ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Под общей редакцией Р. Ф. Апатенок

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования БССР в качестве учебного пособия для студентов инженерно-технических специальностей высших учебных заведений

МИНСК
«ВЫШЭЙШАЯ ШКОЛА»
1977

517.1
Э45
УДК 512.8(075.8)

Рецензенты:
кафедра высшей математики Кишиневского политехнического института им. С. Лазо и канд. физ.-мат. наук, доц. кафедры высшей математики Белорусского института инженеров железнодорожного транспорта *В. Г. Вилядер*

Элементы линейной алгебры. Под общ. ред.
Э45 Р. Ф. Апатенок. Мн., «Вышэйш. школа», 1977.
256 с. с ил.
На обороте тит. л. авт.: Р. Ф. Апатенок, А. М. Маркина, Н. В. Попова, В. Б. Хейнман

В учебном пособии излагаются все вопросы раздела «Линейная алгебра», предусмотренные программой курса «Высшая математика» для инженерно-технических специальностей вузов. Содержится большое количество задач для самостоятельного решения.

Пособие предназначено для студентов инженерно-технических специальностей вузов.

$Э \frac{20203-177}{М304(05)-77}$ 30—77 517.1

Рогнеда Федоровна Апатенок, Александра Матвеевна Маркина, Наталья Васильевна Попова, Валентина Борисовна Хейнман

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ. Под общей редакцией Рогнеды Федоровны Апатенок

ИБ № 296

Редактор *Е. В. Сукач*. Мл. редактор *Т. С. Канцлер*. Худож. редактор *А. Н. Звонарёв*. Техн. редактор *П. В. Фрайман*. Корректор *А. П. Берлина*.

Сдано в набор 15/VI-1977 г. Подписано к печати 21/XI 1977 г. Бумага $84 \times 108^1/_{32}$. тип. № 1. Печ. л. 8 (13,44). Уч.-изд. л. 13,41. Изд. № 75-212. Тип. зак. 311. Тираж 15 000 экз. Цена 65 коп.

Издательство «Вышэйшая школа» Государственного комитета Совета Министров БССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Редакция литературы по математике, физике и энергетике. 220004. Минск, Парковая магистраль, 11. Ордена Трудового Красного знамени типография ЦК КП Белоруссии. Минск, Ленинский пр., 79.

ПРЕДИСЛОВИЕ

В последние годы существенно возросла роль линейной алгебры в различных разделах математики и техники. Это нашло отражение в новой программе по курсу высшей математики для втузов, в которой значительно расширен раздел линейной алгебры.

Настоящее учебное пособие предназначено для студентов технических вузов всех специальностей. В нем содержатся все вопросы раздела «Линейная алгебра», предусмотренные программой курса «Высшая математика» для инженерно-технических специальностей высших учебных заведений, рассчитанной на 510 часов. Пособие может быть использовано аспирантами инженерно-технических специальностей втузов, а также студентами не математических факультетов университетов.

Учебное пособие содержит пять глав: «Матрицы и определители», «Системы линейных уравнений», «Линейные пространства», «Линейные преобразования», «Квадратичные формы». В каждой главе имеется достаточное количество задач и примеров для самостоятельного решения, снабженных ответами. Таким образом, данное пособие может быть использовано и в качестве задачника.

При написании данной книги авторы основывались на написанных ими пособиях, изданных в Белорусском политехническом институте («Матрицы и системы линейных уравнений», 1971, «Линейные пространства», 1973, «Квадратичные формы», 1973, «Канонические формы матриц», 1974, «Задачник по линейной алгебре», 1975), которые в течение ряда лет используются студентами Белорусского политехнического института и некоторых не математических факультетов Белорусского государственного университета.

Авторы выражают искреннюю благодарность доценту кафедры высшей математики Кишиневского политехнического института им. С. Лазо, канд. физ.-мат. наук П. К. Осматеску и доценту кафедры высшей математики Белорусского института инженеров железнодорожного транспорта, канд. физ.-мат. наук В. Г. Виляцеру, сделавшим ряд ценных замечаний при рецензировании пособия, а также К. Ф. Беганской, Н. В. Мадорской, И. Я. Скорикову и Н. Ф. Юранову за помощь, оказанную при оформлении рукописи.

Все отзывы и пожелания просим присылать по адресу: 220 004, Минск, Парковая магистраль, 11, Дом книги, издательство «Вышэйшая школа».

Авторы

Глава 1

МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

§ 1.1. Матрицы. Основные определения

Рассмотрим прямоугольную таблицу из mn чисел:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}. \end{matrix}$$

Эта таблица называется *матрицей* (точнее, *числовой матрицей*) размеров $m \times n$ (m на n). Для матрицы размеров $m \times n$ обычно употребляются следующие обозначения:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}; \quad (a_{ij}), \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, m; \\ j = 1, 2, \ldots, n. \end{matrix}$$

Иногда матрицу обозначают одной буквой, например

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} = A.$$

Если хотят указать размеры матрицы, то пишут $A_{m \times n}$.

Числа, из которых составлена матрица, называются *элементами матрицы*.

Если все элементы матрицы—вещественные (действительные) числа, то матрица называется *вещественной.*

Элементы $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ составляют i-ю строку, а элементы $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}$ — j-й столбец матрицы; a_{ij} — элемент матрицы, который находится в i-й строке и j-м столбце.

Матрица, состоящая из одной строки, называется *матрицей-строкой* или *строчной матрицей.* Такая матрица имеет вид

$$[a_{11}\ a_{12}\ \ldots\ a_{1n}].$$

Матрица

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1} \end{bmatrix},$$

состоящая из одного столбца, называется *матрицей-столбцом* или *столбцевой матрицей.*

Строки и столбцы матрицы называют ее *рядами.* Под *двумя параллельными рядами* будем понимать две строки или два столбца матрицы.

Две матрицы называются *равными,* если они одинаковых размеров и элементы одной матрицы равны соответствующим элементам другой. Таким образом, $A_{m\times n} = B_{p\times k}$, если $m = p$, $n = k$ и $a_{ij} = b_{ij}$ $(i = 1, 2, \ldots, m;$ $j = 1, 2, \ldots, n)$.

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов $(m=n)$, называется *квадратной. Порядком квадратной матрицы* называется число ее строк (или столбцов).

Матрицы

$$[a_1],\quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

являются квадратными матрицами соответственно первого, второго и третьего порядков.

Будем говорить, что в квадратной матрице

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ составляют *главную диагональ*, а элементы $a_{1n}, a_{2\,n-1}, \dots, a_{n1}$ — *побочную диагональ*.

Рассмотрим некоторые частные виды матриц, которые в дальнейшем будут часто встречаться.

Нулевой матрицей называется матрица, все элементы которой равны нулю. Ее обозначают буквой O, т. е.

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Диагональной матрицей называется квадратная матрица, у которой все элементы, стоящие не на главной диагонали, равны нулю, т. е. матрица вида

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, называется *единичной*. Будем обозначать эту матрицу буквой E,

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Единичную матрицу порядка n иногда обозначают E_n.

Квадратная матрица называется *треугольной*, если все элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю. При этом матрицу вида

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

называют *верхней треугольной*, а матрицу вида

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} —$$

нижней треугольной.

Назовем матрицу произвольных размеров *трапециевидной*, если она имеет вид

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

где $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{rr}$ отличны от нуля.

§ 1.2. Линейные операции над матрицами

Сложение матриц

Операция сложения вводится только для матриц одинаковых размеров.

Суммой двух матриц $A_{m\times n} = (a_{ij})$ и $B_{m\times n} = (b_{ij})$ называется матрица $C_{m\times n} = (c_{ij})$ такая, что $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ $(i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n)$.

Сумма матриц A и B обозначается $A+B$.

Сумма $A+B+C$ трех матриц — матрица, которая получается последовательным сложением данных матриц, т. е. $A+B+C=(A+B)+C$.

Аналогично определяется $A_1+A_2+\ldots+A_n$ для $n>3$.

Умножение матрицы на число

Произведением матрицы $A_{m\times n}=(a_{ij})$ *на число* α (или *числа* α *на матрицу* $A_{m\times n}$) называется матрица $B_{m\times n}=(b_{ij})$ такая, что $b_{ij}=\alpha a_{ij}$ ($i=1, 2, \ldots, m$; $j=1, 2, \ldots, n$).

Произведение матрицы A на число α обозначается $A\alpha$ или αA.

Пример. Произведение матрицы

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

на число $\alpha=-3$ есть матрица

$$A\alpha=\begin{bmatrix} -3 & -6 & -9 \\ 9 & 0 & -21 \end{bmatrix}.$$

Матрицу $(-1)\,A$ будем называть *матрицей, противоположной матрице* A, и обозначать $-A$.

Легко проверить справедливость следующих свойств.

1. $A+B=B+A$ (*коммутативность*).
2. $(A+B)+C=A+(B+C)$ (*ассоциативность*).
3. $A+O=A$.
4. $A+(-A)=O$.
5. $1A=A$.
6. $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$ (*ассоциативность относительно умножения чисел*).
7. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$ (*дистрибутивность умножения на число относительно сложения матриц*).
8. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$ (*дистрибутивность умножения на матрицу относительно сложения чисел*).

Разность матриц $A-B$ можно определить следующим образом: $A-B=A+(-B)$.

§ 1.3. Умножение матриц

Прежде чем рассматривать умножение матриц, введем понятие согласованности матриц. Матрицу A будем называть *согласованной с матрицей* B, если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. (Из согласованности матрицы A с B не следует, вообще говоря, согласованность матрицы B с A.)

Пример 1. Даны матрицы

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} \end{bmatrix}.$$

Матрица A согласована с матрицей B, так как число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. Матрица B не согласована с матрицей A, так как матрица B имеет один столбец, а число строк матрицы A равно двум. Матрица A не согласована с матрицей C, но матрица C согласована с матрицей A. Матрица B не согласована с матрицей C, и матрица C также не согласована с матрицей B.

Легко заметить, что если A и B — квадратные матрицы одинакового порядка, то матрица A согласована с B и B согласована с A.

Произведение матрицы A на матрицу B вводится только в том случае, когда матрица A согласована с матрицей B, т. е. если A есть матрица размеров $m \times n$, а B — размеров $n \times k$.

Произведением матрицы $A_{m\times n} = (a_{ij})$ *на матрицу* $B_{n\times k} = (b_{ij})$ называется матрица $C_{m\times k} = (c_{ij})$ такая, что

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sj}.$$

Произведение матрицы A на матрицу B обозначается AB.

Из определения следует, что элемент матрицы AB, стоящий в i-й строке и j-м столбце, равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B.

Произведение AB часто называют *произведением матрицы A на матрицу B справа* или *произведением матрицы B на матрицу A слева.*

Заметим, что если матрицу A можно умножить на матрицу B, то отсюда не следует, что матрицу B можно умножить на A, так как из согласованности матрицы A с B, вообще говоря, не следует согласованность матрицы B с A.

Следует иметь в виду, что если матрицу A можно умножить на матрицу B и B можно умножить на A, то, вообще говоря, $AB \neq BA$. Если $AB = BA$, то матрицы называются *перестановочными* или *коммутативными.*

Произведение двух ненулевых матриц может быть нулевой матрицей (для произведения чисел этого быть не может).

Пример 2. Найти произведение AB, если

$$A_{2\times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, \quad B_{3\times 2} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}.$$

Решение. Матрица $A_{2\times 3}$ согласована с матрицей $B_{3\times 2}$, поэтому существует произведение $A_{2\times 3}B_{3\times 2}$:

$$A_{2\times 3}B_{3\times 2} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{bmatrix}.$$

Пример 3. Умножить матрицу A на матрицу B:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -9 \end{bmatrix}.$$

Решение. Используя определение, находим

$$AB = \begin{bmatrix} 1(-1) + 2\cdot 1 & 1\cdot 0 + 2\cdot 2 & 1\cdot 3 + 2(-9) \\ -3(-1) + 4\cdot 1 & -3\cdot 0 + 4\cdot 2 & -3\cdot 3 + 4(-9) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -15 \\ 7 & 8 & -45 \end{bmatrix}.$$

Пример 4. Пусть

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$AB = \begin{bmatrix} 1-6+0 & 7-8+0 \\ 3-3-5 & 21-4+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ -5 & 17 \end{bmatrix},$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1+21 & -2-7 & 0+35 \\ 3+12 & -6-4 & 0+20 \\ -1+0 & 2+0 & 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & -9 & 35 \\ 15 & -10 & 20 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, мы видим, что $AB \neq BA$.

Пример 5. Пусть

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$AB = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 1(-1) & 1(-1) + 1\cdot 1 \\ 1\cdot 1 + 1(-1) & 1(-1) + 1\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O,$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + (-1)1 & 1\cdot 1 + (-1)1 \\ (-1)1 + 1\cdot 1 & (-1)1 + 1\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O.$$

В этом случае $AB = BA$.

Из определения операции умножения матриц следует, что

$$AE = EA = A, \quad AO = OA = O.$$

Если матрица A согласована с матрицей B, а матрица AB согласована с матрицей C, то под *произведением ABC трех матриц* понимаем матрицу, полученную последовательным умножением данных матриц, т. е. матрицу $(AB)C$.

Аналогично определяется произведение k матриц (k — натуральное число, $k > 3$).

Имеют место следующие свойства (при условии, что указанные операции имеют смысл).

1. $(AB)C = A(BC)$ *(ассоциативность)*.
2. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$ *(обозначается αAB)*.
3. $(A+B)C = AC + BC$ *(дистрибутивность умножения справа относительно сложения матриц)*.
4. $C(A+B) = CA + CB$ *(дистрибутивность умножения слева относительно сложения матриц)*.

Докажем первое свойство. Левая часть рассматриваемого равенства имеет смысл только в том случае, когда матрица A согласована с матрицей B, а матрица AB согласована с матрицей C, т. е. если $A = A_{m\times n}$, $B = B_{n\times k}$, $C = C_{k\times l}$. Тогда матрица $(AB)C$ имеет размеры $m \times l$. Обозначим ее H. Легко убедиться, что произведение $A(BC)$ также имеет смысл и матрица $\widetilde{H} = A(BC)$ имеет те же размеры, что и матрица H. Докажем, что соответствующие элементы $h_{\mu\nu}$ и $\widetilde{h}_{\mu\nu}$ матриц H и $\widetilde{H}$ равны между собой.

Введем обозначение $AB = D_{m\times k}$. Элемент этой матрицы

$$d_{\mu\rho} = \sum_{s=1}^{n} a_{\mu s} b_{s\rho},$$

а элемент матрицы H имеет вид

$$h_{\mu\nu} = \sum_{\rho=1}^{k} d_{\mu\rho} c_{\rho\nu}$$

или

$$h_{\mu\nu} = \sum_{\rho=1}^{k} \left(\sum_{s=1}^{n} a_{\mu s} b_{s\rho} \right) c_{\rho\nu} = \sum_{\rho=1}^{k} \sum_{s=1}^{n} a_{\mu s} b_{s\rho} c_{\rho\nu} =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} \sum_{\rho=1}^{k} a_{\mu s} b_{s\rho} c_{\rho\nu} = \sum_{s=1}^{n} a_{\mu s} \sum_{\rho=1}^{k} b_{s\rho} c_{\rho\nu},$$

Очевидно, что

$$\sum_{\rho=1}^{k} b_{s\rho} c_{\rho\nu} = g_{s\nu}$$

есть элемент матрицы $BC = G$, стоящий в s-й строке и ν-м столбце. Тогда

$$h_{\mu\nu} = \sum_{s=1}^{n} a_{\mu s} g_{s\nu}.$$

В правой части этого равенства стоит элемент μ-й строки и ν-го столбца матрицы $\widetilde{H} = (\widetilde{h}_{\mu\nu}) = AG$. Следовательно,

$$h_{\mu\nu} = \widetilde{h}_{\mu\nu}.$$

В справедливости остальных свойств предлагаем читателю убедиться самостоятельно.

З а м е ч а н и е. Произведение двух верхних треугольных матриц есть верхняя треугольная матрица. Аналогичное утверждение справедливо и для нижних треугольных матриц.

§ 1.4. Многочлены от матриц

Целой положительной степенью A^k $(k > 1)$ *квадратной матрицы* A называется произведение k матриц, каждая из которых равна A. Согласно определению,

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k \text{ раз}}.$$

Очевидно, что матрица A^k имеет тот же порядок, что и матрица A.

Нулевой степенью A^0 *квадратной матрицы* A $(A \neq O)$ называется единичная матрица E того же порядка, что и A, т. е. $A^0 = E$.

Первой степенью A^1 *матрицы* A называется сама матрица A, следовательно, $A^1 = A$.

Многочленом или *полиномом степени* k (k — целое неотрицательное число) *от квадратной матрицы* A называется выражение вида

$$\alpha_0 A^k + \alpha_1 A^{k-1} + \ldots + \alpha_k A^0,$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — любые числа, причем $\alpha_0 \neq 0$.

Будем обозначать многочлен от матрицы A через $P(A)$. Таким образом,

$$P(A) = \alpha_0 A^k + \alpha_1 A^{k-1} + \ldots + \alpha_k A^0$$

или

$$P(A) = \alpha_0 A^k + \alpha_1 A^{k-1} + \ldots + \alpha_k E.$$

Из определения следует, что многочлен от матрицы может быть получен, если в обычный многочлен

$$P(x) = \alpha_0 x^k + \alpha_1 x^{k-1} + \ldots + \alpha_k$$

вместо x подставить квадратную матрицу (при этом надо учесть, что $\alpha_k = \alpha_k x^0$).

Пусть дан многочлен $P(x)$. Если $P(A)$ есть нулевая матрица, т. е. $P(A) = O$, то матрица A называется *корнем многочлена* $P(x)$, а многочлен $P(x)$ — *аннулирующим для матрицы* A.

Пример. Показать, что матрица

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

является корнем многочлена

$$P(x) = x^2 + x - 14.$$

Решение. Подставив в данный многочлен вместо x матрицу A, получим

$$P(A) = A^2 + A - 14E =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} - 14 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 13 & 4 \\ 3 & 16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -14 & 0 \\ 0 & -14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O.$$

Следовательно, матрица A является корнем данного многочлена.

§ 1.5. Транспонирование матрицы

Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется *матрицей, транспонированной к данной.*

Матрицу, транспонированную к матрице A, будем обозначать A' или $A^{\text{т}}$. Таким образом, для

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

$$A^{\text{т}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Операция нахождения матрицы, транспонированной к данной, называется *транспонированием матрицы.*

Заметим, что если A — матрица размеров $m \times n$, то $A^{\text{т}}$ имеет размеры $n \times m$.

Имеют место следующие свойства.

1. $(A^{\text{т}})^{\text{т}} = A$.
2. $(\alpha A)^{\text{т}} = \alpha A^{\text{т}}$.
3. $(A+B)^{\text{т}} = A^{\text{т}} + B^{\text{т}}$.
4. $(AB)^{\text{т}} = B^{\text{т}} A^{\text{т}}$.

В справедливости свойств 1—3 читатель может легко убедиться самостоятельно.

Докажем свойство 4. Следует заметить, что левая часть рассматриваемого равенства имеет смысл только в том случае, когда матрица A согласована с матрицей B, т. е. если $A = A_{m \times n}$ и $B = B_{n \times l}$. Очевидно, что тогда матрица $B^{\text{т}}$ согласована с матрицей $A^{\text{т}}$ и произведение $B^{\text{т}} A^{\text{т}}$ имеет смысл.

Для доказательства справедливости свойства 4 покажем, что матрицы $(AB)^{\text{т}}$ и $B^{\text{т}} A^{\text{т}}$ одинаковых размеров и их соответствующие элементы равны.

Произведение AB является матрицей размеров $m \times l$, следовательно, $(AB)^{\text{т}}$ — матрица размеров $l \times m$. Матрица $B^{\text{т}} A^{\text{т}}$ также имеет размеры $l \times m$, так как $B^{\text{т}} = B^{\text{т}}_{l \times n}$, $A^{\text{т}} = A^{\text{т}}_{n \times m}$.

Пусть c'_{ij} — элемент матрицы $(AB)^{\text{т}}$, стоящий в i-й строке и j-м столбце. Этот элемент равен элементу c_{ji}, стоящему в j-й строке и i-м столбце матрицы AB, т. е. $c'_{ij} = c_{ji}$. Согласно правилу умножения матриц,

$$c'_{ij} = c_{ji} = \sum_{s=1}^{n} a_{js} b_{si},$$

где a_{js} и b_{si} — соответственно элементы матриц A и B. Так как $a_{js} = a'_{sj}$, $b_{si} = b'_{is}$ (a'_{sj} и b'_{is} — соответственно элементы матриц $A^{\text{т}}$ и $B^{\text{т}}$), то

$$c'_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a'_{sj} b'_{is} = \sum_{s=1}^{n} b'_{is} a'_{sj}.$$

Последнее выражение, представляющее собой сумму произведений элементов i-й строки матрицы $B^{\text{т}}$ на соответствующие элементы j-го столбца матрицы $A^{\text{т}}$, является элементом матрицы $B^{\text{т}}A^{\text{т}}$, стоящим в i-й строке и j-м столбце. Таким образом, соответствующие элементы матриц $(AB)^{\text{т}}$ и $B^{\text{т}}A^{\text{т}}$ равны. Свойство 4 доказано.

Заметим, что свойство 4 состоит в том, что при транспонировании произведения двух матриц сомножители транспонируются и меняются местами.

Для произведения трех матриц имеем

$$(ABC)^{\text{т}} = ((AB)C)^{\text{т}} = C^{\text{т}}(AB)^{\text{т}} = C^{\text{т}}(B^{\text{т}}A^{\text{т}}) = C^{\text{т}}B^{\text{т}}A^{\text{т}}.$$

Следовательно,

$$(ABC)^{\text{т}} = C^{\text{т}}B^{\text{т}}A^{\text{т}}.$$

Аналогично для n сомножителей

$$(A_1A_2 \ldots A_{n-1}A_n)^{\text{т}} = A_n^{\text{т}} A_{n-1}^{\text{т}} \ldots A_2^{\text{т}} A_1^{\text{т}}.$$

§ 1.6. Блочные матрицы

До сих пор мы рассматривали матрицы, элементами которых являются числа. Можно рассматривать матрицы, элементами которых в свою очередь являются матрицы. К таким матрицам относятся блочные матрицы.

Пусть дана матрица

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Разобьем ее горизонтальными и вертикальными прямыми на ряд матриц. Полученные при этом матрицы называются *блоками (клетками) матрицы* A.

Данную матрицу можно записать в виде матрицы, элементами которой являются блоки. В этом случае будем говорить, что матрица записана в виде блочной матрицы. Очевидно, что данная матрица может быть записана в виде блочной не единственным образом.

Пример 1. Пусть данная матрица A разбита на блоки следующим образом:

$$A=\left[\begin{array}{cc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ \hdashline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ \hdashline a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{array}\right].$$

Введем обозначения:

$$B=B_{1\times 2}=[a_{11}\,a_{12}];\quad C=C_{1\times 3}=[a_{13}\,a_{14}\,a_{15}];$$

$$D=D_{2\times 2}=\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix};\quad F=F_{2\times 3}=\begin{bmatrix} a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{bmatrix};$$

$$G=G_{1\times 2}=[a_{41}\quad a_{42}];\quad K=K_{1\times 3}=[a_{43}\quad a_{44}\quad a_{45}].$$

Тогда матрицу A можно записать в виде блочной:

$$A=\begin{bmatrix} B_{1\times 2} & C_{1\times 3} \\ D_{2\times 2} & F_{2\times 3} \\ G_{1\times 2} & K_{1\times 3} \end{bmatrix} \text{ или } A=\begin{bmatrix} B & C \\ D & F \\ G & K \end{bmatrix}.$$

Эту же матрицу можно записать в виде следующей блочной матрицы:

$$A=[R\quad S\quad Q],$$

где

$$R=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{bmatrix},\qquad S=\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \\ a_{42} & a_{43} \end{bmatrix},\qquad Q=\begin{bmatrix} a_{14} & a_{15} \\ a_{24} & a_{25} \\ a_{34} & a_{35} \\ a_{44} & a_{45} \end{bmatrix}.$$

Блочная матрица, каждая строка которой содержит ν блоков, а каждый столбец — μ блоков, называется *блочной матрицей размеров* $\mu\times\nu$.

В примере 1 матрнца A сначала представлена в виде блочной матрицы размеров 3×2, а затем — размеров 1×3.

Будем говорить, что две матрицы одних и тех же размеров одинаковым образом разбиты на блоки, если их соответствующие блоки имеют одни и те же размеры.

Например, матрицы

$$A=\left[\begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{24} \end{array}\right], \qquad B=\left[\begin{array}{c|ccc} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ \hline b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{array}\right]$$

одинаковым образом разбиты на блоки.

Линейные операции (сложение, вычитание и умножение на число) над блочными матрицами могут быть сведены к соответствующим операциям над блоками. При этом следует иметь в виду, что при сложении и вычитании матрицы должны быть одинаковым образом разбиты на блоки.

Прежде чем свести операцию умножения матриц к операциям над блоками, введем понятие согласованности блочных матриц.

Блочная матрица $A=A_{\mu\times\nu}$ называется *согласованной с блочной матрицей* $B=B_{\varkappa\times\lambda}$, если $\nu=\varkappa$ и блоки i-й строки матрицы A согласованы с соответствующими блоками j-го столбца матрицы B при любых i, j ($i=1, 2, \ldots, \mu$; $j=1, 2, \ldots, \lambda$).

Пусть матрицы A и B представлены в виде блочных матриц $A_{\mu\times\nu}$ и $B_{\varkappa\times\lambda}$ так, что матрица $A_{\mu\times\nu}$ согласована с матрицей $B_{\varkappa\times\lambda}$. Тогда произведение $AB=C$ может быть представлено в виде блочной матрицы $C_{\mu\times\lambda}$, блок которой, стоящий в i-й строке и j-м столбце, есть матрица, равная сумме произведений блоков i-й строки матрицы $A_{\mu\times\nu}$ на соответствующие блоки j-го столбца матрицы $B_{\varkappa\times\lambda}$.

Пример 2. Пусть матрицы A и B представлены в виде блочных матриц следующм образом:

$$A=\left[\begin{array}{c|cc} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 3 \end{array}\right], \qquad B=\left[\begin{array}{cc} -2 & 0 \\ \hline 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{array}\right]$$

или

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix},$$

где

$$A_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad A_2=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3=[-1],$$

$$A_4=[0 \quad 3], \quad B_1=[-2 \quad 0], \quad B_2=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Легко показать, что блочная матрица A согласована с блочной матрицей B. Следовательно,

$$AB=\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_1B_1+A_2B_2 \\ A_3B_1+A_4B_2 \end{bmatrix}.$$

Так как

$$A_1B_1+A_2B_2=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -6 & -1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_3B_1+A_4B_2=[2 \quad 0]+[0 \quad 0]=[2 \quad 0],$$

то

$$AB=\left[\begin{array}{cc} -6 & -1 \\ -4 & 0 \\ \hline 2 & 0 \end{array}\right].$$

Заметим, что если данные матрицы A и B представить в виде блочных матриц следующим образом:

$$A=\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 3 \end{array}\right], \qquad B=\left[\begin{array}{cc} -2 & 0 \\ \hline 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{array}\right],$$

то блочная матрица A не согласована с блочной матрицей B, и, следовательно, AB нельзя найти, оперируя этими блочными матрицами.

§ 1.7. Перестановки

Для того чтобы ввести понятие определителя матрицы, нам понадобятся некоторые сведения о перестановках.

Перестановкой из n натуральных чисел 1, 2, 3, ... , n

называется любое их расположение в определенном порядке.

Произвольную перестановку из n чисел будем записывать в виде $(\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_n)$, где каждое α_i — одно из чисел $1, 2, \ldots, n$ и $\alpha_i \neq \alpha_j$ при $i \neq j$.

Две перестановки из n чисел называются *различными,* если они отличаются расположением хотя бы одного числа.

Например, (1; 3; 2; 4; 5) и (2; 1; 5; 4; 3) — две различные перестановки из чисел 1, 2, 3, 4, 5.

Подсчитаем число различных перестановок из чисел $1, 2, 3, \ldots, n$. Так как на первом месте можно поместить любое из n данных чисел, на втором — любое из $(n-1)$ оставшихся чисел и т. д., то получаем $n \cdot (n-1) \times \times (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ различных перестановок.

Итак, число различных перестановок из чисел $1, 2, 3, \ldots, n$ равно произведению $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$, которое обозначается $n!$ («эн факториал»).

Будем говорить, что *два числа образуют инверсию в перестановке,* если большее число стоит перед меньшим.

Например, в перестановке (1; 4; 5; 3; 2) инверсию образуют следующие пары чисел: 4 и 3, 4 и 2, 5 и 3, 5 и 2, 3 и 2. Итак, в рассматриваемой перестановке пять пар чисел образуют инверсию, т. е. имеется пять инверсий.

Число инверсий в перестановке $(\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_n)$ будем обозначать через $k(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

Легко заметить, что

$$k(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = k_1 + k_2 + \ldots + k_{n-1},$$

где $k_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$ — число чисел, стоящих перед числом i в перестановке, полученной из данной зачеркиванием чисел, меньших числа i (если таковые имеются).

Пример. Найти число инверсий в перестановке (3; 1; 2; 4).

Решение. Перед 1 стоит одно число, следовательно, $k_1 = 1$. Зачеркнем число 1. Теперь перед числом 2 стоит одно число, следовательно, $k_2 = 1$. Аналогично получаем $k_3 = 0$. Следовательно, $k(3, 1, 2, 4) = 1 + 1 + 0 = 2$.

Заметим, что если числа в перестановке записаны в порядке возрастания, то число k инверсий равно нулю.

Если число инверсий в перестановке четное, то она называется *четной,* если нечетное, то перестановка называется *нечетной.*

Если в данной перестановке поменять местами два числа α_i и α_j, при условии, что остальные числа остаются на своих местах, то будем говорить, что новая перестановка получена из данной транспозицией чисел α_i и α_j. Будем считать, что две перестановки имеют *разный характер четности,* если одна из них — четная, а другая — нечетная.

Теорема. *Данная перестановка и перестановка, полученная из нее одной транспозицией, имеют разный характер четности.*

Доказательство. Возможны следующие случаи.

1. Переставляемые числа α_i и α_j стоят в перестановке рядом, т. е. перестановка имеет вид

$$(\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_i; \alpha_j; \ldots; \alpha_n). \qquad (1.1)$$

Применив к перестановке (1.1) транспозицию чисел α_i и α_j, получим перестановку

$$(\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_j; \alpha_i; \ldots; \alpha_n). \qquad (1.2)$$

Числа α_i и α_j со всеми остальными числами в обеих перестановках образуют одно и то же число инверсий. Если числа α_i и α_j в перестановке (1.1) не образуют инверсию, то в перестановке (1.2) эти числа образуют инверсию, и наоборот. Следовательно, в любом случае число инверсий в перестановке (1.1) отличается на единицу от числа инверсий в перестановке (1.2), т. е. перестановки (1.1) и (1.2) имеют разный характер четности.

2. Между переставляемыми числами α_i и α_j в перестановке имеется s чисел $(s>0)$, т. е. перестановка имеет вид

$$(\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_{i-1}; \alpha_i; \beta_1; \beta_2; \ldots; \beta_s; \alpha_j; \ldots; \alpha_n). \qquad (1.3)$$

Применив к перестановке (1.3) транспозицию чисел α_i и α_j, получим перестановку

$$(\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_{i-1}; \alpha_j; \beta_1; \beta_2; \ldots; \beta_s; \alpha_i; \ldots; \alpha_n). \qquad (1.4)$$

Перестановка (1.4) может быть получена из перестановки (1.3) следующим образом. Осуществим в перестановке (1.3) транспозицию чисел α_i и β_1, в полученной перестановке — транспозицию чисел α_i и β_2 и т. д. Этот процесс продолжаем до получения перестановки

$$(\alpha_1;\ \alpha_2;\ \ldots\ \alpha_{i-1};\ \beta_1;\ \beta_2;\ \ldots\ ;\ \beta_s;\ \alpha_j;\ \alpha_i;\ \ldots\ ;\ \alpha_n). \quad (1.5)$$

При этом осуществим $s+1$ транспозиций. Далее в перестановке (1.5) осуществим транспозицию чисел α_j и β_s, в полученной перестановке — транспозицию чисел α_j и β_{s-1} и т. д. Этот процесс продолжаем до получения перестановки (1.4). При этом осуществим s транспозиций.

Таким образом, перестановка (1.4) получается из перестановки (1.3) с помощью $2s+1$ транспозиций рядом стоящих чисел. Так как каждая транспозиция рядом стоящих чисел приводит к перестановке, имеющей другой характер четности, то перестановки (1.3) и (1.4) имеют различный характер четности. ■*

Читатель легко убедится в справедливости того, что из любой перестановки $(\alpha_1;\ \alpha_2;\ \ldots\ ;\ \alpha_n)$ может быть получена перестановка $(1;\ 2;\ \ldots\ ;\ n)$ с помощью последовательного применения конечного числа транспозиций. (Если в данной перестановке произведена транспозиция и в полученной перестановке также произведена транспозиция, то будем говорить, что последняя перестановка получена из данной последовательным применением двух транспозиций.)

§ 1.8. Определители матриц

Понятие определителя матрицы вводится только для квадратной матрицы. Пусть дана квадратная матрица порядка n:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим произведения элементов этой матрицы, взятых по одному и только по одному из каждой ее строки и каждого столбца. Любое такое произведение будет содержать n сомножителей и может быть записано в виде

$$a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n}. \quad (1.6)$$

* Знак ■ означает конец доказательства.

Здесь для удобства сомножители расположены так, что первые индексы (номера строк) следуют в порядке возрастания, вторые индексы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ (номера столбцов) представляют собой натуральные числа $1, 2, \ldots, n$, расположенные в некотором порядке. Таким образом, $(\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_n)$ есть перестановка из n чисел.

Два произведения вида (1.6) будем считать различными, если соответствующие им перестановки из вторых индексов различны. Различных произведений будет столько, сколько можно составить различных перестановок из n чисел, т. е. $n!$.

Далее будем оперировать только с различными произведениями. Умножив каждое из $n!$ этих произведений на $(-1)^{k(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}$, получим произведения вида

$$(-1)^{k(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n}. \qquad (1.7)$$

Сумма $n!$ произведений вида (1.7) называется *определителем матрицы A порядка n*. Каждое из выражений (1.7) называется *членом определителя*.

Определитель матрицы A порядка n называется *определителем n-го порядка* и обозначается

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, согласно определению,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_n)} (-1)^{k(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n}, \qquad (1.8)$$

где сумма содержит все слагаемые, для которых перестановки $(\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_n)$ различны.

Употребляются также следующие обозначения определителя:

$$|A|, \ \Delta, \ \det A, \quad \det(a_{ij}).$$

Иногда определитель называют *детерминантом*.

Заметим, что определитель матрицы есть число, так как мы рассматриваем матрицы, элементами которых являются числа.

Элементы, строки, столбцы и диагонали матрицы называют соответственно *элементами, строками, столбцами* и *диагоналями определителя матрицы.* Так же, как и для матрицы, строки и столбцы определителя называют его *рядами.*

Рассмотрим следующие частные случаи.

1. Определитель матрицы первого порядка

$$A_1 = (a_{11})$$

содержит, согласно выражению (1.8), одно слагаемое

$$(-1)^{k(\alpha_1)} a_{1\alpha_1}.$$

Здесь $\alpha_1 = 1$ и $k(\alpha_1) = 0$. Следовательно,

$$\det A_1 = \det(a_{11}) = a_{11}.$$

2. Определитель матрицы второго порядка

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

содержит, согласно выражению (1.8), $2! = 2$ слагаемых вида

$$(-1)^{k(\alpha_1, \alpha_2)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2}.$$

Для первого слагаемого возьмем $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$. Тогда $k(1, 2) = 0$. Для второго слагаемого $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1$, $k(2, 1) = 1$.

Таким образом, определитель второго порядка

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

т. е. равен произведению элементов главной диагонали минус произведение элементов побочной диагонали.

3. Определитель матрицы третьего порядка

$$A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

содержит $3! = 6$ слагаемых вида

$$(-1)^{k(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} a_{3\alpha_3}.$$

Чтобы записать эти слагаемые, выпишем все перестановки из вторых индексов: (1; 2; 3), (2; 3; 1), (3; 1; 2), (3; 2; 1), (2; 1; 3), (1; 3; 2). Число k инверсий в них соответственно равно 0, 2, 2, 3, 1, 1.

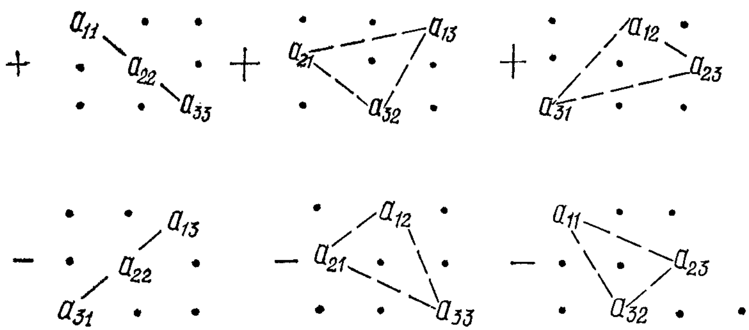
Таким образом, определитель третьего порядка

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - \\ - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \qquad (1.9)$$

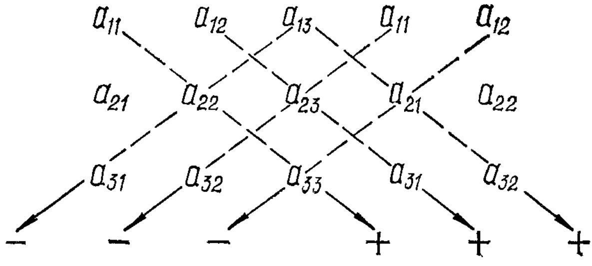
Существует ряд правил, облегчающих составление выражения, стоящего в правой части формулы (1.9). Рассмотрим некоторые из них:

1) слагаемые составляются по следующей схеме:



В этой схеме плюс означает, что произведения указанных элементов берутся со своими знаками, а минус — с противоположными. Это правило называется *правилом треугольников;*

2) слагаемые составляются по схеме



В этой схеме используется матрица, полученная из матрицы определителя приписыванием справа первых двух ее столбцов.

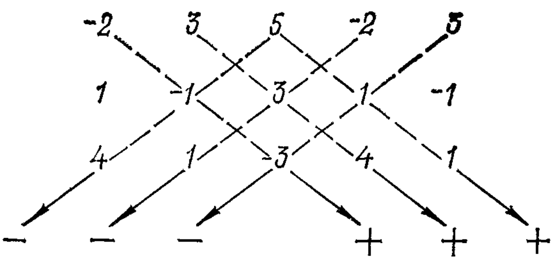
Пример. Вычислить определнтель

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}.$$

Решение. По правилу треугольников получим

$$\Delta = (-2)(-1)(-3)+5\cdot 1\cdot 1+3\cdot 3\cdot 4-5(-1)4-3\cdot 1(-3)-(-2)3\cdot 1=70.$$

Пользуясь вторым правилом, составим матрицу



и получим

$$\Delta=(-2)(-1)(-3)+3\cdot 3\cdot 4+5\cdot 1\cdot 1-5(-1)4-(-2)3\cdot 1-3\cdot 1(-3)=70.$$

Теорема. *Если $a_{\alpha_1\beta_1}a_{\alpha_2\beta_2}\ldots a_{\alpha_n\beta_n}$ — произведение элементов матрицы*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

взятых по одному и только одному из каждой строки и каждого столбца, то

$$(-1)^{k(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)+k(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}a_{\alpha_1\beta_1}a_{\alpha_2\beta_2}\ldots a_{\alpha_n\beta_n}$$

является членом определителя матрицы A.

Доказательство. Переставим в произведении

$$a_{\alpha_1\beta_1}a_{\alpha_2\beta_2}\ldots a_{\alpha_n\beta_n} \qquad (1.10)$$

множители так, чтобы перестановка, составленная из первых индексов, имела вид $(1; 2; \ldots; n)$. Тогда указанное произведение запишется в виде

$$a_{1\gamma_1}a_{2\gamma_2}\ldots a_{n\gamma_n}, \tag{1.11}$$

где $(\gamma_1; \gamma_2; \ldots; \gamma_n)$ — перестановка из чисел $1, 2. \ldots, n$ и

$$(-1)^{k(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)}a_{1\gamma_1}a_{2\gamma_2}\ldots a_{n\gamma_n}$$

есть член определителя матрицы A. Так как

$$a_{1\gamma_1}a_{2\gamma_2}\ldots a_{n\gamma_n} = a_{\alpha_1\beta_1}a_{\alpha_2\beta_2}\ldots a_{\alpha_n\beta_n}, \tag{1.12}$$

то для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$(-1)^{k(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)} = (-1)^{k(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)+k(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}. \tag{1.13}$$

Перестановки

$$(\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_n), \tag{1.14}$$

$$(\beta_1; \beta_2; \ldots; \beta_n), \tag{1.15}$$

$$(1; \ 2; \ \ldots; n) \tag{1.16}$$

$$(\gamma_1; \gamma_2; \ldots; \gamma_n) \tag{1.17}$$

являются перестановками, составленными из первых и вторых индексов соответственно произведений (1.10) и (1.11).

Из равенства (1.12) видно, что перестановка (1.16) получена с помощью некоторого числа транспозиций из перестановки (1.14), а перестановка (1.17) — из (1.15) с помощью такого же числа транспозиций. Отсюда следует, что

$$k(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)+k(1, 2, \ldots, n)=k(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$$

и

$$k(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)+k(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$$

имеют один и тот же характер четности и, следовательно, равенство (1.13) имеет место. ■

Следствие. *Если*

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

то

$$\det A=\sum(-1)^{k(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)+k(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)}a_{\alpha_1\beta_1}a_{\alpha_2\beta_2}\ldots a_{\alpha_n\beta_n},$$

где $(\alpha_1;\alpha_2;\ldots;\alpha_n)$ и $(\beta_1;\beta_2;\ldots;\beta_n)$ — *перестановки из n чисел;* $a_{\alpha_1\beta_1}a_{\alpha_2\beta_2}\ldots a_{\alpha_n\beta_n}$ — *произведение элементов определителя, взятых по одному и только по одному из каждой строки и каждого столбца матрицы* A.

§ 1.9. Свойства определителей

1. *Определитель матрицы, полученной из данной транспонированием, равен определителю данной матрицы.*

Доказательство. Пусть

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

и $A^{\text{т}}$ — транспонированная к A матрица. Тогда, согласно следствию § 1.8,

$$\det A=\sum(-1)^{k(1,2,\ldots,n)+k(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)}a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\ldots a_{n\alpha_n};$$

$$\det A^{\text{т}}=\sum(-1)^{k(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)+k(1,2,\ldots,n)}a_{\alpha_1 1}a_{\alpha_2 2}\ldots a_{\alpha_n n}.$$

Отсюда $\det A=\det A^{\text{т}}$. ■

Это свойство называется *свойством инвариантности определителя относительно транспонирования матрицы.*

2. *Если все элементы некоторого ряда определителя равны нулю, то определитель равен нулю.*

3. *Если все элементы некоторого ряда определителя имеют общий множитель, то его можно вынести за знак определителя.*

Например, если все элементы i-й строки определителя имеют множитель λ, то

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \ldots & \lambda a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Следствие. *Если матрица B получена из матрицы A умножением некоторого ряда на число λ,* то $\det B = \lambda \det A$. (Умножить ряд матрицы на число k значит умножить на k все элементы этого ряда.)

4. *Определитель, у которого каждый элемент некоторого ряда является суммой двух слагаемых, равен сумме двух определителей, у первого из которых в указанном ряду стоят первые слагаемые, а у второго — вторые слагаемые; остальные ряды, параллельные указанному, у всех определителей одинаковы.*

Например, если каждый элемент j-го столбца определителя является суммой двух слагаемых, то

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a'_{1j}+a''_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a'_{2j}+a''_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a'_{nj}+a''_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a'_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a'_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a'_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a''_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a''_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a''_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Свойства 2—4 следуют непосредственно из определения определителя.

5. *Если матрица B получена из матрицы A перестановкой двух параллельных рядов, то* $\det A = -\det B$.

Доказательство. Пусть матрица B получена из матрицы A перестановкой двух рядом стоящих столбцов с номерами α_i и α_{i+1}. Тогда

$$\det A = \sum (-1)^{k_1} a_{1\alpha_1} \ldots a_{i\alpha_i} a_{i+1\,\alpha_{i+1}} \ldots a_{n\alpha_n},$$

$$\det B = \sum (-1)^{k_2} a_{1\alpha_1} \ldots a_{i-1\,\alpha_{i-1}} b_{i\beta_i} b_{i+1\,\beta_{i+1}} a_{i+2\,\alpha_{i+2}} \ldots a_{n\alpha_n},$$

где

$$k_1 = k(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n),$$

$$k_2 = k(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i+1}, \alpha_i, \ldots, \alpha_n),$$

$$b_{i\beta_i} = a_{i+1\,\alpha_{i+1}}, \quad b_{i+1\,\beta_{i+1}} = a_{i\alpha_i}.$$

Так как перестановка $(\alpha_1; \ldots; \alpha_i; \alpha_{i+1}; \ldots; \alpha_n)$ после применения транспозиции чисел α_i и α_{i+1} дает перестановку $(\alpha_1; \ldots; \alpha_{i+1}; \alpha_i; \ldots; \alpha_n)$, то k_1 и k_2 имеют разный характер четности, и, следовательно, $\det A = -\det B$.

Пусть матрица B получена из матрицы A перестановкой i-го и j-го столбцов $(i<j)$, между которыми содержится m столбцов $(j=i+m+1)$. Очевидно, что i-й столбец можно поместить на место j-го, а j-й — на место i-го путем последовательной перестановки рядом стоящих столбцов $2m+1$ раз. Поэтому

$$\det B = (-1)^{2m+1} \det A = -\det A.$$

Справедливость этого свойства для строк следует из свойства инвариантности определителя относительно транспонирования матрицы. ■

6. *Если матрица A имеет два одинаковых параллельных ряда, то* $\det A = 0$.

Доказательство. Поменяв местами два одинаковых параллельных ряда матрицы и учитывая свойство 5, получим $\det A = -\det A$, откуда $\det A = 0$. ■

7. *Если матрица A имеет два параллельных пропорциональных ряда, то* $\det A = 0$.

