \mathrm{trace}(A_i^m)$, поэтому непосредственные вычисления показывают, что $\overline{\lim}\, m^{-1} \log N_m(\alpha_i) = r_i$ и $\lim m^{-1} \log N_m(\alpha_1) = \mu_1$. Все периодические точки, подсчитанные в $N_m(\alpha_i)$, являются последовательностями символов, представляющими такие точки из N/D, которые лежат на ∂C-объединении границ элементов разбиения C. Число точек в $\mathrm{Fix}(\alpha_i^m)$, представляющих одну точку из $\mathrm{Fix}(f^m | \partial C)$, ограничено сверху равномерно по m. Из [3] следует, что $N_m(f | \partial C)/N_m(f) \to 0$ при $m \to \infty$, так как ∂C имеет меру нуль, а диффеоморфизм f эргодичен [1]). Следовательно, когда $m \to \infty$, то $N_m(\alpha_i)/N_m(f) \to 0$ и $N_m(\alpha_1)/N_m(f) \to 1$, таким образом, $N_m(\alpha_i)/N_m(\alpha_1) \to 0$. Поэтому $r_i < \mu_1$, что и требовалось доказать.

Имеем:

$$\sum_{j=1}^{s} \mu_j^m - \sum_{k=1}^{t} \nu_k^m = N_m(f) = \prod_{\lambda} |1 - \lambda^m|. \tag{2}$$

Из левого равенства вытекает, что $m^{-1} \log N_m(f) \to \log \mu_1$ при $m \to \infty$. Следовательно, выражение $m^{-1} \sum_{\lambda} \log |1 - \lambda^m|$ тоже должно стремиться к некоторому пределу. Очевидно, что

$$\sum_{|\lambda|<1} m^{-1} \log |1 - \lambda^m| \to 0$$

и

$$\sum_{|\lambda|>1} m^{-1} \log |1 - \lambda^m| \to \sum_{|\lambda|>1} \log |\lambda|.$$

---

[1]) Это, конечно, не довод. (Ведь множество периодических точек само имеет меру нуль!) Правильное рассуждение таково. Периодические точки, если они имеются в ∂C, должны лежать на пересечении «сжимающихся» и «расширяющихся» границ. Это пересечение — некоторое замкнутое инвариантное множество F. При «кодировке» ему соответствует некоторое замкнутое инвариантное подмножество $\pi^{-1}(F)$ топологически транзитивной топологической марковской цепи α: $\Lambda(A_1) \to \Lambda(A_1)$. Но топологическая энтропия (которая как раз и дает асимптотику числа периодических точек) на любом таком подмножестве меньше, чем топологическая энтропия всей марковской цепи. (Это следует хотя бы из того, что она является верхней гранью метрических энтропий, отвечающих всевозможным нормированным инвариантным мерам, причем для топологически транзитивной марковской цепи эта верхняя грань достигается на единственной мере и последняя положительна на открытых подмножествах.) — *Прим. ред.*

Теперь мы покажем, что $P_m = \sum_{|\lambda|=1} m^{-1}\log|1-\lambda^m| \to 0$ при $m \to \infty$, используя тот факт, что P_m имеет некоторый предел l. Действительно, $P_m \leqslant \sum_{|\lambda|=1} m^{-1}\log 2 \to 0$, поэтому $l \leqslant 0$. Но если $l < 0$, то

$$\sum_{|\lambda|=1} \log|1-\lambda^m| < \frac{1}{2} lm < 0 \tag{3}$$

для достаточно больших m. Пусть U обозначает ε-окрестность точки 1 на единичной окружности (размер окрестности измеряется вдоль окружности). Если λ фиксировано, а m меняется, то доля времени, которую точка λ^m проводит в окрестности U, составляет $(1/2\pi)\varepsilon$. Если ε выбрано так, что $\sum_{|\lambda|=1} (1/2\pi)\varepsilon < \frac{1}{2}$, то половину времени $\lambda^m \notin U$ для всех тех собственных значений λ, для которых $|\lambda| = 1$, поэтому $mP_m = \sum_{|\lambda|=1} \log|1-\lambda^m| > > \sum_{|\lambda|=1} \log \varepsilon/4$. Это противоречит (3), и, следовательно, $l = 0$.

Мы показали, что $\mu_1 = \prod_{|\lambda|>1} |\lambda|$. Разделив (2) на m-ю степень этого равенства, получим

$$1 + \sum_{j=2}^{s} (\mu_j/\mu_1)^m - \sum_{k=1}^{t} (\nu_k/\mu_1)^m =$$
$$= \prod_{|\lambda|<1} |1-\lambda^m| \cdot \prod_{|\lambda|>1} |1-\lambda^{-m}| \cdot \prod_{|\lambda|=1} |1-\lambda^m|. \tag{4}$$

Из леммы 1 следует, что левая часть (4) стремится к 1 при $m \to \infty$. То же происходит с первыми двумя произведениями в правой части. Но члены третьего произведения, ограниченные числом 2, сколь угодно приближаются к нулю при $m \to \infty$. Поэтому если $\prod_{|\lambda|=1} |1-\lambda^m|$ имеет предел, то он должен равняться 0. С другой стороны, из (4) следует, что этот предел равен 1. Это противоречие доказывает теорему в случае 1.

Случай 2. Диффеоморфизм f не транзитивен. В этом случае рассмотрим марковское разбиение для каждого базисного множества Ω_b диффеоморфизма f и соответствующие максимальные собственные значения μ_{1b}. Выражение в левой части (2) заменяется на сумму аналогичных выражений, соответствующих каждому базисному множеству. Имеем $m^{-1}\log N_m(f) \to \log \max_b (\mu_{1b})$. Пусть $\max_b (\mu_{1b}) = \mu$. Когда мы разделим (2) на μ^m, в левой части (4) вместо 1 появится r, где r — число тех b, для которых $\mu_{1b} = \mu$. Таким образом, левая часть (4) стремится к r, но предел правой части, если он существует, равен 0, и мы получаем аналогичное противоречие. Теорема А доказана.

3. Доказательство теоремы В. Предположим, что существует контрпример к теореме В. В соответствии с замечанием 2 пункта 2, он накрывается контрпримером на нильмногообразии. Итак, мы имеем нильмногообразие N/D, гиперболический автоморфизм нильмногообразия g и У-диффеморфизм f, причем $f \simeq g$ и $\Omega(f) = N/D$.

Точка eD неподвижна относительно автоморфизма g, поэтому $L(g) \neq 0$. Но $L(f) = L(g)$, поэтому диффеоморфизм f также имеет некоторую ноподвижную точку aD. Сопрягая, если это необходимо, f с помощью диффеоморфизма, переводящего любую точку nD в anD, можно считать, что точка eD неподвижна относительно диффеоморфизма f. Как и в п. 2, мы можем предположить, что для каждого m все точки из множества $\mathrm{Fix}(f^m)$ имеют одинаковые индексы Лефшеца. Из теоремы 2.2 в [5] немедленно вытекает

Лемма 2. *Существует такое непрерывное сюръективное отображение* k: $N/D \to N/D$, *что* $k(eD) = eD$, $k \simeq id$ *и диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} N/D & \xrightarrow{f} & N/D \\ {\scriptstyle k}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle k} \\ N/D & \xrightarrow[g]{} & N/D \end{array} \qquad (5)$$

коммутативна.

Нам потребуются следующие две леммы из [11].

Лемма 3. *Пусть* h: $P \to P$ — *гомеоморфизм компактного многообразия* P, j: $M \to M$ — *гиперболический автоморфизм инфранильмногообразия и* k: $P \to M$ — *такое непрерывное сюръективное отображение, что* $kh = jk$. *Тогда* $k\Omega(h) = M$.

Доказательство. Периодические точки j плотны в M, а если $k\Omega(h) \neq M$, то множество $k\Omega(h)$ является собственным компактным подмножеством многообразия M. Следовательно, существует такая точка $z \in M$, что $j^r(z) = z$ для некоторого r и $z \notin k\Omega(h)$. Множество $\bigcup_{i=1}^{r} k^{-1}j^i(z)$ является непустым компактным h-инвариантным подмножеством многообразия P, непересекающимся с $\Omega(h)$, чего не может быть.

Лемма 4. *Если в лемме 3 гомеоморфизм h удовлетворяет аксиоме A, то существует такое базисное множество Ω_1 гомеоморфизма h, для которого $k\Omega_1 = M$.*

Доказательство. Пусть z — точка на многообразии M, обладающая всюду плотной j-орбитой. В соответствии с леммой 3 найдется такая точка $x \in \Omega(h)$, что $kx = z$. Пусть Ω_1 — базисное множество, содержащее точку x. Тогда множество $k\Omega_1$ содержит замыкание j-орбиты точки kx, которое совпадает с многообразием M.

Имеем $N_m(f) = |L(f^m)| = |L(g^m)| = N_m(g)$. Из диаграммы (5) следует, что $k\operatorname{Fix}(f^m) \subset \operatorname{Fix}(g^m)$, поэтому естественно ожидать, что отображение k является биекцией между множествами $\operatorname{Fix}(f^m)$ и $\operatorname{Fix}(g^m)$ для всех m. Однако диффеоморфизм f имеет по крайней мере два базисных множества, и по лемме 4 одно из них отображается под действием k на N/D. Это позволит нам найти такое r, что $k\operatorname{Fix}(f^r) \neq \operatorname{Fix}(g^r)$, и получить противоречие. Нам потребуются две леммы.

Лемма 5. *Пусть $G\colon N \to N$ — гиперболический автоморфизм и $F\colon N \to N$ — У-диффеоморфизм, причем функция $\rho(Gn, Fn)$ равномерно ограничена для всех $n \in N$ (здесь ρ — правоинвариантная метрика на N). Тогда диффеоморфизм F имеет ровно одну неподвижную точку.*

Эта лемма является прямым обобщением леммы 1.2 из [6], поэтому мы опускаем доказательство.

Лемма 6. *Пусть диаграмма* (5) *из леммы* 2 *коммутативна. $z \in N/D$ и $g^q z = z$. Тогда найдется такая точка $x \in \Omega_1$, что $kx = z$ и $x \in \operatorname{Per}(f)$.*

Доказательство[1]. (Заметим, что мы не требуем, чтобы $f^q x = x$.) Нам достаточно рассмотреть лишь случай $q = 1$. Множество $\Omega_1 \cap k^{-1}z$ непусто, инвариантно относительно диффеоморфизма f и содержится в Ω_1. Выберем такое $\varepsilon > 0$, что любой шар радиуса ε на многообразии N/D содержится в мно-

[1]) Вот более простое рассуждение, не использующее марковских разбиений. Достаточно доказать, что гиперболическое множество $\Omega_1 \cap k^{-1}z$ локально максимально, ибо в таком множестве всегда есть периодические точки. Если в малой окрестности U множества $\Omega_1 \cap k^{-1}z$ имеется содержащее его инвариантное замкнутое множество F, то $\Omega_1 \cup F$ — замкнутое инвариантное множество, содержащееся в малой окрестности множества Ω_1, и $\Omega_1 \cup F \supset \Omega_1$. Но хорошо известно, что Ω_1 локально максимально, следовательно, $F \subset \Omega_1$. Проекция kF лежит в малой окрестности $V = kU$ гиперболической неподвижной точки z. Но траектория $f^i v$ любой точки $v \neq z$, лежащей в такой окрестности, выходит из V при $i \to +\infty$ или $i \to -\infty$. Поэтому $kF = z$, и окончательно $F = \Omega_1 \cap k^{-1}z$. — *Прим. ред.*

жестве с локальной структурой произведения для диффеоморфизма g (по этому поводу см. [13], стр. 781). Рассмотрим такое $\delta > 0$, что локальная структура произведения для диффеоморфизма f существует в любом шаре радиуса δ и отображение k переводит этот шар внутрь некоторого шара радиуса ε. Построим марковское разбиение (см. [4]) для диффеоморфизма $f \mid \Omega_1$ с диаметром параллелограммов, меньшим δ, и обозначим через $\sigma\colon \Lambda \to \Lambda$ соответствующую топологическую цепь Маркова. Пусть $\pi\colon \Lambda \to \Omega_1$ — проекция. Тогда $L = \pi^{-1}(\Omega_1 \cap k^{-1}z)$ — непустое замкнутое инвариантное относительно σ подмножество множества Λ; кроме того, множество L обладает локальной структурой произведения для отображения σ. Чтобы доказать этот факт, рассмотрим два элемента $\alpha, \beta \in L$ (т. е. две последовательности символов), у которых совпадают нулевые координаты. В этом случае точки $\pi\alpha$ и $\pi\beta$ лежат в одном параллелограмме, поэтому пересечение $W^s_f(\pi\alpha, \delta) \cap W^u_f(\pi\beta, \delta)$ состоит из одной точки $y \in \Omega_1$, лежащей в том же параллелограмме. Но $ky \in W^s_g(k\pi\alpha, \varepsilon) \cap \cap W^u_g(k\pi\beta, \varepsilon) = \{z\}$. Таким образом, множество $\pi^{-1}y$ содержит элемент из множества L, причем локальные слои $W^s_\sigma(\alpha)$ и $W^u_\sigma(\beta)$ пересекаются в этом единственном элементе, нулевая координата которого совпадает с нулевой координатой элементов α и β, что и утверждалось. Из [2, стр. 36] вытекает, что ограничение $\sigma \mid L$ представляет собой топологическую цепь Маркова. Эта цепь Маркова имеет периодическую точку (относительно отображения σ), которую проекция π переводит в периодическую точку диффеоморфизма f. Лемма доказана.

Доказательство теоремы B. Поскольку диффеоморфизм f имеет еще одно базисное множество, кроме Ω_1, то существует такое q, что $N_q(f \mid \Omega_1) < N_q(f)$. Поэтому найдется такая точка z, что $z \in \mathrm{Fix}(g^q)$, но $z \notin k\,\mathrm{Fix}(f^q \mid \Omega_1)$. В соответствии с леммой 6 существует такая периодическая точка $x \in \Omega_1$, что $kx = z$. Обозначим $y = f^q x$. Тогда $y \neq x$ и $ky = z$. Чтобы получить противоречие, нам нужно будет сделать точки x, y, z неподвижными и перевести x и z в базисную точку. Это делается следующим образом.

Выберем такое r, чтобы $f^r x = x$ и $f^r y = y$. Тогда [1]) $k\,\mathrm{Fix}(f^r) \neq \neq \mathrm{Fix}(g^r)$. Обозначим через $p\colon N \to N/D$ проекцию $p(n) = nD$ и выберем $a \in p^{-1}x$, $b \in p^{-1}y$ и $c \in p^{-1}z$. Определим новые

---

[1]) Ибо $\mathrm{Fix}(f^r)$ и $\mathrm{Fix}(g^r)$ состоят из одинакового числа точек, $k\,\mathrm{Fix}(f^r) \subset \mathrm{Fix}(g^r)$ и k переводит две различные точки $\mathrm{Fix}(f^r)$ в одну точку $\mathrm{Fix}(g^r)$. Впрочем, этот факт не используется в дальнейшем. — *Прим. ред.*

У-диффеоморфизмы φ и ψ многообразия N/D, сопряженные с f^r и g^r:

$$\varphi(nD) = a^{-1}f^r(anD), \quad \psi(nD) = c^{-1}g^r(cnD)$$

где $n \in N$. Обозначим через $\varkappa$: $N/D \to N/D$ непрерывное отображение $\varkappa(nD) = c^{-1}k\ (anD)$. Тогда точка eD неподвижна относительно отображений φ, ψ и $\varkappa$, и диаграмма

$$\begin{array}{ccc} N/D & \xrightarrow{\varphi} & N/D \\ \varkappa\downarrow & & \downarrow\varkappa \\ N/D & \xrightarrow[\psi]{} & N/D \end{array}$$

коммутативна. Под действием отображения $\varkappa$ две неподвижные точки диффеоморфизма φ (точки eD и $a^{-1}bD$) переходят в базисную точку eD.

Пусть φ', ψ' и $\varkappa'$ — поднятия отображений φ, ψ и $\varkappa$ на универсальную накрывающую N многообразия N/D. Поскольку отображение $\varkappa$ свободно гомотопно тождественному, то отображение $\varkappa_*$ фундаментальной группы $\pi_1(N/D) = D$ является внутренним автоморфизмом, соответствующим некоторому элементу $d \in D$. Очевидно, что отображение $\varkappa'$: $N \to N$ удовлетворяет следующему условию: $\varkappa'(nd') = \varkappa'(n)d^{-1}d'd$ для любых $n \in N$ и $d' \in D$. Пусть m — такая точка из $p^{-1}(a^{-1}b\,D)$, что $\varkappa'(m) = e$. Точка $a^{-1}bD$ неподвижна относитеьно диффеоморфизма φ, следовательно, $\varphi'(m) = md_1$, где $d_1 \in D$. Имеем

$$e = \psi'(e) = \psi'\varkappa'(m) = \varkappa'\varphi'(m) = \varkappa'(md_1) = \varkappa'(m)d^{-1}d_1d = d^{-1}d_1d,$$

следовательно, $d_1 = e$ и точка m неподвижна относительно диффеоморфизма φ'.

φ': $N \to N$ — У-диффеоморфизм на многообразии N, а отображение $\alpha = \varphi' \mid D$: $D \to D$ единственным способом продолжается (см. [8]) до гиперболического автоморфизма Φ: $N \to N$. Имеем:

$$\rho(\varphi'(nd'), \Phi(nd')) = \rho(\varphi'(n)\alpha(d'), \Phi(n)\alpha(d')) = \rho(\varphi'(n), \Phi(n)),$$

где $n \in N$, $d' \in D$. Таким образом, отображение, ставящее в соответствие элементу n число $\rho(\varphi'(n), \Phi(n))$, можно рассматривать как вещественную функцию на многообразии N/D, а не на группе N. Следовательно, эта функция ограничена. Из леммы 5 вытекает, что диффеоморфизм φ' имеет ровно одну неподвижную точку, в то время как он по построению имеет две неподвижные точки e и m. Это противоречие доказывает теорему В.

Я выражаю свою глубокую признательность моему руководителю профессору Э. К. Зиману, а также Научно-исследовательскому совету за поддержку в период работы над этой статьей.

Список литературы

1. Auslander L., Bieberbach's theorems on space groups and discrete uniform subgroups of Lie groups, *Annals of Mathematics*, **71** (1960), 579—590.
2. Bowen R., Topological entropy and axiom A, Global Analysis, Proc. Symp. in Pure Math., **14**, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1970, 23—41.
3. Bowen R., Periodic points and measures for axiom A diffeomorphisms, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **154** (1971), 377—397.
4. Bowen R., Markov partitions for axiom A diffeomorphisms, *Amer. J. of Math.*, **92**, № 3 (1970), 725—747.
5. Franks J., Anosov diffeomorphisms, Global Analysis, Proc. Symp. in Pure Math., **14**, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1970, 61—93. (Русский перевод: Френкс Дж., У-диффеоморфизмы, в настоящем сборнике.)
6. Franks J., Anosov diffeomorphisms on tori, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **145** (1969), 117—124.
7. Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, М., «Наука», 1967.
8. Мальцев А. И., Об одном классе однородных пространств, *Изв. АН СССР*, сер. матем., **13**, № 1 (1949), 9—32.
9. Manning A., Axiom A diffeomorphisms have rational zeta functions, *Bull. London Math. Soc.*, **3** (1971), 215—220.
10. Manning A., Anosov diffeomorphisms on nilmanifolds, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **38** (1973), 423—426.
11. Manning A., On zeta functions and Anosov diffeomorphisms, Thesis, University of Warwick, 1972.
12. Синай Я. Г., Марковские разбиения и У-диффеоморфизмы, *Функц. анализ и его прил.*, **2**, № 1 (1968), 64—89.
13. Smale S., Differentiable dynamical systems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 747—817. (Русский перевод: Смейл С., Дифференцируемые динамические системы, *УМН*, **25**, № 1 (1970), 113—185.)
14. Spanier E., Algebraic Topology, N. Y., McGraw-Hill, 1966. (Русский перевод: Спеньер Э., Алгебраическая топология, М., «Мир», 1971.)

15*. Bowen R., Some systems with unique equilibrium states, *Math. Syst. Theory*, **8**, № 3 (1975), 193—202.

У-ПОТОКИ И ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ГРУППА[1])

Дж. Ф. Планте и В. П. Тёрстен

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\varphi_t\colon M \to M$ — У-поток на компактном римановом многообразии. Это означает [9], что существует непрерывное, инвариантное относительно потока φ_t разложение касательного расслоения M, $TM = E^s \oplus E^u \oplus E^T$, где E^T — расслоение на прямые, касательные к траекториям потока, а E^s и E^u — сжимающееся и, соответственно, расширяющееся под действием φ_t расслоения. Точнее, существуют такие постоянные $C > 0$, $\lambda > 0$, что для любых $X_p \in E^s$, $t > 0$

$$\|\varphi_{t*}(X_p)\| \leqslant C\exp(-\lambda t)\|X_p\|. \tag{1}$$

Аналогичное условие имеет место для расслоения E^u, но с $t < 0$. Говорят, что поток φ_t является У-потоком коразмерности один, если расслоение E^s или E^u одномерно. Пусть $\pi_1(M)$ обозначает фундаментальную группу многообразия M. Говорят, что конечно порожденная группа имеет экспоненциальный рост, если для данного конечного множества образующих функция $\Gamma(n)$ = (число различных элементов группы, записываемых в виде слова из образующих длины $\leqslant n$) мажорирует функцию $A\exp(an)$ для некоторых действительных чисел $A > 0$, $a > 0$. Это определение не зависит от выбора множества образующих и в случае, когда группа является фундаментальной группой многообразия M, эквивалентно тому, что функция $P(r)$ = (число гомотопически различных путей в M длины $\leqslant r$) мажорирует функцию $B\exp(br)$ для некоторых действительных чисел $B > 0$, $b > 0$. Цель этой заметки состоит в том, чтобы доказать следующую теорему.

Теорема. *Если* $\varphi_t\colon M \to M$ — *У-поток коразмерности один, то группа* $\pi_1(M)$ *имеет экспоненциальный рост. Именно,* $P(r) \geqslant B\exp(\lambda r/2\sigma)$, *где* $\sigma = \sup_{x\in M}\|\dot\varphi_t(x)\|$ *и* B — *некоторая постоянная.*

---

[1]) Plante J. F., Thurston W. P., Anosov flows and the fundamental group, *Topology*, 11 (1972), 147—150.

Я выражаю свою глубокую признательность моему руководителю профессору Э. К. Зиману, а также Научно-исследовательскому совету за поддержку в период работы над этой статьей.

Список литературы

1. Auslander L., Bieberbach's theorems on space groups and discrete uniform subgroups of Lie groups, *Annals of Mathematics*, **71** (1960), 579—590.
2. Bowen R., Topological entropy and axiom A, Global Analysis, Proc. Symp. in Pure Math., **14**, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1970, 23—41.
3. Bowen R., Periodic points and measures for axiom A diffeomorphisms, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **154** (1971), 377—397.
4. Bowen R., Markov partitions for axiom A diffeomorphisms, *Amer. J. of Math.*, **92**, № 3 (1970), 725—747.
5. Franks J., Anosov diffeomorphisms, Global Analysis, Proc. Symp. in Pure Math., **14**, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1970, 61—93. (Русский перевод: Френкс Дж., У-диффеоморфизмы, в настоящем сборнике.)
6. Franks J., Anosov diffeomorphisms on tori, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **145** (1969), 117—124.
7. Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, М., «Наука», 1967.
8. Мальцев А. И., Об одном классе однородных пространств, *Изв. АН СССР*, сер. матем., **13**, № 1 (1949), 9—32.
9. Manning A., Axiom A diffeomorphisms have rational zeta functions, *Bull. London Math. Soc.*, 3 (1971), 215—220.
10. Manning A., Anosov diffeomorphisms on nilmanifolds, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **38** (1973), 423—426.
11. Manning A., On zeta functions and Anosov diffeomorphisms, Thesis, University of Warwick, 1972.
12. Синай Я. Г., Марковские разбиения и У-диффеоморфизмы, *Функц. анализ и его прил.*, **2**, № 1 (1968), 64—89.
13. Smale S., Differentiable dynamical systems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 747—817. (Русский перевод: Смейл С., Дифференцируемые динамические системы, *УМН*, **25**, № 1 (1970), 113—185.)
14. Spanier E., Algebraic Topology, N. Y., McGraw-Hill, 1966. (Русский перевод: Спеньер Э., Алгебраическая топология, М., «Мир», 1971.)

15*. Bowen R., Some systems with unique equilibrium states, *Math. Syst. Theory*, 8, № 3 (1975), 193—202.

У-ПОТОКИ И ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ГРУППА [1])

Дж. Ф. Планте и В. П. Тёрстен

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\varphi_t\colon M \to M$ — У-поток на компактном римановом многообразии. Это означает [9], что существует непрерывное, инвариантное относительно потока φ_t разложение касательного расслоения M, $TM = E^s \oplus E^u \oplus E^T$, где E^T — расслоение на прямые, касательные к траекториям потока, а E^s и E^u — сжимающееся и, соответственно, расширяющееся под действием φ_t расслоения. Точнее, существуют такие постоянные $C > 0$, $\lambda > 0$, что для любых $X_p \in E^s$, $t > 0$

$$\| \varphi_{t*}(X_p) \| \leqslant C \exp(-\lambda t) \| X_p \|. \tag{1}$$

Аналогичное условие имеет место для расслоения E^u, но с $t < 0$. Говорят, что поток φ_t является У-потоком коразмерности один, если расслоение E^s или E^u одномерно. Пусть $\pi_1(M)$ обозначает фундаментальную группу многообразия M. Говорят, что конечно порожденная группа имеет экспоненциальный рост, если для данного конечного множества образующих функция $\Gamma(n)$ = (число различных элементов группы, записываемых в виде слова из образующих длины $\leqslant n$) мажорирует функцию $A \exp(an)$ для некоторых действительных чисел $A > 0$, $a > 0$. Это определение не зависит от выбора множества образующих и в случае, когда группа является фундаментальной группой многообразия M, эквивалентно тому, что функция $P(r)$ = (число гомотопически различных путей в M длины $\leqslant r$) мажорирует функцию $B \exp(br)$ для некоторых действительных чисел $B > 0$, $b > 0$. Цель этой заметки состоит в том, чтобы доказать следующую теорему.

Теорема. *Если $\varphi_t\colon M \to M$ — У-поток коразмерности один, то группа $\pi_1(M)$ имеет экспоненциальный рост. Именно, $P(r) \geqslant B \exp(\lambda r/2\sigma)$, где $\sigma = \sup_{x \in M} \| \dot{\varphi}_t(x) \|$ и B — некоторая постоянная.*

---

[1]) Plante J. F., Thurston W. P., Anosov flows and the fundamental group, *Topology*, 11 (1972), 147—150.

Этот результат получен Маргулисом в приложении к [2] для случая $\dim (M) = 3$. Естественно предположить, что он верен для всех У-потоков.

§ 2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Мы начнем с того, что введем некоторые обозначения. Не уменьшая общность, предположим, что $\dim (E^s) = 1$. (Иначе изменим направление потока.) Распределение E^s не обязательно гладкое [8], но однозначно интегрируемое (uniquely integrable) [1]) [1, 6]. Для $x \in M$ обозначим через $W^{ss}(x)$ интегральное многообразие распределения E^s, проходящее через точку x. Пусть η_t обозначает непрерывный поток с единичной скоростью вдоль W^{ss} [2]). Инвариантное расслоение $E^u \oplus E^T$ в нашем случае имеет класс гладкости C^1 [6], и мы обозначим через $W^u(x)$ $(x \in M)$ его интегральные многообразия. Пусть $N \subset M$ — минимальное множество для потока η_t, выберем базисную точку $x_0 \in N$. Пусть $D \subset W^u(x_0)$ — вложенный гладким образом замкнутый диск, содержащий точку x_0 в качестве внутренней точки. Существует такое наименьшее положительное число t_1, что $\eta_{t_1}(x_0) \in D$. Считая уже определенным число t_{n-1}, найдем по индукции число t_n как такое наименьшее число $t > t_{n-1}$, что $\eta_t(x_0) \in D$.

Лемма 1. *Существует такое $L > 0$, что $t_n - t_{n-1} < L$ для всех $n \in \mathbb{Z}^+$.*

Доказательство. Так как поток $\eta_t | N$ минимален, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число L_1, что для каждого $z \in N$ множество $\{\eta_t(z) \mid 0 \leqslant t \leqslant L_1\}$ пересекается с ε-окрестностью каждой точки $x \in N$ [7, стр. 402 [3])]. Выберем число ε таким образом, чтобы для некоторого δ было $\{\eta_t(x) \mid t \in [-\delta, \delta]\} \cap D = \varnothing$, если $d(x, x_0) < \varepsilon$. Число $L = L_1 + 2\delta$ удовлетворяет требованиям леммы.

Определим замкнутые пути $\gamma_n = \alpha_n * \beta_n$, где путь α_n идет из точки x_0 в точку $\eta_{t_n}(x_0)$ вдоль траектории потока η_t, а

---

[1]) Это значит, что через каждую точку проходит ровно одно интегральное многообразие. — *Прим. ред.*

[2]) Тем самым предполагается, что расслоение (подрасслоение касательного расслоения) со слоем E^s ориентируемо. Последнего всегда можно достичь, перейдя к подходящему двулистному накрытию $\tilde{M}$. Ясно, что если подгруппа $\pi_1(\tilde{M})$ группы $\pi_1(M)$ имеет экспоненциальный рост, то сама группа и подавно имеет. — *Прим. ред.*

[3]) Формально в [7] на стр. 402—403 доказывается несколько иное утверждение, но используемый здесь факт доказывается почти дословно так же. — *Прим. ред.*

путь β_n лежит в множестве D и идет из точки $\eta_{t_n}(x_0)$ в точку x_0. (Мы предполагаем, что длина пути β_n ограничена постоянной, не зависящей от n.)

Лемма 2. *$\gamma_n \simeq \gamma_m$ только в том случае, когда $n = m$.*

Доказательство. Предположим, напротив, что $\gamma_n \simeq \gamma_m$, причем $n > m$. Тогда $\beta_m^{-1} * \alpha_m^{-1} * \alpha_n * \beta_n \simeq 0$. Путь $\alpha_m^{-1} * \alpha_n$ гомотопен (с фиксированными концами) пути α_{n-m} вдоль траектории потока η_t, идущего из точки $\eta_{t_m}(x_0)$ в точку $\eta_{t_n}(x_0)$. Поэтому $\beta_m^{-1} * \alpha_m^{-1} * \alpha_n * \beta_n \simeq \beta_m^{-1} * \alpha_{n-m} * \beta_n$, а последний путь гомотопен замкнутой трансверсали к слоению W^u. Так как эта замкнутая трансверсаль гомотопна нулю, она ограничивает некоторый вложенный диск, который можно считать расположенным в общем положении по отношению к слоению W^u, в силу рассуждений в [4]. (См. доказательство (5.1).) Методом Пуанкаре — Бендиксона (как в (4.2) работы [5]) можно найти односторонний предельный цикл в слоении (с особенностью), индуцированном на диске. Отсюда следует, что слоение W^u имеет нетривиальный элемент голономии, который соответствует тождественному преобразованию в линейной голономии. Но это невозможно, поскольку любой нетривиальный элемент голономии в слоении W^u сопряжен отображению $\varphi_T | W^{ss}(p)$ для некоторой периодической точки[1]) p периода T (т. е. $\varphi_T(p) = p$), а якобиан отображения $\varphi_T | W^{ss}(p)$ в точке p отличен от 1. Это противоречие завершает доказательство леммы 2[2]).

---

[1]) Слой, не содержащий периодической траектории, стягиваем, а слой, содержащий периодическую траекторию S, рассматривается над ней со слоями W^{uu}, гомеоморфными евклидову пространству. За локальные трансверсали при построении отображения последования можно взять отрезки слоев W^{ss}. — *Прим. ред.*

[2]) Доказательство того факта, что замкнутая трансверсаль к слоению W^u (обозначим ее γ) не может быть стягиваема, проведено в статье сжато и даже несколько небрежно, так что имеет смысл остановиться на этом подробнее. Применяется рассуждение, идея которого восходит к Хефлигеру и которое в более близкой к нашему случаю обстановке (гладкость — всего лишь класса C^1) подробно проведено в § 5 статьи Френкса, помещенной в настоящем сборнике.

Рассуждаем от противного и берем двумерный диск с границей γ, гладко иммерсированный в M. В тех точках, где этот диск трансверсален к слоям W^u, определяются некоторые одномерные направления — пересечения касательных пространств к слою и диску, а пересечения диска со слоями суть интегральные кривые этого поля направлений (линейных элементов) на диске.

Удобнее иметь дело не с полем линейных элементов, а с векторным полем. Иными словами, желательно, чтобы поле линейных элементов было ориентируемым. Из сказанного у Френкса ясно, что оно заведомо будет таковым, если ориентируемы многообразия M и поле $(n - 1)$-мерных ($n =$

Обозначим через $|\alpha|$ длину пути α, а через $\bar{\alpha}$ — его гомотопический класс, в том случае если этот путь замкнут.

Лемма 3. *Пусть* α: $[0, 1] \to M$ *представляет некоторый отрезок траектории потока* η_t. *Тогда путь* α *гомотопен (с фиксированными концами) такому пути* α', *что*

$$|\alpha'| \leqslant C + 2(\sigma/\lambda)\log|\alpha|.$$

Доказательство. Пусть $\delta_{x,t}$ — путь, задаваемый формулой $\delta_{x,t}(s) = \varphi_{ts}(x)$. С помощью потока φ_t заменим путь α на го-

---

$= \dim M$) касательных подпространств $E^u \oplus E^T$. Если хоть один из этих объектов неориентируем, то рассмотрим накрытие $\tilde{M} \to M$, отвечающее подгруппе замкнутых путей, сохраняющих ориентации $E^u \oplus E^T$ и M. (Это двулистное или четырехлистное накрытие, смотря по тому, совпадает ли множество путей, сохраняющих ориентацию этих двух объектов, или нет). Если, как мы предположили, γ стягиваема, то ее можно поднять в $\tilde{M}$ (как замкнутую кривую), и она по-прежнему будет ограничивать там гладко иммерсированный диск D, с которым мы будем работать.

Приведение D «в общее положение» со слоями W^u подробно описано у Френкса. В итоге на D возникает поток, трансверсальный к краю и имеющий своими положениями равновесия невырожденные седла и центры, причем не может существовать сепаратриссы, соединяющей два различных седла. Отсюда следует, что некоторая траектория этого потока «наматывается» на предельное множество, которое является либо а) предельным циклом, либо б) «восьмеркой», состоящей из двух сепаратрисс, возвращающихся в то же самое седло, из которого они вышли. (Заметим, что о последней возможности у Планте — Тёрстена не говорится.)

Предельный цикл или, в другом случае, две петли «восьмерки» — это замкнутые кривые, лежащие в некотором слое W^u_x. Если бы они были стягиваемы (в точку) в этом слое, то траектории не могли бы на них наматываться. Следовательно, замкнутая траектория, соответственно, хотя бы одна из петель сепаратриссы, должна быть нестягиваема на слое. Но слои, не содержащие периодических траекторий рассматриваемого У-потока, гомеоморфны плоскостям, а содержащие периодические траектории — цилиндрам, причем соседние слои «наматываются» на эти цилиндры с обеих сторон. Поэтому в случае а) траектории нашего вспомогательного потока на диске должны наматываться на предельный цикл не только снаружи, но и изнутри. В случае б) нестягиваемая петля сепаратриссы тоже должна быть предельной для траекторий, наматывающихся на нее изнутри. Внутри этого предельного цикла или петли сепаратриссы можно взять близкую к нему (к ней) замкнутую кривую γ', трансверсальную к траекториям потока на диске, и продолжить рассуждения применительно к части диска, ограниченной γ'.

«Восьмерок» может быть лишь конечное число. Предельных циклов тоже может быть лишь конечное число. Действительно, каждый предельный цикл, будучи двусторонним, должен быть изолированным. А бесконечная последовательность предельных циклов, каждый из которых содержится внутри предыдущего, должна сходиться либо к некоторой периодической траектории c, либо к «восьмерке». Но если c нестягиваема на своем слое, то она сама является изолированным предельным циклом, а если она стягиваема, то в некоторой ее окрестности все траектории замкнутые. Аналогичное рассуждение применимо к «петлям восьмерки», и в итоге получается противоречие. — *Прим. ред.*

мотопный ему путь, соединяя концевые точки пути α с соответствующими точками пути $\varphi_t\alpha$, а именно:

$$\alpha \simeq \delta_{\alpha_0, t} * \varphi_t\alpha * \delta^{-1}_{\alpha_1, t} \quad \text{для каждого } t.$$

Положим $t = \log|\alpha|/\lambda$ и обозначим кривую, стоящую в правой части предыдущего равенства, через α'. Тогда, в силу (1),

$$|\alpha'| \leqslant \sigma(\log|\alpha|/\lambda) + C|\alpha|\exp(-\lambda\log|\alpha|/\lambda) + \sigma(\log|\alpha|/\lambda) \leqslant$$
$$\leqslant C + 2(\sigma/\lambda)\log|\alpha|.$$

Это доказывает лемму.

Лемма 4. *Пусть G — любое конечное множество образующих группы $\pi_1(M)$, где M — компактное риманово многообразие. Для $\bar{a} \in \pi_1(M)$ определим число $l_1(\bar{a})$ как минимальную длину слова, записанного с помощью элементов из G, представляющего $\bar{a}$, и пусть $l_2(\bar{a})$ — минимум длин замкнутых путей в $\bar{a}$. Тогда существуют такие постоянные k_1, k_2 $(0 < k_1 \leqslant k_2)$, что для каждого $\bar{a} \neq e$*

$$k_1 \leqslant l_2(\bar{a})/l_1(\bar{a}) \leqslant k_2.$$

Доказательство. Заметим сначала, что $l_2(\bar{a}) > 0$ для $\bar{a} \neq e$. Если $\bar{a} = g_{i_1}^{e_1} \ldots g_{i_n}^{e_n}$, где $e_i = \pm 1$, то $l_2(\bar{a}) \leqslant l_2(g_{i_1}) + \ldots$ $\ldots + l_2(g_{i_n})$. Пусть $k_2 = \max\limits_{G}(l_2(g))$. Имеем $l_2(\bar{a})/l_1(\bar{a}) \leqslant k_2$.

Чтобы найти число k_1, рассмотрим универсальную риманову накрывающую многообразия M. Пусть K — компактная фундаментальная область, D — диаметр K и d — диаметр M. Поскольку шар B радиуса $3d + D$ с центром в точке x_0 имеет конечный объем, то не более конечного числа образов K может содержаться целиком в шаре B. Таким образом, существует конечное множество гомотопических классов замкнутых путей $\bar{a}$, для которых $l_2(\bar{a}) \leqslant 3d$. Пусть $k = \max\limits_{l_2(\bar{a}) \leqslant 3d} l_1(\bar{a})$. Любой замкнутый путь α можно разбить так, что соединяя точки деления с базисной точкой путями длины $\leqslant d$, получим $\alpha \simeq \alpha_1 * \cdots * \alpha_m$, где $|\alpha_i| \leqslant 3d$ и $m \leqslant |\alpha|/d + 1$. Поэтому $l_1(\bar{a}) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{m} l_1(\bar{a}_i) \leqslant (|\alpha|/d + 1)k$. Пусть $d_0 = \inf\{|\beta| \; |\beta \not\simeq 0\} > 0$. Если $\alpha \not\simeq 0$, то $|\alpha| + d \leqslant (1 + d/d_0)|\alpha|$ и, следовательно,

$$l_1(\bar{a}) \leqslant \frac{(1 + d/d_0)}{d}|\alpha|k.$$

Взяв нижнюю грань по всем $\alpha \in \bar{\alpha}$, получим $l_1(\bar{\alpha}) \leqslant [(d + d_0)/dd_0] l_2(\bar{\alpha}) k$ или

$$\frac{l_2(\bar{\alpha})}{l_1(\bar{\alpha})} \geqslant \frac{dd_0}{d + d_0} k^{-1} = k_1.$$

Теперь мы можем вывести теорему из лемм. Согласно леммам 1, 2 и 3,

$$P(C + 2(\sigma/\lambda) \log(nL)) \geqslant n.$$

Таким образом, для тех чисел r, которые равны значению аргумента функции P при некотором n, имеем

$$P(r) \geqslant B \exp(r\lambda/2\sigma).$$

Теперь, подбирая постоянную B, можно добиться, чтобы это неравенство выполнялось при всех r. Тем самым доказано второе утверждение теоремы. Отсюда по лемме 4 немедленно следует и первое утверждение.

§ 3. ДАЛЬНЕЙШИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В [3] Боуэн показал, что число замкнутых траекторий У-потока (или, более общо, потока, удовлетворяющего аксиоме А) растет экспоненциально с ростом периода. Существуют примеры, в которых различные замкнутые траектории находятся в одном и том же классе свободных гомотопий; но если число различных замкнутых траекторий в каждом классе свободных гомотопий может быть ограничено сверху или растет не слишком быстро, то отсюда следовало бы, что число классов сопряженных элементов в $\pi_1(M)$ растет экспоненциально с ростом минимальной длины представителей.

В том случае, когда множество неблуждающих точек У-потока совпадает со всем многообразием, можно получить более точную оценку, оценивая скорость роста дисков, лежащих на слоях слоения W^u

$$P(r) \geqslant B \exp(\lambda_1(n-2)/\sigma + \lambda_2/2\sigma) r,$$

где λ_1 и λ_2 — постоянные, оценивающие скорость растяжения в E^u и скорость сжатия в E^s соответственно, а $n = \dim M$.

Список литературы

1. Аносов Д. В., Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны, *Труды матем. инст. им. В. А. Стеклова*, 90 (1967).

2. Аносов Д. В., Синай Я. Г., Некоторые гладкие динамические системы, *УМН*, 22, № 5 (1967), 107—172.
3. Bowen R., Periodic orbits for hyperbolic flows, *Amer. J. of Math.*, **94**, № 1 (1972), 1—30.
4. Franks J., Anosov Diffeomorphisms, Global Analysis, Proc. Symp. in Pure Math., 14, Amer. Math. Soc., Providence, R. I. (1970), 61—93. (Русский перевод: Френкс Дж., У-диффеоморфизмы, см. настоящий сборник.)
5. Haefliger A., Variétés feuilletées, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* (3), **16** (1962), 367—397.
6. Hirch M. W., Pugh C. C., Shub M., Invariant manifolds, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **76**, № 5 (1970), 1015—1019. (Полное изложение — препринт, 210 стр.)
7. Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, М. — Л., Гостехиздат, 1949.
8. Plante J., Anosov flows, *Amer. J. of Math.*, **94**, № 3 (1972), 729—754.
9. Smale S., Differentiable Dynamical Systems, Bull. Amer. Math. Soc., 73 (1967), 747—817. (Русский перевод: Смейл С., Дифференцируемые динамические системы, *Успехи матем. наук*, **25**, № 1 (1970), 113—185.)

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ, ФИЛЬТРАЦИИ И ЭНТРОПИЯ[1])

М. Шуб

Введение. Я попытаюсь описать несколько новых направлений в теории динамических систем, по крайней мере в той части этой теории, которая занимается изучением качественной структуры траекторий диффеоморфизмов и потоков на компактных гладких многообразиях без края M. Ровно за две недели до этого доклада у нас с Бетси родился первый ребенок, Александр, и, возможно, это событие послужило причиной моего чрезмерного оптимизма. Но я думаю, что при изучении этого предмета можно использовать некоторые общие подходы, даже если они не принесут блестящих результатов.

Я буду рассматривать следующие основные проблемы.

(I) *Типичность.* Найти массивное множество, состоящее из диффеоморфизмов или потоков, у которых асимптотическое поведение траекторий в каком-либо смысле можно описать в разумных терминах.

Под *массивным* множеством мы понимаем пересечение счетного числа открытых, плотных множеств (множество второй категории Бэра).

(II) *Построение моделей.* Основная идея здесь заключается в нахождении в некотором смысле наилучших или простейших диффеоморфизмов в каждом классе изотопных диффеоморфизмов многообразия M, т. е. в каждой связной компоненте группы $\mathrm{Diff}^r(M)$ диффеоморфизмов M класса C^r, $1 \leqslant r \leqslant \infty$. Мы будем называть простейшим диффеоморфизм, который обладает следующими свойствами:

a) f структурно устойчив;

---

[1]) Shub M., Dynamical systems, filtrations and entropy, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 80, No. 1 (1974) 27—41.

Настоящая работа представляет собой исправленный и расширенный вариант часового доклада с таким же названием, сделанного на 77-й летней сессии Американского математического общества 1 сентября 1972 г. в Ганновере, штат Нью-Гэмпшир; представлено в редакцию 14 июня 1973 г.

б) f имеет наименьшую топологическую энтропию среди всех структурно устойчивых диффеоморфизмов в данном классе изотопных диффеоморфизмов.

Напомним, что диффеоморфизм $f \in \mathrm{Diff}^r(M)$ называется структурно устойчивым, если у f существует такая окрестность $U_f \subset \mathrm{Diff}^r(M)$, что для любого $g \in U_f$ найдется гомеоморфизм $h\colon M \to M$, для которого $hf = gh$. Структурная устойчивость означает, что с точностью до непрерывной замены переменных глобальная структура траекторий всех диффеоморфизмов в окрестности f локально постоянна.

Определим теперь топологическую энтропию, пользуясь теоремой Боуэна [4]. Пусть (X, d) — компактное метрическое пространство, а $T\colon X \to X$ — непрерывное отображение. Подмножество $E \subset X$ называется (n, ε)-разделенным, если для любых $x, y \in E$, $x \neq y$ найдется такое j, $0 \leqslant j \leqslant n$, что расстояние $d(T^j(x), T^j(y)) > \varepsilon$. Обозначим через $S_n(\varepsilon)$ наибольшее число элементов в (n, ε)-разделенном подмножестве X и положим

$$S_\varepsilon(T) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{-1} \log S_n(\varepsilon).$$

Топологическая энтропия T, которая обозначается $h(T)$, определяется следующей формулой[1]):

$$h(T) = \lim_{\varepsilon\to 0} S_\varepsilon(T).$$

Для $f \in \mathrm{Diff}^r(M)$ всегда $0 \leqslant h(T) < \infty$ (см. [4]). Таким образом, топологическая энтропия по существу указывает экспоненциальную асимптотику числа траекторий f, различимых с заданной, но произвольно высокой точностью. В некотором смысле простейшие диффеоморфизмы — это такие структурно устойчивые диффеоморфизмы, которые имеют меньше всего существенно различных траекторий.

Результаты, о которых идет речь ниже, были почти целиком получены совместно с З. Нитецки, С. Смейлом и Д. Сулливаном и содержатся в работах [11], [18], [19]. Помимо этих математиков я весьма благодарен Р. Боуэну, М. Хиршу и Р. Вильямсу за полезные обсуждения.

1. Проблема типичности для диффеоморфизмов. Основная идея предлагаемого подхода состоит в том, чтобы выделить в

[1]) Первоначально топологической энтропии давалось иное определение, которое, впрочем, оказывается эквивалентным определению, приведенному выше. Это последнее определение, которое в ряде случаев более удобно, было найдено не только Боуэном: его идею высказал А. Н. Колмогоров, а в печати оно появилось (и использовалось) в работах Е. И. Динабурга [30*], [31*]. — *Прим. ред.*

качестве кандидатов в типичные свойства некоторые полезные следствия из аксиомы А Смейла и свойства отсутствия циклов (см. [22]), которые сами по себе не являются типичными [1]. Первый подход к проблеме был основан на понятии хорошей фильтрации.

Напомним, что множество $\Omega(f)$ неблуждающих точек $f \in \mathrm{Diff}^r(M)$ определяется следующим образом:

$$\Omega(f) = \{x \in M \mid \text{для любой окрестности } U \ni x \text{ найдется } n > 0, \text{ такое, что } f^n(U) \cap U \neq \varnothing\}.$$

Множество $\Omega(f)$ содержит все периодические траектории, а также все α- и ω-предельные точки. α-Предельным и ω-предельным множествами точки $x \in M$ называются множества $\alpha(x) = \{y \in M \mid \exists\, n_i \to -\infty,\ f^{n_i}(x) \to y\}$, $\omega(x) = \{y \in M \mid \exists\, n_i \to \infty,\ f^{n_i}(x) \to y\}$. Таким образом, $\Omega(f)$ — это замкнутое инвариантное множество, которое в некотором смысле содержит всю информацию об асимптотическом поведении f. Если множество $\Omega(f)$ конечно, то оно состоит только из периодических точек f.

Фильтрацией для диффеоморфизма $f \in \mathrm{Diff}^r(M)$ называется такая последовательность $\mathscr{M}$ компактных подмногообразий с краем $\varnothing \subset M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_k = M$, что $\dim M_i = \dim M = m$ и $f(M_i) \subset \mathrm{Int}\, M_i$, $i = 0, 1, \ldots, k$. Обозначим для данной фильтрации $\mathscr{M}$ через $K_i(\mathscr{M}) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(\overline{M_i \setminus M_{i-1}})$.

Другими словами, $K_i(\mathscr{M})$ — максимальное инвариантное относительно f множество, содержащееся в множестве $\overline{M_i \setminus M_{i-1}}$. Обозначим $K(\mathscr{M}) = \bigcup_{i=0}^{k} K_i(\mathscr{M})$. Таким образом, множество $\overline{M_i \setminus M_{i-1}}$ служит ловушкой для множества K_i и в принципе можно было бы получить большое количество информации о сложно устроенном множестве K_i в терминах M_i, M_{i-1} и f. Например, когомологии Чеха $\check{H}^* K_0(\mathscr{M}) = \lim(H^*(M_0) \xrightarrow{f^*} H^*(M_0))$.

Проблема 1. *Указать способ вычисления когомологий Чеха $\check{H}(K_i(\mathscr{M}))$ по конечному набору данных о M_i, M_{i-1} и f.*

Вообще говоря, наличие фильтрации может и не давать большей информации об f. Например, $\varnothing \subset M$ является фильтрацией для любого диффеоморфизма. Для любой фильтрации $\mathscr{M}$ имеем $K(\mathscr{M}) \supseteq \Omega(f)$. Фильтрация $\mathscr{M}$ называется хорошей (fine), если $K(\mathscr{M}) = \Omega(f)$. Диффеоморфизмы, удовлетворяющие введенным Смейлом аксиоме А и свойству отсутствия циклов, а также многие другие диффеоморфизмы, обладают хорошими фильтрациями.

Как показывает пример, построенный Ньюхаусом [9], диффеоморфизмы, обладающие хорошей фильтрацией, не типичны[1]). Но если множество Ω нельзя выловить с помощью одной фильтрации, может быть, это можно сделать, используя последовательность фильтраций? Мы скажем, что фильтрация $\mathscr{N} = \varnothing \subset N_0 \subset \ldots N_j = M$ уточняет (refines) фильтрацию $\mathscr{M}$, если каждое из множеств $\overline{N_\beta - N_{\beta-1}}$ лежит в некотором $\overline{M_\alpha - M_{\alpha-1}}$. Последовательность фильтраций $\mathscr{M}^i$, $0 \leqslant i < < \infty$ называется хорошей, если $\mathscr{M}^{i+1}$ уточняет $\mathscr{M}^i$ при каждом i и $\bigcap\limits_{i=0}^{\infty} K(\mathscr{M}^i) = \Omega(f)$.

Гипотеза 1. *Диффеоморфизмы, имеющие хорошую последовательность фильтраций, типичны в* $\mathrm{Diff}^r(M)$.

Феноменологическое описание тех диффеоморфизмов, которые имеют хорошую последовательность фильтраций, можно дать в терминах Ω-взрывов. Мы скажем, что диффеоморфизм $f \in \mathrm{Diff}^r(M)$ не допускает Ω-взрыва в C^j[2]), $0 \leqslant j \leqslant r$, если для любой окрестности $U_{\Omega(f)}$ множества $\Omega(f)$ найдется такая окрестность U_f диффеоморфизма f в пространстве $\mathrm{Diff}^r(M)$, снабженном C^j-топологией, что для $g \in U_f$ имеет место включение $\Omega(g) \subset U_{\Omega(f)}$.

Теорема 1.1. *Диффеоморфизм* $f \in \mathrm{Diff}^r(M)$ *имеет хорошую последовательность фильтраций тогда и только тогда, когда* f *не допускает* Ω*-взрывов в* C^0.

Доказательство этой теоремы имеется в [18], за исключением случая $m = \dim M = 2$, который рассмотрен в [11]. Если бы в теореме удалось заменить Ω-взрыв в C^0 на Ω-взрыв в C^1, то, в силу теоремы Пью [13], гипотеза 1 была бы справедлива в $\mathrm{Diff}^1(M)$.

II. Проблема типичности для векторных полей. Гипотезу о типичных свойствах для векторных полей естественнее всего формулировать в терминах функций Ляпунова. Обозначим через $\mathscr{X}^r(M)$ пространство векторных полей класса C^r на M. Напомним, что функция $L\colon M \to \mathbb{R}$ называется функцией Ляпунова для векторного поля $X \in \mathscr{X}^r(M)$, если дифференциал $DL = 0$ на множестве Ω_X неблуждающих точек векторного поля X, а в прочих точках $x \in M$ $X(L)(x) = DL(X(x)) < 0$.