Доказательство. Пусть в матрице A элементы некоторого ряда равны соответствующим элементам параллельного ряда, умноженным на λ. Тогда, вынося λ за знак $\det A$, получим $\det A = \lambda \det B$, где B — матрица с двумя одинаковыми параллельными рядами. Так как $\det B = 0$, то и $\det A = 0$. ■

8. *Если матрица B получена из матрицы A прибавлением к некоторому ряду другого, параллельного ему ряда, умноженного на λ, то* $\det A = \det B$. (Прибавить к данному ряду другой, параллельный ему ряд,—значит к элементам данного ряда прибавить соответствующие элементы параллельного ему ряда.)

Это следует из свойств 4 и 7.

§ 1.10. Миноры и алгебраические дополнения

Пусть дана матрица размеров $m \times n$. Выберем в ней произвольно s строк и s столбцов, причем каждая строка и каждый столбец могут быть выбраны только один раз $(1 \leqslant s \leqslant \min(m, n)$, где $\min(m, n)$ — меньшее из чисел m и n). Элементы, стоящие на пересечении выбранных строк и столбцов, образуют матрицу порядка s. Определитель этой матрицы называется *минором порядка s данной матрицы.*

Для квадратной матрицы наряду с понятием минора вводится понятие дополнительного к нему минора.

Пусть дана квадратная матрица порядка n и ее минор M порядка s. *Минором M', дополнительным к минору M,* называется определитель матрицы, оставшейся после вычеркивания тех s строк и s столбцов данной матрицы, которые входят в минор M.

Очевидно, что дополнительным к минору M' будет минор M.

Пример 1. Дана матрица

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}.$$

Выбрав в ней 2-ю и 3-ю строки и 3-й и 5-й столбцы, получнм минор 2-го порядка:

$$M = \begin{vmatrix} a_{23} & a_{25} \\ a_{33} & a_{35} \end{vmatrix}.$$

Дополнительным мнНором к минору M будет

$$M' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \\ a_{51} & a_{52} & a_{54} \end{vmatrix}.$$

Миноры квадратной матрицы называют также *минорами ее определителя.*

Алгебраическим дополнением минора называется дополнительный к нему минор, умноженный на $(-1)^{\sigma}$, где σ — сумма номеров строк и столбцов данной матрицы, которые входят в рассматриваемый минор.

Пример 2. Найти алгебраическое дополнение M^* минора M, рассмотренного в примере 1.

Решение. На основании определения получим

$$M^* = M'(-1)^{\sigma},$$

где $\sigma = 2 + 3 + 3 + 5 = 13$. Следовательно.

$$M^* = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \\ a_{51} & a_{52} & a_{54} \end{vmatrix}.$$

Каждый элемент a_{ij} матрицы n-го порядка является минором 1-го порядка. Дополнительный минор является определителем порядка $(n-1)$. Этот дополнительный минор будем называть *минором элемента* a_{ij} и обозначать M_{ij}.

Алгебраическое дополнение элементов a_{ij} будем обозначать A_{ij}. Из определения алгебраического дополнения следует, что

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}.$$

Пример 3. Дана матрица

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -5 \\ 7 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Алгебраическим дополнением элемента -3, стоящего в первой строке и втором столбце, будет

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}=-(12+35)=-47.$$

§ 1.11. Разложение определителя по элементам ряда

Теорема. *Определитель матрицы равен сумме произведений элементов некоторого его ряда на алгебраические дополнения этих элементов.*

Доказательство. Пусть дана матрица A, определитель которой

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Докажем теорему для случая, когда в качестве ряда взята некоторая строка, т. е. докажем справедливость равенства

$$\det A=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots \\ \ldots+a_{ij}A_{ij}+\ldots+a_{in}A_{in}, \qquad (1.18)$$

где i — некоторое фиксированное число, $1\leqslant i\leqslant n$.

Так как A_{ij} является определителем порядка $(n-1)$, то $a_{ij}A_{ij}$ состоит из $(n-1)!$ слагаемых и, следовательно, правая часть равенства (1.18) содержит $n \cdot (n-1)! = n!$ слагаемых.

Докажем, что все слагаемые, входящие в $a_{ij}A_{ij}$, являются членами определителя $\det A$.

Если $i=j=1$, то $a_{ij}A_{ij}=a_{11}A_{11}$. Согласно определению определителя,

$$A_{11} = \sum_{(\alpha_2; \ldots; \alpha_n)} (-1)^{k(\alpha_2, \ldots, \alpha_n)} a_{2\alpha_2} a_{3\alpha_3} \ldots a_{n\alpha_n}.$$

Следовательно,

$$a_{11}A_{11} = \sum_{(\alpha_2; \ldots; \alpha_n)} (-1)^{k(\alpha_2, \ldots; \alpha_n)} a_{11} a_{2\alpha_2} a_{3\alpha_3} \ldots a_{n\alpha_n}.$$

Ясно, что $(-1)^{k(1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)} a_{11} a_{2\alpha_2} a_{3\alpha_3} \ldots a_{n\alpha_n}$ является членом определителя $\det A$. Но $k(1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = k(\alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, поэтому все слагаемые, входящие в $a_{11}A_{11}$, являются членами определителя $\det A$.

Если i, j — любые числа ($1 \leqslant i \leqslant n$; $1 \leqslant j \leqslant n$), то преобразуем матрицу $A=(a_{ij})$ в матрицу $\tilde{A}=(\tilde{a}_{ij})$ так, чтобы элемент a_{ij} находился в первой строке и первом столбце, т. е. чтобы $\tilde{a}_{11}=a_{ij}$, и чтобы миноры M_{ij} и $\tilde{M}_{11}$ рассматриваемого элемента матриц A и $\tilde{A}$ совпадали. Для этого i-ю строку будем последовательно менять местами с рядом стоящей сверху строкой до тех пор, пока i-я строка не станет первой. При этом потребуется произвести $(i-1)$ таких перестановок. Затем j-й столбец меняем последовательно местами с рядом стоящим слева столбцом, пока j-й столбец не станет первым. При этом потребуется произвести $(j-1)$ перестановку. Следовательно,

$$\det A = (-1)^{(i-1)+(j-1)} \det A = (-1)^{i+j} \det A$$

или

$$\det A = \det \tilde{A} (-1)^{i+j} \tag{1.19}$$

и

$$a_{ij}A_{ij} = a_{ij}(-1)^{i+j} M_{ij} = (-1)^{i+j} \tilde{a}_{11} \tilde{M}_{11} = (-1)^{i+j} \tilde{a}_{11} \tilde{A}_{11}.$$

Согласно доказанному выше, слагаемые, входящие в $\tilde{a}_{11}\tilde{A}_{11}$, являются членами определителя $\det A$. Следовательно, в силу равенства (1.19), заключаем, что слагаемые, входящие в $a_{ij}A_{ij}$, являются членами определителя $\det A$. ■

Справедливость теоремы для случая, когда в качестве ряда выбран некоторый столбец, следует из свойства инвариантности определителя относительно транспонирования матрицы.

Пример. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & 8 & 4 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix},$$

разлагая его по элементам второго столбца.

Решение.

$$\Delta = (-5)(-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 8(-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + $$
$$+ (-3)(-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -121.$$

Рассмотренная теорема является частным случаем более общей теоремы — теоремы Лапласа, которую мы приведем здесь без доказательства.

Теорема Лапласа. *Определитель порядка n равен сумме произведений всевозможных миноров k-го порядка ($k<n$), которые можно составить из произвольно выбранных k параллельных рядов, на алгебраические дополнения этих миноров.*

§ 1.12. Теоремы замещения и аннулирования

Теорема замещения. *Сумма произведений произвольных n чисел $d_1, d_2, \ldots, d_n$ на алгебраические дополнения элементов некоторого ряда матрицы порядка n равна определителю матрицы, которая получается из данной заменой элементов указанного ряда на числа $d_1, d_2, \ldots, d_n$.*

Доказательство. Пусть дана матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ a_{i-1\,1} & a_{i-1\,2} & \ldots & a_{i-1\,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ a_{i+1\,1} & a_{i+1\,2} & \ldots & a_{i+1\,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Возьмем любые n чисел $d_1, d_2, \ldots, d_n$ и алгебраические дополнения элементов i-й строки $A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{in}$. Докажем, что

$$d_1A_{i1}+d_2A_{i2}+\ldots+d_nA_{in}=\det A_1, \tag{1.20}$$

где

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i-1\,1} & a_{i-1\,2} & \ldots & a_{i-1\,n} \\ d_1 & d_2 & \ldots & d_n \\ a_{i+1\,1} & a_{i+1\,2} & \ldots & a_{i+1\,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Разложив определитель $\det A_1$ по элементам i-й строки, получим

$$\det A_1=d_1D_1+d_2D_2+\ldots+d_nD_n,$$

где $D_1, D_2, \ldots, D_n$ — алгебраические дополнения соответственно элементов $d_1, d_2, \ldots, d_n$.

Так как $D_1=A_{i1}$, $D_2=A_{i2}, \ldots, D_n=A_{in}$, то $\det A_1=$ $=d_1A_{i1}+d_2A_{i2}+\ldots+d_nA_{in}$ и равенство (1.20) доказано.

Аналогично доказывается теорема для случая, когда числа $d_1, d_2, \ldots, d_n$ умножаются на алгебраические дополнения элементов некоторого столбца. ■

Теорема аннулирования. *Сумма произведений элементов одного из рядов матрицы на алгебраические дополнения элементов другого, параллельного ему ряда, равна нулю.*

Доказательство. Пусть дана матрица $A=(a_{ij})$ порядка n. Докажем, что

$$a_{l1}A_{k1}+a_{l2}A_{k2}+\ldots+a_{ln}A_{kn}=0, \tag{2.21}$$

где $l\neq k$; $1\leqslant l\leqslant n$; $1\leqslant k\leqslant n$.

Левая часть равенства (1.21) есть сумма произведений алгебраических дополнений элементов k-й строки матрицы A на числа $a_{l1}, a_{l2}, \ldots, a_{ln}$. На основании теоремы замещения эта сумма есть определитель $\det A_1$ матрицы A_1, полученной из матрицы A путем замены элементов k-й строки числами $a_{l1}, a_{l2}, \ldots, a_{ln}$. Следовательно, определитель $\det A_1$ имеет две одинаковые строки и потому равен нулю, т. е.

$$\det A_1 = a_{l1}A_{k1} + a_{l2}A_{k2} + \ldots + a_{ln}A_{kn} = 0.$$

Аналогично доказывается теорема для столбцов. ■

§ 1.13. Некоторые методы вычисления определителей n-го порядка

Разложение определителя по элементам строки или столбца

Теорема о разложении определителя по элементам строки или столбца позволяет свести вычисление определителя n-го порядка ($n>1$) к вычислению n определителей порядка $n-1$.

Если определитель имеет равные нулю элементы, то удобнее всего разлагать определитель по элементам той строки или столбца, который содержит наибольшее число нулей.

Используя свойства определителей (см. § 1.9), можно преобразовать определитель n-го порядка так, чтобы все элементы некоторой строки или столбца, кроме, может быть, одного, равнялись нулю. Таким образом, вычисление определителя n-го порядка, если он отличен от нуля, сводится к вычислению одного определителя $(n-1)$-го порядка.

Пример 1. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 7 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ -5 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Решение. Прибавив ко второй строке первую, к третьей — первую, умноженную на 2, к четвертой — первую, умноженную на —5, получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 5 & 16 & 13 \\ 0 & -8 & -36 & -22 \end{vmatrix}.$$

Разлагая определитель по элементам первого столбца, имеем

$$\Delta=-1\begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 5 & 16 & 13 \\ -8 & -36 & -22 \end{vmatrix}=-252,$$

Приведение определителя к треугольному виду

Определителем треугольного вида называется определитель треугольной матрицы, т. е. определители

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Определитель треугольного вида равен произведению элементов его главной диагонали, т. е.

$$\Delta_1=\Delta_2=a_{11}a_{22}a_{33}\ldots a_{nn}.$$

Действительно, разлагая определитель Δ_1 по элементам первого столбца, имеем

$$\Delta_1=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель вновь разлагаем по элементам первого столбца. Тогда

$$\Delta_1=a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & \ldots & a_{3n} \\ 0 & a_{44} & \ldots & a_{4n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Продолжая этот процесс, получим

$$\Delta_1 = a_{11}a_{22}a_{33} \ldots a_{nn}.$$

Аналогично можно показать, что

$$\Delta_2 = a_{11}a_{22} \ldots a_{nn}.$$

Таким образом, иногда удобно при вычислении определителя предварительно привести его к треугольному виду, используя свойства определителей.

Пример 2. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 5 & 6 & 3 \\ -1 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & -2 & 8 \end{vmatrix}.$$

Решение. Приведем определитель к треугольному виду. Для этого из второй строки вычтем первую, к третьей строке прибавим первую, из четвертой строкн вычтем первую, умноженную на 2. Получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

Так как определитель треугольного вида равен произведению элементов главной диагонали, то

$$\Delta = 1 \cdot 3 \cdot 2(-2) = -12.$$

Разложение определителя по теореме Лапласа

Теорема Лапласа позволяет свести вычисление определителя порядка n к вычислению определителей более низких порядков. Этой теоремой удобно пользоваться тогда, когда в определителе имеются равные нулю миноры. В этом случае при вычислении определителя удобно выделять в нем те k строк или столбцов, которые содержат наибольшее число миноров k-го порядка, равных нулю.

Пример 3. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 25 & 17 & 0 & 1 & 0 \\ 17 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение. Выделив в определителе две первые строки и применив теорему Лапласа, получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Метод опорного элемента

Метод опорного элемента заключается в последовательном применении формулы, выражающей определитель порядка n через определитель порядка $(n-1)$, элементами которого являются определители второго порядка.

Если элемент данного определителя, стоящий в левом верхнем углу, отличен от нуля, то эта формула имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{a_{11}^{n-2}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2n} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{31} & a_{3n} \end{vmatrix} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{n1} & a_{n2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{n1} & a_{n3} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix} \end{vmatrix}. \quad (1.22)$$

Элемент a_{11} в этом случае называется *опорным*. В качестве опорного элемента можно взять любой отличный от нуля элемент данного определителя.

При $n=3$ формула (1.22) имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{a_{11}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \end{vmatrix}. \qquad (1.23)$$

Докажем справедливость этого равенства. Умножим вторую и третью строки данного определителя на опорный элемент a_{11}. Так как при этом определитель умножится на a_{11}^2, то

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{a_{11}^2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11}a_{21} & a_{11}a_{22} & a_{11}a_{23} \\ a_{11}a_{31} & a_{11}a_{32} & a_{11}a_{33} \end{vmatrix}.$$

Вычитая в последнем определителе из второй строки первую, умноженную на a_{21}, а из третьей — первую, умноженную на a_{31}, получим

$$\Delta = \frac{1}{a_{11}^2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} \\ 0 & a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} \end{vmatrix}.$$

Разлагая полученный определитель по элементам первого столбца и учитывая, что

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix},$$

$$a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \quad a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

приходим к равенству (1.23).

Аналогично доказывается справедливость формулы (1.22).

Применяя последовательно формулу (1.22), мы приводим данный определитель к определителю второго порядка. Таким образом, вычисление определителя порядка n сводится к вычислению некоторого числа определителей второго порядка.

Пример 4. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 7 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ -5 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Решение. Согласно формуле (1.22),

$$\Delta = \frac{1}{(-1)^2} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -5 & -6 & -7 \\ -5 & -16 & -13 \\ 8 & 36 & 22 \end{vmatrix}.$$

Применив еще раз формулу (1.22), получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} -5 & -6 & -7 \\ -5 & -16 & -13 \\ 8 & 36 & 22 \end{vmatrix} = \frac{1}{-5} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} -5 & -6 \\ -5 & -16 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -5 & -7 \\ -5 & -13 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -5 & -6 \\ 8 & 36 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -5 & -7 \\ 8 & 22 \end{vmatrix} \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{5} \begin{vmatrix} 50 & 30 \\ -132 & -54 \end{vmatrix} = -252.$$

§ 1.14. Определитель произведения матриц

Теорема. *Определитель произведения двух квадратных матриц одинакового порядка равен произведению определителей перемножаемых матриц.*

Доказательство. Приведем доказательство теоремы для матриц второго порядка. Пусть даны матрицы

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}.$$

Произведением этих матриц будет матрица

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}.$$

Докажем, что

$$\det(AB) = \det A \det B.$$

Рассмотрим вспомогательную матрицу

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & -1 & b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}.$$

Выделив, например, в определителе матрицы C две первые строки и применив теорему Лапласа, получим

$$\det C = (-1)^{1+2+1+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

или

$$\det C = \det A \det B. \tag{1.24}$$

Вычислим $\det C$ другим способом. Для этого в матрице C к третьему столбцу прибавим первый, умноженный на b_{11}, и второй, умноженный на b_{21}, к четвертому столбцу прибавим первый, умноженный на b_{12}, и второй, умноженный на b_{22}. Тогда

$$\det C = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Выделив в полученном определителе последние две строки и применив теорему Лапласа, получим

$$\det C = (-1)^{3+4+1+2} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{vmatrix}$$

или

$$\det C = \det(AB). \tag{1.25}$$

Сравнивая выражения (1.24) и (1.25), имеем

$$\det(AB) = \det A \det B.$$

Аналогично эта теорема доказывается для матриц произвольного порядка. ■

З а м е ч а н и е. Теорема справедлива и для случая произведения n матриц ($n>2$).

§ 1.15. Обратная матрица

Матрица B называется *обратной квадратной матрице* A, если $AB=BA=E$, где E — единичная матрица. Из определения следует, что обратная матрица может существовать только для квадратной матрицы.

Прежде чем рассматривать вопрос существования обратной матрицы, введем некоторые понятия.

Невырожденной или *неособенной матрицей* называется квадратная матрица, определитель которой отличен от нуля.

Если определитель матрицы равен нулю, то матрица называется *вырожденной* или *особенной.*

Пусть дана квадратная матрица

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Матрицей, союзной или *присоединенной к матрице A,* называется матрица

$$C=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

где A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} данной матрицы A.

Обратим внимание на то, что в матрице C алгебраические дополнения к элементам i-й строки матрицы A расположены в i-м столбце.

Лемма. *Если A — квадратная матрица порядка n, а C — союзная к ней матрица, то*

$$AC=CA=E\det A,$$

где E — единичная матрица порядка n.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через D произведение AC, т. е.

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Согласно определению произведения матриц, элемент d_{ij} матрицы D равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца союзной матрицы C. Для элементов d_{ii}, стоящих на главной диагонали, получим сумму произведений элементов i-й строки матрицы A на их алгебраические дополнения, что равно $\det A$ (по теореме о разложении определителя по элементам ряда). Для остальных элементов d_{ij} $(i \neq j)$ получим сумму произведений элементов i-й строки на алгебраические дополнения элементов j-й строки, что равно нулю (по теореме аннулирования). Следовательно,

$$AC = \begin{bmatrix} \det A & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \det A & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \det A \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \det A = E \det A.$$

Аналогично можно доказать, что $CA = E \det A$.

Таким образом,

$$AC = CA = E \det A. \blacksquare \tag{1.26}$$

Теорема 1. *Для того чтобы существовала матрица B, обратная матрице A, необходимо и достаточно, чтобы матрица A была невырожденная.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть для матрицы A существует обратная матрица B. Тогда $AB = E$ и, следовательно, $\det(AB) = \det E$. Используя теорему об определителе произведения матриц, имеем $\det A \det B = \det E$. Так как $\det E = 1$, то $\det A \neq 0$ и, следовательно, матрица A невырожденная.

Достаточность. Пусть матрица A невырожденная, т. е. $\det A \neq 0$. Докажем, что матрица $\frac{1}{\det A} C$, где C — союзная матрица к A, является обратной матрице A.

Из (1.26) имеем

$$\frac{1}{\det A} AC = \frac{1}{\det A} CA = E$$

или

$$A\left(\frac{1}{\det A} C\right) = \left(\frac{1}{\det A} C\right) A = E,$$

откуда следует, что матрица $\frac{1}{\det A} C$ является обратной матрице A, т. е.

$$B = \frac{1}{\det A} C. \blacksquare$$

В процессе доказательства теоремы получен способ нахождения матрицы, обратной данной.

Матрицу, обратную матрице A, будем обозначать A^{-1}. Из теоремы следует, что

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}. \tag{1.27}$$

Теорема 2. *Для невырожденной матрицы существует единственная обратная матрица.*

Доказательство. Пусть A_1^{-1} и A_2^{-1} — матрицы, обратные невырожденной матрице A. Имеет место равенство

$$AA_1^{-1} = E.$$

Умножив обе его части на A_2^{-1} слева, получим

$$A_2^{-1}AA_1^{-1} = A_2^{-1}E = A_2^{-1}.$$

С другой стороны

$$A_2^{-1}AA_1^{-1} = (A_2^{-1}A)\,A_1^{-1} = EA_1^{-1} = A_1^{-1}.$$

Следовательно,

$$A_1^{-1} = A_2^{-1}. \blacksquare$$

Очевидно, что для невырожденных матриц имеют место следующие свойства.

1. $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$.
2. $(A^{-1})^{-1} = A$.
3. $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$.
4. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Пример 1. Дана матрица

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 6 & 7 & -3 \end{bmatrix}.$$

Выяснить, существует ли обратная ей матрица A^{-1}, и если существует, то найти ее.

Решение. Определитель матрицы A

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 6 & 7 & -3 \end{vmatrix} = 10 \neq 0.$$

Следовательно, данная матрица невырожденная и A^{-1} существует.

Согласно формуле (1.27),

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}.$$

Найдем алгебраические дополнения A_{ij} элементов данной матрицы. Получим:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 15, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 25,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 9,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -8, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -14.$$

Тогда

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 15 & 3 & -8 \\ 25 & 9 & -14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,5 & 0,1 & 0,4 \\ 1,5 & 0,3 & -0,8 \\ 2,5 & 0,9 & -1,4 \end{bmatrix}.$$

Пример 2. Дана матрица

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & -7 \\ -5 & 4 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 6 & 5 & 9 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Выяснить, существует ли обратная ей матрица.

Решение. Вычислим определитель матрицы A. Прибавив к первой строке матрицы A ее третью строку, получим

$$\det A=\begin{bmatrix} 2 & 6 & 5 & 9 & 2 \\ -5 & 4 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 6 & 5 & 9 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}=0,$$

так как в полученной матрице имеются две одинаковые строки.

Итак, матрица A ырожденная, и, следовательно, обратная матрица не существует.

§ 1.16. Ранг матрицы

Пусть дана матрица размеров $m\times n$:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Рангом матрицы называется наибольший из порядков ее миноров, отличных от нуля. Если все миноры матрицы равны нулю, то ранг матрицы считается равным нулю.

Ранг матрицы будем обозначать r.

Непосредственно из определения ранга следует.

1. *Для матрицы размеров* $m\times n$

$$0\leqslant r\leqslant\min(m, n),$$

где $\min(m, n)$ — *меньшее из чисел* m *и* n.

2. $r=0$ *тогда и только тогда, когда все элементы матрицы равны нулю.*

3. *Для квадратной матрицы* n*-го порядка* $r=n$ *тогда и только тогда, когда матрица невырожденная.*

Пример. Найти ранг матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 5 & 0 & 10 & 0 \end{bmatrix}.$$

Решение. Среди миноров первого порядка (элементов матрицы) есть отличный от нуля, значит, $r>0$. Очевидно, что все миноры второго и третьего порядков равны нулю. Следовательно, $r=1$.

Отметим свойство миноров матрицы, которым пользуются при нахождении ранга матрицы.

Если все миноры порядка k данной матрицы равны нулю, то все миноры более высокого порядка также равны нулю. Это следует, например, из теоремы о разложении определителя по элементам ряда.

Из указанного свойства ясно, что если среди миноров порядка k данной матрицы есть отличные от нуля, а все миноры порядка $k+1$ равны нулю или не существуют, то $r=k$. Отсюда следует, что ранг r матрицы может быть найден следующим образом.

Если все миноры первого порядка (элементы матрицы) равны нулю, то $r=0$. Если хотя бы один из миноров первого порядка отличен от нуля, а все миноры второго порядка равны нулю, то $r=1$. В том случае, когда есть минор второго порядка, не равный нулю, исследуем миноры третьего порядка. Так поступаем до тех пор, пока не случится одно из двух: либо все миноры порядка k равны нулю, либо миноры порядка k не существуют. Тогда $r=k-1$.

Указанный метод нахождения ранга матрицы не всегда бывает удобным, так как он часто связан с вычислением большого числа определителей. Ниже будут рассмотрены другие методы вычисления ранга матрицы.

Очевидны следующие свойства ранга матрицы.

1. *Ранг матрицы, полученной из данной вычеркиванием какого-либо ряда, равен рангу данной матрицы или меньше его на единицу.*

2. *Ранг матрицы, полученной из данной приписыва-*

нием к ней ряда, элементами которого являются произвольные числа, равен рангу исходной матрицы или больше его на единицу.

3. *Если вычеркнуть из матрицы или приписать к ней нулевой ряд, т. е. ряд, все элементы которого равны нулю, то ранг матрицы не изменится.*

4. *Ранг матрицы, полученной из данной транспонированием, равен рангу данной матрицы.*

§ 1.17. Элементарные преобразования матрицы

Элементарными преобразованиями матрицы назовем следующие преобразования:

1) умножение некоторого ряда матрицы на число, отличное от нуля;

2) прибавление к одному ряду матрицы другого, параллельного ему ряда, умноженного на произвольное число;

3) перестановку местами двух параллельных рядов матрицы.

Если матрица B получена из матрицы A некоторым элементарным преобразованием, а матрица C в свою очередь получена из матрицы B также элементарным преобразованием, то говорят, что матрица C получена из матрицы A последовательным применением этих преобразований.

Если матрица B получена из матрицы A путем элементарного преобразования, то будем писать $A \to B$.

Легко убедиться в том, что если матрица B получена из матрицы A путем элементарного преобразования, то и матрица A получается из матрицы B путем элементарного преобразования.

Лемма. *Элементарное преобразование 3, заключающееся в перестановке двух параллельных рядов матрицы, может быть получено последовательным применением элементарных преобразований 1 и 2.*

Доказательство. Пусть дана матрица

$$A = \begin{bmatrix} \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots \\ \dots & a_{2i} & \dots & a_{2j} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & a_{mi} & \dots & a_{mj} & \dots \end{bmatrix}.$$

Прибавив к i-му столбцу матрицы A j-й столбец, умноженный на -1, получим

$$A \to A_1 = \begin{bmatrix} \dots & a_{1i} - a_{1j} & \dots & a_{1j} & \dots \\ \dots & a_{2i} - a_{2j} & \dots & a_{2j} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & a_{mi} - a_{mj} & \dots & a_{mj} & \dots \end{bmatrix}.$$

Прибавив к j-му столбцу матрицы A_1 i-й столбец, имеем

$$A \to A_2 = \begin{bmatrix} \dots & a_{1i} & -a_{1j} & \dots & a_{1i} & \dots \\ \dots & a_{2i} & -a_{2j} & \dots & a_{2i} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & a_{mi} & -a_{mj} & \dots & a_{mi} & \dots \end{bmatrix}.$$

Прибавив к i-му столбцу матрицы A_2 j-й столбец, умноженный на -1, получим

$$A \to A_3 = \begin{bmatrix} \dots & -a_{1j} & \dots & a_{1i} & \dots \\ \dots & -a_{2j} & \dots & a_{2i} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & -a_{mj} & \dots & a_{mi} & \dots \end{bmatrix}.$$

Умножив i-й столбец матрицы A_3 на -1, имеем

$$A \to \begin{bmatrix} \dots & a_{1j} & \dots & a_{1i} & \dots \\ \dots & a_{2j} & \dots & a_{2i} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & a_{mj} & \dots & a_{mi} & \dots \end{bmatrix},$$

которая получается из данной матрицы A перестановкой i-го и j-го столбцов.

Аналогично проводится доказательство для строк. ■

Теорема 1. *Любое элементарное преобразование, производимое над столбцами матрицы A порядка n, эквивалентно умножению матрицы A справа на матрицу, полученную из единичной матрицы порядка n с помощью того же элементарного преобразования.*

Доказательство. Пусть дана матрица

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{ji} & \dots & a_{jj} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Возможны три случая.

1. Пусть матрица $\tilde{A}$ получена из матрицы A умножением i-го столбца на число $\lambda \neq 0$. Обозначим через B матрицу, полученную из единичной матрицы E порядка n умножением i-го столбца на λ. Тогда

$$AB=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & c_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \lambda a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \lambda a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & \lambda a_{ii} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \lambda a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}=\tilde{A}.$$

2. Пусть матрица $\tilde{A}$ получена из матрицы A прибавлением к i-му столбцу j-го столбца, умноженного на λ, а

C — матрица, полученная из E прибавлением к i-му столбцу j-го столбца, умноженного на λ. Тогда

$$AC = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{ji} & \dots & a_{jj} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} + \lambda a_{1j} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} + \lambda a_{2j} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} + \lambda a_{ij} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{ji} + \lambda a_{jj} & \dots & a_{jj} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} + \lambda a_{nj} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \tilde{A}.$$

3. Так как перестановка двух параллельных рядов матрицы равносильна последовательному применению рассмотренных выше преобразований, то теорема верна и при перестановке двух столбцов матрицы A. ■

Теорема 2. *Любое элементарное преобразование, производимое над строками матрицы A порядка n, эквивалентно умножению матрицы A слева на матрицу, полу-*

ченную из единичной матрицы порядка n с помощью того же элементарного преобразования.

Теорема доказывается аналогично предыдущей.

Теорема 3. *Всякая невырожденная матрица может быть приведена к единичной матрице с помощью элементарных преобразований только над столбцами (строками).*

Доказательство. Для невырожденной матрицы первого порядка теорема очевидна. Предположим, что теорема верна для любой невырожденной матрицы $(n-1)$-го порядка. Пусть дана невырожденная матрица

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Среди элементов первой строки есть хотя бы один, отличный от нуля. Не нарушая общности, будем считать, что $a_{11}\neq 0$.

Умножив первый столбец матрицы A на $\frac{1}{a_{11}}$, получим матрицу

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a'_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Прибавив ко второму столбцу полученной матрицы первый столбец, умноженный на $-a_{12}$, к третьему столбцу — первый, умноженный на $-a_{12}$, и т. д., получим матрицу вида

$$\widetilde{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a'_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}.$$

Полученная матрица является невырожденной, следовательно, и матрица

$$B=\begin{bmatrix} b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

невырожденная. Согласно индуктивному предположению, матрица B с помощью элементарных преобразований только над столбцами может быть приведена к единичной матрице. Следовательно, матрица $\tilde{A}$ приводится к виду

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a'_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a'_{31} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{n1} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Значит, и матрица A может быть приведена к этому виду. Прибавив к первому столбцу полученной матрицы второй столбец, умноженный на $-a'_{21}$, третий столбец, умноженный на $-a'_{31}$, и т. д., n-й столбец, умноженный на $-a'_{n1}$, получим единичную матрицу порядка n.

Аналогично можно доказать, что невырожденная матрица приводится к единичной матрице с помощью элементарных преобразований только над строками. ■

Следствие. *Любая невырожденная матрица может быть получена из единичной матрицы путем элементарных преобразований только над столбцами (строками).*

Теорема 4 *(об инвариантности ранга матрицы относительно элементарных преобразований). Ранг матрицы, полученной из данной элементарными преобразованиями, равен рангу данной матрицы.* (Иногда для краткости говорят: *элементарные преобразования не меняют ранга матрицы или ранг матрицы инвариантен относительно элементарных преобразований.*)

Доказательство. Дана матрица

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mi} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Достаточно доказать, что ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях 1 и 2.

Докажем, что преобразование 1, т. е. умножение некоторого ряда матрицы на число λ, отличное от нуля, не меняет ранга.

Пусть матрица

$$B=\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & \lambda a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & \lambda a_{mi} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

получена из матрицы A умножением i-го столбца на $\lambda\neq 0$. Миноры матрицы B, не содержащие элементов i-го столбца, совпадают с соответствующими минорами матрицы A, а содержащие элементы i-го столбца, равны соответствующим минорам матрицы A, умноженным на λ. Так как $\lambda\neq 0$, то миноры матрицы B равны нулю или отличны от нуля вместе с соответствующими минорами матрицы A. Следовательно, ранг матрицы B равен рангу матрицы A.

Докажем, что преобразование 2, т. е. прибавление к одному ряду матрицы другого, параллельного ему ряда, умноженного на число λ, не меняет ранга.

Рассмотрим матрицу

$$C=\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i}+\lambda a_{1j} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i}+\lambda a_{2j} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mi}+\lambda a_{mj} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

полученную из матрицы A прибавлением к i-му столбцу j-го столбца $(i\neq j)$, умноженного на λ.

Пусть ранг матрицы A равен r, т. е. среди миноров порядка r матрицы A есть хотя бы один, отличный от нуля, а все миноры порядка $r+1$ равны нулю.

Докажем, что среди миноров порядка r матрицы C также есть хотя бы один, отличный от нуля. Возможны следующие случаи.

1. Среди миноров порядка r матрицы A, не содержащих элементов i-го столбца, есть минор M, отличный от нуля. Так как матрица C отличается от матрицы A только i-м столбцом, то минор M является минором матрицы C. Следовательно, у матрицы C есть минор порядка r, отличный от нуля.

2. Все миноры порядка r матрицы A, не содержащие

элементов i-го столбца (если такие имеются), равны нулю. Тогда у матрицы A есть минор M, отличный от нуля и содержащий элементы i-го столбца. Рассмотрим минор M_1 матрицы C, расположенный в матрице C так же, как минор M в матрице A. Так как элементы i-го столбца матрицы C являются суммой двух слагаемых, то $M_1 = M + M_2$. Минор $M_2 = 0$. Действительно, если элементы j-го столбца содержатся в миноре M_1, то минор M_2 имеет два пропорциональных столбца. Если же элементы j-го столбца не входят в минор M_1, то минор M_2 равен нулю, так как является умноженным на λ минором матрицы A (возможно с переставленными столбцами), не содержащим элементов i-го столбца матрицы A.

Итак, в любом случае $M_1 = M$ и, следовательно, матрица C имеет минор порядка r, отличный от нуля.

Аналогично можно доказать, что все миноры порядка $r+1$ матрицы C равны нулю.

Таким образом, матрица C имеет ранг r, равный рангу матрицы A. ■

Рассмотренную теорему удобно использовать при вычислении ранга матрицы. Для этого при помощи элементарных преобразований данную матрицу преобразуют в матрицу, ранг которой легко находится.

Можно показать, что с помощью элементарных преобразований любая ненулевая матрица A может быть приведена к трапециевидной

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1r} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2r} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{rr} & \dots & b_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

где $b_{11}, b_{22}, \dots, b_{rr}$ отличны от нуля.

Вычеркнем в матрице B строки, все элементы которых равны нулю. Ранг полученной матрицы, состоящей из r строк, равен r, так как минор порядка r, стоящий в верхнем левом углу, отличен от нуля. Следовательно, и ранг матрицы B равен r.

Так как матрица B получена из A путем элементарных преобразований, то ранг матрицы A также равен r.

Пример. Найти ранг матрицы

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 4 & -2 \\ 5 & 3 & 10 & 8 \end{bmatrix}.$$

Решение. Ко второй строке прибавим первую, умноженную на -3, а к третьей строке — первую, умноженную на -5. Получим

$$A\to\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -7 & -5 & -17 \\ 0 & -7 & -5 & -17 \end{bmatrix}.$$

К третьей строке полученной матрицы прибавим вторую, умноженную на -1, тогда

$$A\to\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -7 & -5 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Мы получили трапециевидную матрицу, ранг которой равен 2. Следовательно, ранг матрицы A также равен 2.

Всякую ненулевую матрицу при помощи элементарных преобразований можно привести к виду

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}.$$

Такая матрица является частным случаем трапециевидной. Ранг этой матрицы равен числу ее единиц.

Теорема 5. *Если матрицу A умножить слева или справа на невырожденную матрицу B, то ранг полученной матрицы будет равен рангу матрицы A, т. е. если* $\det B\neq 0$, то $r_{AB}=r_{BA}=r_A$.

Доказательство. Так как любая невырожденная матрица может быть получена из единичной путем элементарных преобразований только над столбцами, то умножение матрицы A справа на невырожденную матрицу B равносильно применению элементарных преобразований над столбцами матрицы A. Так как элементарные преобразования не меняют ранга матрицы, то $r_{AB}=r_A$.

Аналогично можно доказать, что $r_{BA}=r_A$. ■

§ 1.18. Нахождение обратной матрицы при помощи элементарных преобразований

Известно, что невырожденная матрица путем элементарных преобразований только над столбцами или строками приводится к единичной матрице.

Теорема. *Если к единичной матрице порядка n применить те же элементарные преобразования только над столбцами (строками) и в том же порядке, с помощью которых невырожденная матрица A порядка n приводится к единичной, то полученная при этом матрица будет обратной матрице A.*

Доказательство. Пусть A — невырожденная матрица. Осуществим над столбцами матрицы A элементарные преобразования, приводящие ее к единичной матрице. Те же преобразования и в том же порядке осуществим над матрицей E. Если при этом матрица E перейдет в матрицу B, то матрица A перейдет в матрицу $AB=E$, откуда следует, что $B=A^{-1}$. ■

Доказанная теорема дает способ нахождения матрицы, обратной данной. При этом удобно записывать матрицы A и E рядом через черту и одновременно производить элементарные преобразования над строками матриц. Если преобразования производятся над столбцами, то матрицу E подписывают под матрицей A.

Пример. С помощью элементарных преобразований найти матрицу A^{-1}, обратную матрице

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Запишем матрицы A и E рядом через черту:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Умножив первую строку на $\frac{1}{2}$, получим

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Ко второй строке прибавим первую строку, умноженную на -1, а к третьей строке — первую строку. Имеем

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Умножив вторую строку на -1, получим

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Далее, прибавив к третьей строке вторую, умноженную на -2, получим

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -\frac{1}{2} & 2 & 1 \end{array}\right].$$

Умножив третью строку на $-\frac{1}{3}$, имеем

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right].$$

К первой строке прибавим третью, умноженную на -2, а ко второй — третью, умноженную на -4. Получим

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right].$$

Отсюда следует, что

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

§ 1. 19. Теорема о базисном миноре

Если в матрице некоторый ряд может быть представлен в виде суммы k других параллельных ему рядов, умноженных соответственно на числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, то будем говорить, что данный ряд является *линейной комбинацией указанных рядов.*

Будем говорить, что l параллельных рядов матрицы линейно-зависимы, если хотя бы один из этих рядов является линейной комбинацией остальных. В противном случае параллельные ряды называются *линейно-независимыми.*

Например, в матрице

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 8 & -4 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

третья строка является линейной комбинацией первых двух строк, так как она может быть получена сложением первой строки со второй, умноженной на 2. Следовательно, три первые строки этой матрицы являются линейно-зависимыми.

Очевидно, что если в матрице A размеров $m \times n$ некоторая строка является линейной комбинацией k других строк, где $k<m-1$, то эта строка является линейной комбинацией всех строк матрицы, кроме данной. Таким образом, если в матрице s строк линейно-зависимы, то все строки матрицы линейно-зависимы. Аналогичные утверждения имеют место для столбцов матрицы.

Если n-й столбец матрицы $A_{m\times n}$ является линейной комбинацией остальных ее столбцов, то это означает, что существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$, что

$$\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \alpha_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} \alpha_2 + \ldots + \begin{bmatrix} a_{1\,n-1} \\ a_{2\,n-1} \\ \vdots \\ a_{m\,n-1} \end{bmatrix} \alpha_{n-1}.$$

Аналогичная запись имеет место для любого ряда матрицы, если он является линейной комбинацией остальных параллельных ему рядов.

Рядами, проходящими через минор M матрицы A, будем называть ряды этой матрицы, на пересечении которых стоят элементы минора M.

Минором, окаймляющим минор M порядка k матрицы A, называется минор порядка $k+1$ этой матрицы, содержащий минор M.

Теорема 1. *Если в матрице имеется минор M, отличный от нуля, а все окаймляющие его миноры (если они существуют) равны нулю, то любой ряд этой матрицы, не проходящий через минор M, является линейной комбинацией параллельных ему рядов, проходящих через M.*

Доказательство. Так как теорема доказывается аналогично для строк и столбцов, то проведем доказательство, например, только для столбцов.

Пусть матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

имеет отличный от нуля минор M порядка k.

Рассмотрим случай, когда существуют миноры, окаймляющие минор M, т. е. $k<\min(m, n)$. Не нарушая общности, можно считать, что минор M расположен в левом верхнем углу данной матрицы.

Зафиксируем j $(1<j\leqslant n)$ и рассмотрим определители

$$\Delta_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & a_{2j} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} & a_{kj} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} & a_{ij} \end{vmatrix} \quad (i=1,\ 2,\ \dots,\ m).$$

Если хотя бы одно из чисел i или j не больше k, то определитель $\Delta_{ij}=0$, так как в определителе имеются два одинаковых параллельных ряда. При $i>k$, а также $j>k$ определитель $\Delta_{ij}=0$, так как он является минором матрицы A, окаймляющим минор M. Разлагая Δ_{ij} по элементам последней строки, получим

$$\Delta_{ij}=a_{i1}\alpha_1+a_{i2}\alpha_2+\dots+a_{ik}\alpha_k+a_{ij}\alpha_{k+1}, \tag{1.29}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}$ — алгебраические дополнения элементов последней строки определителя Δ_{ij}, причем очевидно, что числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ не зависят от i, а $\alpha_{k+1}=M$ не зависят ни от i, ни от j. Учитывая что $\Delta_{ij}=0$ и $M\neq0$, из равенства (1.29) имеем

$$a_{ij}=\beta_1 a_{i1}+\beta_2 a_{i2}+\dots+\beta_k a_{ik} \quad (i=1, 2, \dots, m), \tag{1.30}$$

где $\beta_l=\dfrac{-\alpha_l}{M}$ $(l=1,\ 2,\ \dots,\ k)$.

Равенство (1.30) показывает, что j-й столбец матрицы A является линейной комбинацией столбцов, проходящих через минор M.

В случае, когда минор M не имеет окаймляющих миноров, теорема доказывается аналогично. ■

Базисным минором матрицы назовем отличный от нуля ее минор, порядок которого равен рангу матрицы.

Для ненулевой матрицы существует базисный минор (вообще говоря, не единственный).

Пусть для данной матрицы выбран базисный минор. Строки и столбцы, на пересечении которых стоят элементы базисного минора, называются *базисными*.

Теорема (о базисном миноре). 1. *Любая строка (столбец) матрицы является линейной комбинацией базисных строк (столбцов).* 2. *Базисные строки (столбцы) матрицы линейно-независимы.*

Доказательство. 1. Пусть M — базисный минор матрицы A, ранг которой равен r. Тогда все миноры порядка $r+1$ (если они существуют), в том числе и миноры, окаймляющие минор M, равны нулю. Следовательно, согласно теореме 1, всякая не базисная строка (столбец) является линейной комбинацией базисных строк (столбцов). Тот факт, что всякая базисная строка (столбец) представляется в виде линейной комбинации базисных строк (столбцов), является очевидным.

2. Предположим, что базисные строки (столбцы) матрицы линейно-зависимы. Тогда одна из базисных строк (столбцов) матрицы является линейной комбинацией остальных базисных строк (столбцов); следовательно, одна из строк (столбцов) базисного минора является линейной комбинацией остальных его строк (столбцов). Отсюда и из свойств определителей следует, что базисный минор равен нулю, что противоречит его определению. ■

Следствие 1. *Всякий не базисный ряд матрицы является линейной комбинацией всех параллельных ему рядов этой матрицы.*

Следствие 2. *Максимальное число линейно-независимых параллельных рядов матрицы равно рангу матрицы.*

Следствие 3 (критерий равенства нулю определителя). *Для того чтобы определитель матрицы был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы некоторый его ряд был линейной комбинацией других параллельных ему рядов.*

§ 1.20. Метод окаймляющих миноров для вычисления ранга матрицы

Из результатов предыдущего параграфа следует: *если в матрице A имеется минор M порядка r, отличный от нуля, а все миноры матрицы A, окаймляющие минор M (если они существуют), равны нулю, то ранг матрицы A равен r.* Значит, для определения ранга матрицы достаточно найти отличный от нуля минор M, все окаймляющие миноры которого равны нулю. Тогда ранг матрицы A равен порядку минора M.

Пример. Найти ранг матрицы

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 5 \\ -2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 7 & 11 \\ 7 & -15 & -7 & 2 \\ -1 & 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Среди элементов матрицы A имеются отличные от нуля, например элемент, стоящий в левом верхнем углу. Среди миноров, окаймляющих этот элемент, также есть отличные от нуля, например

$$M=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}.$$

Среди миноров, окаймляющих M, т. е. среди миноров

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & 7 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 11 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 4 & 3 \\ 7 & -15 & -7 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \\ 7 & -15 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

нет отличных от нуля. Следовательно, ранг матрицы A равен 2.

Задачи

1.1. Даны матрицы

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}, \quad C=\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 12 & 5 \\ 7 & 13 \end{bmatrix}.$$

Найти:

а) $2A+3B$; б) $A-2B+3C$.

1.2. Найти $A+A^{\text{т}}$, где

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

1.3. Для каких матриц $A=A_{m\times n}$ существует $A+A^{\text{т}}$?

1.4. Каким условиям должны удовлетворять элементы матрицы

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

чтобы $A+A^{\text{т}}=O$, где O — нулевая матрица порядка n?

1.5. Дана матрица

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Найти матрицу X, удовлетворяющую условию:

а) $3A+X=O$; б) $2A+3X=E$.

1.6. Даны матрицы

$$A=\begin{bmatrix}5 & -1 & 4 & 0\\ 2 & 1 & 3 & 7\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-1 & 8 & 4 & 3\\ 0 & 5 & -1 & 2\end{bmatrix}.$$

Найти матрицу X, удовлетворяющую условию:

а) $3A-\frac{1}{2}X=B$; б) $A+5X=O$; в) $X-2B=O$.

1.7. Известно, что $A_{3\times5}B_{m\times n}=C_{3\times4}$. Найти m и n.

1.8. Известно, что $A_{m\times3}\,B_{n\times4}=C_{5\times k}$. Найти m, n, k.

1.9. Даны матрицы

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 5 & 6\\ 7 & 8\end{bmatrix},$$

$$C=\begin{bmatrix}5 & -1 & 4\\ 2 & 3 & 0\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 5\\ 7\end{bmatrix}.$$

Существуют ли произведения:

а) AB; б) BA; в) AC; г) CA; д) BC;
е) CB; ж) DA; з) AD; и) ABC; к) BAD;
л) CBA; м) ACB; н) BCA?

1.10. Найти AB, если

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 5\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}.$$

В задачах 1.11 — 1.16 найти произведения матриц.

1.11. $\begin{bmatrix}2 & 0\\ -1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & 5\end{bmatrix}$. **1.12.** $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 4 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 4 & 5\\ 6 & -1\end{bmatrix}$.

1.13. $\begin{bmatrix}3 & -1 & 4\\ 5 & 6 & 0\\ 1 & -2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$. **1.14.** $\begin{bmatrix}3\\ 5\\ 0\\ 7\end{bmatrix}(1\quad 2\quad 3)$.

1.15. $$\begin{bmatrix}2 & -1 & 3 & 4 & 5\\ 7 & & -9 & 13 & 0\\ 2 & 5 & 7 & 12 & 8\\ 3 & 4 & -1 & 2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

1.16. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}.$

1.17. Даны матрицы

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix}.$$

а) Найти $B = AD$ и $C = DA$;

б) указать условия, при которых $AD = DA$.

1.18. Даны матрицы

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 5 \\ 3 & 7 & -8 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Найти элемент матрицы $D = AB$, стоящий во второй строке и третьем столбце.

1.19. Дано

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Найти $BA - AB$.

1.20. Проверить, имеет ли место равенство $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, если:

а) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix};$

б) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$

1.21. Показать, что если матрицы A и B перестановочны, то:

а) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$;

б) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$;

в) $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$.

1.22. Найти:

а) $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^2;$ б) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^5;$

в) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^4;$ г) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}^3.$

1.23. Найти $(AB)^2$, если

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

1.24. Найти $(AB)^3$, если

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

В задачах 1.25 — 1.27 для данных A и $f(x)$ найти $f(A)$.

1.25. $A = \begin{bmatrix} - & \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, $f(x) = x^2 - 3x + 5$.

1.26. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $f(x) = 3x^5 - 4x^4 - 10x^3 + 3x^2 - 7$.

1.27. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

1.28. Найти $f(AB)$, если

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix}, \quad f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1.$$

1.29. Доказать, что матрица

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

является корнем полинома $f(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9$.

1.30. Доказать, что матрица

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

является корнем полинома $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$.

1.31. Дано

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} f(x) &= x^3 - x^2 + 5x + 4, \\ \varphi(x) &= x^2 - 2x + 1. \end{aligned}$$

Найти $2f(A) - 3\varphi(A)$.

1.32. Дано

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix},\quad \begin{array}{l} f(x)=x^2-2x+1,\\ \varphi(x)=3x+5.\end{array}$$

Найти $f(A)-2\varphi(A)$.

1.33. Найти $(f(A))^2$, если

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 3\\ 0 & -1 & -1\end{bmatrix},\quad f(x)=x+1.$$

В задачах 1.34 — 1.39 найти число инверсий в перестановках.

1.34. 1, 5, 7, 2, 4, 3, 6.

1.35. 2, 3, 1, 4, 5.

1.36. 1, 2, 7, 8, 5, 6, 4, 3.

1.37. 5, 4, 3, 2, 1.

1.38. 1, 3, 5, 7, ..., $(2n-1)$, 2, 4, 6, 8, ..., $2n$.

1.39. 2, 4, 6, ..., $2n$, 1, 3, 5, ..., $(2n-1)$.

1.40. Пусть k — число инверсий в данной перестановке. Найти число k_1 инверсий в перестановке, полученной из данной переменой местами двух рядом стоящих чисел.

1.41. Пусть k — число инверсий в данной перестановке, а k_1 — число инверсий в перестановке, полученной из данной переменой местами двух чисел, между которыми имеется l чисел. Выяснить, четным или нечетным будет k_1, если k:

а) четное; б) нечетное.

В задачах 1.42 — 1.48 выяснить, является ли членом определителя пятого порядка каждое из указанных выражений.

1.42. $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}a_{55}$.

1.43. $a_{12}a_{23}a_{35}a_{41}a_{54}$.

1.44. $-a_{12}a_{23}a_{35}a_{41}a_{54}$.

1.45. $a_{34}a_{12}a_{23}a_{45}$.

1.46. $a_{54}a_{32}a_{14}a_{23}a_{41}$.

1.47. $a_{35}a_{54}a_{23}a_{12}a_{41}$.

1.48. $-a_{34}a_{45}a_{12}a_{53}a_{21}$.

1.49. При каких значениях k и m является членом определителя шестого порядка выражение:

а) $-a_{12}a_{25}a_{34}a_{43}a_{5k}a_{66}$;

б) $a_{12}a_{2m}a_{3k}a_{44}a_{55}a_{66}$.

1.50. Существует ли значение k, при котором является членом определителя пятого порядка выражение:

а) $-a_{15}a_{2k}a_{33}a_{42}a_{51}$;

б) $-a_{11}a_{2k}a_{32}a_{44}a_{55}$.

В задачах 1.51, 1.52 вычислить определители

1.51. $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix}$. **1.52.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$.

В задачах 1.53 — 1.55 решить указанные уравнения.

1.53. $\begin{vmatrix} 1-x & -1 \\ 1 & 3-x \end{vmatrix} = 0.$ **1.54.** $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ x-5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$.

1.55. $\begin{vmatrix} 1-x & 1 & 2 \\ 0 & 2-x & 3 \\ 0 & 0 & 3-x \end{vmatrix} = 0.$

В задачах 1.56 — 1.61 вычислить указанные определители, пользуясь их свойствами.

1.56. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 4 & 7 & 12 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$. **1.57.** $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

1.58. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 8 & 10 \\ 2 & 3 & 7 & 8 \end{vmatrix}$. **1.59.** $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 7 & 0 & 2 \\ 3 & 8 & 1 & 6 \\ 4 & 9 & 3 & 8 \end{vmatrix}$.

1.60. $\begin{vmatrix} 361 & 273 & 568 \\ 2 & 2 & 2 \\ 363 & 275 & 570 \end{vmatrix}$. **1.61.** $\begin{vmatrix} 1273 & 2273 \\ 1272 & 2272 \end{vmatrix}$.

1.62. Дана матрица

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 & 2 & 4 \\ 3 & -7 & 8 & 14 & 13 \\ 4 & 2 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Найти:

а) минор, дополнительный к минору, стоящему на пересечении первой и третьей строк, первого и второго столбцов;

б) алгебраическое дополнение к минору третьего порядка, стоящему в правом верхнем углу;

в) алгебраическое дополнение к минору, стоящему на пересечении первой и второй строк, второго и четвертого столбцов.

1.63. Дана матрица

$$\begin{bmatrix} -2 & 5 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Найти:

а) миноры элементов второй строки;
б) алгебраические дополнения элементов второй строки;
в) алгебраические дополнения элементов третьего столбца.

В задачах 1.64—1.66 вычислить определители, используя теорему о разложении определителя по элементам ряда.

1.64. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \end{vmatrix}$. **1.65** $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -4 & 2 & -0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

1.66. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

В задачах 1.67 — 1.69 вычислить определители, используя их свойства и теорему о разложении определителя по элементам ряда.

1.67. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \\ 4 & 7 & -2 \end{vmatrix}$. **1.68.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 5 & -3 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix}$.

1.69. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & -1 \end{vmatrix}$.

В задачах 1.70, 1.71 вычислить определители, используя теорему Лапласа.

1.70. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$. **1.71.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

В задачах 1.72 — 1.74 вычислить определители, приведя их к треугольному виду.

1.72. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 5 & 7 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$. **1.73.** $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 0 \\ 6 & 6 & 4 \end{vmatrix}$.

1.74. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 7 & 1 \\ 2 & 10 & -1 & 5 \\ -3 & -15 & -6 & 13 \end{vmatrix}$.

В задачах 1.75, 1.76 вычислить определители методом опорного элемента.

1.75. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 8 \end{vmatrix}$. **1.76.** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

В задачах 1.77 — 1.79 вычислить определители.

1.77. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$. **1.78.** $\begin{vmatrix} 218 & 178 & 201 \\ 220 & 180 & 199 \\ 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$.

1.79. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 4 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

1.80. Найти $\det(AB)$, если $\det A = 2$, $\det B = -3$.

1.81. Найти $\det(AB)$, если

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

1.82. Найти $\det(ABC)$, если

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 12 \\ 7 & 13 & 148 \\ 17 & -8 & 25 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 12 & -8 & -1 \\ 0 & 15 & 2 \end{bmatrix}.$$

1.83. Найти $\det(AB + AC)$, если $\det A = 3$,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -3 & -4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

В задачах 1.84 — 1.91 найти матрицы, обратные данным (если они существуют).

1.84. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$. **1.85.** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$.

1.86. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$. **1.87.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.

1.88. $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix}$. **1.89.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

1.90. $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. **1.91.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1.92. Доказать, что матрицы $A + E$ и $E - A$ невырожденные и взаимно-обратные, если $A^2 = O$.

1.93. Доказать, что матрицы $A + E$ и $A^2 + E - A$ невырожденные и взаимно-обратные, если $A^3 = O$.

1.94. Доказать, что если A, B, C — невырожденные матрицы, то ABC и $C^{-1}B^{-1}A^{-1}$ — взаимно-обратные.

В задачах 1.95 — 1.99 найти матрицу X из уравнений.

1.95. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1.96. $X \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$.

1.97. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$.

1.98. $AX + B = 2C$, где

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.99. $XA - 2B = E$, где

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 5 & 7 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

В задачах 1.100, 1.101 определить, при каких значениях λ существует матрица, обратная данной.

1.100. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ \lambda & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

1.101. $\begin{bmatrix} \lambda & 2 & 0 \\ 2 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$.

В задачах 1.102—1.107 найти ранг матрицы.

1.102. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$.

1.103. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$.

1.104. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

1.105. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

1.106. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$.

1.107. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$.

В задачах 1.108—1.111 найти ранг матрицы, используя элементарные преобразования.

1.108. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -3 \\ 3 & 6 & 1 & -8 \end{bmatrix}$.

1.109. $\begin{bmatrix} 13 & 5 & 3 & 7 \\ 40 & 16 & 10 & 22 \\ 54 & 22 & 14 & 30 \end{bmatrix}$.

1.110. $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

1.111. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 7 & 3 & 5 \\ 11 & 5 & 8 \\ 15 & 7 & 11 \end{bmatrix}$.

В задачах 1.112—1.116 найти ранг матрицы методом окаймляющих миноров.

1.112. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$.

1.113. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 8 \\ 1 & 7 & 6 & 9 \\ 0 & 10 & 1 & 10 \end{bmatrix}$.

1.114. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$. **1.115.** $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 3 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 10 & 3 \end{bmatrix}$.

1.116. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 12 & -2 \\ 1 & 3 & 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$.

1.117. При каких значениях λ матрица

$$\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

имеет ранг, равный 1?

1.118. При каких значениях λ ранг матрицы A равен 2, если

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}?$$

1.119. При каких значениях λ ранг матрицы A равен 3, если

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & \lambda-2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}?$$

1.120. При каких зничениях λ ранг матрицы A равен 3, если

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}?$$

1.121. При каких значениях λ ранг матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

равен:

а) 1; б) 2; в) 3?

Глава 2

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 2.1. Матричная запись системы линейных уравнений

Линейной системой m уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется система вида

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = h_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = h_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = h_m, \end{array}\right\} \tag{2.1}$$

где a_{ij}, h_i $(i=1, 2, \ldots, m;\ j=1, 2, \ldots, n)$ — числа. Заметим, что a_{ij} — коэффициент при неизвестном x_j в i-м уравнении системы; h_i — свободный член в этом уравнении.

Матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

составленная из коэффициентов при неизвестных системы (2.1), называется *матрицей* или *основной матрицей системы*, а матрица

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & h_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & h_n \end{bmatrix},$$

которая получается из матрицы A приписыванием столбца из свободных членов, называется *расширенной матрицей системы*.

Для того чтобы записать систему (2.1) в матричной форме, наряду с матрицей системы рассмотрим матрицы

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad H=\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix}.$$

Так как матрица A согласована с матрицей X, можно найти произведение AX:

$$AX=\begin{bmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ \ldots\ +a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ \ldots\ +a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ \ldots\ +a_{mn}x_n \end{bmatrix}.$$

Элементами полученной столбцевой матрицы являются левые части уравнений системы (2.1). На основании определения равенства матриц систему (2.1) можно записать в виде

$$AX=H. \tag{2.2}$$

Такая запись системы называется *матричной*.

Каждой системе (2.1) соответствует единственная пара матриц A и H, и наоборот. Систему (2.1) можно записать также в виде

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} x_1+\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} x_2+\ldots+\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} x_n=\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

§ 2.2. Решение системы. Эквивалентные системы уравнений

Упорядоченная система чисел (c_1; c_2; ... ; c_n) называется *решением системы (2.1)*, если каждое из уравнений (2.1) обращается в верное равенство после подстановки вместо $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соответственно чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Матрица

$$C=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

называется *вектор-решением данной системы.* Матрица C удовлетворяет уравнению (2.2).

Если существует хотя бы одно решение системы (2.1), то она называется *совместной,* в противном случае — *несовместной.* Совместная система называется *определенной,* если она имеет единственное решение. Система, имеющая более одного решения, называется *неопределенной.* В дальнейшем будет показано, что неопределенная система всегда имеет бесконечно много решений.

Решить систему — это значит выяснить, совместна она или несовместна, и в случае совместности найти все ее решения (множество решений).

Например, система

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 &= 3, \\ x_1 + 4x_2 &= 1 \end{aligned}\right\}$$

имеет единственное решение:

$$\left(\frac{3}{2};\ -\frac{1}{8}\right)$$

и, следовательно, является совместной и притом определенной.

Система, состоящая из одного уравнения

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 = 4,$$

является совместной, но неопределенной. Действительно, положив, например, $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, где c_1 и c_2 — произвольные числа, из данного уравнения находим, что

$$x_3 = 4 - 2c_1 + 3c_2.$$

Таким образом, множество решений данной системы бесконечно и имеет вид

$$\{c_1;\ c_2;\ 4 - 2c_1 + 3c_2 \mid \text{для любых } c_1,\ c_2 \in \boldsymbol{R}\}.$$

Система

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0, \\ x_1 + x_2 &= 3 \end{aligned}\right\}$$

несовместна.

Очевидно, что если в системе (2.1) $a_{ij} = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$, то: 1) при $h_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$ множество решений системы бесконечно; 2) если хотя бы одно из $h_i \neq 0$, то система несовместна.

Две системы называются *эквивалентными* или *равносильными,* если всякое решение одной из них является решением другой и наоборот, т. е. если они имеют одно и то же множество решений. Всякие две несовместные системы являются эквивалентными.

Элементарными преобразованиями системы назовем следующие преобразования:

1) умножение некоторого уравнения системы на отличное от нуля число;

2) прибавление к одному уравнению системы другого ее уравнения, умноженного на произвольное число;

3) перестановку местами двух уравнений системы.

Легко заметить, что при элементарных преобразованиях системы соответствующие элементарные преобразования производятся над расширенной матрицей системы.

Можно доказать, что при элементарных преобразованиях системы приходим к системе, эквивалентной данной.

§ 2.3. Решение невырожденных линейных систем. Формулы Крамера

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = h_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = h_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = h_n \end{array}\right\} \qquad (2.4)$$

или в матричной форме

$$AX = H. \qquad (2.5)$$

Матрица A такой системы является квадратной матрицей порядка n. Определитель этой матрицы

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

называется *определителем системы (2.4)*.

Если определитель системы отличен от нуля, то она называется *невырожденной*, в противном случае система называется *вырожденной*.

Найдем решение системы (2.4) в случае, когда она невырожденная. В этом случае матрица A невырожденная и для нее существует единственная обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Умножив обе части уравнения (2.5) слева на матрицу A^{-1}, получим

$$A^{-1}AX = A^{-1}H.$$

Так как

$$A^{-1}A = E, \quad EX = X,$$

то

$$X = A^{-1}H. \tag{2.6}$$

Формула (2.6) является матричной записью решения рассматриваемой системы. Матричное равенство (2.6) можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1j} & \dots & A_{nj} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_j \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$$

или

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} A_{11}h_1 + \dots + A_{n1}h_n \\ \dots \\ A_{1j}h_1 + \dots + A_{nj}h_n \\ \dots \\ A_{1n}h_1 + \dots + A_{nn}h_n \end{bmatrix},$$

откуда следует, что для любого j $(j = 1, 2, \dots, n)$

$$x_j = \frac{1}{\Delta} (A_{1j}h_1 + A_{2j}h_2 + \dots + A_{nj}h_n).$$

В силу теоремы замещения (см. § 1.12),

$$A_{1j}h_1 + A_{2j}h_2 + \dots + A_{nj}h_n = \Delta_j,$$

где Δj — определитель, полученный из определителя Δ заменой j-го столбца столбцом из свободных членов системы.

Таким образом, имеем

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{2.7}$$

Выражения (2.7) называются *формулами Крамера.* Формула (2.6) представляет собой матричную запись формул Крамера.

Итак, невырожденная система n линейных уравнений с n неизвестными имеет единственное решение, которое может быть найдено по формулам Крамера.

Пример. Решить матричным способом систему

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= h_1, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= h_2, \\ 6x_1 + 7x_2 - 3x_3 &= h_3. \end{aligned}\right\}$$

Р е ш е н и е. Матрица системы имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 6 & 7 & -3 \end{bmatrix}.$$

Она невырожденная, так как

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 6 & 7 & -3 \end{vmatrix} = 10 \neq 0,$$

и, следовательно, решение системы может быть найдено по формуле (2.6).

Обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 15 & 3 & -8 \\ 25 & 9 & -14 \end{bmatrix}$$

(см. пример § 1.15). В данном случае матричное равенство (2.6) может быть записано в виде

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,5 & 0,1 & 0,4 \\ 1,5 & 0,3 & -0,8 \\ 2,5 & 0,9 & -1,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix},$$

откуда

$$\begin{aligned} x_1 &= -0,5\,h_1 + 0,1h_2 + 0,4\,h_3, \\ x_2 &= 1,5\,h_1 + 0,3\,h_2 - 0,8\,h_3, \\ x_3 &= 2,5\,h_1 + 0,9\,h_2 - 1,4\,h_3. \end{aligned}$$

§ 2.4. Теорема Кронекера — Капелли

Будем рассматривать систему (2.1), т. е. произвольную систему m линейных уравнений с n неизвестными. Имеет место следующая теорема.

Теорема Кронекера—Капелли. *Для совместности системы (2.1) необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был равен рангу ее расширенной матрицы.*

Доказательство. Запишем систему (2.1) в виде (2.3).

Необходимость. Пусть система совместна. Докажем, что ранг r_A матрицы

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

равен рангу $r_{\tilde{A}}$ расширенной матрицы

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & h_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & h_m \end{bmatrix}.$$

Так как система совместна, то имеется совокупность чисел $c_1, c_2, \dots, c_n$ такая, что

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} c_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} c_2 + \dots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} c_n = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix},$$

т. е. последний столбец матрицы $\tilde{A}$ является линейной комбинацией остальных ее столбцов. Вычитая из последнего столбца матрицы $\tilde{A}$ указанную линейную комбинацию остальных столбцов, получим матрицу

$$\tilde{A}_1=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 0 \end{bmatrix}.$$

Ранг матрицы $\tilde{A}_1$ равен рангу матрицы $\tilde{A}$ и рангу матрицы A.

Достаточность. Пусть $r_A = r_{\tilde{A}} = r$. Докажем, что система совместна. Так как $r_A = r_{\tilde{A}}$, то существует минор M, являющийся базисным минором как матрицы A, так и матрицы $\tilde{A}$. На основании теоремы о базисном миноре, последний столбец матрицы $\tilde{A}$ является линейной комбинацией базисных столбцов, а следовательно, и всех столбцов матрицы A. Это значит, что существуют числа α_1, α_2, ..., α_n такие, что

$$\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \alpha_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} \alpha_2 + \ldots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \alpha_n.$$

Сравнивая последнее равенство с равенством (2.3), заключаем, что $(\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_n)$ является решением системы (2.1). Таким образом, система (2.1) совместна. ■

§ 2.5. Решение произвольных линейных систем

Теорема 1. *Если ранг матрицы совместной системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение.*

Доказательство. Пусть система (2.1) совместна и $r_A = r_{\tilde{A}} = n$. Тогда существует минор M, который является базисным как для матрицы A, так и для $\tilde{A}$. Так как каждая не базисная строка матрицы $\tilde{A}$ является линейной комбинацией ее базисных строк, то система (2.1) эквивалентна системе, состоящей из тех n уравнений этой системы, коэффициенты при неизвестных в которых образуют базисный минор M. Последняя система есть невырожденная система n уравнений с n неизвестными и имеет единственное решение. Следовательно, и данная система имеет единственное решение. ■

Теорема 2. *Если ранг матрицы совместной системы меньше числа неизвестных, то множество решений системы бесконечно.*

Доказательство. Пусть система (2.1) совместна и $r_A = r_{\tilde{A}} = r < n$. Обозначим через M базисный минор матриц A и $\tilde{A}$. Не нарушая общности, можно считать, что базисный минор M расположен в левом верхнем углу матрицы A, в противном случае можно изменить нумерацию неизвестных и порядок уравнений в системе. Таким образом,

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \cdot & \cdot\,\cdot\,\cdot & \cdot \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix}.$$

Так как каждая не базисная строка матрицы $\tilde{A}$ является линейной комбинацией ее базисных строк, то данная система эквивалентна системе

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r + a_{1\,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{1n}x_n = h_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r + a_{r\,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{rn}x_n = h_r \end{array}\right\}$$

или

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r = h_1 - a_{1\,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r = h_r - a_{r\,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n, \end{array}\right\} \quad (2.8)$$

состоящей из первых r уравнений системы (2.1). Придав неизвестным $x_{r+1}, \dots, x_n$ системы (2.8) произвольные значения $c_{r+1}, \dots, c_n$, получим систему r уравнений с r неизвестными:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r = h_1 - a_{1\,r+1}c_{r+1} - \dots - a_{1n}c_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r = h_r - a_{r\,r+1}c_{r+1} - \dots - a_{rn}c_n. \end{array}\right\} \quad (2.9)$$

Определитель этой системы $\Delta = M \neq 0$, следовательно, при фиксированных $c_{r+1}, \dots, c_n$ система (2.9) имеет решение $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, ..., $x_r = c_r$. Очевидно, что $(c_1; c_2; \dots; c_r; c_{r+1}; \dots; c_n)$ является решением системы (2.8). Так как числа $c_{r+1}, \dots, c_n$ могут быть взяты произвольно, то множество решений системы (2.8), а следовательно, и системы (2.1) бесконечно. ■

Из теорем 1 и 2 вытекают следующие теоремы.

***Теорема 3.** Если система имеет единственное решение, то ранг матрицы системы равен числу неизвестных.*

***Теорема 4.** Если множество решений системы бесконечно, то ранг матрицы системы меньше числа неизвестных.*

Базисными неизвестными совместной системы, ранг матрицы которой равен r, назовем r неизвестных, коэффициенты при которых образуют базисный минор. Остальные неизвестные назовем *свободными.*

Так как базисный минор может быть выбран не единственным образом, то и совокупность базисных неизвестных может быть выбрана не единственным образом.

В доказательстве теоремы 2 содержится способ нахождения решений неопределенной системы ($r_A = r_{\tilde{A}} = r < n$), состоящий в том, что систему (2.1) заменяем эквивалентной системой (2.8). Решение системы находим, придавая свободным неизвестным произвольные значения и находя значения базисных неизвестных из системы (2.8).

Докажем, что этим способом можно получить любое решение неопределенной системы. При этом будем пользоваться обозначениями, принятыми в теореме 2.

Пусть (α_1; α_2; ... ; α_n) — решение рассматриваемой системы, а следовательно, и эквивалентной ей системы (2.8), т. е.

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1r}\alpha_r = h_1 - a_{1\,r+1}\alpha_{r+1} - \\ \qquad - \ldots - a_{1n}\alpha_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}\alpha_1 + a_{r2}\alpha_2 + \ldots + a_{rr}\alpha_r = h_r - a_{r\,r+1}\alpha_{r+1} - \\ \qquad - \ldots - a_{rn}\alpha_n. \end{array}\right\} \qquad (2.10)$$

В системе (2.8) положим $x_{r+1} = \alpha_{r+1}$, $x_{r+2} = \alpha_{r+2}, \ldots, x_n = \alpha_n$. Имеем

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = h_1 - \\ \quad - a_{1\,r+1}\alpha_{r+1} - \ldots - a_{1n}\alpha_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = h_r - \\ \quad - a_{r\,r+1}\alpha_{r+1} - \ldots - a_{rn}\alpha_n. \end{array}\right\} \qquad (2.11)$$

Сравнивая системы (2.10) и (2.11), получаем, что (α_1; α_2; ... ; α_r) — решение системы (2.11). Так как система (2.11) невырожденная, то это решение единственное.

Следовательно, указанным способом мы нашли решение $(\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_n)$ системы (2.1).

Из доказанных теорем следует, что решение системы линейных уравнений производится следующим образом.

1. Находим r_A — ранг матрицы системы и $r_{\tilde{A}}$ — ранг расширенной матрицы. Если $r_A \neq r_{\tilde{A}}$, то система несовместна.

2. Если $r_A = r_{\tilde{A}} = r$, то выделяем базисный минор и базисные неизвестные.

3. Данную систему заменяем равносильной ей системой, состоящей из тех r уравнений, в которые вошли элементы базисного минора.

4. Если число базисных неизвестных равно числу неизвестных системы, то система имеет единственное решение, которое можно найти по формулам Крамера.

5. Если число базисных неизвестных меньше числа неизвестных системы, то из системы, полученной в пункте 3, находим выражение базисных неизвестных через свободные, используя, например, формулы Крамера. Придавая свободным неизвестным произвольные значения, получим бесконечно много решений исходной системы. Отсюда, в частности, следует, что неопределенная система имеет бесконечно много решений.

Пример 1. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 &= 6, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 &= 12, \\ 2x_1 + 4x_2 &= -6, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 3, \\ 5x_1 + 4x_3 &= 9. \end{aligned}\right\}$$

Решение. 1. Находим ранги матриц

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ и } \tilde{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & -5 & 1 & 12 \\ 2 & 4 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 5 & 0 & 4 & 9 \end{bmatrix}.$$

Получим $r_A = r_{\tilde{A}} = 3$. Следовательно, система совместна.

2. В качестве базисного минора можно взять, например, минор

$$M=\begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix},$$

так как $M \neq 0$ и его порядок равен $r_A = 3$. Базисными неизвестными являются x_1, x_2, x_3.

3. Данная система равносильна системе

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 5x_2 + x_3 &= 12, \\ 2x_1 + 4x_2 &= -6, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 3. \end{aligned}\right\}$$

4. Число базисных неизвестных равно числу неизвестных системы, и система имеет единственное решение: $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$.

Пример 2. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 7, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - x_4 &= 2, \\ 5x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 2x_4 &= 11. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Находим ранги матриц

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & -1 \\ 5 & 10 & 7 & 2 \end{bmatrix} \text{ и } \tilde{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 5 & -1 & 2 \\ 5 & 10 & 7 & 2 & 11 \end{bmatrix}.$$

Получим $r_A = r_{\tilde{A}} = 2$. Следовательно, система совместна.

В качестве базисного минора можно взять, например, минор

$$M=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix},$$

так как $M \neq 0$ и его порядок равен $r_A = 2$. При таком выборе минора M базисными неизвестными являются x_2, x_3.

Данная система равносильна системе

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 7, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - x_4 &= 2 \end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned} 2x_2 - 3x_3 &= 7 - x_1 - 4x_4, \\ 4x_2 + 5x_3 &= 2 - 2x_1 + x_4. \end{aligned}\right\}$$

По формулам Крамера находим:

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 7 - x_1 - 4x_4 & -3 \\ 2 - 2x_1 + x_4 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{41 - 11x_1 - 17x_4}{22},$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 - x_1 - 4x_4 \\ 4 & 2 - 2x_1 + x_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-24 + 18x_4}{22}.$$

Следовательно, множество решений имеет вид

$$\left\{c_1;\ \frac{41 - 11c_1 - 17c_2}{22};\ \frac{9c_2 - 12}{11};\ c_2 \,\middle|\, \text{для любых } c_1,\ c_2 \in \boldsymbol{R}\right\}.$$

При вычислении рангов r_A и $r_{\tilde{A}}$ удобно использовать метод окаймляющих миноров, так как при этом сразу находится и базисный минор. Удобно также использовать элементарные преобразования только над строками матрицы $\tilde{A}$, приводя ее к трапециевидной форме.

§ 2.6. Системы однородных линейных уравнений. Фундаментальная система решений

Система линейных уравнений называется *однородной*, если свободный член в каждом уравнении равен нулю. Однородная система имеет вид

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2.12)$$

Система однородных линейных уравнений является частным случаем системы (2.1). Она всегда совместна, так как ранг ее матрицы равен рангу расширенной матрицы. Очевидно, что

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0 \qquad (2.13)$$

является решением системы (2.12).

Решение (2.13) называется *нулевым* или *тривиальным решением*. Система (2.12), кроме тривиального, может иметь и другие решения (*нетривиальные*).

Из § 2.5 следует, что однородная система имеет лишь тривиальное решение тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен числу неизвестных ($r = n$). В частности, если число уравнений равно числу неизвестных ($m = n$), то для того чтобы система имела только тривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы определитель системы был отличен от нуля.

Пример 1. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} 2x_1+x_2-x_3+x_4&=0,\\ 4x_1+2x_2+x_3-3x_4&=0.\end{aligned}\right\}$$

Решение. Число уравнений меньше числа неизвестных. Следовательно, множество решений системы бесконечно.

Ранг матрицы системы равен двум, так как среди ее миноров второго порядка есть отличный от нуля, например минор

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Следовательно, данная система эквивалентна системе

$$\left.\begin{aligned} 2x_1-x_3&=-x_2-x_4,\\ 4x_1+x_3&=-2x_2+3x_4.\end{aligned}\right\}$$

Отсюда

$$x_1=\frac{-3x_2+2x_4}{6},\quad x_3=\frac{5}{3}\,x_4.$$

Следовательно, множество решений системы имеет вид

$$\left\{\frac{-3c_1+2c_2}{6};\ c_1;\ \frac{5}{3}\,c_2;\ c_2\,\middle|\ \text{для любых } c_1,\ c_2\in\boldsymbol{R}\right\}.$$

Если ранг матрицы системы однородных линейных уравнений меньше числа неизвестных, то множество решений системы бесконечно.

Пусть $C_1, C_2, \ldots, C_k$ — вектор-решения системы однородных линейных уравнений, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — некоторые числа. Тогда

$$\alpha_1C_1+\alpha_2C_2+\ \ldots\ +\alpha_kC_k \tag{2.14}$$

называется *линейной комбинацией вектор-решений* C_1, $C_2, \ldots, C_k$, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — *коэффициентами* этой комбинации. Если $\sum\limits_{i=1}^{k}|\alpha_i|=0$, то линейная комбинация (2.14) называется *тривиальной.*

Вектор-решения $C_1, C_2, \ldots, C_k$ называются *линейно-зависимыми,* если хотя бы одно из них является линейной комбинацией остальных. В противном случае эти вектор-решения называются *линейно-независимыми.*

Имеют место следующие свойства.

1. *Любая линейная комбинация конечного числа вектор-решений системы однородных линейных уравнений является вектор-решением этой системы.*

В справедливости этого свойства читатель легко убедится самостоятельно.

2. *Пусть для системы линейных однородных уравнений $r<n$, где r — ранг матрицы системы, n — число неизвестных. Тогда существует $n-r$ линейно-независимых вектор-решений $C_1, C_2, \ldots, C_{n-r}$ данной системы и любое вектор-решение системы является линейной комбинацией $C_1, C_2, \ldots, C_{n-r}$.*

Доказательство. Пусть в системе (2.12) $r<n$. Тогда данная система имеет $n-r$ свободных неизвестных. Не нарушая общности, можно считать базисными неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_r$. Выразим базисные неизвестные через свободные. Получим

$$\left.\begin{array}{r} x_1 = d_{11}x_{r+1} + \ldots + d_{1\,n-r}x_n, \\ x_2 = d_{21}x_{r+1} + \ldots + d_{2\,n-r}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = d_{r1}x_{r+1} + \ldots + d_{r\,n-r}x_n. \end{array}\right\} \tag{2.15}$$

Тогда любое вектор-решение данной системы можно записать в виде

$$C = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ c_{r+1} \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \tag{2.16}$$

где $c_{r+1}, \ldots, c_n$ — произвольные числа; $x_1, x_2, \ldots, x_r$ определяются равенствами (2.15) при

$$x_{r+1}=c_{r+1}, \quad x_{r+2}=c_{r+2}, \ \ldots, \ x_n=c_n.$$

Рассмотрим вектор-решения

$$C_1 = \begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{21} \\ \vdots \\ d_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} d_{12} \\ d_{22} \\ \vdots \\ d_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ \ldots, \ C_{n-r} = \begin{bmatrix} d_{1\,n-r} \\ d_{2\,n-r} \\ \vdots \\ d_{r\,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

Очевидно, что эти вектор-решения линейно-независимы, и для любого вектор-решения C имеем

$$C = c_{r+1}C_1 + c_{r+2}C_2 + \ldots + c_nC_{n-r},$$

т. е. вектор-решение (2.16) является линейной комбинацией

$$C_1, C_2, \ldots, C_{n-r}. \blacksquare$$

Можно доказать, что максимальное число линейно-независимых вектор-решений системы (2.12) (в случае $r<n$) равно $n-r$. В этом случае вводится понятие фундаментальной системы решений.

Фундаментальной системой решений системы однородных линейных уравнений называется совокупность максимального числа линейно-независимых вектор-решений.

Совокупность решений (2.17) является фундаментальной. Эта совокупность решений называется *нормированной фундаментальной системой решений системы (2.12).*

Пример 2. Найти нормированную фундаментальную систему решений для системы, заданной в примере 1.

Р е ш е н и е. Было получено:

$$x_1 = \frac{-3x_2 + 2x_4}{6}, \quad x_3 = \frac{5}{3}x_4.$$

Используя формулы (2.17), в данном случае получаем вектор-решения

$$C_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{5}{3} \\ 1 \end{bmatrix},$$

образующие нормированную фундаментальную систему решений.

§ 2.7. Метод последовательного исключения неизвестных (метод Гаусса)

Дана система m уравнений с n неизвестными:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= h_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= h_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= h_m. \end{aligned}\right\} \qquad (2.18)$$

Для решения этой системы, кроме вышеизложенных, существуют другие методы. Рассмотрим один из них (метод Гаусса).

Среди коэффициентов при x_j имеется хотя бы один, отличный от нуля. Не ограничивая общности, можно считать, что $a_{11} \neq 0$, так как всегда можно принять за первое уравнение системы то, в котором коэффициент при x_j отличен от нуля, а затем перенумеровать неизвестные. Исключим неизвестное x_1 из всех уравнений, кроме первого (если таковые имеются). Если $a_{i1}=0$, то i-е уравнение не содержит x_i; если $a_{i1}=0$, то к i-му ($i=2, \ldots, m$) уравнению системы, умноженному на $-\frac{a_{11}}{a_{i1}}$, прибавим первое уравнение. Получим систему вида.

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= h_1, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n &= h_2^{(1)}, \\ a_{32}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{3n}^{(1)}x_n &= h_3^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{mn}^{(1)}x_n &= h_m^{(1)}, \end{aligned}\right\} \qquad (2.19)$$

эквивалентную системе (2.18). Назовем переход от системы (2.18) к системе (2.19) *первым шагом*. В результате осуществления первого шага могут иметь место следующие случаи.

1. Среди уравнений системы (2.19) имеется хотя бы одно такое, у которого все коэффициенты при неизвестных равны нулю, а свободный член отличен от нуля. Тогда система (2.19), а следовательно, и (2.18) несовместны.

2. Все коэффициенты $a_{ij}^{(1)}$ и свободные члены $h_i^{(1)}$ равны нулю. Тогда система (2.19) состоит из одного первого уравнения. Если в этом уравнении все коэффициенты,

кроме a_{11}, равны нулю, то система имеет единственное решение. В противном случае система неопределенна.

3. Среди коэффициентов $a_{ij}^{(1)}$ найдется хотя бы один, отличный от нуля. В этом случае переходим ко *второму шагу*. Не ограничивая общности, можем считать, что $a_{22}^{(1)} \neq 0$. Исключим неизвестное x_2 из всех уравнений системы (2.19), начиная с третьего (если таковые имеются). Получим систему

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &= h_1, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n &= h_2^{(1)}, \\ a_{33}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(2)}x_n &= h_3^{(2)}, \\ a_{43}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{4n}^{(2)}x_n &= h_4^{(2)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m3}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{mn}^{(2)}x_n &= h_m^{(2)}, \end{aligned}\right\}$$

эквивалентную исходной системе (2.18).

В результате второго шага могут иметь место случаи, аналогичные тем, которые получились в результате первого шага. Если имеет место третий случай, то переходим к *третьему шагу*.

Продолжаем данный процесс, пока это возможно. Если мы проделаем $(p-1)$ шагов, то получим систему

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &= h_1, \\ b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + \ldots + b_{2n}x_n &= h_2^{(1)}, \\ c_{33}x_3 + \ldots + c_{3n}x_n &= h_3^{(2)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ d_{pp}x_p + \ldots + d_{pn}x_n &= h_p^{(p-1)}, \\ 0 &= h_{p+1}^{(p-1)}, \\ \cdots\cdots \\ 0 &= h_m^{(p-1)}, \end{aligned}\right\} \qquad (2.20)$$

где $b_{2j} = a_{2j}^{(1)}$, $c_{3j} = a_{3j}^{(2)}$, $\ldots$, $d_{pj} = a_{pj}^{(p-1)}$.

Переход от системы (2.18) к эквивалентной ей системе (2.20) называется *прямым ходом метода Гаусса*.

Возможны следующие случаи.

1. Хотя бы одно из $h_{p+1}^{(p-1)}, \ldots, h_m^{(p-1)}$ отлично от

нуля, тогда система (2.20), а следовательно, и система (2.18) несовместны.

2. Все $h_j^{(p-1)}$ $(j = p+1, \ldots, m)$ равны нулю. Очевидно, что последние $m - p$ уравнений, левые и правые части которых равны нулю, не влияют на решение системы, и их можно отбросить.

Система (2.20) может иметь один из двух видов: треугольный (при $p = n$):

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= h_1, \\ b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n &= h_2^{(1)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ l_{n-1\,n-1}x_{n-1} + l_{n-1\,n}x_n &= h_{n-1}^{(n-2)}, \\ d_{nn}x_n &= h_n^{(n-1)} \end{aligned}\right\} \qquad (2.21)$$

или трапециевидный (при $p < n$):

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= h_1, \\ b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n &= h_2^{(1)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ d_{pp}x_p + \ldots + d_{pn}x_n &= h_p^{(p-1)}, \end{aligned}\right\} \qquad (2.22)$$

где $a_{11}, b_{22}, \ldots, d_{pp}$ отличны от нуля.

Нахождение неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из системы (2.21) или (2.22) называется *обратным ходом метода Гаусса.*

Система (2.21), а следовательно, и исходная система имеют единственное решение. Так как $d_{nn} \neq 0$, то из последнего уравнения (2.21) x_n определяется единственным образом. Подставляя найденное значение x_n в предпоследнее уравнение, получим единственное значение для x_{n-1}, так как $l_{n-1\,n-1} \neq 0$. Продолжая этот процесс, находим последовательно $x_{n-2}, \ldots, x_1$.

В системе (2.22) число неизвестных больше числа уравнений. Так как $d_{pp} \neq 0$, то из последнего уравнения этой системы x_p единственным образом выражается через $x_{p+1}, \ldots, x_n$. Осуществляя обратный ход, выразим единственным образом неизвестные $x_{p-1}, x_{p-2}, \ldots, x_1$ через $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$. Придавая последним произвольные значения $c_{p+1}, c_{p+2}, \ldots, c_n$, получим бесконечное множество решений системы (2.22), а следовательно, и системы (2.18).

Заметим, что при применении метода Гаусса на практике имеет смысл вместо преобразований системы производить соответствующие преобразования над строками расширенной матрицы системы, т. е. приводить расширенную матрицу системы к трапециевидной с помощью элементарных преобразований над строками.

Пример. Решить методом Гаусса систему

$$\left.\begin{aligned} 4x_1+2x_2+x_3&=7,\\ x_1-x_2+x_3&=-2,\\ 2x_1+3x_2-3x_3&=11,\\ 4x_1+x_2-x_3&=7. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Расширенная матрица системы имеет вид

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 7\\ 1 & -1 & 1 & -2\\ 2 & 3 & -3 & 11\\ 4 & 1 & -1 & 7 \end{bmatrix}.$$

Прибавив последовательно ко второй строке, умноженной на -4, к третьей, умноженной на -2, и к четвертой, умноженной на -1, первую строку, получим

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 7\\ 0 & 6 & -3 & 15\\ 0 & -4 & 7 & -15\\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Разделим вторую строку на 3:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 7\\ 0 & 2 & -1 & 5\\ 0 & -4 & 7 & -15\\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Прибавив последовательно к третьей строке, умноженной на $1/2$, и к четвертой, умноженной на -2, вторую строку, получим

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 7\\ 0 & 2 & -1 & 5\\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & -\frac{5}{2}\\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{bmatrix}.$$

Этой матрице соответствует система

$$\left.\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + x_3 &= 7, \\ 2x_2 - x_3 &= 5, \\ \frac{5}{2} x_3 &= -\frac{5}{2}, \\ -5x_3 &= 5. \end{aligned}\right\}$$

Осуществляя обратный ход, находим $x_3 = -1$, $x_2 = 2$, $x_1 = 1$,

Задачи

В задачах 2.1—2.6 записать в матричной форме каждую из указанных систем линейных уравнений.

2.1. $\left.\begin{aligned} 5x_1 - 3x_2 + x_3 &= -1, \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 5. \end{aligned}\right\}$ **2.2.** $\left.\begin{aligned} x_2 + x_3 &= 5, \\ x_1 - x_2 &= 1, \\ x_3 - 5x_1 &= 0. \end{aligned}\right\}$

2.3. $\left.\begin{aligned} x_1 - 4x_2 + x_3 &= 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0. \end{aligned}\right\}$ **2.4.** $\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 - 5 &= 0, \\ 2x_2 - 3x_1 + 1 &= 0. \end{aligned}\right\}$

2.5. $\left.\begin{aligned} x_1 &= 0, \\ x_1 - x_2 &= 1, \\ x_3 + 4 &= 0. \end{aligned}\right\}$ **2.6.** $\left.\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + 1 &= 0, \\ x_2 - x_1 &= 5, \\ 3x_1 + x_2 &= -1. \end{aligned}\right\}$

В задачах 2.7—2.10 перейти от матричной записи систем к обычной.

2.7. $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$ **2.8.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$

2.9. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$ **2.10.** $E_n \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = O.$

2.11. Решения каких из приведенных ниже систем можно найти по формулам Крамера:

а) $\left.\begin{aligned} 2x - 3y &= 5, \\ x + y &= 1; \end{aligned}\right\}$ б) $\left.\begin{aligned} x - 2y &= 2, \\ 3x - 6y &= 61; \end{aligned}\right\}$

в) $\left.\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 1, \\ x - y + z &= 2, \\ 4x + 3y - z &= 0; \end{aligned}\right\}$ г) $\left.\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 0, \\ 4x + 7y + z &= 0, \\ 3y + 6x + 7z &= 0? \end{aligned}\right\}$

В задачах 2.12—2.21 решить системы уравнений, используя формулы Крамера.

2.12. $\left.\begin{aligned} x_1+3x_2&=8,\\ 2x_2-x_1&=7.\end{aligned}\right\}$

2.13. $\left.\begin{aligned} 3x_1+x_2&=3,\\ x_1-x_2&=0.\end{aligned}\right\}$

2.14. $\left.\begin{aligned} 2x_1+3x_2-x_3&=4,\\ x_1+2x_2+2x_3&=5,\\ 3x_1+4x_2-5x_3&=2.\end{aligned}\right\}$

2.15. $\left.\begin{aligned} x_1+2x_2+x_3&=8,\\ 3x_2-2x_1-3x_3&=-5,\\ 3x_1-4x_2+5x_3&=10.\end{aligned}\right\}$

2.16. $\left.\begin{aligned} 2x_1+x_2-x_3&=0,\\ 3x_2+4x_3+6&=0,\\ x_1+x_3&=1.\end{aligned}\right\}$

2.17. $\left.\begin{aligned} 2x_1-3x_2-x_3+6&=0,\\ 3x_1+4x_2+3x_3+5&=0,\\ x_1+x_2+x_3+2&=0.\end{aligned}\right\}$

2.18. $\left.\begin{aligned} 3x_3+x_2+6&=0,\\ x_1-2x_2-x_3&=5,\\ 3x_1+4x_2-2x_3&=13.\end{aligned}\right\}$

2.19. $\left.\begin{aligned} x_1-x_3+x_4&=3,\\ 2x_1+3x_2-x_3-x_4&=2,\\ 5x_1-3x_4&=-6,\\ x_1+x_2+x_3+x_4&=2.\end{aligned}\right\}$

2.20. $\left.\begin{aligned} 2x_1+3x_2+8x_4&=0,\\ x_2-x_3+3x_4&=0,\\ x_3+2x_4&=1,\\ x_1+x_4&=-24.\end{aligned}\right\}$

2.21. $\left.\begin{aligned} 3x_1+x_2-x_3+x_4&=0,\\ 2x_1+3x_2-x_4&=0,\\ x_1+5x_2-3x_3&=7,\\ 3x_2+2x_3+x_4&=2.\end{aligned}\right\}$

В задачах 2.22—2.25 решить системы уравнений матричным способом.