[1]) То есть не существует массивного множества в $\mathrm{Diff}^r(M)$, состоящего из таких диффеоморфизмов. — *Прим. перев.*

[2]) В оригинале «$C^j\Omega$ explosion». — *Прим. ред.*

Гипотеза 2. *В пространстве $\mathscr{X}^r(M)$ существует массивное множество векторных полей, которые имеют функцию Ляпунова класса C^m.*

Векторное поле $X \in \mathscr{X}^r(M)$ порождает однопараметрическую группу диффеоморфизмов φ_t: $M \to M$ посредством дифференциального уравнения

$$\left.\frac{d\varphi_t(x)}{dt}\right|_{t=0} = X(x).$$

Фильтрацией $\mathscr{M}$ для векторного поля X называется последовательность компактных подмногообразий с краем $\varnothing \subset M_0 \subset \subset M_1 \subset \ldots \subset M_k = M$, которая является фильтрацией для каждого диффеоморфизма φ_t, $t > 0$, и кроме того, для каждого $x \in M$ траектория $\varphi_t(x)$ трансверсальна к границе каждого многообразия M_i, $i = 0, \ldots, k-1$. Множество Ω_X неблуждающих точек векторного поля X определяется следующим образом:

$$\Omega_X = \{x \in M \mid \text{для любой окрестности } U_x \subset M \text{ точки } x \text{ и любого } T > 0 \text{ найдется } t > T, \text{ такое, что } \varphi_t(U_x) \cap U_x \neq \varnothing\}.$$

Фильтрация $\mathscr{M}$ называется хорошей, если

$$K(\mathscr{M}) = \bigcup_{i=0}^{k} K_i(\mathscr{M}) = \bigcup_{i=0}^{k} \left(\bigcap_{t=-\infty}^{\infty} \varphi_t \overline{(M_i \setminus M_{i-1})} \right) = \Omega_X.$$

Последовательность фильтраций $\mathscr{M}^i$, $0 \leqslant i < \infty$, где $\mathscr{M}^{i+1}$ уточняет $\mathscr{M}^i$, называется хорошей, если $\bigcap_{i=0}^{\infty} K(\mathscr{M}^i) = \Omega_X$.

Естественно сформулировать следующую проблему, аналогичную проблеме 1.

Проблема 2. *Указать способ вычисления $\check{H}^*(K_\alpha(\mathscr{M}))$ по конечному набору данных об M_α, $M_{\alpha-1}$ и φ_t.*

Векторное поле $X \in \mathscr{X}^r(M)$ не допускает Ω-взрывов в C^j, если для любой окрестности U множества Ω_X в M существует такая окрестность V векторного поля X в пространстве $\mathscr{X}^r(M)$, что из $Y \in V$ следует $\Omega_Y \subset U$.

Теорема 2.1. *Пусть $X \in \mathscr{X}^r(M)$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(a) *X имеет хорошую последовательность фильтраций.*

(b) *X не допускает Ω-взрывов в C^0.*

(c) *У векторного поля X существует функция Ляпунова класса C^m.*

(d) *У X существует функция Ляпунова класса C^∞.*

Доказательство. Доказательство эквивалентности (a) и (b) составляет содержание работы [11]. Предположим, что $\mathcal{M}^i$ — хорошая последовательность фильтраций для X. Фиксируем i и построим такую C^∞-функцию L_i: $M \to \mathbb{R}$, что на $K(\mathcal{M}^i)$ $DL_i = 0$, вне $K(\mathcal{M}^i)$ $X(L_i) < 0$ и $L_i(K_\alpha(\mathcal{M}^i)) = \alpha$. Такую функцию можно построить в силу предложения 6 из [11] и результатов [14]. Выберем теперь положительные константы c_i таким образом, чтобы сумма $\sum c_i L_i$ была функцией класса C^∞. Таким образом, из (a) следует (d), а из (d) очевидно следует (c). Докажем, что из (c) следует (a). Пусть L: $M \to \mathbb{R}$ — функция Ляпунова класса C^m для X. По теореме Сарда критические значения функции L образуют замкнутое, нигде не плотное подмножество отрезка. Пусть множество $A_n = \{x_0, \ldots, x_{n_k}\}$, $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n_k}$ состоит из регулярных значений функции L и делит множество значений L на отрезки длины, меньшей чем $\frac{1}{n}$. Полагая $M_i^n = L^{-1}(-\infty, x_i]$, $i = 1, \ldots, n_k$, и $M_{n_k+1}^n = M$, получаем фильтрацию $\mathcal{M}^n$ для векторного поля X. Переходя от множества A_n к большему множеству A_{n+1}, строим фильтрацию $\mathcal{M}^{n+1}$, которая уточняет M^n, и в итоге получаем хорошую последовательность фильтраций.

Конечно, так же как и в случае диффеоморфизмов, если бы удалось в условии (b) теоремы 2.1 заменить C^0 на C^1, то, в силу теоремы Пью из [13], гипотеза о типичности была бы доказана в $\mathscr{X}^1(M)$.

Подход к проблеме типичности, основанный на рассмотрении функций Ляпунова, имеет то преимущество, что он позволяет питать даже более восторженные надежды, а именно можно надеяться, что a) векторные поля, у которых существует функция Ляпунова класса C^∞, образуют открытое и плотное подмножество в $\mathscr{X}^r(M)$ или в $\mathscr{X}^\infty(M)$. Далее, можно надеяться, что b) на открытом плотном множестве векторных полей функцию Ляпунова можно локально выбирать так, что она будет гладко зависеть от векторного поля, c) теория Тома — Мезера топологической устойчивости отображений может быть справедлива в этой ситуации в том смысле, что векторные поля с функциями Ляпунова, которые топологически устойчивы при локальном гладком выборе, образуют открытое плотное множество. Таким образом, d) топологически Ω-устойчивые векторные поля образуют открытое плотное множество (см. [7]). Напомним, что векторное поле X называется топологически Ω-устойчивым, если найдется такая окрестность

$U_X \ni X$ в $\mathscr{X}^r(M)$, что для любого $Y \in U_X$ множество Ω_Y гомеоморфно Ω_X. Наконец, можно надеяться, что е) для открытого плотного множества векторных полей существует такая функция Ляпунова L, что поток φ_t, порожденный векторным полем, имеет плотную траекторию на каждом из множеств $\Omega \cap L^{-1}(c)$, где c — критическое значение функции L.

Хотя приведенный список свойств выглядит довольно вызывающе, до сих пор, насколько мне известно, не найден контрпример к какому-нибудь из перечисленных утверждений. С другой стороны, имеются несколько весьма сложных примеров, не удовлетворяющих аксиоме А и свойству отсутствия циклов, и класс примеров, которые можно получить из [7], подтверждающие описанную картину. Если сформулированная программа будет осуществлена, то окажется, что для почти всех векторных полей имеет место довольно красивая картина поведения траекторий. Для таких векторных полей будет существовать топография, причем все возвращающиеся траектории будут проходить по водоразделам (ridges), точки каждого водораздела будут связаны воедино плотной (в нем) траекторией, все остальные траектории будут «стекать» вниз, и топографическая структура в существенных чертах сохранится при малом возмущении векторного поля [1]).

Наконец, можно надеяться даже на общий подход к проблеме бифуркаций векторных полей в терминах бифуркаций функций Ляпунова. Я полагаю, что я уже достаточно пофантазировал. В следующем параграфе я возвращусь к фактам и теоремам.

III. Теоремы плотности в C^0-топологии для диффеоморфизмов. Если стремиться найти модели структурно устойчивых или простейших диффеоморфизмов в каждом классе изотопных диффеоморфизмов, то в первую очередь возникает очевидный вопрос: содержатся ли структурно устойчивые диффеоморфизмы в каждом классе изотопных диффеоморфизмов? Этот вопрос был решен в положительном смысле Смейлом в [23]. В работах [17], [19] конструкция Смейла была развита и изучена более подробно, что позволило построить в каждом классе изотопных диффеоморфизмов плотное в C^0-топологии множество, состоящее из структурно устойчивых диффеоморфизмов, у которых множество неблуждающих точек легко опи-

[1]) Термин «ridge», который мы условно перевели как «водораздел», употреблен автором в таком смысле, который не имеет буквального перевода ни общепринятым словом, ни специальным географическим термином. Дело в том, что «ridge» может оказаться и горной вершиной, и плато, и седловиной, и дном котловины, и равнинным участком, который с одной стороны ограничен горами, а с другой — обрывом. — *Прим. перев.*

сывается с помощью конечного набора матриц, тесно связанных с гомологическими свойствами отображения. Результаты настоящего параграфа целиком заимствованы из [23], [17] и [19].

Для того чтобы получаемые диффеоморфизмы были структурно устойчивыми, мы будем строить эти диффеоморфизмы так, чтобы они удовлетворяли аксиоме А и строгому условию трансверсальности. Напомним, что диффеоморфизм $f \in \in \mathrm{Diff}^r(M)$ удовлетворяет аксиоме А Смейла, если

(a) Множество $\Omega(f)$ имеет гиперболическую структуру.

(b) $\Omega(f)$ совпадает с замыканием множества периодических точек f.

Наличие гиперболической структуры означает, что $TM \mid \Omega(f)$ — касательное расслоение к M, ограниченное на $\Omega(f)$, разлагается в прямую сумму двух инвариантных относительно дифференциала Tf подрасслоений E^s и E^u, причем существуют такие константы $0 < \lambda < 1$, $C > 0$, что

$$\|Tf^n \mid E^s\| \leqslant C\lambda^n \quad \text{для} \quad n > 0,$$
$$\|Tf^n \mid E^u\| \leqslant C\lambda^{|n|} \quad \text{для} \quad n < 0.$$

Для $f \in \mathrm{Diff}^r(M)$ и $x \in M$ положим

$$W^s(x) = \{y \in M \mid d(f^n(x), f^n(y)) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty\} \quad \text{и}$$
$$W^n(x) = \{y \in M \mid d(f^n(x), f^n(y)) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to -\infty\}.$$

Если f удовлетворяет аксиоме А, то для любой точки $x \in M$ множества $W^s(x)$ и $W^u(x)$ являются образами евклидовых пространств при взаимно однозначной иммерсии. Если, кроме того, для любого $x \in M$ многообразия $W^s(x)$ и $W^u(x)$ пересекаются трансверсально, то говорят, что f удовлетворяет строгому условию трансверсальности. Джоель Роббинс доказал следующую теорему.

Теорема [15]. *Пусть f — диффеоморфизм M класса C^2. Если f удовлетворяет аксиоме А и строгому условию трансверсальности, то f структурно устойчив в* $\mathrm{Diff}^1(M)$.

Недавно Кларк Робинсон снял в этой теореме ограничение $f \in C^2$ [1]). Однако для наших целей достаточно теоремы для C^2-диффеоморфизмов, так как, возмутив f, мы можем считать, что f принадлежит классу C^∞.

Первый шаг построения изотопии, переводящей f в структурно устойчивый диффеоморфизм, состоит в том, что f превращается в диффеоморфизм, сохраняющий фильтрацию спе-

[1]) См. [25*]. — *Прим. перев.*

циального вида, а именно разложение M на ручки. Напомним, что разложением на ручки $\mathcal{H}$ многообразия M называется последовательность подмногообразий $\varnothing \subset M_0 \subset \ldots \subset M_m = M$, где $\overline{M_j - M_{j-1}} = \bigcup_{i=1}^{n_j} D_i^j \times D_i^{m-j}$, причем прямые произведения $D_i^j \times D_i^{m-j}$, $i = 1, \ldots, n_j$, дисков размерности j и $m - j$ приклеены к границе M_{j-1} посредством вложений с попарно непересекающимися образами. Если разложение на ручки $\mathcal{H}$ является фильтрацией для диффеоморфизма f и, кроме того, при всех j образ $f(D_i^j \times 0)$ трансверсален к $0 \times D_k^{m-j}$ для всех $1 \leqslant i$, $k \leqslant n_j$, то мы будем писать $f \in T_{\mathcal{H}}$. Если $f \in T_{\mathcal{H}}$, то многообразие $f(D_i^j \times 0)$ пересекает $0 \times D_k^{m-j}$ в конечном числе точек, которое мы обозначим g_{ik}^j. Образуем геометрические матрицы пересечения $G_j = (g_{ik}^j)$. Можно построить также алгебраические матрицы пересечения $A_j = (a_{ik}^j)$, где a_{ik}^j равно числу точек пересечения $f(D_i^j \times 0)$ с $0 \times D_k^{m-j}$, подсчитанных с учетом знака. Матрица A_j может иметь отрицательные элементы, но, очевидно, $|a_{ik}^j| \leqslant g_{ik}^j$. Матрицы A_j определяют эндоморфизм цепного комплекса

$$
\begin{array}{ccccc}
\ldots \to H_j(M_j, M_{j-1}) & \xrightarrow{\partial} & H_{j-1}(M_{j-1}, M_{j-2}) \to \ldots \\
\downarrow{\scriptstyle A_j} & & \downarrow{\scriptstyle A_{j-1}} \\
\ldots \to H_j(M_j, M_{j-1}) & \xrightarrow{\partial} & H_{j-1}(M_{j-1}, M_{j-2}) \to \ldots,
\end{array}
$$

который индуцирует отображение $f_*: H_*(M) \to H_*(M)$ в гомологиях многообразия M. Матрицы G_j будут использованы для определения множества неблуждающих точек. Если $\mathcal{H}$ является фильтрацией для f, обозначим $\Omega_j = \Omega \cap (M_j - M_{j-1})$. Очевидно, $\Omega_j \subseteq K_j$.

Определение. Обозначим через H подмножество $\mathrm{Diff}^r(M)$, состоящее из таких диффеоморфизмов $f \in \mathrm{Diff}^r(M)$, что

(1) f удовлетворяет аксиоме А и строгому условию трансверсальности;

(2) $f \in T_{\mathcal{H}}$ для некоторого разложения $\mathcal{H}$ многообразия M на ручки;

(3) ограничение $f \mid K_j$ топологически сопряжено топологической цепи Маркова[1]), ассоциированной с геометрической матрицей пересечений C_j, а ограничение $f \mid \Omega_j$ топологически

[1]) В оригинале используется термин «subshift of finite type», который мы, следуя принятой в отечественной литературе терминологии, переводим термином «топологическая цепь Маркова» См. замечаиия в конце книги. — *Прим. перев.*

сопряжено ограничению этой топологической цепи Маркова на ее множество неблуждающих точек.

Условие (3) нуждается в объяснении. Заметим, что диффеоморфизмы из класса H структурно устойчивы. Я использовал символ H для обозначения рассмотренных Смейлом диффеоморфизмов с подковой (horseshoe), сохраняющих ручки (handles). Различие между изложением Смейла в [23] и нашим состоит в том, что мы обеспечиваем выполнение строгого условия трансверсальности и описываем ограничение $f \mid K_i$ в терминах G_i. Назовем $(n \times n)$-матрицу $B = (b_{ij})$ матрицей из нулей и единиц, если для всех i, j b_{ij} равно 0 или 1. Обозначим через N множество $(1, \ldots, n)$, снабженное дискретной топологией, и $\Sigma = \prod\limits_{-\infty}^{\infty} N$ с топологией тихоновского произведения. Элементы пространства Σ имеют вид $\{a_i\}_{i \in Z}$, где $a_i \in N$. Отображение сдвига $\sigma\colon \Sigma \to \Sigma$ определяется следующим образом: $\sigma\left(\{a_i\}_{i \in Z}\right) = \{a'_i\}_{i \in Z}$, где $a'_i = a_{i+1}$. Матрица B из нулей и единиц определяет инвариантное относительно сдвига σ подмножество $\Sigma_B \subset \Sigma$: именно $\{a_i\}_{i \in Z} \in \Sigma_B$ в том и только том случае, если $b_{a_i a_{i+1}} = 1$ для всех $i \in Z$. Ограничение сдвига σ на Σ_B называется топологической цепью Маркова. Далее, если задана $(n \times n)$-матрица G с целыми неотрицательными элементами, то ей можно следующим образом поставить в соответствие матрицу B из нулей и единиц. Рассмотрим G как линейное отображение решетки $Z^n \to Z^n$, где Z^n имеет стандартный базис $e_1, \ldots, e_n$. Положим $d_i = \sum\limits_{k=1}^{n} g_{ik}$ и $m = \sum\limits_i d_i$. Матрица B будет иметь размеры $m \times m$, и мы будем считать, что она действует на Z^m. Пусть решетка Z^m порождается элементами

$$e_{11}, \ldots, e_{1d_1}, e_{21}, \ldots, e_{2d_2}, \ldots, e_{n1}, \ldots, e_{nd_n}.$$

Положим

$$b_{ij,kl} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \sum\limits_{s=1}^{k-1} g_{ik} < j \leqslant \sum\limits_{s=1}^{k} g_{is}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Мы назовем B матрицей из нулей и единиц, ассоциированной с матрицей G, а $\sigma\colon \Sigma_B \to \Sigma_B$ — топологической цепью Маркова, ассоциированной с G. Теперь условие (3) приведенного выше определения можно сформулировать следующим образом: существует такой гомеоморфизм $h\colon K_i \to \Sigma_B$, что $hf = \sigma h$ и т. д.

Теорема 3.1. *Любой диффеоморфизм $f \in \mathrm{Diff}^r(M)$ изотопен некоторому диффеоморфизму из множества H посредством изотопии, малой в C^0-топологии. Таким образом, в C^0-топологии множество H плотно в $\mathrm{Diff}^r(M)$.*

Для $f \in H$ можно найти число периодических точек f периода m, которое мы обозначим $N_m(f)$, с помощью геометрических матриц пересечения G_i.

Предложение 3.2. *Пусть $f \in H$. Тогда $N_m(f) = \sum_i \operatorname{trace} G_i^m$.*

Можно получить также нечто вроде асимптотического неравенства Лефшеца для диффеоморфизмов из H.

Предложение 3.3. *Пусть $f \in H$. Тогда*

$$\overline{\lim}\, n^{-1} \log N_n(f) \geqslant \max \log |\lambda|,$$

где максимум берется по всем собственным значениям оператора

$$f_*\colon H_*(M, \mathbb{Q}) \to H_*(M, \mathbb{Q}).$$

Это утверждение основано на том, что спектральный радиус G_j не меньше, чем спектральный радиус A_j (поскольку $|a^j_{ik}| \leqslant g^j_{ik}$, см. [6]), который в свою очередь не меньше, чем спектральный радиус $f_{*i}\colon H_i(M, \mathbb{Q}) \to H_i(M, \mathbb{Q})$, а в формуле следа в предложении 3.2 знаки не чередуются!

Я вернусь к обсуждению этого вопроса несколько позже.

Доказательство теоремы 3.1 проводится посредством процедуры приспособления диффеоморфизма к разложению на ручки. Пусть задано разложение на ручки $\mathscr{H}$ многообразия M. Назовем любой диск вида $D_j^i \times q$, где $q \in D_j^{m-i}$, продольным диском [1]). Мы будем говорить, что диффеоморфизм f является марковским относительно $\mathscr{H}$ [2]), если образ любого продольного диска содержит целиком любой продольный диск, с которым он имеет непустое пересечение. Используя

[1]) В оригинале «core disk». В переводе использовано слово «продольный», так как в следующей статье Шуба и Сулливана наряду с этими дисками фигурируют также диски $r \times D_j^{m-i}$, $r \in D_j^i$, которые там называются поперечными (transverse). — *Прим. ред.*

[2]) В оригинале «f is fitted with respect to $\mathscr{H}$». Мы отказались от буквального перевода термина «fitted» («приспособленный») в применении к диффеоморфизму и переводим его более выразительным термином «марковский». Дело в том, что имеется явная аналогия со свойствами преобразования относительно марковского разбиения локально-максимального гиперболического множества [3]. В следующей статье Шуба и Сулливана, где некоторые ограничения накладываются также и на ручки, эта аналогия становится еще более полной. — *Прим. перев.*

стандартную технику дифференциальной топологии и двойную индукцию, можно построить изотопию, переводящую произвольный заданный диффеоморфизм в диффеоморфизм, марковский относительно разложения на ручки. Этот процесс по существу дает доказательство теоремы 3.1, если растянуть образы продольных дисков вдоль продольных дисков так, чтобы диффеоморфизм стал расширяющим в направлении этих дисков и сжимающим в поперечном направлении, что позволяет обеспечить гиперболическую структуру. Итак, теорему 3.1 можно модифицировать, сказав, что любой диффеоморфизм f изотопен элементу из H, марковскому относительно разложения на ручки, причем изотопия мала в C^0-топологии.

В некотором смысле приспособление диффеоморфизмов является аналогом для диффеоморфизмов процедуры построения разложения на ручки для гладких многообразий.

Я буду следовать аналогии с теоремой Смейла о структуре многообразий и попытаюсь найти простейшие матрицы, которые могут возникать в качестве G_i. Напомним, что мы ограничены неравенствами $g^i_{jk} > |a^i_{jk}|$, где матрицы $A_i = |a^i_{jk}|$ задают эндоморфизм цепного комплекса, который порожден разложением M на ручки и который в свою очередь порождает действие f в гомологиях многообразия M. Поэтому наиболее экономичным был бы выбор G_i, задаваемый равенствами $g^i_{jk} = |a^i_{jk}|$. Если E — матрица, то через $|E|$ мы будем обозначать матрицу, элементы которой являются абсолютными величинами соответствующих элементов матрицы E.

Далее мы будем называть свободным цепным комплексом свободный цепной комплекс $\mathscr{C}$, $0 \to C_m \to C_{m-1} \to \ldots \to C_2 \to \to C_1 \to C_0 \to 0$, где $m = \dim M$. Кроме того, мы с этого момента будем предполагать многообразие M связным.

Теорема (Смейл [20]). *Пусть* $\pi_1(M) = 0$ *и* $\dim M \geqslant 6$. *Если* $\mathscr{C}$ *— свободный цепной комплекс, причем* $C_1 = 0 = C_{m-1}$ *и при всех* k $H_k(M, \mathbb{Z}) = H_k(\mathscr{C}, \mathbb{Z})$, *то* $\mathscr{C}$ *является свободным цепным комплексом некоторого разложения многообразия M на ручки.*

Такой комплекс мы будем называть комплексом многообразия M. Следующая теорема выделяет класс матриц G_i, которые могут возникать в качестве геометрических матриц пересечения для диффеоморфизма, изотопного f. Формулировка несколько отличается от формулировки в [19]. Отметим, что предположения теоремы равносильны существованию цепной гомотопии[1]).

[1]) Последнее замечание относится к тому случаю, когда f сохраняет фильтрацию, связанную с разложением на ручки $\mathscr{H}$, которому соответствует цепной комплекс $\mathscr{C}$. (Выше уже говорилось, что этого — и даже

Теорема 3.4. *Пусть $\pi_1(M)=0$ и $\dim M \geqslant 6$. Пусть $f \in \mathrm{Diff}^r(M)$ и $\mathscr{E}$ — эндоморфизм цепного комплекса $\mathscr{C}$ многообразия M, задаваемый матрицами E_i. Если*

$$f_*\colon H_*(M, \mathbb{Z}) \to H_*(M, \mathbb{Z}) = \mathscr{E}_*\colon H_*(\mathscr{C}, \mathbb{Z}) \to H_*(\mathscr{C}, \mathbb{Z})$$

и при всех n

$$f_*\colon H_*(M, \mathbb{Z}_n) \to H_*(M, \mathbb{Z}_n) = \mathscr{E}_*\colon (\mathscr{C}, \mathbb{Z}_n) \to H_*(\mathscr{C}, \mathbb{Z}_n),$$

то f изотопен некоторому марковскому (относительно некоторого разложения на ручки) диффеоморфизму из множества H, для которого $G_i = |E_i|$.

Эта теорема сводит проблему нахождения широкого класса моделей структурно устойчивых диффеоморфизмов к чисто алгебраической проблеме. Она используется в качестве основного инструмента в следующем параграфе. Эндоморфизм $\mathscr{E}$, удовлетворящий утверждению теоремы 3.4, мы будем называть эндоморфизмом, связанным с f.

IV. Диффеоморфизмы Морса — Смейла. Диффеоморфизмы Морса — Смейла являются простейшими среди всех диффеоморфизмов. Они удовлетворяют аксиоме А и строгому условию трансверсальности и имеют конечное множество неблуждающих точек. Таким образом, это множество состоит из конечного числа периодических траекторий. Пейлис и Смейл доказали следующую теорему.

Теорема [12]. *Диффеоморфизмы Морса — Смейла — это в точности структурно устойчивые диффеоморфизмы с конечным множеством неблуждающих точек.*

В 1967 г. Смейл [21] поставил вопрос о том, какие диффеоморфизмы изотопны диффеоморфизмам Морса — Смейла. Летом 1971 г. я доказал, что диффеоморфизм Морса — Смейла действует в гомологиях квазиунипотентно, т. е. любое собственное значение отображения $f_*\colon H_*(M, \mathbb{Q}) \to H_*(M, \mathbb{Q})$ является корнем из 1 или, эквивалентно, $\max \log |\lambda| = 0$, где максимум берется по всем собственным значениям оператора f_*. Но в действительности можно сказать больше.

более сильного свойства $f \in T_{\mathscr{H}}$ — можно достичь посредством изотопии, но в самой теореме 3.4 этого не предполагается.) Тогда f порождает эндоморфизм $\mathscr{A} = \{A_i\}$ этого комплекса. Совпадение отображений $\mathscr{A}_* (= f_*)$ и $\mathscr{E}_*$ гомологий с коэффициентами в Z и Z_n эквивалентно существованию цепной гомотопии, связывающей $\mathscr{A}$ и $\mathscr{E}$. — *Прим. ред.*

Матрица

$$\begin{pmatrix} P_1 & * & \dots & * \\ 0 & P_2 & \dots & \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & P_n \end{pmatrix},$$

где каждая из матриц P_i является матрицей перестановки с точностью до знаков[1]), называется матрицей виртуальной перестановки.

Теорема 4.1. *Если $f \in \mathrm{Diff}^r(M)$ — диффеоморфизм Морса — Смейла, то существует такой цепной комплекс конечной длины $\mathscr{C}$, состоящий из конечно порожденных абелевых групп $\dots \to C_{i+1} \xrightarrow{\partial} C_i, \dots$, и такой цепной автоморфизм $\mathscr{F} = \{C_i \xrightarrow{F_i} C_i\}$, что*

(1) *Матрицы F_i являются матрицами виртуальных перестановок.*

(2) *Пара ($\mathscr{C}$; $\mathscr{F}$) эквивалентна геометрическому цепному отображению, индуцированному f.*

Для односвязных многообразий большой размерности можно дать необходимые и достаточные условия.

Теорема 4.2. *Пусть $\pi_1(M) = 0$ и $\dim M \geqslant 6$. Диффеоморфизм $f \in \mathrm{Diff}^r(M)$ изотопен диффеоморфизму Морса — Смейла тогда и только тогда, когда существует эндоморфизм $\mathscr{E} = \{E_i\}$, связанный с f и такой, что все матрицы E_i являются матрицами виртуальных перестановок.*

В силу теоремы Боуэна [2], топологическая энтропия отображения равна топологической энтропии ограничения этого отображения на множество его неблуждающих точек. Поэтому топологическая энтропия диффеоморфизма Морса — Смейла равна нулю. Следовательно, по крайней мере в классах изотопных диффеоморфизмов, описанных в теореме 4.2, мы можем построить простейший диффеоморфизм, а именно некоторый марковский элемент из H.

Проблема 3. *Является ли любой структурно устойчивый диффеоморфизм с нулевой энтропией диффеоморфизмом Морса — Смейла?*

---

[1]) То есть в каждой строке и каждом столбце содержится ровно один ненулевой элемент, равный $+1$ или -1. — *Прим. перев.*

Положительное решение этой проблемы явилось бы основанием для того, чтобы называть диффеоморфизмы Морса — Смейла самыми простейшими среди диффеоморфизмов в том смысле, в каком мы говорили выше о простейших диффеоморфизмах. Отрицательное решение было бы весьма поразительным, так как оно противоречило бы гипотезе Пейлиса и Смейла о том, что структурно устойчивые диффеоморфизмы — это в точности диффеоморфизмы, удовлетворяющие аксиоме А и строгому условию трансверсальности.

Теорему 4.2 можно также сформулировать следующим образом:

Класс гомологий графика f можно построить с помощью виртуальной перестановки некоторого цепного комплекса многообразия.

Из существования такой виртуальной перестановки, конечно, следует, что f_* является квазиунипотентным линейным отображением. Однако обратное неверно.

Теорема 4.3. *Пусть* $\pi_1(M)=0$, $\dim M\geqslant 6$ *и* $f\in \operatorname{Diff}^r(M)$. *Существует такое* $n>0$, *что* f^n *изотопен диффеоморфизму Морса — Смейла тогда и только тогда, когда линейное отображение* $f_*\colon H_*(M, \mathbb{Q})\to H_*(M, \mathbb{Q})$ *квазиунипотентно.*

Причиной, по которой следует брать конечную степень, а не сам диффеоморфизм f, является некоторое препятствие, тесно связанное с классами идеалов в полях деления круга. Р. Г. Суон показал, что это препятствие может быть ненулевым.

Чтобы построить пример, предположим, что $H_*(M)$ — группа без кручения.

Если отображения $f_{*i}\colon H_i(M)\to H_i(M)$ можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} A_1 & * & \dots & * \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \vdots & & \cdot & \vdots \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & & A_{n-} \end{pmatrix},$$

где каждая из матриц A_i эквивалентна над $\mathbb{Z}$ сопровождающей матрице своего характеристического полинома, то f изотопен диффеоморфизму Морса — Смейла (конечно, здесь предполагается, что $\Pi_1(M)=0$ и $\dim M\geqslant 6$). Более подробно это препятствие изучается в [19].

V. Энтропия. Для диффеоморфизмов, удовлетворяющих аксиоме А, Боуэн [2] доказал следующую теорему.

Теорема. $h(f)=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, n^{-1}\log N_n(f)$.

Таким образом, из асимптотического неравенства Лефшеца (предложение 3.3) следует, что для $f \in H$

$$h(f) \geqslant \max \log |\lambda|, \qquad (*)$$

где максимум берется по всем собственным значениям отображения

$$f_*: H_*(M, \mathbb{Q}) \to H_*(M, \mathbb{Q}).$$

Главная проблема, которую я хочу рассмотреть здесь, состоит в следующем: насколько широк класс отображений, для которых справедливо неравенство (*). Объединяя теорему плотности с результатом Нитецки из [10], получаем следующее утверждение.

Теорема 5.1. *Неравенство* (*) *справедливо для открытого и плотного в C^0-топологии подмножества* $\mathrm{Diff}^r(M)$.

Не вызывает сомнений, что пространство $\mathrm{Diff}^r(M)$ в этом утверждении можно заменить на $\mathrm{End}^r(M)$, пространство эндоморфизмов класса C^r многообразия M.

Гипотеза 3. (a) *Неравенство* (*) *справедливо для всех гладких отображений компактных дифференцируемых многообразий.*

(b) *Неравенство* (*) *справедливо для всех диффеоморфизмов, удовлетворяющих аксиоме* A *и строгому условию трансверсальности*[1]).

Из гипотезы 3 (a) следует, конечно, 3 (b), но зато есть больше оснований надеяться на справедливость последнего утверждения. Например, Боуэн доказал это утверждение в предположении, что множество Ω нульмерно. Утверждение 3 (a) было бы весьма впечатляющей теоремой, обобщающей теорему Лефшеца о неподвижных точках в смысле, который я разъясню ниже. Утверждение 3 (b) само по себе довольно важно, хотя бы ввиду ограничений, которые оно накладывает на простейшие диффеоморфизмы.

Число Лефшеца отображения f^n равно $L(f^n) = \sum (-1)^i \operatorname{trace} f^n_{*i}$, так что мы можем определить асимптоти-

---

[1]) Шуб и Вильямс [27], [28] доказали более сильное утверждение, чем гипотеза 3 (b), а именно неравенство (*) для всех диффеоморфизмов, удовлетворяющих аксиоме A и свойству отсутствия циклов. Изложение их доказательства, а также обзор других результатов, относящихся к гипотезе 3, см. в нашей статье «Гипотеза об энтропии», включенной в настоящий сборник. — *Прим. перев.*

ческое число Лефшеца $l(f)$ отображения f, полагая

$$l(f) = \overline{\lim}\, n^{-1} \log |L(f^n)|.$$

Если λ — максимальное по модулю собственное значение f_*, причем все собственные значения с таким же модулем возникают в размерностях одинаковой четности, то $l(f) = \log|\lambda|$. Другими словами, асимптотическое число Лефшеца равно $\log|\lambda|$, за исключением тех случаев, когда в формуле следа происходят сокращения, связанные с чередованием знаков.

Если все неподвижные точки f^n изолированы, то $L(f^n) = \sum_{P \in Fix(f^n)} \sigma(P)$, где $\sigma(P)$ — индекс точки P. Таким образом, формула следа Лефшеца дает число неподвижных точек f^n с учетом их индексов. Отсюда немедленно возникает проблема, относящаяся непосредственно к $l(f)$.

Проблема 4. *Пусть f: $M \to M$ — гладкое отображение, причем при каждом n неподвижные точки f^n изолированы. Верно ли, что*

$$\overline{\lim}\, n^{-1} \log N_n(f) \geqslant l(f)?$$

Это неравенство справедливо для эндоморфизмов Купки — Смейла, которые образуют массивное множество в пространстве $\mathrm{End}^r(M)$ (см. [16]). В результате обсуждений с Деннисом Сулливаном выяснилось, что чрезвычайно правдоподобно (это почти доказанная теорема) следующее утверждение: если $l(f) > 0$, то $N_n(f) \to \infty$[1]. Таким образом, асимптотическое число Лефшеца давало бы оценку асимптотики роста числа периодических траекторий, но, возможно, не точную из-за чередования знаков. Если мы не будем обращать внимание на чередование знаков в формуле, мы получим $\max \log|\lambda|$ и предполагаемую оценку асимптотической скорости роста траекторий, т. е. энтропию. Например, пусть f: $M \to M$ — произвольный диффеоморфизм, и рассмотрим прямое произведение $f \times \theta$: $M \times S^1 \to M \times S^1$, где θ — поворот окружности на иррациональный угол. Тогда $l(f \times \theta) = 0$ и $f \times \theta$ вообще не имеет периодических точек. Но $h(f \times \theta) = h(f)$, и если для f справедливо неравенство (*), то $f \times \theta$ также удовлетворяет этому неравенству.

В случае если f — произвольный гомеоморфизм клеточного комплекса или непрерывное отображение многообразия, неравенство (*), вообще говоря, не имеет места и ответ на вопрос, поставленный в проблеме 4, отрицательный, так что

[1] Строгое доказательство этого утверждения дано в заметке автора и Сулливана [29*]. — *Прим. перев.*

гладкость имеет решающее значение для этих вопросов. Для отображения f: $X \to X$ можно построить надстройку $S(f)$: $S(X) \to S(X)$. Далее умножим $S(f)$ слева на отображение g, под действием которого все точки движутся по «меридианам» в направлении от северного полюса надстройки $S(X)$ к южному полюсу (см. рис. 1).

Новое множество неблуждающих точек состоит в точности из северного и южного полюсов $S(X)$, которые являются единственными периодическими точками. С другой стороны, $l(g \circ S(f)) = l(f)$ и $\max \log|\lambda|$ для f и $g \circ S(f)$ также равны.

Приведем утверждение о непрерывных эндоморфизмах конечных комплексов, которое непосредственно следует из результатов Френкса [5][1]).

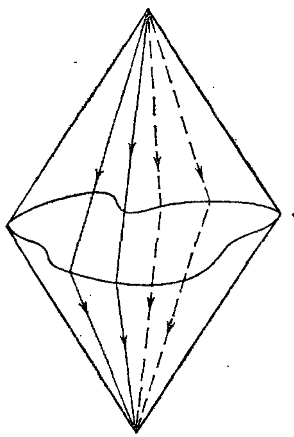


Рис. 1.

Предложение 5.2. *Пусть K — конечный комплекс и f: $K \to K$ — непрерывное отображение, имеющее неподвижную точку. Пусть решетка $\mathbb{Z}^k \subset H^1(K)$ инвариантна относительно f^*.*

Предположим, что $\rho_1, \ldots, \rho_k \in \mathbb{Z}^k$ и $\rho_1 \cup \ldots \cup \rho_k \neq 0$. Далее, предположим, что отображение f^* не имеет собственных значений, равных по модулю единице. Тогда $h(f) \geqslant \Sigma \log|\lambda|$, где суммирование производится по всем собственным значениям λ отображения f^*: $\mathbb{Z}^k \to \mathbb{Z}^k$, для которых $|\lambda| > 1$.

Наиболее естественное применение этого предложения относится к n-мерному тору $\mathbb{T}^n$. В этом случае, как легко видеть, те матрицы $A \subset SL(n, \mathbb{Z})$, которые не имеют собственных значений, равных 1 по абсолютной величине, порождают линейные У-диффеоморфизмы, которые являются простейшими диффеоморфизмами в своем классе изотопных диффеоморфизмов.

Наконец, я хотел бы вернуться к проблеме нахождения простейших диффеоморфизмов. Первая относящаяся сюда проблема состоит в определении того, найдутся ли среди элементов H простейшие диффеоморфизмы, если последние вообще существуют в данном классе изотопных диффеоморфизмов.

Проблема 5. *Пусть f — структурно устойчивый диффеоморфизм (или диффеоморфизм, удовлетворяющий аксиоме A и*

[1]) А именно из предложения 21. — *Прим. перев.*

строгому условию трансверсальности). Существует ли диффеоморфизм $g \in H$, изотопный f и такой, что $h(g) \leqslant h(f)$?

Результаты Боуэна [3] и Мэннинга [8] имеют непосредственное отношение к этой проблеме. Из положительного решения этой проблемы, конечно, следует гипотеза 3 (b).

Проблема 6. *Пусть $\mathcal{J}$ — класс изотопных диффеоморфизмов в* $\mathrm{Diff}^r(M)$. *Когда существует такой диффеоморфизм $g \in H \cap \mathcal{J}$, что для g в (*) имеет место равенство?*

Если $\max \log |\lambda| = 0$, такой диффеоморфизм g, в силу результатов Боуэна [2], должен быть диффеоморфизмом Морса — Смейла. Таким образом, сформулированная выше теорема о диффеоморфизмах Морса — Смейла является первым шагом в направлении решения проблемы 6. В этом случае возникает проблема о классах идеалов. Существуют также случаи, когда равенство $h(f) = \log \max |\lambda|$ не может выполняться по более простым причинам. Пусть M — связная сумма $S^3 \times S^3$ с собой, взятая 4 раза:

$$M = S^3 \times S^3 \# S^3 \times S^3 \# S^3 \times S^3 \# S^3 \times S^3.$$

Так как M является $(n-1)$-связным $2n$-мерным многообразием, то к нему можно применить теорию Уолла [24]. $H_3(M) = \oplus_8 \mathbb{Z}$, и это единственная группа гомологий, существенная для интересующей нас проблемы. Согласно теории Уолла для автоморфизма A группы $H_3(M)$ существует диффеоморфизм $\hat{A}$ многообразия M, порождающий автоморфизм A, если A сохраняет матрицу пересечений K на $H_3(M)$, которая является матрицей 8-го порядка и имеет следующий вид:

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \dots & & & 0 \\ -1 & 0 & & & & & & \\ \cdot & & 0 & 1 & & & & \cdot \\ \cdot & & -1 & 0 & & & & \cdot \\ & & & & 0 & 1 & & \\ \cdot & & & & -1 & 0 & & \cdot \\ & & & & & & 0 & 1 \\ 0 & & & & \dots & & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

и которую можно в эквивалентной над $\mathbb{Z}$ форме представить в виде

$$K' = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

В этом новом базисе мы будем искать такую матрицу A', что $A'^t K A' = K$. Но любая матрица вида

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & (B^{-1})^t \end{pmatrix},$$

очевидно, удовлетворяет такому соотношению. Пусть B — сопровождающая матрица многочлена $X^4 + X + 1$. Некоторые рассмотрения из теории Галуа (которыми я обязан Нику Бургойну и Марвину Гринбергу) показывают, что (1) не все корни этого полинома являются корнями из единицы, умноженными на вещественные числа, и, как легко видеть, (2) все корни комплексные.

Пусть теперь $g \in H$ — диффеоморфизм, изотопный диффеоморфизму $\hat{A}$, построенному по матрице A, которая выбрана описанным выше способом. Тогда

$$C_3 \xrightarrow{A_3} C_3 \quad \text{и} \quad H_3(M) \xrightarrow{A_3} H_3(M)$$

и $|a_{ij}^k| \leqslant |g_{ij}^3|$ для всех i, j. Из теории матриц с неотрицательными элементами (см. [6]) следует, что если максимальный модуль собственного значения G_3 равен максимальному модулю собственного значения A_3, то все собственные значения A_3 с максимальным модулем являются произведениями корней из 1 на вещественные числа. Так как собственные значения A являются собственными значениями A_3, то, в силу выбора A, следует, что спектральный радиус G_3 больше спектрального радиуса A_3. Но, в силу сказанного выше, для любого $g \in H$

$$h(g) = \overline{\lim}\, n^{-1} \log N_n(g) =$$
$$= \overline{\lim}\, n^{-1} \log \left(\sum \operatorname{trace} G_i^n\right) = \max \log |\lambda|,$$

где максимум берется по всем собственным значениям геометрических матриц пересечения G_i для g. Это рассуждение доказывает, что для любого диффеоморфизма $g \in H$, изотопного $\hat{A}$, имеет место неравенство $h(g) > \max \log |\lambda|$. Таким образом, трудности при нахождении элемента из H, для которого в $(*)$ реализуется равенство, лежат по меньшей мере в проблемах классов идеалов и в проблеме возрастания собственных значений при переходе от заданной матрицы к матрице, составленной из абсолютных величин элементов[1]). Ни одна из этих связей не представляется хорошо понятой.

---

[1]) В оригинале после этого сказано в скобках: «this is actually how the ideal classes came up in the first place». Предлагается следующая интерпретация этих слов: «В действительности именно в связи с вопросами об элементах в H со свойством $(*)$ и пришлось впервые (в данной теории) иметь дело с классами идеалов». — *Прим. ред.*

Если решение проблемы 5 окажется положительным, то существуют классы изотопных диффеоморфизмов, для которых из положительного решения следующей проблемы будет следовать отсутствие простейшего диффеоморфизма. В этих классах вместо одного такого диффеоморфизма придется рассматривать целую последовательность.

Проблема 7. *Пусть* $\mathcal{J}$ *— класс изотопных диффеоморфизмов в* $\operatorname{Diff}^r(M)$. *Существует ли такая последовательность диффеоморфизмов* $f_n \in \mathcal{J} \cap H$, *что* $h(f_n) \to \max \log |\lambda|$, *где максимум берется по всем собственным значениям отображения* $f_*\colon H_*(M, \mathbb{Q}) \to H^*(M, \mathbb{Q})$?

Список литературы

1. Abraham R., Smale S., Nongenericity of Ω-Stability, Global Analysis, Proc. Symp. in Pure Math., **14**, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1970, 5—8. (Русский перевод с препринта: Абрахам Р., Смейл С., Ω-устойчивость не типична, сб. перев. *Математика* **13** : 2 (1969), 156—160.)
2. Bowen R., Topological Entropy and Axiom A, Global Analysis, Proc. Symp. in Pure Math., **14**, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1970, 23—41.
3. Bowen R., Markov Partitions for Axiom A Diffeomorphisms, *Amer. J. Math.*, **92**, № 3 (1970), 725—743.
4. Bowen R., Entropy for Group Endomorphisms and Homogeneous Spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **153** (1971), 401—414.
5. Franks J., Anosov Diffeomorphisms, Global Analysis, Proc. Symp. in Pure Math., 14, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1970, 61—94. (Русский перевод: Фрэнкс Дж., У-диффеоморфизмы, в настоящем сборнике.)
6. Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, М., «Наука», 1967.
7. Hirsch M. W., Pugh C. C., Shub M., Invariant Manifolds, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **76**, № 5 (1970), 1015—1019. (Полное изложение — препринт 210 стр.)
8. Manning A., Axiom A Diffeomorphisms Have Rational Zeta Functions, *Bull. of the London Math. Soc.*, **3** (1971), 215—220.
9. Newhouse S., Diffeomorphisms with Infinitely Many Sinks, *Topology*, **13**, № 1 (1974), 9—18.
10. Nitecki S., On Semi-Stability for Diffeomorphisms, Invent. Math., 14 (1971), 83.
11. Nitecki S., Shub M., Filtrations, Decompositions and Explosions, *Amer. J. Math.*, **97**, № 4 (1975), 1029—1047.
12. Palis J., Smale S., Structural Stability Theorems, Global Analysis, Proc. Symp. in Pure Math., **14**, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1970, 223—232. (Русский перевод с препринта: Пейлис Дж., Смейл С., Теоремы структурной устойчивости, в сб. перев. *Математика*, **13** : 2 (1969), 145—155.)
13. Pugh C. C., An Improved Closing Lemma and a General Density Theorem, *Amer. J. Math.*, **89**, № 4 (1967), 1010—1021. (Русский перевод с препринта: Пью Ч., Усиление леммы о замыкании и теоремы о плотности, сб. перев. *Математика*, **12** : 6 (1968), 136—146.)
14. Pugh C. C., Shub M., The Ω-Stability Theorem for Flows, *Invent. Math.*, **11**, № 2 (1970), 150—158.

15. Robbin J., A Structural Stability Theorem, *Ann. Math.*, 94, № 3 (1971), 447—493. (Русский перевод: Роббин Дж., Теорема о структурной устойчивости, в кн. З. Нитецки, «Введение в дифференциальную динамику», М., «Мир», 1975, 233—289.)
16. Shub M., Endomorphisms of Compact Differentiable Manifolds, *Amer. J. Math.*, **91** (1969), 175—199.
17. Shub M., Structurally Stable Diffeomorphisms Are Dense, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 78 (1972), 817—818.
18. Shub M., Smale S., Beyond Hyperbolicity, *Ann. of Math.*, **96**, № 3 (1972), 587—591.
19. Shub M., Sullivan D., Homology Theory and Dynamical Systems, *Topology*, **14** (1975), 109—132. (Русский перевод: Шуб М., Сулливан Д., Теория гомологий и динамические системы, см. в настоящем сборнике.)
20. Smale S., On the Structure of Manifolds, *Amer. J. Math.*, **84** (1962), 387—399. (Русский перевод: Смейл С., О структуре многообразий, сб. перев. *Математика*, 8 : 4 (1964), 95—108.)
21. Smale S., Differentiable Dynamical Systems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 747—817. (Русский перевод: Смейл С., Дифференцируемые динамические системы, *Успехи матем. наук*, **25**, № 1 (1970), 113—185.)
22. Smale S., The Ω-Stability Theorem, Global Analysis, Proc. Symp. in Pure Math., **14**, Amer. Math. Soc. Providence, R. I. 1970, 289—298. (Русский перевод с препринта: Смейл С., Теорема Ω-устойчивости, сб. *Математика*, **13** : 2 (1969), 161—169.)
23. Smale S., Stability and Isotopy in Discrete Dynamical Systems, Dynamical Systems, ed. by Peixoto, Proc. Symp. at Salvador, Brazil, 1971, Academic Press, N. Y. — London, 1973, 527—530.
24. Wall C. T C., Classification of $(n-1)$-Connected 2n-Manifolds, Ann. *of Math.*, **75** (1962), 163—189.
25*. Robinson R. C., Structural stability for C^1 diffeomorphism, Dynamical systems — Warwick 1974. Proc. symp. Univ. of Warwick 1973/74, Lect. Note Muth., Springer, 1975, **468**, 21—23.
26*. Shub M., Morse — Smale diffeomorphism are unipotent on homology, Dynamical systems, ed. by M. M. Salvador, 1971, Acad. Press, N. Y. — London, 1973, 489—492.
27*. Shub M., P. F. Williams, Entropy and stability, *Topology*, **14**, № 4 (1975), 329—338.
28*. Shub M., Topological entropy and stability, Lect. Note Math. 1975, **468**, 39—40.
29.* Shub M., Sullivan D., A remark on the Lefschetz fixez point formula for differentiable map, *Topology*, **13** (2) (1974), 189—191.
30*. Диназбург Е. И., Соотношения между топологической энтропией и метрической энтропией. *ДАН СССР*, **190**, № 1, 1970, 19—22.
31*. Диназбург Е. И., Связь между различными энтропийными характеристиками динамических систем. *Изв. АН СССР*, Сер. мат., 1971, **35**, № 2, 324—366.

ТЕОРИЯ ГОМОЛОГИЙ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ[1])

М. Шуб и Д. Сулливан

ВВЕДЕНИЕ

Самыми простыми структурно устойчивыми динамическими системами с дискретным временем являются диффеоморфизмы Морса — Смейла, которые имеют конечное множество возвращающихся точек. В этой работе мы изучаем вопрос о том, какие связные компоненты в пространстве всех диффеоморфизмов содержат системы Морса — Смейла. В случае когда размерность многообразия больше пяти, мы сводим этот вопрос к вопросу из алгебраической топологии, относящемуся к многообразию и к рассматриваемой компоненте, а именно связанному с клетками, фундаментальной группой и индуцированными отображениями. В односвязном случае мы нашли следующие простые необходимые и достаточные условия — некоторая степень компоненты содержит диффеоморфизмы Морса — Смейла тогда и только тогда, когда все собственные значения индуцированного отображения в гомологиях являются корнями из единицы.

В односвязном случае мы даем также точную гомологическую характеристику связных компонент, содержащих диффеоморфизмы Морса — Смейла, которая требует некоторых алгебраических рассмотрений, связанных с классами идеалов в полях деления круга.

В неодносвязном случае для получения лучшей алгебраической характеристики требуется больше алгебраическо-геометрических рассмотрений, связанных с двумерными клетками. Такие рассмотрения позволили бы получить с помощью наших построений некоторые результаты в остальных размерностях, по крайней мере для некоторых специальных классов многообразий наподобие торов.

В общем наши построения показывают некоторые связи между гомологическими и динамическими свойствами диффеоморфизмов, например между собственными значениями индуцированного отображения в гомологиях и топологической

---

[1]) Shub M., Sullivan D., Homology Theory and Dynamical Systems, *Topology*, 14 (1975), 109—132.

энтропией. Заключительная часть конструкции применима в случае многообразия любой размерности и дает доказательство следующей теоремы.

Теорема (Смейл, Шуб, Уильямс). *Любой диффеоморфизм компактного многообразия можно с помощью гладкой изотопии перевести в C^0-близкий структурно устойчивый диффеоморфизм.*

ИСТОРИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ И ОПИСАНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ И ПРОБЛЕМ

Изучение структурно устойчивых диффеоморфизмов занимает центральное место во многих недавних работах по геометрической теории динамических систем. Первоначально существовала надежда на то, что структурно устойчивые диффеоморфизмы могут образовывать открытое и плотное подмножество в пространстве $\mathrm{Diff}^r(M)$ подобно тому, как это оказалось в случае, когда M — окружность (последнее было доказано Пейксото [14] [1])).

Структурно устойчивые диффеоморфизмы окружности S^1 имеют конечное число периодических точек и простую геометрическую структуру. Примеры диффеоморфизмов подобного типа можно построить на любом многообразии, рассмотрев малый сдвиг вдоль градиентных линий невырожденной функции Морса. Пейлис и Смейл [13] доказали, что такие диффеоморфизмы структурно устойчивы, и нашли необходимые и достаточные условия в геометрических терминах для структурной устойчивости диффеоморфизмов с конечным множеством периодических точек.

Еще раньше Смейл [20] с помощью своего примера с подковой доказал, что диффеоморфизмы Морса — Смейла не плотны даже на двумерной сфере, а Том отметил, что на двумерном торе линейное отображение с матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ даже не гомотопно отображению с конечным множеством периодических точек общего положения, так как числа Лефшеца итераций этого отображения не ограничены [2]). Наконец, Аносов

[1]) Фактически результаты о структурно устойчивых диффеоморфизмах окружности были получены значительно раньше А. Г. Майером [28] и позднее повторены В. А. Плиссом [29], а вклад Пейксото относится к более сложному вопросу о грубых потоках на поверхностях. — *Прим. перев. и ред.*

[2]) Пользуясь результатом нашей работы [25], можно усилить это утверждение, исключив из него слова «общего положения».

[1] доказал, что это отображение и его геометрические обобщения структурно устойчивы. Поразительной особенностью этого примера является то, что периодические точки плотны на многообразии.

В 1965 г. Смейл с помощью примера, при построении которого использовались У-диффеоморфизмы на торе в сочетании с другой конструкцией, показал, что структурно устойчивые диффеоморфизмы не плотны в пространстве $\mathrm{Diff}(M)$, снабженном C^r-топологией ($r \geqslant 1$). После долгих попыток ослабить понятие структурной устойчивости (Ω-устойчивость и т. д.) настолько, чтобы новым свойством устойчивости обладало массивное (плотное) множество в $\mathrm{Diff}(M)$, внимание вновь сосредоточилось на структурно устойчивых диффеоморфизмах, но при этом стали рассматриваться более грубые (gross) топологические свойства, чем типичность в C^r-топологии. Вот примеры подобных вопросов: содержит ли каждая связная компонента в $\mathrm{Diff}(M)$ структурно устойчивый диффеоморфизм? Какие компоненты содержат диффеоморфизмы Морса — Смейла? На каких многообразиях существуют У-диффеоморфизмы?

В 1971 г. Смейл обобщил свой основной пример с подковой и показал, что в каждом классе изотопных диффеоморфизмов имеются Ω-устойчивые диффеоморфизмы. Почти сразу же вслед за этим Р. Ф. Уильямс и Шуб дополнили аргументы Смейла и заменили Ω-устойчивость структурной устойчивостью, а Шуб [18] доказал, что структурно устойчивые диффеоморфизмы плотны в $\mathrm{Diff}(M)$ в C^0-топологии. В этих примерах замыкание множества периодических точек является либо нульмерным канторовым множеством, либо конечным множеством.