2.22. $\left.\begin{aligned} 2x_1-x_2&=h_1,\\ x_1+2x_2-x_3&=h_2,\\ x_2+x_3&=h_3,\end{aligned}\right\}$

где:

а) $h_1=-1,\quad h_2=-2,\quad h_3=-2;$

б) $h_1=0,\quad h_2=-2,\quad h_3=-5;$

в) $h_1=0,\quad h_2=1,\quad h_3=0.$

2.23. $\left.\begin{aligned} 4x_1+2x_2-x_3&=h_1,\\ x_1+2x_2+x_3&=h_2,\\ x_2-x_3&=h_3,\end{aligned}\right\}$

где:

а) $h_1=0,\quad h_2=1,\quad h_3=-3;$

б) $h_1=12,\quad h_2=7,\quad h_3=-1;$

в) $h_1=h_2=14,\quad h_3=7.$

2.24. $\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_3 + 3x_4 &= h_1, \\ 2x_2 - x_1 - x_3 - 2x_4 &= h_2, \\ x_1 - x_2 + 4x_4 &= h_3, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= h_4, \end{aligned}\right\}$

где:

а) $h_1 = 0, \quad h_2 = h_3 = 2, \quad h_4 = 3;$

б) $h_1 = 0, \quad h_2 = h_3 = -4, \quad h_4 = -6;$

в) $h_1 = -5, \quad h_2 = 8, \quad h_3 = -9, \quad h_4 = -2.$

2.25. $\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= h_1, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 &= h_2, \\ 2x_2 - x_1 + 3x_4 &= h_3, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= h_4, \end{aligned}\right\}$

где:

а) $h_1 = 0, \quad h_2 = -2, \quad h_3 = 8, \quad h_4 = -2;$

б) $h_1 = -3, \quad h_2 = -4, \quad h_3 = -1, \quad h_4 = -5;$

в) $h_1 = 3, \quad h_2 = 7, \quad h_3 = -2, \quad h_4 = 7.$

В задачах 2.26—2.33 выяснить, совместна или несовместна каждая из указанных систем.

2.26. $\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 5, \\ 3x_1 + x_2 &= 4, \\ x_1 + x_2 &= 2. \end{aligned}\right\}$

2.27. $\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 &= 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 2, \\ 5x_1 - 5x_2 + 8x_3 - 7x_4 &= 3. \end{aligned}\right\}$

2.28. $\left.\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 &= 1, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= 3. \end{aligned}\right\}$

2.29. $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 &= 5, \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 8x_4 &= 3. \end{aligned}$

2.30. $\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 &= 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 2, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 1, \\ 4x_1 - 4x_2 - 3x_3 - 3x_4 &= -7. \end{aligned}\right\}$

2.31. $\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 9, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 12, \\ x_1 - x_2 - x_3 &= -1. \end{aligned}\right\}$

2.32. $\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 + x_5 &= 10, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 5x_4 + 7x_5 &= 1, \\ x_2 + 2x_3 + 4x_4 - 8x_5 &= 2, \\ 4x_3 + x_4 - x_5 &= 3. \end{aligned}\right\}$

2.33. $\left.\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 &= 5, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 &= 8, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 &= 2. \end{aligned}\right\}$

В задачах 2.34—2.39 для каждой из систем указать неизвестные, которые можно выбрать в качестве базисных.

2.34. $\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 2, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 &= 4. \end{aligned}\right\}$

2.35. $\left.\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 &= 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 2x_5 &= 8. \end{aligned}\right\}$

2.36. $\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1, \\ 4x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 2, \\ 6x_1 + 9x_2 - 4x_3 &= 2. \end{aligned}\right\}$

2.37. $\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 3. \end{aligned}\right\}$

2.38. $\left.\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 &= 0, \\ 4x_1 - 6x_2 &= 0, \\ x_4 + x_2 &= 0, \\ x_3 - x_2 &= 0. \end{aligned}\right\}$

2.39. $\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 3x_4 &= 0, \\ 7x_3 - 5x_4 &= 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 0. \end{aligned}\right\}$

В задачах 2.40—2.51 исследовать системы уравнений и в случае совместности решить их.

2.40. $\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 &= 3. \end{aligned}\right\}$

2.41. $\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 5, \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 1. \end{aligned}\right\}$

2.42. $\left.\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 1, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 - 2x_4 &= 2. \end{aligned}\right\}$

2.43. $\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 &= 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 &= -6. \end{aligned}\right\}$

2.44. $\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1, \\ 2x_1 + 3x_2 &= 5, \\ 4x_1 + 5x_2 &= 7. \end{aligned}\right\}$

2.45. $\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1, \\ x_2 - x_3 + 2x_4 &= 2. \end{aligned}\right\}$

2.46. $\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 5, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= 3. \end{aligned}\right\}$

2.47. $\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 2, \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 &= 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0, \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 &= 7. \end{aligned}\right\}$

2.48. $\left.\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 5, \\ 5x_1 + 8x_2 + 3x_3 &= 11, \\ x_1 + x_2 &= 1. \end{aligned}\right\}$

2.49. $\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 &= 5, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 6, \\ 6x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 &= 1. \end{aligned}\right\}$

2.50. $\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 &= 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 2, \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 2x_4 &= 4, \\ 7x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 5x_4 &= 7. \end{aligned}\right\}$

2.51. $\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 7, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 3, \\ 5x_1 - x_2 - x_3 &= 3. \end{aligned}\right\}$

В задачах 2.52—2.61 решить однородные системы уравнений.

2.52. $\left.\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3&=0,\\ 2x_1+3x_2+4x_3&=0,\\ 3x_1+4x_2+5x_3&=0. \end{aligned}\right\}$ **2.53.** $\left.\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=0,\\ 3x_1-x_2-x_3&=0,\\ 2x_1+3x_2+x_3&=0. \end{aligned}\right\}$

2.54. $\left.\begin{aligned} 3x_1-4x_2+x_3-x_4&=0,\\ 6x_1-8x_2+2x_3+3x_4&=0. \end{aligned}\right\}$

2.55. $\left.\begin{aligned} x_1-2x_2+3x_3-x_4&=0,\\ x_1+x_2-x_3+2x_4&=0,\\ 4x_1-5x_2+8x_3+x_4&=0. \end{aligned}\right\}$

2.56. $\left.\begin{aligned} 2x_1+x_2-3x_3&=0,\\ 3x_1-2x_2+x_3&=0,\\ x_1+4x_2-7x_3&=0. \end{aligned}\right\}$ **2.57.** $\left.\begin{aligned} 3x_1-x_2+2x_3+x_4&=0,\\ x_1+x_2-x_3-x_4&=0,\\ 5x_1+x_2-x_4&=0. \end{aligned}\right\}$

2.58. $\left.\begin{aligned} 2x_1+3x_2+2x_3&=0,\\ 3x_1+x_2+x_3&=0,\\ x_1+x_2+x_3&=0,\\ 5x_1-x_2-x_3&=0. \end{aligned}\right\}$ **2.59.** $\left.\begin{aligned} 2x_1-x_2+x_3+3x_4&=0,\\ x_1+x_2+3x_3+x_4&=0,\\ 4x_1+x_2+7x_3+5x_4&=0,\\ 5x_1-x_2+5x_3+7x_4&=0. \end{aligned}\right\}$

2.60. $\left.\begin{aligned} 3x_1+x_2+x_3-6x_4-12x_5+3x_6&=0,\\ x_1+x_2+x_3-2x_4-6x_5+x_6&=0,\\ x_1+x_3-x_4-5x_5&=0,\\ x_2+x_3-3x_5&=0,\\ x_1-x_2+x_3-4x_5-x_6&=0. \end{aligned}\right\}$

2.61. $\left.\begin{aligned} x_1+3x_2-x_3+4x_4-x_5&=0,\\ x_1+3x_2-x_3+x_4+x_5&=0,\\ 2x_1+6x_2-2x_3+x_4&=0,\\ 3x_1+9x_2-3x_3+x_4+x_5&=0. \end{aligned}\right\}$

В задачах 2.62, 2.63 выяснить, существует ли фундаментальная система решений для каждой из указанных систем.

2.62. $\left.\begin{aligned} x_1-2x_2&=0,\\ 3x_1+4x_2&=0. \end{aligned}\right\}$ **2.63.** $\left.\begin{aligned} 4x_1-2x_2+x_3&=0,\\ x_2-2x_1-3x_3&=0. \end{aligned}\right\}$

2.64. $\left.\begin{aligned} 4x_1-3x_2+2x_3&=0,\\ 8x_1-6x_2+x_3&=0,\\ x_1+x_2-x_3&=0. \end{aligned}\right\}$ **2.65.** $\left.\begin{aligned} 3x_1-x_2+4x_3&=0,\\ 5x_1-x_3&=0,\\ x_1-2x_2+9x_3&=0. \end{aligned}\right\}$

В задачах 2.66—2.69 найти фундаментальную систему решений каждой из указанных систем.

2.66. $\left.\begin{aligned} x_1+x_2-5x_3-3x_4&=0,\\ 2x_1-x_2-\ x_3\qquad&=0.\end{aligned}\right\}$

2.67. $\left.\begin{aligned} x_1-2x_2+x_3-4x_4+\ x_5&=0,\\ 2x_1-4x_2-x_3+\ x_4-2x_5&=0.\end{aligned}\right\}$

2.68. $\left.\begin{aligned} x_1+\ x_2-3x_3\qquad&=0,\\ x_1-\ x_2+\ x_3+2x_4&=0,\\ 2x_1+\ x_2-4x_3+\ x_4&=0,\\ x_1+2x_2-5x_3-\ x_4&=0.\end{aligned}\right\}$

2.69. $\left.\begin{aligned} -2x_1+x_2+\ x_3-\ x_4&=0,\\ x_1-x_2-\ x_3-2x_4&=0,\\ 5x_1-x_2-3x_3-2x_4&=0.\end{aligned}\right\}$

В задачах 2.70—2.73 по данным общим решениям однородных систем найти нормированные фундаментальные системы решений.

2.70. $\begin{aligned} x_1&=c_1+\ c_2-c_3,\\ x_2&=c_1+2c_2+c_3,\\ x_3&=c_1,\\ x_4&=c_2,\\ x_5&=c_3.\end{aligned}$

2.71. $\begin{aligned} x_1&=2c_1-3c_2+c_3,\\ x_2&=\ c_1,\\ x_3&=3c_1+\ c_2-c_3,\\ x_4&=\ c_2,\\ x_5&=\ c_3.\end{aligned}$

2.72. $\begin{aligned} x_1&=\ c_1,\\ x_2&=2c_1-\ c_2,\\ x_3&=3c_1+5c_2,\\ x_4&=\ c_2.\end{aligned}$

2.73. $\begin{aligned} x_1&=\frac{2c_1+c_2}{2},\\ x_2&=\ c_1-\ c_2,\\ x_3&=3c_1+2c_2,\\ x_4&=\ c_1,\ \ x_5=c_2.\end{aligned}$

В задачах 2.74—2.81 решить системы методом Гаусса.

2.74. $\left.\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3&=6,\\ 2x_1+3x_2-\ x_3&=4,\\ 3x_1+\ x_2-4x_3&=0.\end{aligned}\right\}$

2.75. $\left.\begin{aligned} 3x_1+2x_2-3x_3+4x_4&=1,\\ 2x_1+3x_2-2x_3+3x_4&=2,\\ 4x_1+2x_2-3x_3+2x_4&=3.\end{aligned}\right\}$

2.76. $\left.\begin{aligned} 2x_1-3x_2+5x_3&=11,\\ 3x_1-\ x_2+3x_3&=10,\\ x_1+2x_2-4x_3&=-7.\end{aligned}\right\}$

2.77. $\left.\begin{aligned} 2x_1+\ x_2-\ x_3&=5,\\ x_1-3x_2+3x_3&=7,\\ 5x_1-3x_2+3x_3&=7.\end{aligned}\right\}$

2.78. $\left.\begin{aligned} 3x_1-2x_2+\ x_3-\ x_4&=0,\\ 3x_1-2x_2-\ x_3+\ x_4&=0,\\ x_1-\ x_2+2x_3+5x_4&=0.\end{aligned}\right\}$

2.79. $$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_4 - 4x_5 &= 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 &= 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

2.80. $$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 - x_5 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= 3, \\ 4x_1 + 7x_2 + x_3 + 5x_4 + 3x_5 &= 1, \\ 5x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 7x_4 + 5x_5 &= 8. \end{aligned}\right\}$$

2.81. $$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 3 &= 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 - 8 &= 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 6 &= 0, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 3 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Глава 3

ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 3.1. Определение линейного пространства и подпространства

Рассмотрим непустое множество V элементов x, y, z, ... и $\boldsymbol{R}$ — множество всех вещественных чисел.

Пусть задан закон, в силу которого каждой паре x, y элементов множества V ставится в соответствие определенный элемент z этого же множества. В этом случае говорят, что на множестве задана *внутренняя операция,* или *операция сложения;* элемент z называют *суммой* и пишут $x+y=z$.

Кроме того, будем считать, что определена *внешняя операция,* или *операция умножения элементов множества V на число,* т. е. задан закон, в силу которого каждому элементу $x \in V$ и произвольному числу $\alpha \in \boldsymbol{R}$ ставится в соответствие определенный элемент $z \in V$. Будем называть z *произведением числа α на элемент x* и писать $\alpha x=z$ или $x\alpha=z$.

Предположим, что для введенных операций выполняются следующие аксиомы.

I. $x+y=y+x$ *для любых* x, $y \in V$.

II. $(x+y)+z=x+(y+z)=x+y+z$ *для любых* x, y, $z \in V$.

III. *В множестве V существует элемент, который будем называть нулевым и обозначать o, такой, что $x+o=x$ для любого $x \in V$.*

IV. *Для каждого элемента $x \in V$ существует элемент, который будем называть противоположным элементу x и обозначать $-x$, такой, что $x+(-x)=o$.*

V. *Для любого* $x \in V$ $\quad 1 \cdot x=x$.

Для любых чисел α, $\beta \in \boldsymbol{R}$ *и любых* x, $y \in V$

VI. $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$.

VII. $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$.

VIII. $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$.

Множество V, в котором определены операции сложения (внутренняя операция) элементов множества и умножения (внешняя операция) элементов множества на произвольные числа из $\boldsymbol{R}$ и эти операции удовлетворяют указанным выше аксиомам I—VIII, называется *вещественным линейным* или *векторным пространством.*

Если множество образует линейное пространство, то элементы $x, y, z, \ldots$ этого множества будем называть *элементами пространства* или *векторами* и обозначать $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \ldots$

Аналогично определяется комплексное линейное пространство. В этом случае вместо множества $\boldsymbol{R}$ берется множество всех комплексных чисел.

В дальнейшем будем часто употреблять термин «линейное пространство», опуская слова «вещественное» или «комплексное» в тех случаях, когда речь идет о свойствах, справедливых как для вещественных, так и для комплексных линейных пространств.

Из определения линейного пространства вытекают следующие утверждения.

1. *В линейном пространстве существует единственный нулевой элемент (вектор).*

Предположим, что в линейном пространстве V существуют два нулевых вектора $\vec{o}_1$ и $\vec{o}_2$. Тогда $\vec{o}_2+\vec{o}_1=\vec{o}_2$, так как $\vec{o}_1$ — нулевой элемент и $\vec{o}_1+\vec{o}_2=\vec{o}_1$, так как $\vec{o}_2$ — нулевой элемент. Сравнивая эти равенства и учитывая аксиому I, получим $\vec{o}_1=\vec{o}_2$.

2. *В линейном пространстве для каждого элемента $\vec{x}$ существует единственный противоположный ему элемент $-\vec{x}$.*

Предположим, что для элемента $\vec{x}$ имеются два противоположных ему элемента $-\vec{x}_1$ и $-\vec{x}_2$. Тогда

$$\vec{x}+(-\vec{x}_1)+(-\vec{x}_2)=(\vec{x}+(-\vec{x}_1))+(-\vec{x}_2)=$$
$$=\vec{o}+(-\vec{x}_2)=-\vec{x}_2.$$

С другой стороны,

$$\vec{x}+(-\vec{x}_1)+(-\vec{x}_2)=\vec{x}+(-\vec{x}_2)+(-\vec{x}_1)=$$
$$=(\vec{x}+(-\vec{x}_2))+(-\vec{x}_1)=\vec{o}+(-\vec{x}_1)=-\vec{x}_1.$$

Сравнивая результаты, имеем

$$-\vec{x}_1 = -\vec{x}_2.$$

3. *Для элемента* $-\vec{x}$ *противоположным является элемент* $\vec{x}$. Это свойство очевидно.

4. *Произведение числа* 0 *на любой элемент* $\vec{x}$ *есть нулевой элемент.*

Действительно,

$$0\vec{x} = 0\vec{x} + \vec{o} = 0\vec{x} + (\vec{x} + (-\vec{x})) =$$

$$= (0\vec{x} + \vec{x}) + (-\vec{x}) = (0+1)\vec{x} + (-\vec{x}) = 1\vec{x} + (-\vec{x}) =$$

$$= \vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{o}.$$

5. *Произведение* $-1\vec{x}$ *равно элементу* $-\vec{x}$.

Действительно,

$$-1\vec{x} + \vec{x} = (-1+1)\vec{x} = 0\vec{x} = \vec{o}.$$

Поэтому элемент $-1\vec{x}$ противоположен элементу $\vec{x}$ и, следовательно, $-1\vec{x} = -\vec{x}$.

6. *Произведение любого числа* α *на нулевой элемент есть нулевой элемент.*

Действительно,

$$\alpha\vec{o} = \alpha(\vec{x} + (-\vec{x})) = \alpha(\vec{x} + (-1)\vec{x}) =$$
$$= \alpha\vec{x} + \alpha(-1)\vec{x} = \alpha\vec{x} + (-\alpha\vec{x}) = \vec{o}.$$

7. *Если*

$$\alpha\vec{x} = \vec{o} \tag{3.1}$$

и $\alpha \neq 0$, то $\vec{x} = \vec{o}$.

Действительно, умножив равенство (3.1) почленно на $1/\alpha$, получим

$$\frac{1}{\alpha}(\alpha\vec{x}) = \frac{1}{\alpha}\vec{o}$$

или $\vec{x} = \vec{o}$.

8. *Если*

$$\alpha\vec{x}=\vec{o} \tag{3.2}$$

и $\vec{x}\neq\vec{o}$, *то* $\alpha=0$.

Предположим, что $\alpha\neq 0$. Тогда, умножив равенство (3.2) почленно на $1/\alpha$, получим $\vec{x}=\vec{o}$, что противоречит условию.

Из утверждений 4, 6—8 следует, что в линейном пространстве произведение числа α на элемент $\vec{x}$ равно нулевому элементу тогда и только тогда, когда $\alpha=0$ или $\vec{x}=\vec{o}$.

В дальнейшем сумму $\vec{x}+(-\vec{y})$ будем обозначать $\vec{x}-\vec{y}$ и называть *разностью элементов* $\vec{x}$ и $\vec{y}$.

Пример 1. Пусть M — множество свободных векторов, знакомых читателю из курса аналитической геометрии в пространстве. Определим операции сложения векторов и умножения вектора на вещественное число так, как это было сделано в курсе аналитической геометрии. Так как при сложении векторов и умножении вектора на число получается также вектор, то введенные операции являются операциями на множестве M. Они удовлетворяют аксиомам I—VIII. Следовательно, множество M с введенными выше операциями является вещественным линейным пространством.

Если из множества M выделить множество M_1 векторов, лежащих в некоторой плоскости, и определить операции сложення векторов и умножения вектора на вещественное число так же, как в множестве M, то M_1 будет также линейным вещественным пространством.

Пример 2. Рассмотрим множество S всех вещественных матриц размеров $m\times n$. Легко видеть, что если ввести операции сложения матриц и умножения матрицы на вещественное число так, как это сделано в матричном исчислении, то эти операции удовлетворяют аксиомам I—VIII. Следовательно, множество S с введенными операциями является вещественным линейным пространством.

Пример 3. Рассмотрим множество S_1 всех вещественных матриц размеров $1\times n$. Введем операцию сложения матриц так, как это сделано в матричном исчислении. Операцию умножения на число введем следующим образом: если $x=[x_1\ x_2\ \ldots\ x_n]$, то $\alpha x=[\alpha x_1\ x_2\ \ldots\ x_n]$. Легко проверить, что аксиомы I—VII выполняются, а аксиома VIII не выполняется. Следовательно, множество S_1 не является линейным пространством.

Пусть V — линейное пространство. Рассмотрим множество всевозможных пар $(\vec{x}, \vec{y})$, где $\vec{x}, \vec{y}\in V$. Это множество будем обозначать $V\times V$ и назовем *декартовым произведением линейных пространств.*

В множестве $V \times V$ определим внутреннюю и внешнюю операции так:

1) $(\vec{x}_1, \vec{y}_1) + (\vec{x}_2, \vec{y}_2) = (\vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{y}_1 + \vec{y}_2)$;

2) $\alpha(\vec{x}, \vec{y}) = (\alpha\vec{x}, \alpha\vec{y})$.

Легко показать, что введенные таким образом операции удовлетворяют аксиомам I—VIII. Следовательно, $V \times V$ является линейным пространством.

Множество V_1 элементов линейного пространства V называется *подпространством пространства* V, когда выполняются следующие условия:

1) в множестве V_1 операции сложения элементов и умножения элемента на число определяются так же, как в множестве V;

2) если $\vec{x}, \vec{y} \in V_1$, то $\vec{x} + \vec{y} \in V_1$;

3) если $\vec{x} \in V_1$, то $\alpha\vec{x} \in V_1$, где α — вещественное число, если V — вещественное пространство, и комплексное, если V — комплексное.

Очевидно, что всякое подпространство V_1 линейного пространства является линейным пространством, т. е. в V_1 выполняются аксиомы I—VIII.

Действительно, в подпространстве V_1 имеется нулевой вектор, так как если $\vec{x} \in V_1$, то $0\vec{x} = \vec{o} \in V_1$. Для любого элемента $\vec{x} \in V_1$ в подпространстве V_1 имеется противоположный элемент $-\vec{x}$, так как если $\vec{x} \in V_1$, то $-1\vec{x} = -\vec{x} \in V_1$.

Справедливость остальных аксиом I—VIII очевидна.

Заметим, что нулевой элемент $\vec{o}$ линейного пространства V образует подпространство этого пространства. Само пространство V можно рассматривать как подпространство пространства V.

В примере 1 рассмотрены пространства M и M_1. Очевидно, что M_1 является подпространством линейного пространства M.

§ 3.2. Линейная зависимость и линейная независимость векторов

Рассмотрим векторы (элементы) $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_r$ некоторого линейного пространства V. Вектор

$$\vec{y}=\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+\ldots+\alpha_r\vec{x}_r,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ — числа (вещественные, если V — вещественное пространство, и комплексные, если V — комплексное), принадлежит также пространству V (в этом случае говорят что вектор $\vec{y}$ линейно выражается через векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_r$). Этот вектор называется *линейной комбинацией векторов* $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_r$, а числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ — *коэффициентами этой комбинации.*

Если все коэффициенты линейной комбинации векторов равны нулю, то такая комбинация называется *тривиальной* и представляет собой нулевой вектор.

Если хотя бы один из коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ отличен от нуля, то комбинация векторов называется *нетривиальной.*

Следует иметь в виду, что и нетривиальная линейная комбинация может быть нулевым вектором.

Система векторов называется *линейно-независимой,* если только тривиальная линейная комбинация этих векторов является нулевым вектором.

Система векторов называется *линейно-зависимой,* если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, которая является нулевым вектором.

Из приведенных выше определений следует, что вопрос, является ли данная система векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_r$ линейно-зависимой или линейно-независимой, сводится к выяснению того, при каких $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ возможно равенство

$$\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+\ldots+\alpha_r\vec{x}_r=\vec{o}. \tag{3.3}$$

Если это равенство справедливо лишь при $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_r=0$, то векторы линейно-независимы. Если же существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, из которых хотя бы одно отлично от нуля, и для этих чисел имеет место равенство (3.3), то векторы линейно-зависимы.

Система, состоящая из одного ненулевого вектора, линейно-независима, так как равенство $\alpha\vec{x}=\vec{o}$ при $\vec{x}\neq\vec{o}$ возможно лишь при $\alpha=0$.

Система, состоящая из одного нулевого вектора, линейно-зависима, так как равенство $\alpha\vec{o}=\vec{o}$ имеет место и при $\alpha\neq 0$.

Пример. В линейном пространстве M примера 1 § 3.1 любые два ненулевых коллинеарных вектора являются линейно-зависимыми. Действительно, из аналитической геометрии известно, что для коллинеарных векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ существует число λ такое, что $\vec{x}=\lambda\vec{y}$ или $\vec{x}-\lambda\vec{y}=\vec{o}$. Таким образом, нетривиальная линейная комбинация $\alpha_1\vec{x}+\alpha_2\vec{y}$, где $\alpha_1=1$, $\alpha_2=-\lambda$, является нулевым вектором.

Для векторов линейного пространства имеют место следующие свойства.

1. *Если к системе r линейно-зависимых векторов присоединить любые m векторов, то получим систему $r+m$ линейно-зависимых векторов.*

Доказательство. Пусть $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_r$ — линейно-зависимые векторы, т. е. существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, из которых хотя бы одно отлично от нуля, такие, что

$$\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+\ldots+\alpha_r\vec{x}_r=\vec{o}. \tag{3.4}$$

Присоединим к данным векторам $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_r$ произвольные векторы $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_m$. Полученная система векторов

$$\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_r, \quad \vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_m$$

линейно-зависима, так как, учитывая равенство (3.4), имеем

$$\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+\ldots+\alpha_r\vec{x}_r+0\vec{y}_1+0\vec{y}_2+\ldots+0\vec{y}_m=\vec{o},$$

где среди чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ есть хотя бы одно, отличное от нуля. ■

2. *Если из системы r линейно-независимых векторов отбросить любые m векторов $(m<r)$, то оставшиеся векторы образуют линейно-независимую систему.*

Доказательство. Пусть векторы

$$\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m, \quad \vec{x}_{m+1}, \ldots, \vec{x}_r \tag{3.5}$$

линейно-независимы. Рассмотрим систему векторов

$$\vec{x}_{m+1}, \vec{x}_{m+2}, \ldots, \vec{x}_r, \tag{3.6}$$

полученную из данной отбрасыванием первых m векторов. Система векторов (3.6) является линейно-независимой, так как если бы она была линейно-зависимой, то, на основании предыдущего свойства, была бы линейно-зависимой и система (3.5), так как она получается из системы (3.6) присоединением векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m$, а это противоречит условию. ■

Следующие свойства предлагаем читателю доказать самостоятельно.

3. *Если среди векторов* $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_r$ *имеются* $\vec{x}_k$ и $\vec{x}_l (k \neq l)$ *такие, что* $\vec{x}_k = \lambda \vec{x}_l$, *где* λ — *число, то векторы* $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_r$ *линейно-зависимы.*

4. *Если среди векторов* $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_r$ *имеется нулевой, то эти векторы линейно-зависимы.*

Теорема. *Для того чтобы векторы* $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_r$ $(r > 1)$ *были линейно-зависимы, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из этих векторов являлся линейной комбинацией остальных.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_r$ линейно-зависимы. Тогда существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, среди которых хотя бы одно отлично от нуля, такие, что

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \vec{x}_i = \vec{o}.$$

Предположим что $\alpha_k \neq 0$. Тогда

$$\vec{x}_k = \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq k)}}^{r} \left(-\frac{\alpha_i}{\alpha_k}\right) \vec{x}_i = \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq k)}}^{r} \beta_i \vec{x}_i,$$

т. е. вектор $\vec{x}_k$ является линейной комбинацией остальных векторов данной системы.

Достаточность. Пусть один из векторов данной системы, например $\vec{x}_k$, является линейной комбинацией остальных векторов, т. е.

$$\vec{x}_k = \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq k)}}^{r} \beta_i \vec{x}_i \text{ или } \vec{x}_k - \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq k)}}^{r} \beta_i \vec{x}_i = \vec{o}.$$

Таким образом, нетривиальная линейная комбинация векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_r$ является нулевым вектором и, следовательно, эти векторы линейно-зависимы. ■

Два вектора линейного пространства называются *коллинеарными,* если они линейно-зависимы, и *неколлинеарными,* если они линейно-независимы.

Три вектора линейного пространства называются *компланарными,* если они линейно-зависимы, и *некомпланарными,* если они линейно-независимы.

Введенные таким образом понятия коллинеарности и компланарности векторов совпадают в пространстве M (см. пример 1 § 3.1) с известными из аналитической геометрии понятиями коллинеарности и компланарности векторов.

§ 3.3. Размерность и базис линейного пространства. Изоморфизм

Пусть в линейном пространстве V выполняются следующие условия:

1) существует n линейно-независимых векторов;

2) любая система $n+1$ векторов линейно-зависима.

Тогда число n называется *размерностью пространства* V. Если пространство состоит из одного нулевого элемента, то его размерность будем считать равной нулю.

Размерность пространства V будем обозначать $\dim V$ (от французского слова dimension — размерность).

Пространство V размерности n будем называть *n-мерным пространством.*

Базисом n-мерного пространства V называется любая упорядоченная система n линейно-независимых векторов этого пространства.

Теорема 1. *Если $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ — базис n-мерного пространства V, то любой вектор $\vec{x}$ этого пространства линейно выражается через векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$, т. е.*

$$\vec{x}=\alpha_1\vec{e}_1+\alpha_2\vec{e}_2+\ldots+\alpha_n\vec{e}_n.$$

Доказательство. Пусть $\vec{x}$ — произвольный вектор пространства V. Так как рассматриваемое пространство n-мерное, то система векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n, \vec{x}$ линейно-зависима, т. е. существует нетривиальная линейная комбинация

$$\beta_1\vec{e}_1+\beta_2\vec{e}_2+\ldots+\beta_n\vec{e}_n+\beta_{n+1}\vec{x}$$

такая, что

$$\beta_1\vec{e}_1+\beta_2\vec{e}_2+\ldots+\beta_n\vec{e}_n+\beta_{n+1}\vec{x}=\vec{o}. \tag{3.7}$$

Легко показать, что $\beta_{n+1}\neq 0$. Действительно, если $\beta_{n+1}=0$, то среди коэффициентов $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ есть отличные от нуля, и векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ линейно-зависимы. Так как $\beta_{n+1}\neq 0$, то из равенства (3.7) следует, что

$$\vec{x}=\alpha_1\vec{e}_1+\alpha_2\vec{e}_2+\ldots+\alpha_n\vec{e}_n,$$

где

$$\alpha_i=-\frac{\beta_i}{\beta_{n+1}}\ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \blacksquare$$

Теорема 2. *Если $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ — система линейно-независимых векторов пространства V и любой вектор $\vec{x}$ этого пространства линейно выражается через $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$, то пространство V является n-мерным.*

Доказательство. Пусть $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n, \vec{x}_{n+1}$ — произвольные векторы пространства V. Докажем, что они линейно-зависимы, т. е. что существует нетривиальная линейная комбинация

$$\beta_1\vec{x}_1+\beta_2\vec{x}_2+\ldots+\beta_n\vec{x}_n+\beta_{n+1}\vec{x}_{n+1}$$

такая, что

$$\beta_1\vec{x}_1+\beta_2\vec{x}_2+\ldots+\beta_n\vec{x}_n+\beta_{n+1}\vec{x}_{n+1}=\vec{o}. \tag{3.8}$$

Так как по условию теоремы

$$\begin{aligned}
\vec{x}_1 &= \alpha_{11}\vec{e}_1+\alpha_{12}\vec{e}_2+\ldots+\alpha_{1n}\vec{e}_n,\\
\vec{x}_2 &= \alpha_{21}\vec{e}_1+\alpha_{22}\vec{e}_2+\ldots+\alpha_{2n}\vec{e}_n,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\vec{x}_{n+1} &= \alpha_{n+1\,1}\vec{e}_1+\alpha_{n+1\,2}\vec{e}_2+\ldots+\alpha_{n+1\,n}\vec{e}_n,
\end{aligned}$$

то

$$\sum_{i=1}^{n+1}\beta_i\vec{x}_i=\beta_1(\alpha_{11}\vec{e}_1+\alpha_{12}\vec{e}_2+\ldots+\alpha_{1n}\vec{e}_n)+$$

$$+\beta_2(\alpha_{21}\vec{e}_1+\alpha_{22}\vec{e}_2+\ldots+\alpha_{2n}\vec{e}_n)+$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\beta_{n+1}(\alpha_{n+1\ 1}\vec{e}_1+\alpha_{n+1\ 2}\vec{e}_2+\ldots+\alpha_{n+1\ n}\vec{e}_n)=$$

$$=(\beta_1\alpha_{11}+\beta_2\alpha_{21}+\ldots+\beta_{n+1}\alpha_{n+1\ 1})\vec{e}_1+$$

$$+(\beta_1\alpha_{12}+\beta_2\alpha_{22}+\ldots+\beta_{n+1}\alpha_{n+1\ 2})\vec{e}_2+$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+(\beta_1\alpha_{1n}+\beta_2\alpha_{2n}+\ldots+\beta_{n+1}\alpha_{n+1\ n})\vec{e}_n.$$

Так как $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ линейно-независимы, то соотношение (3.8) возможно только тогда, когда

$$\left.\begin{array}{l}
\alpha_{11}\beta_1+\alpha_{21}\beta_2+\ldots+\alpha_{n+1\ 1}\beta_{n+1}=0,\\
\alpha_{12}\beta_1+\alpha_{22}\beta_2+\ldots+\alpha_{n+1\ 2}\beta_{n+1}=0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\alpha_{1n}\beta_1+\alpha_{2n}\beta_2+\ldots+\alpha_{n+1\ n}\beta_{n+1}=0.
\end{array}\right\}$$

Мы получили систему n линейных однородных уравнений с $n+1$ неизвестными $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n+1}$. Как известно, такая система имеет ненулевое решение. Следовательно, существуют числа $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \beta_{n+1}$, среди которых хотя бы одно отлично от нуля, такие, что имеет место равенство (3.8). ■

Из доказанных теорем следует, что если в пространстве V существует n линейно-независимых векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ таких, что любой вектор $\vec{x}$ этого пространства линейно выражается через $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$, то пространство является n-мерным, а векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ — базисом.

Пример. В пространстве M примера 1 § 3.1 векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ образуют базис. Действительно, эти векторы линейно-независимы, так как они некомпланарны, и любой вектор этого пространства линейно выражается через $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ (как известно из аналитической геометрии). Размерность этого пространства $\dim M=3$.

Заметим, что любые три некомпланарных вектора пространства M образуют базис этого пространства, а любые два неколлинеарных вектора пространства M_1 свободных векторов на плоскости образуют базис этого пространства.

Пространство, в котором имеется базис, состоящий из конечного числа векторов, называется *конечномерным.*

Линейное пространство называется *бесконечномерным,* если в нем существует любое число линейно-независимых векторов.

Примером бесконечномерного пространства может служить пространство всех непрерывных иа отрезке $[a, b]$ вещественных функций вещественного аргумента, в котором операции сложения функций и умножения функции на вещественное число определены так же, как в математическом анализе.

Пусть даны два линейных пространства V и V'. Если между элементами этих пространств установлено взаимно-однозначное соответствие, причем $\vec{x} \in V$ соответствует $\vec{x}' \in V'$, то будем писать $\vec{x} \leftrightarrow \vec{x}'$.

Два линейных вещественных (комплексных) пространства V и V' называются *изоформными,* если между элементами можно установить взаимно-однозначное соответствие такое, что если $\vec{x}_1 \leftrightarrow \vec{x}_1'$ и $\vec{x}_2 \leftrightarrow \vec{x}_2'$, где $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2 \in V$, $\vec{x}_1'$, $\vec{x}_2' \in V'$, то

$$\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \leftrightarrow \vec{x}_1' + \vec{x}_2';$$
$$\alpha\vec{x}_1 \leftrightarrow \alpha\vec{x}_1',$$

где α — вещественное (комплексное) число.

Теорема 3. *Два линейных вещественных (комплексных) пространства изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую размерность.*

Эту теорему предлагаем читателю доказать самостоятельно.

§ 3.4. Координаты вектора

В этом и последующих параграфах будем рассматривать конечномерные пространства.

Теорема. *Если $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ — базис линейного пространства, то для любого вектора $\vec{x}$ этого пространства* *существует единственная система чисел* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *такая, что*

$$\vec{x}=\alpha_1\vec{e}_1+\alpha_2\vec{e}_2+\ldots+\alpha_n\vec{e}_n. \tag{3.9}$$

Доказательство. Из определения базиса следует существование системы чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ такой, что имеет место равенство (3.9). Допустим, что существует также система чисел $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ такая, что

$$\vec{x}=\beta_1\vec{e}_1+\beta_2\vec{e}_2+\ldots+\beta_n\vec{e}_n.$$

Тогда

$$\alpha_1\vec{e}_1+\alpha_2\vec{e}_2+\ldots+\alpha_n\vec{e}_n=\beta_1\vec{e}_1+\beta_2\vec{e}_2+\ldots+\beta_n\vec{e}_n$$

или

$$(\alpha_1-\beta_1)\vec{e}_1+(\alpha_2-\beta_2)\vec{e}_2+\ldots+(\alpha_n-\beta_n)\vec{e}_n=\vec{o}.$$

Так как векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ линейно-независимы, то последнее равенство имеет место только при условии

$$\alpha_1-\beta_1=0, \quad \alpha_2-\beta_2=0, \ldots, \alpha_n-\beta_n=0,$$

откуда

$$\alpha_1=\beta_1, \quad \alpha_2=\beta_2, \ldots, \alpha_n=\beta_n. \blacksquare$$

Выражение (3.9) будем называть *разложением вектора* $\vec{x}$ *по базису* $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$, а числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — *координатами вектора в этом базисе*. Если вектор $\vec{x}$ имеет в некотором базисе координаты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, то будем писать $\vec{x}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

В пространстве M, рассмотренном в примере 1 § 3.1, в качестве базиса возьмем векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Координатами вектора $\vec{x}$ в этом базисе будут декартовы прямоугольные координаты этого вектора.

Пример. Пусть V — пятимерное линейное пространство с базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5$. Найти координаты векторов $\vec{e}_2$ и $\vec{x}=3\vec{e}_1-\vec{e}_3+2\vec{e}_4$ в данном базисе.

Решение. Вектор $\vec{x}$ представим в виде

$$\vec{x}=3\vec{e}_1+0\vec{e}_2+(-1)\vec{e}_3+2\vec{e}_4+0\vec{e}_5,$$

следовательно, $\vec{x}(3, 0, -1, 2, 0)$.

Аналогично

$$\vec{e}_2 = 0\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3 + 0\vec{e}_4 + 0\vec{e}_5,$$

откуда $\vec{e}_2\,(0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0)$.

Имеют место следующие свойства.

1. *Вектор является нулевым вектором пространства тогда и только тогда, когда все его координаты в любом базисе равны нулю.*

Доказательство. Если все координаты вектора в некотором базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ равны нулю, то

$$\vec{x} = 0\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + \ldots + 0\vec{e}_n = \vec{o}.$$

Если $\vec{x} = \vec{o}$ и в некотором базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$

$$\vec{x} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{e}_n,$$

то

$$\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{e}_n = \vec{o}.$$

Векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ линейно-независимы, следовательно, $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. ■

2. *Координаты суммы двух векторов в некотором базисе равны сумме соответствующих координат этих векторов в том же базисе.*

Доказательство. Пусть в некотором базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$

$$\vec{x} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{e}_n,$$

$$\vec{y} = \beta_1\vec{e}_1 + \beta_2\vec{e}_2 + \ldots + \beta_n\vec{e}_n.$$

Тогда

$$\vec{x} + \vec{y} = (\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{e}_n) + $$
$$+ (\beta_1\vec{e}_1 + \beta_2\vec{e}_2 + \ldots + \beta_n\vec{e}_n).$$

Учитывая аксиомы I, II, VIII линейного пространства, имеем

$$\vec{x} + \vec{y} = (\alpha_1 + \beta_1)\vec{e}_1 + (\alpha_2 + \beta_2)\vec{e}_2 + \ldots + (\alpha_n + \beta_n)\vec{e}_n.$$

Получено разложение вектора $\vec{x} + \vec{y}$ по базису $\vec{e}_1$,

$\vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$. Так как разложение по базису единственно, то координатами вектора $\vec{x}+\vec{y}$ будут $\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, \ldots, \alpha_n+ +\beta_n$. ■

Следующие свойства предлагаем читателю доказать самостоятельно.

3. *Координаты произведения вектора на число в некотором базисе равны произведению соответствующих координат данного вектора в том же базисе на это число.*

4. *Вектор $\vec{x}$ является линейной комбинацией векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_r$ тогда и только тогда, когда каждая координата вектора $\vec{x}$ в некотором базисе является такой же линейной комбинацией соответствующих координат векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_r$ в том же базисе.*

5. *Два вектора равны между собой тогда и только тогда, когда равны между собой их соответствующие координаты в одном и том же базисе.*

Указанные свойства позволяют свести операции над векторами к соответствующим операциям над их координатами.

Пример. В некотором базисе даны векторы $\vec{x}(2, -1, 3, 5)$ и $\vec{y}(-1, 4, 0, -2)$. Найти координаты вектора $2\vec{x}-3\vec{y}$.

Решение. Учитывая свойства 2 и 3, заключаем, что вектор $2\vec{x}-3\vec{y}$ имеет координаты $(7, -14, 6, 16)$.

§ 3.5. Матрица системы векторов

Пусть дана система векторов

$$\left.\begin{array}{l} \vec{x}_1(a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}), \\ \vec{x}_2(a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n2}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \vec{x}_m(a_{1m}, a_{2m}, \ldots, a_{nm}) \end{array}\right\} \qquad (3.10)$$

n-мерного линейного пространства, координаты которых даны в одном и том же базисе. Поставим в соответствие этой системе векторов матрицу

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix}, \tag{3.11}$$

в j-м столбце которой стоят координаты вектора $\vec{x}_j$.

Матрицу A будем называть *матрицей системы векторов* $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ *в данном базисе.*

Обратно, если наперед задана матрица (3.11), то ей можно поставить в соответствие систему (3.10) m векторов n-мерного пространства.

Согласно свойству 4 § 3.4, будем говорить, что столбцы матрицы (3.11) линейно-зависимы, если соответствующие им векторы линейно-зависимы, и наоборот.

Теорема. *Для того чтобы m векторов n-мерного линейного пространства были линейно-независимы, необходимо и достаточно, чтобы ранг r матрицы системы векторов был равен m.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть система векторов (3.10) линейно-независима. Тогда среди векторов этой системы нет нулевых и ранг r матрицы A системы больше нуля. Предположим, что $r<m$. На основании теоремы о базисном миноре, в матрице A имеется небазисный столбец, который является линейной комбинацией всех остальных столбцов. Тогда вектор, соответствующий этому столбцу, является линейной комбинацией остальных векторов, чего не может быть, так как данные векторы линейно-независимы.

Достаточность. Пусть ранг r матрицы A данной системы m векторов равен m. Тогда в матрице A есть базисный минор M порядка m. Предположим, что векторы линейно-зависимы. Тогда один из столбцов матрицы A является линейной комбинацией остальных ее столбцов, а значит, и соответствующий столбец минора M является линейной комбинацией остальных его столбцов. Отсюда следует, что $M=0$, чего не может быть, так как M — базисный минор. ■

Следствие 1. *Для того чтобы система n векторов n-мерного линейного пространства была линейно-независимой, необходимо и достаточно, чтобы матрица этой системы векторов была невырожденной.*

Следствие 2. *Если ранг матрицы системы m векторов равен r, то максимальное число линейно-независимых векторов этой системы равно r.*

Пример. Найти максимальное число линейно-независимых векторов в системе векторов $\vec{x}_1(2, 3, -1, 4)$, $\vec{x}_2(-1, 1, 2, 0)$, $\vec{x}_3(0, 0, 1, 1)$, $\vec{x}_4(1, 4, 1, 4)$, $\vec{x}_5(2, 3, 0, 5)$,

Решение. Матрица данной системы векторов имеет вид

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Так как ранг этой матрицы равен 3, то максимальное число линейно-независимых векторов данной системы векторов равно 3.

§ 3.6. Пространство решений однородной системы линейных уравнений

Рассмотрим однородную систему m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3.12)$$

Пусть $(\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_n)$ и $(\beta_1; \beta_2; \ldots; \beta_n)$ — два решения системы (3.12). Тогда

$$(\alpha_1+\beta_1; \alpha_2+\beta_2; \ldots; \alpha_n+\beta_n); \qquad (3.13)$$

$$(k\alpha_1; k\alpha_2: \ldots; k\alpha_n), \qquad (3.14)$$

где k — любое число, также являются решениями системы (3.12). Назовем решение (3.13) *суммой решений*, а (3.14) — *произведением решения на число*.

Очевидно, что множество решений системы (3.12) с введенными таким образом операциями образует линейное пространство, которое назовем *пространством решений однородной системы линейных уравнений* и обозначим U.

Теорема. *Пространство U является пространством размерности $n-r$, где r — ранг матрицы системы (3.12).*

Доказательство. Докажем, что в пространстве

U имеется система $n-r$ линейно-независимых векторов. Нормированная фундаментальная система решений системы (3.12) состоит из $n-r$ решений:

$$\left.\begin{array}{l}(x_1^{(1)};\ x_2^{(1)};\ \ldots;\ x_r^{(1)};\ 1;\ 0;\ \ldots;\ 0);\\ (x_1^{(2)};\ x_2^{(2)};\ \ldots;\ x_r^{(2)};\ 0;\ 1;\ \ldots;\ 0);\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ (x_1^{(n-r)};\ x_2^{(n-r)};\ \ldots;\ x_r^{(n-r)};\ 0;\ 0;\ \ldots;\ 1).\end{array}\right\} \qquad (3.15)$$

Система (3.15) является системой векторов пространства U. Известно, что эта система векторов является линейно-независимой и всякое решение системы (3.12) есть линейная комбинация нормированной фундаментальной системы решений (см. § 2.6). Следовательно, пространство U имеет размерность $n-r$. ■

§ 3.7. Матрица перехода от одного базиса к другому

Рассмотрим в линейном пространстве V два базиса:

$$\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \ldots,\ \vec{e}_n \qquad (3.16)$$

и

$$\vec{e}\,'_1,\ \vec{e}\,'_2,\ \ldots,\ \vec{e}\,'_n. \qquad (3.17)$$

Матрицей перехода от базиса (3.16) к базису (3.17) называется матрица системы векторов $\vec{e}\,'_1,\ \vec{e}\,'_2,\ \ldots,\ \vec{e}\,'_n$ в базисе $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \ldots,\ \vec{e}_n$.