Работа Боуэна [2] позволяет получить очень прозрачную картину поведения диффеоморфизма на таких инвариантных множествах. Имеет место очень красивый факт — для этих примеров полная динамическая картина возвращения траекторий диффеоморфизма описывается с помощью геометрических матриц пересечения, ассоциированных с классическими цепными отображениями, порожденными этими диффеоморфизмами. Эта конструкция описана в § 1. Рассмотрения облегчаются с помощью идеи марковских (fitted) разложений на ручки, которая, возможно, представляет также самостоятельный геометрический интерес.

Взаимосвязь между алгебраической топологией диффеоморфизма и картиной траекторий диффеоморфизма, которая имеется для этого плотного в C^0-топологии подмножества $\mathrm{Diff}(M)$, открывает новую точку зрения в геометрической теории динамических систем и ставит много интересных вопросов перед специалистами по геометрической топологии. Примером такого вопроса служит проблема построения простейшего с энтропийной точки зрения диффеоморфизма в данном классе изотопных диффеоморфизмов, которая в общих чертах обсуждается в § 4.

Очень интересным вопросом является связь между логарифмом модуля максимального собственного значения отображения, индуцированного диффеоморфизмом f в гомологиях, и топологической энтропией $h(f)$.

Случай нулевой энтропии или, что эквивалентно (для наших примеров), конечного множества периодических точек рассматривается в § 3. В этом случае проблема превращается в уже упомянутую проблему определения тех связных компонент пространства $\mathrm{Diff}(M)$, которые содержат диффеоморфизмы Морса — Смейла. В односвязном случае мы характеризуем такие компоненты в терминах их гомологических свойств. Если бы можно было не обращать внимание на кручение и классы идеалов в полях деления круга, то условие имело бы такой вид — диффеоморфизм f изотопен диффеоморфизму Морса — Смейла тогда и только тогда, когда все собственные значения оператора f_*, действующего в гомологиях, лежат на единичной окружности[1]).

Исходя из примера Тома, Шуб [17] еще раньше заметил, что это гомологическое условие является необходимым. Однако смейловская картина поведения этих диффеоморфизмов позволяет установить большее, а именно что на уровне цепных отображений диффеоморфизм можно представить в виде «матриц виртуальных перестановок»

$$\begin{bmatrix} P_1 & * & \dots & * \\ 0 & P_2 & \dots & * \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & & \dots & P_n \end{bmatrix},$$

где каждая матрица P_i содержит в каждой строке и столбце ровно один ненулевой элемент, равный $+1$ или -1.

Геометрические рассмотрения в § 2 показывают, как реализовать абстрактное цепное отображение посредством диффеоморфизма, сохраняющего разложение на ручки и порождающего хорошие матрицы пересечений. Объединяя эти рассмотрения с конструкцией Смейла, Шуба и Уильямса, приве-

[1]) Из нашего гомологического условия следует, что некоторая степень f изотопна диффеоморфизму Морса — Смейла тогда и только тогда, когда все собственные значения f_* лежат на единичной окружности.

денной в § 1, получаем, что в соответствующих связных компонентах пространства $\mathrm{Diff}(M)$ существуют диффеоморфизмы Морса — Смейла, и обратное утверждение.

Мы покажем, что условие с виртуальными перестановками можно выразить в терминах класса гомологий в $H_m(M\times M, \mathbb{Z})$, определяемого графиком f. Кроме того, мы наметим схему рассуждений для неодносвязного случая.

Рассмотрение диффеоморфизмов Морса — Смейла находится в центре нескольких интересных взаимосвязей между геометрическими и алгебраическими явлениями, которые следует изучить подробнее. Например, можно спросить о

(I) точной взаимосвязи между классами идеалов в полях деления круга и цепными отображениями, которые являются виртуальными перестановками (см. § 3 и [26]),

(II) взаимосвязи между неотрицательными матрицами и классами идеалов (см. § 3 и [7]),

(III) значении того факта, что диффеоморфизмы, которые строятся при монодромии в алгебраической геометрии, изотопны диффеоморфизмам Морса — Смейла (см. § 3).

Заметим, наконец, что конструкция диффеоморфизмов Морса — Смейла является частным случаем следующей теоремы.

Теорема. *Пусть f — диффеоморфизм односвязного многообразия M^m размерности не меньше шести и $\{C_i \xrightarrow{F_i} C_i\}$ — абстрактное цепное отображение, представляющее класс гомологий графика f, причем $C_m = C_0 = \mathbb{Z}$, $C_1 = C_{m-1} = 0$. Тогда можно так продеформировать f в структурно устойчивый диффеоморфизм с нульмерным множеством неблуждающих точек Ω, что Ω и ограничение f на Ω можно явно построить, исходя из символических динамических систем, определяемых матрицами, которые получены из матриц цепных отображений F_i путем замены их элементов абсолютными величинами.*

Доказательство этой теоремы проведено в § 2 и 3; там намечены также обобщения на неодносвязный случай.

§ 0. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Если X и Y — топологические пространства, $f\colon X\to X$ и $g\colon Y\to Y$ — непрерывные отображения, то f и g называются топологически сопряженными, если существует такой гомеоморфизм $h\colon X\to Y$, что $gh = hf$. Диффеоморфизм $f\in \mathrm{Diff}^r(M)$ называется структурно устойчивым, если у f существует такая окрестность $U_f \subseteq \mathrm{Diff}^r(M)$, что любой диффеоморфизм

$g \in U_f$ топологически сопряжен диффеоморфизму f[1]). Таким образом, структурная устойчивость означает, что структура траекторий диффеоморфизмов локально постоянна в окрестности f с точностью до непрерывной замены координат.

Для диффеоморфизма $f \in \mathrm{Diff}^r(M)$ через $\Omega(f)$ (или просто Ω, если это не может привести к недоразумению) обозначается множество неблуждающих точек f, т. е. таких точек $x \in M$, что для любой окрестности U_x точки x в M существует $n > 0$, такое, что $f^n(U_x) \cap U_x \neq \varnothing$. Точка $x \in M$ называется периодической, если для некоторого $n > 0$ $f^n(x) = x$. Все периодические точки, конечно, являются неблуждающими.

Инвариантное относительно диффеоморфизма f множество $\Lambda \subset M$ (т. е. такое множество, для которого $f(\Lambda) = \Lambda$) имеет гиперболическую структуру, если $T_\Lambda M$ — ограничение на Λ касательного расслоения TM — разлагается в прямую сумму инвариантных относительно дифференциала Tf подрасслоений $T_\Lambda M = E^s \oplus E^n$, причем найдутся такие константы $C > 0$ и $\lambda < 1$, что $\|Tf^n | E^s\| \leqslant C\lambda^n$ при $n > 0$ и $\|Tf^n | E^u\| \leqslant C\lambda^{-n}$ при $n < 0$.

Диффеоморфизм $f \in \mathrm{Diff}^r(M)$ удовлетворяет аксиоме A Смейла, если

(a) множество $\Omega(f)$ имеет гиперболическую структуру,

(b) множество $\Omega(f)$ совпадает с замыканием множества периодических точек f.

Для $f \in \mathrm{Diff}^r(M)$ положим

$$W^s(x) = \{y \in M \mid d(f^n(x), f^n(y)) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty\}$$

и

$$W^u(x) = \{y \in M \mid d(f^n(x), f^n(y)) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to -\infty\}.$$

Если f удовлетворяет аксиоме A, то, как следует из [8] и [23], множества $W^s(x)$ и $W^u(x)$ являются образами евклидовых пространств при инъективной иммерсии в M. Если, кроме того, для всех $x \in M$ многообразия $W^s(x)$ и $W^u(x)$ пересекаются в точке x трансверсально, то говорят, что диффеоморфизм f удовлетворяет строгому условию трансверсальности.

Определение. Диффеоморфизм f называется диффеоморфизмом Морса — Смейла, если

(1) Диффеоморфизм f удовлетворяет аксиоме A и строгому условию трансверсальности и

---

[1]) Обычно требуют еще, чтобы при достаточной малости окрестности U_f сопряжение f с $g \in v_f$ можно было осуществить посредством гомеоморфизма, сколь угодно близкого к тождественному. — *Прим. перев.*

(2) Множество $\Omega(f)$ конечно.

Пейлис и Смейл [13] доказали следующую теорему.

Теорема. *Диффеоморфизм* $f \in \mathrm{Diff}^r(M)$ *является диффеоморфизмом Морса — Смейла тогда и только тогда, когда* $\Omega(f)$ *— конечное множество и* f *структурно устойчив.*

Таким образом, с точки зрения теории динамических систем диффеоморфизмы Морса — Смейла являются простейшими среди всех диффеоморфизмов.

Позднее Джоэль Роббин [15] доказал такую теорему:

Теорема. *Если* f *— диффеоморфизм класса* C^2, *удовлетворяющий аксиоме* A *и строгому условию трансверсальности, то* f *структурно устойчив в* $\mathrm{Diff}^1(M)$.

Недавно Кларк Робинсон снял дополнительное требование, чтобы f принадлежал $\mathrm{Diff}^2(M)$. Основными источниками по поводу материала, приведенного выше без ссылок, являются [16] и [22]. Ниже мы определяем топологическую энтропию, используя теорему Боуэна [4] [1]).

Пусть (X, d) — компактное метрическое пространство (d — метрика в X) и $T: X \to X$ — непрерывное отображение. Множество $E \subseteq X$ называется (n, ε)-разделенным, если для любых $x, y \in E$, $x \neq y$ найдется такое j, что $0 \leqslant j < n$ и $d(T^j(x), T^j(y)) > \varepsilon$. Обозначим через $r_n(\varepsilon)$ максимальное число элементов в (n, ε)-разделенном множестве, через $r_\varepsilon(T)$ — верхний предел

$$r_\varepsilon(T) = \limsup \frac{1}{n} \log r_n(\varepsilon)$$

и назовем топологической энтропией отображения T величину $h(T) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} r_\varepsilon(T)$. Таким образом, в некотором смысле топологическая энтропия измеряет скорость асимптотически экспоненциального роста числа различных траекторий отображения T, различимых при фиксированной, но произвольно высокой точности их задания. При $f \in \mathrm{Diff}^r(M)$, $0 \leqslant h(f) < \infty$. Следующая теорема является частным случаем теоремы Боуэна [2].

Теорема. *Пусть* $f \in \mathrm{Diff}^r(M)$. *Тогда* $h(f) = h(f|\Omega)$. *Если* f *удовлетворяет аксиоме* A *и строгому условию трансверсальности, то условие* $h(f) = 0$ *эквивалентно тому, что* f *— диффеоморфизм Морса — Смейла.*

---

1) Доказанную впервые Е. И. Динабургом (см. [30*]). — *Прим. перев.*

§ 1. ПОСТРОЕНИЕ СТРУКТУРНО УСТОЙЧИВЫХ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ

Целью этого параграфа является построение изотопии, переводящей произвольный заданный диффеоморфизм в структурно устойчивый диффеоморфизм, и описание множества неблуждающих точек полученного таким образом диффеоморфизма. Начнем с некоторых простых фактов из дифференциальной топологии. Напомним, что разложением на ручки H многообразия M называется последовательность подмногообразий с краем

$$\varnothing \subseteq M_0 \subseteq \ldots \subseteq M_m = M, \text{ причем } \overline{M_j - M_{j-1}} = \bigcup_{i=1}^{n_j} D_i^j \times D_i^{m-j}$$

и прямые произведения дисков $D_i^j \times D_i^{m-j}$ приклеены к границе многообразия M_{j-1} посредством вложений $S_i^{j-1} \times D_i^{m-j}$ с попарно непересекающимися образами. Говорят, что диффеоморфизм f сохраняет разложение на ручки, если $f(M_i) \subseteq \subseteq \operatorname{Int}(M_i)$, $0 \leqslant i \leqslant m$. Таким образом, в этом случае разложение на ручки является фильтрацией для f (см. [19])[1]) и можно определить максимальное инвариантное относительно f множество $K_i = \bigcap_{n \in Z} f^n \overline{(M_i - M_{i-1})}$, $0 \leqslant i \leqslant m$, содержащееся в $\overline{M_i - M_{i-1}}$. Множество Ω также разлагается на замкнутые подмножества $\Omega_i = \Omega \cap \overline{M_i - M_{i-1}}$, причем $K_i \supseteq \Omega_i$.

Если диффеоморфизм f сохраняет разложение на ручки H и, кроме того, для всех $j = 0, 1, \ldots, m$ и $1 \leqslant i, k \leqslant n_j$ многообразие $f(D_i^j \times 0)$ трансверсально диску $0 \times D_k^{m-j}$, то мы будем писать $f \in T_H$. Если $f \in T_H$, то пересечение подмногообразия $f(D_i^j \times 0)$ с диском $0 \times D_k^{m-j}$ состоит из конечного числа точек, которое мы обозначим g_{ik}^j. Образуем геометрические матрицы пересечений $G_j = (g_{ik}^j)$. Можно образовать также алгебраические матрицы пересечений $A_j = (a_{ik}^j)$, где a_{ik}^j равно числу точек пересечения $f(D^j \times 0)$ с $0 \times D_k^{m-j}$, взятых с учетом знака, т. е. индексу пересечения этих подмногообразий. Элементы матриц G_j суть неотрицательные целые числа, а A_j могут содержать отрицательные элементы, но во всяком случае выполняется очевидное неравенство $|a_{ik}^j| \leqslant g_{ik}^j$. Мат-

---

[1]) См. также перевод статьи М. Шуба «Динамические системы, фильтрации и энтропия» в настоящем сборнике. — *Прим. перев.*

рицы A_j определяют эндоморфизм цепного комплекса

$$\begin{array}{ccccc} \ldots \to H_j(M_j, M_{j-1}) & \xrightarrow{\partial} & H_{j-1}(M_{j-1}, M_{j-2}) & \to \ldots \\ \downarrow{A_j} & & \downarrow{A_{j-1}} & \\ \ldots \to H_j(M_j, M_{j-1}) & \xrightarrow{\partial} & H_{j-1}(M_{j-1}, M_{j-2}) & \to \ldots \end{array}$$

который индуцирует отображение $f_*\colon H_*(M) \to H_*(M)$ в гомологиях. Матрицы G_j будут использованы для описания множеств K_j и Ω_j для структурно устойчивых диффеоморфизмов, которые мы построим.

Определение 1.1. Обозначим через $\mathcal{H} \subset \mathrm{Diff}^r(M)$ множество диффеоморфизмов f, обладающих следующими свойствами:

(1) f удовлетворяет аксиоме А и строгому условию трансверсальности.

(2) $f \in T_H$ для некоторого разложения на ручки H многообразия M.

(3) Ограничение $f \mid K_i$ топологически сопряжено с топологической цепью Маркова, ассоциированной с геометрической матрицей пересечений G_i, а $f \mid \Omega_i$ топологически сопряжено с ограничением этой топологической цепи Маркова[1]) на ее множество неблуждающих точек.

Диффеоморфизмы из $\mathcal{H}$ структурно устойчивы, и для них имеется описание $f \mid K_i$.

Основным результатом этого параграфа является следующая теорема.

Теорема 1.1. *Любой диффеоморфизм $f \in T_H$ можно с помощью изотопии перевести в диффеоморфизм из множества $\mathcal{H}$, не меняя геометрические матрицы пересечения G_j.*

В следующем параграфе мы покажем, как сдвинуть произвольный диффеоморфизм f в множество T_H, где H — произвольное разложение на ручки, и свяжем возможные матрицы G_j с алгебраическо-топологическими характеристиками диффеоморфизма.

Это позволит построить диффеоморфизмы Морса — Смейла и, более обще, структурно устойчивые диффеоморфизмы с самым простым поведением на множестве неблуждающих точек, совместимым с топологическими ограничениями.

Размеры деформации в C^0-топологии легко оцениваются через производные диффеоморфизма f и размеры ручек, и,

---

[1]) См. определение ниже.

таким образом, будет доказано также следующее утверждение.

Следствие. (I) *Любой диффеоморфизм гладко изотопен структурно устойчивому диффеоморфизму.*

(II) *Любой диффеоморфизм можно аппроксимировать в C^0-топологии структурно устойчивым диффеоморфизмом.*

Эти результаты, изложенные более кратко в [18], были навеяны работой [24], где утверждение (I) было доказано в более слабой форме — с Ω-устойчивостью вместо структурной устойчивости.

Сначала мы объясним, как по матрице с целыми неотрицательными элементами построить топологическую цепь Маркова, а затем опишем изотопию, переводящую произвольный заданный диффеоморфизм в элемент множества $\mathcal{H}$.

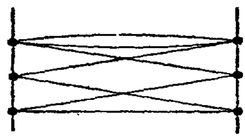
Пусть $B = (b_{ij})$ — квадратная матрица порядка n. Мы будем называть B матрицей из нулей и единиц, если при всех i и j b_{ij} равно либо 0, либо 1. Матрица из нулей и единиц следующим образом определяет топологическую цепь Маркова. Обозначим через N множество $(1, \ldots, n)$, снабженное дискретной топологией, и $\Sigma = \prod_{-\infty}^{\infty} N$ с топологией тихоновского произведения. Элементом пространства Σ является двусторонняя последовательность $(\ldots a_1, a_0, a_1, \ldots)$, где $a_i \in N$. Через Σ_B обозначается замкнутое подмножество Σ, состоящее из всех последовательностей $\{a_i\}_{i \in Z}$, для которых $b_{a_i a_{i+1}} = 1$ для всех $i \in \mathbb{Z}$. Отображение сдвига: $\sigma: \Sigma_B \to \Sigma_B$ задается формулой $\sigma(\{a_i\})_{i \in Z} = (\{a_i'\})_{i \in Z}$, где $a_i' = a_{i+1}$. Мы называем отображение $\sigma: \Sigma_B \to \Sigma_B$ топологической цепью Маркова (Subshift of finite type), даже если σ не является топологически транзитивным.

Эту конструкцию можно описать с помощью привлекательной геометрической картинки[1]), которая показывает также, как можно построить топологическую цепь Маркова, исходя из произвольной матрицы с целыми неотрицателными элементами.

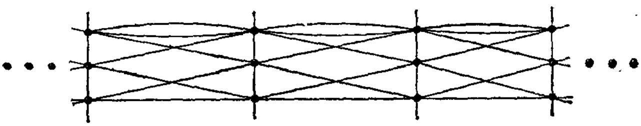
Сопоставим прямоугольной матрице (g_{ij}) размером $k \times n$ с неотрицательными целыми коэффициентами фигуру, состоящую из k занумерованных точек на некоторой плоскости, n занумерованных точек на параллельной плоскости и g_{ij} путей, соединяющих i-ю точку на первой плоскости с j-й точкой

[1]) Предложенной Бобом Уильямсом и Рене Томом.

на второй плоскости [1]). Если $k = n$, то эту фигуру можно повторить бесконечно много раз вправо и влево и получить таким образом бесконечный ориентированный граф, инвариантный относительно параллельного переноса.



Динамика в пространстве бесконечных (в обе стороны) ориентированных путей на этом графе, задаваемая параллельным переносом [2]), в точности совпадает с описанной выше



динамикой в пространстве Σ_B, определяемой матрицей из нулей и единиц. В пространстве путей вводится естественная

[1]) Авторы говорят здесь о плоскостях для того, чтобы можно было считать, что соответствующие пути не пересекаются. Это, в сущности, неважно. На рисунке вместо плоскостей взяты вертикальные прямые, а пути пересекаются. Подразумевается также, что эти пути трансверсальны к плоскостям (на рисунке — прямым), параллельным исходным. (Ниже, когда проводятся новые вертикальные прямые, параллельные исходным, то подразумевается, что они не проходят через точки пересечения путей, — если говорить о плоскостях, то подобные оговорки не потребуются.)

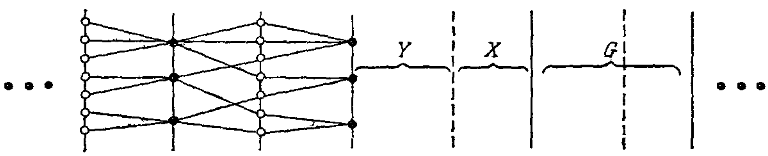
Пути ориентируются в направлении от первой прямой (плоскости) ко второй. Авторы не указывают, какая прямая на рисунке является первой — левая или правая. Некоторые обстоятельства (порядок расположения членов последовательности a_i, расположение новых сечений на одном из следующих рисунков, часть формул — к сожалению, в оригинале одни из них противоречат другим) заставляют думать, что правая (хотя для нас было бы более привычным, если бы это была левая прямая).

Пусть имеются три вертикальные прямые с выбранными на них упорядоченными системами точек и первая из них (самая правая) соединена ориентированными путями со второй (средней) согласно матрице C, а вторая с третьей (левой) — согласно матрице D. Всевозможные композиции этих ориентированных путей соединяют точки первой прямой с точками третьей. Число таких путей, соединяющих точку i с точкой k, задается коэффициентом матрицы CD, стоящим на пересечении i-й строки и k-го столбца. (Между тем при таком расположении прямых на рисунке «зона действия» D будет левее «зоны действия» C.) — *Прим. ред.*

[2]) Имеется в виду перенос направо (нам привычнее было бы налево). — *Прим. ред.*

топология, а именно два пути считаются близкими, если они совпадают на участке от $-n$ до n.

Разрезая нашу фигуру другими способами на периодически повторяющиеся куски, можно получить новое представление для этой динамической системы. Например, если мы добавим по одному разрезу посередине между имеющимися разрезами (на рисунке эти новые разрезы изображены прямыми с кружочками), то мы получим две матрицы X и Y из нулей и единиц, причем $X \cdot Y = G$, а $Y \cdot X$ — матрица из нулей и единиц, которую мы обозначим B.



Мы будем использовать эту процедуру ниже при переходе от больших ручек и геометрической матрицы пересечений G к маленьким ручкам и матрице из нулей и единиц B.

Сначала заметим, что справедливо следующее утверждение.

Предложение 1.1. *Пусть G — квадратная матрица порядка n с целыми неотрицательными элементами, а B — матрица из нулей и единиц, ассоциированная с матрицей G. Существует сюръективное линейное отображение Y: $\mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^n$, причем $BY = YG$, и ограничение $B|\ker Y = 0$. В частности, матрицы G и B имеют одинаковые ненулевые собственные значения*[1]).

[1]) В оригинале стоит $YB = GY$; это, видимо, вызвано необычным порядком перемножения матриц в нашем случае (если сперва C, затем D, то получается CD), а возможно, отмеченным выше несоответствием между порядком, в каком перемножаются матрицы, и расположением их «зон действия» на чертеже. При действии этих матриц на векторы из Z^n и т. п. надо эти векторы представлять в виде строчек (не столбцов!) и действовать на них матрицами справа.

Теперь более существенное замечание: отображение с построенной выше матрицей Y сюръективно тогда и только тогда, когда в матрице G нет нулевых столбцов. (Между тем на данном этапе наших построений геометрическая матрица пересечений G_i вполне может быть нулевой — на двумерной сфере легко построить пример с $f \in T_H$ и $f(M_1) \subset M_0$.) Но в дальнейшем используется только совпадение ненулевых собственных значений матриц G и B (с учетом кратности), а это легко вывести из того, что $G = XY$ и $B = YX$. — *Прим. ред.*

Доказательство. Пусть Y — матрица, описанная выше. Тогда $Y(XY) = (YX)Y$, т. е. $YG = BY$. Очевидно, оператор, порожденный матрицей $B = YX$, обращается в нуль на ядре Y. Очевидно также, что отображение Y сюръективно.

При построении изотопии, переводящей произвольный заданный диффеоморфизм f в элемент множества $\mathscr{H}$, мы воспользуемся соображениями, которые являются обобщением процедуры, примененной Смейлом в [24] при построении изотопии, переводящей произвольный заданный диффеоморфизм в Ω-устойчивый диффеоморфизм. Если задано разложение на ручки, то мы будем называть диски вида $p \times D_i^{m-l}$ $(p \in D_i^l)$ поперечными дисками, а диски вида $D_i^l \times q$ $(q \in D_i^{m-l})$ — продольными дисками.

Определение 1.2. *Мы будем называть разложение H многообразия M на ручки марковским* (fitted), *если любой продольный диск целиком содержит любой продольный диск меньшей размерности, с которым он имеет непустое пересечение. Диффеоморфизм f мы будем называть марковским относительно разложения на ручки H, если образ любого продольного диска целиком содержит любой продольный диск, с которым он имеет непустое пересечение.*

Теперь мы докажем два ключевых предложения, необходимых для доказательства теоремы 1.1.

Предложение 1.2. *Пусть H — произвольное разложение на ручки. Тогда с помощью изотопии приклеивающих отображений разложения H можно перевести H в марковское разложение на ручки.*

Предложение 1.3. *Если H — марковское разложение на ручки и диффеоморфизм f сохраняет H, то в классе диффеоморфизмов, сохраняющих H, существует изотопия, переводящая f в диффеоморфизм, марковский относительно H.*

Доказательство предложения 1.2. Предположим, что разложение на ручки H таково, что согласованность пересечений, которая требуется в определении 1.2, имеет место для пересечений дисков, принадлежащих многообразию M_{i-1}. Чтобы достигнуть согласованности для дисков из M_i, мы должны построить изотопии для приклеивающих отображений $S^{i-1} \times D$ (мы опускаем несущественные верхние индексы) так, чтобы согласовать эти отображения с индуцированной геометрической структурой на ∂M_{i-1}. Как выглядит эта структура? Используя индуктивное предположение, можно установить, что многообразие ∂M_{i-1} разделено на замкнутые $(n-1)$-мерные многообразия с краем N_r, которые пересекаются по своим краям, а сами эти края являются многообразиями с углами. Здесь $0 \leqslant r \leqslant i-1$.

Каждое из многообразий N_r является произведением диска D^r и некоторого «продольного» многообразия, возможно, с краем, который, возможно, имеет углы[1]). Сложность многообразия N^r увеличивается с убыванием r. Так, для максимального r многообразие N_r является произведением объединения сфер на r-мерный диск D^r для r, меньшего на единицу, N_r является произведением многообразия с гладкой границей на D^r и т. д.

Рассмотрим приклеивающее отображение $S^{i-1} \times D$ в ∂M_{i-1}. Мы будем представлять себе второй сомножитель в этом прямом произведении как малый диск, нормальный к центральной сфере[2]). Начнем построение изотопии с $r = i-1$ и построим изотопию сферы S^{i-1} так, чтобы она стала трансверсальной продольному подмногообразию многообразия N_{i-1}.

---

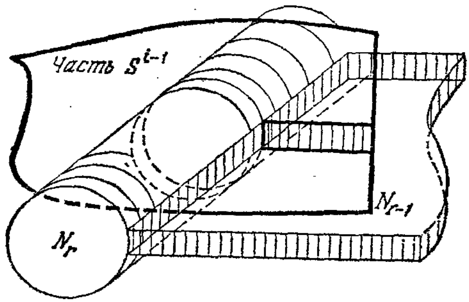
[1]) Будем называть ручки $D^j \times D^{m-j}$, образующие $M_j \setminus M_{j-1}$, ручками индекса j. Тогда N_r — это та часть границы ручек индекса r, которая входит в ∂M_{i-1}. Граница такой ручки состоит из двух частей — $S^{r-1} \times D^{m-r}$ и $D^r \times S^{m-r-1}$. Первая приклеивается к M_{r-1}, а вторая входит в ∂M_r. При приклеивании ручек индекса j, $r < j < i$, некоторые точки из $D^r \times S^{m-r-1}$ покрываются границами ручек индекса j. Ввиду марковости каждый продольный диск $\mathscr{D}^r \times q$, $q \in S^{m-r-1}$, либо покрывается целиком, либо вовсе не пересекается с этими ручками. Поэтому каждая связная компонента миогообразия N_r целиком состоит из продольных дисков $\mathscr{D}^r \times q$, где q пробегает некоторую часть S^{m-r+1} — некоторое подмногообразие V^{m-r-1}, вообще говоря, имеющее край. Например, если $r = i-1$, то $V^{m-1} = S^{m-i}$, а если $r = i-2$, то V^{m-i+1} получается в результате вырезания из S^{m-i+1} нескольких $(m-i+1)$-мерных дисков. При меньших r край подмногообразия V^{m-r-1}, вообще говоря, имеет углы.

Применительно к N_r авторы модифицируют свою терминологию. Продольные диски $D^r \times q$ соответствующих ручек, входящие в N_r, теперь называются поперечными, а продольными теперь называются подмногообразия $p \times V^{m-r-1}$, где $p \in D^r$. Для каждой связной компоненты N_r в рассуждениях фигурирует одно такое продольное подмногообразие (с какой-нибудь фиксированной точкой $p \in \operatorname{Int} D^r$).

Наша цель теперь состоит в том, чтобы сделать образ каждой сферы $S^{i-1} \times q$, $q \in D^{m-i}$, являющейся краем продольного (в прежнем смысле) диска $D^i \times q$ из приклеиваемой ручки индекса i, состоящим из поперечных (в новом смысле) дисков $D^r \times q \subset N_r$, $r < i$. — *Прим. перев и ред.*

[2]) Благодаря этому мы в дальнейшем сможем по существу следить только за одной центральной сферой S^{i-1}. Если образ этой сферы на многообразии N_r состоит из поперечных дисков, то без труда можно добиться того же для образов всех сфер $S^{i-1} \times q$, $q \in D$, т. е. для границ настоящих продольных дисков ручки индекса i. — *Прим. перев.*

Затем посредством изотопии $S^{i-1} \times D$ сделаем так, чтобы пересечение $S^{i-1} \times D \cap N_{i-1}$ целиком состояло из поперечных $(i-1)$-мерных дисков, составляющих многообразие N_{i-1}.



Теперь на ∂N_{i-2} [1]) образ сферы S^{i-1} трансверсален граничному продольному подмногообразию (boundary core), поскольку поперечные диски многообразия N_{i-2} хорошо согласованы с соответствующими дисками из N_{i-1}. Поэтому мы можем пошевелить образ сферы S^i внутри многообразия N_{i-2} так, чтобы он всюду стал трансверсальным к продольному подмногообразию многообразия N_{i-2}. Затем мы можем пошевелить образ $S^{i-1} \times D$ так, чтобы пересечение этого образа с многообразием N_{i-2} целиком состояло из поперечных дисков N_{i-2}.

Проводя построение по индукции по убывающим размерностям, мы приведем приклеивающее отображение $S^{i-1} \times D$ в соответствие с нашей геометрической структурой на границе ∂M_{i-1}. Таким способом мы достигнем требуемой согласованности пересечений дисков, принадлежащих многообразию M_i. Индукцией по i мы сделаем разложение на ручки марковским.

Доказательство предложения 1.3. Рассмотрим теперь такой диффеоморфизм f: $M \to M$, что $f(M_i) \subset \operatorname{Int} M_i$ для всех i. Можно так построить изотопию диффеоморфизма f в классе диффеоморфизмов, сохраняющих разложение на ручки, что диффеоморфизм f станет марковским, т. е. образ любого про-

---

[1]) Имеется в виду не весь край многообразия N_{i-2}, а только $N_{i-2} \cap N_{i-1} = D^{i-2} \times \partial V^{m-i+1}$. Выражение „boundary core" относится к $p \times \partial V^{m-i+1}$, $p \in D^{i-2}$. Под трансверсальностью же, видимо, следует понимать не буквально трансверсальность к этому многообразию с углами (что это значит?), а трансверсальность образа S^{i-1} в точках $p \times \partial V^{m-i+1}$ к $p \times V^{m-i+1}$ (или, если угодно, к той сфере $p \times S^{m-i+1}$, частью которой является $p \times V^{m-i+1}$). Таковая действительно имеет место: ведь если образ S^{i-1} проходит через какую-нибудь из этих точек, то он содержит целый поперечный диск многообразия N_{i-2}, проходящий через ту же точку. — *Прим. ред.*

дольного диска будет содержать целиком любой продольный диск, с которым он имеет непустое пересечение. Чтобы осуществить это, нужно повторить приведенные выше рассуждения и построить изотопию f так, чтобы, не меняя отображения f на $S^{i-1}\times D$, привести образ прямого произведения $D^i\times D$ в хорошее положение, согласованное с геометрической структурой, связанной с разложением на ручки. Рассуждения здесь облегчаются тем, что куски, на которых нужно видоизменять f, являются просто ручками и поэтому все легче представить себе наглядно.

Замечание. Если $f\in T_H$, то из приведенного доказательства нетрудно усмотреть, что изотопию H в марковское разложение на ручки и изотопию диффеоморфизма f в марковский относительно этого разложения на ручки диффеоморфизм можно проделать без изменения геометрических матриц пересечений.

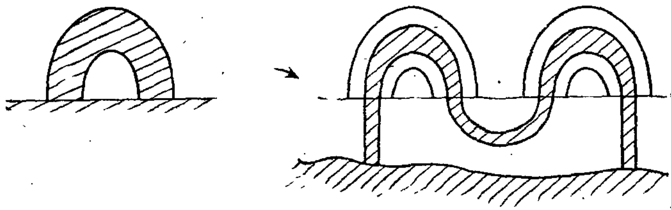
Доказательство теоремы 1.1. При описанной выше изотопии диффеоморфизма f в марковский диффеоморфизм мы можем сделать f равномерно растягивающим на продольных дисках и равномерно сжимающим на поперечных дисках (см. рис.). Таким образом, множества K_i обладают гиперболической структурой. Благоприятным обстоятельством является то, что для точек множества K_i локальными неустойчивыми многообразиями являются продольные диски, а локальными устойчивыми многообразиями — поперечные диски. Так как глобальные неустойчивые многообразия являются объединениями положительных итераций локальных неустойчивых многообразий, то мы фактически сделали даже больше, чем проверка строгого условия трансверсальности (чего, в силу теоремы Роббина, достаточно для того, чтобы установить структурную устойчивость диффеоморфизма f). Сделав f марковским диффеоморфизмом, мы по существу построили трубчатые семейства Пейлиса и Смейла (см. [13]).

Для завершения доказательства теоремы нам осталось связать множества K_i и Ω_i. Мы еще не показали, что периодические точки плотны в множествах Ω_i. Это следует из результатов Ньюхауса [11], а также из прямого анализа действия диффеоморфизма f на множестве K_i, приведенного ниже.

На уровне множества $\overline{M_i - M_{i-1}}$ наш диффеоморфизм выглядит наподобие того, как показано на рисунке, т. е. образ ручки h_i внутри любой другой ручки проходит сквозь всю эту ручку [1]), расширяясь в направлении продольных дисков и сжимаясь в направлении поперечных дисков. Обозначим через

[1]) Если, конечно, он вообще туда попадает. — *Прим. ред.*

h_1, h_2 и т. д. ручки индекса i, а геометрические пересечения обозначим через (g^i_{jk}). Число связных компонент в пересечении $f(h_j) \cap h_k$ равно в точности g^i_{jk}. Обозначим связные компоненты $f(h_j) \cap h_k$ через $e_{kj_1}, \ldots$. Образ каждой компоненты e_{kj_p} проходит через компоненту e_{lm_q} либо один раз, либо ни разу. Это поведение можно описать матрицей B из нулей и единиц, которая совпадает с матрицей из нулей и единиц, ассоциированной с матрицей G_i. Положим $S = \{e_{kl}\}$. Отобразим



множество K_i в $\Sigma = \prod_{n \in \mathbf{Z}} S$, полагая для $x \in K_i$, что $\varphi(x) = \{a_i\}_{i \in \mathbf{Z}}$, где a_i — это то из множеств e_{kl}, которому принадлежит точка $f^i(x)$. Из того, что диффеоморфизм f является растягивающим вдоль продольных дисков, а f^{-1} — растягивающим вдоль поперечных дисков, следует, что отображение φ в Σ является инъективным и непрерывным. Из определения следует, что образ отображения φ лежит в Σ_B. Из того, что пересечение вложенных непустых компактных множеств непусто, следует, что φ отображает множество K_i на Σ_B. По построению φ осуществляет топологическое сопряжение между ограничением диффеоморфизма f на множество K_i и отображением сдвига на Σ_B [1]). Наконец, исходя из нашей конструкции и определения множества неблуждающих точек, легко убедиться, что φ отображает множество Ω_i на множество неблуждающих точек топологической цепи Маркова $\sigma: \Sigma_B \to \Sigma_B$. Другой способ проверить это обстоятельство состоит в том, чтобы заметить, что периодические точки плотны в каждом из двух множеств неблуждающих точек, а отображение φ является топологическим сопряжением. Теорема доказана.

Для диффеоморфизма $f \in \mathscr{H}$ можно вычислить число $N_m(f)$ периодических точек f периода m с помощью геометрических матриц пересечения.

Предложение 1.5. *Если $f \in \mathscr{H}$, то $N_m(f \mid K_i) = \operatorname{tr}(G_i^m)$.*

Доказательство. Согласно Боуэну и Лэнфорду [6], $N_m(\sigma_B) = \operatorname{tr} B^m$, где $\sigma_B = \sigma \mid \Sigma_B$. Но, в силу предложения 1.1,

[1]) Более подробное обсужденне см. и примере, рассмотреннои ниже.

ненулевые собственные значения матриц B и G_i совпадают и имеют одинаковые кратности. Так как отображение φ топологически сопрягает между собой $f|K_i$ и σ_B, то $H_m(f|K_i) = \operatorname{tr} B^m = \operatorname{tr} G_i^m$.

Пусть A — квадратная матрица порядка m. Назовем матрицу A псевдоунипотентной, если все ненулевые собственные значения A являются корнями из единицы.

Предложение 1.6. *Если $f \in \mathscr{H}$, то $N_m(f) = \sum_i \operatorname{tr} G_i^m$.*

Предложение 1.7. *Диффеоморфизм $f \in \mathscr{H}$ является диффеоморфизмом Морса — Смейла тогда и только тогда, когда все матрицы G_i — псевдоунипотентные.*

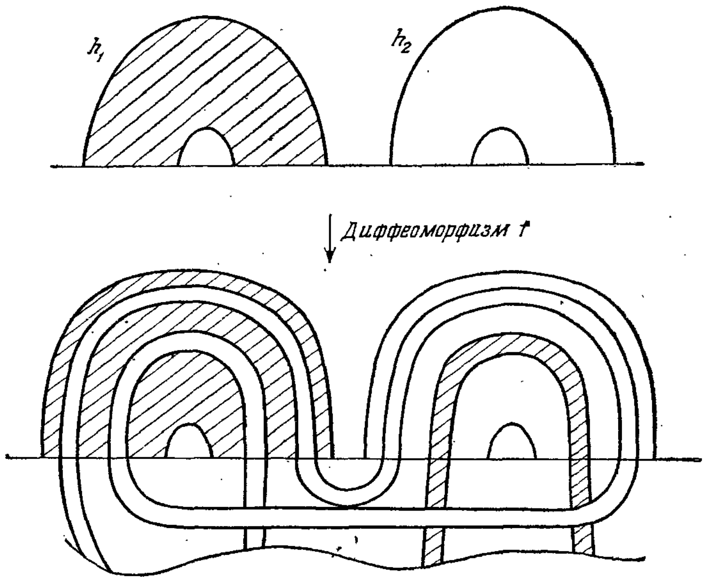
Доказательство. Величины $\sum_i \operatorname{tr} G_i^m$ ограничены тогда и только тогда, когда f — диффеоморфизм Морса — Смейла. Следовательно, в силу теоремы из алгебры, все ненулевые собственные значения матриц G_i являются корнями из единицы.

Можно получить нечто вроде асимптотического неравенства Лефшеца для диффеоморфизмов из множества $\mathscr{H}$.

Предложение 1.8. *Для $f \in \mathscr{H}$ $\overline{\lim\limits_n} \frac{1}{n} \log N_n(f) \geqslant \max|\log|\lambda||$, где максимум берется по всем собственным значениям λ оператора в гомологиях f_*: $H_*(M, \mathbb{Q}) \to H_*(M, \mathbb{Q})$.*

Доказательство. В силу предложения 1.6, $\overline{\lim} \frac{1}{m} \log N_m(f) = \log \gamma$, где $\gamma = \max|\lambda|$, а максимум берется по всем собственным значениям матриц G_i. Напомним теперь, что любое собственное значение оператора f_* является собственным значением одной из матриц A_i и $|a_{kj}^i| \leqslant g_{kj}^i$. Из теорем о неотрицательных матрицах (см. Гантмахер [7]) следует, что максимум абсолютных величин собственных значений матрицы A_i не превосходит максимума абсолютных величин собственных значений матрицы G_i. Это доказывает неравенство без внешнего знака абсолютной величины в правой части. Тот факт, что в правой части доказываемого неравенства можно поставить внешний знак абсолютной величины, сообщил нам Боуэн. Причина состоит в том, что для диффеоморфизма $f \in \mathscr{H}$ диффеоморфизм f^{-1} также является элементом $\mathscr{H}$. Матрицы A_i и G_i для f^{-1} являются обратными по отношению к соответствующим матрицам для f, но, с другой стороны, $N_m(f^{-1}) = N_m(f)$.

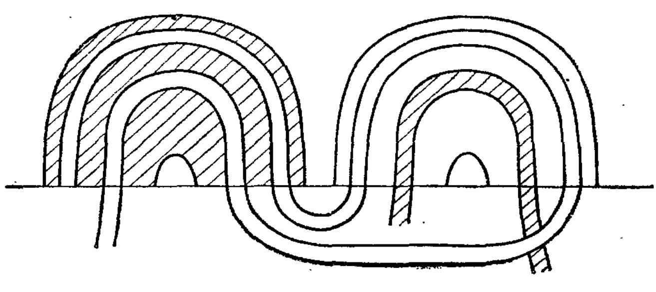
Примеры. Предположим, что после деформации наш диффеоморфизм действует как показано на рисунке.



Геометрическая матрица пересечений в базисе, соответствующем ручкам h_1, h_2, имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Алгебраическая матрица пересечений также есть $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Если картина действия f выглядит иначе (см. рисунок), то гео-



метрическая матрица пересечений не изменится, но алгебраическая матрица пересечений станет другой, а именно:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{1)}.$$

В приведенном примере из связных компонент пересечений $f(h_i) \cap h_j$ возникают четыре маленькие ручки e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}. Геометрическая матрица пересечений для f относительно этих ручек имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Это в точности матрица из нулей и единиц, ассоциированная с матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ с помощью описанной выше алгебраической процедуры.

Множество неблуждающих точек диффеоморфизма f в объединении ручек $h_1 \cup h_2$, конечно, содержится в бесконечном пересечении

$$K = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^n(h_1 \cup h_2),$$

которое совпадает с другим пересечением

$$\bigcap_{-\infty}^{\infty} f^n(e_{11} \cup e_{12} \cup e_{21} \cup e_{22}).$$

Каждую точку $x \in K$ можно пометить двусторонней бесконечной последовательностью символов, каждый из которых может принимать четыре значения e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}, а именно:

$$x \to \ldots a_{-2}a_{-1}a_0a_1a_2 \ldots,$$

где символ a_0 указывает, в какой из маленьких ручек лежит x, a_1 — в какой ручке лежит $f(x)$, a_{-1} определяет, в какой ручке лежит $f^{-1}(x)$, и т. д.

Описанное соответствие определяет эквивариантный гомеоморфизм между инвариантным множеством K и подмножеством в пространстве двусторонних бесконечных последовательностей (с операцией сдвига), которое определяется опи-

---

[1]) Если в случае ручек индекса 1 использовать некоммутативную алгебру, то этот геометрический эффект отразится на алгебре (см. следующий параграф).

санной выше матрицей пересечений для f, состоящей из нулей и единиц.

Напомним, что это множество состоит из всех тех последовательностей, у которых для любой пары соседних элементов a_n, a_{n+1} на пересечении a_n-й строки и a_{n+1}-го столбца матрицы стоит 1 (здесь мы считаем, что символы, из которых состоят бесконечные последовательности, принимают значения $1, 2, 3, 4$).

В рассматриваемом нами специальном случае после любого символа рано или поздно может появиться любой другой символ (для любых i и j j-е состояние может возникнуть через некоторое время после i-го). Из этой неприводимости матрицы из нулей и единиц следует, что периодические точки для топологической цепи Маркова плотны (это нетрудно доказать). Отсюда следует, что множество K совпадает с пересечением множества неблуждающих точек диффеоморфизма f с $h_1 \cup h_2$, так что эта часть множества Ω гомеоморфна канторову совершенному множеству, а ограничение $f \mid K$ изоморфно топологической цепи Маркова.

Если матрица из нулей и единиц не окажется неприводимой, то можно перенумеровать элементы базиса таким образом, что она станет блочной верхнетреугольной матрицей с неприводимыми блоками на диагонали. Тогда множество Ω разбивается на части, соответствующие диагональным блокам, если в блоках над диагональю имеются ненулевые элементы, то множество K оказывается более широким, чем Ω. Например, для матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ имеются три типа допустимых последовательностей символов:

$$\ldots a\ a\ a\ a \ldots$$
$$\ldots a\ a\ a\ b\ b\ b \ldots$$
$$\ldots b\ b\ b\ b\ b \ldots$$

Множество Ω состоит из двух точек, а множество K содержит, кроме того, бесконечно много других точек, которые «связывают» две точки множества Ω под действием f. Эта ситуация возникает в примере на торе, рассматриваемом в параграфе, посвященном диффеоморфизмам Морса — Смейла.

Общий случай является комбинацией этих двух примеров.

§ 2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ КОНСТРУКЦИИ И ЦЕПНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Рассмотрим теперь диффеоморфизм f и разложение многообразия M на ручки $M = \bigcup M_i$. Как говорилось выше, можно с помощью изотопии перевести f в диффеоморфизм, сохраняющий разложение на ручки:

$$f(M_i) \subset \operatorname{Int} M_i.$$

Рассмотрим эту конструкцию приведения диффеоморфизма в «общее положение» более аккуратно. Идея иллюстрируется следующим рисунком.

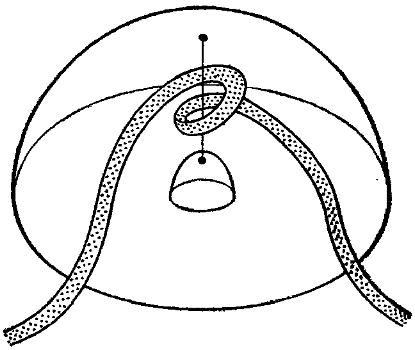


Рис. 1.
Образ ручки индекса 1 внутри ручки индекса 2.

Из соображений общего положения следует, что образ ручки индекса 1 можно слегка пошевелить[1]) так, что он не будет пересекать «центральный» поперечный диск D^{m-j} ручки индекса $j > 1$. Тогда ручку индекса 1 можно вытеснить из ручки индекса j посредством радиальной изотопии в последней. Этот процесс в существенных чертах единствен с точностью до изотопии, пока не будут достигнуты ручки индекса 2. Тогда, прежде чем проводить радиальную изотопию, мы можем реализовать произвольный коэффициент зацепления одномерной ручки индекса 1 (точнее ее центрального продольного диска) с поперечным диском ручки индекса 2.

Таким способом можно получить различные диффеоморфизмы, изотопные f и сохраняющие разложение на ручки. Без большого труда можно показать, что получающиеся таким путем индуцированные цепные отображения

$$C_i = H_i(M_i, M_{i-1}) \xrightarrow{f_i} H_i(M_i, M_{i-1})$$

[1]) После трансверсального сжатия ее вдоль поперечных дисков в окрестность ее «центрального» продольного диска.

заполняют класс цепных гомотопий [1]). Неоднозначность описанных выше коэффициентов зацепления в точности соответствует цепной гомотопии

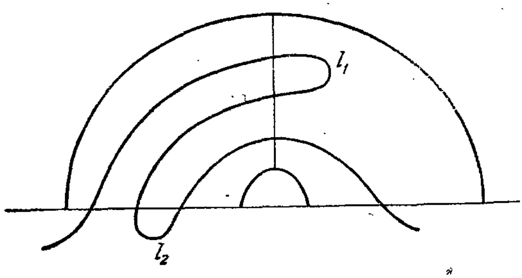
$$C_i \xrightarrow{D_i} C_{i+1}.$$

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Предложение 2.1. *Пусть заданы диффеоморфизм f и разложение на ручки $M = \bigcup_i M_i$. Можно построить изотопию, переводящую f в диффеоморфизм, сохраняющий разложение на ручки и порождающий любое цепное отображение в классе цепных гомотопий* [2]).

Заметим, что в метрике C^0 величина построенной таким образом изотопии оценивается сверху константой, умноженной на диаметр разложения на ручки. Норма изотопии в C^1-метрике оценивается не так просто. Эта оценка включает обратные величины от расстояний между ручками и поперечными дисками после приведения в общее положение, полученные коэффициенты зацепления и т. д.

Можно предполагать, что после дополнительного малого возмущения образ центрального продольного диска ручки индекса i стал трансверсальным к центральным поперечным дискам различных ручек индекса i.

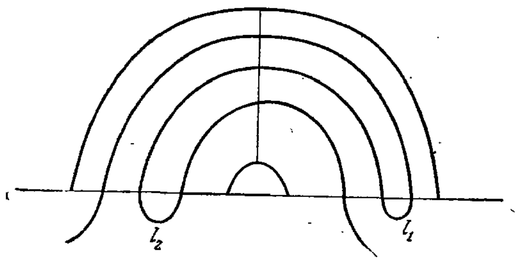


Теперь, применяя процесс, описанный в § 1, можно продолжать построение изотопии с тем, чтобы получить струк-

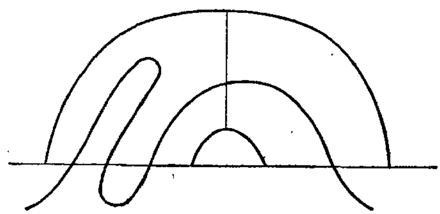
[1]) То есть класс цепных отображений f_i: $C_i \to C_i$, $0 \leqslant i \leqslant \dim M$, отличающихся друг от друга лишь на цепную гомотопию. — *Прим. ред.*

[2]) С учетом естественных геометрических ограничений в размерностях 0 и n.

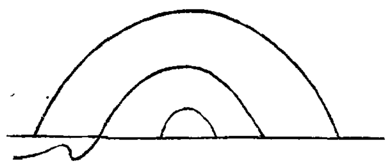
турно устойчивый диффеоморфизм. Этот процесс включает вытягивание малой петли l_1. Однако мы могли бы предвари-



тельно уничтожить малую петлю l_1 с помощью изотопии и



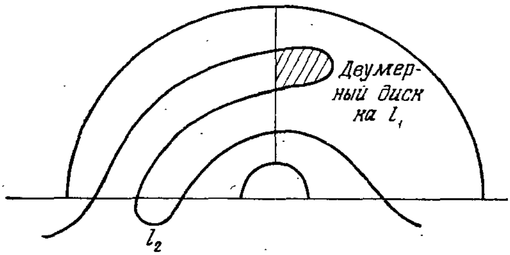
тогда получившаяся картина действия структурно устойчивого диффеоморфизма окажется намного проще.



Вообще мы можем попытаться сделать геометрические пересечения образа продольного диска D_j^i с поперечным диском D_k^{m-i} как можно более близкими к алгебраическим пересечениям, которые определяют отображения цепей с целыми коэффициентами

$$H_i(M_i,\ M_{i-1}) \to H_i(M_i,\ M_{i-1}).$$

Идея конструкции состоит в том, чтобы уничтожить точки пересечения с противоположным знаком, такие, как точки, связанные с малой петлей l_1 на рисунке, натянув на петлю l_1 двумерный диск, который не пересекается с fD_j^i и D_k^{m-i}.



Тогда можно стянуть l_1 вдоль этого двумерного диска и устранить таким образом два геометрических пересечения. Эти соображения можно с успехом применить в случае односвязных многообразий и доказать следующее утверждение.

Предложение 2.2. *Если* $\dim M \geqslant 5$, $\pi_1(M) = e$ *и разложение на ручки не содержит ручек индекса* 1 *и* $(n-1)$, *то можно построить изотопию диффеоморфизма* f *и получить диффеоморфизм, у которого геометрическая матрица пересечений с точностью до знаков совпадает с алгебраической матрицей пересечений.*

Прием Уитни (см. [10]) с двумерными дисками используется в доказательстве непосредственно, как намечено выше. Для ручек индекса 2 и $(n-2)$ нужно только заметить, что соответствующие подпространства M односвязны, так что сначала можно построить сингулярный двумерный диск, а затем из соображений общего положения превратить его в несингулярный диск[1]).

Имея в виду дальнейшие приложения, мы кратко обсудим аналог предложения 2.2 для неодносвязных многообразий.

Во-первых, заметим, что в неодносвязном случае при построении $C_i = H_i(M_i, M_{i-1})$ удобнее работать с «клетками с отмеченным путем» (path based cells) вместо обычных клеток. Обозначим через $*$ базисную точку, лежащую во внутренности некоторой ручки индекса 0, и для каждой ручки индекса i выберем путь Γ, ведущий из этой ручки в точку $*$. Эти клетки[2]) с отмеченным путем порождают геометрический базис для

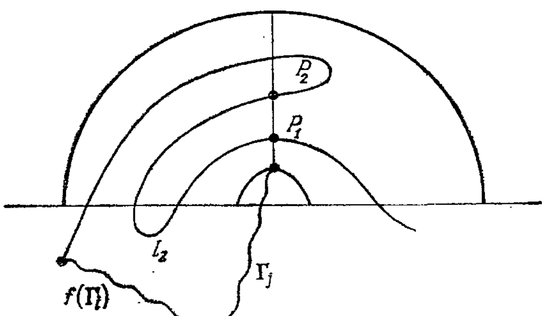
[1]) Доказательство предложения 2.2 требует систематического применения техники, изложенной в [10]. — *Прим. перев.*

[2]) Подразумевается стандартный переход от разложения на ручки к клеточному разбиению (i-мерная клетка в основном совпадает с центральным продольным диском ручки индекса i, только его надо несколько растянуть за пределы этой ручки, чтобы он уперся всем своим краем в уже построенные клетки (меньшей размерности). — *Прим. ред.*

цепей на универсальной накрывающей многообразия M с коэффициентами в групповом кольце фундаментальной группы $\pi_1(M)$.

Попытаемся теперь привести диффеоморфизм к простейшей геометрической форме, совместимой с аглебраическими ограничениями. Предположим, во-первых, что диффеоморфизм f сохраняет разложение на ручки (что можно достичь изотопией). Ручки индекса 0 и 1 образуют обобщенный сплошной тор T. Можно считать, что отмеченная точка $*$ является неподвижной точкой диффеоморфизма f, и представлять себе, что многообразие T получено приклеиванием ручек $x_1, \ldots, x_n$ индекса 1 к шару, содержащему точку $*$. Действие f на T с точностью до гомотопии определяется заданием слова из символов $x_1, \ldots, x_n$ для каждой ручки x_j. Если размерность M не меньше четырех, то можно построить изотопию диффеоморфизма f в T таким образом, что образ j-й ручки будет пересекать все поперечные диски ручек $x_1, \ldots, x_n$ в соответствии с j-м словом. Таким образом, геометрические пересечения соответствуют алгебраическим пересечениям, которые задаются гомоморфизмом свободной группы с n образующими.

Обратимся теперь к ручкам высших индексов. Предположим, что образ $f(D^k)$ центрального продольного диска каждой ручки индекса k трансверсален поперечным дискам D^t всех ручек индекса k. Используя пути $f(\Gamma_i)$ и Γ_j, можно сопоставить каждой точке пересечения $f(D_i^k) \cap D_j^t$ элемент фундаментальной группы $\pi_1(M)$ (см. рисунок)



Заметим, что на этом рисунке класс сопряженности петли l_2 в группе $\pi_1(M)$ определяется элементами, соответствующими точкам пересечения P_1 и P_2. Таким способом мы получаем уточненное (refined) цепное отображение, соответствующее диффеоморфизму f:

$$f_{\#}\colon \tilde{C}_k \to \tilde{C}_k,$$

где $\widetilde{C}_k$ — свободный модуль над групповым кольцом группы $\pi_1(M)$, порожденный k-мерными ручками нашего разложения на ручки.

Теперь мы можем применить прием Уитни с двумерными дисками и привести геометрические пересечения в соответствии с алгебраическими пересечениями, определяемыми этим цепным отображением. Это рассуждение проходит без осложнений при $3 \leqslant k \leqslant n-3$. При $k=2$ соображения Уитни имеют силу, если заменить группу $\pi_1(M)$ на $\pi_1(T)$ [1]). Случаи $k=n-2$, $n-1$, n рассматриваются аналогично случаям $k=2$, 1, 0 с использованием диффеоморфизма f^{-1} вместо f. Все эти рассуждения проходят, если размерность многообразия не меньше пяти [2]).

Если теперь диффеоморфизм f продеформирован так, что он сохраняет разложение на ручки, то соответствующие алгебраические данные полностью определены, так что геометрическая форма f, получающаяся, как описано выше, является наилучшей из возможных.

Можно изменить эти алгебраические данные с помощью «цепной гомотопии», различными способами деформируя диффеоморфизм f в отображение, сохраняющее ручки. По-прежнему все алгебраические возможности можно осуществить посредством изотопии.

§ 3. ДИФФЕОМОРФИЗМЫ МОРСА — СМЕЙЛА

Теперь мы применим результаты § 1 и 2 для характеризации тех связных компонент в группе $\mathrm{Diff}\, M$, которые содержат диффеоморфизмы Морса — Смейла.

Мы опишем предложенную Смейлом картину поведения траекторий этих структурно устойчивых диффеоморфизмов с конечным множеством периодических точек. Эта картина наглядно показывает, что такие диффеоморфизмы являются в некотором смысле «виртуальными перестановками» в теории гомотопий [3]). В частности, мы покажем, что диффеоморфизм f удовлетворяет следующему гомологическому условию: существует такой цепной комплекс конечной длины, состоящий из конечно порожденных коммутативных групп $\ldots \to C_{i+1} \xrightarrow{\partial} C_i \to$

---

[1]) Здесь требуются дальнейшие исследования относительно построения моделей отображений двумерных комплексов в себя.

[2]) Для того чтобы реализовать произвольное разложение на ручки, совместимое с алгебраическими ограничениями, размерность многообразия должна быть не меньше шести.

[3]) Термин «виртуальная перестановка» предложен П. Делинем.

$\to \ldots$, и такой цепной автоморфизм

$$F = \{C_i \xrightarrow{F_i} C_i\},$$

что

(I) Матрицы цепных отображений F_i являются матрицами виртуальных перестановок, т. е. имеют вид

$$\begin{pmatrix} P_1 & * & * & * \\ 0 & P_2 & * & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ 0 & \ldots & \ldots & P_k \end{pmatrix},$$

где P_i — матрицы перестановок с возможными переменами знаков.

(II) Пара (C, F) эквивалентна геометрическому цепному отображению, индуцированному диффеоморфизмом Морса — Смейла f.

Эти условия можно сформулировать в более инвариантных терминах, если использовать класс гомологий графика диффеоморфизма f в группе $H_m(M \times M)$.

Так как имеется цепная эквивалентность между комплексом $\{C_i\}$ и цепями на многообразии M, то имеется цепная эквивалентность двойственности $\{C_i\} \overset{\psi}{\rightleftarrows} \{C^{m-i}\}$, определенная с точностью до гомотопии. (Здесь C^{m-i} обозначает группу $\mathrm{Hom}\,(C_{m-i}, \mathbb{Z})$.)

Каждое отображение F_i определяет элемент в группе $\mathrm{Hom}(C_i, C_i)$, которая канонически изоморфна группе $C^i \otimes C_i$, и отображается под действием отображения ψ в группу $C_{m-i} \otimes C_i$.

Таким образом, цепное отображение $F = \{F_i\}$ определяет m-мерную цепь в цепном комплексе $\{C_i\} \otimes \{C_i\}$. Эта m-цепь является циклом в классе гомологий графика f.

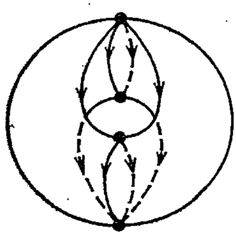
Описанное выше гомологическое условие на диффеоморфизмы Морса — Смейла можно переформулировать следующим образом: *класс гомологий графика диффеоморфизма f можно построить с помощью виртуальной перестановки некоторого цепного комплекса многообразия.*

Затем мы покажем, что для односвязных многообразий размерности не меньше шести это чисто алгебраическое гомологическое свойство является достаточным условием для того, чтобы в связной компоненте пространства $\mathrm{Diff}\, M$ содержался диффеоморфизм Морса — Смейла.

В конце параграфа мы кратко обсудим связь между этим алгебраическим условием и классами идеалов для полей деления круга, а также дадим набросок характеризации связных компонент пространства Diff M, содержащих диффеоморфизмы Морса — Смейла, для неодносвязных многообразий.

Перейдем к описанию смейловской картины поведения траекторий диффеоморфизма f.

Хорошим примером для начала является сдвиг на время ε по траекториям градиентного потока, связанного с функцией «высоты» на торе, поставленном вертикально. Однако для того, чтобы сделать ситуацию типичной и структурно устойчивой, нужно слегка наклонить тор набок и рассмотреть функцию «высоты» в этой ситуации.



Итак, этот диффеоморфизм имеет четыре неподвижные точки, причем собственные значения дифференциала диффеоморфизма в каждой из неподвижных точек не лежат на единичной окружности. Из каждой неподвижной точки p выходят два многообразия дополнительных размерностей W_p^u и W_p^s, соответствующие собственным значениям дифференциала, лежащим внутри и вне единичного круга. Эти многообразия инвариантны относительно f и продолжаются глобально до образов евклидовых пространств, вложенных в многообразие. На неустойчивом многообразии W_p^u диффеоморфизм f является растягивающим, а на устойчивом многообразии W_p^s — сжимающим отображением.

В нашем примере на торе неустойчивые и устойчивые многообразия неподвижных точек имеют следующий вид:

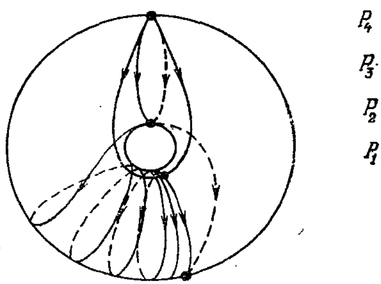
$$P_4\colon\ (\mathbb{R}^2,\ 0),$$
$$P_3\colon\ (\mathbb{R}^1,\ \mathbb{R}^1),$$
$$P_2\colon\ (\mathbb{R}^1,\ \mathbb{R}^1),$$
$$P_1\colon\ (0,\ \mathbb{R}^2).$$

Теперь мы можем построить более интересный пример диффеоморфизма Морса — Смейла, который уже не изотопен тождественному отображению. В тонкой полоске, охватывающей левую половину тора, построим диффеоморфизм g, который состоит в повороте каждой окружности, лежащей на постоянной высоте, на угол, изменяющийся от 0 до 2π при движении окружности сверху вниз через полоску. Вне полоски диффеоморфизм g доопределяется как тождественный.

Заметим, что построенный диффеоморфизм g сохраняет нашу функцию высоты. Возмутим теперь диффеоморфизм g посредством малого сдвига вниз по линиям градиента функции высоты. Мы получим диффеоморфизм Морса — Смейла с четырьмя периодическими точками (все эти точки неподвижные), действие которого в группе одномерных гомологий представляется матрицей

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Размерности устойчивых и неустойчивых многообразий остаются такими же, как и в предыдущем примере, но так как диффеоморфизм g закручивает левую сторону тора, то неустойчивое многообразие точки P_3 вынуждено пересечь устойчивое многообразие точки P_2. Так как точка пересечения этих двух многообразий движется в направлении от неподвижной точки по многообразию $W^u_{P_3}$ и в направлении к неподвижной точке по многообразию $W^s_{P_2}$, то положительная полутраектория этой точки дает бесконечное множество точек пересечения многообразий $W^u_{P_3}$ и $WP^s_{P_2}$.

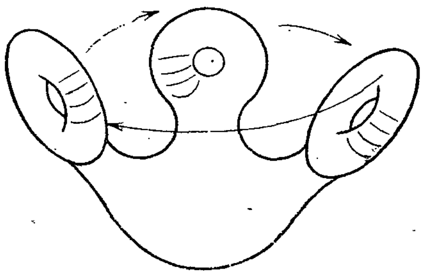


Все эти точки пересечения являются трансверсальными, и, следовательно, построенный диффеоморфизм является диффеоморфизмом Морса — Смейла, в силу определения. Он имеет конечное число периодических точек, которые являются гиперболическими (все собственные значения диффеоморфизма не лежат на единичной окружности), и все пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий периодических точек (если эти многообразия вообще пересекаются) являются трансверсальными.

Для диффеоморфизмов Морса — Смейла Смейл ввел отношение частичного порядка на множестве периодических точек, которое состоит в следующем:

$$p < q, \text{ если } W_q^u \cap W_p^s \neq \varnothing \left(\text{тогда } \dim W_p^u < \dim W_q^u\right).$$

Таким образом, мы можем представлять себе произвольный диффеоморфизм Морса — Смейла с помощью комбинации описанных картин и перестановок, например, как показано на следующем рисунке.



Рассуждая более общим образом, заметим, что многообразие, на котором действует деффеоморфизм Морса — Смейла, является объединением неустойчивых многообразий периодических точек. Отношение частичного порядка разбивает множество периодических точек на уровни[1]. Неустойчивые многообразия точек одного уровня переходят друг в друга. Если допустить, что эти неустойчивые многообразия могут играть роль клеток в некотором процессе вычисления гомологий многообразия, то мы найдем, что цепные матрицы имеют описанный выше вид виртуальных перестановок.

Теорема. *Диффеоморфизм Морса — Смейла определяет «виртуальную перестановку» в следующем смысле: на уровне целочисленных цепей диффеоморфизм можно представить с помощью матриц виртуальных перестановок.*

Следствие. *Собственные значения отображения в гомологиях, индуцированного диффеоморфизмом Морса — Смейла, являются корнями из единицы.*

---

[1]) Точки одиого уровня должны быть несравнимы друг с другом относительно используемого порядка. Кроме того, как видно из дальнейшего, авторы подразумевают, что точки с одинаковым уровнем имеют одинаковую размерность (но данная размерность может «занять» несколько уровней). Разбиение иа уровии, вообще говоря, можно осуществить несколькими способами. — *Прим. ред.*

Эту теорему можно доказывать, исходя из описанной картины, двумя способами. Один из них состоит в использовании когомологий Чеха для фильтрации и в построении цепного комплекса требуемого вида для когомологий Чеха (которые, конечно, совпадают с обычными когомологиями).

Другой путь, который дает больше информации для неодносвязных пространств, состоит в том, чтобы рассматривать дополнительную фильтрацию многообразия M на открытые многообразия — объединения устойчивых многообразий периодических точек, причем добавление новых точек происходит в соответствии с отношением частичного порядка в направлении убывания. Эти открытые многообразия инвариантны относительно диффеоморфизма и имеют гомотопический тип конечных клеточных комплексов. Приятным геометрическим упражнением является проверка того обстоятельства, что при добавлении одного неустойчивого многообразия к плотному открытому многообразию описанной фильтрации с точки зрения теории гомотопий происходит добавление одной клетки к клеточному комплексу.

Второй метод доказательства показывает, что диффеоморфизм Морса — Смейла является «виртуальной перестановкой в теории гомотопий». Под этим мы подразумеваем следующее:

(I) Имеется некоторое пространство, состоящее из конечного множества клеток, которые последовательно приклеиваются в соответствии с размерностью, но в каждой размерности может возникать несколько уровней клеток.

(II) Имеется некоторое клеточное отображение этого пространства, которое переставляет клетки каждого уровня.

(III) Эти клеточный комплекс и клеточное отображение гомотопически эквивалентны[1]) многообразию и диффеоморфизму Морса — Смейла.

Очевидно, эти виртуальные перестановки клеточных комплексов действуют весьма специальным образом на фундаментальной группе и на цепях универсального накрывающего пространства. Мы обсудим это ниже.

Теперь мы обратимся к рассмотрению обратной задачи построения диффеоморфизма Морса — Смейла в классе изотопных диффеоморфизмов, которые индуцируют «виртуальную перестановку».

Рассмотрим сначала случай, когда M — односвязное многообразие размерности не меньше шести. Обозначим через

---

[1]) Эта эквивалентность на самом деле является простой гомотопической эквивалентностью.

(f) некоторую связную компоненту в пространстве $\mathrm{Diff}\, M$, которая состоит из диффеоморфизмов, порождающих виртуальную перестановку в гомологиях. Это означает, что график диффеоморфизма f можно описать с помощью матриц виртуальных перестановок на некотором цепном комплексе многообразия M.

Во-первых, справедливо алгебраическое утверждение о том, что без ограничения общности можно считать, что этот комплекс имеет вид

$$0 \to \mathbb{Z} \to 0 \to C_{m-2} \to \ldots \to C_2 \to 0 \to \mathbb{Z} \to 0,$$

так как $H_1(M) = H_{m-1}(M) = 0$. Это утверждение доказывается в дополнении A.

Выберем теперь разложение многообразия M на ручки, геометрический цепной комплекс которого изоморфен заданному цепному комплексу. В силу предложения 2.1, можно с помощью изотопии перевести заданный диффеоморфизм в диффеоморфизм, сохраняющий разложение на ручки и такой, что соответствующие геометрические цепные отображения являются виртуальными перестановками.

Так как разложение на ручки не содержит ручек индекса 0 и $(m-1)$, то можно построить дальнейшую изотопию и получить диффеоморфизм, у которого геометрические матрицы пересечений с точностью до знака совпадают с алгебраическими матрицами пересечений (предложение 2.2).

Далее мы можем применить процедуры, описанные в § 1, и получить структурно устойчивый диффеоморфизм. Структура множества неблуждающих точек Ω полученного диффеоморфизма определяется геометрическими матрицами пересечений. Но эти матрицы являются матрицами виртуальных перестановок с собственными значениями на единичной окружности. Таким образом, множество Ω состоит из конечного числа точек и построенный диффеоморфизм является диффеоморфизмом Морса — Смейла.

Теорема. *Если M — односвязное многообразие размерности не меньше шести, то связная компонента пространства $\mathrm{Diff}\, M$ содержит диффеоморфизм Морса — Смейла тогда и только тогда, когда эта компонента определяет виртуальную перестановку в гомологиях.*

Мы завершим этот параграф несколькими дополнительными замечаниями об этом гомологическом условии и о неодносвязном случае.

Обозначим через G группу Гротендика, порожденную классами цепной эквивалентности цепных комплексов конечного ранга с автоморфизмом, к которым применяется операция прямой суммы.

Можно рассмотреть подгруппу $P \subseteq G$, порожденную теми комплексами с автоморфизмом, у которых автоморфизм описывается с помощью виртуальной перестановки, и подгруппу $F \subseteq G$ тех комплексов, для которых индуцированный автоморфизм в гомологиях является квазиунипотентным (собственные значения лежат на единичной окружности).

Конечно, $P \subseteq F \subseteq G$. Если бы рассматривались цепные комплексы над группой рациональных чисел $\mathbb{Q}$ вместо целочисленных цепных комплексов, то можно было бы доказать, что $P_\mathbb{Q} = F_\mathbb{Q}$, однако из результатов Суона следует, что над $\mathbb{Z}$ подгруппа P строго вложена в F.

Чтобы получить некоторое представление об этом обстоятельстве, рассмотрим автоморфизм T свободной абелевой группы A как элемент группы G. Такое преобразование можно представить в верхнетреугольной форме

$$T = \begin{bmatrix} A_1 & * & \dots & * \\ 0 & A_2 & \dots & \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & & A_r \end{bmatrix},$$

где каждая из матриц A_i имеет неприводимый характеристический многочлен.

Если собственные значения матрицы T лежат на единичной окружности и каждая из матриц A_i эквивалентна сопровождающей матрице соответствующего многочлена деления круга, то нетрудно доказать, что класс эквивалентности $[T] \in G$ автоморфизма T принадлежит подгруппе P. Однако, вообще говоря, классы эквивалентности матриц A_i над целыми числами находятся во взаимно однозначном соответствии с классами идеалов поля деления круга, порожденного собственными значениями матрицы A_i. Конечно, над рациональными числами матрица A_i эквивалентна сопровождающей матрице, и это обстоятельство объясняет совпадение групп $P_\mathbb{Q}$ и $F_\mathbb{Q}$. Р. Суон утверждает, что уже классы идеалов в поле корней 23 степени из единицы определяют нетривиальные элементы факторгруппы F/P. Уже класс, для которого отображение в гомологиях является умножением на 2 в группе $\mathbb{Z}/47\mathbb{Z}$, нельзя реализовать элементом подгруппы P (см. [26]), и, следовательно, этот класс определяет нетривиальный элемент в F/P [1]).

Из наших геометрических рассмотрений вытекают некоторые факты о свойствах элементов группы F. Заметим, во-первых, что периодический диффеоморфизм f многообразия M определяет элемент $X_f \in F$. Можно доказать, что на самом деле элемент X_f лежит в подгруппе P. Действительно, можно выбрать невырожденную функцию Морса $M \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}$, инвариантную относительно диффеоморфизма f, т. е. такую, что $f \circ \psi = \psi$. Тогда можно превратить диффеоморфизм f в диффеоморфизм Морса — Смейла с помощью возмущения малым сдвигом по градиенту функции ψ. Таким образом, $X_f \in P$. Пусть, например, матрица $T \in GL(n, \mathbb{Z})$ имеет конечный порядок. Тогда класс $\{\Lambda^i T\}$ принадлежит P. Действительно, можно представить T как периодический диффеоморфизм n-мерного тора $\mathbb{T}^n$ [2]).

Аргументы из алгебраической геометрии показывают, что элемент X_f лежит в подгруппе P, если диффеоморфизм f строится при монодромии на алгебраическом многообразии. Таким образом, в односвязном случае такой диффеоморфизм f изотопен диффеоморфизму Морса — Смейла.

Другой интересный пример связан с матрицами с неотрицательными элементами. Предположим, что матрица $T \in GL(n, \mathbb{Z})$ обладает следующим свойством: собственные значения матрицы $|T| = (|t_{ij}|)$ лежат на единичной окружности [3]). Из теории матриц известно, что в этом случае собственные значения матрицы T также лежат на единичной окружности, а из наших геометрических рассмотрений вытекает, что $[T] \in P$. Мы просто реализуем матрицу как действие в двумерных гомологиях диффеоморфизма Морса — Смейла на многообразии с краем, которое получается раздуванием букета двумерных сфер.

Например, квазиунипотентные матрицы из $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ с неотрицательными элементами определяют нулевой элемент в факторгруппе $F \mid P$.

Рассмотрим теперь ситуацию для неодносвязных многообразий. Из описанной выше клеточной картины ясно, что диффеоморфизмы Морса — Смейла действуют специальным образом на фундаментальной группе π_1 и представляются на

---

[1]) Для того чтобы доказать это, рассуждение из [26] нужно слегка модифицировать.

[2]) Это приводит к естественному вопросу о том, верно ли, что любой квазиунипотентный элемент группы $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ определяет связную компоненту пространства $\mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n)$, которая содержит диффеоморфизм Морса — Смейла.

[3]) Заметим, что образующие группы P обладают этим свойством.

уровне цепей с отмеченным путем матрицами вида

$$\begin{Vmatrix} P_1 & \dots & * & \dots & * \\ 0 & & P_2 & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ 0 & & \dots & & P_n \end{Vmatrix},$$

где каждая из матриц P_i имеет вид матрицы перестановки, но ее ненулевые элементы имеют вид $\pm g$, где g — некоторый элемент группы π_1, рассматриваемой как часть своего группового кольца.

С другой стороны, рассмотрение алгебраических и геометрических индексов пересечения и прием Уитни указывают на те алгебраические операции на цепном комплексе над групповым кольцом, которые можно имитировать на геометрическом уровне. Поэтому мы сможем довести до конца наше построение диффеоморфизма Морса — Смейла в связной компоненте пространства Diff M, если мы будем располагать достаточной алгебраической информацией (относительно группы π_1 и отображения цепного комплекса с отмеченными путями). Мы надеемся, что некоторые математики заинтересуются этой задачей и отшлифуют формулировку результатов для общего случая.

Дополнение А

Пусть $\{C_i\}$ — цепной комплекс конечной длины, порождающий полную группу $H_*(M^m)$ гомологий многообразия M^m, причем $H_1(M^m) = H_{m-1}(M^m) = 0$. Мы укажем сейчас естественный способ построения другого цепного комплекса, который имеет вид

$$0 \to \mathbb{Z} \to 0 \to \widetilde{C}_{m-1} \to \dots \to \widetilde{C}_2 \to 0 \to \mathbb{Z} \to 0$$

и также порождает группу $H_*(M^m)$ [1]).

Идея состоит в том, чтобы как бы «складывать» [2]) комплекс $\{C_i\}$ (слегка модифицированный) попеременно в его $(m-2)$-м и втором членах, пока весь он не сконцентрируется

---

[1]) Переход от $\{C_i\}$ к $\{\widetilde{C}_i\}$ таков, что если для $\{C_i\}$ существует виртуальная перестановка, индуцирующая в гомологиях данное отображение f_*, то аналогичная виртуальная перестановка существует и для $\{\widetilde{C}_i\}$. — *Прим. ред.*

[2]) Складывание числовой прямой в точке a состоит в том, что либо полупрямая $x > a$ накладывается на полупрямую $x < a$, причем точка $a + y$ $(y > 0)$ накладывается на точку $a - y$ («складывание налево»),

в отрезке от второго до $(m-2)$-го члена. Опишем складывание в $(m-2)$-м члене.

Рассмотрим участок комплекса $\{C_i\}$:

$$0 \to C_n \to \ldots \to C_{m-1} \xrightarrow{\partial} C_{m-2}.$$

Измеиим участок $C_{m+1} \xrightarrow{\partial} C_m$ так, чтобы уничтожить группу $H_m(M^m) = \mathbb{Z}$; для этого добавим компоненту $\mathbb{Z}$ к группе C_{m+1} и переопределим отображение ∂. В результате возникнет точная последовательность

$$0 \to C_n \to \ldots \to C_{m+1} \to C_m \to C_{m-1} \to B_{m-2} \to 0,$$

где группа границ B_{m-2} образует прямое слагаемое в группе C_{m-2}, так как по соображениям двойственности группа $H_{m-2}(M^m)$ является группой без кручения. Можно применить к этой точной последовательности функтор $\operatorname{Hom}(\cdot, \mathbb{Z})$; получится новая точная последовательность

$$0 \to B'_{m-2} \xrightarrow{i} C'_{m-1} \xrightarrow{\partial} \ldots \to C'_n \to 0.$$

Тогда можно построить новый цепной комплекс, гомологии которого совпадают с $H_*(M^m)$, а именно:

$$0 \to \mathbb{Z} \to 0 \to C_{m-2} \xrightarrow{\partial''} \begin{matrix} C_{m-3} \\ \oplus \\ C'_{m-1} \end{matrix} \xrightarrow{\partial \oplus \partial} \begin{matrix} C_{m-4} \\ \oplus \\ C'_m \end{matrix} \to \ldots$$

где отображение ∂'' определяется следующим образом: представим C_{m-2} в виде $B_{m-2} \oplus C$, выберем изоморфизм $B_{m-2} \simeq$ $\simeq B'_{m-2}$ и применим отображение i на компоненте B_{m-2} и старое ∂ на компоненте C. Складывая затем комплекс в другую сторону во втором члене, затем снова в $(m-2)$-м и т. д., в конце концов добьемся, что весь он сосредоточится в отрезке от второго до $(m-2)$-го члена.

Такова та алгебраическая конструкция, которая нужна нам для рассмотрения диффеоморфизмов Морса — Смейла.

§ 4. ПРОСТЕЙШИЕ ДИФФЕОМОРФИЗМЫ В КЛАССЕ ИЗОТОПНЫХ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ

В теории динамических систем в основном рассматривается структура траекторий диффеоморфизма и его возмущений.

либо наоборот («складывание направо»). Описываемый ниже процесс изменения комплекса $\{C_i\}$ напоминает процесс складывания прямой: сперва в точке $m-2$ складывание налево, затем в точке 2 складывание направо, снова складывание налево в $m-2$, направо в 2 и т. д. — *Прим. ред.*

С этой точки зрения тождественный диффеоморфизм не является простым, так как структура траекторий у его возмущений изменяется коренным образом. Мы уже отметили, что при таком подходе самыми простыми среди известных диффеоморфизмов оказываются диффеоморфизмы Морса — Смейла. Это обстоятельство мотивирует следующее определение.

Определение. Диффеоморфизм $f \in \mathrm{Diff}^r(M)$ называется *простейшим в своем классе* изотопных диффеоморфизмов, если

(1) f структурно устойчив и

(2) f имеет наименьшую топологическую энтропию среди всех структурно устойчивых диффеоморфизмов, изотопных f.

Нет никакой гарантии, что в каждом классе изотопных диффеоморфизмов найдется простейший диффеоморфизм. Далее, если один такой диффеоморфизм существует, то существует бесконечно много других попарно различных даже с точки зрения топологической или Ω-сопряженности.

Для диффеоморфизмов, удовлетворяющих аксиоме A, Боуэн доказал следующее утверждение.

Теорема. $h(f) = \overline{\lim} \frac{1}{n} \log N_n(f)$.

Таким образом, из предложения 1.8 следует, что для диффеоморфизма $f \in \mathscr{H}$ справедливо неравенство

$$h(f) \geqslant \max |\log |\lambda||, \qquad (*)$$

где максимум берется по всем собственным значениям оператора f_*: $H_*(M, \mathbb{Q}) \to H_*(M, \mathbb{Q})$. Основная проблема, которую мы будем сейчас рассматривать, состоит в том, насколько широки предположения, при которых справедливо неравенство $(*)$. Из результатов [18] и построения множества $\mathscr{H}$ вытекает следующее утверждение[1]).

Предложение. *Любой диффеоморфизм $f \in \mathrm{Diff}^r(M)$ изотопен некоторому диффеоморфизму из множества $\mathscr{H}$ с помощью изотопии, произвольно малой в C^0-топологии. Таким образом, в C^0-топологии множество $\mathscr{H}$ плотно в пространстве $\mathrm{Diff}^r(M)$.*

Объединяя это утверждение с результатами Нитецки [12], получаем

---

[1]) См. также следствие из теоремы 1.1 в § 1 настоящей статьи. — *Прим. перев.*

Предложение. *Неравенство* (*) *справедливо для диффеоморфизмов, образующих в пространстве* $\mathrm{Diff}^r(M)$ *открытое и плотное в* C^0*-топологии подмножество.*

Отсюда возникает очевидный вопрос.

Проблема. *Верно ли, что неравенство* (*) *имеет место для любого диффеоморфизма* $f \in \mathrm{Diff}^r(M)$?

Одним из исходных пунктов для наших рассмотрений явилось наблюдение, что неравенство (*) выполняется для диффеоморфизмов Морса — Смейла и, следовательно, в этом случае собственные значения отображения f_* являются корнями из единицы. Мы предполагаем, что это неравенство выполняется для всех диффеоморфизмов, удовлетворяющих аксиоме A и свойству отсутствия циклов (определения см. в работе Смейла [23])[1]), а также что для любого такого диффеоморфизма f найдется диффеоморфизм $g \in \mathscr{H}$, для которого $h(g) \leqslant \leqslant h(f)$. Очень полезными для решения этого вопроса могут оказаться теоремы Боуэна [3] и Мэннинга [9]. Боуэн [5] доказал неравенство (*) для диффеоморфизмов, удовлетворяющих аксиоме A и свойству отсутствия циклов при дополнительном условии нульмерности множества Ω.

Наконец, мы спрашиваем, когда в (*) может иметь равенство для некоторого диффеоморфизма $f \in \mathscr{H}$ или когда найдется последовательность диффеоморфизмов $f_n \in \mathscr{H}$, для которых $h(f_n) \to \max|\log|\lambda||$ и т. д. Теорема о существовании диффеоморфизмов Морса — Смейла является первым шагом в направлении ответа на этот вопрос.

Список литературы

1. Аносов Д. В., Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны, *Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова*, **90**, 1967.
2. Bowen R., Topological entropy and axiom A, Global Analysis, Proc. Symp. in Pure Math., 14, Amer. Math. Soc., Providence R. I., 1970, 23—41.
3. Bowen R., Markov partitions for Axiom A diffeomorphisms, *Amer. J. Math.*, **92**, № 3 (1970), 725—743.
4. Bowen R., Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 153 (1971), 401—414.

---

[1]) Это доказано Шубом и Уильямсом (см. [31*], а также наш обзор «Гипотеза об энтропии» в настоящем сборнике). — *Прим. перев.*

5. Bowen R., Entropy versus homology for certain diffeomorphisms, *Topology*, **13**, № 1 (1974), 61—67.
6. Bowen R., Lanford O., Zeta functions of restrictions of the shift transformation, Proc. Symp. in Pure Math., **14**, Amer. Math. Soc., Providence R. I.; 1970, 43—49.
7. Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, М., «Наука», 1967.
8. Hirsch M. W., Palis J., Pugh C. C., Shub M., Neighborhoods of hyperbolic sets, *Invent. Math.*, **9** (1969), 121—134.
9. Manning A., Axiom A diffeomorphisms have rational zeta functions, *Bull. Lond. Math. Soc.*, **3** (1971), 215—220.
10. Milnor J., Lectures on the *h*-Colordism Theorem, Princeton Univ. Press, 1965. (Русский перевод: Милнор Дж., Теорема об *h*-кобордизме, М., «Мир», 1969.)
11. Newhouse S., Hyperbolic limit sets, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **167** (1972), 125—150.
12. Nitecki Z., On semi-stability for diffeomorphisms, *Invent, Math.*, **14** (1971), 83—123.
13. Palis J., Smale S., Structural stability theorems, Global Analysis, Proc. Symp. in Pure Math., **14**, Amer Math. Soc., Providence R. I. (1970), 223—232. (Русский перевод с препринта: Пейлис Дж., Смейл С., Теоремы структурной устойчивости, сб. перев. *Математика*, **13** : 2 (1969), 145—155.)
14. Peixoto M., Structural stability on two-dimensional manifolds, *Topology*, **1** (1962), 101—120.
15. Robbin J., A structural stability theorem, *Ann. of Math.*, **94**, № 3 (1971), 447—493. (Русский перевод: Роббин Дж., Теорема о структурной устойчивости, в кн. З. Нитецки «Введение в дифференциальную динамику», М., «Мир», 1975, 233—289.)
16. Shub M., Stability and genericity for diffeomorphisms, Dynamical Systems, ed. by M. M. Pexoto, Proc. Symp. at Salvador 1971, Acad. Press, N. Y. — London, 1973, 493—514.
17. Shub M., Morse-Smale diffeomorphisms are unipotent on homology, Dynamical Systems, ed. by M. M. Pexoto, Proc. Symp. at Salvador 1971, Acad. Press, N. Y. — London, 1973, 489—492.
18. Shub M., Structurally stable diffeomorphisms are dense, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **78** (1972), 817—818.
19. Shub M., Smale S., Beyond hyperbolicity, *Ann. of Math.*, **96**, № 3 (1972), 587—591.
20. Smale S., Diffeomorphisms with many periodic points, Differential and Combinatorial Topology (ed. S. S. Cairns), Princeton Univ. Press, 1965, 63—80. (Русский перевод: Смейл С., Диффеоморфизмы со многими периодическими точками, сб. перев. *Математика*, **11** : 4 (1967), 88—106.)
21. Smale S., Structurally stable systems are not dense, *Amer. J. Math.*, 88, № 2 (1966), 491—496. (Русский перевод: Смейл С., Грубые системы не плотны, сб. *Математика*, **11** : 4 (1967), 107—112.)
22. Smale S., Differentiable Dynamical Systems, Bull. Amer. Math. Soc., **73** (1967), 747—817. (Русский перевод: Смейл С., Дифференцируемые динамические системы, *Успехи матем наук*, **25**, № 1 (1970), 113—185.)
23. Smale S., The Ω-stability Theorem, Global Analysis, Proc. Symp. in Pure Math., **14**, Amer. Math. Soc., Providence R. I., 1970, 289—298. (Русский перевод с препринта: Смейл С., Теорема Ω-устойчивости, сб. *Математика*, **13** : 2 (1969), 161—169.)
24. Smale S., Stability and isotopy in discrete dynamical systems, Dynamical systems ed. by Peixoto, Proc. Symp. at Salvador 1971, Acad. Press, N. Y. — London, 1973, 527—530.

25. Shub M., Sullivan D., A remark on the Lefshetz fixed point formula for differentiable maps, *Topology*, **13**, № 2 (1974), 189—191.
26. Swan R. C., Invariant rational functions and a problem of Steenrod, *Invent. Math.*, **7**, № 2 (1969), 148—158.
27. Williams R. F., Cllassification of subshifts of finite type, *Ann. Math.*, 98, № 1 (1973), 120—153; errata A, **99**, № 2 (1974), 380—381.
28*. Майер А. Г., Грубые преобразования окружности в окружность, *Уч. записки ГГУ*, **12** (1939), 215—229.
29*. Плис В. А., О грубости дифференциальных уравнеиий, заданных на торе, *Вестник ЛГУ*, сер. матем., **13**, **3** (1960), 15—23.
30*. Динабург Е. И., Соотношения между топологической энтропией и метрической энтропией, *Докл. АН СССР*, 190, **1** (1970), 19—22.
31*. Shub M., Williams R. F., Entropy and stability, *Topology*, 14, № **4** (1975) 329—338.

ГИПОТЕЗА ОБ ЭНТРОПИИ

А. Б. Каток

1. Определение топологической энтропии непрерывного отображения T компактного метрического пространства через асимптотику числа элементов в (n, ε)-разделенных множествах приведено во введении к статье М. Шуба «Динамические системы, фильтрации и энтропия» [1], перевод которой публикуется в настоящем сборнике. Мы добавим несколько замечаний, которые будут полезны в дальнейшем.

Обозначим $d_n(x, y) = \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant n} d(T^i x, T^i y)$ и положим $r_n(T, \varepsilon)$ равным минимальному числу элементов в ε-сети в пространстве X, снабженном метрикой d_n. Очевидно,

$$r_n(T, \varepsilon/2) \geqslant S_n(T, \varepsilon) \geqslant r_n(T, \varepsilon), \tag{1}$$

где $S_n(T, \varepsilon)$ — максимальное число элементов в (n, ε)-разделенном подмножестве пространства X.

Действительно, правое неравенство следует из того, что максимальное (n, ε)-разделенное множество в X является ε-сетью в метрике d_n, а левое — из того, что для любого (n, ε)-разделенного множества шары радиуса $\frac{\varepsilon}{2}$ в метрике d_n с центрами в точках этого множества попарно не пересекаются, а любая $\frac{\varepsilon}{2}$-сеть должна пересекаться с таким шаром. Из неравенств (1) вытекает эквивалентное определение топологической энтропии

$$h(T) = \lim_{\varepsilon \to 0} \varlimsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log r_n(T, \varepsilon). \tag{2}$$

Обозначим через $B_n(x, \varepsilon)$ шар в метрике d_n на X с центром в точке x радиуса ε.

В [1] М. Шуб высказал следующую гипотезу.

Гипотеза об энтропии (см. [1], п. V). *Для любого отображения f класса C^1 гладкого компактного многообразия M справедливо неравенство*

$$h(f) \geqslant \log s(f_*), \tag{3}$$

где f_*: $H_*(M, \mathbb{R}) \to H_*(M, \mathbb{R})$ — индуцированный отображением f линейный оператор в полной группе гомологий много-

25. Shub M., Sullivan D., A remark on the Lefshetz fixed point formula for differentiable maps. *Topology*, **13**, № 2 (1974), 189—191.
26. Swan R. C., Invariant rational functions and a problem of Steenrod, *Invent. Math.*, **7**, № 2 (1969), 148—158.
27. Williams R. F., Cllassification of subshifts of finite type, *Ann. Math.*, **98**, № 1 (1973), 120—153; errata A, **99**, № 2 (1974), 380—381.
28*. Майер А. Г., Грубые преобразования окружности в окружиость, *Уч. записки ГГУ*, **12** (1939), 215—229.
29*. Плис В. А., О грубости дифференциальных уравнений, заданных на торе, *Вестник ЛГУ*, сер. матем., **13**, **3** (1960), 15—23.
30*. Динабург Е. И., Соотношения между топологической энтропией и метрической энтропией, *Докл. АН СССР*, 190, **1** (1970), 19—22.
31*. Shub M., Williams R. F., Entropy and stability, *Topology*, 14, № 4 (1975) 329—338.

ГИПОТЕЗА ОБ ЭНТРОПИИ

А. Б. Каток

1. Определение топологической энтропии непрерывного отображения T компактного метрического пространства через асимптотику числа элементов в (n, ε)-разделенных множествах приведено во введении к статье М. Шуба «Динамические системы, фильтрации и энтропия» [1], перевод которой публикуется в настоящем сборнике. Мы добавим несколько замечаний, которые будут полезны в дальнейшем.

Обозначим $d_n(x, y) = \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant n} d(T^i x, T^i y)$ и положим $r_n(T, \varepsilon)$ равным минимальному числу элементов в ε-сети в пространстве X, снабженном метрикой d_n. Очевидно,

$$r_n(T, \varepsilon/2) \geqslant S_n(T, \varepsilon) \geqslant r_n(T, \varepsilon), \tag{1}$$

где $S_n(T, \varepsilon)$ — максимальное число элементов в (n, ε)-разделенном подмножестве пространства X.

Действительно, правое неравенство следует из того, что максимальное (n, ε)-разделенное множество в X является ε-сетью в метрике d_n, а левое — из того, что для любого (n, ε)-разделенного множества шары радиуса $\frac{\varepsilon}{2}$ в метрике d_n с центрами в точках этого множества попарно не пересекаются, а любая $\frac{\varepsilon}{2}$-сеть должна пересекаться с таким шаром. Из неравенств (1) вытекает эквивалентное определение топологической энтропии

$$h(T) = \lim_{\varepsilon \to 0} \varlimsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log r_n(T, \varepsilon). \tag{2}$$

Обозначим через $B_n(x, \varepsilon)$ шар в метрике d_n на X с центром в точке x радиуса ε.

В [1] М. Шуб высказал следующую гипотезу.

Гипотеза об энтропии (см. [1], п. V). *Для любого отображения f класса C^1 гладкого компактного многообразия M справедливо неравенство*

$$h(f) \geqslant \log s(f_*), \tag{3}$$

где $f_*\colon H_*(M, \mathbb{R}) \to H_*(M, \mathbb{R})$ — индуцированный отображением f линейный оператор в полной группе гомологий многообразия M

$$H_*(M, \mathbb{R}) = \bigoplus_{i=0}^{\dim M} H_i(M, \mathbb{R}), \tag{4}$$

а $s(f_*)$ — спектральный радиус оператора f_*, $s(f_*) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\|f_*^n\|\right)^{1/n}$, который совпадает с максимальным модулем собственного значения f_*.

Допуская некоторую вольность речи, мы будем говорить, что для некоторого отображения или класса отображений справедлива гипотеза об энтропии, если для этих отображений доказано неравенство (3).

Мы изложим частичные результаты, контрпримеры и некоторые наводящие соображения, относящиеся к гипотезе об энтропии и ее возможным обобщениям. Нам представляется, что эта гипотеза является очень удачным вопросом и попытки ее доказательства весьма полезны для развития того направления в теории динамических систем, связанного в первую очередь с работами Смейла, Шуба и Сулливана, которое стремится объединить методы изучения гладких отображений, применяемые в дифференциальной топологии и теории гладких динамических систем (дифференциальной динамике).

Имеющиеся частичные результаты можно разделить на три группы: утверждения, более слабые, чем гипотеза об энтропии, доказанные для произвольных гладких или даже непрерывных отображений, доказательство гипотезы об энтропии для специальных классов многообразий и доказательство ее для специальных классов отображений. Мы начнем с некоторых общих замечаний, затем изложим имеющиеся результаты, следуя в основном указанному порядку, и закончим обсуждением вопроса о том, когда может достигаться равенство $h(f) = \log s(f_*)$.

2. Так как разложение (4), очевидно, инвариантно относительно оператора f_*, то $s(f_*) = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant \dim M} s(f_{*i})$, где f_{*i} — ограничение оператора f_* на пространство $H_i(M, \mathbb{R})$.

Таким образом, неравенство (3) эквивалентно следующей системе неравенств:

$$h(f) \geqslant \log s(f_{*i}), \quad i = 1, \ldots, \dim M. \tag{5}$$

Всюду в дальнейшем мы будем считать, что на многообразии M фиксирована риманова метрика, и будем обозначать через $d(x, y)$, $x, y \in M$, расстояние на M, индуцированное этой метрикой. Оценивать сверху действие отображения f в гомологиях (а это и требуется для гипотезы об энтропии) можно исходя из следующих соображений.

Будем рассматривать k-мерные цепи, порожденные гладкими сингулярными симплексами. Для такого симплекса σ^k обозначим через $\lambda_k(\sigma^k)$ его k-мерный риманов объем, а объемом k-мерной цепи $c^k = \sum a_i \sigma_i^k$, $a_i \in \mathbb{R}$, назовем величину $\lambda_k(c^k) = \sum\limits_i |a_i| \lambda_k(\sigma_i^k)$. Положим для класса гомологий $\alpha \in H_k(M, R)$ норму $\|\alpha\|$ равной точной нижней грани объемов циклов, принадлежащих классу α. Очевидно, что $\|\alpha + \beta\| \leqslant \|\alpha\| + \|\beta\|$ и $\|a\alpha\| = |a| \cdot \|\alpha\|$ для $a \in \mathbb{R}$. Для того чтобы проверить, что функция $\| \ \|$ действительно является нормой в пространстве $H_k(M, R)$, нужно еще доказать, что $\|\alpha\| = 0$, только если $\alpha = 0$. Очевидно, для любого симплекса σ^k и любой k-мерной дифференциальной формы γ имеет место неравенство $\int\limits_{\sigma^k} \gamma \leqslant c(\gamma)\lambda_k(\sigma^k)$, где $c(\gamma)$—некоторая константа.

Выберем базис в пространстве $H^k(M, \mathbb{R})$ и реализуем элементы этого базиса дифференциальными формами $\gamma_1 \ldots \gamma_s$. Если $\|\alpha\| = 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой цикл $c_\varepsilon \in \alpha$, что $\left|\int\limits_{c_\varepsilon} \gamma_i\right| < \varepsilon$, $i = 1, \ldots, s$, но так как эти интегралы не зависят от выбора цикла в классе α, то, в силу теоремы Де-Рама, получаем, что $\alpha = 0$.

Таким образом, для доказательства неравенства $\log s(f_{*k}) \leqslant h(f)$ достаточно для любого достаточно малого гладкого сингулярного k-мерного симплекса σ^k показать, что образ $f^n\sigma^k$ гомологичен такой цепи c_n, что

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{\log \lambda_k(c_n)}{n} \leqslant h(f).$$

В частности, это неравенство выполняется, если для типичного симплекса σ^k

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\log \lambda_k(f^n\sigma^k)}{n} \leqslant h(f). \qquad (6)$$

В случае когда отображение f не взаимно однозначно, величину $\lambda_k(f^n\sigma^k)$ следует вычислять, конечно, с учетом кратности. Оговорка о типичности симплекса перед неравенством (6) очень существенна. Как заметил Г. А. Маргулис, без этой оговорки неравенство (6) может не выполняться даже для диффеоморфизмов Морса — Смейла. Правда, в его примерах либо симплекс, либо диффеоморфизм имеет лишь конечную гладкость. Отметим, что неравенство (6) уже всецело относится к дифференциальной динамике, и если бы его удалось доказать, то гипотеза об энтропии была бы доказана без привлечения методов дифференциальной топологии.

3. Теорема 1 (Э. Мэннинг [2]). *Для любого непрерывного отображения f компактного гладкого многообразия M имеет место неравенство*

$$h(f) \geqslant \log s(f_{*1}).$$

Доказательство. Гладкие одномерные симплексы — это пути на M. Знаком $*$ мы будем обозначать обычную композицию путей, под гомотопией незамкнутых путей мы будем понимать гомотопию с фиксированными концами. В силу сказанного выше, достаточно для любого достаточно малого пути σ и для некоторого $\varepsilon > 0$ доказать, что образ $f^n\sigma$ гомотопен пути σ_n, длина которого не превосходит некоторой константы, умноженной на $r_n(f, \varepsilon)$.

Пусть число $\delta > 0$ таково, что любой шар радиуса δ на многообразии M стягиваем, а $\varepsilon > 0$ таково, что любые две точки x, y, расстояние между которыми не больше 4ε, можно соединить путем длины меньше δ/K, лежащим в некотором шаре радиуса δ/K, где $K = \max\limits_{x \in M} \| Df_x \|$.

Пусть теперь x, y — начальная и конечная точка пути σ, и весь этот путь лежит в шаре радиуса ε. Пусть Q_n — ε-сеть в метрике d_n на M, состоящая из $r_n(f, \varepsilon)$ элементов. Выберем точки $x_0, x_1 \ldots x_s \in Q_n$ и точки $z_0 = x$, $z_1 \ldots z_s = y$ на пути σ таким образом, что $z_i \in B_n(x_i, \varepsilon)$, а участок $\{z_i, z_{i+1}\}$ пути σ от точки z_i до z_{i+1} принадлежит объединению шаров $B_n(x_i, \varepsilon)$ и $B_n(x_{i-1}, \varepsilon)$, $i = 0, 1, \ldots, s$. Соединим каждую из точек z_i с точкой x_i путем $\{z_i, x_i\}$, целиком лежащим в шаре радиуса δ/K, и рассмотрим путь $\sigma' = \{z_0, x_0\} * \{x_0, z_0\} * \{z_0, z_1\} * \{z_1, x_1\} * \ldots \ldots * \{z_{s-1}, z_s\} * \{z_s, x_s\} * \{x_s, z_s\}$, где через $\{x_i, z_i\}$ обозначается путь $\{z_i, x_i\}$, проходимый в обратном направлении. Путь σ', очевидно, гомотопен σ. Если среди точек $x_0, \ldots, x_s$ имеются совпадающие, то путь σ' содержит петли, начинающиеся и кончающиеся в этих точках, которые, очевидно, гомотопны нулю. Исключив из σ' такие петли, получим новый путь σ'', гомотопный путям σ' и σ и состоящий из звеньев вида $\{z_i, z_{i-1}\}$, $\{x_i, z_v\}$ и $\{z_i, x_i\}$, причем общее число звеньев не превосходит $3r_n(f, \varepsilon)$. Покажем по индукции, что для каждого звена $\varkappa = \{y, y'\}$ пути σ'' и каждого $i = 0, 1, \ldots, n$ образ $f^i\varkappa$ гомотопен пути $\varkappa_i$ длины меньше δ/K, лежащему в шаре радиуса δ/K. Действительно, если путь $f^i\varkappa$ гомотопен $\varkappa_i$, то путь $f^{i+1}\varkappa$ гомотопен $f\varkappa_i$, а этот путь лежит в стягиваемом шаре радиуса δ и, следовательно, гомотопен пути $\varkappa_{i+1}$ длины меньшей, чем δ/K, лежащему в шаре радиуса δ/K, который существует в силу того, что расстояние между точками $f^{i+1}y$ и $f^{i+1}y'$ меньше 4ε. Таким образом, путь $f^n\sigma''$ и, следовательно, $f''\sigma$ гомотопен пути, длина которого не превосходит $3\delta r_n(f, \varepsilon)$. Теорема доказана.

Заметим, что фактически мы доказали следующее гомотопическое утверждение, более сильное, чем теорема 1.

Пусть в предположениях теоремы 1 $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ — некоторая система образующих в группе $\pi_1(M)$, $\gamma \in \pi_1(M)$. Рассмотрим всевозможные представления $f_*\gamma$ в виде

$$\gamma_1^{i_1}\gamma_2^{i_2} \ldots \gamma_m^{i_m}\gamma_1^{i_{m+1}} \ldots \gamma_m^{i_{km}}, \quad i_j \in Z$$

(здесь f_* — эндоморфизм $\pi_1(M)$, индуцированный отображением f) и обозначим через $\varphi_n(\gamma)$ минимум $\sum_{j=1}^{km} |i_j|$ по всем таким представлениям. Тогда

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log \varphi_n(\gamma)}{n} \leqslant h(f).$$

Другое обобщение теоремы 1 состоит в ослаблении требований к пространству, на котором действует отображение f.

Как показано в [2], не обязательно считать M многообразием, а достаточно потребовать следующее:

1. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что для любых двух точек x, y, для которых $d(x, y) < \delta$, найдется путь, диаметра меньше ε, соеди용няющий точки x и y.

2. Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что любая петля диаметра меньше ε_0 стягиваема в M.

4. Следующее полезное общее замечание состоит в том, что в рассмотрениях, связанных с гипотезой об энтропии, без ограничения общности можно считать многообразие M ориентируемым.

Предложение 1. *Пусть M — неориентируемое многообразие, f: $M \to M$ — непрерывное отображение, $\tilde{M}$ — двулистное ориентируемое накрытие M, $\tilde{f}$: $\tilde{M} \to \tilde{M}$ — отображение, накрывающее f. Тогда*

$$h(f) = h(\tilde{f}) \text{ и } s(f_{*i}) \leqslant s(\tilde{f}_{*i}), \quad i = 1, \ldots, \dim M.$$

Доказательство. Обозначим через π: $\tilde{M} \to M$ проекцию и будем считать, что риманова метрика на $\tilde{M}$ индуцирована римановой метрикой на M. Неравенство $h(f) \leqslant h(\tilde{f})$ очевидно. С другой стороны, если ε достаточно мало и Q_n — ε-сеть в d_n-метрике для отображения f, то $\pi^{-1}(Q_n)$ — очевидно, ε-сеть в d_n-метрике для $\tilde{f}$. Поэтому $r_n(\tilde{f}, \varepsilon) \leqslant 2r_n(f, \varepsilon)$ и, значит, $h(\tilde{f}) = h(f)$.

Отображение групп когомологий π_k^*: $H^k(M, \mathbb{R}) \to H^k(\tilde{M}, \mathbb{R})$, индуцированное проекцией π, инъективно, причем

$$\pi_k^* f_k^* = \tilde{f}_k^*,$$

где f_k^*: $H^k(M, \mathbb{R}) \to H^k(M, \mathbb{R})$ — отображение, индуцированное f. Так как $s(f_{*k}) = s(f_k^*)$, то предложение доказано.

В случае ориентированных многообразий размерности m имеется изоморфизм двойственности Пуанкаре

$$D_i\colon H_i(M, \mathbb{R}) \to H^{m-i}(M, \mathbb{R}),$$

который определяется следующим образом: для $\alpha \in H_i(M, \mathbb{R})$ и $\beta \in H_{m-i}(M, \mathbb{R})$

$$(D_i\alpha)(\beta) = \langle\alpha, \beta\rangle,$$

где $\langle\alpha, \beta\rangle$ — индекс пересечения циклов.
Так как

$$\langle f_{*i}\alpha, f_{*m-i}\beta\rangle = \deg f \langle\alpha, \beta\rangle,$$

то в случае, когда f: $M \to M$ — гомеоморфизм, выполняется соотношение

$$f_{m-i}^* = \deg f D_i f_{*i}^{-1} D_i^{-1}$$

и, следовательно,

$$s(f_{*m-i}) = s(f_{m-i}^{-1*}) = s(f_{i*}^{-1}). \tag{7}$$

Таким образом, из теоремы 1, предложения 1, формулы (7) и равенства $h(f) = h(f^{-1})$ вытекает следующее утверждение (см. [2]).