Из определения следует, что если

$$T=\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \ldots & t_{1n}\\ t_{21} & t_{22} & \ldots & t_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ t_{n1} & t_{n2} & \ldots & t_{nn}\end{bmatrix} \qquad (3.18)$$

есть матрица перехода от базиса (3.16) к базису (3.17), то

$$\left.\begin{array}{l}\vec{e}\,'_1=t_{11}\vec{e}_1+t_{21}\vec{e}_2+\ldots+t_{n1}\vec{e}_n,\\ \vec{e}\,'_2=t_{12}\vec{e}_1+t_{22}\vec{e}_2+\ldots+t_{n2}\vec{e}_n,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \vec{e}\,'_n=t_{1n}\vec{e}_1+t_{2n}\vec{e}_2+\ldots+t_{nn}\vec{e}_n.\end{array}\right\} \qquad (3.19)$$

Из теоремы § 3.5 следует, что матрица перехода от одного базиса к другому является невырожденной и всякую невырожденную матрицу порядка n можно рассматривать как матрицу перехода от одного базиса к другому в n-мерном пространстве.

Очевидно, что матрица T^{-1}, обратная матрице (3.18), является матрицей перехода от базиса (3.17) к базису (3.16).

Пример. Рассмотрим в линейном пространстве M_1 примера 1 § 3.1 базис $\vec{i}$, $\vec{j}$, а также базис $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ (рис. 3.1). В этом случае

$$\left.\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi, \\ \vec{e}_2 &= -\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi. \end{aligned}\right\}$$

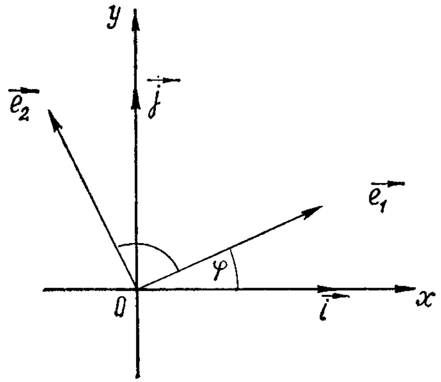


Рис. 3.1

Матрицей перехода от базиса $\vec{i}$, $\vec{j}$ к базису $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ является матрица

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

§ 3.8. Преобразование координат вектора

Задача преобразования координат заключается в нахождении зависимости между координатами вектора в разных базисах. При этом предполагается, что связь между базисами известна.

Формулы, связывающие координаты вектора в разных базисах, называются *формулами преобразования координат*.

Теорема. *Если* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — *координаты вектора* $\vec{x}$ *в базисе* $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$, *а* $\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_n'$ — *координаты этого же вектора в базисе* $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \ldots, \vec{e}_n'$, *то имеет место следующее соотношение:*

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \vdots \\ \alpha_n' \end{bmatrix}$$

или

$$X = TX',$$

где

$$X = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}, \quad X' = \begin{bmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \vdots \\ \alpha_n' \end{bmatrix},$$

T — *матрица перехода от базиса* $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ *к базису* $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \ldots, \vec{e}_n'$.

Доказательство. Из условия теоремы следует, что

$$\vec{x} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{e}_n, \tag{3.20}$$

$$\vec{x} = \alpha_1'\vec{e}_1' + \alpha_2'\vec{e}_2' + \ldots + \alpha_n'\vec{e}_n'. \tag{3.21}$$

Если матрица T имеет вид (3.18), то из равенства (3.21), учитывая соотношения (3.19), получим

$$\vec{x} = \alpha_1' (t_{11}\vec{e}_1 + t_{21}\vec{e}_2 + \ldots + t_{n1}\vec{e}_n) +$$

$$+ \alpha_2' (t_{12}\vec{e}_1 + t_{22}\vec{e}_2 + \ldots + t_{n2}\vec{e}_n) + \ldots$$

$$\ldots + \alpha_n' (t_{1n}\vec{e}_1 + t_{2n}\vec{e}_2 + \ldots + t_{nn}\vec{e}_n) =$$

$$= (t_{11}\alpha_1' + t_{12}\alpha_2' + \ldots + t_{1n}\alpha_n')\vec{e}_1 +$$

$$+ (t_{21}\alpha_1' + t_{22}\alpha_2' + \ldots + t_{2n}\alpha_n')\vec{e}_2 + \ldots$$
$$\ldots + (t_{n1}\alpha_1' + t_{n2}\alpha_2' + \ldots + t_{nn}\alpha_n')\vec{e}_n.$$

Сравнивая этот результат с равенством (3.20), имеем

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 = t_{11}\alpha_1' + t_{12}\alpha_2' + \ldots + t_{1n}\alpha_n', \\ \alpha_2 = t_{21}\alpha_1' + t_{22}\alpha_2' + \ldots + t_{2n}\alpha_n', \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \alpha_n = t_{n1}\alpha_1' + t_{n2}\alpha_2' + \ldots + t_{nn}\alpha_n' \end{array}\right\} \tag{3.22}$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}. \blacksquare \tag{3.23}$$

Соотношение (3.23) можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \vdots \\ \alpha_n' \end{bmatrix} = T^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}. \tag{3.24}$$

Формулы (3.22)—(3.24) являются формулами преобразования координат.

Пример. Пусть вектор $\vec{x}$ в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ имеет координаты 1, —2. Найти координаты этого вектора в базисе $\vec{e}_1' = \vec{e}_1$, $\vec{e}_2' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$.

Решение. Матрица перехода от базиса $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ к базису $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$ имеет вид

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Искомые координаты α_1', α_2' находим по формуле (3.24). Имеем

$$\begin{bmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \end{bmatrix} = T^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, $\alpha_1' = 3$, $\alpha_2' = -2$.

§ 3.9. Определение евклидова пространства

Рассмотрим линейное вещественное пространство V. Наряду с имеющимися в этом пространстве операциями (сложения векторов и умножения вектора на число) введем еще одну операцию следующим образом. Каждой паре векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ этого пространства поставим в соответствие вещественное число, обозначаемое $(\vec{x}, \vec{y})$, так, что для любых $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$ и любого $\lambda \in \boldsymbol{R}$ выполняются следующие аксиомы.

I. $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x})$.

II. $(\vec{x}+\vec{y}, \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{z}) + (\vec{y}, \vec{z})$.

III. $(\lambda\vec{x}, \vec{y}) = \lambda(\vec{x}, \vec{y})$.

IV. $(\vec{x}, \vec{x}) \geqslant 0$, *причем равенство имеет место только в том случае, когда* $\vec{x}=\vec{o}$.

Введенную операцию назовем *скалярным умножением векторов,* а число $(\vec{x}, \vec{y})$ — *скалярным произведением.*

Скалярное произведение $(\vec{x}, \vec{x})$ называется *скалярным квадратом вектора* $\vec{x}$ и обозначается $\vec{x}^2$, т. е. $(\overleftarrow{x}, \overleftarrow{x})=x^2$.

Заметим, что если хотя бы один из векторов нулевой, то скалярное произведение равно нулю. Действительно,

$$(\vec{o}, \vec{y}) = (0\vec{x}, \vec{y}) = 0(\vec{x}, \vec{y}) = 0.$$

Евклидовым пространством называется линейное вещественное пространство, в котором задана операция скалярного умножения векторов.

Если n-мерное линейное пространство — евклидово, то будем называть его *евклидовым n-мерным пространством,* а базис линейного пространства — *базисом евклидова пространства.*

Пример 1. Пусть M — пространство свободных векторов (см. § 3.1). В аналитической геометрии для векторов определена операция скалярного умножения, которая удовлетворяет аксиомам I—IV. Следовательно, пространство M с введенной операцией скалярного умножения векторов является евклидовым пространством.

Пример 2. В линейном пространстве S вещественных матриц размеров $n\times 1$ (см. § 3.1) каждой паре матриц

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

поставим в соответствие число

$$(X,\ Y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i. \tag{3.25}$$

Выражение (3.25) является скалярным произведением, так как аксиомы I—IV выполнены. Следовательно, пространство S с введенной операцией скалярного умножения есть евклидово пространство.

Легко убедиться в том, что линейное пространство вещественных матриц размеров $1 \times n$ также является евклидовым, если скалярное произведение введено по формуле (3.25).

Два евклидовых пространства E и E' называются *изоморфными*, если изоморфны соответствующие линейные пространства и, кроме того, если $\vec{x},\ \vec{y} \in E$, $\vec{x}',\ \vec{y}' \in E'$ и $\vec{x} \leftrightarrow \vec{x}'$, $\vec{y} \leftrightarrow \vec{y}'$, то $(\vec{x},\ \vec{y}) = (\vec{x}',\ \vec{y}')$.

§ 3.10. Длина вектора

Длиной (или *модулем*) *вектора* $\vec{x}$ *евклидова пространства* называется арифметическое значение квадратного корня из скалярного квадрата вектора $\vec{x}$.

Длину вектора $\vec{x}$ будем обозначать $|\vec{x}|$. Таким образом, $|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x}^2}$.

Имеют место следующие свойства.

1. $|\vec{x}| = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\vec{x} = \vec{o}$.

2. $|\lambda\vec{x}| = |\lambda|\ |\vec{x}|$, *где* λ — *вещественное число.*

3. $|(\vec{x},\ \vec{y})| \leqslant |\vec{x}|\,|\vec{y}|$ *(неравенство Коши — Буняковского).*

4. $|\vec{x}+\vec{y}| \leqslant |\vec{x}| + |\vec{y}|$ *(неравенство треугольника).*

В справедливости свойств 1 и 2 читатель легко убедится самостоятельно. Докажем справедливость свойства 3.

Если хотя бы один из векторов нулевой, то свойство очевидно. Пусть $\vec{x}$ и $\vec{y}$ — произвольные ненулевые векторы евклидова пространства, а λ — любое вещественное число. В силу аксиомы IV § 3.9, имеем

$$(\lambda\vec{x}-\vec{y})^2 \geqslant 0 \tag{3.26}$$

или, учитывая аксиомы I—III,

$$\lambda^2\vec{x}^2-2\lambda(\vec{x},\vec{y})+\vec{y}^2 \geqslant 0.$$

Так как λ — любое вещественное число, а левая часть последнего неравенства есть квадратный трехчлен относительно λ, то это неравенство справедливо только тогда, когда дискриминант трехчлена неположителен, т. е.

$$(\vec{x},\vec{y})^2-\vec{x}^2\vec{y}^2 \leqslant 0 \text{ или } (\vec{x},\vec{y})^2 \leqslant \vec{x}^2\vec{y}^2.$$

Так как обе части неравенства неотрицательны, то

$$\sqrt{(\vec{x},\vec{y})^2} \leqslant \sqrt{\vec{x}^2\vec{y}^2}$$

или

$$|(\vec{x},\vec{y})| \leqslant |\vec{x}|\,|\vec{y}|. \tag{3.27}$$

Замечание. В соотношении (3.27) равенство достигается тогда и только тогда, когда векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ коллинеарны.

Действительно, пусть векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ коллинеарны. Тогда $\vec{y}=\lambda\vec{x}$, и поэтому

$$|(\vec{x},\vec{y})| = |(\vec{x},\lambda\vec{x})| = |\lambda|\,|(\vec{x},\vec{x})| = |\lambda|\,|\vec{x}|^2,$$
$$|\vec{x}|\,|\vec{y}| = |\vec{x}|\,|\lambda\vec{x}| = |\lambda|\,|\vec{x}|^2.$$

Следовательно,

$$|(\vec{x},\vec{y})| = |\vec{x}|\,|\vec{y}|. \qquad (3.28$$

Пусть имеет место равенство (3.28). Предположим, что $\vec{x}$ и $\vec{y}$ неколлинеарны. Тогда $\lambda\vec{x}-\vec{y}\neq\vec{o}$ при любом λ. При этом в соотношении (3.26), а следовательно, и (3.27) имеет место строгое неравенство, что противоречит условию (3.28). Следовательно, $\vec{x}$ и $\vec{y}$ коллинеарны.

Для доказательства свойства 4 рассмотрим равенства

$$|\vec{x}+\vec{y}|^2=(\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y})=\vec{x}^2+\vec{y}^2+2(\vec{x},\vec{y})$$

и

$$(|\vec{x}|+|\vec{y}|)^2=|\vec{x}|^2+|\vec{y}|^2+2|\vec{x}|\;|\vec{y}|.$$

Из неравенства Коши—Буняковского имеем

$$(\vec{x}, \vec{y})\leqslant|\vec{x}|\;|\vec{y}|.$$

Следовательно,

$$|\vec{x}+\vec{y}|^2\leqslant(|\vec{x}|+|\vec{y}|)^2 \text{ или } |\vec{x}+\vec{y}|\leqslant|\vec{x}|+|\vec{y}|.$$

Заметим, что введенное понятие длины вектора в пространстве свободных векторов (см. пример 1 § 3.8) совпадает с понятием длины, рассматриваемым в векторной алгебре.

§ 3.11. Угол между векторами

Из неравенства Коши—Буняковского следует, что для ненулевых векторов

$$\frac{|(\vec{x}, \vec{y})|}{|\vec{x}||\vec{y}|}\leqslant 1 \text{ или } -1\leqslant\frac{(\vec{x}, \vec{y})}{|\vec{x}||\vec{y}|}\leqslant 1.$$

Число

$$\frac{(\vec{x}, \vec{y})}{|\vec{x}||\vec{y}|}$$

можно рассматривать как косинус некоторого угла φ. Угол φ, для которого

$$\cos\varphi=\frac{(\vec{x}, \vec{y})}{|\vec{x}||\vec{y}|},\; 0\leqslant\varphi<2\pi,$$

назовем *углом между векторами* $\vec{x}$ *и* $\vec{y}$.

Два вектора называются *ортогональными,* если их скалярное произведение равно нулю.

Очевидно, что нулевой вектор ортогонален любому другому вектору.

Из определения следует, что для того чтобы ненулевые векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ были ортогональны, необходимо и достаточно, чтобы $\cos\varphi=0$, т. е. $\varphi=\pi/2$ или $\varphi=3\pi/2$.

Для того чтобы ненулевые векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ были коллинеарны, т. е. $\vec{y}=\lambda\vec{x}$, необходимо и достаточно, чтобы $\cos\varphi=\pm1$, т. е. $\varphi=0$ (при $\lambda>0$) или $\varphi=\pi$ (при $\lambda<0$).

Действительно, если в соотношении (3.27) имеет место равенство, т. е. $|(\vec{x}, \vec{y})|=|\vec{x}|\ |\vec{y}|$, то $\cos\varphi=\pm1$, откуда $\varphi=0$ или $\varphi=\pi$. Но, как отмечалось ранее, в соотношении (3.27) равенство достигается тогда и только тогда, когда векторы коллинеарны.

Заметим, что введенное понятие угла между векторами в пространстве свободных векторов (см. пример 1 § 3.8) совпадает с понятием угла, рассматриваемым в векторной алгебре. Ортогональность векторов в этом пространстве означает их перпендикулярность.

§ 3.12. Ортонормированный базис

Система векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ ($n\geqslant2$) называется *ортогональной,* если эти векторы попарно ортогональны, т. е. $(\vec{x}_i, \vec{x}_j)=0$ при $i\neq j$.

Теорема 1. *Ортогональная система ненулевых векторов линейно-независима.*

Доказательство. Пусть $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ — ортогональная система ненулевых векторов. Предположим, что она линейно-зависима. Тогда существуют числа α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$, среди которых хотя бы одно отлично от нуля, такие, что

$$\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+\ldots+\alpha_n\vec{x}_n=\vec{o}.$$

Пусть $\alpha_i\neq0$. Тогда скалярное произведение

$$(\vec{x}_i, \alpha_1\vec{x}_1+\ldots+\alpha_i\vec{x}_i+\ldots+\alpha_n\vec{x}_n)=0$$

или

$$\alpha_1(\vec{x}_i, \vec{x}_1)+\ldots+\alpha_i(\vec{x}_i, \vec{x}_i)+\ldots+\alpha_n(\vec{x}_i, \vec{x}_n)=0.$$

Так как $(\vec{x}_i, \vec{x}_j)=0$ при $i\neq j$, то

$$\alpha_i|\vec{x}_i|^2=0,$$

откуда $|x_i|=0$, т. е. $\vec{x}_i$ — нулевой вектор, что противоречит условию теоремы. ■

Вектор $\vec{x}$ называется *нормированным* или *единичным*, если $|\vec{x}|=1$.

Если $\vec{x}$ — ненулевой вектор, то

$$\vec{x}^0 = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}, \tag{3.29}$$

$$\vec{x}_1^0 = \frac{\vec{x}}{-|\vec{x}|} \tag{3.30}$$

есть нормированный вектор.

Нахождение для данного вектора нормированного вектора по формуле (3.29) или (3.30) называется *нормированием данного вектора*, а множитель

$$\mu = \frac{1}{\pm|\vec{x}|}$$

называется *нормирующим множителем*.

Система векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ $(n \geqslant 2)$ называется *ортонормированной*, если она ортогональна и каждый вектор является нормированным, т. е. если

$$(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ 1 & \text{при } i = j, \end{cases}$$

где $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Очевидно что если $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ — ортогональная система ненулевых векторов, то система, полученная из данной нормированием каждого вектора, также является ортогональной.

Базис евклидова n-мерного пространства называется *ортонормированным*, если базисные векторы составляют ортонормированную систему.

Теорема 2. *Во всяком евклидовом n-мерном пространстве $(n \geqslant 2)$ существует ортонормированный базис.*

Доказательство. Пусть $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_n$ — некоторый базис данного евклидова пространства. Составим ортогональную систему вектора $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_n$ следующим образом.

Положим $\vec{f}_1 = \vec{g}_1$. В качестве $\vec{f}_2$ возьмем вектор $\vec{f}_2 = \vec{g}_2 + \lambda_1^{(2)}\vec{g}_1$, где $\lambda_1^{(2)}$ — число. При любом $\lambda_1^{(2)}$ вектор $\vec{f}_2$ ненулевой, так как $\vec{g}_1$ и $\vec{g}_2$ линейно-независимы. Подберем $\lambda_1^{(2)}$ так, чтобы $(\vec{f}_1, \vec{f}_2) = 0$, т. е.

$$(\vec{g}_1, \vec{g}_2 + \lambda_1^{(2)}\vec{g}_1) = 0.$$

Отсюда

$$(\vec{g}_1, \vec{g}_2) + \lambda_1^{(2)} (\vec{g}_1, \vec{g}_1) = 0$$

или

$$(\vec{g}_1, \vec{g}_2) + \lambda_1^{(2)} |\vec{g}_1|^2 = 0.$$

Так как $|\vec{g}_1| \neq 0$, то

$$\lambda_2^{(2)} = -\frac{(\vec{g}_1, \vec{g}_2)}{|\vec{g}_1|^2}.$$

В качестве $\vec{f}_3$ возьмем вектор

$$\vec{f}_3 = \vec{g}_3 + \lambda_1^{(3)}\vec{f}_1 + \lambda_2^{(3)}\vec{f}_2, \qquad (3.31)$$

где $\lambda_1^{(3)}$, $\lambda_2^{(3)}$ — числа. При любых $\lambda_1^{(3)}$, $\lambda_2^{(3)}$ $\vec{f}_3$ — ненулевой вектор (в этом легко убедиться, подставив в равенство (3.31) вместо $\vec{f}_1$ и $\vec{f}_2$ их выражения через $\vec{g}_1$ и $\vec{g}_2$). Подберем $\lambda_1^{(3)}$ и $\lambda_2^{(3)}$ так, чтобы $(\vec{f}_1, \vec{f}_3) = 0$ и $(\vec{f}_2, \vec{f}_3) = 0$, т. е.

$$(\vec{f}_1, \vec{g}_3 + \lambda_1^{(3)}\vec{f}_1 + \lambda_2^{(3)}\vec{f}_2) = 0,$$

$$(\vec{f}_2, \vec{g}_3 + \lambda_1^{(3)}\vec{f}_1 + \lambda_2^{(3)}\vec{f}_2) = 0.$$

Отсюда

$$(\vec{f}_1, \vec{g}_3) + \lambda_1^{(3)} (\vec{f}_1, \vec{f}_1) + \lambda_2^{(3)} (\vec{f}_1, \vec{f}_2) = 0,$$

$$(\vec{f}_2, \vec{g}_3) + \lambda_1^{(3)} (\vec{f}_2, \vec{f}_1) + \lambda_2^{(3)} (\vec{f}_2, \vec{f}_2) = 0.$$

Так как $(\vec{f}_1, \vec{f}_2) = (\vec{f}_2, \vec{f}_1) = 0$, а $(\vec{f}_1, \vec{f}_1) = |\vec{f}_1|^2 \neq 0$ и $(\vec{f}_2, \vec{f}_2) = |\vec{f}_2|^2 \neq 0$, то

$$\lambda_1^{(3)} = -\frac{(\vec{f}_1, \vec{g}_3)}{|\vec{f}_1|^2}, \quad \lambda_2^{(3)} = -\frac{(\vec{f}_2, \vec{g}_3)}{|\vec{f}_2|^2}.$$

Пусть найдены векторы $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_{k-1}$. В качестве $\vec{f}_k$ возьмем вектор

$$\vec{f}_k = \vec{g}_k + \lambda_1^{(k)}\vec{f}_1 + \lambda_2^{(k)}\vec{f}_2 + \ldots + \lambda_{k-1}^{(k)}\vec{f}_{k-1},$$

где $\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}, \ldots, \lambda_{k-1}^{(k)}$ — числа. Легко убедиться в том, что при любых $\lambda_j^{(k)}$ $(j = 1, 2, \ldots, k-1)$ вектор $\vec{f}_k$ — ненулевой. Находя $\lambda_j^{(k)}$ $(j = 1, 2, \ldots, k-1)$ из условий

$$(\vec{f}_j, \vec{f}_k) = 0 \ (j = 1, 2, \ldots, k-1),$$

получим

$$\lambda_j^{(k)} = -\frac{(\vec{f}_j, \vec{g}_k)}{|\vec{f}_j|^2} \ (j = 1, 2, \ldots, k-1).$$

Итак, построена ортогональная система ненулевых векторов $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_n$. Пронормировав каждый вектор этой системы, получим ортонормированную систему векторов

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n,$$

которая является ортонормированным базисом. ■

Процесс построения по данному базису ортонормированного базиса называется *ортогонализацией данного базиса.*

В процессе доказательства теоремы получен метод ортогонализации базиса.

В одномерном пространстве любой ненулевой вектор составляет базис. За ортонормированный базис естественно принять любой единичный вектор.

Пример. Рассмотрим пространство S в случае $m = 1$, $n = 3$. В качестве базиса возьмем линейно-независимые векторы $\vec{g}_1 = [1 \ -1 \ 1]$, $\vec{g}_2 = [2 \ -3 \ 4]$, $\vec{g}_3 = [2 \ 2 \ 6]$.

Построим по данному базису ортонормированный базис. Положим

$$\vec{f}_1 = \vec{g}_1 = [1 \ -1 \ 1], \ \vec{f}_2 = \vec{g}_2 + \lambda_1^{(2)}\vec{g}_1,$$

где

$$\lambda_1^{(2)} = -\frac{(\vec{g}_1, \vec{g}_2)}{|\vec{g}_1|^2} = -\frac{2+3+4}{3} = -3.$$

Следовательно,

$$\vec{f}_2 = [-1 \ 0 \ 1].$$

Далее находим

$$\vec{f}_3 = \vec{g}_3 + \lambda_1^{(3)}\vec{f}_1 + \lambda_2^{(3)}\vec{f}_2,$$

где

$$\lambda_1^{(3)} = -\frac{(\vec{f}_1, \vec{g}_3)}{|\vec{f}_1|^2} = -2, \quad \lambda_2^{(3)} = -\frac{(\vec{f}_2, \vec{g}_3)}{|\vec{f}_2|^2} = -2.$$

Таким образом,

$$\vec{f}_3 = [2 \ 4 \ 2].$$

Нормируя векторы $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$, $\vec{f}_3$, получим ортонормированный базис

$$\vec{e}_1 = \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \ -\frac{1}{\sqrt{3}} \ \frac{1}{\sqrt{3}}\right], \quad \vec{e}_2 = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} \ 0 \ \frac{1}{\sqrt{2}}\right],$$

$$\vec{e}_3 = \left[\frac{1}{\sqrt{6}} \ \frac{2}{\sqrt{6}} \ \frac{1}{\sqrt{6}}\right].$$

§ 3.13. Выражение скалярного произведения через координаты в ортонормированном базисе

Пусть в n-мерном евклидовом пространстве задан некоторый ортонормированный базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$. Рассмотрим в этом пространстве векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$, координаты которых в данном базисе соответственно равны $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ и $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, т. е.

$$\vec{x} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{e}_n,$$

$$\vec{y} = \beta_1\vec{e}_1 + \beta_2\vec{e}_2 + \ldots + \beta_n\vec{e}_n.$$

Скалярное произведение этих векторов

$$(\vec{x}, \vec{y}) = (\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{e}_n, \ \beta_1\vec{e}_1 + \beta_2\vec{e}_2 + \ldots + \beta_n\vec{e}_n) =$$

$$= \left(\alpha_1\vec{e}_1, \sum_{i=1}^{n}\beta_i\vec{e}_i\right) + \left(\alpha_2\vec{e}_2, \sum_{i=1}^{n}\beta_i\vec{e}_i\right) + \ldots$$

$$\ldots + \left(\alpha_n\vec{e}_n, \sum_{i=1}^{n}\beta_i\vec{e}_i\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_k\beta_i(\vec{e}_k, \vec{e}_i).$$

Так как $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ — ортонормированный базис, то

$$(\vec{e}_k, \vec{e}_i) = \begin{cases} 0 \text{ при } k \neq i, \\ 1 \text{ при } k = i. \end{cases}$$

Следовательно,

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_n\beta_n.$$

Таким образом, если векторы заданы координатами в ортонормированном базисе, то их скалярное произведение равно сумме произведений одноименных координат.

Так как $|\vec{x}| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}$, то

$$|\vec{x}| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2},$$

и для этого вектора нормирующий множитель

$$\mu = \frac{1}{\pm\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2}},$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — координаты вектора $\vec{x}$ в ортонормированном базисе.

§ 3.14. Аффинное пространство

Пусть дано множество U элементов произвольной природы, которые будем называть *точками* и обозначать большими буквами латинского алфавита, а также линейное пространство V. Пусть выполняются следующие аксиомы.

I. *Каждой упорядоченной паре точек $M, N \in U$ сопоставлен вектор $\vec{x} \in V$. При этом будем писать $\vec{x} = \overrightarrow{MN}$.*

II. *Для каждой точки $M \in U$ и каждого вектора $\vec{x} \in V$ найдется единственная точка $N \in U$ такая, что $\overrightarrow{MN} = \vec{x}$.*

III. *Для любых трех точек $M, N, P \in U$ имеет место соотношение $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$ (соотношение Шаля). Тогда множество U называется аффинным пространством, связанным с линейным пространством V.*

Если линейное пространство V n-мерное, то и связанное с ним аффинное пространство U называется *n-мерным.*

Зафиксируем в аффинном пространстве $\boldsymbol{U}$ некоторую точку O. Тогда каждой точке M этого пространства будет соответствовать единственный вектор $\vec{x}=\overrightarrow{OM}\in V$, называемый *радиус-вектором точки* M. Обратно, каждый вектор $\vec{x}\in V$ можно рассматривать как радиус-вектор единственной точки $M\in \boldsymbol{U}$. Таким образом, множество всех радиус-векторов точек аффинного пространства совпадает с линейным пространством V.

Следует заметить, что всякое линейное пространство V можно рассматривать как аффинное пространство $\boldsymbol{U}$ Для этого достаточно векторы пространства V назвать точками пространства $\boldsymbol{U}$ и каждой упорядоченной паре точек $\vec{x}$, $\vec{y}$ сопоставить вектор $\vec{y}-\vec{x}$.

Из определения аффинного пространства вытекают следующие утверждения.

1. *Каждой паре совпадающих точек из пространства* $\boldsymbol{U}$ *соответствует нулевой вектор из* V.

Действительно, пусть точкам M, $M\in \boldsymbol{U}$ сопоставлен вектор $\vec{x}_0=\overrightarrow{MM}\in V$. Рассмотрим произвольный вектор $\vec{x}\in V$. В силу аксиомы II существует единственная точка $N\in \boldsymbol{U}$ такая, что $\overrightarrow{MN}=\vec{x}$. На основании аксиомы III

$$\overrightarrow{MM}+\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MN}$$

или

$$\vec{x}_0+\vec{x}=\vec{x},$$

откуда $\vec{x}_0$ — нулевой вектор линейного пространства V.

2. *Если* $\overrightarrow{MN}=\vec{x}$, *то* $\overrightarrow{NM}=-\vec{x}$.

Согласно аксиоме III,

$$\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{MM}$$

или

$$\vec{x}+\overrightarrow{NM}=\vec{o},$$

откуда $\overrightarrow{NM}=-\vec{x}$.

Пример. Пусть U — множество точек, рассматриваемых в аналитической геометрии; V — линейное пространство свободных векторов, рассмотренное в примере 1 § 3.1. Очевидно, что для рассматриваемого множества аксиомы I—III выполняются и U является трехмерным аффинным пространством, связанным с линейным пространством V.

§ 3.15. Аффинные координаты

Системой координат или *репером в аффинном пространстве* называется совокупность фиксированной точки O этого пространства и базисных векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ связанного с ним линейного пространства. Такой репер будем обозначать $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$. Фиксированную точку O назовем *началом координат*.

Каждой точке M аффинного пространства соответствует радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$. Координаты вектора $\overrightarrow{OM}$ в указанном базисе называются *аффинными координатами точки M в заданной системе координат*.

Очевидно, что каждой точке n-мерного аффинного пространства в заданном репере соответствует единственная упорядоченная совокупность n чисел, являющихся аффинными координатами точки, и наоборот, каждой упорядоченной совокупности n чисел соответствует единственная точка n-мерного аффинного пространства в некотором репере.

Если точка M в некотором репере имеет аффинные координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то будем писать $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Пусть даны точки $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $N(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ в репере $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$. Тогда координатами соответствующего этим точкам вектора $\overrightarrow{MN}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ будут $y_1-x_1, y_2-x_2, \ldots, y_n-x_n$.

Действительно, согласно аксиоме III,

$$\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON},$$

откуда

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}.$$

Так как координатами векторов $\overrightarrow{ON}$ и $\overrightarrow{OM}$ являются соответственно координаты точек N и M, то координатами вектора $\overrightarrow{MN}$ будут $y_1-x_1, y_2-x_2, \ldots, y_n-x_n$.

Рассмотрим два репера:

$$(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n), \tag{3.32}$$

$$(O'; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \ldots, \vec{e}\,'_n). \tag{3.33}$$

Пусть $h_1, h_2, \ldots, h_n$ — координаты точки O' в репере (3.32). Найдем зависимость между координатами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ точки M в репере (3.32) и координатами $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ этой же точки в репере (3.33), если T — матрица перехода от базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ к базису $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \ldots, \vec{e}_n{}'$.

Пусть Y — матрица-столбец из координат вектора $\overrightarrow{O'M}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$. Тогда

$$Y = X - H, \tag{3.34}$$

где

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}.$$

С другой стороны, согласно формулам преобразования координат вектора, имеем

$$Y = TX', \tag{3.35}$$

где

$$X' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}.$$

Сравнивая равенства (3.34) и (3.35), имеем

$$X - H = TX'$$

или

$$X = TX' + H. \tag{3.36}$$

Формула (3.36) есть формула преобразования координат точки при переходе от одного репера к другому.

В частном случае, если в репере (3.33) $\vec{e}_1{}' = \vec{e}_1, \vec{e}_2{}' = \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n{}' = \vec{e}_n$, говорят, что репер $(O'; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ получен из репера $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{OO'}$. При этом формула (3.36) принимает вид

$$X = X' + H$$

и называется *формулой преобразования координат при параллельном переносе.*

Система координат $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ называется *прямоугольной,* если базисные векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ — ортогональны, и *декартовой прямоугольной,* если базисные векторы ортонормированные.

Задачи

В задачах этой главы будем считать, что для элементов рассматриваемых множеств действия введены так, как это делается в соответствующих разделах математики (если нет специальных указаний).

3.1. Является ли множество $\boldsymbol{R}$ всех вещественных чисел:

а) вещественным линейным пространством;

б) комплексным линейным пространством?

3.2. Является ли множество $\boldsymbol{C}$ всех комплексных чисел:

а) вещественным линейным пространством;

б) комплексным линейным пространством?

3.3. Является ли множество всех целых чисел:

а) вещественным линейным пространством;

б) комплексным линейным пространством?

3.4. Является ли множество всех рациональных чисел:

а) вещественным линейным пространством;

б) комплексным линейным пространством?

3.5. Каким должно быть число a, чтобы множество, состоящее из одного этого числа, являлось вещественным линейным пространством?

3.6. Является ли множество всех линейных функций одного переменного с вещественными коэффициентами:

а) вещественным линейным пространством;

б) комплексным линейным пространством?

3.7. Является ли множество всех многочленов от одного переменного второй степени с вещественными коэффициентами вещественным линейным пространством?

3.8. Является ли множество всех алгебраических многочленов от одного переменного не выше второй степени с вещественными коэффициентами вещественным линейным пространством?

3.9. Является ли комплексным линейным пространством множество всех алгебраических многочленов от одной переменной с комплексными коэффициентами:

а) степени не выше n;

б) степени n;

в) степени выше n?

3.10. Является ли множество всех вещественных матриц размеров $m \times n$:

а) вещественным линейным пространством;

б) комплексным линейным пространством?

3.11. Является ли множество всех комплексных матриц размеров $m \times n$:

а) вещественным линейным пространством;

б) комплексным линейным пространством?

3.12. Является ли множество всех вещественных диагональных матриц порядка n:

а) вещественным линейным пространством;

б) комплексным линейным пространством?

3.13. Является ли множество всех матриц вида

$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & c \end{bmatrix},$$

где a, b, c — любые вещественные числа, вещественным линейным пространством?

3.14. Является ли множество всех матриц вида

$$\begin{bmatrix} a & 1 \\ b & c \end{bmatrix},$$

где a, b, c — любые вещественные числа, вещественным линейным пространством?

3.15. Является ли множество всех вещественных матриц вида

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

вещественным линейным пространством?

3.16. Является ли множество всех невырожденных вещественных матриц порядка n вещественным линейным пространством?

3.17. Является ли вещественным линейным пространством множество всех свободных векторов, рассматриваемых в курсе аналитической геометрии в пространстве?

3.18. Является ли множество всех матриц вида $[a\ 0]$, где a — любое вещественное число, вещественным линейным пространством?

3.19. Является ли множество всех матриц вида $[a\ 2]$, где a — любое вещественное число, вещественным линейным пространством?

3.20. Доказать, что множество всех вещественных функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$ числовой оси, является вещественным линейным пространством.

3.21. Является ли вещественным линейным пространством множество всех вещественных функций, непрерывных во всех точках отрезка $[a, b]$ числовой оси, кроме точки $x_0 \in [a, b]$?

3.22. Является ли вещественным линейным пространством множество функций вида:

а) $y = \alpha + \ln(x^2+1)$;

б) $y = \ln(x^2+1)\alpha$,

где x — вещественное переменное; α — любое вещественное число.

3.23. Пусть M — множество всех степенных рядов с одним и тем же радиусом сходимости R. При каком R это множество является вещественным линейным пространством?

3.24. Показать, что множество всех решений системы n алгебраических линейных однородных уравнений с n неизвестными является вещественным линейным пространством.

3.25. Показать, что множество всех решений однородного линейного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами является вещественным линейным пространством.

3.26. Пусть M — множество всех вещественных матриц вида

$[a_1\ a_2]$, в котором операция сложения определена обычным способом (как в матричном исчислении), а операция умножения на любое число α определяется равенством

$$\alpha[a_1\ a_2]=[a_1\ \alpha a_2].$$

Выяснить, является ли множество M вещественным линейным пространством.

3.27. Пусть M — множество, состоящее из одного элемента a. Определим операции сложения и умножения на любое число α соответственно равенствами

$$a+a=a,\quad \alpha a=a.$$

Выяснить, является ли множество M линейным пространством.

3.28. Являются ли подпространствами линейного вещественного пространства всех вещественных чисел:

а) множество всех четных чисел;
б) множество всех нечетных чисел;
в) множество всех целых чисел?

3.29. Является ли множество всех вещественных чисел подпространством:

а) линейного вещественного пространства всех комплексных чисел;
б) линейного комплексного пространства всех комплексных чисел?

3.30. Является ли подпространством линейного вещественного пространства всех вещественных матриц порядка n:

а) множество всех вещественных невырожденных матриц порядка n;
б) множество всех вещественных диагональных матриц порядка n;
в) множество всех вещественных матриц вида

$$\begin{bmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{bmatrix};$$

г) множество всех вещественных матриц порядка n, определитель каждой из которых равен единице?

3.31. Является ли подпространством линейного вещественного пространства всех вещественных матриц размеров $1\times n$ множество всех вещественных матриц вида:

а) $[2\ a_2\, a_3\ \ldots\ a_n]$;
б) $[a_1\, a_2\ \ldots\ a_n]$, где $a_i>0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$;
в) $[a_1\, a_2\ \ldots\ a_n]$, где $a_1+a_2+\ldots+a_n=0$;
г) $[a_1\, a_2\ \ldots\ a_n]$, где $a_1+a_2+\ldots+a_n=3$?

3.32. Является ли множество всех векторов, рассматриваемых в аналитической геометрии на плоскости, подпространством линейного пространства всех векторов, рассматриваемых в аналитической геометрии в пространстве?

3.33. Дано линейное пространство всех векторов, рассматриваемых в аналитической геометрии в пространстве. Пусть $\vec{a}$ — некоторый вектор этого пространства. Является ли множество всех векторов $k\vec{a}$, где k — любое вещественное число, подпространством данного пространства?

3.34. Является ли множество всех вещественных невырожденных матриц второго порядка подпространством пространства всех вещественных матриц второго порядка?

3.35. Доказать, что если к совокупности r линейно-зависимых векторов некоторого линейного пространства присоединить любые m векторов этого пространства, то получим систему $r+m$ линейно-зависимых векторов.

3.36. Доказать, что в пространстве вещественных матриц второго порядка матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

являются линейно-независимыми.

3.37. Пусть L — вещественное линейное пространство многочленов не выше второй степени. Выяснить, является ли линейно-независимой каждая из следующих систем векторов данного пространства:

а) $1, x$; б) $1, x, x^2$;

в) $1, x, x^2, 2x^2+3$; г) $1, (x-2), (x-2)^2$.

3.38. Пусть M_1 — вещественное линейное пространство вещественных матриц размеров 1×4. Выяснить, является ли линейно-зависимой каждая из следующих систем векторов этого пространства:

а) $[1\ 0\ 0\ 0]$, $[0\ 1\ 0\ 0]$;

б) $[1\ 0\ 0\ 0]$, $[0\ 1\ 0\ 0]$, $[0\ 0\ 1\ 0]$;

в) $[1\ 0\ 0\ 0]$, $[0\ 1\ 0\ 0]$, $[0\ 0\ 1\ 0]$, $[0\ 0\ 0\ 1]$;

г) $[1\ 1\ 1\ 1]$, $[0\ 2\ 3\ 1]$, $[0\ 0\ 4\ -5]$, $[0\ 0\ 0\ 7]$;

д) $[1\ 0\ 0\ 0]$, $[2\ 0\ 0\ 0]$, $[1\ 2\ 3\ 4]$;

е) $[2\ 1\ -5\ 4]$, $[3\ 0\ 7\ 2]$, $[1\ 2\ -17\ 6]$.

3.39. Пусть N_2 — вещественное линейное пространство вещественных матриц третьего порядка. Выяснить, является ли линейно-зависимой каждая из следующих систем векторов этого пространства:

а) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

б) $$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix};$$

в) $$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 6 & 4 & 0 \\ 2 & -4 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

г) $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.40. Пусть V_2 — вещественное линейное пространство свободных векторов, рассматриваемых в курсе аналитической геометрии на плоскости. Выяснить, является ли линейно-независимой каждая из следующих систем векторов:

а) $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}$, $\vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}$;

б) $\vec{a}=4\vec{i}-2\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{j}-2\vec{i}$;

в) $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}$, $\vec{b}=2\vec{i}$, $\vec{c}=\vec{j}-\vec{i}$.

3.41. Пусть V_2 — пространство, рассматриваемое в задаче 3.40. Доказать, что:

а) векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ линейно-независимы;

б) любые два коллинеарных вектора линейно-зависимы;

в) любые три вектора линейно-зависимы.

3.42. Пусть V_3 — вещественное линейное пространство свободных векторов, рассматриваемых в курсе аналитической геометрии в пространстве. Выяснить, является ли линейно-независимой каждая из следующих систем векторов:

а) $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$;

б) $\vec{a}=\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}$;

в) $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+4\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{c}=5\vec{k}-9\vec{j}$;

г) $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}$, $\vec{b}=3\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{j}+\vec{k}$;

д) $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{c}=2\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{d}=\vec{j}-\vec{k}$.

3.43. Пусть V_3 — пространство, рассматриваемое в задаче 3.42. Доказать, что:

а) векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ линейно-независимы;

б) любые два коллинеарных вектора линейно-зависимы.

3.44. Пусть V_3 — пространство, рассматриваемое в задаче 3.42. Доказать, что линейно-зависимы:

а) любые три компланарных вектора;

б) любые четыре вектора.

В задачах 3.45—3.51 выяснить, какова размерность каждого из указанных линейных пространств, и указать один из базисов.

3.45. L — линейное пространство, рассмотренное в задаче 3.37.

3.46. M_1 — линейное пространство, рассмотренное в задаче 3.38.

3.47. M_2 — линейное пространство, рассмотренное в задаче 3.39.

3.48. V_2 — линейное пространство, рассмотренное в задаче 3.40.

3.49. V_3 — линейное пространство, рассмотренное в задаче 3.42.

3.50. Y — линейное пространство всех решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка.

3.51. P — линейное пространство всех многочленов от одного переменного не выше n-й степени с вещественными коэффициентами.

3.52. Показать, что линейное пространство всех степенных рядов с бесконечным радиусом сходимости является бесконечномерным.

3.53. Показать, что линейное пространство всех вещественных функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$, является бесконечномерным.

3.54. Чему равны координаты каждого из указанных векторов в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$:

а) $\vec{a} = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 5\vec{e}_3 - 4\vec{e}_4$;

б) $\vec{b} = 3\vec{e}_4 - 5\vec{e}_1 + 2\vec{e}_3 + \vec{e}_2$;

в) $\vec{c} = \vec{e}_1 - \vec{e}_3$;

г) $\vec{e}_1$?

3.55. Найти координаты матрицы

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

в базисе

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.56. Найти координаты каждого из указанных многочленов в базисе $1, x, x^2$:

а) $2+3x+4x^2$; б) $3x^2-2$;

в) $(x+5)(x-3)+1$; г) $2+(x-1)^2$.

3.57. Найти координаты каждого из указанных многочленов в базисе $1, (x-2), (x-2)^2$:

а) $2-3(x-2)+5(x-2)^2$; б) $x+1$;

в) x^2+3x+4; г) $2x-4$.

В задачах 3.58—3.61 векторы заданы координатами в одном и том же базисе.

3.58. Найти $2\vec{a}+3\vec{b}$, если $\vec{a}(-1, 3, 2)$, $\vec{b}(5, 0, -3)$.

3.59. Найти $\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}$, если $\vec{a}(2, -1, 3, 4)$, $\vec{b}(0, 1, 2, 2,)$, $\vec{c}(0, 0, 0, 1)$.

3.60. Найти вектор $\vec{x}$, если $2\vec{a}+3\vec{x}=5\vec{b}$, $\vec{a}(2, -1, 4)$, $\vec{b}(-1, 2, 0)$.

3.61. Найти вектор $\vec{x}$, если $3\vec{a}-5\vec{x}=\vec{b}$, $\vec{a}(0, 2, 7, 0, 0)$, $\vec{b}(2, 0, 0, 5, -10)$.

3.62. Даны векторы $\vec{a}=2\vec{e}_1+\vec{e}_2$, $\vec{b}=\vec{e}_1-2\vec{e}_2$, где $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ — базис линейного пространства.

а) Доказать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ образуют базис;

б) найти координаты вектора $\vec{c}=3\vec{e}_1+2\vec{e}_2$ в базисе $\vec{a}$, $\vec{b}$.

3.63. Даны векторы $\vec{a}=\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3$, $\vec{b}=2\vec{e}_2+3\vec{e}_3$, $\vec{c}=\vec{e}_2+5\vec{e}_3$, где $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ — базис линейного пространства.

а) Доказать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис;

б) найти координаты вектора $\vec{d}=2\vec{e}_1-\vec{e}_2+\vec{e}_3$ в базисе $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

В задачах 3.64—3.67 даны векторы в некотором базисе. Показать, что данные системы векторов линейно-зависимы, и выяснить, является ли вектор $\vec{b}$ линейной комбинацией остальных векторов.

3.64. $\vec{a}_1(2, 0, -1)$, $\vec{a}_2(3, 0, -2)$, $\vec{a}_3(-1, 0, 1)$, $\vec{b}(1, 2, 0)$.

3.65. $\vec{a}_1(-2,\ 0,\ 1)$, $\vec{a}_2(1,\ -1,\ 0)$, $\vec{a}_3(0,\ 1,\ 2)$, $\vec{b}(2,\ 3,\ 4)$.

3.66. $\vec{a}_1(-1,\ 2,\ -4)$, $\vec{a}_2(2,\ 1,\ 5)$, $\vec{a}_3(3,\ -1,\ 5)$, $\vec{b}(1,\ 1,\ 1)$.

3.67. $\vec{a}_1(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)$, $\vec{a}_2(2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2)$, $\vec{b}(3,\ -3,\ 4,\ 5,\ 2)$.

3.68. В некотором базисе даны векторы:

а) $\vec{a}_1(2,\ 1)$, $\vec{a}_2(-1,\ 3)$;

б) $\vec{a}_1(2,\ 1)$, $\vec{a}_2(4,\ 2)$.

Найти все значения λ, при которых вектор $\vec{b}(1,\ \lambda)$ в том же базисе линейно выражается через векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$.

В задачах 3.69—3.74 рассматриваются векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, $\vec{b}$ в некотором базисе. Найти все значения λ, при которых вектор $\vec{b}$ линейно выражается через векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$.

3.69. $\vec{a}_1(1,\ 2,\ -1)$, $\vec{a}_2(-2,\ 1,\ 3)$, $\vec{a}_3(0,\ 1,\ -1)$, $\vec{b}(1,\ \lambda,\ 2)$.