Следствие 1. 1. *Если* f: $M \to M$ — *гомеоморфизм и* $\dim M = m$, *то* $\log s(f_{*m-1}) \leqslant h(f)$.

2. *Гипотеза об энтропии справедлива для любого гомеоморфизма многообразия размерности не больше трех.*

Укажем также на следующее утверждение, относящееся к гомеоморфизмам, которое сформулировано в [3] под названием «Теорема 2» (кавычки поставлены авторами) и снабжено эвристическим наброском доказательства.

Если $\dim M \geqslant 5$, *то гипотеза об энтропии справедлива для гомеоморфизмов, образующих открытое и плотное в* C^0-*топологии подмножество в пространстве всех гомеоморфизмов многообразия* M.

Авторы в [3] предлагают имитировать в случае гомеоморфизмов процедуру «марковской аппроксимации», описанную Шубом и Сулливаном в § 1 работы [4] для диффеоморфизмов, и построить плотное множество гомеоморфизмов, для которых верна гипотеза об энтропии. Далее предполагается доказать в этом случае полуустойчивость[1]), доказанную З. Нитецки в [5] для диффеоморфизмов с гиперболической структурой, из которой будет следовать, что при малом в C^0-топологии возмущении такого гомеоморфизма топологическая энтропия не может уменьшиться.

Для произвольных гомеоморфизмов гипотеза об энтропии не верна (см. ниже, теорема 3).

5. Следующий случай после одномерного, где удалось доказать неравенство (5), относится к гомологиям максимальной размерности, т. е. имеющим размерность многообразия.

Если $\dim M = m$, то $s(f_{*m}) = |\deg f|$ и, таким образом, для гомеоморфизмов неравенство $\log s(f_{*m}) \leqslant h(f)$ тривиально выполняется. Почти столь же тривиален случай, когда $f\colon M \to M$ — непрерывное накрытие, так как в этом случае $|\deg f|$ равно числу прообразов у любой точки $x \in M$ и полный прообраз $\{f^{-n}x\}$ точки x является (n, ε)-разделенным множеством для любого достаточно малого ε.

Однако для произвольного непрерывного отображения f неравенство $h(f) \geqslant \log|\deg f|$ может не выполняться. Простейший пример такого рода построен Шубом [6] и основан на той же идее с надстройкой, что и пример гомеоморфизма клеточного комплекса (не многообразия) в п. V [1]. Рассмотрим сферу S^n $(n \geqslant 2)$ как надстройку над S^{n-1}, возьмем такое отображение $g\colon S^{n-1} \to S^{n-1}$, что $|\deg g| > 1$, и умножим надстройку над g на отображение, при котором каждая точка движется по «меридиану» от «северного полюса» N сферы S^n к «южному полюсу» S. В результате получается такое отображение $f\colon S^n \to S^n$, что $\deg f = \deg g$, а множество неблуждающих точек $\Omega(f)$ состоит только из полюсов N и S. Поэтому

$$h(f) = h(f\,|\,\Omega) = 0 < \log|\deg f|.$$

Остановимся на этом примере несколько подробнее. Если выбрать отображение g и отображение сдвига по меридианам гладкими, то отображение f заведомо будет гладким всюду, кроме неустойчивого полюса N и устойчивого полюса S. Более того, в окрестности устойчивого полюса отображение f можно сделать сильно сжимающим и тем самым сделать отображение f бесконечно дифференцируемым (и даже в некоторых случаях аналитическим) в точке S. Индексы отображения f и всех его степеней в этой точке равны 1.

В точке N отображение 1 оказывается существенно негладким. Действительно, в этой точке f не является локальным

---

[1]) Отображение f называется полуустойчивым, если для любого отображения g, близкого к f в C-топологии найдется непрерывное отображение h, для которого $f \circ h = h \circ g$.

гомеоморфизмом, поэтому если бы отображение f можно было бы «сгладить» в точке N, то якобиан f в этой точке равнялся бы нулю вопреки тому, что N — отталкивающая точка.

Другая интерпретация существенной негладкости отображения f в точке N, принадлежащая Шубу, состоит (в вольиой передаче) в следующем. Прямое вычисление показывает, что индекс f^n в точке N равен $(\deg g)^n$, а для гладкого отображения, как доказали Шуб и Сулливан в [7], индексы любой неподвижной точки относительно степеней этого отображения ограничены. Таким образом, если рассматривать построенное отображение f как предел в C^0-топологии гладких отображений, то в результате предельного перехода точка N «поглотит» бесконечное множество периодических точек, которые и обеспечивали гладким отображениям достаточно большую топологическую энтропию.

Оказывается, что два свойства гладких отображений — ограниченность якобиана (коэффициента растяжения риманова объема) и локальная гомеоморфность в точках, где якобиан отличен от нуля — уже достаточны для доказательства неравенства $h(f) \geqslant \log|\deg f|$ с помощью имитации простейшего рассуждения для накрытий, приведенного в начале этого пункта. Этот результат принадлежит М. Мисюревичу и Ф. Пшитыцкому и был доказан ими сначала для двумерных многообразий в [8], а затем значительно проще для общего случая в [9]. Последнее доказательство мы воспроизводим здесь.

Теорема 2 (М. Мисюревич. Ф. Пшитыцкий [9]). *Для любого C^1-отображения $f\colon M \to M$ компактного гладкого многообразия M справедливо неравенство $h(f) \geqslant \log|\deg f|$.*

Доказательство. Пусть $0 < \alpha < 1$ и L — верхняя грань модуля якобиана отображения f. Положим $\varepsilon = L^{\frac{-1}{1-\alpha}}$ и обозначим через B компактное множество, на котором модуль якобиана отображения f не меньше ε. Покроем множество B окрестностями, в каждой из которых отображение f является локальным диффеоморфизмом. Пусть δ — число Лебега этого покрытия. Таким образом, если $x, y \in B$ и $d(x, y) \leqslant \delta$, то $f(x) \neq f(y)$.

Фиксируем натуральное число n и рассмотрим множество $A = A_n$, состоящее из точек x, у которых среди образов x, $f(x) \ldots f^{n-1}(x)$ не более чем αn принадлежат множеству B. Если $x \in A_n$, то для модуля якобиана $|Jf^n(x)|$ имеет место оценка

$$|Jf^n(x)| = \prod_{j=0}^{n-1} |Jf(f^j(x))| < \varepsilon^{(1-\alpha)n} L^{\alpha n} \leqslant \left(\varepsilon^{1-\alpha} L\right)^n = 1$$

и, следовательно, риманов объем множества $f^n A$ меньше, чем объем всего многообразия M.

Воспользуемся этим фактом и теоремой Сарда и выберем точку $x \in M \setminus f^n(A)$, которая является регулярным значением отображения f^n. Теперь среди n-х прообразов этой точки мы выберем достаточно большое (n, δ)-разделенное множество. Будем рассуждать следующим образом. У каждого регулярного значения y отображения f имеется не менее чем $N = |\deg f|$ прообразов. Если среди этих прообразов есть N прообразов из множества B, выберем их, в противном случае выберем один прообраз, не принадлежащий множеству B. Начав из точки x и применяя эту процедуру по индукции, получим по очереди некоторое подмножество множества $f^{-1}(\{x\})$, потом подмножество $f^{-2}(\{x\})$ и т. д., пока не дойдем до подмножества Q_n множества $f^{-n}(\{x\})$. Из построения числа δ и из описанной процедуры очевидно, что Q_n является (n, δ)-разделенным множеством. Оценим снизу число элементов этого множества. Пусть $y \in Q_n$. Так как $x \notin f^n(A)$ и $y \in f^{-n}(\{x\})$, то $y \notin A$. При построении множества Q_n мы рассматривали переходы к прообразу двух сортов: взятие N «хороших» прообразов или одного «плохого». Так как $y \notin A$, то среди чисел k, заключенных между 0 и $n-1$ не более чем αn таких, что $f^k(y) \in B$, а это значит, что при переходе от точки x к y произошло не меньше, чем $m = [\alpha n] + 1$ «хороших» переходов. Так как это справедливо для любой точки $y \in Q_n$, то в множестве Q_n не менее чем $N^m \geqslant N^{\alpha n}$ элементов и, следовательно, $S_n(f, \delta) \geqslant N^{\alpha n}$, откуда следует, что $h(f) \geqslant \alpha \log N$. Так как число α можно выбрать сколь угодно близким к единице, то $h(f) \geqslant \log N$.

Следствие 2. *Гипотеза об энтропии справедлива для любого гладкого отображения*

1) *сферы S^n,*

2) *любого многообразия размерности не больше двух*[1]).

6. Вернемся к случаю обратимых отображений. Напомним, что здесь случай m-мерных гомологий ($m = \dim M$) тривиален, а в размерностях 1 и $m-1$ неравенство (5) уже дока-

---

[1]) Утверждение 2) по существу использует теорему 2 только в случае сферы. Действительно, в силу предложения 1, достаточно ограничиться ориентируемыми поверхностями. Результат для одномерных гомологий дается теоремой 1. Для многообразий рода больше 1 степень любого отображения по модулю не больше 1. Наконец, для тора из других соображений получается более общий результат, относящийся к произвольным непрерывным отображениям (см. теорему 4).

зано для произвольных гомеоморфизмов. (Теорема 1 и следствие 1.) В промежуточных размерностях ситуация оказывается более сложной. Приведем результат отрицательного характера, полученный в результате обсуждений на Варвикском симпозиуме 1974 г. по динамическим системам и изложенный в отчете Ч. Пью [10] (в заглавии содержится список участников обсуждения).

Теорема 3 ([10]). *Существует гомеоморфизм f некоторого компактного гладкого многообразия M размерности 8, такой, что $\Omega(f)$ — конечное множество, а $s(f_{*2}) > 1$.*

Таким образом, $0 = h(f) < \log s(f_{*2})$ и, следовательно, для гомеоморфизма f гипотеза об энтропии не выполняется. Конструкция f основана на дальнейшем развитии идеи с надстройкой с привлечением некоторых результатов и методов кусочно линейной топологии.

Сначала строится надстройка K над двумерным тором и путем умножения надстройки над У-диффеоморфизмом тора на отображение сдвига на K в направлении от северного полюса к южному строится гомеоморфизм $B\colon K \to K$, у которого множество $\Omega(B)$ состоит из двух точек, а $s(f_{*2}) > 1$.

Далее строится кусочно линейное вложение $i\colon K \to \mathbb{R}^8$. Оказывается, что гомеоморфизм, индуцированный B на образе ik, можно продолжить до гомеоморфизма $\bar{B}$ евклидова пространства $\mathbb{R}^8$. Пусть N — звездная окрестность iK во втором барицентрическом подразделении триангуляции пространства $\mathbb{R}^8$, включающего полиэдр iK. Умножив гомеоморфизм $\bar{B}|N$ на некоторый гомеоморфизм $h\colon \bar{B}N \to N$, тождественный на iK, который существует, в силу результатов Хирша из [11], получаем продолжение C гомеоморфизма B на многообразие с краем N. Затем рассматривается дубль M многообразия N с отображением C. Это отображение имеет два инвариантных множества K_+ и K_-. Многообразие M допускает гладкую структуру. Далее удается возмутить гомеоморфизм C на M, не меняя его на K_+ и K_-, так что точки движутся с одной половины M на другую, отталкиваясь от множества K_- и стремясь к K_+. Таким образом, построенный гомеоморфизм f многообразия M имеет конечное множество неблуждающих точек и, следовательно, нулевую топологическую энтропию.

После этого остается только проверить, что после вложения полиэдра K_+ в M двумерные циклы на K_+ не стали тривиальными. Но это следует из того, что $\dim M > 2 \dim K_+ + 1$, а K_+ является ретрактом множества $M \setminus K_-$.

Объяснение Шуба с индексами (см. п. 5) применимо также и к этому примеру.

7. На некоторых многообразиях гипотеза об энтропии оказывается справедливой для произвольных непрерывных отображений.

Теорема 4. (М. Мисюревич, Ф. Пшитыцкий [12]). *Гипотеза об энтропии выполняется для любого непрерывного отображения f m-мерного тора $\mathbb{T}^m$.*

Доказательство. Будем для определенности считать, что на торе $\mathbb{T}^m = \mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m$ фиксирована стандартная евклидова метрика.

Докажем сначала для отображений тора неравенство

$$h(f) \geqslant \log |\deg f|. \tag{8}$$

Для тора

$$\deg f = \det f_{1*}. \tag{9}$$

Обозначим через π_m: $\mathbb{R}^m \to \mathbb{T}^m$ стандартную проекцию и рассмотрим отображение $\tilde{f}$: $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, накрывающее f. Пусть $\Delta_n \subset \mathbb{R}^m$ — стандартная фундаментальная область в $\mathbb{R}^m$ (единичный куб). Из (9) и того, что отображение f гомотопно алгебраическому эндоморфизму тора, индуцированному линейным оператором f_{1*} в $\mathbb{R}^m$, следует, что объем множества $\tilde{f}^n\Delta$ не меньше, чем $|\deg f|^n$. Поэтому, в силу теоремы Минковского, найдется точка $x \in \mathbb{T}^m$, такая, что множество $\tilde{f}^n\Delta_n \bigcap \pi_m^{-1}(x) = Q_n(x)$ содержит не менее чем $|\deg f|^n$ точек. Выберем для каждой точки $y \in Q_n(x)$ по одной точке $z(y) \in \tilde{f}^{-n}(y)$ и положим $K_n = \bigcup_{y \in Q_n(x)} \{\pi_m z(y)\}$. Докажем, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ множество K_n является (n, ε)-разделенным. Пусть $x_1, x_2 \in K_n$ и расстояние между точками x_1 и x_2 достаточно мало. Рассмотрим такие точки $z_1 \in \pi^{-1}(x_1)$, $z_2 \in \pi_m^{-1}(x_2)$, что $d(z_1, z_2) = d(x_1, x_2)$. Поскольку точки $\tilde{f}^n z_1, \tilde{f}^n z_2 \in \pi_m^{-1}(x)$ и эти точки различны, то $d(\tilde{f}^n z_1, \tilde{f}^n z_2) \geqslant 1$. Поэтому найдется такая константа δ_0, зависящая только от f, но не от n, что при некотором k, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, выполняются неравенства $\delta_0 < d(\tilde{f}^k z_1, \tilde{f}^k z_2) < \frac{1}{2}$. Но тогда $d(f^k x_1, f^k x_2) = d(\pi_m \tilde{f}^k z_1, \pi_m \tilde{f}^k z_2) = d(\tilde{f}^k z_1, \tilde{f}^k z_2) > \delta_0$ и, следовательно, K_n является (n_1, δ_0)-разделенным множеством.

Чтобы доказать неравенство $h(f) \geqslant \log s(f_{*k})$ для любого k, поступим аналогично. Фиксируем в группе $H_k(\mathbb{T}^m, \mathbb{R})$ стандартный базис γ и реализуем каждый элемент α этого базиса стандартными вложениями i_α: $\mathbb{T}^k \to \mathbb{T}^m$ k-мерного „координатного" тора в $\mathbb{T}^m$. Пусть h_α: $\mathbb{T}^m \to \mathbb{T}^k$—стандартная проекция, такая, что $h_\alpha \circ i_\alpha = \mathrm{id}_{\mathbb{T}^k}$. Матрица отображения f^n_{*k}, записанная в базисе γ, имеет элементы вида

$$c^n_{\alpha\beta} = \deg(h_\beta f^n i_\alpha), \text{ где } \alpha, \ \beta \in \gamma.$$

Вновь воспользуемся теоремой Минковского и найдем точку $x \in \mathbb{T}^k$, для которой множество $Q_n(x) = \tilde{h}_\beta \tilde{f}^n \tilde{i}_\alpha \Delta_h \bigcap \pi_k^{-1}(x)$ содержит не менее, чем $c_{\alpha\beta}$ элементов. Затем для каждой точки $y \in Q_n(x)$ выберем по точке $z(y) \in (h_\beta \tilde{f}^n \tilde{i}_\alpha)^{-1} y$. Рассуждения, аналогичные приведенным выше, показывают, что множество $K_n = \bigcup_{y \in Q_n(x)} i_\alpha \pi_k(z(y))$ является (n, ε)-разделенным для достаточно малых ε.

Так как

$$\log s(f_*) \leqslant \lim \frac{\log \sum_{\alpha, \beta \in \gamma} |c^n_{\alpha\beta}|}{n},$$

то неравенство $h(f) \geqslant \log(f_{*k})$ следует из (8).

Заметим, что для алгебраического эндоморфизма тора f_A, порожденного матрицей $A \in GL(n, \mathbb{Z})$, имеет место равенство

$$h(f_A) = \log s(f_{A*}) = \sum_{\substack{\lambda \in \mathrm{sp}\, A \\ |\lambda| > 1}} \log|\lambda|.$$

Так как любой У-диффеоморфизм тора топологически сопряжен алгебраическому автоморфизму (см. работы [13], [14] в настоящем сборнике), то справедливо следующее утверждение.

Следствие 3. *Если f — У-диффеоморфизм тора $\mathbb{T}^m$, то $h(f) = \log s(f_*)$.*

Отметим еще следующее обстоятельство. Если отображение f_{*s} обратимо и не имеет собственных значений на единичной окружности, то, в силу предположения 2.1 из статьи Френкса [13], существует такое непрерывное отображение $h\colon \mathbb{T}^m \to \mathbb{T}^m$, что $hf = gh$, где g — алгебраический автоморфизм тора, порожденный отображением f_{*1}, и, таким образом, $h(f) \geqslant h(g) = \log s(f_{*1})$.

Отметим, что в [12] доказывается гипотеза об энтропии для гомеоморфизмов ориентируемых многообразий вида $\mathbb{T}^m \times X$, где $\dim X = n$ и $H_i(X, \mathbb{R}) = 0$ при $0 < i \leqslant \frac{m+n}{2}$.

Рассуждения с построением (n, ε)-разделенных множеств в прообразе точки, которые успешно применялись при доказательстве теорем 2 и 4, или модификации этих рассуждений, возможно, могут оказаться полезными и в некоторых других случаях, например, при доказательстве следующей гипотезы.

Гипотеза. *Если универсальное накрывающее пространство многообразия M гомеоморфно евклидову пространству, то гипотеза об энтропии выполняется для любого непрерывного отображения $f: M \to M$.*

8. М. Шуб сформулировал гипотезу об энтропии в связи с проблемой определения простейших диффеоморфизмов в каждом классе изотопных диффеоморфизмов (см. [1], [4]). С этой точки зрения важно в первую очередь доказать гипотезу об энтропии для «хороших» (например, структурно устойчивых) диффеоморфизмов. В статье [4] Шуб и Сулливан описали открытое и плотное в C^0-топологии множество структурно устойчивых диффеоморфизмов, для которых гипотеза об энтропии справедлива. Это диффеоморфизм «марковские (fitted) относительно некоторого разложения многообразия M на ручки». Структура такого диффеоморфизма хорошо согласована со структурой цепного комплекса, порождаемого разложением на ручки, и благодаря этому величина $s(f_*)$ вычисляется через алгебраические матрицы пересечений, а $h(f)$ оценивается снизу через матрицы, составленные из модулей элементов матриц пересечений. Из этого обстоятельства нетрудно вывести, что гипотеза об энтропии выполняется для диффеоморфизмов, построенных Шубом и Сулливаном. Впрочем, эти диффеоморфизмы удовлетворяют условию теоремы Боуэна [15], который доказал гипотезу об энтропии для диффеоморфизмов, которые удовлетворяют аксиоме A, свойству отсутствия циклов и у которых размерность множества неблуждающих точек равна нулю.

Позднее М. Шуб и Р. Уильямс получили более общий результат, освободившись от ограничения $\dim \Omega(f) = 0$, и таким образом доказали гипотезу об энтропии для всех известных (а предположительно вообще для всех) Ω-устойчивых диффеоморфизмов.

Теорема 5. (М. Шуб, Р. Уильямс [16], анонс см. [6]). *Гипотеза об энтропии справедлива для любого диффеоморфизма, удовлетворяющего аксиоме A и свойству отсутствия циклов.*

Доказательство. Мы следуем схеме доказательства из [16] с одним существенным отличием. Шуб и Уильямс при оценке объема части образа k-мерного гладкого симплекса, лежащей в окрестности базисного множества Ω_i (k — размерность неустойчивого подрасслоения на множестве Ω_i) использовали марковские разбиения (для вычисления топологической энтропии) и продолжение систем устойчивых многообразий в окрестность базисного множества. Мы же вычисляем топологическую энтропию не через матрицу пересечений, ассоциированную с марковским разбиением, а непосредственно через асимптотику числа элементов в (n, ε)-разделенных множествах, а вместо продолжения устойчивых многообразий (что является весьма деликатным делом) мы продолжаем полуинвариантные системы конусов вокруг устойчивых и неустойчивых подпространств, что не представляет никаких затруднений.

Напомним, что для диффеоморфизма $f\colon M \to M$, удовлетворяющего аксиоме A и свойству отсутствия циклов, существует фильтрация $M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_m = M$ такая, что для $i = 0, \ldots, m$ $f(M_i \subset \operatorname{Int} M_i$ и $\bigcap\limits_{n \in \mathbf{Z}} f^n \overline{(M_i \setminus M_{i-1})} = \Omega_i$ — базисное множество диффеоморфизма f.

Обозначим

$$\begin{aligned} &f_*^{(i)}\colon H_*(M_i, M_{i-1}, \mathbb{R}) \to H_*(M_i, M_{i-1}, \mathbb{R}), \\ &f_{*j}^{(i)}\colon H_j(M_i, M_{i-1}, \mathbb{R}) \to H_j(M_i, M_{i-1}, \mathbb{R}) \end{aligned} \tag{10}$$

отображения, индуцированные диффеоморфизмом f.

Как известно

$$h(f) = \sup_i h(f \mid \Omega_i).$$

С другой стороны, рассматривая точные гомологические последовательности для пар (M_i, M_{i-1}), $i = 0, \ldots, m$, нетрудно показать, что

$$s(f_*) \leqslant \sup_i s\left(f_*^{(i)}\right).$$

Поэтому для доказательства теоремы 5 достаточно доказать для каждого i неравенство

$$h(f \mid \Omega_i) \geqslant \log s(f_*^{(i)}).$$

Далее, при вычислении $s\left(f_*^{(i)}\right)$ можно вместо относительных гомологий пары (M_i, M_{i-1}) использовать гомологии пары (X, A), где $X = f^N M_i$, $A = X \cap f^{-N} M_{i-1}$, N — произвольное натуральное число. Мы выберем это число так, чтобы множество $X \setminus A$ содержалось в достаточно малой окрестности U множества Ω_i, которая будет описана ниже. Заметим, что множество $X \setminus A$ является траекторно выпуклым. Это означает следующее: если $x \in X \setminus A$ и $f^n x \in X \setminus A$ для некоторого $n > 0$, то $f^k x \in X \setminus A$ при $k = 0, 1, \ldots, n-1, n$. Это свойство сразу вытекает из свойств фильтрации.

Пусть для каждой точки x окрестности U множества Ω_i задан конус K_x в касательном пространстве $T_x M$. Назовем подмногообразие $N \subset U$ согласованным с системой конусов K_x если для любой точки $x \in N$ $T_x N \subset K_x$.

Построим для каждой точки $x \in \Omega_i$ достаточно «узкие» конусы $K_x^s \supset E_x^s$ и $K_x^u \supset E_x^u$, такие что

$$Df^{-1}K_x^s \subset \operatorname{Int} K_{f^{-1}x}^s \text{ и } DfK_x^u \subset \operatorname{Int} K_{fx}^u \tag{11}$$

и конусы K_x^s и K_x^u непрерывно зависят от x.

Например, можно выбрать достаточно малое число $\gamma > 0$ и положить

$$K_x^s = \{v \in T_xM\colon\ v = v_1 + v_2,\ v_1 \in E_x^s,\ v_2 \in E_x^u,\ \|v_2\| \leqslant \gamma \|v_1\|\},$$
$$K_x^u = \{v \in T_xM\colon\ v = v_1 + v_2,\ v_1 \in E_x^s,\ v_2 \in E_x^u,\ \|v_1\| \leqslant \gamma \|v_2\|\}.$$

Если окрестность U выбрана достаточно малой, то можно продолжить эти системы конусов до непрерывных систем конусов в окрестности U так что для $x \in U$ будут выполняться формулы (11) (если f_x^{-1} или соответственно fx принадлежит U) и найдутся константы c_1, $\varepsilon > \delta > 0$, такие, что для любого k-мерного подмногообразия N, согласованного с системой конусов K_x^u, выполняются следующие свойства:

1. Объем шара радиуса ε на многообразии N не превосходит 1.

2. Если x, $y \in N$ и расстояние $d_N(x, y)$ между точками x, y во внутренней метрике многообразия N не превосходит δ, то $d_N(x, y) \leqslant c_1 d(x, y)$.

Докажем теперь неравенство $h(f \mid \Omega_i) \geqslant \log s\,(f_{*k}^{(i)})$. Используя относительный вариант рассуждений из п. 2 настоящей статьи, легко вывести, что для доказательства этого неравенства достаточно показать, что для любого достаточно малого гладкого k-мерного симплекса $\sigma^k \subset X \setminus A$

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\log \lambda_k (f^n\sigma^k \cap (X \setminus A))}{n} \leqslant h(f \mid \Omega_i). \tag{12}$$

При этом можно ограничиться такими симплексами, у которых касательное пространство в каждой точке x пересекается с конусом K_x^s только по нулю. В силу траекторной выпуклости множества $X \setminus A$ в этом случае существует число $s > 0$, такое, что многообразие $f^s\sigma^k \cap (X \setminus A)$ согласовано с системой конусов K_x^u. Обозначим $c_2 = \max\limits_{x \in M} \|Df_x\|$. Покроем многообразие $f^s\sigma^k \cap (X \setminus A)$ конечным числом шаров во внутренней метрике радиуса $\frac{\delta}{2c_2}$ и для каждого такого шара N оценим объем многообразия $f^nN \cap (X \setminus A)$. Выберем на $f^nN \cap$ $\cap (X \setminus A)$ систему точек, попарные расстояния между которыми в метрике f^nN больше, чем ε, и обозначим n-й прообраз этой системы через S.

Покажем, что S является $\left(n, \frac{\delta}{c_1 \cdot c_2}\right)$ — разделенным множеством. Пусть $x, y \in S$. Обозначим $a_l = d_{f^lN}(f^lx, f^ly)$. Так как $x, y \in N$, то $a_0 \leqslant \frac{\delta}{c_2}$. С другой стороны $a_n \geqslant \varepsilon > \delta$ и, очевидно, $a_{l+1} < c_2a_l$. Поэтому найдется такое l: $0 \geqslant l \geqslant n$, что $\frac{\delta}{c_2} \leqslant a_l \leqslant \delta$. Можно считать, что число δ и окрестность $X \setminus A$ выбраны столь малыми, что даже δ-окрестность множества $X \setminus A$ содержится в некоторой окрестности U, в которой выполнены свойства 1 и 2 для системы конусов K_x^u. Поэтому можно воспользоваться согласованностью многообразия $f^lN \cap U$ с системой K_x^u в этой окрестности и свойством 2. Отсюда следует, что

$$d(f^lx, f^ly) \geqslant \frac{\delta}{c_1c_2}.$$

Пусть теперь множество S содержит максимальное допустимое число элементов. Тогда f^nS является ε-сетью на множестве $f^nN \cap (X \setminus A)$ в метрике f^nN. В силу свойства 1 системы конусов K_x^u число элементов в такой ε-сети не меньше чем k-мерный объем множества $f^nN \cap (X \setminus A)$. Таким образом

$$\lambda_k(f^nN \cap (X \setminus A)) \leqslant r_n\left(f, \frac{\delta}{c_1c_2}\right).$$

Отсюда следует неравенство (12).

Мы не будем подробно останавливаться на доказательстве неравенства $h(f \mid \Omega_i) \geqslant \log s(f_{*j}^{(i)})$ при $j \neq k$.

Как показано в [16] в этом случае неравенство всегда строгое. При $j < k$ можно показать, что объем j-мерного симплекса не может расти быстрее чем объем k-мерного, так как остаются еще «свободные» расширяющиеся направления. При $j > k$ нужно воспользоваться уже доказанным результатом для $j \leqslant n - k$ для двойственной фильтрации

$$\overline{M \setminus M_{m-1}} \subset \overline{M \setminus M_{m-2}} \subset \ldots \subset \overline{M \setminus M_0} \subset M$$

диффеоморфизма f^{-1}.

Нужный результат вытекает из двойственности между $(n - j)$-мерными когомологиями пары $(\overline{M \setminus M_{i-1}}, \overline{M \setminus M_i})$ и j-мерными гомологиями пары (M_i, M_{i-1}) (см. [15]).

9. В этом пункте мы рассмотрим вопрос о том, для каких диффеоморфизмов выполняется равенство $h(f) = \log s(f_*)$ или его локальные варианты. Для диффеоморфизмов с гиперболической структурой можно указать естественные достаточные условия, которые хотя и не являются необходимыми, но по существу не могут быть отброшены.

Начнем с У-диффеоморфизмов.

Предложение 2. *Если f: $M \to M$ — У-диффеоморфизм и неустойчивое подрасслоение E^u касательного расслоения TM ориентируемо, то $h(f) = \log s(f_*)$.*

Доказательство. В силу теоремы 5 достаточно доказать неравенство $h(f) \leqslant \log s(f_*)$. Для гиперболических множеств (в частности для У-диффеоморфизмов) топологическую энтропию можно вычислять через асимптотику числа $N_n(f)$ периодических точек f периода n: $h(f) = \overline{\lim} \frac{\log N_n(f)}{n}$. Обозначим $P_n = \{x \in M,\ f^n x = x\}$, $i_{f^n}(x)$ — индекс точки x относительно f^n.

Из формулы Лефшеца следует, что

$$L(f^n) = \sum_{x \in P_n} i_{f^n}(x) = \sum_{i=0}^{\dim M} (-1)^i \operatorname{tr}\left(f^n_{*i}\right).$$

Так как все неподвижные точки диффеоморфизма f^n — гиперболические, то индекс такой точки равен $+1$ или -1 и зависит только от размерностей и от того, сохраняет или меняет ориентацию отображение Df^n_x на инвариантном расширяющемся подпространстве E^u_x. Так как многообразие M связно, а подрасслоение E^u ориентируемо, то в пространствах E^u_x можно согласованным образом ввести ориентацию так, что дифференциал $Df^n_x \big| E^u_x$: $E^u_x \to E^u_{f^n x}$ будет либо во всех точках сохранять ориентацию, либо во всех точках ее менять. В частности, это относится к неподвижным точкам f^n и таким образом индексы $i_{f^n}(x)$ для всех точек $x \in P_n$ равны, т. е. $|L(f^n)| = N_n(f)$. Далее

$$|L(f^n)| = \left| \sum_{i=0}^{\dim M} (-1)^i \operatorname{tr}\left(f^n_{*i}\right) \right| \leqslant \sum_{i=0}^{\dim M} \left| \operatorname{tr}\left(f^n_{*i}\right) \right| \leqslant$$
$$\leqslant \dim H_*(M, \mathbb{R}) (s(f_*))^n.$$

Поэтому $\overline{\lim} \frac{\log N_n(f)}{n} \leqslant s(f_*)$. Предложение доказано.

Вопрос о том, всегда ли для У-диффеоморфизма расслоение E^u ориентируемо, известен более 10 лет и не решен до сих пор. В [19] Смейл упоминает об этом вопросе в связи с проблемой рациональности ζ-функции У-диффеоморфизма, которую позднее удалось решить с помощью марковских разбиений [22] в более общей ситуации для гиперболических множеств, где ориентируемости может и не быть (см. ниже).

Гипотеза. *Для любого У-диффеоморфизма* $f\colon M \to M$ *имеет место равенство* $h(f) = \log s(f_*)$.

Предположим теперь, что оба инвариантных подрасслоения — неустойчивое E^u и устойчивое E^s — У-диффеоморфизма f ориентируемы (это эквивалентно ориентируемости E^u и самого многообразия M). В этом случае можно дополнить предложение 2 и указать геометрическую реализацию ненулевого элемента $\alpha \in H_k(M, \mathbb{R})$ (k — размерность подрасслоения E^u), для которого $f_{*k}\alpha = \lambda\alpha$, где $\log|\lambda| = h(f)$, в виде функционала $\bar{\alpha}$ на k-мерных дифференциальных формах на M. Приводимая конструкция является частным случаем конструкции Рюэлля и Сулливана [17].

На глобальных устойчивых подмногообразиях W^s многообразия M существует семейство борелевских σ-конечных мер μ_{W^s} (вообще говоря, сингулярных), обладающих следующими свойствами (см. [23], [18]).

1. Мера любого компактного подмножества W^s конечна.
2. Меры переходят друг в друга при переносе вдоль локальных неустойчивых подмногообразий
3. $f\mu_{W^s} = \lambda^{-1}\mu_{fW^s}$, где $\log|\lambda| = h(f)$.

Пусть теперь ω^k — k-мерная дифференцильная форма на M. Значение функционала $\bar{\alpha}$ на ω^k вычисляется так: нужно покрыть M малыми окрестностями с локальной структурой произведения (см. [13]), с помощью разбиения единицы представить ω^k в виде суммы форм с носителями в окрестностях, а в каждой окрестности проинтегрировать форму по каждому локальному неустойчивому многообразию (учитывая ориентацию на нем, выбранную согласованно), и затем проинтегрировать полученные интегралы по мере μ_{W^s} на любом трансверсальном локальном устойчивом многообразии. Складывая полученные значения функционала на локальных формах, получаем значение $\bar{\alpha}(\omega^k)$. Покажем, что $\bar{\alpha}$ является циклом, т. е. $\bar{\alpha}(\partial\omega^{k-1}) = 0$ для любой $(k-1)$-формы ω^{k-1}. Пусть $\omega^{k-1} = \sum_i \omega_i^{k-1}$, где носитель каждой формы ω_i^{k-1} лежит внутри некоторой окрестности U_i с локальной структурой произведения. Очевидно,

$$\bar{\alpha}\left(\partial\omega^{k-1}\right)=\sum_i \bar{\alpha}\left(\partial\omega_i^{k-1}\right).$$

Но значение $\bar{\alpha}\left(\partial\omega_i^{k-1}\right)$ равно интегралу от значений формы ω_i^{k-1} на границах локальных неустойчивых многообразий в окрестности U_i. Так как эти границы лежат вне носителя формы ω_i^{k-1}, то $\bar{\alpha}\left(\partial\omega_i^{k-1}\right)=0$.

Обозначим класс гомологий цикла $\bar{\alpha}$ через α. Нам нужно доказать, что $f_{*k}\alpha=\lambda\alpha$, $\log|\lambda|=h(f)$ и $\alpha\neq 0$.

Предположим для определенности что диффеоморфизм f сохраняет ориентации подрасслоений E^u и E^s (в противном случае нужно очевидным образом модифицировать дальнейшие рассуждения).

Вычислим индексы пересечения цикла $\bar{\alpha}$ с $(n-k)$-мерными цепями. Для этого достаточно найти индекс пересечения $\bar{\alpha}$ с любым достаточно малым гладким сингулярным симплексом σ^{n-k}, трансверсальным подрасслоению E^u. Пусть U — окрестность с локальной структурой произведения, содержащая симплекс σ^{n-k}. Так как симплекс σ^{n-k} пересекается с каждым локальным неустойчивым многообразием не более чем в одной точке, то в силу определения цикла $\bar{\alpha}$ индекс пересечения $\langle\alpha, \sigma^{n-k}\rangle$ равен мере μ_{W^s} от проекции симплекса σ^{n-k} на любое локальное устойчивое многообразие в окрестности U вдоль локальных неустойчивых многообразий, взятой со знаком плюс или минус в зависимости от того, совпадает или нет ориентация этой проекции с ориентацией на локальных устойчивых многообразиях.

Из свойства 3 мер μ_{W^s} следует, что

$$\left\langle\bar{\alpha}, f\sigma^{n-k}\right\rangle=\lambda^{-1}\left\langle\bar{\alpha}, \sigma^{n-k}\right\rangle.$$

В силу линейности индекса пересечения отсюда вытекает аналогичное равенство для любой гладкой сингулярной $(n-k)$-мерной цепи и, следовательно для любого $\gamma\in H_{n-k}(M, \mathbb{R})$

$$\left\langle\alpha, f_{*n-k}\gamma\right\rangle=\lambda^{-1}\langle\alpha, \gamma\rangle.$$

Так как $\langle\alpha, \gamma\rangle$ равно значению на γ элемента $D_k\alpha\in H^{n-k}(M, \mathbb{R})$, то $f^*_{n-k}D_k\alpha=\lambda D_k\alpha$, а так как $f_{*k}=D_k^{-1}f^*_{n-k}D_k$, то

$$f_{*k}\alpha=\lambda\alpha, \quad \text{где} \quad \log|\lambda|=h(f).$$

Поменяв местами устойчивые и неустойчивые многообразия, можно построить $(n-k)$-мерный цикл $\bar{\beta}$. Из определений легко усмотреть, что $\langle\alpha, \beta\rangle \neq 0$, где через β обозначен класс гомологий цикла $\bar\beta$. Таким образом $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

Перейдем теперь к более общему случаю диффеоморфизмов, удовлетворяющих аксиоме A и свойству отсутствия циклов. В этом случае имеются локальные варианты приведенных выше утверждений. Условие ориентируемости для расслоения E^u на базисном множестве Ω_i состоит в следующем: существует такая ориентация подрасслоения E^u на Ω_i, что для всех точек $x \in \Omega_i$ дифференциал

$$Df_x\big|E^u_x\colon E^u_x \to E^u_{fx}$$

либо одновременно сохраняет ориентацию, либо одновременно меняет ее. В этом случае имеет место равенство

$$h(f\,|\,\Omega_i) = \log s\left(f_*^{(i)}\right).$$

Это доказано Шубом и Уильямсом в [16] с помощью рассуждения с индексами, которое дословно переносится на этот случай с использованием относительного варианта формулы Лефшеца. В случае, когда аналогичному условию ориентируемости удовлетворяет также и устойчивое подрасслоение E^s на множестве Ω_i, Рюэлль и Сулливан [17] построили собственный вектор в $H_k(X, A, \mathbb{R})$ с собственным значением λ, $\log|\lambda| = h(f|\Omega_i)$ аналогично тому как это было сделано выше для У-диффеоморфизмов. Меры μ_{W^s} на устойчивых многообразиях строятся с помощью условных мер, индуцированных инвариантной мерой с максимальной энтропией на множестве Ω_i.

Укажем на примеры, показывающие существенность условия ориентируемости. В классическом примере Смейла с подковой (см. [19] § I.5, особенно рис. 7 и 13) строится диффеоморфизм двумерной сферы S^2 с вполне несвязным базисным множеством. В этом случае, у неустойчивого расслоения на базисном множестве, естественно, существует бесконечно много ориентаций, но ориентации, согласованной с действием диффеоморфизма, не существует. Топологическая энтропия в примере Смейла равна $\log 2$, а спектральный радиус индуцированного оператора в гомологиях (как абсолютных, так и относительных) равен 1.

Далее Р. В. Плыкин [20] построил на S^2 диффеоморфизм удовлетворяющий аксиоме A, с одномерным притягивающим базисным множеством, на котором неустойчивое подрасслоение неориентируемо. В этом примере топологическая энтропия также положительна, а окрестность базисного множества стягиваема и поэтому спектральный радиус оператора в гомологиях также равен 1.

Наконец, отметим, что даже при выполнении условий ориентируемости на всех базисных множествах может оказаться, что $h(f) > \log s(f_*)$ за счет того, что

$$s(f_*) < \max_i s\left(f_*^{(i)}\right).$$

Примеры такого рода на трехмерной сфере имеются у Гиббонса [24], где имеются два базисных множества — притягивающий и отталкивающий соленоиды — и топологическая энтропия положительна. Нетривиальные относительные одномерные циклы на них исчезают при переходе к абсолютным гомологиям.

10. В заключение укажем на несколько других нерешенных проблем, связанных с топологической энтропией. Как показано в [4], в некоторых классах изотопных диффеоморфизмов может не существовать диффеоморфизма f, удовлетворяющего аксиоме A и строгому условию трансверсальности, для которого

$$h(f) = \log s(f_*)$$

Проблема. *Верно ли, что в каждом классе изотопных диффеоморфизмов найдется диффеоморфизм f, для которого $h(f) = \log s(f_*)$. В частности, верно ли, что в любом классе изотопных диффеоморфизмов, для которых $s(f_*) = 1$, существует диффеоморфизм с нулевой топологической энтропией?*

Известно, [25], что топологическая энтропия не является ни непрерывной, ни даже полунепрерывной сверху или снизу в пространстве $\mathrm{Diff}^r(M)$.

Проблема (см. [21], проблема 41). *Верно ли, что топологическая энтропия непрерывна на множестве второй категории в* $\mathrm{Diff}^r(M)$?

Мы уже упоминали о том, что для «хороших» диффеоморфизмов можно вычислять топологическую энтропию через асимптотику числа периодических точек. Для произвольных диффеоморфизмов это неверно (см. [1]).

Проблема. *Верно ли, что неравенство*

$$h(f) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\log N_n(f)}{n}$$

выполнено для диффеоморфизмов, образующих множество второй категории в $\mathrm{Diff}^r(M)$?

Много интересных нерешенных проблем, относящихся к гладким динамическим системам, содержится в списке 50 проблем, составленном Дж. Пейлисом и Ч. Пью [21] и отражающем основные направления в теории динамических систем и смежных вопросах, обсуждавшиеся на симпозиуме в Варвикском университете в 1974 году.

Список литературы

1. Shub M., Dynamical systems, filtrations and entropy, *Bull. Amer. Math Soc.*, **80**, № 1 (174), 27—41. (Русский перевод см. в настоящем сборнике.)
2. Manning A., Topological entropy and the first homology group, Dynamical Systems, Warwick 1974, Lect. Notes in Math., **468** (1975), 185—190.
3. Palis J., Pugh C., Shub M., Sullivan D., Generisity Theorems in Topological Dynamics, Dynamical Systems, Warwick 1974, Lect. Notes in Math., **468** (1975), 241—250.
4. Shub M., Sullivan D., Homology Theory and dynamical systems, *Topology*, 14, № 2 (1975), 109—132. (Русский перевод см. в настоящем сборнике.)
5. Nitecki Z., On semi-stability of diffeomorphisms, *Invent. Math.* **14**, № 2 (1971), 83—122.
6. Shub M., Topological entropy and stability, Dynamical Systems, Warwick 1974, Lect. Notes in Math., **468** (1975), 39—40.
7. Shub M., Sullivan D., A remark on the Liefchetz fixed point formula for differentiable maps, *Topology*, **13**, № 2 (1974), 189—191.
8. Misiurewicz M., Przytycki F., Entropy and degree for transformations of two-dimentional manifold, препринт, 22 стр.
9. Misiurewicz M., Przytycki F., Topological entropy and degree of smooth mappings, препринт, 4 стр.
10. Pugh C., On the entropy conjecture: a report on conversations among R. Bowen, M. Hirsch, A. Manning, C. Pugh, B. Sanderson, M. Shub and R. Williams, Dynamical Systems, Warwick 1974, Lect. Notes in Math., **468** (1975), 257—261.
11. Hirsch M., On smooth regular neighbourhoods, *Ann. Math.*, **76** (1962), 524—529.
12. Misiurewicz M., Przytycki F., Entropy conjecture for tori, препринт, 6 стр.
13. Franks J., Anosov diffeomorphisms, Global Analysis, Proc. Symp. in Pure Math., **14**, Amer. Math. Soc. Providence, R. I., 1970, 61—93. (Русский перевод см. в настоящем сборнике.)
14. Manning A., There are no new Anosov diffeomorphisms on tori, *Amer. J. Math.*, **96**, № 3 (1974), 422—429. (Русский перевод см. в настоящем сборнике.)
15. Bowen R., Entropy versus homology for certain diffeomorphisms, *Topology*, **13**, № 1 (1974), 61—67.
16. Shub M., Williams R. F., Entropy and Stability, *Topology*, **14**, № 4 (1975), 329—338.
17. Sullivan D., Homology classes composed of infinitely many unstable manifolds of a dynamical system, Dynamical Systems, Warwick 1974, Lect. Notes in Math., **468** (1975), 42—44.
18. Маргулис Г. А., О некоторых мерах, связанных с У-потоками на компактных многообразиях, *Функц. анализ и его прил.*, **4**, № 1 (1970), 62—76.
19. Smale S., Differentiable dynamical systems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 747—817. (Русский перевод: Смейл С., Дифференцируемые динамические системы, *УМН*, **25**, № 1 (1970), 113—185.)

20. Плыкин Р. В., Источники и стоки А-диффеоморфизмов поверхностей, *Матем. сборник*, 94, № 6 (1974), 243—264.
21. Fifty problems in dynamical systems, ed. by J. Palis and C. C. Pugh. Dynamical Systems, Warwick 1974, Lect. Notes Nath., **468** (1975), 345—353.
22. Manning A., Axiom A diffeomorphisms have rational zeta functions, *Bull. Lond. Math. Soc.*, 3 (1971), 215—220.
23. Синай Я. Г., Марковские разбиения и У-диффеоморфизмы, *Функц. анализ и его прилож.*, 2, № 1, (1968), 64—89.
24. Gibbons J. C., One-dimentional basic sets in the three-sphere, *Trans. Amer. Math. Soc.* **164** (1972), Febr, 163—178.
25. Misiurewicz M., Diffeomorphism without any measure with maximal entropy, *Bull Acad Pol. sci*, Ser. sci, Math, astron et phys., 21, No 10, (1973), 903—910

ГОМОКЛИНИЧЕСКИЕ ТОЧКИ В КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМАХ[1])

Флорис Такенс

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Мы рассматриваем компактное многообразие M^n с элементом объема или симплектической структурой. Напомним, что элемент объема задается нигде не обращающейся в нуль n-формой ω на многообразии M^n, а симплектическая структура задается такой замкнутой 2-формой ω на M^n, для которой форма $\omega \wedge \omega \wedge \ldots \wedge \omega$ ($n/2$ раз) определяет элемент объема. Если элемент объема (соответственно симплектическая структура) задается с помощью дифференциальной формы ω, то мы будем говорить, что ω — объемная (соответственно симплектическая) форма. Заметим, что на двумерном многообразии любая симплектическая форма является объемной, и наоборот. Пусть $\mathrm{Diff}^r_\omega(M)$ обозначает пространство C^r-автоморфизмов многообразия M, сохраняющих форму ω (т. е. если $\varphi \in \mathrm{Diff}^r_\omega(M)$, то $\varphi^*(\omega) = \omega$), снабженное C^r-топологией. Мы всегда предполагаем, что M — это C^∞-многообразие и ω — C^∞-форма.

Дискретной консервативной системой на многообразии M класса C^r называется групповой морфизм Φ: $\mathbb{Z} \to \mathrm{Diff}^r_\omega(M)$. Мы не будем делать различия между дискретной консервативной системой Φ и ее образующим диффеоморфизмом $\Phi(1) \in \mathrm{Diff}^r_\omega(M)$. *Непрерывной консервативной системой* на многообразии M класса C^r называется групповой морфизм Φ: $\mathbb{R} \to \mathrm{Diff}^r_\omega(M)$, который порождается некоторым векторным полем класса C^r. Мы снабжаем множество дискретных (соответственно непрерывных) консервативных систем топологией пространства $\mathrm{Diff}^r_\omega(M)$ (соответственно C^r-топологией пространства векторных полей).

Пусть $\varphi \in \mathrm{Diff}^r_\omega(M)$, $r \geqslant 1$ и p — периодическая точка диффеоморфизма φ некоторого периода k. Точка p называется гиперболической периодической точкой φ, если отображение $d(\varphi^k) \mid T_pM$: $T_pM \to T_pM$ не имеет собственных значений, по

[1]) Takens Floris, Homoclinic Points in Conservative Systems, Inventiones Math., 18 (1972), 267—292.

модулю равных 1. Устойчивое и неустойчивое многообразия точки p обозначаются через $W^s_\varphi(p)$ и $W^u_\varphi(p)$ (по поводу определения см. [4]). *Гомоклинической точкой* для p называется точка пересечения многообразий $W^s_\varphi(p)$ и $W^u_\varphi(p)$, не совпадающая с p. Другими словами, множество гомоклинических точек для p представляется в виде

$$\left(W^s_\varphi(p) \cap W^u_\varphi(p)\right) \setminus \{p\}.$$

Мы сформулируем здесь результаты только для дискретного случая; соответствующие результаты для непрерывного (гамильтонового) случая содержатся в § 4.

Теорема 1. *Пусть M — компактное двумерное многообразие с объемной формой ω. Пусть $\varphi\colon M \to M$ — дискретная консервативная система класса C^1 на M и $p \in M$ — гиперболическая периодическая точка диффеоморфизма φ. Тогда для любой точки $q \in W^u_\varphi(p)$ и любых окрестностей $U \ni q$ и $V \ni \varphi$ на M, соответственно в $\mathrm{Diff}^1_\omega(M)$ существует такая система $\varphi' \in V$, что*

(I) *p — гиперболическая периодическая точка для φ',*

(II) *существует точка, гомоклиническая для p (по отношению к φ'), лежащая в U.*

Теорема 2. *Пусть M — компактное многообразие с объемной (симплектической) формой ω. Пусть также $\varphi\colon M \to M$ — дискретная консервативная система класса C^1 на M и $p \in M$ — гиперболическая периодическая точка φ. Тогда для любой окрестности V системы φ в $\mathrm{Diff}^1_\omega(M)$ существует такой диффеоморфизм $\varphi' \in V$, что*

(I) *p — гиперболическая периодическая точка φ',*

(II) *существует гомоклиническая точка для p (по отношению к φ').*

В соответствии с результатами Р. Робинсона (см. [11] и [12]), мы можем предположить, что гомоклинические точки в сформулированных теоремах являются точками трансверсального пересечения многообразий $W^u_{\varphi'}(p)$ и $W^s_{\varphi'}(p)$. Это будет использовано, чтобы вывести из наших теорем следствия.

Следствие 3. *Пусть M — компактное двумерное многообразие с объемной формой ω. Тогда существует такое подмножество второй категории $R \subset \mathrm{Diff}^1_\omega(M)$, что если $p \in M$ является гиперболической периодической точкой диффеоморфизма $\varphi \in R$, то множество $W^u_\varphi(p) \cap W^s_\varphi(p)$ плотно в $W^u_\varphi(p)$ и $W^s_\varphi(p)$.*

Следствие 4. *Пусть M — компактное многообразие с объемной или симплектической формой ω. Тогда существует такое подмножество второй категории $R \subset \mathrm{Diff}^1_\omega(M)$, что если $p \in M$ — гиперболическая периодическая точка диффеоморфизма $\varphi \in R$, то существует гомоклиническая точка для p.*

В § 2 содержится доказательство сформулированных теорем и следствий, использующее две технические леммы ((3.1) и (3.2)), которые доказываются в § 3. В § 4 содержатся аналогичные результаты для гамильтоновых потоков. В § 5 изучаются типичные (generic) элементы в пространстве $\mathrm{Diff}^1_\omega(M)$ для двумерного многообразия M с точки зрения структуры орбит; при этом используется следствие 3.

Обозначение. Если $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — отображение класса C^1, то

$$\|f\|_1 = \sup_{\substack{v \in T_x\mathbb{R}^n \\ \|v\|=1}} \|df_x v\|.$$

§ 2. ОТОБРАЖЕНИЕ ВОЗВРАЩЕНИЯ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

Пусть M — компактное многообразие с объемной формой ω и $\varphi \in \mathrm{Diff}^1_\omega(M)$ (если M обладает симплектической структурой, заданной с помощью симплектической формы ω', то положим $\omega = \omega' \wedge \omega' \wedge \ldots \wedge \omega'$ ($\dim M/2$ раз); если $\varphi' \in \mathrm{Diff}^1_{\omega'}(M)$, то $\varphi' \in \mathrm{Diff}^1_\omega(M)$). Пусть p — гиперболическая периодическая точка диффеоморфизма φ; мы сначала предположим, что период точки p равен 1, т. е. p — неподвижная гиперболическая точка диффеоморфизма φ.

Пусть D — некоторое замкнутое подмножество в M, содержащее точку p в своей внутренности. Положим $D^u = \varphi(D) \setminus D$, $D^s = \varphi^{-1}(D) \setminus D$. Мы предположим, что $D^u \cap D^s = \varnothing$. Отображение возвращения, соответствующее этой ситуации

$$R(\varphi, D)\colon D^u \to D^s,$$

определено на множестве D^u, за исключением некоторого множества меры ($=$ объема) нуль, и сохраняет меру. Отображение $R(\varphi, D)$ определяется следующим образом.

Пусть $m \in D^u$ — такая точка, что $\varphi^n(m) \in D$ для некоторого $n > 0$. Тогда образ $R(\varphi, D)(m)$ совпадает с точкой $\varphi^{n_m}(m)$, где n_m — наименьшее натуральное число, для которого $\varphi^{n_m+1}(m) \in D$ (в этом случае $\varphi^{n_m}(m) \in D^s$). Если $m \in D^u$ — такая точка, что $\varphi^n(m) \notin D$ для всех натуральных n, то образ $R(\varphi, D)(m)$ не определен.

Нам нужно доказать две вещи:

(R1) отображение $R(\varphi, D)$ определено на множестве D^u, за исключением подмножества меры нуль;

(R2) отображение $R(\varphi, D)$ сохраняет меру.

Доказательство R1. Множества D^u и D измеримы, поэтому для каждого $n > 0$ множество $D^u \cap \varphi^{-n}(D)$ измеримо. Следовательно, объединение $\bigcup_{n=1}^{\infty} (D^u \cap \varphi^{-n}(D^s))$ также измеримо; это множество в точности совпадает с областью определения отображения $R(\varphi, D)$. Поэтому множество $K \subset D^u$, на котором отображение $R(\varphi, D)$ не определено, также измеримо.

Предположим теперь, что объем ($=$ мера) $\mu(K)$ множества K равен $c > 0$. Поскольку многообразие M компактно, то $\mu(M) = C < \infty$. Следовательно, множества K, $\varphi(K)$, $\varphi^2(K), \ldots, \varphi^{i_0}(K)$, $i_0 > \frac{C}{c}$ не могут быть попарно непересекающимися. Поэтому найдутся такие точки $k_1, k_2 \in K$ и натуральные числа $0 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant i_0$, что $\varphi^{i_1}(k_1) = \varphi^{i_2}(k_2)$. Отсюда вытекает, что $k_1 = \varphi^{i_2 - i_1}(k_2)$ и, следовательно, $\varphi^{i_2 - i_1 - 1}(k_2) \in D$. Это противоречит предположению о том, что отображение $R(\varphi, D)$ не определено в точке k_2. (Приведенное рассуждение в сущности принадлежит Биркгофу[1].)

Доказательство R2. Определим в множестве D^s следующие измеримые подмножества:

$$A_i = (\varphi^i(D^u) \cap D^s) \setminus \Big(\bigcup_{j<i} (\varphi^j(D^u) \cap D^s)\Big), \quad i = 1, 2, \ldots,$$

$$A_\infty = D^s \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

В множестве D^u имеются аналогичные непересекающиеся подмножества

$$B_i = \varphi^{-i}(A_i),$$

$$B_\infty = D^u \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i.$$

Из приведенных выше утверждений следует, что $\mu(A_\infty) = \mu(B_\infty) = 0$. С другой стороны, отображение $R(\varphi, D)|_{B_i} : B_i \to A_i$ совпадает с отображением $\varphi^i|_{B_i}$: $B_i \to A_i$ и, следовательно, сохраняет меру. Отсюда вытекает, что отображение $R(\varphi, D)$ сохраняет меру.

---

[1]) По существу это доказательство теоремы о возвращении Пуанкаре. — *Прим. ред.*

Случай, когда период точки p больше единицы. Пусть k — период точки p. Теперь мы возьмем множества $D^u = \varphi^k(D) \setminus D$ и $D^s = \varphi^{-k}(D) \setminus D$ и потребуем, чтобы не только $D^u \cap D^s = \varnothing$, но также

$$\left(\bigcup_{i=1}^{k-1} (\varphi^i(D) \cup \varphi^{-i}(D))\right) \cap (D \cup D^u \cup D^s)\, n_m = \varnothing.$$

В этом случае отображение возвращения $R(\varphi, D)$ определяется следующим образом: пусть $m \in D^u$, n_m — наименьшее натуральное число, для которого $\varphi^{n_m}(m) \in D^s$, тогда

$$R(\varphi, D)(m) = \varphi^{n_m}(m).$$

Это отображение также обладает свойствами (R1) и (R2). Далее мы сформулируем две леммы, доказанные в § 3, на которых основывается доказательство теорем 1 и 2.

Лемма (3.1). *Пусть ω — стандартная объемная форма $dx \wedge dy$ на плоскости $\mathbb{R}^2$ и f: $(\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$ — такой элемент пространства $\mathrm{Diff}^1_\omega(\mathbb{R}^2)$, что 0 является неподвижной гиперболической точкой f (в действительности нам достаточно, чтобы отображение f было определено на круге $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$).*

Пусть q — такая точка на многообразии $W^u_f(0)$, что для всех $i \geqslant 0$

$$f^{-i}(q) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\};$$

пусть также U — окрестность точки q в $\mathbb{R}^2$ и V — окрестность диффеоморфизма f в $\mathrm{Diff}^1_\omega(\mathbb{R}^2)$.

Тогда существуют: диффеоморфизм $\tilde{f} \in V$, для которого носитель функции $(f - \tilde{f})$ содержится в круге

$$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\};$$

произвольно малая замкнутая окрестность $D \subset \mathbb{R}^2$, которая содержит 0 в своей внутренности и для которой $D^u \cap D^s = \varnothing$ (где $D^u = \tilde{f}(D) \setminus D$, $D^s = \tilde{f}^{-1}(D) \setminus D$), и открытые подмножества $O^u \in D^u$, $O^s \in D^s$, такие, что

(I) $\tilde{f}^n(O^u) \subset U$ *для некоторого* $n > 0$;

(II) $\mu(O^u) + \mu(O^s) > \mu(D^u) = \mu(D^s)$;

(III) *для любой пары точек $v_u \in O^u$ и $v_s \in O^s$ существует такой диффеоморфизм $g \in V$, что:*

(a) *точка 0 является неподвижной гиперболической точкой для диффеоморфизма g,*

(b) $W^u_g(0) \ni v_u$ и $W^s_g(0) \ni v_s$,

(c) $\tilde{f} \mid \mathbb{R}^2 \setminus D = g \mid \mathbb{R}^2 \setminus D$.

Лемма (3.2). *Пусть ω — стандартная объемная или симплектическая форма в пространстве $\mathbb{R}^n$ и f: $(\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ — такой элемент пространства $\mathrm{Diff}^1_\omega(\mathbb{R}^n)$, что точка 0 является неподвижной гиперболической точкой для f, причем отображение $df \mid T_0\mathbb{R}^n$ не имеет кратных собственных значений (в действительности нам достаточно, чтобы отображение f было определено в некоторой окрестности начала координат). Пусть также V — некоторая окрестность диффеоморфизма f в пространстве $\mathrm{Diff}^1_\omega(\mathbb{R}^n)$.*

Тогда существуют: произвольно малая окрестность $D \subset \mathbb{R}^n$, которая содержит точку 0 в своей внутренности и для которой $D^u \cap D^s = \varnothing$ (где $D^u = f(D) \setminus D$, $D^s = f^{-1}(D) \setminus D$), и такие открытые подмножества $O^u \subset D^u$ и $O^s \subset D^s$, что

(I) $\mu(O^u) + \mu(O^s) > \mu(D^u) = \mu(D^s)$;

(II) *для любой пары точек $v_u \in O^u$ и $v_s \in O^s$ найдется такой диффеоморфизм $g \in V$, для которого*

(a) *точка 0 является неподвижной гиперболической точкой диффеоморфизма g;*

(b) $W^u_g(0) \ni v_u$, $W^s_g(0) \ni v_s$;

(c) $f \mid \mathbb{R}^n \setminus D = g \mid \mathbb{R}^n \setminus D$.

Доказательство теоремы 1. Пусть φ, M^2, ω, p, q, U и V удовлетворяют условиям теоремы 1 из § 1; пусть k — период точки p. Рассмотрим такие локальные координаты x, y в некоторой окрестности W точки p, для которых

1. $\omega \mid W = \alpha \cdot (dx \wedge dy)$ с некоторым $\alpha \in \mathbb{R}$,
2. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\} \subset W$,
3. $\{x = y = 0\} = \{p\}$.

(Заметим, что, выбирая α достаточно малым, мы можем добиться выполнения условия 2; локальные диффеоморфизмы, сохраняющие форму $dx \wedge dy$, сохраняют форму $\alpha \cdot (dx \wedge dy)$.)

Существует такое натуральное N, что $\varphi^{-nk}(q) \in \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ при всех $n \geqslant N$. Положим $q_1 = \varphi^{-Nk}(q)$; пусть U_1 — такая окрестность точки q_1, что $\varphi^{Nk}(\bar{U}_1) \subset U$. Пусть также $V_1 \subset V$ — такая окрестность диффеоморфизма φ в пространстве $\mathrm{Diff}^1_\omega(M^2)$, что $(\varphi')^{Nk}(U_1) \subset U$ для любого диффеоморфизма $\varphi' \in V_1$.

Применим теперь лемму (3.1) к диффеоморфизму $\varphi^k \mid W$, понимая φ^k под f, q_1 под q, U_1 под U и V_1 под V. Мы получим диффеоморфизм $\varphi' \in V_1$ и множества D, D^u, D^s, O^u и O^s (см. утверждение леммы (3.1).) Если период точки p равен единице, мы можем непосредственно применить лемму

(3.1). Если период k больше единицы, мы получим из леммы (3.1) только отображение ψ, которое близко к φ^k и для которого носитель отображения $\psi\circ\varphi^{-k}$ содержится в малой окрестности точки p. Мы можем предположить, что

$$(\varphi^i(\operatorname{supp}(\psi\circ\varphi^{-k})))\bigcap(\operatorname{supp}(\psi\circ\varphi^{-k}))=\varnothing,\quad i=1,2,\ldots,k-1.$$

Положим теперь $\sqrt[k]{\psi}=\psi\circ\varphi^{-k}\circ\varphi$; тогда в окрестности точки p отображения $(\sqrt[k]{\psi})^k$ и ψ совпадают и отображение $\sqrt[k]{\psi}$ близко к φ. Отображения φ' (см. выше) и $\tilde\varphi$ (см. ниже) построены с помощью леммы (3.1) и приведенной процедуры извлечения корней.

Рассмотрим отображение возвращения $R(\varphi', D)$: $D^u\to D^s$. Поскольку $\mu(O^u)=\mu(O^s)>\mu(D^u)=\mu(D^s)$, то существует такая пара точек $v_u\in O^u$ и $v_s\in O^s$, что $R(\varphi', D)(v_u)=v_s$. Из леммы (3.1) следует, что найдется такой диффеоморфизм $\tilde\varphi\in V_1$, для которого

(a) p — гиперболическая периодическая точка для диффеоморфизма $\tilde\varphi$;

(b) $v_u\in W^u_{\tilde\varphi}(p)$ и $v_s\in W^s_{\tilde\varphi}(p)$;

(c) $\tilde\varphi\mid M^2\setminus D=\varphi'\mid M^2\setminus D$.

Отсюда вытекает [1]), что v_u — это точка пересечения подмногообразий $W^u_{\tilde\varphi}(p)$ и $W^s_{\tilde\varphi}(\tilde\varphi^i(p))$ для некоторого $i\geqslant 0$. Мы можем предположить, что это пересечение трансверсально в точке v_u (см. [11], [12]). Если $i=0$, то точка v_u — гомоклиническая; если $i>0$, то мы имеем точки пересечения многообразий

$$W^u_{\tilde\varphi}(\tilde\varphi^i(p))\quad\text{и}\quad W^s_{\tilde\varphi}(\tilde\varphi^{2i}(p)),$$
$$W^u_{\tilde\varphi}(\tilde\varphi^{2i}(p))\quad\text{и}\quad W^s_{\tilde\varphi}(\tilde\varphi^{3i}(p))\ \text{и т. д.}$$

(этот факт можно доказать, применяя отображение $\tilde\varphi^i$ несколько раз к многообразиям $W^u_{\tilde\varphi}(p)$ и $W^s_{\tilde\varphi}(\varphi^i(p))$). Поскольку p — периодическая точка, существует такое r, что $\tilde\varphi^{ri}(p)=p$; отсюда вытекает существование цикла [2]) (см. [14]). Из по-

---

[1]) Следует иметь в виду, что из (c) вытекают равенства

$$D^u_{\varphi'}=D^u_{\tilde\varphi},\quad D^s_{\varphi'}=D^s_{\tilde\varphi}\quad\text{и}\quad R(\varphi', D)=R(\tilde\varphi, D).$$

— *Прим. ред.*

[2]) Имеется в виду, что если для любых периодических точек p_1 и p_2 мы положим

$$p_1\geqslant p_2,\ \text{если}\ W^u_{\tilde\varphi}(p_1)\setminus p_1\ \text{трансверсально пересекается с}\ W^s_{\tilde\varphi}(p_2)\setminus p_2,$$

то это бинарное отношение транзитивно; в нашем же случае получается цикл

$$p\geqslant\tilde\varphi^i(p)\geqslant\tilde\varphi^{2i}(p)\geqslant\ldots\geqslant\tilde\varphi^{ri}(p)=p.$$

— *Прим. ред.*

следнего утверждения и λ-леммы Пейлиса[1]) (см. [6]) ввиду трансверсальности пересечения следует, что существует сколь угодно близкая к v_u точка пересечения многообразий $W^u_\Phi(p)$ и $W^s_\Phi(p)$. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Возмутим сначала диффеоморфизм φ таким образом, чтобы отображение $d\varphi | T_pM$ не имело кратных собственных значений; это можно сделать в силу результатов [11]. Теперь доказательство проводится аналогично двумерному случаю. Нам придется только использовать лемму (3.2) вместо леммы (3.1) и рассмотреть в качестве окрестности U все многообразие M.

Доказательство следствия 3. Пусть k — натуральное число. Из результатов Р. Робинсона (см. [10]) вытекает, что существует такое открытое и плотное подмножество $R_k \subset \mathrm{Diff}^1_\omega(M)$, что для любого диффеоморфизма $\varphi \in R_k$ и любой связной окрестности $V \ni \varphi$ в R_k существует такое дифференцируемое отображение σ: $HP(k, \varphi) \times V \to M$, где $HP(k, \varphi)$ — множество гиперболических периодических точек диффеоморфизма φ периода $\leqslant k$, что $\sigma(HP(k, \varphi) \times \varphi') = HP(k, \varphi')$. Поскольку неустойчивое многообразие гиперболической периодической точки непрерывно зависит от диффеоморфизма φ (см. [4]), мы можем продолжить σ до такого непрерывного отображения

$$\Sigma\colon (-1, +1) \times HP(\varphi, k) \times V \to M,$$

что отображение $\Sigma | \{0\} \times HP(k, \varphi) \times V$ совпадает с σ, и для любых $p \in HP(k, \varphi)$ и $\varphi' \in V$ выполнено следующее:

$$\Sigma((-1, +1) \times \{p\} \times \{\varphi'\}) \subset W^u_{\varphi'}(\sigma(p, \varphi')).$$

Мы можем предположить, что локальная параметризация на многообразии $W^u_{\varphi'}(\sigma(p, \varphi'))$, индуцированная отображением Σ, соответствует длине дуги (по отношению к некоторой фиксированной римановой метрике на многообразии M). Последнее

[1]) Для удобства читателя приведем формулировку этой леммы, неоднократно цитируемой автором (хотя в действительности для понимания его работы достаточно более известных частных случаев вроде транзитивности введенного в предыдущем примечании бинарного отношения).

Пусть p — гиперболическая неподвижная точка диффеоморфизма f и $\dim W^u(p) = r$, $0 < r < \dim M$, а N — взаимно однозначно иммерсированное подмногообразие в M, инвариантное относительно f и трансверсально пересекающее $W^s(p)$ в точке q. Для любой клеточной окрестности B^r точки p на $W^u(p)$ и любого $\varepsilon > 0$ существует r-мерная клетка в N, C^1-близкая к B^r. (Клетка — это диффеоморфный образ шара, а C^1-близость двух клеток означает, что соответствующие диффеоморфизмы можно выбрать C^1-близкими.) — *Прим. ред.*

условие влечет за собой единственность отображения Σ, если задано отображение[1]) $\Sigma \mid ((-1, +1) \times HP(k, \varphi) \times \{\varphi\})$.

В соответствии с рассуждениями из доказательства теоремы 1, для каждого открытого множества $U \subset (-1, +1) \times \times HP(k, \varphi)$ и любой окрестности $V_1 \ni \varphi$, $V_1 \subset V$, существует такой диффеоморфизм $\varphi' \in V_1$ и такая точка $q \in U$, что $\Sigma(q, \varphi')$ — гомоклиническая точка (для φ'). Диффеоморфизм φ' можно выбрать таким образом, чтобы $\Sigma(q, \varphi')$ была точкой трансверсального пересечения соответствующего устойчивого и неустойчивого многообразий (см. [11], [12]). В этом случае существует такая окрестность $V_2 \ni \varphi'$, что для любого диффеоморфизма $\varphi'' \in V_2$ множество $\Sigma(U, \varphi'')$ содержит гомоклиническую точку (для φ'').

Используя индуктивные рассуждения, нетрудно показать, что если $U_1, U_2, \ldots, U_l$ — покрытие множества $(-1, +1) \times \times HP(k, \varphi)$ элементами вида

$$((a-\varepsilon, a+\varepsilon) \times \{p\}, \quad p \in HP(k, \varphi),$$

то существует такое открытое подмножество $\tilde{V}_\varepsilon \subset V$, что для любого диффеоморфизма $\tilde{\varphi} \in \tilde{V}_\varepsilon$ и любого элемента покрытия U_i, $1 \leqslant i \leqslant l$, множество $\Sigma(U_i, \tilde{\varphi})$ содержит гомоклиническую точку (для $\tilde{\varphi}$).

Приведенное выше рассуждение показывает, что для любого натурального k и любого $\varepsilon > 0$ существует такое открытое и плотное множество $R_{k, \varepsilon} \subset \mathrm{Diff}^1_\omega(M)$, что для любого диффеоморфизма $\varphi \in R_{k, \varepsilon}$ выполнено следующее: для любой гиперболической периодической точки $p \in M$ (для φ) периода $\leqslant k$ и любой точки $q \in W^u_\varphi(p)$, которую можно соединить с точкой p дугой на $W^u_\varphi(p)$ длины меньше 1, существует гомоклиническая точка $q' \in W^u_\varphi(p)$, которую можно соединить с точкой q дугой на $W^u_\varphi(p)$ длины меньше 2ε.

Положим $R^u = \bigcap_{k=1}^{\infty} R_{k, 1/k}$. Очевидно, что R^u — множество второй категории в пространстве $\mathrm{Diff}^1_\omega(M)$, причем для любых $\varphi \in R^u$ и $p \in M$, таких, что p — гиперболическая периодическая точка для диффеоморфизма φ, пересечение $W^u_\varphi(p) \cap W^s_\varphi(p)$ плотно в $W^u_\varphi(p)$. Положим

$$R^s = \{\varphi \in \mathrm{Diff}^1_\omega(M) \mid \varphi^{-1} \in R^u\}.$$

---

[1]) То есть если на неустойчивых многообразиях точке из $HP(k, \varphi)$ выбрано положительное направление. — *Прим. ред.*

Тогда $R = R^u \cap R^s$ — искомое подмножество второй категории в пространстве $\mathrm{Diff}^1_\omega(M)$.

Доказательство следствия 4. Это следствие доказывается аналогично следствию 3, поэтому мы опускаем доказательство.

§ 3. ОПТИМАЛЬНЫЕ [1]) ВОЗМУЩЕНИЯ МНОГООБРАЗИЙ W^u И W^s

Сначала мы докажем следующий более или менее известный результат.

Лемма о возмущении. *Пусть ω — стандартная объемная или симплектическая форма на $\mathbb{R}^n$ (т. е. $\omega = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n$ или $\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 + \ldots + dx_{n-1} \wedge \wedge dx_n$), а ε — произвольное положительное число.*

Тогда существует такая константа C, зависящая от n и ε, что для любых точек p, $q \in \mathbb{R}^n$ найдется в $\mathrm{Diff}^1_\omega(\mathbb{R}^n)$ такой диффеоморфизм φ: $(\mathbb{R}^n, p) \to (\mathbb{R}^n, q)$, для которого

(I) *носитель отображения $(\varphi - \mathrm{id})$ содержится в шаре радиуса $C \cdot \rho(p, q)$ с центром в точке p, где $\rho(\cdot)$ — евклидово расстояние;*

(II) $\|\varphi - \mathrm{id}\|_1 < \varepsilon$, *т. е. для любой точки $x \in \mathbb{R}^n$ матрица $\left(\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right)_x - \delta_{ij}\right)$ имеет норму меньше ε.*

Доказательство. Мы докажем лемму только для симплектического случая (для случая объемной формы мы можем взять те же C и φ, поскольку если φ сохраняет стандартную симплектическую структуру, то, очевидно, сохраняет и стандартный объем).

Сначала мы переместим точку p в начало координат. Затем мы применим такое ортогональное симплектическое преобразование, чтобы точка q перешла в точку $(x_1(q), 0, \ldots, 0)$, причем $x_1(q) > 0$.

Теперь мы построим такое гамильтоново векторное поле X (т. е. такое векторное поле, сдвиг $\mathscr{D}_{X,t}$ по траекториям которого на время t является симплектическим преобразованием при любом t, см. также [1]), что в некоторой окрестности начала координат поле X касается оси x_1, причем носитель этого поля компактен. Выберем такое t_0, что для всех $|t| < t_0$ $\|\mathscr{D}_{X,t} - \mathrm{id}\|_1 < \varepsilon$ и точка $\mathscr{D}_{X,t_0}(0)$ лежит на оси x_1; $\mathscr{D}_{X,t_0}(0) = (c_1, 0, \ldots, 0)$. Существует такое c_2, что носитель

[1]) Здесь это слово не имеет обычного в математике смысла, а означает «подходящие» (для наших целей). — *Прим. ред.*

поля X и, следовательно, носитель отображения $(\mathscr{D}_{X,\,t_0} - \mathrm{id})$ лежит в шаре радиуса c_2 с центром в 0.

Положим теперь $C = c_2 \cdot c_1^{-1}$ (число C не зависит от p и q, но зависит от n и ε). Пусть $\alpha = x_1(q) \cdot c_1^{-1}$. Рассмотрим в качестве φ отображение $(\alpha \cdot \mathrm{id}) \cdot \mathscr{D}_{X,\,t_0} \cdot (\alpha^{-1} \cdot \mathrm{id})$.

Легко проверить, что отображение φ обладает требуемыми свойствами[1]). Заметим, что чем меньше α, тем больше $\|\varphi - \mathrm{id}\|_2$. Поэтому лемма о возмущении не дает малого C^2-возмущения.

Замечание. Для дальнейших рассуждений полезно отметить следующее: векторное поле X можно выбрать постоянным в малой окрестности начала координат, т. е. $X = \frac{\partial}{\partial x_1}$. Если используется такое векторное поле, то 1-струя диффеоморфизма φ в точке p совпадает с 1-струей параллельного переноса.

А. Доказательство леммы (3.1). Будет показано, что лемма (3.1) вытекает из приведенных ниже лемм (3.1.1), (3.1.2), (3.1.3) и (3.1.4).

Лемма (3.1.1). *Пусть* $f \in \mathrm{Diff}^1_\omega(\mathbb{R}^2)$, $\omega = dx \wedge dy$, $f(x, y) = (\lambda x, \lambda^{-1} y)$, *где* $|\lambda| > 1$. *Пусть также* $\varepsilon > 0$ *и* $0 < \alpha < 1$ — *произвольные вещественные числа (в дальнейшем величины* ε *и* $1 - \alpha$ *будут, вообще говоря, очень малыми).*

Тогда существует такое натуральное N, *зависящее от чисел* λ, ε, α, *что для любого* $b > 0$ *и любой пары точек* $q^+ \in O^u_f(N, b)$, $q^- \in O^s_f(N, b)$ *найдется диффеоморфизм* $\varphi \in \mathrm{Diff}^1_\omega(\mathbb{R}^2)$, *для которого*

(I) $\operatorname{supp}(\varphi - \mathrm{id}) \subset D_f(N, b) \setminus D_f(0, b)$;

(II) $\|\varphi - \mathrm{id}\|_1 < \varepsilon$;

(III) $q^+ \in W^u_{\varphi f}(0)$;

(IV) $q^- \in W^s_{\varphi f}(0)$,

---

[1]) Если n нечетно, то редукция «объемной» задачи к «симплектической» невозможна, ибо на R_n нет симплектической структуры. Однако, как явствует из предыдущих рассуждений, все, что нужно установить в этом случае, — это то, что существует бездивергентное векторное поле X с компактным носителем, касающееся некоторого отрезка оси x_1, содержащего 0. Такое поле легко построить (например, можно взять поле с компонентами

$$(H_{x_2}(x_1, \ldots, x_n), \quad -H_{x_1}(x_1, \ldots, x_n), \quad 0, \ldots, 0),$$

где $H = x_2\psi(x_1)\,\psi(x_2)\,\ldots\,\psi(x_n)$, а ψ имеет компактный носитель и $\psi = 1$ в некоторой окрестности нуля). — *Прим. ред.*

где

$$D_f(m, b) = \bigcup_{i=-m}^{m} f^i\{(x, y) \mid |x| \leqslant b \quad \text{и} \quad |y| \leqslant b\};$$

$$D_f^u(m, b) = f(D_f(m, b)) \setminus D_f(m, b);$$

$$D_f^s(m, b) = f^{-1}(D_f(m, b)) \setminus D_f(m, b);$$

$$O_f^u(m, b) = \alpha \cdot (f(D_f(m, b))) \setminus \alpha^{-1} \cdot (D_f(m, b));$$

$$O_f^s(m, b) = \alpha \cdot \left(f^{-1}(D_f(m, b))\right) \setminus \alpha^{-1} \cdot (D_f(m, b))$$

(*символы* $\alpha\cdot$ *и* $\alpha^{-1}\cdot$ *соответствуют скалярному растяжению в* $\mathbb{R}^2$).

Натуральное число $N = N(\lambda, \varepsilon, \alpha)$ *с указанными выше свойствами называется* «$(\lambda, \varepsilon, \alpha)$*-решением леммы* (3.1.1)».

Доказательство. Введем сначала понятие (положительной) *ε-возмущенной последовательности* (для диффеоморфизма f). Последовательность точек $\{p_0, p_1, \ldots, p_i\}$ называется (положительной) ε-возмущенной последовательностью для диффеоморфизма f, если

(I) $p_\nu \in D_f^u(\nu, b)$ для $\nu = 0, 1, \ldots, i$;

(II) множество $D_f^u(\nu + 1, b)$ содержит шар радиуса $\rho_\nu \cdot C$ с центром в точке $f(p_\nu)$, где ρ_ν — расстояние между точками $f(p_\nu)$ и $p_{\nu+1}$ и C — константа, зависящая от ε, введенная в лемме о возмущении.

(В определении участвует, конечно, величина b, зависимость от которой не отражена в обозначениях.)

Из приведенного определения вытекает, что если $\{p_0, \ldots, p_i\}$ — ε-возмущенная последовательность, то существует такой диффеоморфизм $\varphi \in \mathrm{Diff}^1_\omega(\mathbb{R}^2)$, для которого

(I) $\operatorname{supp}(\varphi - \mathrm{id}) \subset \bigcup_{\nu=1}^{i} D_f^u(\nu, b)$;

(II) $\|\varphi - \mathrm{id}\|_1 < \varepsilon$;

(III) $(\varphi f)^\nu(p_0) = p_\nu$ при $\nu = 0, 1, \ldots, i$.

Мы покажем теперь, что для достаточно больших N и любого b выполнено следующее: для любой точки $q^+ \in O_f^u(N, b)$ найдется такая ε-возмущенная последовательность $\{p_0, p_1, \ldots, p_N = q^+\}$, что $p_0 \in W_f^u(0)$ и[1] $f(p_{N-1}) = p_N$.

---

[1]) Последнее условие накладывается с той целью, чтобы не надо было модифицировать f (посредством перехода к $\varphi \cdot f$) возле точки p_N, лежащей вне $D_f(N, b)$, т. е. в конечном счете чтобы обеспечить выполнение (I) в лемме (3.1.1). — *Прим. ред.*

Положим $\tilde{q} = f^{-N}(q^+) \in O_f^u(0, b)$. Пусть $l_{\tilde{q}}$ — это отрезок, параллельный оси y, соединяющий точку $\tilde{q}$ с множеством $W_f^u(0)$. Длина отрезка $l_{\tilde{q}}$ меньше $|\lambda|^{-1} \cdot b$, причем $l_{\tilde{q}} \subset O_f^u(0, b)$. Пусть γ (γ зависит от λ и α, но не от b) таково, что расстояние между множествами $O_f^u(0, b)$ и $\partial D_f^u(0, b)$ составляет по крайней мере $\gamma \cdot b$. Тогда расстояние между множествами $O_f^u(i, b)$ и $\partial D_f^u(i, b)$ не меньше, чем $\gamma \cdot b \cdot |\lambda|^{-i}$.

Теперь мы хотим найти такую последовательность $\{\tilde{p}_0, \tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_N\}$ на отрезке $l_{\tilde{q}}$, для которой

(a) $\tilde{p}_0 \in W_f^u(0)$,

(b) $\tilde{p}_N = \tilde{q}$, $\tilde{p}_{N-1} = \tilde{q}$,

(c) $\rho(\tilde{p}_i, \tilde{p}_{i+1}) < \frac{b \cdot \gamma}{C}$, где γ — введенная выше постоянная и C — константа, фигурирующая в определении ε-возмущенной последовательности.

Такую последовательность можно построить для любой точки $q^+ \in O_f^u(N, b)$, если только

$$(N - 1) > \text{длина } (l_{\tilde{q}}) \left(\frac{b \cdot \gamma}{C}\right)^{-1} > |\lambda|^{-1} \cdot b \cdot \frac{C}{b \cdot \gamma} = \frac{C}{|\lambda| \cdot \gamma}.$$

Если имеется последовательность $\{\tilde{p}_0, \ldots, \tilde{p}_N\}$, удовлетворяющая условиям (a), (b) и (c), то, как легко видеть, набор точек $\{p_0, \ldots, p_N\}$, где $p_i = f^i(\tilde{p}_i)$, является ε-возмущенной последовательностью для диффеоморфизма f, причем $p_0 \in W_f^u(0)$, $p_N = q^+$ и $f(p_{N-1}) = p_N$. Таким образом, для $N > \frac{C}{|\lambda| \cdot \gamma} + 1$ и $q^+ \in O_f^u(N, b)$ существует такой диффеоморфизм $\varphi \in \mathrm{Diff}^1_{\varphi \cdot f}(\mathbb{R}^2)$, что

(I) $\operatorname{supp}(\varphi - \mathrm{id}) \subset \bigcup_{\nu=1}^{N-1} D_f^u(\nu, b) \subset (D_f(N, b) \setminus D_f(0, b))$,

(II) $\|\varphi - \mathrm{id}\|_1 < \varepsilon$,

(III) $q^+ \in W^u_{\varphi \cdot f}(0)$.

Приведенное рассуждение доказывает «половину» леммы. Вторая «половина» доказывается аналогично, при этом используются отрицательные ε-возмущенные последовательности, т. е. такие последовательности точек $\{p_0, \ldots, p_i\}$, для которых

(I) $p_\nu \in D_f^s(\nu, b)$ при $\nu = 0, 1, \ldots, i$,

(II) множество $D_f^s(\nu - 1, b)$ содержит шар радиуса $C \cdot \rho_\nu$ с центром в точке $f(p_\nu)$, где ρ_ν — расстояние между точками $f(p_\nu)$ и $p_{\nu-1}$.

Мы предоставляем читателю воспроизвести в деталях вторую часть доказательства леммы[1]).

Лемма (3.1.2). *Пусть* $f \in \mathrm{Diff}^1_\omega(\mathbb{R}^2)$, *причем* $f(x, y) = (\lambda x, \lambda^{-1}y) + o(\|(x, y)\|)$, $|\lambda| > 1$ (*т. е.* 1-*струя для диффеоморфизма* f *в* 0 *совпадает с соответствующей* 1-*струей из леммы* (3.1.1)).

Тогда утверждение леммы (3.1.1) *остается в силе, если заменить слова «такое, что для любого* $b > 0$*» на «и существует такое* $b_0 > 0$, *что для любого* b, *для которого* $0 < b < b_0$*». Пара чисел* $(N(\lambda, \varepsilon, \alpha), b_0)$ *называется «решением леммы* (3.1.2) *для диффеоморфизма* f*».*

Доказательство. Представим отображение f в виде $f = \bar{f} + g$, где $\bar{f}$ — линейное преобразование, а $g(x, y) = o(\|(x, y)\|)$. Это означает, что $\|g(x, y)\| \leqslant D(r) \times \|(x, y)\|$ при $\|(x, y)\| < r$, причем $\lim\limits_{r \to 0} D(r) = 0$.

Пара чисел $(N(\lambda, \varepsilon, \alpha), b_0)$ является решением леммы (3.1.2) для диффеоморфизма $f = \bar{f} + g$ тогда и только тогда, когда пара чисел $(N(\lambda, \varepsilon, \alpha), 1)$ является решением леммы (3.1.2) для отображения

$$(b_0 \cdot \mathrm{id})^{-1} \cdot f \cdot (b_0 \cdot \mathrm{id}) = \bar{f} + (b_0 \cdot \mathrm{id})^{-1} \cdot g \cdot (b_0 \cdot \mathrm{id}).$$

Легко видеть, что при $\|(x, y)\| < r$

$$\|(b_0 \cdot \mathrm{id})^{-1} \cdot g \cdot (b_0 \cdot \mathrm{id})(x, y)\| \leqslant D(b_0 r) \cdot \|(x, y)\|;$$

поэтому $(b_0 \cdot \mathrm{id})^{-1} \cdot f \cdot (b_0 \cdot \mathrm{id}) = \mathrm{Ad}(b_0) f \to \bar{f}$ при $b_0 \to 0$.

Пусть $N\left(\lambda, \frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{2}(1 + \alpha)\right)$ — решение леммы (3.1.1) для отображения $\bar{f}$. Из соображений непрерывности и из того, что $\lim\limits_{b_0 \to 0} \mathrm{Ad}(b_0) f = \bar{f}$, следует, что если $b_0 > 0$ достаточно мало,

---

[1]) И построить такой диффеоморфизм $\varphi_1 \in \mathrm{Diff}^1_\omega(\mathbb{R}^2)$, что $\|\varphi_1 - (\mathrm{id})\|_1 < \varepsilon$, $q^- \in W^s_{\varphi_1 f}(0)$ и

$$\mathrm{supp}(\varphi_1 - \mathrm{id}) \subset \bigcup_{\nu=0}^{N-1} D^s_f(\nu; b).$$

Существенно, что носитель $\varphi_1 - \mathrm{id}$ не пересекается с отрицательной полутраекторией $(\varphi \circ f)^{-i} q^+$, а носитель $\varphi - \mathrm{id}$ — с положительной полутраекторией $(\varphi_1 \circ f)^i q^-$; друг с другом эти носители тоже не пересекаются. Поэтому диффеоморфизм $\varphi \circ \varphi_1 = \varphi + \varphi_1 - \mathrm{id}$ удовлетворяет всем условиям в заключении леммы. — *Прим. ред.*

то для любого $b \in (0, b_0)$ пара чисел $\left(N\left(\lambda, \frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{2}(1+\alpha)\right), 1\right)$ является $(\lambda, \varepsilon, \alpha)$-решением леммы (3.1.2) для отображения $\mathrm{Ad}(b) f$; следовательно, пара чисел

$$\left(N\left(\lambda, \frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{2}(1+\alpha)\right), b\right), \quad 0 < b < b_0,$$

является $(\lambda, \varepsilon, \alpha)$-решением леммы (3.1.2) для диффеоморфизма f.

Лемма (3.1.3). *Предположим, что начало координат является неподвижной гиперболической точкой для диффеоморфизма $f \in \mathrm{Diff}^1_\omega(\mathbb{R}^2)$. Пусть $W^u_f(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$.*

Тогда для любой окрестности $V \ni f$ в пространстве $\mathrm{Diff}^1_\omega(\mathbb{R}^2)$ и любой окрестности $W \ni 0$ на плоскости $\mathbb{R}^2$ существует такой диффеоморфизм $\tilde{f} \in V$, для которого

(I) $\operatorname{supp}(f - \tilde{f}) \subset W$;

(II) $W^u_{\tilde{f}}(0) = W^u_f(0)$;

(III) *отображение* $\tilde{f} \mid W^u_{\tilde{f}}(0)$ *является линейным в некоторой окрестности точки* 0.

Аналогичный факт справедлив для отображений, которые определены только локально, т. е. в некоторой окрестности начала координат.

Доказательство. Отождествим сепаратрису $W^u_f(0) = \{(x, y) \mid y = 0\}$ с прямой $\mathbb{R}$ и представим отображение $F = f \mid W^u_f(0)$ в виде вещественной функции на $\mathbb{R}$. Пусть λ — наибольшее собственное значение оператора $df \mid T_0\mathbb{R}^2$.

Определим отображение $\bar{F}$: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ следующим образом: $\bar{F}(t, x) = t \cdot F(x) + (1 - t) \cdot \lambda \cdot x$. Пусть X_t — такое зависящее от времени векторное поле на сепаратрисе $W^u_f(0)$, что по крайней мере локально $\bar{F}(t_0, x) = \mathscr{D}x_{t};{}_{t_0}\bar{F}(0, x)$; здесь $\mathscr{D}x_{t};{}_{t_0}$ — сдвиг по траекториям векторного поля X_t на время t_0, т. е. $\mathscr{D}x_{t},{}_0(x) = x$ и $\frac{d}{dt_0}(\mathscr{D}x_{t},{}_{t_0}(x)) = X_{t_0}(\mathscr{D}x_{t},{}_{t_0}(x))$. Приведенное описание поля X_t эквивалентно следующему:

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{F}(t, x) = X_t(\bar{F}(t, x)).$$

Поскольку $\frac{\partial}{\partial t}(\bar{F}(t, x))$ — векторное поле класса C^1, то из последней формулы вытекает, что поле X_t также принадлежит классу C^1; более того, производная $\frac{d}{dx}X_t(x)$ непрерывна по x

и t. Если величина $|x|$ достаточно мала и $t \in [0, 1]$, то норма вектора $X_t(x)$ мала.

В соответствии с теоремой Уитни о продолжении (см. [18]) существует такое семейство функций H_t: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $t \in [0, 1]$ (определенных по крайней мере в окрестности начала координат), что

(I) $H_t \mid \{(x, y) \mid y = 0\} \equiv 0$,

(II) $\frac{\partial H_t}{\partial y}(x, 0) = X_t(x)$; $\frac{\partial^2 H_t}{\partial y^2}(x, 0) \equiv 0$,

(III) для любого t функция $H_t(x, y)$ принадлежит классу C^2, вторые частные производные по x и y непрерывно зависят от x, y и t, и 2-струя функции H_t в начале координат равна нулю.

Рассмотрим далее такую C^∞-функцию φ: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что $\varphi(-\infty, +1] = 1$ и $\varphi[2, +\infty) = 0$, и положим $\tilde{H}_t(x, y) = \varphi(A(x^2 + y^2)) H_t(x, y)$. Если число A велико, то функция $\tilde{H}_t$ мала в C^2-норме (так как 2-струя функции H_t в начале координат равна нулю); кроме того, в этом случае носитель функции $\tilde{H}_t$ имеет малый диаметр. Векторное поле $\tilde{X}_t$ определим следующим образом:

$$\tilde{X}_t = \frac{\partial \tilde{H}_t}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{H}_t}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y}.$$

Поле $\tilde{X}_t$ мало в C^1-норме для всех $t \in [0, 1]$; сдвиг по траекториям поля $\tilde{X}_t$ сохраняет меру, так как X_t — гамильтоново векторное поле при всех t, и поле $\tilde{X}_t$ в малой окрестности начала координат на прямой $W^u_f(0)$ совпадает с X_t. Следовательно, отображение $\tilde{f} = \left(\mathcal{D}_{\tilde{X}_t, 1}\right)^{-1} \circ f$ обладает требуемыми свойствами при достаточно большом A (см. выше).

Лемма (3.1.4). *Пусть отображение $\tilde{f}$ удовлетворяет заключению леммы* (3.1.3), $q = (x_0, 0) \in W^u_{\tilde{f}}(0)$ *и* U — *окрестность точки* q *в* $\mathbb{R}^2$. *Тогда существует такое* $\delta > 0$, *что точка* $\tilde{f}^i(U_{|\delta \cdot x_i|}(x_i, 0)) \subset U$, *где* $U_{|\delta \cdot x_i|}(x_i, 0)$ — $|\delta \cdot x_i|$-*окрестность точки* $(x_i, 0)$ *и* $(x_i, 0) = \tilde{f}^{-i}(x_0, 0)$.

Доказательство. Существует такое i_0, что при $i \geqslant i_0$ точка $\tilde{f}^{-i}(q)$ содержится в той области, где отображение $\tilde{f} \mid W^u_{\tilde{f}}(0)$ линейно. Утверждение леммы достаточно доказать для точки $\tilde{f}^{-i_0}(q)$ и окрестности $\tilde{f}^{-i_0}(U)$ вместо q и U, поэтому мы можем предположить, что $i_0 = 0$. Из линейности отображения $\tilde{f}$ на прямой $W^u_{\tilde{f}}(0)$ следует, что найдется такое δ_0, для которого $\tilde{f}^i\left(U_{|\delta_0, x_i|}(x_i, 0) \cap W_{\tilde{f}}^u(0)\right) \subset U$ (это может не выполняться для отображения f из условий леммы (3.1.3)).

Определим угловые коэффициенты для векторов, касательных к плоскости $\mathbb{R}^2$: коэффициент или, как мы будем короче говорить, „наклон“ (slope) вектора $\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p + \beta\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p$ равен $\frac{\beta}{\alpha}$; если $\alpha = 0$ и $\beta \neq 0$, то наклон равен ∞; если $\alpha = \beta = 0$, то наклон не определен. Пусть $X \in T_0\mathbb{R}^2$ и $|$наклон $(X)| < 1$, тогда

$$|\text{наклон } f_*(X)| \leqslant \frac{1}{\lambda^2} < 1.$$

Следовательно, существует такая окрестность O начала координат, что если $p \in O$, $X \in T_p\mathbb{R}^2$ и $|$наклон $(X)| < 1$, то $|$наклон $f_*(X)| < 1$.

Мы можем предположить, что $f^{-i}(q) \in O$ для всех $i \geqslant 0$ (см. соответствующее замечание в начале доказательства). Рассмотрим следующие окрестности точек $q_i = (x_i, 0)$:

$$\hat{U}_{|\bar{\delta}\cdot x_i|}(x_i, 0) = \{(x, y) \mid |x - x_i| + |y| < |\bar{\delta} \cdot x_i|\}.$$

Выберем $\bar{\delta}$ настолько малым, чтобы все эти окрестности содержались в O и чтобы $\hat{U}_{|\bar{\delta}\cdot x_0|}(x_0, 0) \subset U$. Из определения окрестности O и линейности отображения $\tilde{f}$ на прямой $W_{\tilde{f}}^u(0)$ вытекает, что $\tilde{f}\left(\hat{U}_{|\bar{\delta}\cdot x_i|}(x_i, 0)\right) \subset \hat{U}_{|\bar{\delta}\cdot x_{i-1}|}(x_{i-1}, 0)$. С другой стороны, $U_{|\bar{\delta}/2\cdot x_i|}(x_i, 0) \subset \hat{U}_{|\bar{\delta}\cdot x_i|}(x_i, 0)$, поэтому число $\delta = \frac{\bar{\delta}}{2}$ обладает требуемыми свойствами.

Доказательство леммы (3.1) (*заключительная часть*). Поскольку отображение f в лемме (3.1) принадлежит классу C^1, то многообразие $W_f^u(0)$ также принадлежит классу C^1 (см. [4]); поэтому существуют такие локальные C^1-координаты $\bar{x}$ и $\bar{y}$, что $W_f^u(0) = \{\bar{y} = 0\}$. Согласно лемме (3.1.3), найдется такой диффеоморфизм $\tilde{f} \in V$, для которого носитель функции $f - \tilde{f}$ содержится в круге $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ и в малой окрестности начала координат выполнено следующее: $W_{\tilde{f}}^u(0) = \{\bar{y} = 0\}$ и отображение $\tilde{f} \mid W_{\tilde{f}}^u(0)$ линейно по координате $\bar{x}$.

По лемме (3.1.4) существует такое $\delta > 0$, что $f^i\left(U_{|\delta\cdot\bar{x}_i|}(\bar{x}_i, 0)\right) \subset U$, где $\bar{x}_i$ определяется так же, как и раньше, $\tilde{f}^i(\bar{x}_i, 0) = q$.

Применим лемму (3.1.2) к отображению $\tilde{f}$, записанному в координатах $\tilde{x}$, $\tilde{y}$. Выберем в этой лемме ε настолько малым, чтобы было $\psi \cdot \tilde{f} \in V$ при $\|\psi - \mathrm{id}\|_1 < \varepsilon$. Из леммы вытекает, что для каждого $\alpha < 1$, достаточно малого b и некоторого большого N существуют соответствующие множества $D = D_{\tilde{f}}(N, b)$, $D^u = D_{\tilde{f}}^u(N, b)$, $D^s = D_{\tilde{f}}^s(N, b)$, $O_{\tilde{f}}^u(N, b)$ и $O_{\tilde{f}}^s(N, b)$. Мы можем выбрать b таким образом, чтобы для некоторого i_0 точка $(\tilde{x}_{i_0}, 0) = \tilde{f}^{-i_0}(q)$ находилась в середине отрезка $D_{\tilde{f}}^u(N, b) \cap W_{\tilde{f}}^u(0)$; это не противоречит тому, что b мало. Положим теперь $O^u = U_{|\delta \tilde{x}_{i_0}|}(\tilde{x}_{i_0}, 0) \cap O_{\tilde{f}}^u(N, b)$ и $O^s = O_{\tilde{f}}^s(N, b)$.

Из лемм (3.1.1) и (3.1.2) следует, что f, D, O^u и O^s удовлетворяют условиям (I) и (III) из утверждения леммы (3.1). Если число α достаточно близко к 1 (эта близость определяется только параметром δ из леммы (3.1.4)), то условие (II) также выполняется. Тем самым лемма (3.1) доказана.

В. Доказательство леммы (3.2). Это доказательство во многом аналогично доказательству леммы (3.1). Заметим, что лемма (3.2) в размерности 2 вытекает из леммы (3.1.2). Поэтому нам достаточно обобщить лемму (3.1.2).

Приведенная ниже лемма (3.2.1) является n-мерным аналогом леммы (3.1.1) (которая служила основой при доказательстве леммы (3.1.2)). Из леммы (3.2.1), используя метод, который применялся при доказательстве леммы (3.1.2), легко вывести лемму (3,2).

Лемма (3.1.4) не обобщается на старшие размерности, именно по этой причине наши результаты слабее в размерностях больше 2.

Лемма (3.2.1). *Пусть ω — стандартная объемная или симплектическая форма на $\mathbb{R}^n$, $f \in \mathrm{Diff}_\omega^1(\mathbb{R}^n)$ — линейное отображение вида $f(x, \ldots, x_n) = (\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_n x_n)$, причем $|\lambda_i| \neq 1$ для всех i. Пусть $\varepsilon > 0$ и $0 < \alpha < 1$ — два произвольных вещественных числа (величины ε и $(1 - \alpha)$ будут, вообще говоря, очень маленькими). Тогда существуют натуральное N и такой набор $(a_1, \ldots, a_n)$ из n положительных чисел, зависящие от $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, ε и α, что для любых точек $q_+ \in O^u(N; a_1, \ldots, a_n)$ и $q_- \in O^s(N; a_1, \ldots, a_n)$ найдется такой диффеоморфизм $\varphi \in \mathrm{Diff}_\omega^1(\mathbb{R}^n)$, для которого*

(I) $\mathrm{supp}(\varphi - \mathrm{id}) \subset D(N; a_1, \ldots, a_n) \setminus D(0; a_1, \ldots, a_n)$,

(II) $\|\varphi - \mathrm{id}\|_1 < \varepsilon$,

(III) $W_{\varphi f}^u(0) \ni q_+$,

(IV) $W_{\varphi f}^s(0) \ni q_-$,

где

$$D(m;\ a_1,\ \ldots,\ a_n) = \bigcup_{i=-m}^{m} f^i(\{(x_1,\ \ldots,\ x_n) \| x_j < a_j\}),$$

$$D^u(m;\ a_1,\ \ldots,\ a_n) = f(D(m;\ a_1\ \ldots,\ a_n)) \setminus D(m;\ a_1,\ \ldots,\ a_n),$$

$$D^s(m;\ a_1,\ \ldots,\ a_n) = f^{-1}(D(m;\ a_1,\ \ldots,\ a_n)) \setminus D(m;\ a_1,\ \ldots,\ a_n),$$

$$O^u(m;\ a_1,\ \ldots,\ a_n) = \\ = \alpha\cdot(f(D(m;\ a_1,\ \ldots,\ a_n))) \setminus \alpha^{-1}\cdot(D(m;\ a_1,\ \ldots,\ a_n)),$$

$$O^s(m;\ a_1,\ \ldots,\ a_n) = \\ = \alpha\left(f^{-1}(D(m;\ a_1,\ \ldots,\ a_n))\right) \setminus \alpha^{-1}\cdot(D(m;\ a_1,\ \ldots,\ a_n))$$

(*символы* $\alpha\cdot$ *и* $\alpha^{-1}\cdot$ *соответствуют скалярному растяжению в* $\mathbb{R}^n$).

Доказательство. Без потери общности можно предположить, что

$$|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_m| > 1 > |\lambda_{m+1}| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_n|.$$

Прежде всего нужна некоторая оценка расстояний

$$\rho(O^u(i;\ a_1,\ \ldots,\ a_n),\ \partial D^u(i;\ a_1,\ \ldots,\ a_n))$$

и

$$\rho(O^s(i;\ a_1,\ \ldots,\ a_n),\ \partial D^s(i;\ a_1,\ \ldots,\ a_n)).$$

Пусть функция g^+: $(\mathbb{R}_+)^m \to \mathbb{R}_+$ такова, что если $(x_1,\ \ldots,\ x_m,\ 0,\ \ldots,\ 0) \in O^u(0;\ a_1,\ \ldots,\ a_n)$, то $\rho((x_1,\ \ldots,\ x_m,\ 0,\ \ldots,\ 0),\ (\partial D^u(0;\ a_1,\ \ldots,\ a_n) \cap \{x_{m+1} = \ldots = x_n = 0\})) > g^+(a_1,\ \ldots,\ a_m)$. Мы можем предположить, что $g(\varkappa a_1, \ldots, \varkappa a_m) = \varkappa\cdot g(a_1, \ldots, a_m)$. Поскольку $|\lambda_1|,\ \ldots,\ |\lambda_m| > 1$, то для всех $i \geqslant 0$ из того, что $(x_1,\ \ldots,\ x_m,\ 0,\ \ldots,\ 0) \in O^u(i;\ a_1,\ \ldots,\ a_n)$, вытекает, что

$$\rho((x_1,\ \ldots,\ x_m,\ 0,\ \ldots,\ 0), \\ (\partial D^u(i;\ a_1,\ \ldots,\ a_n) \cap \{x_{m+1} = \ldots = x_n = 0\})) > g^+(a_1,\ \ldots,\ a_m).$$

Если $(x_1,\ \ldots,\ x_n) \in O^u(i,\ a_1,\ \ldots,\ a_n)$, то

$$(x_1,\ \ldots,\ x_m,\ 0,\ \ldots,\ 0) \in O^u(i;\ a_1,\ \ldots,\ a_n).$$

Отсюда следует, что

$$\rho(O^u(i;\ a_1,\ \ldots,\ a_n),\ \partial D^u(i;\ a_1,\ \ldots,\ a_n)) > \\ > \min\{g^+(a_1,\ \ldots,\ a_m),\ (1-\alpha)\cdot|\lambda_{m+1}|^{i+1}\cdot a_{m+1},\ \ldots, \\ (1-\alpha)|\lambda_n|^{i+1}\cdot a_n\}.$$

Аналогично, рассмотрим такую функцию $g^-: (\mathbb{R}_+)^{n-m} \to \mathbb{R}_+$, что если $(0, \ldots, 0, x_{m+1}, \ldots, x_n) \in O^s(0; a_1, \ldots, a_n)$, то

$$\rho((0, \ldots, 0, x_{m+1}, \ldots, x_n), (\partial D^s(0; a_1, \ldots, a_n) \cap \{x_1 = \ldots \\ \ldots = x_m = 0\})) > g^-(a_{m+1}, \ldots, a_n).$$

Имеем:

$$\rho(O^s(i; a_1, \ldots, a_n), \partial D^s(i; a_1, \ldots, a_n)) > \\ > \min\{g^-(a_{m+1}, \ldots, a_n), (1-\alpha) \cdot |\lambda_1|^{-i-1} \cdot a_1, \ldots, \\ (1-\alpha)|\lambda_m|^{-i-1} \cdot a_m\}.$$

Так же как в доказательстве леммы (3.1.1), главное заключается в доказательстве того, что для подходяще подобранного набора $(a_1, \ldots, a_n)$ существует «достаточно много» ε-возмущенных последовательностей для диффеоморфизма f (определение см. в доказательстве леммы (3.1.1)[1])).

Мы построим такие последовательности $(a_{m+1}, \ldots, a_n)$ и $(N_{m+1}, \ldots, N_n)$, что если дополнить первую из них до такого набора $(a_1, \ldots, a_n)$, для которого $g^+(a_1, \ldots, a_m) > (1-\alpha)|\lambda_{m+1}|a_{m+1}$, то для любой точки

$$p = (x_1, \ldots, x_l, 0, \ldots, 0) \in O^u(0; a_1, \ldots, a_n), \qquad l \geqslant m+1,$$

существует ε-возмущенная последовательность $p_0, \ldots, p_{N_l}$, для которой

$$f^{N_l}(p) = p_{N_l} \text{ и } p_0 \in O^u(0; a_1, \ldots, a_n) \cap \{x_{m+1} = \ldots = x_n = 0\}.$$

(Это означает, что для вышеуказанного набора $(a_1, \ldots, a_n)$ и $N = N_n + 1$ выполнены условия (I), (II) и (III) из утверждения леммы (3.2.1)[2]).]