3.70. $\vec{a}_1(1,\ -2,\ 3)$, $\vec{a}_2(0,\ -1,\ \lambda)$, $\vec{a}_3(1,\ 0,\ 1)$, $\vec{b}(3,\ -1,\ 2)$.

3.71. $\vec{a}_1(2,\ 3,\ 0)$, $\vec{a}_2(1,\ 36,\ 0)$, $\vec{a}_3(-1,\ 2,\ 0)$, $\vec{b}(0,\ \lambda,\ 5)$.

3.72. $\vec{a}_1(1,\ 2,\ 1)$, $\vec{a}_2(2,\ 1,\ 1)$, $\vec{a}_3(-1,\ -2,\ -1)$, $\vec{b}(2,\ 3,\ \lambda)$.

3.73. $\vec{a}_1(2,\ 3,\ 7)$, $\vec{a}_2(3,\ -2,\ 4)$, $\vec{a}_3(-1,\ 1,\ -1)$, $\vec{b}(1,\ \lambda,\ 3)$.

3.74. $\vec{a}_1(1,\ 2,\ 4)$, $\vec{a}_2(2,\ 1,\ 5)$, $\vec{a}_3(3,\ -1,\ 5)$, $\vec{b}(1,\ \lambda,\ \lambda,)$.

3.75. Найти матрицу перехода от базиса $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ к базису $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, $\vec{e}_1$.

3.76. Найти матрицу перехода от базиса $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, $\vec{e}_4$ к базису $\vec{e}_3$, $\vec{e}_4$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_1$.

3.77. Дана матрица

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

перехода от базиса $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ к базису $\vec{e}\,'_1$, $\vec{e}\,'_2$. Найти координаты векторов $\vec{e}\,'_1$, $\vec{e}\,'_2$ в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$.

3.78. Дана матрица

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

перехода от базиса $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ к базису $\vec{e}\,'_1$, $\vec{e}\,'_2$, $\vec{e}\,'_3$. Найти координаты вектора $\vec{e}\,'_2$ в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$.

3.79. Дана матрица

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

перехода от базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ к базису $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$. Найти координаты вектора $\vec{e}'_3$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

3.80. Найти матрицу перехода от базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ к базису $\vec{e}'_1 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_3 + \vec{e}_2$, $\vec{e}'_2 = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{e}'_3 = \vec{e}_3$.

3.81. Найти матрицу перехода от базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ к базису $\vec{e}'_1 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{e}'_2 = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_3$, $\vec{e}'_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$.

3.82. Найти матрицу перехода от базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ к базису $\vec{e}'_1 = 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 + \vec{e}_4$, $\vec{e}'_2 = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 - \vec{e}_4$, $\vec{e}'_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_4$, $\vec{e}'_4 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 + \vec{e}_4$.

3.83. Дана матрица

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

перехода от базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ к базису $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2$. Найти координаты векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ в базисе $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2$,

3.84. Дана матрица

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

перехода от базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ к базису $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2$. Найти координаты векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ в базисе $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2$.

3.85. Дана матрица

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

перехода от базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ к базису $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$. Найти координаты вектора $\vec{e}_2$ в базисе $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$.

3.86. Дана матрица

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

перехода от базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ к базису $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$. Найти координаты векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ в базисе $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$.

3.87. Дана матрица

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

перехода от базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ к базису $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3', \vec{e}_4'$. Найти координаты векторов $\vec{e}_2, \vec{e}_3$ в базисе $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3', \vec{e}_4'$,

3.88. Вектор $\vec{x}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ имеет координаты 1, —2. Найти координаты этого вектора в базисе $\vec{e}_1' = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$, $\vec{e}_2' = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2$.

3.89. Вектор $\vec{x}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ имеет координаты —3, 1. Найти координаты этого вектора в базисе $\vec{e}_1' = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{e}_2' = \vec{e}_2$.

3.90. Вектор $\vec{x}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ имеет координаты —1, 2, 0. Найти координаты этого вектора в базисе $\vec{e}_1' = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$, $\vec{e}_2' = -3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$, $\vec{e}_3' = 4\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3$.

3.91. Вектор $\vec{x}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ имеет координаты 1, —1, 0. Найти координаты этого вектора в базисе $\vec{e}_1' = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 6\vec{e}_3$, $\vec{e}_2' = 5\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + 7\vec{e}_3$, $\vec{e}_3' = -2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3$.

3.92. Вектор $\vec{x}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ имеет координаты 4, 0, —12. Найти координаты этого вектора в базисе $\vec{e}_1' = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{e}_2' = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3$, $\vec{e}_3' = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$.

3.93. Вектор $\vec{x}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ имеет координаты 0, 1, —1, 0. Найти координаты этого вектора в базисе $\vec{e}_1' = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 + 3\vec{e}_4$, $\vec{e}_2' = 2\vec{e}_1 + 8\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 + 8\vec{e}_4$, $\vec{e}_3' = -\vec{e}_1 - 4\vec{e}_3 - \vec{e}_4$, $\vec{e}_4' = -2\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 - 6\vec{e}_4$.

3.94. В базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ заданы векторы $\vec{a}(1, 2, 3)$, $\vec{b}(0, 3, 1)$, $\vec{c}(0, 0, 2)$, $\vec{d}(4, 3, 1)$. Доказать, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

3.95. В базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ даны векторы $\vec{a}(2, -1)$, $\vec{b}(3, 1)$, $\vec{c}(2, 1)$. Доказать, что векторы $\vec{a}, \vec{b}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\vec{c}$ в этом базисе.

3.96. Даны два базиса: $\vec{a}=\vec{e}_1+3\vec{e}_2$, $\vec{b}=-4\vec{e}_1+\vec{e}_2$ и $\vec{c}=5\vec{e}_2$, $\vec{d}=\vec{e}_1+3\vec{e}_2$. Является ли матрица

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

матрицей перехода от базиса $\vec{a}$, $\vec{b}$ к базису $\vec{c}$, $\vec{d}$?

3.97. Даны два базиса: $\vec{a}=2\vec{e}_1+\vec{e}_2$, $\vec{b}=\vec{e}_1-2\vec{e}_2$ и $\vec{c}=5\vec{e}_1+$ $+10\vec{e}_2$, $\vec{d}=-5\vec{e}_1+5\vec{e}_2$. Является ли матрица

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$$

матрицей перехода от базиса $\vec{a}$, $\vec{b}$ к базису $\vec{c}$, $\vec{d}$?

3.98. Даны два базиса: $\vec{a}=3\vec{e}_1+2\vec{e}_2+\vec{e}_3$, $\vec{b}=\vec{e}_1-2\vec{e}_2+\vec{e}_3$, $\vec{c}=2\vec{e}_1+2\vec{e}_2+3\vec{e}_3$ и $\vec{a}_1=\vec{e}_1+\vec{e}_2$, $\vec{b}_1=\vec{e}_1-\vec{e}_3$, $\vec{c}_1=\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3$. Является ли матрица

$$\begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}8 \\ -0{,}15 & 0{,}1 & -0{,}4 \\ -0{,}1 & -0{,}6 & 0{,}3 \end{bmatrix}$$

матрицей перехода от базиса $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ к базису $\vec{a}_1$, $\vec{b}_1$, $\vec{c}_1$?

3.99. Даны два базиса: $\vec{a}=\vec{e}_1+\vec{e}_2-\vec{e}_3$, $\vec{b}=\vec{e}_1+\vec{e}_2$, $\vec{c}=2\vec{e}_1$ и $\vec{a}_1=\vec{e}_1-\vec{e}_2$, $\vec{b}_1=2\vec{e}_1-\vec{e}_2$, $\vec{c}_1=\vec{e}_1+\vec{e}_2-\vec{e}_3$. Является ли матрица

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

матрицей перехода от базиса $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ к базису $\vec{a}_1$, $\vec{b}_1$, $\vec{c}_1$?

3.100. Является ли евклидовым пространством линейное пространство свободных векторов, рассматриваемых в аналитической геометрии в пространстве, если каждой паре векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ этого пространства поставлено в соответствие число $|\vec{x}|\,|\vec{y}|\cos\varphi$, где φ — угол между векторами $\vec{x}$, $\vec{y}$?

3.101. Пусть в вещественном линейном пространстве вещественных матриц размеров $1\times n$ паре векторов $\vec{x}=[x_1\ x_2\ \ldots\ x_n]$, $y=$ $=[y_1\ y_2\ \ldots\ y_n]$ поставлено в соответствие число $x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n$. Является ли данное пространство с введенной таким образом операцией евклидовым?

3.102. Является ли евклидовым пространством множество всех функций вида $a_k\cos kx+b_k\sin kx$, где k — любое натуральное число, a_k, b_k — любые вещественные числа, если каждой паре функций

$a_n \cos nx + b_n \sin nx$, $a_m \cos mx + b_m \sin mx$ поставлено в соответствие число

$$\int_{-\pi}^{\pi} \rho(x)(a_n \cos nx + b_n \sin nx)(a_m \cos mx + b_m \sin mx)\, dx,$$

где $\rho(x)$ — фиксированная положительная непрерывная на отрезке $[-\pi, \pi]$ функция?

3.103. Является ли евклидовым вещественное линейное пространство вещественных функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$ $(a<b)$, если каждой паре функций $f(x)$, $g(x)$ этого пространства поставлено в соответствие число:

$$\text{а)} \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx; \quad \text{б)} \int_a^b \rho(x) f(x)\, g(x)\, dx,$$

где $\rho(x)$ — фиксированная положительная непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция?

3.104. В евклидовом пространстве, рассмотренном в задаче 3.102, положив $\rho(x)=1$, найти:

а) длину вектора $\cos x + \sin x$;

б) скалярное произведение векторов $\sin 2x$, $\sin 3x$;

в) угол между векторами $\sin x$ и $\cos x$.

3.105. В евклидовом пространстве, рассмотренном в задаче 3.103, *а*, найти:

а) длину вектора $f(x)=x$;

б) скалярное произведение векторов $f(x)=x$, $g(x)=e^x$;

в) угол между векторами $f(x)=1$, $g(x)=x$;

г) записать неравенство Коши — Буняковского для функций $f(x)$, $g(x)$ этого пространства;

д) записать неравенство треугольника.

3.106. В евклидовом пространстве, рассмотренном в задаче 3.101, положив $n=4$, найти:

а) длину вектора $[1\ \ -1\ \ 0\ \ 2]$;

б) скалярное произведение векторов $[1\ \ -1\ \ 0\ \ 2]$, $[1\ \ -3\ \ 0\ \ 2]$ и угол между векторами $[1\ \ -1\ \ 0\ \ 2]$, $[1\ \ -3\ \ 0\ \ 2]$.

3.107. В евклидовом пространстве, рассмотренном в задаче 3.101, найти:

а) длину вектора $[1\ 1\ \ldots\ 1]$;

б) скалярное произведение векторов $[1\ 1\ \ldots\ 1]$, $[3\ 3\ \ldots\ 3]$;

в) скалярное произведение векторов $[1\ 1\ \ldots\ 1]$, $[1\ 2\ \ldots\ n]$ и угол между ними;

г) угол между векторами $[1\ 1\ \ldots\ 1]$, $[a\ a\ \ldots\ a]$, если $a \neq 0$;

д) записать неравенство Коши — Буняковского для векторов $[x_1\ x_2\ \ldots\ x_n]$, $[y_1\ y_2\ \ldots\ y_n]$;

е) записать неравенство треугольника для векторов $[x_1\ x_2\ \ldots\ x_n]$, $[y_1\ y_2\ \ldots\ y_n]$.

3.108. В евклидовом пространстве, рассмотренном в задаче 3.103, даны функции

$$P_0(x)=1,\ P_k(x)=\frac{1}{2^k k!}\cdot\frac{d^k}{dx^k}[(x^2-1)^k]\ (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

(полиномы Лежандра). Положив $a=-1$, $b=1$, найти:

а) длины векторов $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$, $P_4(x)$;

б) скалярные произведения $(P_1(x), P_2(x))$, $(P_1(x), P_3(x))$.

3.109. Выяснить, являются ли ортогональными в евклидовом пространстве вещественных матриц размеров 1×3 следующие системы векторов:

а) $[1\ 0\ 0]$, $[0\ 2\ 3]$;

б) $[0\ 1\ 1]$, $[0\ -1\ 3]$;

в) $[1\ 0\ 0]$, $[0\ 2\ 0]$, $[0\ 0\ 3]$;

г) $[1\ 1\ 2]$, $[-1\ -1\ 1]$, $[2\ 2\ -2]$.

3.110. Установить, образует ли каждая из указанных систем векторов ортогональный базис в евклидовом пространстве вещественных матриц размеров 1×4:

а) $[2\ 0\ 0\ 0]$, $[0\ 3\ 0\ 0]$, $[0\ 0\ 0\ 5]$;

б) $[2\ 0\ 0\ 0]$, $[0\ 3\ 0\ 0]$, $[0\ 0\ 0\ 5]$, $[0\ 0\ -1\ 0]$;

в) $[-1\ 2\ 0\ 0]$, $[2\ -1\ 1\ 1]$, $[-2\ -1\ 3\ 0]$, $[0\ 1\ 1\ 1]$;

г) $\left[\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right]$.

3.111. Даны векторы $\vec{x}_1=[1\ 0\ 0]$, $\vec{x}_2=[1\ -3\ 2]$, $\vec{x}_3=[0\ -1\ 0\ 0]$, $\vec{x}_4=\left[\frac{12}{13}\ 0\ \frac{5}{13}\right]$, $\vec{x}_5=[2\ 0\ 0\ 0\ 1]$, $\vec{x}_6=\left[\frac{3}{5}\ \frac{4}{5}\right]$. Какие из них являются нормированными?

3.112. Пронормировать следующие векторы:

а) $[-1\ 1\ 1]$; б) $[0\ 2\ 0\ 3]$;

в) $[3\ 0\ 4]$; г) $[12\ 0\ 0\ 5]$.

3.113. В евклидовом пространстве вещественных функций, непрерывных на отрезке $[-1, 1]$, выяснить, какие из данных систем векторов являются ортогональными:

а) x, x^2; б) x, x^3;

в) 1, $\sin \pi x$, $\cos \pi x$, $\sin 2\pi x$, $\cos 2\pi x$, $\ldots$, $\sin n\pi x$, $\cos n\pi x$;

г) полиномы Лежандра $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$.

3.114. В евклидовом пространстве вещественных функций, непрерывных на отрезке $[-1, 1]$, пронормировать следующие векторы:

а) x; б) x^2; в) $\sin x$; г) полином Лежандра $P_0(x)=1$.

3.115. В евклидовом пространстве вещественных матриц размеров 1×3 по данному базису построить ортонормированный базис:

а) $\vec{g}_1=[1\ 2\ 3]$, $\vec{g}_2=[0\ 2\ 0]$, $\vec{g}_3=[0\ 0\ 3]$;

б) $\vec{g}_1=[1\ 0\ 0]$, $\vec{g}_2=[0\ 1\ -1]$, $\vec{g}_3=[1\ 1\ 1]$.

3.116. В евклидовом пространстве вещественных матриц размеров 1×4 по данному базису построить ортонормированный:

а) $\vec{g}_1=[1\ 1\ 0\ 0]$, $\vec{g}_2=[0\ 0\ 1\ 1]$, $\vec{g}_3=[1\ 0\ 1\ 1]$, $\vec{g}_4=[0\ 1\ 0\ -1]$;

б) $\vec{g}_1=[1\ 0\ 1\ 2]$, $\vec{g}_2=[-1\ 0\ -1\ 0]$, $\vec{g}_3=[0\ 0\ 2\ 1]$, $\vec{g}_4=[0\ 1\ 1\ 1]$.

3.117. В евклидовом пространстве многочленов степени не выше первой, рассматриваемых на отрезке $[-1, 1]$, по данному базису $\vec{g}_1=1$, $\vec{g}_2=x$ построить ортонормированный.

3.118. В евклидовом пространстве многочленов степени не выше второй, рассматриваемых на отрезке $[-1, 1]$, по данному базису $\vec{g}_1 = 1$, $\vec{g}_2 = x$, $\vec{g}_3 = x^2$ построить ортонормированный.

В задачах 3.119—3.121 проверить, что следующие системы векторов попарно ортогональны, и дополнить их до ортогональных базисов.

3.119. $[1\ \ -2\ \ 0\ \ 1]$, $[0\ \ 1\ \ 0\ \ 2]$.

3.120. $[2\ \ 2\ \ 1\ \ 0]$, $[2\ \ -3\ \ 2\ \ 4]$.

3.121. $[3\ \ -1\ \ 1\ \ 1]$, $[-1\ \ -1\ \ 1\ \ 1]$.

3.122. Даны векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, образующие ортогональный базис. Найти $(\vec{x}, \vec{y})$ и $|\vec{x}|$, $|\vec{y}|$, если:

а) $\vec{x} = 2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3$, $\vec{y} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 5\vec{e}_3$; $|\vec{e}_1| = 1$, $|\vec{e}_2| = 2$, $|\vec{e}_3| = 2$;

б) $\vec{x} = \vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - \vec{e}_3$, $\vec{y} = \vec{e}_3 - \vec{e}_1$; $|\vec{e}_1| = 3$, $|\vec{e}_2| = 2$, $|\vec{e}_3| = 1$;

в) $\vec{x} = 4\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{y} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_3$; $|\vec{e}_1| = 5$, $|\vec{e}_2| = 1$, $|\vec{e}_3| = 2$.

3.123. Даны векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, $\vec{e}_4$, $\vec{e}_5$, образующие ортонормированный базис. Найти $(\vec{x}, \vec{y})$ и $|\vec{x}|$, $|\vec{y}|$, если:

а) $\vec{x} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + \vec{e}_5$, $\vec{y} = 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4 + 2\vec{e}_5$;

б) $\vec{x} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3$, $\vec{y} = \vec{e}_5 - 2\vec{e}_3$;

в) $\vec{x} = 5\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + 4\vec{e}_4 + \vec{e}_5$, $\vec{y} = 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3 + \vec{e}_4$.

3.124. Даны векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, $\vec{e}_4$, образующие ортогональный базис. Найти угол между векторами $\vec{x}$ и $\vec{y}$, если:

а) $\vec{x} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4$, $\vec{y} = \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 - \vec{e}_4$; $|\vec{e}_1| = 3$, $|\vec{e}_2| = 2$, $|\vec{e}_3| = 1$, $|\vec{e}_4| = 2$;

б) $\vec{x} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{y} = \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4$; $|\vec{e}_1| = 2$, $|\vec{e}_2| = 3$, $|\vec{e}_3| = 3$, $|\vec{e}_4| = \sqrt{2}$.

в) $\vec{x} = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 + \vec{e}_4$, $\vec{y} = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 + \vec{e}_4$; $|\vec{e}_1| = 1$, $|\vec{e}_2| = 2$, $|\vec{e}_3| = 3$, $|\vec{e}_4| = 1$;

г) $\vec{x} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 - 4\vec{e}_4$, $\vec{y} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_3 + \vec{e}_4$; $|\vec{e}_1| = 2$, $|\vec{e}_2| = 3$, $|\vec{e}_3| = 1$, $|\vec{e}_4| = 1$.

3.125. Даны векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, образующие ортонормированный базис. Найти угол между векторами $\vec{x}$ и $\vec{y}$, если

а) $\vec{x} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$, $\vec{y} = \vec{e}_2 - 4\vec{e}_1$;

б) $\vec{x} = 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3$, $\vec{y} = 4\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$;

в) $\vec{x} = 5\vec{e}_1 + \vec{e}_3$, $\vec{y} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$.

Глава 4

ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§ 4.1. Определение линейного преобразования

Рассмотрим некоторое линейное пространство V. Если задан закон, по которому каждому вектору $\vec{x}$ пространства поставлен в соответствие единственный вектор $\vec{y}$ этого же пространства, то будем говорить, что в данном пространстве задано преобразование (отображение, оператор) f или преобразование пространства V в себя, и писать $f:V\to V$.

Вектор $\vec{y}$ назовем *образом вектора* $\vec{x}$, а $\vec{x}$ — *прообразом вектора* $\vec{y}$. В этом случае будем говорить, что преобразование переводит вектор $\vec{x}$ в вектор $\vec{y}$, и писать $\vec{y}=f(\vec{x})$.

Из определения преобразования следует, что каждый вектор имеет единственный образ, но не каждый вектор имеет прообраз, а если имеет, то этот прообраз, вообще говоря, не единственный.

Преобразование называется *взаимно-однозначным (биективным)*, если каждый вектор имеет прообраз и притом единственный.

Преобразование называется *линейным*, если для любых векторов пространства и произвольного числа λ (вещественного, если пространство вещественное, и комплексного, если комплексное), удовлетворяются следующие условия:

1) $f(\vec{x}_1+\vec{x}_2)=f(\vec{x}_1)+f(\vec{x}_2)$; 2) $f(\lambda\vec{x})=\lambda f(\vec{x})$.

Из определения следует, что для линейного преобразования справедливо следующее соотношение:

$$f(\alpha\vec{x}_1+\beta\vec{x}_2)=\alpha f(\vec{x}_1)+\beta f(\vec{x}_2), \tag{4.1}$$

где α и β — любые числа (вещественные или комплексные).

Справедливо и обратное: если имеет место равенство (4.1), то преобразование f является линейным.

Из определения линейного преобразования также следует, что линейное преобразование переводит нулевой вектор в нулевой. Действительно, $f(\vec{o}) = f(\vec{x} - \vec{x}) = f(\vec{x}) - f(\vec{x}) = \vec{o}$.

Преобразование называется *тождественным,* если оно каждому вектору пространства ставит в соответствие этот же вектор, т. е. $f(\vec{x}) = \vec{x}$.

Очевидно, что тождественное преобразование является линейным.

Пример 1. В линейном пространстве M_1 свободных векторов на плоскости определим преобразование следующим образом: каждому вектору $\vec{x}$ поставим в соответствие вектор $f(\vec{x})$, полученный из векто-

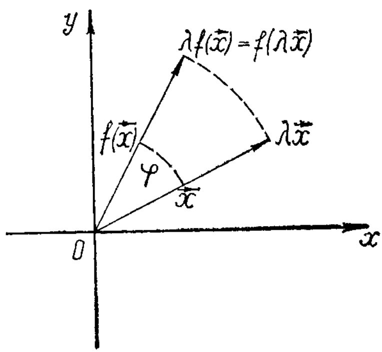


Рис. 4.1

ра $\vec{x}$ поворотом на один и тот же угол φ (преобразование вращения на угол φ). Это преобразование является линейным (рис. 4.1).

Пример 2. В пространстве M_1 вектору $\vec{x}$ поставим в соответствие вектор $f(\vec{x}) = |\vec{x}|\vec{x}$. Заданное таким образом преобразование не является линейным. Действительно,

$$f(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = |\vec{x}_1 + \vec{x}_2| (\vec{x}_1 + \vec{x}_2),$$

$$f(\vec{x}_1) + f(\vec{x}_2) = |\vec{x}_1| x_1 + |\vec{x}_2| \vec{x}_2.$$

Таким образом, вообще говоря,

$$f(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) \neq f(\vec{x}_1) + f(\vec{x}_2).$$

В дальнейшем будем рассматривать только конечномерные пространства.

Пусть линейное преобразование f данного пространства переводит некоторый базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ этого пространства соответственно в векторы $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \ldots, \vec{e}\,'_n$, т. е. $\vec{e}\,'_1 = f(\vec{e}_1)$, $\vec{e}\,'_2 = f(\vec{e}_2), \ldots, \vec{e}\,'_n = f(\vec{e}_n)$.

Образ любого вектора $\vec{x}$ данного пространства при рассматриваемом преобразовании можно выразить через образы базисных векторов. Действительно, так как

$$\vec{x} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{e}_n,$$

то

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= f(\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{e}_n) = \\ &= \alpha_1 f(\vec{e}_1) + \alpha_2 f(\vec{e}_2) + \ldots + \alpha_n f(\vec{e}_n) = \\ &= \alpha_1\vec{e}\,'_1 + \alpha_2\vec{e}\,'_2 + \ldots + \alpha_n\vec{e}\,'_n. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что линейное преобразование пространства вполне определено, если заданы образы базисных векторов этого пространства.

§ 4.2. Матрица линейного преобразования

Пусть f — линейное преобразование некоторого пространства, переводящее базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ в векторы $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \ldots, \vec{e}\,'_n$. Так как $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ — базис, то

$$\left.\begin{aligned} \vec{e}\,'_1 &= a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + \ldots + a_{n1}\vec{e}_n, \\ \vec{e}\,'_2 &= a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + \ldots + a_{n2}\vec{e}_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \vec{e}\,'_n &= a_{1n}\vec{e}_1 + a_{2n}\vec{e}_2 + \ldots + a_{nn}\vec{e}_n. \end{aligned}\right\}$$

Матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

называется *матрицей линейного преобразования в базисе* $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$, ранг r матрицы A — *рангом преобразования* f, а $n-r$ — *дефектом этого преобразования.*

Заметим, что в i-м столбце матрицы A стоят координаты вектора $\vec{e}'_i = f(\vec{e}_i)$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$.

Таким образом, каждому линейному преобразованию соответствует матрица преобразования в данном базисе. Справедливо и обратное: всякой матрице порядка n соответствует линейное преобразование n-мерного пространства.

Пример. В пространстве M_1 рассмотрим преобразование вращения на угол φ (см. пример 1 § 4.1) и найдем матрицу этого преобразования в базисе $\vec{i}, \vec{j}$.

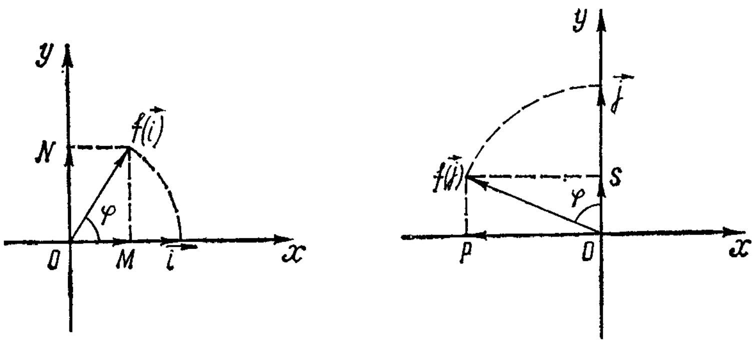


Рис. 4.2

Из рис. 4.2 видно, что

$$f(\vec{i}) = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi,$$
$$f(\vec{j}) = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OS} = -\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi.$$

Следовательно, искомая матрица имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

Матрица тождественного преобразования в любом базисе является единичной матрицей, и наоборот, всякой единичной матрице порядка n соответствует тождественное преобразование n-мерного линейного пространства.

§ 4.3. Связь между координатами вектора и его образа

Пусть вектор $\vec{x}$ имеет координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$, т. е.

$$\vec{x}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+\ldots+x_n\vec{e}_n.$$

Рассмотрим линейное преобразование f с матрицей

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ и найдем координаты $y_1, y_2, \ldots, y_n$ вектора $f(\vec{x})$ в том же базисе. Имеем

$$f(\vec{x})=y_1\vec{e}_1+y_2\vec{e}_2+\ldots+y_n\vec{e}_n. \tag{4.2}$$

С другой стороны,

$$\begin{gathered} f(\vec{x})=f(x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+\ldots+x_n\vec{e}_n)= \\ =x_1f(\vec{e}_1)+x_2f(\vec{e}_2)+\ldots+x_nf(\vec{e}_n)= \\ =x_1(a_{11}\vec{e}_1+a_{21}\vec{e}_2+\ldots+a_{n1}\vec{e}_n)+x_2(a_{12}\vec{e}_1+ \\ +a_{22}\vec{e}_2+\ldots+a_{n2}\vec{e}_n)+\ldots+x_n(a_{1n}\vec{e}_1+ \\ +a_{2n}\vec{e}_2+\ldots+a_{nn}\vec{e}_n)=(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n)\vec{e}_1+ \\ +(a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n)\vec{e}_2+\ldots+(a_{n1}x_1+ \\ +a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n)\vec{e}_n. \end{gathered}$$

Сравнивая это выражение с равенством (4.2), получим

$$\left.\begin{aligned} y_1&=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n, \\ y_2&=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_n&=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n. \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

Формулы (4.3) можно записать в матричном виде:

$$Y=AX, \tag{4.4}$$

где

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\quad Y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},\quad A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Если $\vec{y}=f(\vec{x})$, где f — линейное преобразование, имеющее в некотором базисе матрицу A, то будем писать

$$\vec{y}=A\vec{x}.$$

Если учесть уравнение (4.4), то условия 1 и 2, содержащиеся в определении линейного преобразования, можно записать в виде

$$A(X_1+X_2)=AX_1+AX_2,$$
$$A(\lambda X)=\lambda(AX).$$

Пример. Пусть в двумерном пространстве линейное преобразование f в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ задано матрицей

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Найти $f(\vec{x})$, где $\vec{x}=4\vec{e}_1-3\vec{e}_2$.

Решение. По формуле (4.4) имеем

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 \\ -19 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$f(\vec{x})=6\vec{e}_1-19\vec{e}_2.$$

Если переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$ связаны с переменными $y_1, y_2, \dots, y_n$ соотношениями (4.3), то будем говорить, что задано линейное однородное преобразование переменных с матрицей A, переводящее переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$ в переменные $y_1, y_2, \dots, y_n$. Оно обладает теми же свойствами, что и линейное преобразование векторного пространства.

§ 4.4. Зависимость между матрицами одного и того же преобразования в различных базисах

Теорема. *Если*

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \tag{4.5}$$

и

$$\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \ldots, \vec{e}'_n — \qquad (4.6)$$

два базиса некоторого линейного пространства и A — матрица линейного преобразования f в базисе (4.5), *то матрица B этого преобразования в базисе* (4.6) *имеет вид*

$$B = T^{-1}AT,$$

где T — матрица перехода от базиса (4.5) к базису (4.6).

Доказательство. Пусть вектор $\vec{x}$ имеет координаты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ в базисе (4.5) и $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n$ в базисе (4.6), а вектор $\vec{y} = f(\vec{x})$ имеет координаты $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ в базисе (4.5) и $\beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_n$ в базисе (4.6). Тогда

$$X = TX', \qquad (4.7)$$

$$Y = TY' \qquad (4.8)$$

и

$$Y = AX, \qquad (4.9)$$

$$Y' = BX'. \qquad (4.10)$$

Умножив равенство (4.7) слева на матрицу A, получим $AX = ATX'$ или, учитывая выражения (4.8) и (4.9), $TY' = ATX'$. Отсюда $Y' = T^{-1}ATX'$. Сравнивая последнее равенство с (4.10), имеем $B = T^{-1}AT$. ■

Следствие. *Если линейное преобразование имеет в некотором базисе невырожденную матрицу, то и в любом другом базисе матрица этого преобразования является невырожденной.*

Действительно, пусть A и B — матрицы данного преобразования в двух различных базисах, причем $\det A \neq 0$. Так как $B = T^{-1}AT$, где T — невырожденная матрица, то

$$\det B = \det T^{-1} \det A \det T \neq 0.$$

Пример. В базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ преобразование f имеет матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

Найти матрицу преобразования f в базисе $\vec{e}'_1 = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$, $\vec{e}'_2 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$.

Решение. Матрица перехода

$$T=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$T^{-1}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Искомая матрица

$$B=T^{-1}AT=\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}.$$

§ 4.5. Характеристическое уравнение линейного преобразования

Теорема. *Если линейное преобразование f в некотором базисе*

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n \tag{4.11}$$

имеет матрицу A и в базисе

$$\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \ldots, \vec{e}'_n \tag{4.12}$$

матрицу B, то

$$\det(A-\lambda E)=\det(B-\lambda E),$$

где λ — произвольное число; E — единичная матрица порядка n.

Доказательство. Пусть T — матрица перехода от базиса (4.11) к базису (4.12). Тогда $B=T^{-1}AT$ (см. § 4.4). Следовательно,

$$\det(B-\lambda E)=\det(T^{-1}AT-\lambda E)=\det(T^{-1}AT-\lambda T^{-1}ET)=$$
$$=\det(T^{-1}(A-\lambda E)T)=\det T^{-1}\det(A-\lambda E)\det T=$$
$$=\det(A-\lambda E). \blacksquare$$

Заметим, что $\det(A-\lambda E)$ является многочленом степени n относительно λ. Этот многочлен называется *характеристическим многочленом матрицы A* или *преобразования f*.

Характеристическим уравнением линейного преобразования называется уравнение

$$\det(A-\lambda E)=0, \tag{4.13}$$

где A — матрица этого преобразования в некотором базисе.

Уравнение (4.13) называется также *характеристическим уравнением матрицы* A, а его корни — *характеристическими числами линейного преобразования,* а также *матрицы* A.

Матрица линейного преобразования меняется при переходе от одного базиса к другому, а характеристический многочлен, как следует из доказанной теоремы, не зависит от выбора базиса.

Пусть линейное преобразование f имеет в некотором базисе матрицу

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Характеристическое уравнение этого преобразования имеет вид

$$\det\left[\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}\right] = 0$$

или

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Пример. Найти характеристический многочлен и характеристические числа матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -2 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Решение. Характеристический многочлен данной матрицы имеет вид

$$\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & -3 \\ -2 & -\lambda & -3 \\ 2 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4.$$

Для нахождения характеристических чисел решаем уравнение

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0.$$

Его можно записать в виде

$$(\lambda^3-\lambda^2)-(4\lambda^2-4\lambda)+(4\lambda-4)=0$$

или

$$(\lambda-1)(\lambda^2-4\lambda+4)=0.$$

Корни этого уравнения, т. е. характеристические числа: $\lambda_1=1$, $\lambda_2=\lambda_3=2$.

§ 4.6. Произведение линейных преобразований

Пусть к вектору $\vec{x}$ применено преобразование f, переводящее вектор $\vec{x}$ в вектор $\vec{y}$, т. е.

$$\vec{y}=f(\vec{x}).$$

Применим к вектору $\vec{y}$ преобразование g, переводящее вектор $\vec{y}$ в вектор $\vec{z}$, т. е.

$$\vec{z}=g(\vec{y}).$$

В этом случае говорят, что вектор $\vec{z}$ получен из вектора x последовательным применением преобразований f и g.

Преобразование, заключающееся в последовательном применении преобразований f и g, называется *произведением преобразования f на преобразование g* или *композицией преобразований* и обозначается $g \circ f$. (Преобразование, которое применяется первым, записывается справа.)

Таким образом,

$$g \circ f(\vec{x})=g(f(\vec{x})).$$

Теорема 1. *Произведение линейных преобразований есть линейное преобразование.*

Доказательство. Пусть f и g — линейные преобразования некоторого пространства. Следовательно, для любых $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ этого пространства

$$f(\alpha\vec{x}_1+\beta\vec{x}_2)=\alpha f(\vec{x}_1)+\beta f(\vec{x}_2),$$

$$g(\alpha\vec{x}_1+\beta\vec{x}_2)=\alpha g(\vec{x}_1)+\beta g(\vec{x}_2),$$

где α, β — любые числа. Тогда

$$g\circ f(\alpha\vec{x}_1+\beta\vec{x}_2)=g(\alpha f(\vec{x}_1)+\beta f(\vec{x}_2))=\alpha g(f(\vec{x}_1)+$$
$$+\beta g(f(\vec{x}_2))=\alpha g\circ f(\vec{x}_1)+\beta g\circ f(\vec{x}_2).$$

Таким образом,

$$g\circ f(\alpha\vec{x}_1+\beta\vec{x}_2)=\alpha g\circ f(\vec{x}_1)+\beta g\circ f(\vec{x}_2),$$

откуда следует, что $g\circ f$ — линейное преобразование. ■

Теорема 2. *Если линейные преобразования f и g имеют соответственно матрицы A и B в некотором базисе, то преобразование $g\circ f$ имеет матрицу BA в том же базисе.*

Доказательство. Пусть

$$\vec{y}=f(\vec{x}),\quad \vec{z}=g(\vec{y}).$$

Следовательно,

$$\vec{z}=g\circ f(\vec{x}).$$

Тогда

$$Y=AX,\quad Z=BY, \tag{4.14}$$

$$Z=CX, \tag{4.15}$$

где C — матрица преобразования $g\circ f$ в данном базисе.

Из уравнения (4.14) следует, что

$$Z=BAX. \tag{4.16}$$

Сравнивая уравнения (4.15) и (4.16), имеем $C=BA$. ■

Пример. Даны два линейных преобразования f и g соответственно с матрицами

$$A=\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&3\\0&-1&2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2&-1&4\\3&0&1\\5&2&2\end{bmatrix}$$

в некотором базисе. Найти матрицы C и D соответственно преобразований $g\circ f$ и $f\circ g$ в том же базисе.

Решение. Согласно теореме 2,

$$C=BA=\begin{bmatrix}2&-1&4\\3&0&1\\5&2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&3\\0&-1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-5&1\\3&-1&-4\\5&0&0\end{bmatrix},$$

$$D=AB=\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&3\\0&-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1&4\\3&0&1\\5&2&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8&-5&0\\18&6&7\\7&4&3\end{bmatrix}.$$

§ 4.7. Сумма линейных преобразований

Суммой преобразований f и g некоторого пространства называется преобразование h такое, что для любого вектора $\vec{x}$ этого пространства

$$h(\vec{x})=f(\vec{x})+g(\vec{x}).$$

Сумму преобразований f и g будем обозначать $f+g$. Очевидно, что $f+g=g+f$.

Теорема 1. *Сумма линейных преобразований есть линейное преобразование.*

Доказательство. Пусть f и g — линейные преобразования некоторого пространства. Следовательно, для любых $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ этого пространства

$$f(\alpha\vec{x}_1+\beta\vec{x}_2)=\alpha f(\vec{x}_1)+\beta f(\vec{x}_2),$$

$$g(\alpha\vec{x}_1+\beta\vec{x}_2)=\alpha g(\vec{x}_1)+\beta g(\vec{x}_2),$$

где α, β — любые числа. Тогда

$$(f+g)(\alpha\vec{x}_1+\beta\vec{x}_2)=h(\alpha\vec{x}_1+\beta\vec{x}_2)=$$

$$=f(\alpha\vec{x}_1+\beta\vec{x}_2)+g(\alpha\vec{x}_1+\beta\vec{x}_2)=$$

$$=\alpha f(\vec{x}_1)+\beta f(\vec{x}_2)+\alpha g(\vec{x}_1)+\beta g(\vec{x}_2)=$$

$$=\alpha[f(\vec{x}_1)+g(\vec{x}_1)]+\beta[f(\vec{x}_2)+g(\vec{x}_2)]=\alpha h(\vec{x}_1)+\beta h(\vec{x}_2).$$

Итак,

$$h(\alpha\vec{x}_1+\beta\vec{x}_2)=\alpha h(\vec{x}_1)+\beta h(\vec{x}_2),$$

откуда следует, что $h=f+g$ — линейное преобразование. ■

Теорема 2. *Если линейные преобразования f и g имеют соответственно матрицы A и B в некотором базисе, то преобразование $f+g$ имеет матрицу $A+B$ в том же базисе.*

Доказательство. Пусть

$$\vec{y}=f(\vec{x}),\quad \vec{z}=g(\vec{x}).$$

Следовательно,

$$h(\vec{x})=(f+g)(\vec{x})=\vec{y}+\vec{z}.$$

Тогда

$$Y = AX, \quad Z = BX, \tag{4.17}$$

$$Y + Z = CX, \tag{4.18}$$

где C — матрица преобразования h в данном базисе. Из уравнений (4.17) следует, что

$$Y + Z = (A + B) X. \tag{4.19}$$

Сравнивая равенства (4.18) и (4.19), имеем $C = A + B$. ■

§ 4.8. Невырожденные линейные преобразования

Линейное преобразование называется *невырожденным,* если его матрица невырожденная. В противном случае преобразование называется *вырожденным.*

Теорема 1. *Невырожденное линейное преобразование является взаимно-однозначным. И, обратно, всякое взаимно-однозначное линейное преобразование является невырожденным.*

Доказательство. Пусть f — невырожденное линейное преобразование. Докажем, что для каждого вектора $\vec{y}^* (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*)$ существует единственный вектор $\vec{x}$ такой, что $f(\vec{x}) = \vec{y}^*$ или

$$AX = Y^*, \tag{4.20}$$

где A — матрица данного преобразования, а X, Y^* — столбцы соответственно из координат векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}^*$.

Так как система (4.20) — невырожденная, то она имеет единственное решение: $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$. Следовательно, вектор $\vec{y}^*$ имеет единственный прооораз $\vec{x}^* (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$.

Докажем обратное. Пусть f — взаимно-однозначное линейное преобразование, имеющее в некотором базисе матрицу A. Так как каждый вектор $\vec{y}^* (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*)$ имеет единственный прообраз $\vec{x}$, то система (4.20) имеет единственное решение. Следовательно, $\det A \neq 0$ и преобразование f — невырожденное. ■

Теорема 2. *Для того чтобы линейное преобразование было невырожденным, необходимо и достаточно, чтобы оно переводило ненулевой вектор в ненулевой.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть данное преобразование f — невырожденное. Всякое линейное преобразование переводит нулевой вектор в нулевой, а так как невырожденное преобразование взаимно-однозначно, то оно переводит ненулевой вектор в ненулевой.

Достаточность. Пусть данное линейное преобразование f с матрицей A переводит любой ненулевой вектор в ненулевой. Предположим, что преобразование f вырожденное, т. е. $\det A = 0$. Тогда система $AX = 0$ имеет нетривиальное решение $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$. Следовательно, преобразование f переводит ненулевой вектор $\vec{x}^*(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ в нулевой, что противоречит условию. ■

Теорема 3. *Произведение двух невырожденных линейных преобразований есть невырожденное преобразование.*

Доказательство. Пусть даны линейные невырожденные преобразования f и g соответственно с матрицами A и B в некотором базисе. Произведение $f \circ g$ данных преобразований имеет в том же базисе матрицу AB. Так как произведение невырожденных матриц A и B есть невырожденная матрица, то преобразование $f \circ g$ является невырожденным. ■

§ 4.9. Преобразование, обратное данному линейному преобразованию

Линейное преобразование φ называется *обратным данному линейному преобразованию* f, если для любого вектора $\vec{x}$ имеют место равенства

$$f \circ \varphi(\vec{x}) = \varphi \circ f(\vec{x}) = \vec{x}, \tag{4.21}$$

т. е. $\varphi \circ f$ и $f \circ \varphi$ — тождественные преобразования.

Из определения следует, что если преобразование φ является обратным преобразованию f, то f — преобразование, обратное φ. Преобразования f и φ, удовлетворяющие условию (4.21), называются *взаимно-обратными.*

Если преобразования f и φ имеют в некотором базисе соответственно матрицы A и B, то из равенств (4.21) следует, что $AB = BA = E$, т. е. A и B — взаимно-обратные матрицы.

Из сказанного выше вытекают следующие утверждения.

1. *Для того чтобы линейное преобразование имело обратное преобразование, необходимо и достаточно, чтобы оно было невырожденным.*

2. *Для данного линейного невырожденного преобразования с матрицей A в некотором базисе существует единственное обратное преобразование, причем матрица обратного преобразования равна матрице A^{-1} в том же базисе.*

Пример. Дано преобразование переменных

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 - 3x_2, \\ y_2 &= -x_1 + 5x_2. \end{aligned}\right\}$$

Найти преобразование, обратное данному, если оно существует.

Р е ш е н и е. Матрица

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

данного преобразования невырожденная, так как $\det B = 7 \neq 0$.

Матрица обратного преобразования

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}.$$

Следовательно, преобразование, обратное данному, имеет вид

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{5}{7} y_1 + \frac{3}{7} y_2, \\ x_2 &= \frac{1}{7} y_1 + \frac{2}{7} y_2. \end{aligned}\right\}$$

§ 4.10. Собственные векторы линейного преобразования

Вектор $\vec{x}$ линейного пространства называется *собственным вектором линейного преобразования f этого пространства,* если этот вектор ненулевой и существует число k такое, что

$$f(\vec{x}) = k\vec{x}. \tag{4.22}$$

При этом k — вещественное, если линейное пространство является вещественным, и комплексное, если пространство комплексное.

Число k называется *собственным числом вектора относительно преобразования* f.

Равенство (4.22) можно записать в матричном виде:

$$AX = kX, \qquad (4.23)$$

где A — матрица преобразования f в некотором базисе; X — матрица-столбец из координат вектора $\vec{x}$ в том же базисе.

Ненулевую матрицу-столбец X, удовлетворяющую условию (4.23), назовем *собственным вектор-столбцом матрицы* A *с собственным числом* k.

Пример 1. Пусть линейное преобразование f линейного двумерного пространства в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ имеет матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Вектор $\vec{x} = \vec{e}_1 - 3\vec{e}_2$ является собственным вектором этого преобразования с собственным числом $k = -1$. Действительно, вектор $\vec{x}$ — ненулевой и

$$AX = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = -X,$$

т. е $f(\vec{x}) = -\vec{x}$.

Имеют место следующие свойства.

1. *Собственный вектор линейного преобразования имеет единственное собственное число.*

Доказательство. Пусть k_1 и k_2 — собственные числа собственного вектора $\vec{x}$ относительно преобразования f. Тогда

$$f(\vec{x}) = k_1\vec{x}, \quad f(\vec{x}) = k_2\vec{x},$$

откуда

$$k_1\vec{x} = k_2\vec{x} \text{ или } (k_1 - k_2)\vec{x} = \vec{o}.$$

Так как $\vec{x}$ — ненулевой вектор, то $k_1 = k_2$. ■

2. *Если $\vec{x}$ — собственный вектор линейного преобразования f с собственным числом k и λ — любое отличное от нуля число, то $\lambda\vec{x}$ — также собственный вектор преобразования f с собственным числом k.*

Доказательство. Если $\vec{x}$ — собственный вектор с собственным числом k, то

$$f(\lambda\vec{x}) = \lambda f(\vec{x}) = \lambda(k\vec{x}) = k(\lambda\vec{x}).$$

Таким образом, ненулевой вектор $\lambda\vec{x}$ удовлетворяет условию (4.22) и, следовательно, является собственным вектором преобразования f с собственным числом k. ■

3. *Если $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ — линейно-независимые собственные векторы линейного преобразования f с одним и тем же собственным числом k, то $\vec{x}_1 + \vec{x}_2$ — также собственный вектор этого преобразования с собственным числом k.*

Доказательство. Если $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ — линейно-независимые собственные векторы, то $\vec{x}_1 + \vec{x}_2$ — ненулевой вектор

$$f(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = f(\vec{x}_1) + f(\vec{x}_2) = k\vec{x}_1 + k\vec{x}_2 = k(\vec{x}_1 + \vec{x}_2),$$

т. е.

$$f(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = k(\vec{x}_1 + \vec{x}_2). \ ■$$

Следствие. *Если $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots \vec{x}_r$ — линейно-независимые векторы линейного преобразования f с одним и тем же собственным числом k, то любая нетривиальная линейная комбинация этих векторов является собственным вектором этого преобразования с собственным числом k.*

Это следует из свойств 2 и 3.

4. *Если $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ — собственные векторы линейного преобразования f соответственно с собственными числами k_1 и k_2, причем $k_1 \neq k_2$, то $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ — линейно-независимые векторы.*

Доказательство. Предположим, что векторы $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ — линейно-зависимые. Следовательно, существует нетривиальная линейная комбинация $\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2$ такая, что $\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 = \vec{o}$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\alpha_1 \neq 0$. Тогда

$$\vec{x}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\vec{x}_2 = c\vec{x}_2, \tag{4.24}$$

где $c \neq 0$, так как $\vec{x}_1$ — ненулевой вектор. Согласно свойству 2, вектор $c\vec{x}_2$ является собственным вектором преобразования f с собственным числом k_2. Учитывая свойство 1, из равенств (4.24) заключаем, что $k_1 = k_2$, что противоречит условию теоремы. ■

Легко доказать, что свойство 4 справедливо и для r векторов ($r > 2$), т. е. собственные векторы преобразования с попарно различными собственными числами линейно-независимы. Обратное утверждение, вообще говоря, не является справедливым, так как существуют линейно-независимые собственные векторы с одинаковыми собственными числами.

Теорема 1. *Для того чтобы линейное преобразование комплексного линейного пространства имело собственный вектор с собственным числом k, необходимо и достаточно, чтобы k было корнем характеристического уравнения этого преобразования.*

Доказательство. Для того чтобы линейное преобразование f комплексного линейного пространства имело собственный вектор с собственным числом k, необходимо и достаточно, чтобы для некоторого вектора $\vec{x} \neq \vec{o}$ имело место соотношение $AX = kX$ или

$$(A - kE)X = O, \tag{4.25}$$

где A — матрица преобразования f в некотором базисе; E — единичная матрица; X — матрица-столбец из координат вектора $\vec{x}$ в том же базисе.

Уравнение (4.25) представляет матричную запись однородной системы линейных уравнений, в которой число уравнений равно числу неизвестных. Для того чтобы эта система имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы $\det(A - kE) = 0$, т. е. чтобы k являлось корнем характеристического уравнения. ■

Заметим, что собственными числами линейного преобразования вещественного пространства являются только вещественные корни характеристического уравнения.

Собственные числа линейного преобразования называются также *собственными числами матрицы этого преобразования.*

Собственное число называется *m-кратным,* если оно является m-кратным корнем характеристического уравнения. В частности, собственное число называется *простым,* если оно является простым корнем характеристического уравнения.

Пусть

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} -$$

матрица линейного преобразования f, а k — собственное число этого преобразования. Тогда координаты собственного вектора преобразования f с собственным числом k можно найти из системы (4.25), которая может быть записана в виде

$$\left.\begin{array}{l} (a_{11} - k)\, x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - k)\, x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - k)\, x_n = 0. \end{array}\right\} \qquad (4.26)$$

Пример 2. Найти собственные числа собственных векторов преобразования f, заданного в некотором базисе матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Решение. Характеристическое уравнение преобразования f имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ 1 & 0-\lambda & 3 \\ 1 & 3 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

или $(1-\lambda)\ (\lambda^2-9)=0$. Решая это уравнение, находим характеристические числа $\lambda_1=1$, $\lambda_2=3$, $\lambda_3=-3$, которые являются собственными числами собственных векторов рассматриваемого преобразования.

Теорема 2. *Пусть k — собственное число линейного преобразования f с матрицей A n-мерного пространства. Если r — ранг матрицы $A - \lambda E$, то имеется $n-r$ линейно-независимых собственных векторов преобразования f с собственным числом k.*

Доказательство. Если

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} -$$

матрица линейного преобразования, то координаты собственного вектора с собственным числом k можно найти из системы (4.26). Так как матрица $A-kE$ этой системы по условию теоремы имеет ранг r, то пространство решений системы (4.26) (см. § 3.6) является $(n-r)$-мерным и, следовательно, существует $n-r$ линейно-независимых собственных векторов с собственным числом k. ■

Заметим, что пространство решений системы (4.26) совпадает с множеством, состоящим из нулевого вектора и всех собственных векторов преобразования f с собственным числом k. Это пространство назовем *пространством собственных векторов данного преобразования с собственным числом k*. Размерность $n-r$ этого пространства не превышает кратности собственного числа k.

§ 4.11. Нахождение собственных векторов линейного преобразования

Из теорем § 4.10 вытекает следующий метод нахождения собственных векторов линейного преобразования f, имеющего в некотором базисе матрицу A.

1. Составляем характеристическое уравнение данного преобразования и находим его корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, т. е. характеристические числа.

2. Выделяем только те характеристические числа, которые являются собственными числами данного преобразования.

3. В системе (4.26) полагаем k равным одному из собственных чисел данного линейного преобразования, например, $k=\lambda_i$, и находим ненулевое решение $(\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_n)$ этой системы.

4. Записываем вектор $\vec{x}\,(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, который является собственным вектором данного преобразования с собственным числом λ_i.

Аналогично поступаем с другими собственными числами данного преобразования.

Пример. Найти собственные векторы линейного преобразования, заданного в некотором базисе матрицей

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Решение. 1. Характеристическое уравнение данного преобразования имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & -8 \\ -4 & 7-\lambda & -4 \\ -8 & -4 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Корни этого уравнения следующие: $\lambda_1=\lambda_2=9$, $\lambda_3=-9$.

2. Все корни являются собственными числами.

3. Чтобы найти собственный вектор с собственным числом $k_1=9$, полагаем в системе (4.26) $k=9$. Получим

$$\left.\begin{aligned} -8x_1-4x_2-8x_3&=0, \\ -4x_1-2x_2-4x_3&=0, \\ -8x_1-4x_2-8x_3&=0. \end{aligned}\right\}$$

Решение этой системы можно записать в виде

$$x_1=s_1,\ x_2=-2s_1-2s_2,\ x_3=s_2.$$

4. Вектор $\vec{x}(s_1,\ -2s_1-2s_2,\ s_2)$, где s_1 и s_2 — любые числа, удовлетворяющие условию $s_1^2+s_2^2\neq 0$, является собственным вектором данного преобразования с собственным числом $k_1=9$.

Аналогично находим, что вектор $\vec{y}(2t,\ t,\ 2t)$, где t — любое отличное от нуля число, является собственным вектором данного преобразования с собственным числом $k_2=-9$.

§ 4.12. Приведение матрицы преобразования к диагональному виду

Теорема 1. *Для того чтобы матрица A преобразования f в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ была диагональной, необходимо и достаточно, чтобы каждый базисный вектор был собственным вектором преобразования f.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть матрица A преобразования f в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ диагональная, т. е.

$$A=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Тогда $f(\vec{e}_i)=\lambda_i\vec{e}_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. Таким образом, ненулевой вектор $\vec{e}_i$ удовлетворяет условию (4.22) и, следовательно, является собственным вектором преобразования f с собственным числом λ_i.

Достаточность. Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ — базис пространства, состоящий из собственных векторов преобразования соответственно с собственными числами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, т. е. $f(\vec{e}_i)=\lambda_i\vec{e}_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. Следовательно, в рассматриваемом базисе преобразование f имеет диагональную матрицу

$$A=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0\\ . & . & . & .\\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n\end{bmatrix}. \blacksquare$$

Квадратная матрица A называется *приводимой к диагональному виду,* если существует невырожденная матрица T такая, что матрица $T^{-1}AT$ — диагональная.

Характеристические многочлены матриц A и $T^{-1}AT$ совпадают, и характеристические числа диагональной матрицы равны ее диагональным элементам. Поэтому если матрица A приводима к диагональной матрице B, то

$$B=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0\\ . & . & . & .\\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n\end{bmatrix},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — характеристические числа матрицы A.

Теорема 2. *Для того чтобы матрица A линейного преобразования f n-мерного линейного пространства была приводима к диагональному виду, необходимо и достаточно, чтобы существовал базис этого пространства, состоящий из собственных векторов преобразования f.*

Доказательство. *Необходимость.* Рассмотрим преобразование f, имеющее в некотором базисе

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n \qquad (4.27)$$

матрицу A. Пусть матрица A приводима к диагональному виду, т. е. существует такая невырожденная матрица T, что $B = T^{-1}AT$ — диагональная матрица. Так как T — невырожденная матрица порядка n, то ее можно рассматривать как матрицу перехода от базиса (4.27) к некоторому базису

$$\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \ldots, \vec{e}'_n. \tag{4.28}$$

В базисе (4.28) преобразование f имеет матрицу $B = T^{-1}AT$, которая является диагональной. Следовательно, согласно теореме 1, базис (4.28) состоит из собственных векторов преобразования f.

Достаточность. Пусть A — матрица преобразования f в базисе (4.27) и существует базис

$$\vec{e}''_1, \vec{e}''_2, \ldots, \vec{e}''_n, \tag{4.29}$$

состоящий из собственных векторов преобразования f. Тогда в базисе (4.29) преобразование f имеет диагональную матрицу D. Обозначим через T матрицу перехода от базиса (4.27) к базису (4.29), тогда T — невырожденная матрица и $D = T^{-1}AT$, т. е. матрица A приводима к диагональному виду. ■

Из теоремы 2 следует, что если преобразование f имеет в базисе (4.27) матрицу A, приводимую к диагональному виду, т. е. существует невырожденная матрица T такая, что

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — характеристические числа матрицы A, то T является матрицей перехода от базиса (4.27) к базису (4.28), состоящему из линейно-независимых собственных векторов преобразования f соответственно с собственными числами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Так как столбцами матрицы перехода от базиса (4.27) к базису (4.28) являются координаты векторов $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \ldots, \vec{e}'_n$ в базисе (4.27), то для построения матрицы T достаточно найти собственные векторы матрицы A.

Теорема 3. *Пусть собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ матрицы A порядка n, кратности которых соответственно* *равны* $m_1, m_2, \ldots, m_s$ $(m_1+m_2+\ldots+m_s=n)$, *попарно различны. Если* $m_1=n-r_1, \ldots, m_s=n-r_s$, *где* $r_1, r_2, \ldots, r_s$ *— соответственно ранги матриц* $A-\lambda_1E, \ldots$ $\ldots, A-\lambda_sE$, *то матрица* A *приводится к диагональному виду.*

Доказательство. Рассмотрим линейное преобразование f с матрицей A. Координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$ собственного вектора преобразования f с собственным числом λ_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ находятся из матричного уравнения $(A-\lambda_iE)X=O$, где

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Так как ранг $A-\lambda_iE$ равен r_i, то фундаментальная система решений состоит из $n-r_i=m_i$ вектор-решений. Таким образом, имеется m_i линейно-независимых собственных векторов преобразования f с собственным числом λ_i. Поскольку собственные векторы с различными собственными числами линейно-независимы, то имеется $n=\sum_{i=1}^{s} m_i$ линейно-независимых собственных векторов преобразования f, которые и составляют базис пространства. Следовательно, на основании предыдущей теоремы, матрица A приводится к диагональному виду. ■

Следствие. *Если все собственные числа матрицы попарно различны, то матрица приводится к диагональному виду.*

Пример. Матрица

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

имеет характеристические числа $\lambda_1=9$, $\lambda_2=-9$, кратность каждого из которых соответственно равна $m_1=2$, $m_2=1$. Ранг r_1 матрицы $A-\lambda_1E$ равен 1, и $n-r_1=3-1=2=m_1$. Ранг r_2 матрицы $A-\lambda_2E$ равен 2, и $n-r_2=3-2=1=m_2$. Таким образом, условие теоремы 3 выполнено, и матрица A приводится к диагональному виду, например

$$B=\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}.$$

Найдем матрицу T, удовлетворяющую условию $T^{-1}AT=B$. Собственными векторами матрицы A с собственным числом $\lambda_1=9$ будут $\vec{x}(s_1, -2s_1-2s_2, s_2)$, а с собственным числом $\lambda_2=-9$ — $\vec{y}(2t, t, 2t)$ (см. § 4.11). Положив $s_1=0$, $s_2=1$ и $s_1=1$, $s_2=0$, $t=1$, получим собственные векторы $\vec{x}_1$ $(0, -2, 1)$, $\vec{x}_2$ $(1, -2, 0)$, $\vec{x}_3$ $(2, 1, 2)$, составляющие базис. Следовательно,

$$T=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

§ 4.13. Ортогональные матрицы

Вещественная квадратная матрица

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

называется *ортогональной*, если соответствующая ей система векторов $\vec{x}_1(a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}), \dots, \vec{x}_n(a_{1n}, a_{2n}, \dots \dots, a_{nn})$ ортонормированная. При этом предполагается, что векторы $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ являются элементами евклидова пространства, в котором скалярное произведение определено следующим образом:

$$(\vec{x}_i, \vec{x}_j)=\sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj}.$$

Из определения следует, что если A — ортогональная матрица, то

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj}=\begin{cases} 1 \text{ при } i=j, \\ 0 \text{ при } i\neq j \end{cases} \tag{4.30}$$

для любых фиксированных i и j $(i=1, 2, \dots, n;\ j=1, 2, \dots, n)$.

Пример. Ортогональными являются следующие матрицы:

$$\begin{bmatrix} 0{,}6 & -0{,}8 \\ -0{,}8 & -0{,}6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что единичная матрица любого порядка является ортогональной.

Теорема 1. *Необходимым и достаточным условием ортогональности матрицы A является условие*

$$A^{\text{т}}A=E, \tag{4.31}$$

где $A^{\text{т}}$ — матрица, транспонированная к матрице $A=(a_{ij})$; E — единичная матрица того же порядка, что и A.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть матрица $A=(a_{ij})$ ортогональная, а $A^{\text{т}}=(a'_{ij})$ — транспонированная к ней. Найдем

$$C=A^{\text{т}}A=(c_{ij}).$$

Согласно правилу умножения матриц,

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a'_{ik}a_{kj},$$

но так как $a'_{ik}=a_{ki}$, то

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}a_{kj}.$$

В силу условий (4.30),

$$c_{ij}=\begin{cases}1 \text{ при } i=j,\\ 0 \text{ при } i\neq j.\end{cases}$$

Следовательно,

$$C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\end{bmatrix}=E.$$

Достаточность. Пусть $A^{\text{т}}A=E$. Докажем, что A — ортогональная матрица. Обозначим матрицу $A^{\text{т}}A$ через $C=(c_{ij})$. По условию $C=E$, т. е.

$$C_{ij}=\begin{cases}1 \text{ при } i=j,\\ 0 \text{ при } i\neq j.\end{cases}$$

С другой стороны,

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a'_{ik}a_{kj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}a_{kj}.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj} = \begin{cases} 1 \text{ при } i=j, \\ 0 \text{ при } i \neq j, \end{cases}$$

т. е. условие (4.30) выполняется и матрица A ортогональная. ■

Следствие 1. *Определитель ортогональной матрицы по абсолютной величине равен единице.*

Действительно, из условия (4.31) следует, что

$$\det(A^{\text{т}}A) = \det E,$$

т. е.

$$(\det A)^2 = 1 \text{ или } \det A = \pm 1.$$

Обратное утверждение, вообще говоря, не имеет места, т. е. если $\det A = \pm 1$, то матрица A не обязательно ортогональная.

Следствие 2. *Ортогональная матрица является невырожденной.* Это следует из предыдущего.

Следствие 3. *Произведение двух ортогональных матриц есть ортогональная матрица.*

Доказательство. Пусть A и B — ортогональные матрицы одинакового порядка. Тогда

$$(AB)^{\text{т}}(AB) = (B^{\text{т}}A^{\text{т}})(AB) = B^{\text{т}}(A^{\text{т}}A)B = \\ = B^{\text{т}}EB = B^{\text{т}}B = E.$$

Таким образом, для матрицы AB выполняется условие (4.31) и она является ортогональной. ■

Заметим, что сумма ортогональных матриц не является ортогональной матрицей.

Следствие 4. *Необходимым и достаточным условием ортогональности матрицы A является условие*

$$A^{\text{т}} = A^{-1}.$$

Следствие 5. *Если матрица A ортогональная, то $A^{\text{т}}$ также ортогональная.*

Действительно,

$$(A^{\text{т}})^{\text{т}}A^{\text{т}} = AA^{\text{т}} = AA^{-1} = E.$$

Следствие 6. *Если матрица A ортогональная, то A^{-1} также ортогональная.*

Замечание. Необходимым и достаточным условием ортогональности матрицы A наряду с условием (4.31) является также условие

$$AA^{\text{т}} = E.$$

Теорема 2. *Матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому является ортогональной.*

Доказательство. Пусть

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n \tag{4.32}$$

и

$$\vec{e}_1', \vec{e}_2', \ldots, \vec{e}_n' — \tag{4.33}$$

два ортонормированных базиса евклидова пространства, а

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \ldots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \ldots & t_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{n1} & t_{n2} & \ldots & t_{nn} \end{bmatrix} —$$

матрица перехода от базиса (4.32) к базису (4.33). Тогда

$$\begin{aligned} \vec{e}_1' &= t_{11}\vec{e}_1 + t_{21}\vec{e}_2 + \ldots + t_{n1}\vec{e}_n, \\ \vec{e}_2' &= t_{12}\vec{e}_1 + t_{22}\vec{e}_2 + \ldots + t_{n2}\vec{e}_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \vec{e}_n' &= t_{1n}\vec{e}_1 + t_{2n}\vec{e}_2 + \ldots + t_{nn}\vec{e}_n. \end{aligned}$$

Рассматриваемые базисы ортонормированные, следовательно,

$$(\vec{e}_i', \vec{e}_j') = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Так как

$$(\vec{e}_i', \vec{e}_j') = \sum_{k=1}^{n} t_{ki} t_{kj},$$

то

$$\sum_{k=1}^{n} t_{ki} t_{kj} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j, \end{cases}$$

и, следовательно, матрица T ортогональная. ■

§ 4.14. Ортогональные преобразования

Линейное преобразование евклидова пространства называется *ортогональным*, если в некотором ортонормированном базисе его матрица ортогональна.

Теорема 1. *Для того чтобы линейное преобразование евклидова пространства было ортогональным, необходимо и достаточно, чтобы оно ортонормированный базис переводило в ортонормированный.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть f — ортогональное преобразование евклидова пространства, имеющее в некотором ортонормированном базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ матрицу

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Тогда координаты вектора $\vec{e}_i' = f(\vec{e}_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ расположены в i-м столбце матрицы A. Так как матрица A ортогональная, то

$$(\vec{e}_i', \vec{e}_j') = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Следовательно, векторы $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \ldots, \vec{e}_n'$ образуют ортонормированный базис.

Достаточность. Пусть преобразование f переводит ортонормированный базис (4.32) в базис (4.33). Тогда матрица A преобразования f в базисе (4.32) является матрицей перехода от базиса (4.32) к базису (4.33). Следовательно, матрица A ортогональная и преобразование f является ортогональным. ■

Теорема 2. *Ортогональное преобразование не меняет скалярного произведения векторов.*

Доказательство. Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ — ортонормированный базис евклидова пространства, и

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n,$$

$$\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + \ldots + y_n\vec{e}_n —$$

два произвольных вектора этого пространства. Тогда

$$(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n.$$

Если f — ортогональное преобразование, то

$$f(\vec{x}) = x_1 f(\vec{e}_1) + x_2 f(\vec{e}_2) + \ldots + x_n f(\vec{e}_n),$$
$$f(\vec{y}) = y_1 f(\vec{e}_1) + y_2 f(\vec{e}_2) + \ldots + y_n f(\vec{e}_n),$$

где $f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \ldots, f(\vec{e}_n)$ — ортонормированный базис. Следовательно,

$$(f(\vec{x}), f(\vec{y})) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n,$$

т. е. $(f(\vec{x}), f(\vec{y})) = (\vec{x}, \vec{y})$. ■

Следствие 1. *Ортогональное преобразование f не меняет длины вектора, т. е.* $|\vec{x}| = |f(\vec{x})|$.

Следствие 2. *Ортогональное преобразование не меняет угла между векторами.*

Ортогональные преобразования обладают следующими свойствами.

1. *Ортогональное преобразование — невырожденное.*

2. *Для ортогонального преобразования существует обратное преобразование, которое также является ортогональным.*

3. *Если A — матрица ортогонального преобразования, то A^{T} — матрица преобразования, обратного данному.*

4. *Произведение ортогональных преобразований также является ортогональным.*

Эти свойства следуют из свойств ортогональных матриц.

§ 4.15. Построение ортогонального преобразования

Для того чтобы построить ортогональное преобразование n-мерного евклидова пространства, достаточно найти ортогональную матрицу порядка n, т. е. построить систему из n ортонормированных n-мерных векторов. Это построение можно осуществить следующим образом.

Сначала построим n попарно ортогональных ненулевых n-мерных векторов. В качестве координат первого вектора $\vec{x}_1$ возьмем n произвольных вещественных чисел

$a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}$, среди которых хотя бы одно отлично от нуля.

Координаты $t_1, t_2, \ldots, t_n$ второго вектора $\vec{x}_2$ найдем из условия ортогональности его с вектором $\vec{x}_1$, т. е. из условия

$$a_{11}t_1+a_{21}t_2+\ldots+a_{n1}t_n=0.$$

Мы получим уравнение первой степени с n неизвестными $t_1, t_2, \ldots, t_n$, среди коэффициентов которого имеется отличный от нуля. Множество решений такого уравнения бесконечно. Одно из них (ненулевое)

$$t_1=a_{12}, \ t_2=a_{22}, \ldots, \ t_n=a_{n2}$$

возьмем в качестве координат вектора $\vec{x}_2$.

Покажем, как построить $\vec{x}_{k+1}$, если построены $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k$ $(1<k<n)$. Координаты $z_1, z_2, \ldots, z_n$ вектора $\vec{x}_{k+1}$ находим из условий попарной ортогональности его с векторами $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k$, т. е. из системы

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}z_1+a_{21}z_2+\ \ldots\ +a_{n1}z_n=0, \\ a_{12}z_1+a_{22}z_2+\ \ldots\ +a_{n2}z_n=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1k}z_1+a_{2k}z_2+\ \ldots\ +a_{nk}z_n=0. \end{array}\right\}$$

Это система k линейных однородных уравнений с n неизвестными, в которой число неизвестных больше числа уравнений. Множество решений такой системы бесконечно. Одно из них (ненулевое)

$$z_1=a_{1\,k+1}, \quad z_2=a_{2\,k+1}, \ldots, z_n=a_{n\,k+1}$$

возьмем в качестве координат вектора $\vec{x}_{k+1}$.

Пронормировав векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$, получим ортонормированную систему векторов

$$\vec{x}_1^*, \ \vec{x}_2^*, \ \ldots, \ \vec{x}_n^*.$$

Матрица, в столбцах которой расположены соответственно координаты векторов $\vec{x}_1^*, \vec{x}_2^*, \ldots, \vec{x}_n^*$, и будет искомой.

Из изложенного способа построения ортогональной матрицы следует, что существует бесчисленное множество ортогональных матриц порядка n.

Пример. Построить ортогональное преобразование трехмерного евклидова пространства, отличное от тождественного.

Решение. Построим сначала ортогональную матрицу третьего порядка. Возьмем произвольный ненулевой вектор, например $(-2, 1, 2)$. Координаты t_1, t_2, t_3 вектора $\vec{x}_2$ найдем из уравнения

$$-2t_1+t_2+2t_3=0.$$

Общее решение этого уравнения запишем в виде

$$t_2=2t_1-2t_3,$$

где t_1 и t_3 — любые числа. Положив $t_1=1$, $t_3=1$, получим $t_2=0$. Таким образом, $\vec{x}_2\ (1, 0, 1)$.

Координаты z_1, z_2, z_3 вектора $\vec{x}_3$ найдем из системы

$$\left.\begin{aligned} -2z_1+z_2+2z_3&=0,\\ z_1+\ z_3&=0.\end{aligned}\right\}$$

Общее решение этой системы имеет вид

$$z_1=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}k=k,$$

$$z_2=\begin{vmatrix}2 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix}k=4k,$$

$$z_3=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}k=-k,$$

где k — любое число, отличное от нуля. Положив $k=1$, имеем $\vec{x}_3\,(1,\ 4,\ -1)$. Пронормировав векторы $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, получим

$$\vec{x}_1^{\,*}\left(-\frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right),\quad \vec{x}_2^{\,*}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\vec{x}_3^{\,*}\left(\frac{1}{3\sqrt{2}},\ \frac{4}{3\sqrt{2}},\ -\frac{1}{3\sqrt{2}}\right).$$

Матрица

$$A=\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}}\\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

является ортогональной матрицей третьего порядка, следовательно, преобразование f, имеющее в ортонормированном базисе матрицу A, является ортогональным.

Задачи

В задачах 4.1—4.14 координаты векторов $\vec{x}$ и $f(\vec{x})$ заданы в одном и том же базисе. Выяснить, являются ли указанные преобразования линейными.

4.1. Преобразование f, переводящее всякий вектор $\vec{x}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ в вектор $f(\vec{x})=\vec{y}(2\alpha_1-\alpha_3, \alpha_3, \alpha_1-\alpha_2)$.

4.2. Преобразование f, переводящее всякий вектор $\vec{x}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ в вектор $f(\vec{x})=\vec{y}(\alpha_1\alpha_2, \alpha_2\alpha_3, \alpha_1\alpha_3)$.

4.3. Преобразование f, переводящее всякий вектор $\vec{x}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ в вектор $f(\vec{x})=\vec{y}(\alpha_1+2, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$.

4.4. Преобразование f, переводящее всякий вектор $\vec{x}(\alpha_1, \alpha_2)$ в вектор $f(\vec{x})=\vec{y}(2\alpha_1, 0)$.

4.5. Преобразование f, переводящее всякий вектор $\vec{x}(\alpha_1, \alpha_2)$ в вектор $f(\vec{x})=\vec{y}(\alpha_1^2, \alpha_2^2)$.

4.6. Преобразование f, переводящее всякий вектор $\vec{x}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ в вектор $f(\vec{x})=\vec{y}(\alpha_2-2\alpha_3, \alpha_2+\alpha_1, \alpha_1)$.

4.7. Преобразование f евклидова пространства, переводящее каждый вектор $\vec{x}$ в вектор $f(\vec{x})=(\vec{x}, \vec{a})\vec{a}$, где $\vec{a}$ — фиксированный вектор этого пространства.

4.8. Преобразование f, переводящее каждый вектор $\vec{x}$ в вектор $\vec{x}+\vec{a}$, где $\vec{a}$ — фиксированный вектор.

4.9. Преобразование f евклидова пространства, рассматриваемого в курсе аналитической геометрии в пространстве (см. задачу 3.100), переводящее каждый вектор $\vec{x}$ в вектор, равный векторному произведению вектора $\vec{x}$ на фиксированный вектор $\vec{a}$ этого пространства.

4.10. Преобразование f линейного пространства многочленов степени не выше n, переводящее каждый многочлен этого пространства в его производную.

4.11. Преобразование f вещественного линейного пространства, переводящее каждый вектор $\vec{x}=(\alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_n)$ в вектор $\vec{y}=(\beta_1, \beta_2\ \ldots\ \beta_n)$, если

$$\begin{gathered}\beta_1=a_{11}\alpha_1+a_{12}\alpha_2+\ldots+a_{1n}\alpha_n,\\ \beta_2=a_{21}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+\ldots+a_{2n}\alpha_n,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \beta_n=a_{n1}\alpha_1+a_{n2}\alpha_2+\ldots+a_{nn}\alpha_n,\end{gathered}$$

где a_{ij} ($i=1, 2, \ldots, n$; $j=1, 2, \ldots, n$) — фиксированные вещественные числа.

4.12. Преобразование f евклидова пространства, рассматриваемого в курсе аналитической геометрии на плоскости, переводящее вектор $\vec{r}$ в вектор:

а) симметричный вектору $\vec{r}$ относительно оси Ox;

б) $k\vec{r}$, где k — фиксированное вещественное число, отличное от нуля.

4.13. Преобразование f, переводящее всякий вектор $\vec{x}$ в вектор $f(\vec{x})=\vec{x}$ (тождественное преобразование).

4.14. Преобразование f, переводящее всякий вектор $\vec{x}$ в нулевой (нулевое преобразование).

4.15. Пусть α — фиксированное вещественное число, B — фиксированная вещественная матрица второго порядка. Выяснить, является ли линейным преобразование f вещественного линейного пространства вещественных матриц второго порядка, переводящее каждую матрицу A этого пространства в матрицу:

а) αA; б) AB; в) BA; г) $A+B$.

4.16. Найти матрицу линейного преобразования, переводящего любой вектор $\vec{x}(\alpha_1, \alpha_2)$ в вектор $\vec{y}(2\alpha_1+3\alpha_2, \alpha_2-\alpha_1)$, в том базисе, в котором даны координаты векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$.

4.17. Найти матрицу линейного преобразования, переводящего любой вектор $\vec{x}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ в вектор $\vec{y}(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3, 2\alpha_3, 2\alpha_2+5\alpha_3)$, в том базисе, в котором даны координаты векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$.

4.18. Найти матрицу линейного преобразования f евклидова пространства, переводящего каждый вектор $\vec{x}$ в вектор $f(\vec{x})=(\vec{x}, \vec{a})\vec{a}$, в ортонормированном базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, если:

а) $\vec{a}=3\vec{e}_1+4\vec{e}_2+5\vec{e}_3$;

б) $\vec{a}=\vec{e}_1-\vec{e}_2+\vec{e}_3$;

в) $\vec{a}=2\vec{e}_1-\vec{e}_3$.

4.19. Найти матрицу линейного преобразования f евклидова пространства, переводящего каждый вектор $\vec{x}$ в вектор $f(\vec{x})=(\vec{x}, \vec{a})\vec{a}$, в ортогональном базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, где $|\vec{e}_1|=\sqrt{2}$, $|\vec{e}_2|=3$, $|\vec{e}_3|=1$, если:

а) $\vec{a}=2\vec{e}_1-\vec{e}_2-\vec{e}_3$;

б) $\vec{a}=\vec{e}_2+3\vec{e}_3$;

в) $\vec{a}=\vec{e}_3-2\vec{e}_1$.

4.20. Найти матрицу линейного преобразования f евклидова пространства, рассматриваемого в курсе аналитической геометрии в пространстве, переводящего каждый вектор $\vec{x}$ в вектор $\vec{y}=[\vec{x}, \vec{a}]$ (векторное произведение), в ортонормированном базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, если:

а) $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$;

б) $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$;

в) $\vec{a}=-\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$.

4.21. Найти матрицу линейного преобразования f линейного пространства многочленов не выше третьей степени, переводящего каждый многочлен этого пространства в его производную в базисе:

а) $1, x, x^2, x^3$;

б) $1, (x-1), (x-1)^2, (x-1)^3$;

в) $2, 2x, 4x^2, 8x^3$.

4.22. Найти матрицу линейного преобразования f вещественного линейного пространства, переводящего каждый вектор $\vec{x}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ в вектор $\vec{y}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, если

$$\beta_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ a_{ij} \text{ — произвольные числа})$$

в том базисе, в котором заданы координаты векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$.

4.23. Найти в произвольном базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ матрицу линейного преобразования n-мерного линейного пространства, переводящего каждый вектор $\vec{x}$ в вектор $k\vec{x}$, где k — вещественное число. Записать в указанном базисе матрицы тождественного и нулевого преобразований.

4.24. Найти в ортонормированном базисе $\vec{i}, \vec{j}$ матрицу линейного преобразования евклидова пространства, рассматриваемого в аналитической геометрии на плоскости, переводящего вектор $\vec{r}$ в вектор:

а) $k\vec{r}$, где k — фиксированное вещественное число, отличное от нуля;

б) симметричный вектору $\vec{r}$ относительно оси Ox;

в) симметричный вектору $\vec{r}$ относительно оси Oy.

4.25. Найти в базисе

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

матрицу линейного преобразования линейного пространства вещественных матриц второго порядка, переводящего каждую матрицу A этого пространства в матрицу:

а) $2A$; б) $A\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}A$;

г) $A\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$; д) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}A$.

В задачах 4.26—4.33 даны в некотором базисе матрица A линейного преобразования f и вектор $\vec{x}$. Найти в этом базисе координаты вектора $\vec{y}=f(\vec{x})$.

4.26. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $\vec{x} = \vec{e}_1$.

4.27. $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\vec{x} = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - \vec{e}_3$.

4.28. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\vec{x} = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$.

4.29. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\vec{x} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 + \vec{e}_4$.

4.30. $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\vec{x}(2, -1)$.

4.31. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\vec{x}(3, 2)$.

4.32. $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\vec{x}(-1, 7)$.

4.33. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\vec{x}(1, 2, -1, 0{,}3)$.

В задачах 4.34—4.37 даны в некотором базисе матрица A линейного преобразования f и векторы $\vec{x}$, $\vec{y}$. Найти в том же базисе вектор $f(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y})$.

4.34. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $\vec{x}(2, -1)$, $\vec{y}(3, 2)$, $\alpha = 1$, $\beta = 2$.

4.35. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\vec{x}(-1, 1, -1)$, $\vec{y}(1, -1, 1)$, $\alpha = 2$, $\beta = -3$.

4.36. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\vec{x}(2, 0, -1)$, $\vec{y}(1, 2, 3)$, $\alpha = 3$, $\beta = 1$.

4.37. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\vec{x}(-1, 0, 2, 0)$, $\vec{y}(0, 2, 0, 1)$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$.

В задачах 4.38—4.48 даны два базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ и $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \ldots, \vec{e}\,'_n$ линейного пространства и матрица линейного преобразования в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$. Найти матрицу этого преобразования в базисе $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \ldots, \vec{e}\,'_n$.

4.38. $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $\vec{e}\,'_1 = \vec{e}_2$, $\vec{e}\,'_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$.

4.39. $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$, $\vec{e}\,'_1 = \vec{e}_2 - 2\vec{e}_1$, $\vec{e}\,'_2 = 2\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2$.

4.40. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$, $\vec{e}\,'_1 = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$, $\vec{e}\,'_2 = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$.

4.41. $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\vec{e}\,'_1 = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$, $\vec{e}\,'_2 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$, $\vec{e}\,'_3 = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3$.

4.42. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $\vec{e}\,'_1 = \vec{e}_1$, $\vec{e}\,'_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{e}\,'_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{e}\,'_4 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4$.

4.43. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\vec{e}\,'_1 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3$, $\vec{e}\,'_2 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$, $\vec{e}\,'_3 = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_3$.

4.44. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $\vec{e}_1 = 3\vec{e}\,'_1 - \vec{e}\,'_2$, $\vec{e}_2 = \vec{e}\,'_1 + \vec{e}\,'_2$.

4.45. $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$, $\vec{e}_1 = \vec{e}\,'_1 + \vec{e}\,'_2$, $\vec{e}_2 = 2\vec{e}\,'_1$.

4.46. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, $\vec{e}_1 = \vec{e}\,'_1$, $\vec{e}_2 = 3\vec{e}\,'_1 + \vec{e}\,'_2$, $\vec{e}_3 = 2\vec{e}\,'_1 + \vec{e}\,'_2 + 2\vec{e}\,'_3$.

4.47. $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\vec{e}_1=2\vec{e}\,'_1+\vec{e}\,'_2-\vec{e}\,'_3$, $\vec{e}_2=2\vec{e}\,'_1-\vec{e}\,'_2+$ $+2\vec{e}\,'_3$, $\vec{e}_3=3\vec{e}\,'_1+\vec{e}\,'_3$.

4.48. $A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $\vec{e}_1=\vec{e}\,'_1$, $\vec{e}_2=\vec{e}\,'_1+\vec{e}\,'_2$, $\vec{e}_3=\vec{e}\,'_1+$ $+\vec{e}\,'_2+\vec{e}\,'_3$, $\vec{e}_4=\vec{e}\,'_1+\vec{e}\,'_2+\vec{e}\,'_3+\vec{e}\,'_4$.

4.49. В евклидовом пространстве, рассматриваемом в курсе аналитической геометрии на плоскости, даны векторы $\vec{a}=3\vec{i}+4\vec{j}$, $\vec{b}=$ $=-2\vec{i}+7\vec{j}$, образующие базис. Найти в базисе $\vec{a}$, $\vec{b}$ матрицу:

а) преобразования симметрии относительно оси Ox;

б) преобразования симметрии относительно оси Oy;

в) преобразования, ортогонально проектирующего всякий вектор $\vec{r}$ этого пространства на ось Ox;

г) преобразования, ортогонально проектирующего всякий вектор $\vec{r}$ этого пространства на ось Oy.

4.50. В евклидовом пространстве, рассматриваемом в курсе аналитической геометрии в пространстве, даны векторы $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}$, $\vec{b}=$ $=\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{c}=2\vec{i}+\vec{j}$. Найти в базисе $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ матрицу:

а) преобразования, переводящего всякий вектор $\vec{r}$ этого пространства в вектор $k\vec{r}$, где k — фиксированное вещественное число, отличное от нуля;

б) преобразования, ортогонально проектирующего всякий вектор $\vec{r}$ этого пространства на плоскость xOy;

в) преобразования, ортогонально проектирующего всякий вектор $\vec{r}$ этого пространства на плоскость yOz;

г) преобразования, переводящего всякий вектор $\vec{r}$ этого пространства в вектор, симметричный вектору $\vec{r}$ относительно плоскости xOz.

4.51. В евклидовом пространстве, рассматриваемом в аналитической геометрии на плоскости, задана прямоугольная декартова система координат. Найти характеристическое уравнение и характеристические числа каждого из следующих преобразований:

а) симметрии относительно оси Oy;

б) преобразования, ортогонально проектирующего всякий вектор $\vec{r}$ на ось Ox;

в) преобразования, ортогонально проектирующего всякий вектор $\vec{r}$ на ось Oy.

4.52. В евклидовом пространстве, рассматриваемом в аналитической геометрии в пространстве, задана прямоугольная декартова система координат. Найти характеристическое уравнение и характеристические числа каждого из преобразований, указанных в пунктах а — г задачи 4.50.

4.53. Найти характеристическое уравнение и характеристические числа линейного преобразования f, если:

а) $f(\vec{e}_1) = 2\vec{e}_1$, $f(\vec{e}_2) = 5\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$, $f(\vec{e}_3) = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - 6\vec{e}_3$, где $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ — базис пространства;

б) $f(\vec{e}_1) = -\vec{e}_1$, $f(\vec{e}_2) = 2\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2$, $f(\vec{e}_3) = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 + 5\vec{e}_4$, $f(\vec{e}_4) = \vec{e}_1 + 7\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3 + 6\vec{e}_4$, где $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, $\vec{e}_4$ — базис пространства;

в) $f(\vec{e}_1) = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_3$, $f(\vec{e}_2) = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$, $f(\vec{e}_3) = -2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$, где $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ — базис пространства.

4.54. Даны два линейных преобразования f и g соответственно с матрицами

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

в некотором базисе. Найти матрицу преобразования:

а) $f + g$; б) $2f + 3g$;
в) $f - 2g$; г) $3f - 4g$.

4.55. Пусть преобразование f в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ имеет матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix},$$

а преобразование g в базисе $\vec{e}'_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $\vec{e}'_2 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$ — матрицу

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Найти матрицу преобразования:

а) $f + g$ в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$;

б) $f + g$ в базисе $\vec{e}'_1$, $\vec{e}'_2$;

в) $2f - 3g$ в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_3$;

г) $3f - 2g$ в базисе $\vec{e}'_1$, $\vec{e}'_2$.

4.56. Пусть преобразование f в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ имеет матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

а преобразование g в базисе $\vec{e}'_1=\vec{e}_1+2\vec{e}_2$, $\vec{e}'_2=\vec{e}_1-\vec{e}_3$, $\vec{e}'_3=\vec{e}_2+\vec{e}_3$ — матрицу

$$B=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Найти матрицу преобразования:

а) $f+g$ в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$;

б) $f+g$ в базисе $\vec{e}'_1$, $\vec{e}'_2$, $\vec{e}'_3$;

в) $3f-g$ в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$;

г) $f-2g$ в базисе $\vec{e}'_1$, $\vec{e}'_2$, $\vec{e}'_3$.

4.57. Дано евклидово пространство, рассматриваемое в аналитической геометрии на плоскости. Пусть преобразование f есть симметрия относительно оси Ox, преобразование g — поворот на угол α, преобразование h — симметрия относительно оси Oy, преобразование φ — симметрия относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

1. По данному вектору $\vec{r}$ построить вектор:

а) $\vec{r}_1=f\circ g\,\vec{r}$; б) $\vec{r}_2=g\circ f\,\vec{r}$; в) $\vec{r}_3=f\circ h\,\vec{r}$; г) $\vec{r}_4=h\circ f\,\vec{r}$; д) $\vec{r}_5=(f\circ g)\circ h\,\vec{r}$; е) $\vec{r}_6=\varphi\circ h\,\vec{r}$; ж) $\vec{r}_7=g\circ(\varphi\circ h)\,\vec{r}$;

2. В базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$ найти матрицы преобразований: а) $f\circ g$; б) $g\circ f$; в) $f\circ h$; г) $h\circ f$; д) $(f\circ g)\circ h$; е) $\varphi\circ h$; ж) $g\circ(\varphi\circ h)$.

4.58. Дано евклидово пространство, рассматриваемое в аналитической геометрии в пространстве. Пусть преобразование f есть симметрия относительно плоскости xOy, g — преобразование подобия, h — преобразование, ортогонально проектирующее всякий вектор на плоскость yOz. В базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ найти матрицу преобразования: а) $f\circ g$; б) $g\circ f$; в) $f\circ h$; г) $h\circ f$; д) $g\circ h$; е) $f\circ(g\circ f)$; ж) $(h\circ f)\circ g$.

4.59. Даны два линейных преобразования f и g соответственно с матрицами

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

в некотором базисе. Найти матрицу преобразования: а) $f\circ g$; б) $f\circ f$.

4.60. Пусть преобразование f в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ имеет матрицу

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

а преобразование g в базисе $\vec{e}'_1 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{e}'_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$ — матрицу

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Найти матрицу преобразования:

а) $f \circ g$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$; б) $g \circ f$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$;
в) $f \circ g$ в базисе $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2$; г) $g \circ f$ в базисе $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2$.

4.61. Пусть преобразование f в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ имеет матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

а преобразование g в базисе $\vec{e}'_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3$, $\vec{e}'_2 = -\vec{e}_3$, $\vec{e}'_3 = \vec{e}_2 - \vec{e}_1$ — матрицу

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Найти матрицу преобразования:

а) $f \circ g$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$; б) $g \circ f$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$;
в) $f \circ g$ в базисе $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$; г) $g \circ f$ в базисе $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$.

4.62. В евклидовом пространстве, рассматриваемом в аналитической геометрии на плоскости, задана прямоугольная декартова система координат. Найти собственные векторы и собственные числа λ каждого из следующих преобразований:

а) симметрии относительно оси Ox;
б) симметрии относительно оси Oy;
в) преобразования подобия с коэффициентом подобия k;
г) преобразования, ортогонально проектирующего любой вектор на ось Ox;
д) преобразования, ортогонально проектирующего любой вектор на ось Oy;
е) преобразования вращения на угол φ.

4.63. В евклидовом пространстве, рассматриваемом в аналитической геометрии в пространстве, задана прямоугольная декартова система координат. Найти собственные векторы и собственные числа λ каждого из следующих преобразований:

а) симметрии относительно плоскости xOy;
б) симметрии относительно плоскости yOz;
в) преобразования, ортогонально проектирующего любой вектор на плоскость xOy;
г) преобразования, ортогонально проектирующего любой вектор на ось Ox.

В задачах 4.64—4.67 в некотором базисе даны матрица A преобразования f и векторы $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$. Определить, какие из указанных векторов являются собственными векторами преобразования f.

4.64. $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $\vec{x}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{x}_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\vec{x}_3=\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

4.65. $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$, $\vec{x}_1=\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\vec{x}_2=\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$, $\vec{x}_3=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

4.66. $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $\vec{x}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\vec{x}_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\vec{x}_3=\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

4.67. $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\vec{x}_1=\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{x}_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\vec{x}_3=\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

4.68. Пусть $\vec{x}$ — собственный вектор линейных преобразований f и φ соответственно с собственными числами λ_1 и λ_2. а) Доказать, что $\vec{x}$ является собственным вектором преобразования $f\circ\varphi$. Указать собственное число собственного вектора $\vec{x}$ преобразования $f\circ\varphi$; б) доказать, что $\vec{x}$ является собственным вектором преобразования $f+\varphi$. Указать собственное число собственного вектора $\vec{x}$ преобразования $f+\varphi$.

4.69. Пусть $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ — собственные векторы линейного преобразования f соответственно с собственными числами λ_1 и λ_2. Является ли вектор $\vec{x}_1+\vec{x}_2$ собственным вектором преобразования f?

В задачах 4. 70—4.79 найти собственные векторы линейного преобразования, заданного в некотором базисе матрицей A.

4.70. $A=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$. **4.71.** $A=\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

4.72. $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$. **4.73.** $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

4.74. $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. **4.75.** $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

4.76. $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. **4.77.** $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & -8 \\ 2 & -4 & 7 & -4 \\ -1 & -8 & -4 & 1 \end{bmatrix}$.

4.78. $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. **4.79.** $A=\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

В задачах 4.80—4.95 выяснить, приводится ли к диагональному виду каждая из указанных матриц в вещественном пространстве. В случае приводимости записать диагональный вид матрицы.

4.80. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. **4.81.** $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

4.82. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. **4.83.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

4.84. $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$. **4.85.** $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

4.86. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. **4.87.** $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$.

4.88. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. **4.89.** $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ -4 & -4 & -5 \end{bmatrix}$.

4.90. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. **4.91.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

4.92. $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \end{bmatrix}$. **4.93.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

4.94. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. **4.95.** $\begin{bmatrix} 5 & 6 & 9 \\ 6 & 5 & 9 \\ -6 & -6 & -10 \end{bmatrix}$.