Процесс построения последовательностей $(a_{m+1}, \ldots, a_n)$ и $(N_{m+1}, \ldots, N_n)$ включает в себя три шага:

---

[1]) Теперь в определении, естественно, должны фигурировать $D(\nu; a_1, \ldots, a_n)$, но зависимость от $(a_1, \ldots, a_n)$ по-прежнему не отражена в названии. — *Прим. ред.*

[2]) Подробнее: возьмем точку $p = f^{-N}q_+ \in O^u(O; a_1, \ldots, a_n)$ и построим для нее соответствующую ε-возмущенную последовательность $p_0, \ldots, p_{N_n}$. Затем с помощью леммы о возмущении, приведенной в начале § 3, построим $\varphi \in \mathrm{Diff}^1_\omega(\mathbb{R}^n)$, который переводит $f(p_\nu)$ в $p_{\nu+1}$ $(\nu = 0, \ldots \ldots, N_n - 1)$ и для которого

$$\|\varphi - \mathrm{id}\|_1 < \varepsilon, \ \mathrm{supp}(\varphi - \mathrm{id}) \subset \bigcup_{\nu=1}^{N_n} D^u(\nu; a_1, \ldots, a_n).$$

— *Прим. ред.*

1. Мы сформулируем систему неравенств (*), связывающую величины

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \varepsilon, \alpha, a_{m+1}, \ldots, a_n, N_{m+1}, \ldots, N_n.$$

2. Мы покажем, что при заданных $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \varepsilon, \alpha$ существуют последовательности $(a_{m+1}, \ldots, a_n)$ и $(N_{m+1}, \ldots, N_n)$, удовлетворяющие системе (*).

3. Мы покажем, что если выполняются неравенства из системы (*), то искомые ε-возмущенные последовательности существуют [1]).

1. *Формулировка системы неравенств* (*)

В дальнейшем $N_m = 0$.

(a) $N_{l-1} < N_l$ при $l = m+1, \ldots, n$.

(b) Для каждого i, такого, что $N_{l-1} < i \leqslant N_l$, $l = m+1, \ldots, n$, выполнено неравенство (c_l):

$$(c_l):\ \min\{(1-\alpha)\cdot|\lambda_{m+1}|^{i+1}\cdot a_{m+1}, \ldots, (1-\alpha)\cdot|\lambda_n|^{i+1}\cdot a_n\} > C\frac{|\lambda_l|^{i+1}a_l}{N_l - N_{l-1}}.$$

Неравенство (c_l), очевидным образом, эквивалентно системе неравенств $(c_{l,1})$ и $(c_{l,2})$:

$$(c_{l,1}):\ \min\left\{(1-\alpha)\cdot\frac{|\lambda_{m+1}|^{i+1}}{|\lambda_l|^{i+1}}\cdot a_{m+1}, \ldots \right.$$
$$\left. \ldots, (1-\alpha)\frac{|\lambda_{l-1}|^{i+1}}{|\lambda_l|^{i+1}}\cdot a_{l-1}, (1-\alpha)\cdot a_l\right\} > C\frac{a_l}{N_l - N_{l-1}};$$

$$(c_{l,2}):\ \min\left\{(1-\alpha)\cdot\frac{|\lambda_{l+1}|^{i+1}}{|\lambda_l|^{i+1}}\cdot a_{l+1}, \ldots \right.$$
$$\left. \ldots, (1-\alpha)\frac{|\lambda_n|^{i+1}}{|\lambda_l|^{i+1}}\cdot a_n\right\} > C\frac{a_l}{N_l - N_{l-1}}.$$

---

[1]) На самом деле общий план будет чуть сложнее. Хотя схема действий «с тремя шагами» излагается применительно к $(a_{m+1}, \ldots, a_n)$, $(N_{m+1}, \ldots, N_n)$ и положительным ε-возмущенным последовательностям, что в конце концов означало бы построение «корректирующего» диффеоморфизма φ, «обслуживающего» точки типа q_+ (обозначение как в формулировке леммы (3.2.1)), однако непосредственно эта схема будет применяться для «обслуживания» точек типа q_-. Чтобы затем «обслужить» точки типа q_+, эта схема будет чуть-чуть изменена. — *Прим. ред.*

Константа C в неравенствах (c_l), $(c_{l,1})$ и $(c_{l,2})$ — это та константа, зависящая от величины ε, которая была введена в лемме о возмущении.

2. *Построение наборов $(a_{m+1}, \ldots, a_n)$ и $(N_{m+1}, \ldots, N_n)$, для которых выполнена система неравенств $(*)$.*

Возьмем произвольное $a_{m+1} > 0$. Найдем такое N_{m+1}, чтобы неравенство $(c_{m+1,1})$ выполнялось для $i=0$ и, следовательно, для всех $i \geqslant 0$. Затем выберем такое a_{m+2}, чтобы неравенство $(c_{m+1,2})$ выполнялось для всех i, $0 = N_m < i \leqslant N_{m+1}$, если только величины $a_{m+3}, \ldots, a_n$ достаточно велики[1]. Существует такое N_{m+2}, что неравенство $(c_{m+2,1})$ выполняется для $i = N_{m+1}+1$ и следовательно, для всех $i \geqslant N_{m+1}+1$ (поскольку $\frac{|\lambda_{m+1}|}{|\lambda_{m+2}|} > 1$). Выберем такое a_{m+3}, чтобы неравенства $(c_{m+1,2})$ и $(c_{m+2,2})$ выполнялись при $N_m < i \leqslant N_{m+1}$, соответственно $N_{m+1} < i \leqslant N_{m+2}$, если только величины $a_{m+4}, \ldots, a_n$ достаточно велики. Найдем такое N_{m+3}, чтобы неравенство $(c_{m+3,1})$ было выполнено для $i = N_{m+2}+1$ и, следовательно, для всех $i \geqslant N_{m+2}+1$. И т. д.

3. *Построение ε-возмущенных последовательностей*

Это построение проводится по индукции. Пусть точка

$$p = (x_1, \ldots, x_l, 0, \ldots, 0) \in O^u(0;\, a_1, \ldots, a_n)$$

задана, $l = m, m+1, \ldots, n$. Если $l = m$, то искомая возмущенная последовательность состоит из единственного элемента p и ее существование тривиально. Если $l > m$, то мы можем предположить по индукции, что уже построена такая ε-возмущенная последовательность $p_0, \ldots, p_{N_{l-1}}$, для которой

$$f^{N_{l-1}}(x_1, \ldots, x_{l-1}, 0, \ldots, 0) = p_{N_{l-1}}$$

и

$$p_0 \in O^u(0;\, a_1, \ldots, a_n) \cap \{x_{m+1} = \ldots = x_n = 0\}.$$

---

[1]) Это надо понимать в том смысле, что в данный момент мы позаботимся только о неравенстве

$$(1-\alpha)\frac{|\lambda_{m+2}|^{i+1}}{|\lambda_{m+1}|^{i+1}}\, a_{m+2} > C\,\frac{a_{m+1}}{N_{m+1}-N_m} \quad \text{при} \quad N_m < i \leqslant N_{m+1},$$

а о том, чтобы каждая из остальных величин, стоящих в $(c_{m+1,2})$ под знаком минимума, тоже была (при тех же i) достаточно велика, мы позаботимся позже. — *Прим. ред.*

Мы дополним эту последовательность следующим образом:

$$P_{N_{l-1}+i}=f^{N_{l-1}+i}\left(x_1, \ldots, x_{l-1}, \frac{i}{N_l-N_{l-1}}\cdot x_l, 0, \ldots, 0\right)$$

для $i=1, 2, \ldots, N_l-N_{l-1}$. Тот факт, что эта последовательность является ε-возмущенной, вытекает из системы (*) принятого нами соглашения, что $(a_1, \ldots, a_m)$ должны удовлетворять неравенству $g^+(a_1, \ldots, a_m)>(1-\alpha)\cdot|\lambda_{m+1}|\cdot a_{m+1}$ формулы для расстояния $\rho(O^u(i; a_1, \ldots, a_n), \partial D^u(i; a_1, \ldots, a_n))$, и из того, что $|x_l|<|\lambda_l|a_l$.

Аналогичным образом можно доказать, что для заданных $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, α и ε существует такая последовательность $(a_1, \ldots, a_m)$ и $N_s>0$, что для любого дополнения $(a_1, \ldots, a_n)$ набора $(a_1, \ldots, a_m)$, для которого $g^-(a_{m+1}, \ldots, a_n)>(1-\alpha)\times\times|\lambda_m|^{-1}a_m$, выполнены условия (I), (II) и (IV) из леммы (3.2.1)[1]).

Зафиксируем такую последовательность $(a_1, \ldots, a_m)$. Пусть $c_{m+1}, \ldots, c_n$ — такие положительные константы, что всякий раз, когда $a_i>c_i$ для всех i, $m+1\leqslant i\leqslant n$, отсюда вытекает неравенство $g^-(a_{m+1}, \ldots, a_n)>(1-\alpha)\cdot|\lambda_m|^{-1}\cdot a_m$. В качестве $a_{m+1}, \ldots, a_n$ рассмотрим такие величины, для которых $a_i>c_i$ и наборы $(a_{m+1}, \ldots, a_n)$, $(N_{m+1}, \ldots, N_n)$ удовлетворяют системе (*′); система (*′) получается из (*) заменой неравенства $(c_{l,1})$ на следующее неравенство:

$$\min\left\{g^+(a_1, \ldots, a_m)\cdot\frac{1}{|\lambda_l|^{i+1}}, (1-\alpha)\cdot\frac{|\lambda_{m+1}|^{i+1}}{|\lambda_l|^{i+1}}\cdot a_{m+1}, \ldots\right.$$
$$\left.\ldots, (1-\alpha)\cdot\frac{|\lambda_{l-1}|^{i+1}}{|\lambda_l|^{i+1}}\cdot a_{l-1}, (1-\alpha)\cdot a_l\right\}>C\frac{a_l}{N_l-N_{l-1}}.$$

Соответствующие изменения необходимо произвести в неравенстве (c_l).

Это изменение необходимо для того, чтобы скомпенсировать отсутствие в дальнейшем предположения о том, что $g^+(a_1, \ldots, a_m)>(1-\alpha)\cdot|\lambda_{m+1}|\cdot a_{m+1}$; теперь мы не могли бы использовать это неравенство, поскольку мы уже сделали

[1]) Имеется в виду, что для любого $q_-\in O^s(N_s; a_1, \ldots, a_n)$ можно построить соответствующую (отрицательную) ε-возмущенную последовательность, а по ней — диффеоморфизм $\varphi\in\mathrm{Diff}^1_\omega(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющий условиям (II), (IV) и

$$\operatorname{supp}(\varphi-\mathrm{id})\subset\bigcup_{\nu=0}^{N_s-1}D^s(\nu; a_1, \ldots, a_n).$$

— *Прим. ред.*

другое предположение, что $a_{m+1} > c_{m+1}$. Заменив систему $(*)$ на $(*')$, мы достигаем, что левая часть неравенства (c_l) в $(*')$ по-прежнему является оценкой снизу для расстояния $\rho(O^u(i; a_1, \ldots, a_n), \partial D^u(i; a_1, \ldots, a_n))$, а это является существенным моментом в построении ε-возмущенных последовательностей.

Решение системы $(*')$ строится так же, как для $(*)$ (заметим, что при решении системы $(*')$ величины $a_1, \ldots, a_m$ зафиксированы). Очевидно, что если наборы $(a_{m+1}, \ldots, a_n)$, $(N_{m+1}, \ldots, N_n)$ являются решением, то число $N = \max(N_s, N_n + 1)$ и набор $(a_1, \ldots, a_n)$ обладают всеми требуемыми свойствами. Лемма (3.2.1) доказана.

Доказательство леммы (3.2). (*Заключительная часть*). Мы начнем с двух замечаний:

1. Если набор $(a_1, \ldots, a_n)$, N является решением леммы (3.2.1), то для любого $\varkappa > 0$ набор $(\varkappa a_1, \ldots, \varkappa a_n)$, N также является решением леммы (3.2.1) для той же функции f.

2. Случай, когда отображение f линейно и не имеет кратных собственных значений, но среди собственных значений есть комплексные числа, сводится к лемме (3.2.1) с помощью следующей модификации. Для каждой пары комплексно сопряженных собственных значений $\lambda_{\pm} = a \pm bi$ рассмотрим линейную комплексную собственную функцию z (т. е. $z \circ f = (a \pm bi) \cdot z$). Для каждого вещественного собственного значения рассмотрим линейную вещественную собственную функцию. Множество этих собственных функций поставим в виде системы координат в $\mathbb{R}^n$. Таким образом, единственное отличие заключается в том, что некоторые пары вещественных координатных функций заменяются на комплекснозначную функцию: это не создает препятствий при доказательстве леммы (3.2.1).

Лемма (3.2) вытекает из леммы (3.2.1), приведенных двух замечаний и доказательства леммы (3.1.2).

§ 4. ГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ

Рассмотрим снова многообразие M с симплектической структурой, заданной с помощью формы ω. Пусть $\mathscr{X}^1_\omega(M)$ — пространство таких гамильтоновых векторных полей X класса C^1 на M, для которых форма [1] $i_X\omega$ является дифференциалом глобально определенной функции (энергии) H; мы будем рассматривать такие векторные поля только на связных компактных компонентах множеств уровня энергии (т. е. уровня

[1] i_X — знак внутреннего умножения на вектор X. — *Прим. ред.*

функции H); более подробно по этому поводу см. [1, 16] [1]). Пусть $X \in \mathscr{X}^1_\omega(M)$, через $\mathscr{D}_X$ обозначается соответствующий поток, т. е. такое отображение $\mathscr{D}_X\colon M \times \mathbb{R} \to M$, что $\mathscr{D}_X(m, 0) = m$ и кривая $t \to \mathscr{D}_X(m, t)$ является траекторией векторного поля X, проходящей через точку m. Если многообразие M не компактно, то область определения $\mathscr{D}_X$ может не совпадать с многообразием $M \times \mathbb{R}$, однако она содержит окрестность множества $M \times \{0\}$.

Вместо периодических точек с устойчивыми и неустойчивыми многообразиями мы теперь рассматриваем замкнутые интегральные кривые. *Замкнутой интегральной кривой* называется множество $\gamma \subset M$ вида $\gamma = \mathscr{D}_X(m, [0, t))$, где $\mathscr{D}_X(m, 0) = \mathscr{D}_X(m, t)$, $t > 0$ и для $t' \in (0, r)$ точка $\mathscr{D}_X(m, t')$ не совпадает с m. Число t называется периодом кривой γ. Чтобы изучить поведение потока вблизи такой замкнутой орбиты, мы построим соответствующее *отображение Пуанкаре*. Пусть $m \in \gamma$; рассмотрим такое маленькое подмногообразие $\Sigma \ni m$, которое содержится в H-уровне кривой γ (т. е. в множестве $H^{-1}(H(\gamma))$), имеет коразмерность 1 на этом уровне и трансверсально полю X. Отображение Пуанкаре $P(\gamma, \Sigma)$, ассоциированное с γ и Σ, определенное на некоторой окрестности точки m в Σ, ставит в соответствие точке $m' \in \Sigma$ первую точку пересечения интегральной кривой (в положительном

[1]) Как известно, вне критических точек функции H на этих множествах уровня (которые вне этих точек являются подмногообразиями коразмерности 1) имеется инвариантная мера μ, которую можно описать, например, так. Введем какую-нибудь вспомогательную риманову метрику g на M, и пусть $d\sigma_i$ — элемент соответствующей i-мерной меры, а $|\operatorname{grad} H|$ — длина контравариантного вектора градиента H по отношению к этой метрике (он определяется из условия $g(X, \operatorname{grad} H) = dH(X)$ для всех касательных векторов X), или, что то же самое, норма dH как функционала на касательных векторах в данной точке. Представим элемент объема $\omega^{n/2}$ $(n = \dim M)$ в виде $\rho d\sigma_n$; тогда $d\mu = \dfrac{\rho\, d\sigma_{n-1}}{|\operatorname{grad} H|}$.

Фактически в дальнейшем требуется, чтобы мера μ рассматриваемой компоненты уровня энергии (с выкинутыми критическими точками, если они там есть) была конечной. (На этом основаны рассуждения с отображением возвращения.) Простейший способ обеспечить конечность μ — рассматривать компактные компоненты, не содержащие критических точек функции H. Это второе условие — отсутствие критических точек — Такенс добавляет к первому (компактность) в конце параграфа, но по другой причине: оно гарантирует, что данная компактная компонента уровня $H = c$ мало изменяется при малом изменении H и c. В свете сказанного выше это второе условие (как и первое) целесообразно с самого начала считать выполненным. (При наличии же на компактной компоненте критических точек конечность или бесконечность μ, как видно из приведенной формулы для $d\mu$, зависела бы от характера этих точек. Правда, «типичные» или «невырожденные» критические точки H, возле которых $|\operatorname{grad} H|$ в точности первого порядка малости, не помешали бы конечности μ (в рассматриваемых размерностях $n \geqslant 4$). — *Прим. ред.*

направлении) поля X, проходящей через точку m', с подмногообразием Σ. Форма ω индуцирует симплектическую структуру на Σ, а отображение $P(\gamma, \Sigma)$ сохраняет эту структуру (см. [2]).

Отображение $P(\gamma, \Sigma)$ является диффеоморфизмом окрестности точки m на Σ в Σ, точка m неподвижна относительно $P(\gamma, \Sigma)$. Если точка m — гиперболическая неподвижная точка для отображения $P(\gamma, \Sigma)$, то кривая γ называется *гиперболической замкнутой интегральной кривой* (это определение не зависит от выбора Σ). Устойчивым (соответственно, неустойчивым) многообразием $W^s_X(\gamma)$ (соответственно $W^u_X(\gamma)$) кривой γ называется объединение всех интегральных кривых поля X, проходящих через точки устойчивого (соответственно неустойчивого) многообразия точки m относительно диффеоморфизма $P(\gamma, \Sigma)$.

Приступим теперь к построению отображения возвращения для кривой γ. Пусть D — такое замкнутое подмножество Σ, содержащее точку m в своей внутренности, что D содержится в областях определения отображений $P(\gamma, \Sigma)$ и $(P(\gamma, \Sigma))^{-1}$, причем $D^u \cap D^s = \varnothing$, где $D^u = P(\gamma, \Sigma)(D) \setminus D$ и $D^s = (P(\gamma, \Sigma))^{-1}(D) \setminus D$. Пусть $m' \in D^u$ и $t > 0$ — наименьшее положительное число, для которого $\mathscr{D}_X(m', t) \in D^s$: тогда $R(X, D)(m') = \mathscr{D}_X(m', t)$.

Если кривая γ содержится в компактной компоненте H-уровня для γ, то (по аналогии с § 2) отображение возвращения определено на множестве D^u за вычетом некоторого множества меры нуль и сохраняет меру (мера на подмногообразии индуцирована формой $\omega|\Sigma$).

В дальнейшем удобно аппроксимировать в окрестности некоторой точки поле X в C^1-топологии с помощью гамильтонового векторного поля класса C^∞. Такая аппроксимация эквивалентна C^2-аппроксимации функции H (функции энергии для поля X) с помощью C^∞-функции. Поскольку можно построить вторую аппроксимацию, то существует и первая. (Из-за того что подобная аппроксимация возможна в гамильтоновом случае и невозможна в случае сохранения меры, — по крайней мере я не знаю такой аппроксимационной теоремы,— мы исследуем только гамильтоновы системы.) Сформулируем теперь модифицированный вариант леммы (3.1) и приведем набросок доказательства.

Лемма (3.1)′. *Пусть X — гамильтоново векторное поле класса C^∞ на 4-мерном симплектическом многообразии M^4 с функцией энергии H, γ — гиперболическая замкнутая кривая, и Σ — сечение для γ, $\Sigma \cap \gamma = m$. Пусть также $P(\gamma, \Sigma)$ — отображение Пуанкаре, точка $q \in \Sigma$ лежит на неустойчивом мно-*

гообразии точки m, неподвижной и гиперболической относительно отображения $P(\gamma, \Sigma)$, и U, V — окрестности точки q и поля X соответственно в пространствах Σ и $\mathscr{X}^1_\omega(M)$. Тогда существует такое произвольно малое замкнутое множество $D \subset \Sigma$, содержащее точку m в своей внутренности и содержащееся в областях определения отображений $P(\gamma, \Sigma)$ и $(P(\gamma, \Sigma))^{-1}$, для которого $D^u \cap D^s = \varnothing$:

$$D^u = P(\gamma, \Sigma)(D) \setminus D \quad \text{и} \quad D^s = (P(\gamma, \Sigma))^{-1}(D) \setminus D).$$

Кроме того, существуют открытые множества $O^u \subset D^u$ и $O^s \subset D^s$, для которых

(I) $(P(\gamma, \Sigma))^n (O^u) \subset U$ *при некотором* $n > 0$,

(II) $\mu(O^u) + \mu(O^s) > \mu(D^u) = \mu(D^s)$,

(III) *для любой пары точек $v_u \in O^u$ и $v_s \in O^s$ найдется такое векторное поле $X' \in V$, что*

(a) *γ — гиперболическая замкнутая кривая для поля X',*

(b) $W^u_{X'}(\gamma) \ni v_u$, $W^s_{X'}(\gamma) \ni v_s$,

(c) *носитель поля $(X - X')$ содержится в множестве $\mathscr{D}_X\left(D, \left[-\frac{1}{2}t, 0\right]\right)$, где t — период кривой γ.*

Доказательство. Поскольку $P(\gamma, \Sigma)$ — сохраняющее площадь C^∞-отображение с гиперболической неподвижной точкой, то существуют такие C^∞-координаты x, y на Σ, для которых $\omega|\Sigma = dx \wedge dy$, многообразие $W^u_{P(\gamma, \Sigma)}(m)$ локально записывается в виде $\{(x, y) \mid y = 0\}$ и отображение $P(\gamma, \Sigma)$ локально линейно на многообразии $W^u_{P(\gamma, \Sigma)}(m)$.

Это утверждение, доказанное Стернбергом (см. [15]), показывает, что в данной ситуации нет необходимости строить такое возмущение диффеоморфизма f, как в лемме (3.1.3). После этого замечания доказательство леммы (3.1)$'$ проводится аналогично доказательству леммы (3.1) с использованием аналога леммы о возмущении из § 3. Это означает, что нужно уметь индуцировать требуемые возмущения отображения Пуанкаре с помощью малых возмущений векторного поля на множестве $\mathscr{D}_X\left(D, \left[-\frac{1}{2}t, 0\right]\right)$. По этому поводу см. [16].

Теорема 1$'$. *Пусть M^4 — 4-мерное симплектическое многообразие с симплектической формой ω, $X \in \mathscr{X}^1_\omega(M)$ — гамильтоново векторное поле с функцией энергии H и m — точка на гиперболической замкнутой интегральной кривой γ поля X, причем точка m лежит в компактной компоненте множества $H^{-1}(H(m))$. Тогда для любой точки $q \in W^u_X(\gamma)$ и любых окрестностей $U \ni q$ на многообразии M и $V \ni X$ в пространстве*

$\mathscr{X}^1_\omega(M)$ существует такое векторное поле $X' \in V$, что точка m лежит на гиперболической замкнутой интегральной кривой γ' поля X', причем $W^u_{X'}(\gamma') \cap W^s_{X'}(\gamma') \cap U \neq \varnothing$.

Доказательство. Построим сначала такое гамильтоново векторное поле $X'' \in V$ класса C^∞, что точка m лежит на гиперболической замкнутой интегральной кривой поля X'' и содержится в компактной компоненте множества $H^{-1}(H(m))$. После этого теорема 1′ доказывается с помощью леммы (3.1)′ теми же методами, что и теорема 1.

Теорема 2′. *Пусть M — симплектическое многообразие с симплектической формой ω, H — функция энергии для векторного поля $X \in \mathscr{X}^1_\omega(M)$ и $m \in M$ — точка на гиперболической замкнутой интегральной кривой γ поля X, лежащая в компактной компоненте множества $H^{-1}(H(m))$. Тогда для любой окрестности V поля X в пространстве $\mathscr{X}^1_\omega(M)$ существует такое векторное поле $X' \in V$, что точка m лежит на гиперболической замкнутой интегральной кривой γ' поля X', причем пересечение $W^u_{X'}(\gamma') \cap W^s_{X'}(\gamma')$ содержит точки, не лежащие на кривой γ'.*

Доказательство теоремы 2′ получается из доказательства теоремы 2 так же, как для теорем 1′ и 1. Перед тем как сформулировать аналоги следствий 3 и 4, нам придется ввести еще одно понятие.

Пусть M — симплектическое многообразие с симплектической формой ω, и X — гамильтоново векторное поле иа многообразии M с функцией энергии H. Пусть $m \in M$ и связная компонента множества $H^{-1}(H(m))$, содержащая точку m, компактна, причем функция H не имеет критических точек в этой компоненте. В такой ситуации мы будем говорить, что *точка m лежит устойчиво на компактном многообразии уровня энергии векторного поля X*. Если $X' \in \mathscr{X}^1_\omega(M)$ — векторное поле, C^1-близкое к X, то точка m также лежит устойчиво на компактном многообразии уровня энергии поля X'.

Следствия 3′ и 4′. *Пусть M — 4-мерное (соответственно n-мерное) симплектическое многообразие с симплектической формой ω, $X \in \mathscr{X}^1_\omega(M)$, и точка $m \in M$ лежит устойчиво на компактном многообразии уровня энергии векторного поля X. Тогда существует такая окрестность $V \ni X$ в пространстве $\mathscr{X}^1_\omega(M)$, что для любого векторного поля $X' \in V$ точка m лежит устойчиво на компактном многообразии уровня энергии поля X'; кроме того, существует такое подмножество второй* *категории* $R \subset V$, *что для любого векторного поля* $X' \in R$ *и любой гиперболической замкнутой интегральной кривой* γ *поля* X', *содержащейся в компактном многообразии уровня энергии для точки* m, *пересечение* $W^u_{X'}(\gamma) \cap W^s_{X'}(\gamma)$ *плотно в множествах* $W^u_{X'}(\gamma)$ *и* $W^s_{X'}(\gamma)$ (*соответственно содержит точки, не принадлежащие* γ).

Эти следствия вытекают из теорем 1′ и 2′, доказательство проводится аналогично доказательству следствий 3 и 4.

§ 5. ТИПИЧНЫЕ СВОЙСТВА СОХРАНЯЮЩИХ МЕРУ АВТОМОРФИЗМОВ КЛАССА C^1 КОМПАКТНОГО ДВУМЕРНОГО МНОГООБРАЗИЯ

В этом параграфе M обозначает компактное двумерное многообразие с формой ω, задающей элемент объема (площади); там, где это необходимо, мы также предполагаем, что многообразие M снабжено некоторой фиксированной метрикой. Сначала мы приведем список известных типичных свойств в пространстве $\mathrm{Diff}^1_\omega(M)$. Если мы говорим, что типичный диффеоморфизм $\varphi \in \mathrm{Diff}^1_\omega(M)$ обладает свойством Q, то имеется в виду следующее: существует такое подмножество второй категории $R \subset \mathrm{Diff}^1_\omega(M)$, что любой диффеоморфизм $\varphi \in R$ обладает свойством Q.

I. Множество периодических точек для типичного диффеоморфизма $\varphi \in \mathrm{Diff}^1_\omega(M)$ является всюду плотным на многообразии M (см. [8] и [9]).

II. Множество гиперболических периодических точек для типичного диффеоморфизма $\varphi \in \mathrm{Diff}^1_\omega(M)$ является всюду плотным на многообразии M; это вытекает из п. I и предложения из приложения этой статьи.

III. Для типичного диффеоморфизма $\varphi \in \mathrm{Diff}^1_\omega(M)$ устойчивые и неустойчивые многообразия пересекаются трансверсально, т. е. если p и q — гиперболические периодические точки диффеоморфизма φ, то многообразия $W^u_\varphi(p)$ и $W^s_\varphi(q)$ пересекаются во всех общих точках трансверсально (см. [12]).

IV. Для типичного диффеоморфизма $\varphi \in \mathrm{Diff}^1_\omega(M)$ и любой его гиперболической периодической точки p пересечение $W^u_\varphi(p) \cap W^s_\varphi(p)$ плотно в множествах $W^u_\varphi(p)$ и $W^s_\varphi(p)$; это в точности соответствует следствию 3 из § 1.

С этого момента выражение «типичный диффеоморфизм φ» означает, что диффеоморфизм φ обладает перечисленными четырьмя свойствами.

Замечание. Пусть диффеоморфизм $\varphi \in \mathrm{Diff}^1_\omega(M)$ обладает свойством IV и p — гиперболическая периодическая точка диффеоморфизма φ. Тогда существует сколь угодно малая замкнутая окрестность D, гомеоморфная кругу, для которой $p \in \mathrm{Int}(D)$ и $\partial D \subset (W^u_\varphi(p) \cup W^s_\varphi(p))$. Это утверждение является прямым следствием λ-леммы из [6].

Определение. Пусть p_1 и p_2 — гиперболические периодические точки типичного диффеоморфизма φ. Мы говорим, что *точка p_1 связана с точкой p_2*, если $W^u_\varphi(p_1) \cap W^s_\varphi(p_2) \neq \varnothing$.

Предложение (5.1). Связанность точек — отношение эквивалентности.

Доказательство. Пусть p_1, p_2, p_3 — гиперболические периодические точки типичного диффеоморфизма φ.

(a) Точка p_1 связана с собой в соответствии со свойством IV.

(b) Пусть точка p_1 связана с точкой p_2; мы покажем, что в этом случае точка p_2 также связана с точкой p_1. Предположим, что p_1 и p_2 — неподвижные точки диффеоморфизма φ; в противном случае рассмотрим вместо φ диффеоморфизм φ^k, где k — наименьшее общее кратное периодов точек p_1 и p_2.

Пусть $q \in W^u_\varphi(p_1) \cap W^s_\varphi(p_2)$. Тогда $\varphi^i(q) \to p_2$ при $i \to \infty$. С другой стороны, $\varphi^i(q) \in W^u_\varphi(p_1)$ для любого i; это означает, что множество $W^u_\varphi(p_1)$ подходит сколь угодно близко к точке p_2. Обозначим через D малую окрестность точки p_2, гомеоморфную кругу, не содержащую точку p_1 и такую, что $\partial D \subset W^s_\varphi(p_2) \cup W^u_\varphi(p_2)$ (см. замечание, приведенное выше). Как было показано, множество $W^u_\varphi(p_1)$ пересекается с внутренностью окрестности D. Поскольку пересечение $W^s_\varphi(p_1) \cap W^u_\varphi(p_1)$ плотно в множестве $W^u_\varphi(p_1)$, то множество $W^s_\varphi(p_1)$ также пересекается с окрестностью D. Следовательно, существует точка $r \in W^s_\varphi(p_1) \cap \partial D$. Точка r не может лежать на многообразии $W^s_\varphi(p_2)$ (это вытекает из определения устойчивого многообразия), поэтому $r \in W^u_\varphi(p_2)$. Это означает, что $r \in W^u_\varphi(p_2) \cap W^s_\varphi(p_1)$, следовательно, точка p_2 связана с точкой p_1.

(c) Предположим, что точка p_1 связана с p_2, а точка p_2 связана с p_3; мы покажем, что в этом случае точка p_1 связана с p_3.

Пусть D — окрестность точки p_3, гомеоморфная кругу, не содержащая точек p_1 и p_2 и такая, что $\partial D \subset W^u_\varphi(p_3) \cup W^s_\varphi(p_3)$. Как мы уже видели в пункте (b), многообразие $W^u_\varphi(p_2)$ пересекается с множеством $\operatorname{int}(D)$. Из трансверсальности пересечения многообразий $W_\varphi^u(p_1)$ и $W_\varphi^s(p_2)$, а также из λ-леммы в [6] вытекает, что многообразие $W_\varphi^u(p_1)$ также пересекается с внутренностью окрестности D. Теперь, используя рассуждения пункта (b), нетрудно показать, что точка p_1 связана с точкой p_3. Предложение доказано.

Определение. Пусть $\varphi \in \mathrm{Diff}^1_\omega(M)$ — типичный диффеоморфизм, и p — гиперболическая периодическая точка диффеоморфизма φ. Замыкание множества всех гиперболических периодических точек диффеоморфизма φ, связанных с точкой p, называется *φ-ячейкой* точки p и обозначается $B_\varphi(p)$. Период множества $B_\varphi(p)$ — это наименьшее натуральное k, для которого $\varphi^k(B_\varphi(p)) = B_\varphi(p)$; такое число k всегда существует. Каждое замкнутое подмножество многообразия M, которое является φ-ячейкой для некоторой гиперболической периодической точки диффеоморфизма φ, называется φ-ячейкой.

Предложение (5.2). *Пусть $\varphi \in \mathrm{Diff}^1_\omega(M)$ — типичный диффеоморфизм и p — его гиперболическая периодическая точка. Тогда следующие множества совпадают: $\overline{W_\varphi^u(p)}$, $\overline{W_\varphi^s(p)}$, $B_\varphi(p)$ (черта сверху обозначает замыкание).*

Доказательство. Поскольку пересечение $W_\varphi^u(p) \cap W_\varphi^s(p)$ плотно в множествах $W_\varphi^u(p)$ и $W_\varphi^s(p)$, то множество $\overline{W_\varphi^u(p)}$ совпадает с $\overline{W_\varphi^s(p)}$.

При доказательстве предложения (5.1) мы убедились, что любая гиперболическая периодическая точка p', связанная с p, содержится в замыкании многообразия $W_\varphi^u(p)$; следовательно, $B_\varphi(p) \subset \overline{W_\varphi^u(p)}$.

Таким образом, остается показать, что $B_\varphi(p) \supset \overline{W_\varphi^u(p)}$, т. е. нужно доказать, что сколь угодно близко к заданной точке $r \in W_\varphi^u(p)$ находится гиперболическая периодическая точка p', связанная с p.

Мы знаем, что существует точка $r' \in W_\varphi^u(p) \cap W_\varphi^s(p)$, сколь угодно близкая к точке r. Из результатов Смейла, связанных с известным примером — подковой Смейла (см., например, [13]), вытекает, что точка r' содержится в замкнутом множестве Λ, для которого существует такое натуральное N, что

(I) множество Λ инвариантно относительно диффеоморфизма φ^N,

(II) гиперболические периодические точки диффеоморфизма $\varphi^N | \Lambda$ плотны в Λ,

(III) Λ — гиперболическое множество для диффеоморфизма φ^N (см. [4]).

Из этого утверждения, а также из обобщенной теоремы об устойчивых многообразиях (см. [4]) следует, что существует такая окрестность $\Lambda' \ni r'$ в множестве Λ, для которой все периодические точки диффеоморфизма φ^N, содержащиеся в окрестности Λ', связаны с p. Предложение доказано[1]).

Определение. Пусть X — топологическое пространство и T: $X \to X$ — гомеоморфизм. Гомеоморфизм T *топологически транзитивен*, если для любых открытых множеств $U, V \subset X$ существует такое натуральное i, что $\varphi^i(U) \cap V \neq \varnothing$. Гомеоморфизм T *топологически перемешивает*, если для любых открытых множеств U, $V \subset X$ существует такое i_0, что $\varphi^i(U) \cap \cap V \neq \varnothing$ для любого $i \geqslant i_0$.

Замечание. Очевидно, что топологическое перемешивание влечет за собой топологическую транзитивность. Если X — сепарабельное полное метрическое пространство, то гомеоморфизм T топологически транзитивен тогда и только тогда, когда он обладает траекторией, плотной в X (см. [3]). Мы будем иметь дело только с сепарабельными полными метрическими пространствами, а именно мы будем рассматривать только φ-ячейки и все многообразие M.

---

[1]) Строго говоря, ссылка на Смейла здесь не вполне правильна, потому что в его пионерской работе, цитируемой в его обзоре [13], делались некоторые предположения, несколько упрощавшие исследование (или изложение?) — диффеоморфизм был класса C^∞ и главное в некоторой окрестности точки p в некоторых гладких координатах он был линейным. То что результат верен и без этих предположений, следует из позднейших работ других авторов. См. цитированные во вводной статье лекции Алексеева или книгу Нитецки, примечание Алексеева к теореме 4.2.

Вместо использования теоремы Смейла с этими позднейшими улучшениями можно провести следующее простое рассуждение. Перейдя, если потребуется, к некоторой степени диффеоморфизма φ, мы вправе считать точку p неподвижной. Траектория точки r' вместе с ее единственной предельной точкой — точкой p — образует гиперболическое множество F. При достаточно большом n точки $\varphi^{-n}r'$ и $\varphi^n r'$ будут очень близки друг к другу, поэтому получается замкнутая ε-траектория

$$\varphi^n r', \varphi^{-n} r', \varphi^{-n+1} r', \ldots, \varphi^i r', \varphi^{i+1} r', \ldots, \varphi^n r',$$

лежащая в гиперболическом множестве F. По теореме о семействах ε-траекторий для всех достаточно больших n возле этих ε-траекторий существуют настоящие периодические траектории; при $n \to \infty$ они целиком «прижимаются» к F. Нетрудно убедиться, что объединение F и этих траекторий (с достаточно большими n) тоже является гиперболическим множеством. Теперь, как у Такенса, остается сослаться на стандартные результаты об устойчивых и неустойчивых инвариантных многообразиях для гиперболических множеств. — *Прим. ред.*

Предложение (5.3). *Пусть $\varphi \in \mathrm{Diff}^1_\omega(M)$ — типичный диффеоморфизм и B — φ-ячейка с периодом k. Тогда гомеоморфизм $\varphi^k | B$ топологически перемешивает (и, следовательно, топологически транзитивен).*

Доказательство. Пусть U и V — открытые подмножества в B. Рассмотрим произвольную гиперболическую периодическую точку $q \in V$. Пусть период точки q по отношению к отображению φ^k равен m. Обозначим $q_0 = q$, $q_1 = \varphi^k(q)$, $q_2 = \varphi^{2k}(q)$, ..., $q_{m-1} = \varphi^{(m-1)k}(q)$.

Так как $q_i \in B$, то $B = B_\varphi(q_i)$; следовательно, $W^s_{\varphi^k}(q_i) \cap \cap U \neq \varnothing$ для $i = 0, 1, \ldots, m-1$. Отсюда вытекает, что существует такое i_0, для которого $\varphi^{imk}(U) \cap V \neq \varnothing$ при $i > i_0$.

Имеем $q_1 \in \varphi^k(V)$, поэтому в соответствии с тем же рассуждением существует такое i_1, для которого $\varphi^{imk}(U) \cap \cap \varphi^k(V) \neq \varnothing$ при $i > i_1$, или в эквивалентиой форме $\varphi^{(im-1)k}(U) \cap V \neq \varnothing$. Аналогично, существуют такие $i_2, \ldots, i_{m-1}$, для которых $\varphi^{(im-j)k}(U) \cap V \neq \varnothing$ при $i > i_j$. Следовательно, $\varphi^{ik}(U) \cap V \neq \varnothing$ при

$$i > m \cdot [\max\{i_0, i_1, \ldots, i_{m-1}\}].$$

Предложение (5.4). *Пусть $\varphi \in \mathrm{Diff}^1_\omega(M)$ — типичный диффеоморфизм. Тогда гомеоморфизм φ топологически транзитивен в том и только в том случае, когда $M = \bigcup_{i=0}^{k-1} \varphi^i(B)$ для любой φ-ячейки B с периодом k. Гомеоморфизм φ топологически перемешивает тогда и только тогда, когда многообразие M является φ-ячейкой.*

Доказательство. Достаточность приведенных условий очевидным образом вытекает из предложения (5.3). Сначала мы покажем, что если φ-траектория точки $q \in M$ всюду плотна и p — гиперболическая периодическая точка для диффеоморфизма φ, то $q \in \varphi^i(B_\varphi(p))$ для некоторого i. Чтобы доказать это, покажем, что для каждого $\varepsilon > 0$ точка q содержится в ε-окрестности множества $\bigcup_{i=1}^{k} \varphi_i(B_\varphi(p)) = \widetilde{B}$, где k — период множества $B_\varphi(p)$. Пусть $\delta(\varepsilon)$ — наименьшая площадь ε-окрестности для произвольной точки на многообразии M. Такое число $\delta(\varepsilon)$ существует и положительно, поскольку многообразие M компактно. Рассмотрим теперь такую окрестность $D \ni p$, площадь которой меньше, чем $\delta(\varepsilon)$, причем $\partial D \subset \subset W^u_\varphi(p) \cup W^s_\varphi(p)$. Поскольку траектория точки q всюду плотна, существует такое i, что $\varphi^i(q) \in D$ или $q \in \varphi^{-i}(D)$.

Так как $\partial D \subset W^u_\varphi(p) \cup W^s_\varphi(p) \subset \widetilde{B}$, то $\partial\varphi^{-i}(D) \subset \widetilde{B}$, поэтому расстояние от точки q до множества $\widetilde{B}$ меньше, чем расстояние от точки q до множества $\partial\varphi^{-i}(D)$. Поскольку площадь окрестности $\varphi^{-i}(D)$ равна площади D, которая меньше $\delta(\varepsilon)$, то расстояние от точки q до границы $\partial\varphi^{-i}(D)$ меньше ε. Следовательно, точка q лежит в ε-окрестности множества $\widetilde{B}$. Так как это выполнено для любого $\varepsilon > 0$, то $q \in \widetilde{B}$. Этот факт справедлив для любой точки всюду плотной φ-траектории $\{\varphi^i(q)\}_{i=-\infty}^{\infty}$, поэтому $\widetilde{B} = M$. Отсюда вытекает, что если типичный диффеоморфизм φ топологически транзитивен, то $\bigcup\limits_{i=1}^{k} \varphi^i(B) = M$ для любой φ-ячейки B периода k.

Предположим теперь, что диффеоморфизм φ топологически перемешивает. Пусть p — некоторая гиперболическая периодическая точка диффеоморфизма φ, $B_\varphi(p)$ — ее φ-ячейка и k — период $B_\varphi(p)$. Мы уже показали, что $\bigcup\limits_{i=1}^{k} \varphi^i(B_\varphi(p)) = M$. Поэтому нам остается доказать, что $k = 1$. Пусть $k > 1$, тогда $\varphi(p) \notin B_\varphi(p)$ (поскольку из $\varphi(p) \in B_\varphi(p)$ вытекало бы, что $\varphi(B_\varphi(p)) = B_\varphi(p)$ и $k = 1$) и $p \notin B_\varphi(\varphi(p))$. Построим такие окрестности $D_1 \ni p$ и $D_2 \ni \varphi(p)$, для которых $\partial D_1 \subset \subset W^u_\varphi(p) \cup W^s_\varphi(p)$ и $\partial D_2 \subset W^u_\varphi(\varphi(p)) \cup W^s_\varphi(\varphi(p))$. Тогда [1] $\varphi^{ki}(\operatorname{Int}(D_1)) \cap \operatorname{Int}(D_2) = \varnothing$, поэтому диффеоморфизм φ не перемешивает. Следовательно, предположение $k > 1$ приводит к противоречию. Значит, $k = 1$ и $B_\varphi(p) = M$.

Две открытые проблемы. I. Что можно сказать о количестве ячеек для типичного диффеоморфизма? Другими словами, пусть $R \subset \operatorname{Diff}^1_\omega(M)$ — множество типичных диффеморфизмов (т. е. диффеоморфизмов, обладающих свойствами I, II, III, IV) и пусть $k = 1, 2, \ldots, \infty$. Для каждого k возникает следующая проблема: существуют ли такое открытое множество $W_k \subset R$ и такое множество второй категории $R_k \subset W_k$, что любой диффеоморфизм $\varphi \in R_k$ имеет ровно k различных φ-ячеек?

Известно, что если $M = \mathbb{T}^2$, то множество W_1 непусто (поскольку сохраняющие меру У-диффеоморфизмы содержатся в множестве $\operatorname{Diff}^1_\omega(\mathbb{T}^2)$). Известно также, что топологическая транзитивность и топологическое перемешивание не являются

---

[1] Поскольку в противном случае $\varphi^{kl}(\partial D_1) \cap \partial D_2 \neq \varnothing$, а значит, $W^u_\varphi(p) \bigcup W^s_\varphi(p)$ пересекалось бы с $W^u_\varphi(\varphi(p)) \cup W^s_\varphi(\varphi(p))$. — *Прим. ред.*

типичными свойствами в случае диффеоморфизмов достаточно высокой гладкости; это вытекает из теоремы Мозера о кольце (см. [5]). В C^1-случае эта теорема неверна (см. [17]), поэтому может оказаться, что топологическое перемешивание является типичным свойством в пространстве $\mathrm{Diff}^1_\omega(M)$.

II. Некоторые технические рассуждения в этой статье можно было бы упростить, если бы следующее утверждение (которое мы хотим сформулировать здесь в качестве гипотезы) было справедливо.

Утверждение (?). *Пусть многообразие M обладает элементом объема или симплектической структурой, заданной с помощью формы ω и $\varphi \in \mathrm{Diff}^1_\omega(M)$. Тогда для любых двух открытых множеств U, $V \subset M$, $\overline{U} \subset V$ и любой окрестности $W \ni \varphi$ в пространстве $\mathrm{Diff}^1_\omega(M)$ существует такой диффеоморфизм $\bar{\varphi} \in W$, для которого $\varphi | M \setminus V = \bar{\varphi} | M \setminus V$ и диффеоморфизм $\bar{\varphi} | U$ принадлежит классу C^∞.*

Справедливость соответствующего утверждения для векторных полей из пространства $\mathscr{X}^1_\omega(M)$ известна только в том случае, когда ω — симплектическая форма (см. также § 4). Затруднения здесь происходят из следующего факта: если α — i-форма класса C^k, причем $d\alpha = 0$, то существует такая $(i-1)$-форма β класса C^{k-1}, что $d\beta = \alpha$; только в случае $i = 1$ мы знаем, что функция β принадлежит классу C^{k+1}.

Замечание. После ознакомления с этой статьей Дж. Мозер сообщил мне, что ему удалось доказать приведенное аппроксимационное утверждение для симплектических отображений (используя производящие функции) и для сохраняющих меру потоков (используя свертки).

ПРИЛОЖЕНИЕ

В этом приложении мы докажем следующее.

Предложение. *Пусть диффеоморфизм $f\colon (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$ содержится в пространстве $\mathrm{Diff}^1_\omega(\mathbb{R}^2)$, $\omega = dx \wedge dy$, и точка 0 является неподвижной эллиптической точкой диффеоморфизма f_2, т. е. собственные значения отображения $df | T_0\mathbb{R}^2$ лежат на единичной окружности. Тогда для любой окрестности $U \ni 0$ на плоскости $\mathbb{R}^2$ и любой окрестности $V \ni f$ в пространстве $\mathrm{Diff}^1_\omega(\mathbb{R}^2)$ существует такой диффеоморфизм $\bar{f} \in V$, для которого:*

(I) $\mathrm{supp}\,(f - \bar{f}) \subset U$,

(II) *диффеоморфизм $\bar{f}$ имеет гиперболическую точку в окрестности U.*

Аналогичное утверждение справедливо в том случае, когда диффеоморфизм f определен только в некоторой окрестности начала координат. Перед доказательством этого утверждения сформулируем и докажем следующую лемму.

Вторая лемма о возмущении. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\delta(\varepsilon)$, *что для каждого линейного отображения* $\varkappa$: $(\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$, $\varkappa \in \mathrm{Diff}^1_\omega(\mathbb{R}^2)$, *для которого* $\|\varkappa - \mathrm{id}\|_1 < \delta(\varepsilon)$, *и для любого* $r > 0$ *найдется такой диффеоморфизм* $\varphi_{\varkappa, r} = \varphi \in \mathrm{Diff}^1_\omega(\mathbb{R}^2)$, *что*

(a) $\varphi(0) = 0$,
(b) $d\varphi(0) = d\varkappa(0)$,
(c) $\|\varphi - \mathrm{id}\|_1 < \varepsilon$,
(d) $\mathrm{supp}(\varphi - \mathrm{id}) \subset \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < r\}$

(*по поводу обозначения* $\| \dots \|_1$ *см.* § 1).

Доказательство второй леммы о возмущении. Для каждого линейного отображения $\varkappa \in \mathrm{Diff}^1_\omega(\mathbb{R}^2, 0)$, близкого (т. е. C^1-близкого) к тождественному, существует единственный однородный многочлен второй степени $H_\varkappa$, C^2-близкий к нулю, для которого отображение $\varkappa$ является сдвигом на время 1 по траекториям симплектического векторного поля

$$X_{H_\varkappa} = \frac{\partial H_\varkappa}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial H_\varkappa}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial y}.$$

Пусть λ: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — функция класса C^∞, для которой $\lambda\left(\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]\right) = 1$ и $\lambda([1, +\infty)) = 0$. Для каждого линейного отображения $\varkappa \in \mathrm{Diff}^1_\omega(\mathbb{R}^2)$, близкого к тождественному, мы рассмотрим в качестве диффеоморфизма $\varphi_\varkappa$ сдвиг на время 1 по траекториям векторного поля

$$X_{\widetilde{H}_\varkappa} = \frac{\partial \widetilde{H}_\varkappa}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \widetilde{H}_\varkappa}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial y},$$

где $\widetilde{H}_\varkappa(x, y) = \lambda(x^2 + y^2) \cdot H_\varkappa(x, y)$. Легко видеть, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, для которого из неравенства $\|\varkappa - \mathrm{id}\|_1 < \delta(\varepsilon)$ вытекает неравенство $\|\varphi_\varkappa - \mathrm{id}\|_1 < \varepsilon$.

Положим окончательно

$$\varphi_{\varkappa, r} = (r \cdot \mathrm{id}) \cdot \varphi_\varkappa \cdot (r^{-1} \cdot \mathrm{id}).$$

Теперь лемма вытекает из того, что

$$\|\varphi_\varkappa - \mathrm{id}\|_1 = \|((r \cdot \mathrm{id}) \cdot \varphi_\varkappa \cdot (r^{-1} \cdot \mathrm{id})) - \mathrm{id}\|_1.$$

Доказательство предложения. Заменим сначала f на такой диффеоморфизм $f_1 \in V$, для которого

$$\mathrm{supp}(f - f_1) \subset U,$$

причем начало координат является эллиптической неподвижной точкой для f_1 с „рациональным вращением“, т. е. собственные значения отображения $df_1(0)$ можно записать в виде $e^{\pm \frac{l}{k} 2\pi i}$, где k и l — взаимно простые натуральные числа. Такой диффеоморфизм f_1 существует согласно второй лемме о возмущении.

Рассмотрим точку $p_t = (t, 0) \in \mathbb{R}^2$. Для малых положительных t мы имеем следующие оценки:

(a) существует такое $A > 0$, что $\rho\left(f_1^i(p_t), p_t\right) \geqslant A \cdot t$ при $i = 1, 2, \ldots, k-1$,

(b) $\rho\left(f_1^k(p_t), p_t\right) \leqslant t \cdot D(t)$, где $D(0) = 0$ и D — непрерывная функция,

(c) $\left\| df_1^k(p_t) - \mathrm{id} \right\|_1 \leqslant \bar{D}(t)$, где $\bar{D}(0) = 0$ и $\bar{D}$ — непрерывная функция (мы используем здесь канонические изоморфизмы $T_{p_t}\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 = T_{f_1^k(p_t)}\mathbb{R}^2$, чтобы отождествить дифференциал df_1^k с линейным автоморфизмом плоскости $\mathbb{R}^2$).

Пусть ε таково, что если $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{Diff}^1_\omega(\mathbb{R}^2)$, $\mathrm{supp}(\varphi_i - \mathrm{id}) \subset U$ и $\|\varphi_i - \mathrm{id}\|_1 < \varepsilon$, то $\varphi_2 \cdot \varphi_1 \cdot f \in V$.

Пусть C — константа, введенная в лемме о возмущении из § 3 для выбранного выше ε, и $\delta(\varepsilon)$ найдено для ε из второй леммы о возмущении. Выберем теперь настолько малое $t > 0$, что $C \cdot t \cdot D(t) < A \cdot t$ (см. приведенные выше оценки), причем существует линейное отображение $\varkappa \in \mathrm{Diff}^1_\omega(\mathbb{R}^2)$, для которого $\|\varkappa - \mathrm{id}\|_1 < \delta(\varepsilon)$ и отображение $\varkappa \cdot df_1^k(p_t)$ гиперболично. С этого момента число t фиксировано.

В соответствии с первой леммой о возмущений из § 3 существует такой диффеоморфизм $\varphi_1 \in \mathrm{Diff}^1_\omega(\mathbb{R}^2)$, для которого $\varphi_1\left(f_1^k(p_t)\right) = p_t$, множество $\mathrm{supp}(\varphi_1 - \mathrm{id})$ содержится в круге радиуса меньше $A \cdot t$ с центром в точке p_t, $\|\varphi_1 - \mathrm{id}\|_1 < \varepsilon$; в соответствии с замечанием, приведенным после доказательства первой леммы о возмущении (§ 3), мы можем предположить, что $df_1^k(p_t) = d\left(\varphi_1 f_1^k\right)(p_t)$. Поскольку носитель функции $(\varphi_1 - \mathrm{id})$ не содержит точек $f_1^i(p_t)$ при $i = 1, 2, \ldots, k-1$, мы видим, что в окрестности точки p_t диффеоморфизмы $\varphi_1 \cdot f_1^k$ и $(\varphi_1 \cdot f_1)^k$ совпадают, поэтому p_t — периодическая точка диффеоморфизма $\varphi_1 \cdot f_1$.

В соответствии со второй леммой о возмущении существует диффеоморфизм φ_2, для которого множество $\mathrm{supp}(\varphi_2 - \mathrm{id})$ содержится в круге радиуса меньше $A \cdot t$ с центром в точке p_t и $\|\varphi_2 - \mathrm{id}\|_1 < \varepsilon$, причем отображение $d(\varphi_2 \cdot \varphi_1 \cdot f_1)^k(p_t)$ гиперболично (и $(\varphi_2 \cdot \varphi_1 \cdot f_1)^k(p_t) = p_t$). Предложение доказано.

Список литературы

1. Abraham R., Marsden J., Foundations of mechanics, N. Y., Benjamin, 1967.
2. Arnold V. I., Avez A., Problèmes ergodiques de la mécanique classique, Paris, Gauthier-Villars, 1967.
3. Gottschalk W. H., Hedlund G. A., Topological dynamics, Amer. Math. Soc. colloquium publications XXXVI, 1955.
4. Hirsch M. W., Pugh C. C., Stable manifolds and hyperbolic sets, Global Analysis, Proc. Symp. in Pure Math., **14**, Amer. Math. Soc., Providence R. I., 1970, 133—165.
5. Moser J., On invariant curves of area-preserving mappings of an Annulus, Nachr. Akad. Wiss., Göttingen, Math.-Physik. Kl. IIa, № 1 (1962), 1—20. (Русский перевод с препринта: Мозер Ю., О кривых, инвариантных при отображениях кольца, сохраняющих площадь, сб. *Математика*, **6** : 5 (1962), 51—67.)
6. Palis J., On Morse — Smale dynamical systems, *Topology*, **8**, № 4 (1969), 385—404.
7. Pugh C. C., The closing lemma, *Amer. J. Math.*, **89**, № 4 (1967), 956—1009. (Русский перевод с препринта: Пью Ч., Лемма о замыкании, сб. *Математика*, **12** : 6 (1968), 80—135.)
8. Pugh C. C., An improved closing lemma and a general density theorem, Amer. J. Math., **89**, № 4 (1967), 1010—1021. (Русский перевод с препринта: Пью Ч., Усиление леммы о замыкании и теорема о плотности, сб. *Математика*, **12** : 6 (1968), 136—146.)
9. Pugh C. C., The Hamiltonian closing lemma, Международный конгресс математиков в Москве, 1966, Тезисы кратких научных сообщений, Секция 6, стр. 14.
10. Robinson R. C., A global approximation theorem for Hamiltonian systems, Global Analysis, Proc. Symp. in Pure Math., **14**, Amer. Math. Soc., Providence R. I., 1970.
11. Robinson R. C., Generic properties of conservative systems VII, *Amer. J. Math.*, **92**, № 3 (1970), 562—603.
12. Robinson R. C., Generic properties of conservative systems, *Amer. J. Math.*, **92**, № 4 (1970), 897—906.
13. Smale S., Differentiable dynamical systems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73 (1967), 747—817. (Русский перевод: Смейл С., Дифференцируемые динамические системы, *Успехи матем. наук*, **25**, № 1 (1970), 113—185.)
14. Smale S., Notes on differentiable dynamical systems, Global Analysis, Proc. Symp. in Pure Math., 14, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1970, 277—287.
15. Sternberg S., The stcructure of local diffeomorphisms III, *Amer. J. Math.*, 81, № 3 (1959), 578—604.
16. Takens F., Hamiltonian systems: generic properties of closed orbits and local perturbations, *Math. Ann.*, 188 (1970), 304—312.
17. Takens F., A C^1-counter example to Moser's Twist theorem, *Indag. Math.*, **33**, № 4 (1971), 379—386. (Русский перевод: Такенс Ф., Контрпример класса C^1 к теореме Мозера о кольце, в настоящем сборнике.)
18. Whitney H., Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **36** (1934), 63—89.

КОНТРПРИМЕР КЛАССА C^1 К ТЕОРЕМЕ МОЗЕРА О КОЛЬЦЕ[1])

Флорис Такенс

1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Рассмотрим двумерное многообразие $S^1 \times \mathbb{R}$ с координатными функциями φ (определенными по модулю 1) и r. Форма объема (или точнее площади) ω на $S^1 \times \mathbb{R}$ задается в виде $\omega = d\varphi \wedge dr$. Определим отображение Φ: $S^1 \times \mathbb{R} \to S^1 \times \mathbb{R}$ по формуле $\Phi(\varphi, r) = (\varphi + r, r)$. В этой работе мы будем рассматривать отображения $\tilde{\Phi}$: $S^1 \times \mathbb{R} \to S^1 \times \mathbb{R}$, которые близки к отображению Φ (в некоторой топологии), сохраняют форму ω (т. е. $\tilde{\Phi}^*(\omega) = \omega$) и для которых отображение $(\tilde{\Phi} \cdot \Phi^{-1})$ имеет компактный носитель. Если такое отображение $\tilde{\Phi} \in C^k$, то $\|\Phi - \tilde{\Phi}\|_k$ обозначает расстояние между Φ и $\tilde{\Phi}$ в C^k-метрике. Точнее,

$$\|\Phi - \tilde{\Phi}\|_k =$$
$$= \max_{\substack{l=0,1,\ldots,k \\ p \in S^1 \times \mathbb{R}}} \left\{ \frac{\partial^k}{\partial r^l\, \partial \varphi^{k-l}} (\Phi_r - \tilde{\Phi}_r)_p,\ \frac{\partial^k}{\partial r^l\, \partial \varphi^{k-l}} (\Phi_\varphi - \tilde{\Phi}_\varphi)_p \right\},$$

где $\Phi_r(\varphi, r)$ (соответственно $\Phi_\varphi(\varphi, r)$) — r-(соответственно φ-) координата $\Phi(\varphi, r)$. Аналогичным образом определяются $\tilde{\Phi}_r$ и $\tilde{\Phi}_\varphi$. В этих обозначениях несколько ослабленный вариант теоремы Мозера о кольце может быть сформулирован следующим образом.

Теорема 1 (Мозер [2]). *Для любых $r_1 < r_2 < r_3 < r_4$ существует такая окрестность V отображения Φ в C^k-топологии, $k \geqslant 333$, что для каждого $\tilde{\Phi} \in V$, для которого*

$$\operatorname{supp}(\tilde{\Phi} \cdot \Phi^{-1}) \subset \{(\varphi, r) \mid r \in [r_1, r_4]\}$$

(и, конечно, $\tilde{\Phi}^*(\omega) = \omega$), найдется такая замкнутая кривая $C \subset \{(\varphi, r) \mid r \in (r_2, r_3)\}$, разделяющая окружности $r = r_2$ и $r = r_3$, что $\tilde{\Phi}(C) = C$.

---

[1]) Takens F., A C^1 counterexample to Moser's twist theorem, *Indag. Math.*, 33, № 4 (1971), 379—386.

Вероятно, условие «$k \geqslant 333$» может быть несколько ослаблено[1]). Тем не менее цель этой работы состоит в том, чтобы показать, что сформулированная выше теорема неверна, если заменить условие «$k \geqslant 333$» условием «$k \geqslant 1$». Точная формулировка нашего результата дается в следующей теореме.

Теорема 2. *Для любых* $r_1 < r_2 < r_3 < r_4$ *и* $\bar{\varepsilon} > 0$ *существует такое отображение* $\tilde{\Phi}$: $S^1 \times \mathbb{R} \to S^1 \times \mathbb{R}$ *класса* C^∞, *что*

(i) $\tilde{\Phi}^*(\omega) = \omega$,

(ii) $\| \Phi - \tilde{\Phi} \|_1 < \bar{\varepsilon}$,

(iii) $\operatorname{supp}(\tilde{\Phi} \cdot \Phi^{-1}) \subset \{(\varphi, r\} \mid r \in [r_1, r_4]\}$,

(iv) *существуют точка* $p \in \{(\varphi, r) \mid r \in (r_1, r_2)\}$ *и целое число* $i \in \mathbb{Z}$, *такие, что* $\tilde{\Phi}^i(p) \in \{(\varphi, r) \mid r \in (r_3, r_4)\}$.

Очевидно, что отображение $\tilde{\Phi}$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1 [2]), но не имеет инвариантной замкнутой кривой, заключенной между окружностями $r = r_2$ и $r = r_3$.

Известно, что из теоремы Мозера вытекает тот факт, что среди сохраняющих площадь автоморфизмов класса C^{333} компактного двумерного многообразия (с формой площади ω) топологически транзитивные автоморфизмы не образуют множества второй категории (топологическая транзитивность означает, что существует всюду плотная траектория). Так как в C^1-случае, как показывает наша теорема, рассуждение, использующее теорему Мозера, становится недействительным, то можно надеяться, что среди сохраняющих площадь автоморфизмов класса C^1 топологические транзитивные образуют множество второй категории.

Остальная часть статьи посвящена доказательству теоремы 2.

2. ВОЗМУЩЕННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Лемма 3. *Существуют такие постоянные* $C > 0$ *и* $\varepsilon_0 > 0$, *что для любых* p, $q \in S^1 \times \mathbb{R}$ *и* $\varepsilon_0 > \varepsilon > 0$, *для которых* $C\varepsilon^{-1}\rho(p, q) < \frac{1}{2}$ *(здесь* $\rho(p, q)$ *— расстояние между точками* p *и* q, *индуцированное стандартной метрикой на многообра-*

---

[1]) Примечание при корректуре. В. Клингенберг указал мне, что, согласно недавнему результату Г. Рюсмана [3], предположение о гладкости в теореме Мозера может быть ослаблено до класса C^5.

[2]) Кроме, конечно, условия «$k \geqslant 333$». — *Прим. перев.*

зии $S^1 \times \mathbb{R}$), *найдется такой сохраняющий площадь диффеоморфизм* Ψ: $S^1 \times \mathbb{R} \to S^1 \times \mathbb{R}$ *класса* C^∞, *что*

1. $\|\Psi - \mathrm{id}\|_1 < \varepsilon$,
2. $\operatorname{supp}(\Psi)$ *содержится в круге радиуса* $C\varepsilon^{-1}\rho(p, q)$ *с центром в точке* p,
3. $\Psi(p) = q$.

Доказательство. Так как круг на многообразии $S^1 \times \mathbb{R}$, радиус которого меньше, чем $^1/_2$, изоморфен кругу того же радиуса на плоскости $\mathbb{R}^2$, где в качестве формы площади мы возьмем $dx \wedge dy$, то достаточно доказать лемму в $\mathbb{R}^2$ вместо $S^1 \times \mathbb{R}$. В $\mathbb{R}^2$ мы можем даже опустить условие $C\varepsilon^{-1}\rho(p, q) < \frac{1}{2}$. Не уменьшая общности, можно предположить также, что $p = (0, 0)$ и $q = (x_0, 0)$; в этом случае $|x_0| = \rho(p, q)$.

Рассмотрим такую функцию H на $\mathbb{R}^2$ класса C^∞, имеющую компактный носитель, что $H|\{(x, y) \mid |x| \leqslant 1 \text{ и } y = 0\} \equiv 0$ и $\partial H/\partial y|\{(x, y) \mid |x| \leqslant 1 \text{ и } y = 0\} \equiv 1$. Предположим, что носитель функции H содержится в круге радиуса K с центром в начале $(0, 0)$. Определим векторное поле X_H на $\mathbb{R}^2$ по формуле $X_H = \partial H/\partial y \cdot \partial/\partial x - \partial H/\partial x \cdot \partial/\partial y$ и отображение $\mathscr{D}_{H,t}$: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — сдвиг вдоль интегральных кривых поля X_H на время t. Известно, см., например, [1], что для всех t отображение $\mathscr{D}_{H,t}$ сохраняет площадь. Пусть число L таково, что $\|\mathscr{D}_{H,t} - \mathrm{id}\|_1 < L|t|$ для любого $t \in [-1, +1]$. Из наложенных на функцию H условий следует, что на множестве $\{(x, y) \mid |x| \leqslant 1$ и $y = 0\}$ поле X_H равно $\partial/\partial x$, так что $\mathscr{D}_{H,t}(0, 0) = (t, 0)$ при $|t| < 1$. Таким образом, при $|t| < 1$ отображение $\mathscr{D}_{H,t}$ обладает следующими свойствами:

1. $\|\mathscr{D}_{H,t} - \mathrm{id}\|_1 < L \cdot |t|$;
2. $\operatorname{supp}(\mathscr{D}_{H,t})$ содержится в круге радиуса K с центром в точке $p = (0, 0)$;
3. $\mathscr{D}_{H,t}(p) = (t, 0)$.

Далее, заметим, что

$$\|(\lambda I)\mathscr{D}_{H,t}(\lambda^{-1}I) - \mathrm{id}\|_1 = \|\mathscr{D}_{H,t} - \mathrm{id}\|_1,$$

где λI — отображение, которое сопоставляет точке (x, y) точку $(\lambda x, \lambda y)$. Положим $\varepsilon_0 = L$ и $C = KL$.

Покажем, что для $p = (0, 0)$, $q = (x_0, 0)$ и $\varepsilon_0 > \varepsilon > 0$ существует отображение Ψ, удовлетворяющее условиям леммы. Положим, $\Psi = (\lambda I) \circ \mathscr{D}_{H,t} \circ (\lambda^{-1}I)$, где $t = \varepsilon L^{-1}$ и $\lambda = x_0 t^{-1}$.

Очевидно, что отображение Ψ является диффеоморфизмом, сохраняющим площадь.

$\|\Psi - \mathrm{id}\|_1 = \|\mathcal{D}_{H,t} - \mathrm{id}\|_1 < tL = \varepsilon$. Носитель Ψ содержится в круге радиуса $|\lambda| K$ с центром в точке p; $|\lambda| K = |x_0| t^{-1} K = |x_0| K L t^{-1} L^{-1} = C\varepsilon^{-1} \rho(p, q)$. Наконец, $\Psi(0, 0) = (x_0, 0)$.

Определение 4. Пусть Φ': $S^1 \times \mathbb{R} \to S^1 \times \mathbb{R}$ — отображение, сохраняющее площадь. Последовательность $\{p_i\}_{i=i_1}^{i_2}$, $i_1 < i_2$ (здесь i_1 или i_2 могут принимать значение ∞), называется ε-возмущенной последовательностью для отображения Φ', если для всех i, $i_1 \leqslant i < i_2$, можно выбрать такой круг $\mathcal{D}_i$ радиуса r_i с центром в точке p_ε, что

1) $\mathcal{D}_i \cap \mathcal{D}_j = \varnothing$, если $i \neq j$, и

2) $\frac{1}{2} > r_i = \rho\left((\Phi')^{-1}(p_{i+1}), p_i\right) \cdot C \cdot \varepsilon^{-1}$ для $i_1 \leqslant i < i_2$ и постоянная C та же, что и в лемме 3.

Замечание 5. Пусть $\{p_i\}_{i=i_1}^{i_2}$ — ε-возмущенная последовательность для Φ', $\varepsilon < \varepsilon_0$, число ε_0 найдено в лемме 3. Очевидно, что существует такой сохраняющий площадь диффеоморфизм Ψ: $S^1 \times \mathbb{R} \to S^1 \times \mathbb{R}$ класса C^1, что

1) $\|\Psi - \mathrm{id}\|_1 < \varepsilon$,

2) $\mathrm{supp}(\Psi) \subset \bigcup_{i=i_1}^{i_2-1} D_i$,

3) $(\Phi'\Psi)(p_i) = p_{i+1}$ для $i_1 \leqslant i < i_2$, т. е. $\{p_i\}_{i=1}^{i_2}$ есть часть траектории отображения $\Phi'\Psi$.

Кроме того, если i_1 и i_2 оба конечны, то $\Psi \in C^\infty$.

Построение стандартных возмущенных последовательностей

Мы явно построим некоторую ε-возмущенную последовательность для отображения Φ, определенного во введении. В дальнейшем мы предположим, что число ε фиксировано и удовлетворяет условию $\varepsilon_0 > \varepsilon > 0$, число ε_0 то же, что и в лемме 3. Пусть n — целое число, большее чем $4C\varepsilon^{-1}$. Положим $N = 2(n!)$. Для любых $k \in \mathbb{Z}$, $\bar{\varphi} \in \mathbb{R} \pmod 1$ и $\delta \in (0, N^{-1})$ определим следующим образом последовательность точек $\{p_i(k, \bar{\varphi}, \delta)\}_{i=-\infty}^{\infty}$. Имеем $p_i(k, \bar{\varphi}, \delta) = (r_i(k, \bar{\varphi}, \delta), \varphi_i(k, \bar{\varphi}, \delta))$. Возьмем $r_0(k, \bar{\varphi}, \delta) = (2k+1)N^{-1}$ и $\varphi_0(k, \bar{\varphi}, \delta) = \bar{\varphi}$. При $i > 0$ положим $r_i(k, \bar{\varphi}, \delta) - r_{i-1}(k, \bar{\varphi}, \delta) = \delta(\alpha(\delta))^{i-1}$, а при $i < 0$ $-r_i(k, \bar{\varphi}, \delta) + r_{i+1}(k, \bar{\varphi}, \delta) = \delta(\alpha(\delta))^{-i-1}$, где функция $\alpha(\delta)$ определяется из равенства $\delta \cdot N = 1 - \alpha(\delta)$ (отсюда следует, что $\lim\limits_{i \to +\infty} r_i(k, \bar{\varphi}, \delta) = (2k+2)N^{-1}$ и $\lim\limits_{i \to -\infty} r_i(k, \bar{\varphi}, \delta) = 2kN^{-1}$).

Имея r_i, выберем φ_i так, чтобы для всякого i φ-координата точки $\Phi^{-1}(p_{i+1}(k, \bar{\varphi}, \delta))$ равнялась $\varphi_i(k, \bar{\varphi}, \delta)$. При помощи непосредственных вычислений можно найти следующие точные выражения для $r_i(k, \bar{\varphi}, \delta)$ и $\varphi_i(k, \bar{\varphi}, \delta)$: при $i \geqslant 0$

$$r_i(k, \bar{\varphi}, \delta) = \frac{(2k+2) - (\alpha(\delta))^i}{N},$$

$$r_{-i}(k, \bar{\varphi}, \delta) = \frac{2k + (\alpha(\delta))^i}{N},$$

$$\varphi_i(k, \bar{\varphi}, \delta) = \bar{\varphi} + \frac{i(2k+2)}{N} - \frac{\alpha(\delta)}{N(1-\alpha(\delta))} + \frac{(\alpha(\delta))^{i+1}}{N(1-\alpha(\delta))} \pmod 1$$

$$\varphi_{-i}(k, \bar{\varphi}, \delta) = \bar{\varphi} - \frac{i \cdot 2k}{N} - \frac{1}{N(1-\alpha(\delta))^{-1}} + \frac{(\alpha(\delta))^i}{N(1-\alpha(\delta))} \pmod 1.$$

Лемма 6. *Для каждого k найдется такое $\delta(k)$, что для любого δ, $\delta(k) > \delta > 0$, последовательность $\{p_i(k, \bar{\varphi}, \delta)\}_{i=-\infty}^{+\infty}$ является ε-возмущенной последовательностью.*

Доказательство. Рассмотрим круг D_i с центром в точке $p_i(k, \bar{\varphi}, \delta)$ и радиуса $C\varepsilon^{-1}(r_{i+1}(k, \bar{\varphi}, \delta) - r_i(k, \bar{\varphi}, \delta))$. При достаточно малом δ эти радиусы меньше, чем $1/2$. Мы должны доказать, что при достаточно малых δ все эти круги не пересекаются. Для этого достаточно показать, что для любых $i \neq j$

$$\rho(p_i(k, \bar{\varphi}, \delta), p_j(k, \bar{\varphi}, \delta)) > 2C\varepsilon^{-1}(r_{i+1}(k, \bar{\varphi}, \delta) - r_i(k, \bar{\varphi}, \delta)). \qquad (*)$$

Доказательство того, что неравенство (*) выполнено при достаточно малых δ, разбивается на два случая, именно когда $|i-j| > n$ и $|i-j| \leqslant n$.

При $|i-j| > n$ и достаточно малом δ неравенство (*) следует из нашего предположения о том, что $n > 4C\varepsilon^{-1}$; действительно, если δ мало и $|i-j| > n$, то

$$|r_i(k, \bar{\varphi}, \delta) - r_j(k, \bar{\varphi}, \delta)| > \frac{1}{2} n (r_{i+1}(k, \bar{\varphi}, \delta) - r_i(k, \bar{\varphi}, \delta)).$$

В случае $|i-j| \leqslant n$ заметим, что если $0 < |\mu| \leqslant n$ и $p = (\varphi, r)$, где $r \in \left(\frac{2k}{N}, \frac{2k+2}{N}\right)$, то $\Phi^\mu(p) \neq p$; это вытекает из того факта, что $N = 2(n!)$. Из определения отображения Φ следует существование таких постоянных $C_1, \ldots, C_n$, что если $p = (\varphi, r)$, $r \in (2kN^{-1}, (2k+2)N^{-1})$, $\bar{r} = \min\left(r - \frac{2k}{N}, \frac{2k+2}{N} - r\right)$, то φ-координаты точек p и $\Phi^\mu(p)$ отличаются не меньше, чем на $\bar{r}C_{|\mu|}$, $|\mu| \leqslant n$. Если δ достаточно мало и $|i-j| \leqslant n$, то $\frac{1}{2}\bar{r}_i(k, \bar{\varphi}, \delta) > \bar{r}_j(k, \bar{\varphi}, \delta)$, где $\bar{r}_{i,j}(k, \bar{\varphi}, \delta)$

определены как и выше. Отсюда вытекает [1]), что φ-координаты точек $p_i(k, \bar\varphi, \delta)$ и $p_j(k, \bar\varphi, \delta)$ отличаются не меньше чем на $\frac{1}{2}C_{|i-j|}\bar r_i(k, \bar\varphi, \delta)$; таким образом, $\rho(p_i(k, \bar\varphi, \delta), p_j(k, \bar\varphi, \delta)) \geqslant \geqslant \frac{1}{2}C_{|i-j|}\bar r_i(k, \bar\varphi, \delta)$. С другой стороны, из формулы для $r_i(k, \bar\varphi, \delta)$ следует, что

$$r_{i+1}(k, \bar\varphi, \delta) - r_i(k, \bar\varphi, \delta) \leqslant \delta N(1-\delta N)^{-1}\bar r_i(k, \bar\varphi, \delta).$$

Если δ столь мало, что $\frac{1}{2}C_\mu > 2C\varepsilon^{-1}\delta N(1-\delta)^{-1}$ для всех $\mu = 1, 2, \ldots, n$, то неравенство (*) справедливо также и для $|i-j| \leqslant n$. Это доказывает лемму.

Определение 7. Число $\nu(k)$ — это такое наименьшее положительное целое число, что $\nu(k)2kN^{-1}$ — целое.

Замечание 8. Тем же способом, каким мы доказали лемму 6, можно показать, что для достаточно малого δ и большого M точка $\Phi^j(p_{i_0}(k, \bar\varphi, \delta))$ не лежит в множестве $\bigcup_{i \leqslant i_0} D_i$, где $j = 1, 2, \ldots, \nu(k+1)$ и $i_0 \geqslant M$ [2]), и что точка

---

[1]) Лучше рассуждать так: пусть, например, $j = i + \mu$, $0 < \mu \leqslant n$; тогда разность φ-координат точек $p_{i+\mu}$ и $\varphi^\mu p_i$ равна

$$|r_{i+1} + \ldots + r_{i+\mu} - \mu r_i| = \left|\sum_{\nu=1}^{\mu}(r_{i+\nu} - r_i)\right| = O(\delta)\bar r_i$$

(обозначения здесь понятным образом сокращены). Поэтому разность φ-координат точек $p_{i+\mu}$ и p_i не меньше разности φ-координат точек $\varphi^\mu p_i$ и p_i минус $O(\delta)\bar r_i$. — *Прим. ред.*

[2]) Если $i < i_0 - n$, аргументация практически не меняется. Пусть $i = i_0 - \mu$, $0 \leqslant \mu \leqslant n$. Как легко видеть,

$$\Phi^j(p_{i_0}) = \left(\varphi_{i_0} + j\,\frac{2k+2}{N} - j\bar r_{i_0},\ r_{i_0}\right),$$

$$p_i = \left(\varphi_{i_0} - \mu\,\frac{2k+2}{N} + \bar r_{i_0-\mu+1} + \ldots + \bar r_{i_0},\ r_i\right) =$$

$$= \left(\varphi_{i_0} - \mu\,\frac{2k+2}{N} + \mu\bar r_{i_0} + O(\delta)\,r_{i_0},\ r_i\right).$$

Пусть δ столь мало, что $O(\delta)\bar r_{i_0} \ll \bar r_{i_0}$, и пусть $M = M(\delta)$ столь велико, что $[\nu(k+1)\bar r_{i_0} + n] \ll \frac{2k+2}{N}$ при $i_0 > M$. Тогда при $j + \mu \neq \nu(k+1)$ разность (по mod 1) φ-координат точек p_i и $\Phi^j(p_{i_0})$ не меньше, чем

$\Phi^{-j}(p_{-i_0}(k, \bar{\varphi}, \delta))$ не лежит в множестве $\bigcup_{-i_0\leqslant i} D_i$, где $j = 1, 2, \ldots, \nu(k)$ и $i_0 \geqslant M$. В дальнейшем мы предположим, что число $\delta(k)$ из леммы 6 выбрано так, что для каждого δ, для которого $\delta(k) > \delta > 0$, найдется такое M, что имеет место сформулированное выше утверждение.

Лемма 9. *Пусть* $\{p_i(k, \bar{\varphi}, \delta)\}_{i=-\infty}^{+\infty}$ — *построенная выше последовательность. Тогда для каждого* $i_0 > 0$ *существует* $\lim_{n\to\infty} p_{i_0+n\cdot\nu(k+1)}(k, \bar{\varphi}, \delta)$. *Кроме того, все точки* $p_{i_0+n\cdot\nu(k+1)}(k, \bar{\varphi}, \delta)$, $n \geqslant 0$, $i_0 \geqslant 0$ *лежат на прямой, пересекающей окружность* $r = (2k+2)/N$ *в предельной точке*[1]).

Аналогичное утверждение имеет место для

$$\lim_{n\to-\infty} p_{i_0+n\cdot\nu(k)}(k, \bar{\varphi}, \delta).$$

Доказательство. Доказательство следует из того факта, что при $i \geqslant 0$ величина

$$\frac{r_{i+\nu(k+1)}(k, \bar{\varphi}, \delta) - r_i(k, \bar{\varphi}, \delta)}{\varphi_{i+\nu(k+1)}(k, \bar{\varphi}, \delta) - \varphi_i(k, \bar{\varphi}, \delta)}$$

не зависит от i. В этом легко убедиться, используя точные формулы для r_i и φ_i и тот факт, что число $\dfrac{\nu(k+1)(2k+2)}{N}$ — целое.

$\dfrac{2k+2}{N}(1+o(1))$, а при $j+\mu = \nu(k+1)$ эта разность равна $\nu(k+1)\times \times \bar{r}_{i_0}(1+O(\delta))$. Между тем радиус D_i есть $O(\delta)\,\bar{r}_{i_0}$. — *Прим. ред.*

[1]) При переходе от плоскости $\mathbb{R}^2$ к цилиндру $S^1\times\mathbb{R}$ посредством факторизации φ по mod 1 прямая $r = \dfrac{2k+2}{N}$ переходит в окружность, отчего автор и называет ее саму окружностью.

В плоскости переменных (φ, r) каждая точка цилиндра представляется бесконечным числом точек. Представители точек $p_{i_0+n\nu(k+1)}(k, \bar{\varphi}, \delta)$ лежат на параллельных прямых, проходящих через точки $\left(\bar{\varphi}+m, \dfrac{2k+2}{N}\right)$ с некоторым $\bar{\varphi}$ и любыми $m \in Z$. Если изменить i_0, то число $\bar{\varphi}$ изменится на целое кратное числа $\dfrac{1}{\nu(k+1)}$ (см. ниже) и соответствующие прямые будут параллельны тем, о которых говорилось выше. На рис. 3 штрихпунктирными линиями изображены эти прямые (а также аналогичные прямые для $p_{i_0+n\nu(k+1)}(k+1, \bar{\bar{\varphi}}, \delta)$, где $\bar{\bar{\varphi}}$ подобрано так, чтобы они проходили через те же самые точки $\left(\bar{\varphi}+m, \dfrac{2k+2}{N}\right)$). — *Прим. ред.*

3. СКЛЕИВАНИЕ ВОЗМУЩЕННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Рассмотрим следующую ситуацию: последовательности

$$\{p_i(k,\ \bar\varphi_1,\ \delta_1)\}_{i=-\infty}^{+\infty} \text{ и } \{p_i(k+1,\ \bar\varphi_2,\ \delta_2\}_{i=-\infty}^{+\infty}$$

выбраны, как указано в § 2. Возьмем $\delta_1=\delta_2<\delta(k),\ \delta(k+1)$ (см. лемму 6 и замечание 8) так, чтобы обе последовательности были ε-возмущенными последовательностями для отображения Φ. Кроме того, выберем $\bar\varphi_1$ и $\bar\varphi_2$ так, чтобы для всякого i

$$\lim_{n\to\infty} p_{i+n\cdot\nu(k+1)}(k,\ \bar\varphi_1,\ \delta_1)=\lim_{n\to-\infty} p_{i-n\cdot\nu(k+1)}(k+1,\ \bar\varphi_2,\ \delta_2).$$

(Для заданного $\bar\varphi_1$ существует единственное $(\mathrm{mod}\,1)\,\bar\varphi_2$, для которого выполнено это равенство.) В дальнейшем мы опустим в обозначениях зависимость от величин $\bar\varphi_i$ и δ_i. Предельные точки $\lim\limits_{n\to\infty} p_{i+n\cdot\nu(k+1)}(k)$ (отвечающие различным i) обозначаются $q_1,\ \ldots,\ q_{\nu(k+1)}$; они имеют координаты[1])

$$(\bar\varphi,\ r),\ \left(\bar\varphi+1\cdot(\nu(k+1))^{-1},\ r\right),\ \ldots,$$
$$\left(\bar\varphi+(\nu(k+1)-1)(\nu(k+1))^{-1},\ r\right),$$

где $r=(2k+2)N^{-1}$.

Лемма 10. *В описанных выше условиях существуют такие сохраняющие площадь диффеоморфизм Φ' класса C^∞ и положительные целые i_0 и l, что*

(а) $\|\Phi'-\Phi\|_1<\varepsilon$;

(б) $\mathrm{supp}\,(\Phi'\Phi^{-1})\subset\left\{\varphi,\ r\ \middle|\ r\in\left[\frac{4k+3}{2N},\ \frac{4k+5}{2N}\right]\right\}$;

(в) $(\Phi')^l\left(p_{i_0}(k)\right)=p_{-i_0}(k+1)$;

---

[1]) Непосредственно получается, что φ-координаты предельных точек последовательностей $p_{i+n\nu(k+1)}(k)$ и $p_{i+1+n\nu(k+1)}(k)$ отличаются на $r=\frac{2k+2}{N}$, так что при различных i получаются φ-координаты $(\mathrm{mod}\ 1)$

$$\bar\varphi,\ \bar\varphi+\frac{2k+2}{N},\ \ldots,\ \bar\varphi+\frac{2k+2}{N}i,\ \ldots,\ \bar\varphi+\frac{2k+2}{N}(\nu(k+1)-1).$$

Но из определения $\nu(k+1)$ следует, что число $\frac{2k+2}{N}\nu(k+1)$ взаимно просто с $\nu(k+1)$, а отсюда легко вывести, что набор чисел $\left\{\frac{2k+2}{N}i\,\middle|\,0\leqslant i<\nu(k+1)\right\}$ совпадает с набором чисел $\left\{\frac{j}{\nu(k+1)}\,\middle|\,0\leqslant j<\nu(k+1)\right\}$. — *Прим. ред.*

(г) *последовательность* $\{p_i(k)\}_{i=-\infty}^{i_0} \cup \{(\Phi')^j(p_{i_0}(k))\}_{j=1}^{l-1} \cup$ $\cup \{p_i(k+1)\}_{i=-i_0}^{+\infty}$ *является* 2ε-*возмущенной последовательностью для отображения* Φ'.

Доказательство. Разложим Φ в произведение $\Phi = \mathscr{D}_{H,1}\cdot\Phi_{k+1}$, где $\Phi_{k+1}(\varphi, r) = \left(\varphi + \frac{2k+2}{N},\ r\right)$ и $\mathscr{D}_{H,1}$ — сдвиг на время 1 вдоль интегральных кривых поля $X_H = \partial H/\partial r\cdot\partial/\partial\varphi - \partial H/\partial\varphi\cdot\partial/\partial r$; $H = \frac{1}{2}\left(r - \frac{2k+2}{N}\right)^2$. Мы построим Φ' в виде $\mathscr{D}_{H',1}\Phi_{k+1}$, где функция H' будет „близка“ к функции H.

Возьмем функцию $\tilde{H}(\varphi, r)$ класса C^∞:

$$\tilde{H}(\varphi, r) = \varkappa\left(\left(r - \frac{2k+2}{N}\right)2N\right)\sum_{i=0}^{\nu(k+1)-1}\varkappa\left(\left(\varphi - \tilde{\varphi} - \frac{i}{\nu(k+1)}\right)2\nu(k+1)\right),$$

где $\varkappa\colon \mathbb{R}\to[0, 1]$ — функция класса C^∞, удовлетворяющая условиям: $\varkappa(t) = \varkappa(-t)$, $\varkappa\left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right] = 1$, $\operatorname{supp}(\varkappa) = [-1, +1]$, $d\varkappa/dt\,(t) \leqslant 0$ для всех $t \geqslant 0$.

Рассмотрим отображение $\Phi' = \mathscr{D}_{(H-\lambda\tilde{H}),1}\Phi_{k+1}$, где λ — малое положительное число. Из определения функции $\tilde{H}$ с очевидностью следует, что отображение Φ' удовлетворяет условию (б) леммы 10. При малом λ удовлетворяется также и условие (а). Поскольку отображения Φ и Φ' совпадают в окрестности предельных точек $q_1, \ldots, q_{\nu(k+1)}$ последовательностей $\{p_i(k)\}_{i=-\infty}^{+\infty}$ и $\{p_i(k+1)\}_{i=-\infty}^{+\infty}$, то эти последовательности являются 2ε-возмущенными последовательностями для Φ', если λ достаточно мало [1]). Возьмем $\bar{\lambda} > 0$ таким образом, чтобы любое $\lambda \in (0, \bar{\lambda}]$ удовлетворяло требованиям, наложенным выше.

Для достаточно больших i точки $p_{i\cdot\nu(k+1)}(k)$ и $p_{-i\cdot\nu(k+1)}(k+1)$ лежат на одной и той же замкнутой связной линии уровня функции $H - \bar{\lambda}\tilde{H}$. Это следует из тех фактов, что, во-первых, окружность $r = \frac{2k+2}{N}$ является осью симметрии функций H и $\tilde{H}$, а значит, и функции $(H - \bar{\lambda}\tilde{H})$; во-вторых, r-координаты $r_{i\cdot\nu(k+1)}(k)$ и $r_{-i\cdot\nu(k+1)}(k+1)$ удовлетворяют соотношению $\frac{2k+2}{N} - r_{i\cdot\nu(k+1)}(k) = r_{-i\cdot\nu(k+1)}(k+1) - \frac{2k+2}{N}$;

---

[1]) Ибо лишь конечное число расстояний $\rho((\Phi')^{-1}(p_{i+1}), p_i) \neq$ $\neq \rho(\Phi^{-1}(p_{i+1}), p_i)$, причем левая часть непрерывно зависит от λ и стремится к правой части при $\lambda \to 0$. — *Прим. ред.*

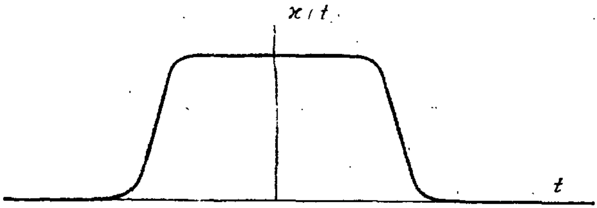


Рис. 1. Функция $\varkappa$.

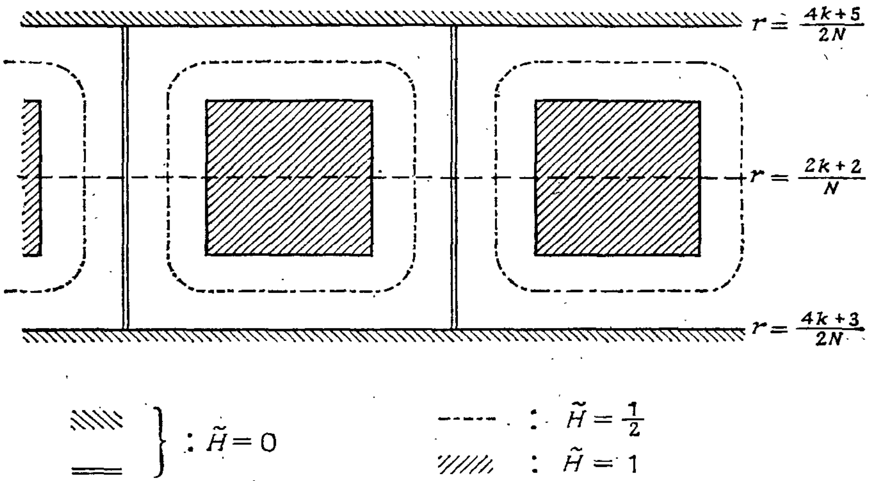


Рис. 2. Линии уровня функции $\tilde{H}$.

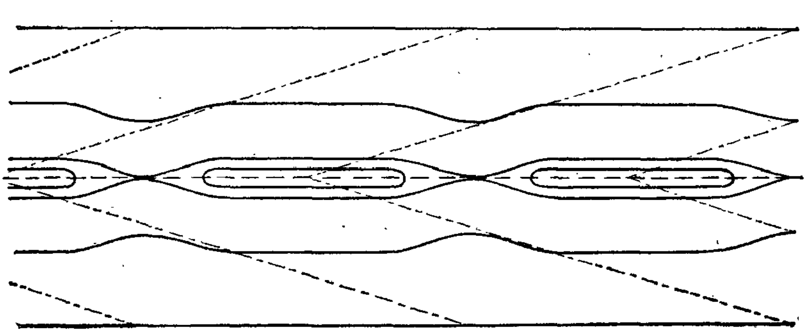


Рис. 3. Линии уровня функции $H-\bar{\lambda}\tilde{H}$.

в-третьих, $\lim\limits_{i\to\infty} \rho\left(p_{i\cdot\nu(k+1)}(k),\ p_{-i\cdot\nu(k+1)}(k+1)\right)=0$ и, наконец, возле предельных точек последовательности $p_{i\cdot\nu(k+1)}(k)$ имеем $d\tilde{H}=0$ и функция $H-\bar{\lambda}\tilde{H}$ минимальна.

Пусть i_0 таково, что точки $p_{i_0\cdot\nu(k+1)}(k)$ и $p_{-i_0\cdot\nu(k+1)}(k+1)$ лежат на одной и той же замкнутой связной линии уровня функции $H-\bar{\lambda}\tilde{H}$. Тогда для некоторого $t>0$

$$\mathcal{D}_{H-\bar{\lambda}\tilde{H},\,t}\left(p_{i_0\cdot\nu(k+1)}(k)\right)=p_{-i_0\cdot\nu(k+1)}(k+1).$$

Возьмем $\lambda<\bar{\lambda}$ (причем $(\bar{\lambda}-\lambda)$ мало) и подберем такое наименьшее положительное число t_λ, что

$$\mathcal{D}_{H-\bar{\lambda}\tilde{H},\,t_\lambda}\left(p_{i_0\cdot\nu(k+1)}(k)\right)=p_{-i_0\cdot\nu(k+1)}(k+1);$$

число t_λ не определено для всех $\lambda\in(0,\ \bar{\lambda}]$. Когда λ убывает, t_λ стремится к $+\infty$, так что существует λ_0, для которого t_{λ_0} кратно $\nu(k+1)$.

Положим $\Phi'=\mathcal{D}_{H-\lambda_0\tilde{H},\,1}\cdot\Phi_{k+1}$. Свойства (а), (б) и (в), очевидно, выполнены[1]) с $l=t_{\lambda_0}$. Мы теперь установим свойство (г). Пусть $D_i(k)$ (соответственно $D_i(k+1)$) — круг с центром в точке $p_i(k)$ (соответственно $p_i(k+1)$), построенной в соответствии с определением 4. Достаточно доказать, что для $i=1,\ 2,\ \ldots,\ l-1$ точки $(\Phi')^j\left(p_{i_0\cdot\nu(k+1)}(k)\right)$ не лежат в множестве

$$\left(\bigcup_{i\leqslant i_0\cdot\nu(k+1)} D_i(k)\right)\cup\left(\bigcup_{i\geqslant -i_0\cdot\nu(k+1)} D_i(k+1)\right).$$

Это будет выполнено (ср. замечание 8), если число i_0 достаточно велико (независимо от значения λ_0)[2]). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Выберем число ε так, чтобы из $\|\Phi'-\Phi\|_1<\varepsilon$ и $\|\Psi-\mathrm{id}\|_1<2\varepsilon$ следовало бы $\|\Phi-\Phi'\Psi\|_1<\bar{\varepsilon}$. Далее, выберем $n>4C\varepsilon^{-1}$, как указано в § 2, но теперь мы подчиним n еще условию, чтобы существовали такие целые k_1, k_2, для которых $\left[(4k_1-1)\frac{1}{2}N^{-1},\ (2k_1)N^{-1}\right]\subset(r_1,\ r_2)$ и $\left[(2k_2)N^{-1},\right.$

---

[1]) Заметим, что $\tilde{H}$ инвариантна относительно Φ_{k+1}, поэтому $\mathcal{D}_{H-\lambda\tilde{H},\,1}$ и Φ_{k+1} коммутируют. — *Прим. ред.*

[2]) Поскольку r-координата точки $\Phi'^j\left(p_{i_0\nu(k+1)}(k)\right)$ не меньше r-координаты r_{i_0} точки $p_{i_0\nu(k+1)}$, то из кругов $D_i(k)$ „опасность“ представляют только те, для которых $i\geqslant i_0\nu-n$. Пока точка $D_{H-\lambda\tilde{H},\,j}\left(p_{i_0\nu(k+1)}(k)\right)$ не вышла из области $\left|\varphi-\tilde{\varphi}\left(\mathrm{mod}\ \frac{1}{\nu(k+1)}\right)\right|<\frac{1}{4\nu(k+1)}$, $d\tilde{H}=0$ и $\Phi'^j(p_{i_0\nu})=\Phi^j(p_{i_0\nu})$. Если при этом $j\leqslant\nu(k+1)$, то можно непосредственно сослаться на замечание 8. Если же при этом $j>\nu(k+1)$, то φ-координата точки $\Phi'^j(p_{i_0\nu})$ отстоит от $\tilde{\varphi}$ по $\mathrm{mod}\ \frac{1}{\nu(k+1)}$ на величину порядка

$(4k_2+1)\frac{1}{2}N^{-1}\Big]\subset(r_3, r_4)$, где $N=2(n!)$. Возьмем „стандартные" возмущенные последовательности $\{p_i(k, \bar\varphi_k, \delta_k)\}_{i=-\infty}^{+\infty}$, $k=k_1, k_1+1, \ldots, k_2$, так, чтобы каждая пара последовательностей $\{p_i(k, \bar\varphi_k, \delta_k)\}_{i=-\infty}^{+\infty}$, $\{p_i(k+1, \bar\varphi_{k+1}, \delta_{k+1})\}_{i=-\infty}^{+\infty}$ удовлетворяла условиям, сформулированным в начале настоящего параграфа [1]). Применяя лемму 10 ко всем таким парам, получим диффеоморфизм Φ': $S^1\times\mathbb{R}\to S^1\times\mathbb{R}$ класса C^∞, сохраняющий площадь и удовлетворяющий условиям: $\|\Phi-\Phi'\|_1<\varepsilon$, $\operatorname{supp}(\Phi^{-1}\Phi')\subset$ $\subset\left\{(\varphi, r)\mid r\in\left[(4k_1+3)\frac{1}{2}N^{-1}, (4k_2+1)\frac{1}{2}N^{-1}\right]\right\}$, а также такую 2ε-возмущенную последовательность $\{q_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}$ для Φ', что $\lim\limits_{i\to\infty} r_i=(2k_2+2)/N$ и $\lim\limits_{i\to-\infty} r_i=(2k_1)/N$; $q_i=(\varphi_i, r_i)$.

Выберем такую конечную подпоследовательность $\{q_i\}_{i=-M}^{+M}$ последовательности $\{q_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}$, что $r_{-M}\in(r_1, r_2)$ и $r_{+M}\in(r_3, r_4)$. Подберем отображение Ψ так, чтобы последовательность точек $\{q_i\}_{i=-M}^{+M}$ являлась частью $(\Phi'\Psi)$-траектории (см. замечание 5) и чтобы отображение $\Psi\in C^\infty$ сохраняло площадь и для него выполнялось условие $\|\Psi-\mathrm{id}\|_1<2\varepsilon$, а $\operatorname{supp}(\Phi)\subset$ $\subset\{(\varphi, r)\mid r\in[r_1, r_4]\}$. Отображение $(\Phi'\Psi)$ обладает всеми требуемыми свойствами.

Список литературы

1. Abraham R., Marsden J. E., Foundations of Mechanics, N.-Y., 1967.
2. Мозер Ю., О крнвых, инвариантиых при отображениях кольца, сохраняющих площадь, сб. перев. *Математика* 6 : 5 (1962), 51—67.
3. Rüssmann H., Kleine Nenner I. Über invariante Kurven differenzierbarer Abbildungen eines Kreisrings, Nachr. Acad. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl. II (1970), 67—105.

$\nu(k+1)\bar r_{i_0}$. Наконец, если точка $\mathcal{D}_{H-\lambda\widetilde H, l}(p_{i_0\nu})$ вышла из указанной выше области, то φ-координата точки $\Phi'^{l}(p_{i_0\nu})$ отстоит от $\bar\varphi$ по $\bmod \frac{1}{\nu(k+1)}$ не менее чем на $\frac{1}{4\nu(k+1)}$ (и так будет продолжаться, пока ее r-координата не превысит $\frac{2k+2}{N}$, после чего попасть в круг $D_l(k)$ уже явно невозможно). Между тем φ-координаты центров „опасных" кругов отстоят от $\bar\varphi$ по $\bmod\frac{1}{\nu(k+1)}$ не более чем на $n\bar r_{i_0}+O(\delta)$. — *Прим. ред.*

[1]) В частности, все δ_k равны друг другу. Обозначение δ_k напоминает о том, что в части рассуждений, касающейся только k-й последовательности (§ 2), получилось условие $\delta<\delta(k)$, зависящее от k. В конце концов мы берем для всех k одно и то же δ, для которого $\delta<\min(\delta(k_1), \ldots, \delta(k_2))$.— *Прим. ред.*

ЗАМЕЧАНИЯ О ТЕРМИНОЛОГИИ И ОБОЗНАЧЕНИЯХ

В основном используемые терминология и обозначения являются стандартными и совпадают с теми, которые приняты в трех систематических изложениях, упомянутых в предисловии. В частности, это относится к обозначениям T_xM, W^u_x, W^s_x, E^u_x, E^s_x, терминам «устойчивое (или неустойчивое) распределение (или слоение)». Под «особой точкой» векторного поля понимают не особенность в аналитическом смысле, но просто точку, где это поле обращается в нуль. Множество неблуждающих точек каскада (динамической системы с дискретным временем), порожденного гомеоморфизмом f, обозначается через $NW(f)$ или $\Omega(f)$. Если $f\colon M \to N$ — гладкое отображение гладких многообразий, то его дифференциал (производная) обозначается Df, df, Tf или f_*; если нужно уточнить, что речь идет о дифференциале в точке x, то пишут df_x, Df_x, T_xf. Через f_* обозначается также индуцированное отображение фундаментальных групп или групп гомологий. Если $p\colon N \to M$ — накрытие, то гомеоморфизмы $f\colon N \to N$, для которых $pf = p$, называются скольжениями. Отображение, при котором прообразы компактных множеств компактны, называются собственными (хотя многие топологи предпочитают термин «совершенное отображение»).

Часто в топологии речь идет о паре (X, x_0), где X — некоторое пространство, а $x_0 \in X$ — некоторая фиксированная точка. В настоящее время ее часто называют отмеченной точкой, но прежде, когда работать с парой (X, x_0) приходилось почти исключительно в вопросах, связанных с фундаментальной группой, x_0 чаще называли базисной точкой. При переводе был использован последний термин (кстати, близкий к английскому base point), поскольку в данном сборнике необходимость «привязываться» к некоторой фиксированной точке связана именно с фундаментальной группой.

Термин «множество второй категории» понимается всегда в узком смысле — это есть множество, дополнение к которому является множеством первой категории (тогда как в широком смысле этот термин обозначал бы множество, не являющееся множеством первой категории). Таким образом, множество второй категории содержит пересечение некоторой счетной совокупности всюду плотных открытых множеств

Иногда в качестве синонима употребляется термин «массивное множество».

Свойство S, определенное для некоторого класса объектов, называется типичным (generic), если в пространстве всех этих объектов, снабженном «естественной» топологией (какой именно — ясно из контекста), объекты, обладающие этим свойством, образуют множество второй категории. Иногда говорят о «типичном» объекте. При этом подразумевается, что имеются определенные свойства $S_1, \ldots, S_N$ и что речь идет об объекте, который обладает всеми этими свойствами. Впрочем, в неформальном изложении слово «типичный» порой не имеет такого точного смысла; об этом можно судить по контексту.

Мы привыкли, что «устойчивость» означает чаще всего «устойчивость по Ляпунову» или какую-нибудь ее модификацию. В иностранной же литературе — в том числе и в статьях данного сборника — это слово употребляется во многих смыслах, между которыми практически ничего общего нет. По-видимому, английское «stable» (и его западноевропейские аналоги) вообще является более многозначным, чем русское «устойчивый», вследствие чего иностранным авторам и кажется естественным использовать это слово — либо как точный термин (точнее, часть такового[1])), либо в неформальном описании — в ситуациях, которые у нас никаких ассоциаций с устойчивостью не вызывают. Обратная ситуация, по-видимому, имеет место с русским термином «грубость». Удивление, выражаемое иностранными авторами по его поводу и их явное нежелание переводить его словом «rough», свидетельствует о том, что последнее слово не вызывает у них ассоциаций вроде нашего «грубо, но надежно». В переводах статей, включенных в данный сборник, сохранен общепринятый за рубежом термин «структурная устойчивость».

Далее, надо сказать об употреблении авторами слова «recurrence». Как известно, имеются два различных понятия — рекуррентность по Биркгофу и рекуррентность в смысле Готтшалка — Хедлунда; последняя в более старой терминологии Пуанкаре — Биркгофа называлась устойчивость по Пуассону.

---

[1]) Строго говоря, в научной терминологии слово «устойчивость» выражает определенное понятие не само по себе, а лишь в сочетании с другими словами, уточняющими его смысл (например, «устойчивость по Ляпунову»). Так что если это слово употребляется отдельно (и из контекста не видно, что подразумевается то или иное уточнение), то ясно, что это делается в порядке предварительного (или резюмирующего) описания и что в математическом тексте в дальнейшем (или ранее) должны быть даны точные формулировки.

В оригиналах статей данного сборника слово «recurrence» в качестве точного термина употребляется в смысле Готтшалка — Хедлунда и соответственно обычно оно переводилось как «устойчивость по Пуассону». Но в статье Шуба, а также Шуба и Сулливана (где вообще допускаются вольности терминологии) это слово употребляется описательно, обозначая вообще все явления, связанные с возвращением траекторий, вплоть до неблуждающих точек. В этих случаях оно переводилось словом «возвращаемость», которое не является точным термином и тем самым указывает, что соответствующее место не носит характера точных формулировок, либо же вся фраза переводилась по смыслу, без дословного соответствия оригиналу.

Последнее замечание — о взаимосвязи между употребляющимися в переводах русским термином «топологическая цепь Маркова» и английским subshift of finite type. В последнем подразумевается, что chift — это стандартный сдвиг σ в пространстве бесконечных двусторонних последовательностей символов из некоторого конечного[1]) алфавита, а subshift — это ограничение σ на некоторое замкнутое инвариантное (относительно σ) подмножество этого пространства. Subshift of finite type получается в том случае, когда условие принадлежности бесконечной последовательности $\{x_i, -\infty < i < \infty\}$ множеству F формулируется в терминах ограничений, наложенных на участки этих последовательностей некоторой конечной длины r. (А именно, некоторые r-членные последовательности $(a_0, \ldots, a_{r-1})$ объявляются допустимыми, и бесконечная последовательность $\{x_i\}$ принадлежит F тогда и только тогда, когда при всех i ее участок $(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+r-1})$ допустим.) Топологическая цепь Маркова — частный случай, получающийся при $r = 2$. Когда в оригиналах статей употребляется термин subshift of finite type, то как правило, речь идет именно о топологической цепи Маркова. В то же время легко доказать, что любой subshift of finite type топологически сопряжен с некоторой топологической цепью Маркова, и в этом смысле использование последнего термина оправдано даже при $r \neq 2$.

[1]) По крайней мере, он конечен в статьях данного сборника.