В задачах 4.96—4.107 в некотором базисе линейное преобразование задано матрицей A. В вещественном линейном пространстве найти базис, в котором это преобразование имеет диагональный вид.

4.96. $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{bmatrix}$.

4.97. $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$.

4.98. $A=\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 0\end{bmatrix}$.

4.99. $A=\begin{bmatrix}5 & -6 & 2\\ 6 & -7 & 2\\ 6 & -6 & 1\end{bmatrix}$.

4.100. $A=\begin{bmatrix}-10 & 54 & 36\\ 0 & -1 & 0\\ -3 & 18 & 11\end{bmatrix}$.

4.101. $A=\begin{bmatrix}0 & -2 & -3\\ -2 & 0 & -3\\ 2 & 2 & 5\end{bmatrix}$.

4.102. $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$.

4.103. $A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 5 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 0 & 3\end{bmatrix}$.

4.104. $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 2 & -2\\ 0 & -2 & 3\end{bmatrix}$.

4.105. $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$.

4.106. $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & -4\\ 0 & 1 & 2 & -4\\ 0 & 0 & 3 & -4\\ 0 & 0 & 2 & -3\end{bmatrix}$.

4.107. $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 6 & 7 & 6 & 3\\ -9 & -9 & -8 & -3\\ 0 & 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$.

Глава 5

КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

§ 5.1. Основные определения

Пусть даны n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, принимающих числовые значения. Рассмотрим всевозможные парные произведения $x_i x_j$ ($i=1, 2, \ldots, n$; $j=1, 2, \ldots, n$) и составим сумму

$$\begin{aligned} & a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1n}x_1x_n + \\ & + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{2n}x_2x_n + \\ & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ & + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 = \\ & = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j, \end{aligned}$$

где a_{ij} — некоторые числа, среди которых хотя бы одно отлично от нуля. Эта сумма называется *квадратичной формой n переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и обозначается $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Таким образом,

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j. \tag{5.1}$$

Числа a_{ij} называются *коэффициентами квадратичной формы*. В дальнейшем будем рассматривать квадратичные формы с вещественными коэффициентами. Такие формы называются *вещественными*. Кроме того, будем считать, что областью изменения каждой из переменных x_i ($i=1, 2, \ldots, n$) является множество всех вещественных чисел.

Квадратичную форму можно записать в таком виде, чтобы коэффициенты при $x_i x_j$ и $x_j x_i$ $(i \neq j)$ были равны между собой. Действительно, так как $x_j x_i = x_i x_j$, то

$$a_{ij} x_i x_j + a_{ji} x_j x_i = (a_{ij} + a_{ji}) x_i x_j = \frac{1}{2} (a_{ij} + a_{ji}) x_i x_j + \\ + \frac{1}{2} (a_{ij} + a_{ji}) x_j x_i.$$

В дальнейшем будем считать, что в квадратичной форме (5.1)

$$a_{ij} = a_{ji}. \tag{5.2}$$

Из коэффициентов квадратичной формы составим матрицу

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

В силу равенства (5.2), в матрице A равны между собой элементы, расположенные симметрично относительно главной диагонали.

Матрица, у которой равны элементы, расположенные симметрично относительно главной диагонали, называется *симметрической.*

Для того чтобы матрица была симметрической, необходимо и достаточно, чтобы $A^{\text{т}} = A$, где $A^{\text{т}}$ — матрица, транспонированная к матрице A.

Из вышесказанного следует, что всякой квадратичной форме соответствует единственная симметрическая матрица. Всякой симметрической матрице соответствует единственная квадратичная форма с точностью до обозначения переменных.

Симметрическую матрицу

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

составленную из коэффициентов квадратичной формы, будем называть *матрицей этой квадратичной формы.*

Заметим, что вещественной квадратичной форме соответствует матрица с вещественными элементами.

Рангом квадратичной формы называется ранг ее матрицы.

Квадратичная форма называется *невырожденной,* если ее матрица невырожденная.

Очевидно, что ранг невырожденной квадратичной формы равен числу переменных этой формы.

Так как квадратичные формы являются функцией n независимых переменных с одной и той же областью определения, то две квадратичные формы $L_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $L_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ равны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые матрицы.

Пример 1. Квадратичная форма

$$L(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 - 2x_1x_2 + x_1x_3 + x_2^2 - 3x_3^2$$

имеет матрицу

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -3 \end{bmatrix},$$

и ранг ее равен 3.

Пример 2. Матрице

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

соответствует квадратичная форма

$$L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 2x_2x_3$$

переменных x_1, x_2 и x_3.

§ 5.2. Матричная запись квадратичной формы

Пусть дана квадратичная форма

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j.$$

Матрица A этой квадратичной формы согласована со столбцевой матрицей

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Произведение AX является столбцевой матрицей размеров $n \times 1$. Матрица $X^{\text{т}} = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)$ согласована с матрицей AX. Произведение $X^{\text{т}}AX$ представляет матрицу первого порядка, единственный элемент которой равен

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

т. е. данной квадратичной форме.

Таким образом,

$$X^{\text{т}}AX = (L(x_1, x_2, \dots, x_n)).$$

Матрицу первого порядка (a_{11}) часто отождествляют с ее элементом a_{11}. Учитывая это, можно записать

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^{\text{т}}AX.$$

Выражение $X^{\text{т}}AX$ представляет матричную запись квадратичной формы. Заметим, что выражение $X^{\text{т}}AX$ является матричной записью квадратичной формы и в том случае, когда A — несимметрическая матрица. Однако в этом случае A не является матрицей квадратичной формы.

Пример 1. Дана квадратичная форма

$$L(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 3x_2^2 + x_3^2 + 8x_1x_2 + 2x_1x_3.$$

Записать ее в матричном виде.

Решение. Матрица данной квадратичной формы

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно

$$L(x_1, x_2, x_3) = [x_1 x_2 x_3] \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Пример 2. Дана квадратичная форма

$$L(x_1, x_2) = [x_1\, x_2]\begin{bmatrix} 2 & 2{,}5 \\ 2{,}5 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Записать ее в виде (5.1).

Решение. Произведение

$$[x_1\, x_2]\begin{bmatrix} 2 & 2{,}5 \\ 2{,}5 & -3 \end{bmatrix} = [2x_1 + 2{,}5x_2 \;\; 2{,}5x_1 - 3x_2].$$

Следовательно,

$$L(x_1, x_2) = [2x_1 + 2{,}5x_2 \;\; 2{,}5x_1 - 3x_2]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 2x_1^2 - 3x_2^2 + 5x_1x_2.$$

§ 5.3. Изменение квадратичной формы при линейном однородном преобразовании переменных

Пусть переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ получены из переменных $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейным однородным преобразованием P_B с матрицей B, т. е.

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \ldots + b_{1n}y_n, \\ x_2 = b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \ldots + b_{2n}y_n. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \ldots + b_{nn}y_n \end{array}\right\} \qquad (5.3)$$

или в матричном виде $X = BY$.

Рассмотрим квадратичную форму

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \qquad (5.4)$$

или

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X^{\mathrm{T}}AX.$$

Если в квадратичную форму (5.4) вместо переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ подставить их выражения через $y_1, y_2, \ldots, y_n$ из соотношений (5.3), то получим квадратичную форму $L_1(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ с некоторой матрицей C. Будем говорить, что квадратичная форма $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ преобразованием (5.3) переводится в $L_1(y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Если $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ переводится в $L_1(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ невырожденным линейным однородным преобразованием P_B, то существует невырожденное линейное однородное преобразование $P_{B^{-1}}$, которое переводит $L_1(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ в $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Две квадратичные формы называются *конгруэнтными,* если существует невырожденное линейное однородное преобразование, переводящее одну из них в другую.

Если $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $L_1(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ конгруэнтны, то будем писать $L(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim L_1(y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Имеют место следующие свойства.

1. $L(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Действительно, невырожденным однородным линейным преобразованием, переводящим квадратичную форму в самое себя, является тождественное преобразование.

2. *Если*

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim L_1(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

и

$$L_1(y_1, y_2, \ldots, y_n) \sim L_2(z_1, z_2, \ldots, z_n),$$

то

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim L_2(z_1, z_2, \ldots, z_n).$$

Справедливость этого свойства следует из того, что произведение невырожденных линейных однородных преобразований есть также невырожденное линейное однородное преобразование.

Теорема 1. *Матрица квадратичной формы $L_1(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, полученной из квадратичной формы $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ линейным однородным преобразованием $X=BY$, равна $B^{\mathrm{T}}AB$, где A — матрица квадратичной формы L.*

Доказательство. Подставив $X=BY$ в данную квадратичную форму

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X^{\mathrm{T}}AX,$$

получим

$$L_1(y_1, y_2, \ldots, y_n) = (BY)^{\mathrm{T}}A(BY) = (Y^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}})A(BY)$$

или

$$L_1(y_1, y_2, \ldots, y_n) = Y^{\mathrm{T}}CY,$$

где $C = B^{\mathrm{T}}AB$.

Так как

$$C^{\mathrm{T}} = (B^{\mathrm{T}}AB)^{\mathrm{T}} = (B^{\mathrm{T}}(AB))^{\mathrm{T}} =$$
$$(AB)^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}B = B^{\mathrm{T}}AB = C,$$

то C — симметрическая матрица. Таким образом, матрица $C = B^{\mathrm{T}}AB$ является матрицей квадратичной формы $L_1(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. ■

Следствие. *Определители матриц конгруэнтных невырожденных квадратичных форм имеют одинаковые знаки.*

Так как матрицы A и C двух конгруэнтных квадратичных форм связаны соотношением $C = B^{\text{т}}AB$, где B — невырожденная матрица, то

$$\det C = \det(B^{\text{т}}AB) = \det B^{\text{т}} \det A \det B = (\det B)^2 \det A.$$

Следовательно, $\det C$ и $\det A$ имеют одинаковые знаки.

Теорема 2. *Конгруэнтные квадратичные формы имеют одинаковые ранги.*

Справедливость этой теоремы следует из теоремы 1 и из того, что ранг матрицы не меняется при умножении ее слева или справа на невырожденную матрицу.

Пример 1. Дана квадратичная форма

$$L(x_1,\ x_2) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 - 3x_2^2.$$

Найти квадратичную форму, полученную из данной преобразованием

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 2y_1 - 3y_2, \\ x_2 &= y_1 + y_2. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Матрица данной квадратичной формы

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix},$$

а матрица преобразования

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, матрица искомой квадратичной формы

$$C = B^{\text{т}}AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -17 \\ -17 & 3 \end{bmatrix},$$

а квадратичная форма имеет вид

$$L_1(y_1,\ y_2) = 13y_1^2 - 34y_1y_2 + 3y_2^2.$$

Пример 2. Дана квадратичная форма

$$L(x_1,\ x_2) = 17x_1^2 + 12x_1x_2 + 8x_2^2.$$

Найти квадратичную форму, полученную из данной преобразованием

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= y_1 - \frac{6}{17}y_2, \\ x_2 &= y_2. \end{aligned}\right\}$$

Р е ш е н и е. Матрица данной квадратичной формы

$$A=\begin{bmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix},$$

а матрица преобразования

$$B=\begin{bmatrix} 1 & -\frac{6}{17} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, матрица искомой квадратичной формы

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{6}{17} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{6}{17} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 17 & 0 \\ 0 & \frac{100}{17} \end{bmatrix},$$

а квадратичная форма имеет вид

$$L_1(y_1,\ y_2)=17y_1^2+\frac{100}{17}y_2^2.$$

§ 5.4. Приведение квадратичной формы к каноническому виду

Квадратичная форма

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

называется *канонической* (иначе говоря, *имеет канонический вид*), если все $a_{ij}=0$ при $i\neq j$.

Следовательно, каноническая квадратичная форма имеет вид

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\ \ldots\ +a_{nn}x_n^2=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2,$$

а ее матрица является диагональной.

Заметим, что любая квадратичная форма одной переменной

$$L(x_1)=a_{11}x_1^2$$

является канонической.

Квадратичная форма

$$L(x_1,\ x_2)=2x_1^2+3x_1x_2-x_2^2$$

не является канонической, а форма

$$L(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 2x_2^2$$

является.

Каноническая форма называется *нормальной,* если каждый ее коэффициент, отличный от нуля, по абсолютной величине равен единице.

Например, каноническая форма

$$L(x_1, x_2, x_3, x_4) = -x_1^2 + x_2^2 - x_4^2$$

является нормальной. Здесь $a_{11} = -1$, $a_{22} = 1$, $a_{33} = 0$, $a_{44} = -1$.

Нахождение по данной квадратичной форме конгруэнтной ей канонической квадратичной формы называется *приведением квадратичной формы к каноническому виду.*

Теорема 1. *Для любой квадратичной формы существует конгруэнтная ей каноническая квадратичная форма.*

Доказательство. Для квадратичной формы одной переменной $L(x_1) = a_{11}x_1^2$ теорема справедлива в силу свойства 1 (§ 5.3).

Для доказательства теоремы применим метод полной математической индукции. Предположим, что теорема справедлива для всех квадратичных форм m переменных, где $m \leqslant n-1$. Докажем, что она справедлива для квадратичной формы n переменных.

Для квадратичной формы

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \tag{5.5}$$

возможны два случая.

1. Хотя бы один из коэффициентов a_{ii} (при квадратах переменных) отличен от нуля. Не нарушая общности, можно считать, что $a_{11} \neq 0$. Этого всегда можно добиться соответствующей перенумерацией переменных.

В данной квадратичной форме выделим члены, содержащие x_1, и запишем ее в виде

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \ldots$$
$$\ldots + 2a_{1n}x_1x_n) + L_1(x_2, x_3, \ldots, x_n),$$

где $L_1(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ — квадратичная форма, вообще говоря, $(n-1)$-й переменной. (В частном случае

$L_1(x_2, \ldots, x_n)$ может быть квадратичной формой переменных, число которых меньше $n-1$.)

Выражение, стоящее в скобке, преобразуем следующим образом:

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n =$$

$$= a_{11}\left(x_1^2 + 2\frac{1}{a_{11}}x_1(a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n) + \right.$$

$$+ \frac{1}{a_{11}^2}(a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n)^2 - \frac{1}{a_{11}^2}(a_{12}x_2 +$$

$$\left. + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n)^2\right) = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots$$

$$\ldots + a_{1n}x_n)^2 + L_2(x_2, x_3, \ldots, x_n).$$

Следовательно,

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)^2 +$$

$$+ L_3(x_2, x_3, \ldots, x_n),$$

где $L_3(x_2, x_3, \ldots, x_n) = L_1(x_2, x_3, \ldots, x_n) + L_2(x_2, x_3, \ldots, x_n)$.

Заметим, что $(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n) = \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial x_1}$.

По индуктивному предположению, для формы $L_3(x_2, \ldots, x_n)$ существует конгруэнтная каноническая форма. Следовательно, существует невырожденное линейное однородное преобразование P_B

$$\left.\begin{aligned} y_2 &= b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + \ldots + b_{2n}x_n, \\ y_3 &= b_{32}x_2 + b_{33}x_3 + \ldots + b_{3n}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= b_{n2}x_2 + b_{n3}x_3 + \ldots + b_{nn}x_n, \end{aligned}\right\}$$

переводящее $L_3(x_2, \ldots, x_n)$ в каноническую форму. Тогда преобразование

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ y_2 &= b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= b_{n2}x_2 + \ldots + b_{nn}x_n \end{aligned}\right\} \qquad (5.6)$$

переводит данную квадратичную форму в каноническую:

$$L_4(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i^2. \tag{5.7}$$

Преобразование (5.6) является невырожденным, так как его матрица

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

невырожденная. Следовательно,

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim L_4(y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

2. Все коэффициенты $a_{ii}=0$. Этот случай сводится к предыдущему.

Пусть некоторый коэффициент $a_{ij} \neq 0 \quad (i \neq j)$. Существует невырожденное преобразование, например, преобразование

$$\left.\begin{array}{c} x_1 = y_1, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_{i-1} = y_{i-1}, \\ x_i = y_i + y_j, \\ x_{i+1} = y_{i+1}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n = y_n, \end{array}\right\}$$

переводящее квадратичную форму (5.5) в квадратичную форму, у которой коэффициент при y_j^2 отличен от нуля. ■

Легко показать, что в квадратичной форме (5.7) число коэффициентов α_i, отличных от нуля, равно рангу r квадратичной формы. Поэтому любую квадратичную форму можно привести к каноническому виду

$$\sum_{i=1}^{r} \beta_i z_i^2,$$

где $\beta_i \neq 0 \quad (i=1, 2, \ldots, r)$; r — ранг квадратичной формы.

Заметим, что если квадратичная форма $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является невырожденной, то конгруэнтная ей каноническая форма имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i^2,$$

где все $\alpha_i \neq 0$.

Теорема 2. *Для любой вещественной квадратичной формы существует конгруэнтная ей нормальная форма.*

Доказательство. Пусть квадратичная форма $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ приведена к каноническому виду

$$L_1(y_1, y_2, \ldots, y_n) = b_{11}y_1^2 + \ldots + b_{rr}y_r^2,$$

где $r \leqslant n$ и $b_{ii} \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$.

Применив невырожденное преобразование

$$\left.\begin{array}{r}
z_1 = \sqrt{|b_{11}|}\, y_1, \\
\cdots\cdots\cdots \\
z_r = \sqrt{|b_{rr}|}\, y_r, \\
z_{r+1} = y_{r+1} \\
\cdots\cdots\cdots \\
z_n = y_n,
\end{array}\right\}$$

получим нормальную каноническую форму $L_2(z_1, z_2, \ldots, z_n)$. Следовательно,

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim L_2(z_1, z_2, \ldots, z_n). \blacksquare$$

При доказательстве теоремы 1 получен практический способ приведения квадратичной формы к каноническому виду, называемый *способом Лагранжа.* Невырожденное преобразование, приводящее квадратичную форму к каноническому виду, при этом может быть получено как произведение преобразований, применяемых в методе Лагранжа.

Итак, для любой вещественной квадратичной формы существует не единственная конгруэнтная каноническая форма.

Пример 1. Привести к каноническому виду квадратичную форму

$$L(x_1\, x_2\, x_3) = x_1^2 - 3x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2.$$

Решение. Так как среди коэффициентов a_{ii} есть отличные от нуля, то приведение к каноническому виду можно осуществить следующим образом. Данную квадратичную форму представим в виде

$$L(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1^2 - x_1(3x_2 - 4x_3) + \frac{1}{4}(3x_2 - 4x_3)^2\right) - $$
$$- \frac{1}{4}(3x_2 - 4x_3)^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 = \left(x_1 - \frac{3}{2}x_2 + 2x_3\right)^2 - $$
$$- \frac{9}{4}x_2^2 + 8x_2x_3 - 3x_3^2 = \left(x_1 - \frac{3}{2}x_2 + 2x_3\right)^2 - $$
$$- \frac{9}{4}\left(x_2^2 - \frac{32}{9}x_2x_3 + \frac{256}{81}x_3^2\right) + \frac{64}{9}x_3^2 - 3x_3^2 =$$
$$= \left(x_1 - \frac{3}{2}x_2 + 2x_3\right)^2 - \frac{9}{4}\left(x_2 - \frac{16}{9}x_3\right)^2 + \frac{37}{9}x_3^2.$$

Невырожденное преобразование

$$y_1 = x_1 - \frac{3}{2}x_2 + 2x_3, \quad y_2 = x_2 - \frac{16}{9}x_3, \quad y_3 = x_3$$

приводит данную квадратичную форму к каноническому виду

$$L_1(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - \frac{9}{4}y_2^2 + \frac{37}{9}y_3^2.$$

Пример 2. Привести к каноническому виду квадратичную форму

$$L(x_1, x_2, x_3) = 4x_1x_2 - 5x_2x_3.$$

Решение. Так как все коэффициенты $a_{ii} = 0$, то сначала применим преобразование

$$x_1 = \frac{1}{2}(y_1 - y_2), \quad x_2 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \quad x_3 = y_3.$$

В результате получим

$$L_1(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - \frac{5}{2}y_1y_3 - y_2^2 - \frac{5}{2}y_2y_3.$$

Так как в этой квадратичной форме коэффициент при y_1^2 отличен от нуля, то

$$L_1(y_1, y_2, y_3) = \left(y_1 - \frac{5}{4}y_3\right)^2 - \left(y_2 + \frac{5}{4}y_3\right)^2.$$

Применив преобразование

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= y_1 - \frac{5}{4}y_3, \\ z_2 &= y_2 + \frac{5}{4}y_3, \\ z_3 &= y_3, \end{aligned}\right\}$$

получим

$$L_2(z_1,\ z_2,\ z_3) = z_1^2 - z_2^2 - 0z_3^2.$$

Итак, невырожденное преобразование

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= x_1 + x_2 - \frac{5}{4}x_3, \\ z_2 &= -x_1 + x_2 + \frac{5}{4}x_3, \\ z_3 &= x_3 \end{aligned}\right\}$$

приводит данную квадратическую форму к каноническому виду.

Кроме метода Лагранжа, существуют и другие методы приведения квадратичной формы к каноническому виду. Рассмотрим *метод Якоби,* который применим в случае, когда все главные миноры матрицы квадратичной формы отличны от нуля. Этот метод заключается в следующем.

Пусть дана квадратичная форма

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X^{\mathrm{T}}AX.$$

Предположим, что главные миноры $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ матрицы A отличны от нуля. Можно доказать, что тогда существует единственное невырожденное однородное пребразование переменных вида

$$\left.\begin{array}{lllll} x_1 = y_1 + \alpha_{21}y_2 + \alpha_{31}y_3 + & \ldots & + \alpha_{n1}y_n, \\ x_2 = \phantom{y_1 + \alpha_{21}} y_2 + \alpha_{32}y_3 + & \ldots & + \alpha_{n2}y_n, \\ x_3 = \phantom{y_1 + \alpha_{21}y_2 + \alpha_{32}} y_3 + & \ldots & + \alpha_{n3}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = & & \phantom{+\alpha_{n3}} y_n, \end{array}\right\}$$

приводящее данную квадратичную форму к каноническому виду

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j^2,$$

$$\text{где } \lambda_1 = \Delta_1,\ \lambda_j = \frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}},\ j = 2,\ \ldots,\ n. \tag{5.8}$$

Коэффициенты этого преобразования определяются по формуле

$$\alpha_{ji} = (-1)_{j-1\ i}\ \frac{\Delta_{j-1\ i}}{\Delta_{j-1}}, \tag{5.9}$$

где Δ_{j-1i} — минор матрицы A, расположенный на пересечении строк этой матрицы с номерами $1, 2, \ldots, j-1$ и столбцов с номерами $1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, j$.

Пример 3. Привести к каноническому виду квадратичную форму

$$L(x_1,\ x_2,\ x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

Решение. Матрица данной квадратичной формы имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

а ее главные миноры $\Delta_1 = 2,\ \Delta_2 = 2,\ \Delta_3 = 1$. По формулам (5.8) имеем:

$$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, данная квадратичиая форма приводится к каноническому виду

$$L(y_1,\ y_2,\ y_3) = 2y_1^2 + y_2^2 + \frac{1}{2}\ y_3^2.$$

Преобразование, приводящее данную квадратичную форму к каноническому виду, имеет вид

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= y_1 + \alpha_{21}y_2 + \alpha_{31}y_3, \\ x_2 &= \phantom{y_1 + \alpha_{21}} y_2 + \alpha_{32}y_3, \\ x_3 &= \phantom{y_1 + \alpha_{21}y_2 + \alpha_{32}} y_3. \end{aligned}\right\}$$

Использовав формулы (5.9), получим

$$\alpha_{21} = (-1)^3 \frac{\Delta_{1,1}}{\Delta_1} = -\frac{-2}{2} = 1,$$

$$\alpha_{31} = (-1)^4 \frac{\Delta_{2,1}}{\Delta_2} = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{2} = -\frac{1}{2},$$

$$\alpha_{32} = (-1)^5\ \frac{\Delta_{2,2}}{\Delta_2} = -\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}}{2} = 0.$$

Таким образом,

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= y_1 + y_2 - \frac{1}{2}\ y_3, \\ x_2 &= y_2, \\ x_3 &= y_3. \end{aligned}\right\}$$

§ 5.5. Закон инерции квадратичных форм

Для данной квадратичной формы существуют различные конгруэнтные ей канонические формы. Однако все канонические формы, конгруэнтные данной, обладают рядом общих свойств. Рассмотрим одно из этих свойств, выражающее так называемый *закон инерции квадратичных форм.*

Теорема. *Все канонические формы, конгруэнтные данной квадратичной форме, имеют:* 1) *одно и то же число нулевых коэффициентов,* 2) *одно и то же число положительных коэффициентов;* 3) *одно и то же число отрицательных коэффициентов.*

Доказательство. 1. Так как в любой канонической форме, конгруэнтной данной квадратичной форме, число коэффициентов, отличных от нуля, одно и то же (равное рангу формы), то и число нулевых коэффициентов одно и то же.

2. Пусть

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim L_1(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

и

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim L_2(z_1, z_2, \ldots, z_n),$$

где

$$L_1(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \ldots + \alpha_k y_k^2 - \\ - \beta_1 y_{k+1}^2 - \ldots - \beta_p y_{k+p}^2, \tag{5.10}$$

$$L_2(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \gamma_1 z_1^2 + \gamma_2 z_2^2 + \ldots + \gamma_s z_s^2 - \\ - \delta_1 z_{s+1}^2 - \ldots - \delta_q z_{s+q}^2, \tag{5.11}$$

$\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_p, \gamma_1, \ldots, \gamma_s, \delta_1, \ldots, \delta_q$ — положительные числа. Докажем, что $k = s$.

Предположим, что $k < s$. Пусть форма (5.10) получена из $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ преобразованием

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = b_{11}x_1 + \ldots + b_{1n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_k = b_{k1}x_1 + \ldots + b_{kn}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = b_{n1}x_1 + \ldots + b_{nn}x_n, \end{array}\right\} \tag{5.12}$$

а форма (5.11) — преобразованием

$$
\left.\begin{aligned}
z_1 &= c_{11}x_1 + \ \ldots \ + c_{1n}x_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
z_s &= c_{s1}x_1 + \ \ldots \ + c_{sn}x_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
z_n &= c_{n1}x_1 + \ \ldots \ + c_{nn}x_n.
\end{aligned}\right\} \tag{5.13}
$$

Возьмем k первых уравнений системы (5.12) и $n-s$ последних уравнений системы (5.13). Положим в этих уравнениях

$$y_1=y_2=\ldots=y_k=0,$$
$$z_{s+1}=z_{s+2}=\ldots=z_n=0$$

и рассмотрим полученную вспомогательную систему $k+(n-s)$ однородных линейных уравнений с n переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Так как $k+(n-s)=n-(s-k)<n$, то число уравнений меньше числа неизвестных и, следовательно, вспомогательная система имеет ненулевое решение, например $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$.

Подставляя $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ в преобразование (5.12), получим $y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*$, где $y_1^*=y_2^*=\ \ldots\ =y_k^*=0$.

Среди $y_{k+1}^*, y_{k+2}^*, \ldots, y_n^*$ есть отличные от нуля, что следует из невырожденности преобразования (5.12). Из выражения (5.10) следует, что

$$L_1(y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*)<0. \tag{5.14}$$

Аналогично из преобразования (5.13) находим z_1^*, $z_2^*, \ldots, z_n^*$, где $z_{s+1}^*=z_{s+2}^*=\ \ldots\ =z_n^*=0$, а среди z_1^*, $z_2^*, \ldots, z_s^*$ есть хотя бы один отличный от нуля.

Из выражения (5.11) получим

$$L_2(z_1^*, z_2^*, \ldots, z_n^*)>0. \tag{5.15}$$

Так как

$$L_1(y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*)=L(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*),$$
$$L_2(z_1^*, z_2^*, \ldots, z_n^*)=L(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*),$$

то

$$L_2(z_1^*, z_2^*, \ldots, z_n^*)=L_1(y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*),$$

что противоречит соотношениям (5.14) и (5.15). Следовательно, k не может быть меньше s. Аналогично доказывается, что k не может быть больше s. Следовательно, $k=s$.

3. То, что все рассматриваемые канонические виды данной квадратичной формы имеют одно и то же число отрицательных коэффициентов, следует из доказанного в пунктах 1 и 2. ■

Следствие. *Любая квадратичная форма имеет единственную конгруэнтную нормальную форму (с точностью до обозначения переменных).*

§ 5.6. Знакоопределенные квадратичные формы

Совокупность значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ назовем *нулевой*, если $x_1=x_2= \ldots =x_n=0$, *и ненулевой*, если среди значений переменных есть хотя бы одно, отличное от нуля.

Очевидно, что для любой квадратичной формы $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеем $L(0, 0, \ldots, 0)=0$.

Квадратичная форма $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *положительно-определенной*, если для любой ненулевой совокупности значений переменных $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ имеем $L(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)>0$, и *отрицательно-определенной*, если для любой ненулевой совокупности значений переменных $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ имеем $L(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)<0$.

Положительно- и отрицательно-определенные квадратичные формы называются *знакоопределенными*.

Пример. Квадратичная форма

$$L(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2$$

является положительно-определенной, а

$$L(x_1, x_2) = -x_1^2 - 2x_2^2$$

отрицательно-определенной.

Квадратичная форма

$$L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2$$

не является знакоопределенной, так как существует ненулевая совокупность значений переменных, например $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = -\frac{1}{2}$, такая, что $L\left(1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = 0$.

Теорема 1. *Если квадратичная форма положительно-определенная, то любая конгруэнтная ей квадратичная форма также является положительно-определенной.*

Доказательство. Пусть $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — положительно-определенная квадратичная форма и

$$L_1(y_1, y_2, \ldots, y_n) \sim L(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Предположим, что $L_1(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ не является положительно-определенной формой. Тогда существует ненулевая совокупность значений переменных $y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*)$ такая, что

$$L_1(y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*) \leqslant 0.$$

Рассмотрим невырожденное однородное линейное преобразование

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n, \\ y_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \ldots + c_{nn}x_n, \end{array}\right\} \quad (5.16)$$

переводящее форму $L_1(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ в $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Положив в соотношениях (5.16) $y_1 = y_1^*$, $y_2 = y_2^*, \ldots, y_n = y_n^*$, получим невырожденную неоднородную систему уравнений, которая имеет единственное ненулевое решение $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$. Так как

$$L(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) = L_1(y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*),$$

а

$$L_1(y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*) \leqslant 0,$$

то и

$$L(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \leqslant 0,$$

что противоречит условию. ■

Теорема 2. *Если квадратичная форма отрицательно-определенная, то любая конгруэнтная ей квадратичная форма также является отрицательно-определенной.*

Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы.

Теорема 3. *Знакоопределенная квадратичная форма является невырожденной.*

Доказательство. Пусть $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — знакоопределенная квадратичная форма. Предположим, что она вырожденная, т. е. ее ранг $r<n$. Тогда она может быть приведена к канонической форме

$$L_1(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i y_i^2, \; \alpha_i \neq 0 \; i = 1, 2, \ldots, r,$$

конгруэнтной форме $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Существует ненулевая система, например $y_1^* = y_2^* = \ldots = y_r^* = 0$, $y_{r+1}^* = \ldots = y_n^* = 1$, для которой $L_1(y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*) = 0$. Следовательно, форма $L_1(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ не является знакоопределенной, что противоречит теореме 1. Таким образом, предположение неверно и $r = n$. ■

§ 5.7. Критерии знакоопределенности квадратичных форм

Во многих случаях необходимо выяснить, является ли квадратичная форма знакоопределенной. Рассмотрим теоремы, выражающие критерии знакоопределенности квадратичных форм.

Теорема 1. *Для того чтобы каноническая квадратичная форма была положительно- (отрицательно-) определенной, необходимо и достаточно, чтобы все ее коэффициенты были положительны (отрицательны).*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть каноническая форма

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2 \tag{5.17}$$

является положительно-определенной. Так как всякая положительно-определенная форма — невырожденная, то все $\alpha_i \neq 0$. Докажем, что все $\alpha_i > 0$. Для любой ненулевой совокупности $x_1^*, \ldots, x_n^*$ имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^{*2} > 0. \tag{5.18}$$

Положив, например, $x_1^* = 1$, $x_2^* = \ldots = x_n^* = 0$, из условия (5.18) видим, что $\alpha_1 > 0$. Аналогично доказывается, что $\alpha_2 > 0, \ldots, \alpha_n > 0$.

Достаточность. Если в квадратичной форме (5.17) все коэффициенты $\alpha_i > 0$, то очевидно, что эта форма является положительно-определенной.

Аналогично проводится доказательство для отрицательно-определенной формы. ■

Доказанная теорема дает возможность исследовать знакоопределенность любой квадратичной формы путем предварительного приведения ее к конгруэнтной канонической форме.

Существует критерий знакоопределенности квадратичной формы, не требующий приведения ее к канонической форме. Рассмотрим некоторые вспомогательные теоремы.

Теорема 2. *Если квадратичная форма положительно-определенная, то определитель ее матрицы положителен.*

Доказательство. Пусть $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — положительно-определенная форма с матрицей A. Тогда в конгруэнтной ей канонической форме

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i^2$$

все $\alpha_i > 0$.

Матрица этой формы

$$C = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha_n \end{bmatrix},$$

и $\det C = \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n > 0$. Следовательно, $\det A > 0$ (см. следствие теоремы 1 из § 5.3). ■

Обратное утверждение, вообще говоря, не является справедливым, т. е. из того, что определитель матрицы квадратичной формы положителен, не следует, что форма положительно-определенная.

Теорема 3. *Если квадратичная форма n переменных отрицательно-определенная, то при n четном определитель ее матрицы положительный, а при нечетном — отрицательный.*

Доказательство. Пусть $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — отрицательно-определенная квадратичная форма с матрицей A. Тогда $-L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — положительно-определенная форма с матрицей $(-A)$. Следовательно, по теореме 2, $\det(-A)>0$.

Так как общий множитель всех элементов ряда определителя можно вынести за знак определителя, то $\det(-A)=(-1)^n \det A$. Следовательно, $(-1)^n \det A>0$, откуда при n четном $\det A>0$ и при нечетном $\det A<0$. ■

Теорема 4. *Если квадратичная форма знакоопределенная, то все главные миноры ее матрицы отличны от нуля.*

Доказательство. Пусть

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} -$$

матрица знакоопределенной квадратичной формы $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. На основании теорем 2, 3 $\det A \neq 0$.

Рассмотрим вспомогательные квадратичные формы:

$$L_1(x_1)=L(x_1, 0, \ldots, 0)=a_{11}x_1^2,$$

$$L_2(x_1, x_2)=L(x_1, x_2, 0, \ldots, 0)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$L_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})=$$
$$=L(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0)=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}x_ix_j,$$

матрицы которых соответственно

$$A_1=(a_{11}),\ A_2=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}, \ldots,$$

$$A_{n-1}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,n-1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{2,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1,n-1} & a_{2,n-1} & \ldots & a_{n-1,n-1} \end{bmatrix}.$$

Легко заметить, что поскольку $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — знакоопределенная форма, то $L_1(x_1), L_2(x_1, x_2), \ldots, L_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ также являются знакоопределенными формами, и на основании теорем 2, 3 определители их матриц отличны от нуля, т. е. главные миноры матрицы A отличны от нуля. ■

Теорема 5 (критерий Сильвестра). *Для того чтобы квадратичная форма была положительно-определенной, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы этой формы были положительны. Для того чтобы квадратичная форма была отрицательно-определенной, необходимо и достаточно, чтобы главные миноры четного порядка матрицы этой формы были положительны, а нечетного — отрицательны.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $L(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — знакоопределенная квадратичная форма. Тогда, на основании теоремы 4, все главные миноры матрицы A данной квадратичной формы отличны от нуля и, следовательно, $L(x_1, x_2, \dots, x_n)$ методом Якоби приводится к каноническому виду

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2,$$

где $\lambda_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$ определяются по формулам (5.8).

Если $L(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — положительно-определенная квадратичная форма, то $\lambda_i>0 \quad (i=1, 2, \dots, n)$, и из формул (5.8) следует, что все главные миноры матрицы A положительны.

Если $L(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — отрицательно-определенная квадратичная форма, то $\lambda_i<0 \quad (i=1, 2, \dots, n)$, и из формул (5.8) получаем: $\Delta_1=\lambda_1<0$, $\Delta_2=\lambda_2\Delta_1>0$ и т. д.

Достаточность. Пусть все главные миноры матрицы A положительны, т. е. $\Delta_i>0 \quad (i=1, 2, \dots, n)$. Тогда из формул (5.8) следует, что $\lambda_i>0 \quad (i=1, 2, \dots, n)$, т. е. данная квадратичная форма положительно-определенная. ■

Пусть $\Delta_1<0$, $\Delta_2>0$ и т. д. Тогда из формул (5.8) следует, что $\lambda_i<0 \quad (i=1, 2, \dots, n)$, т. е. данная квадратичная форма отрицательно-определенная.

Пример. Исследовать на знакоопределенность следующие формы

$$L_1(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2,$$

$$L_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 3x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

Квадратичная форма $L_1(x_1, x_2)$ не является знакоопределенной, так как для ее матрицы

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

главные миноры $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = -7$.

Матрица формы $L_2(x_1, x_2, x_3)$ имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{3}{2} \\ 2 & 4 & 2 \\ \frac{3}{2} & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для этой матрицы $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = 0$. Следовательно, эта форма не является знакоопределенной.

§ 5.8. Свойство корней характеристического уравнения симметрической вещественной матрицы

Если C — матрица, элементы которой, вообще говоря, являются комплексными числами, то можно ввести понятие матрицы, сопряженной данной.

Матрицей $\overline{C}$, сопряженной матрице C, называется матрица, элементами которой являются числа, сопряженные соответствующим элементам матрицы C.

Из определения следует, что если элементы матрицы C будут $c_{kj} = \alpha_{kj} + i\beta_{kj}$, то элементами матрицы $\overline{C}$ являются числа $\overline{c}_{kj} = \alpha_{kj} - i\beta_{kj}$, где $i = \sqrt{-1}$.

Легко видеть, что имеют место следующие соотноношения.

1. $\overline{C} = C$, *если C — вещественная матрица.*
2. $\overline{C + B} = \overline{C} + \overline{B}$.
3. $\overline{CB} = \overline{C}\,\overline{B}$.
4. $\overline{\lambda C} = \overline{\lambda}\,\overline{C}$, где λ — число.

Теорема. *Корни характеристического уравнения вещественной симметрической матрицы являются вещественными числами.*

Доказательство. Если A — вещественная симметрическая матрица порядка n, то $\overline{A} = A$ и $A^{\mathrm{T}} = A$.

Пусть λ — корень характеристического уравнения этой матрицы. Рассмотрим собственный вектор $\vec{x}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ матрицы A с собственным числом λ.

(Координаты вектора $\vec{x}$, вообще говоря, могут быть комплексными числами.) Тогда

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$$

является собственным столбцом матрицы A с собственным числом λ.

Найдем произведение $X^{\text{т}}A\overline{X}$ двумя способами. С одной стороны,

$$X^{\text{т}}A\overline{X} = X^{\text{т}}\overline{A}\overline{X} = X^{\text{т}}\overline{AX} = X^{\text{т}}\overline{\lambda X} = X^{\text{т}}\overline{\lambda}\overline{X} = \overline{\lambda}(X^{\text{т}}\overline{X}).$$

С другой стороны,

$$X^{\text{т}}A\overline{X} = X^{\text{т}}A^{\text{т}}\overline{X} = (AX)^{\text{т}}\overline{X} = (\lambda X)^{\text{т}}\overline{X} = \lambda(X^{\text{т}}\overline{X}).$$

Таким образом,

$$\overline{\lambda}(X^{\text{т}}\overline{X}) = \lambda(X^{\text{т}}\overline{X})$$

или

$$(\overline{\lambda} - \lambda)(X^{\text{т}}\overline{X}) = 0. \tag{5.19}$$

Но

$$X^{\text{т}}\overline{X} = [x_1 x_2 \ \ldots \ x_n] \begin{bmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \overline{x}_n \end{bmatrix} = [x_1\overline{x}_1 + x_2\overline{x}_2 + \ \ldots \ + x_n\overline{x}_n]$$

или

$$X^{\text{т}}\overline{X} = (|x_1|^2 + |x_2|^2 + \ \ldots \ + |x_n|^2), \tag{5.20}$$

где $|x_k|$ — модуль числа x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Так как X — ненулевой столбец, то из выражения (5.20) следует, что $X^{\text{т}}\overline{X} \neq 0$. Тогда из равенства (5.19) имеем $\overline{\lambda} = \lambda$, т. е. λ — вещественное число. ■

§ 5.9. Свойства собственных векторов симметрической вещественной матрицы

Теорема 1. *Вещественная симметрическая матрица имеет только вещественные собственные вектор-столбцы.*

Доказательство. Если X — собственный вектор-столбец с собственным числом λ вещественной симметрической матрицы A, то его координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$, как известно, находятся из системы уравнений

$$\left.\begin{array}{l}(a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_2+\ \ldots\ +a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda)x_2+\ \ldots\ +a_{2n}x_n=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ \ldots\ +(a_{nn}-\lambda)x_n=0.\end{array}\right\}$$

Так как λ — вещественное число (см. § 5.8), то вышеуказанная система имеет вещественные коэффициенты и, следовательно, вещественные решения. ■

Если для вектор-столбцов размеров $n\times 1$ введем операцию скалярного умножения так, как в примере 2 § 3.9, то имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Два собственных вектор-столбца вещественной симметрической матрицы, соответствующих различным собственным числам, ортогональны.*

Доказательство. Пусть X_1, X_2 — собственные вектор-столбцы вещественной симметрической матрицы A порядка n, собственные числа которых λ_1 и λ_2 различны. Подсчитаем $X_1^{\mathrm{T}}AX_2$ двумя способами.

С одной стороны,

$$X_1^{\mathrm{T}}AX_2=X_1^{\mathrm{T}}(AX_2)=X_1^{\mathrm{T}}(\lambda_2X_2)=\lambda_2X_1^{\mathrm{T}}X_2,$$

с другой стороны,

$$X_1^{\mathrm{T}}AX_2=(X_1^{\mathrm{T}}A)X_2=(X_1^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}})X_2=(AX_1)^{\mathrm{T}}X_2=$$
$$=(\lambda_1X_1)^{\mathrm{T}}X_2=\lambda_1X_1^{\mathrm{T}}X_2.$$

Сравнивая полученные результаты, имеем

$$\lambda_2X_1^{\mathrm{T}}X_2=\lambda_1X_1^{\mathrm{T}}X_2$$

или

$$(\lambda_2-\lambda_1)X_1^{\mathrm{T}}X_2=0.$$

Но $\lambda_1\neq\lambda_2$, следовательно, $X_1^{\mathrm{T}}X_2=0$. ■

§ 5.10. Ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму к каноническому виду

Ранее было доказано, что при помощи невырожденного линейного однородного преобразования всякую вещественную квадратичную форму можно привести к каноническому виду. Докажем, что вещественную квадратичную форму можно привести к каноническому виду при помощи ортогонального преобразования.

Теорема 1. *Если существует ортогональное преобразование, приводящее вещественную квадратичную форму $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ к каноническому виду*

$$L_1(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2, \quad (5.21)$$

то $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — характеристические числа матрицы A квадратичной формы $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Доказательство. Пусть ортогональное преобразование $X = CY$ приводит квадратичную форму $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ к каноническому виду (5.21). Тогда матрица D формы $L_1(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ имеет вид

$$D = C^{\mathrm{T}}AC = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ 0 & 0_2 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Так как C — ортогональная матрица, то $C^{\mathrm{T}} = C^{-1}$ и $D = C^{-1}AC$, поэтому λ_i — характеристические числа матрицы A. ■

Теорема 2. *Если существует ортогональное преобразование с матрицей C, приводящее вещественную квадратичную форму $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с матрицей A к каноническому виду*

$$L_1(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2,$$

то столбцами матрицы C являются собственные вектор-столбцы матрицы A с собственными числами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Доказательство. Пусть ортогональное преобразование $X = CY$, где $C = (c_{ij})$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, приводит форму $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ к каноническому виду

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2.$$

Тогда

$$C^{\text{т}}AC=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{bmatrix}.$$

Умножая обе части этого равенства на C слева и учитывая, что $CC^{\text{т}}=E$, получим

$$AC=C\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{bmatrix}.$$

Согласно правилу умножения матриц, для элементов d_{ij} $(i=1, 2, \dots, n)$ матрицы $D=AC$ имеем

$$d_{ij}=a_{i1}c_{1j}+a_{i2}c_{2j}+\dots+a_{in}c_{nj}.$$

С другой стороны,

$$d_{ij}=c_{ij}\lambda_j.$$

Следовательно,

$$a_{i1}c_{1j}+a_{i2}c_{2j}+\dots+a_{in}c_{nj}=\lambda_j c_{ij} \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

т. е.

$$\left.\begin{aligned}a_{11}c_{1j}+a_{12}c_{2j}+\dots+a_{1n}c_{nj}&=\lambda_j c_{1j},\\ a_{21}c_{1j}+a_{22}c_{2j}+\dots+a_{2n}c_{nj}&=\lambda_j c_{2j},\\ \dots\dots\dots\dots\dots&\dots\dots\\ a_{n1}c_{1j}+a_{n2}c_{2j}+\dots+a_{nn}c_{nj}&=\lambda_j c_{nj}\end{aligned}\right\}$$

или в матричной форме

$$A\begin{bmatrix}c_{1j}\\ c_{2j}\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ c_{nj}\end{bmatrix}=\lambda_j\begin{bmatrix}c_{1j}\\ c_{2j}\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ c_{nj}\end{bmatrix}.$$

Следовательно, j-й столбец $(j=1, 2, \dots, n)$ матрицы C является собственным вектор-столбцом матрицы A с собственным числом λ_j. ■

Теорема 3. *Для любой вещественной квадратичной формы существует ортогональное преобразование, приводящее ее к каноническому виду.*

Доказательство. Для квадратичной формы одного переменного $L(x_1) = a_{11}x_1^2$ искомым преобразованием является тождественное преобразование, матрица которого ортогональна, Предположим, что теорема справедлива для всех квадратичных форм k переменных, где $k = 1, 2, \ldots, n-1$, и докажем, что она справедлива для квадратичной формы n переменных.

Пусть $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — квадратичная форма с матрицей $A = (a_{ij})$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, λ — одно из собственных чисел матрицы А и

$$\begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{n1} \end{bmatrix} - \tag{5.22}$$

нормированный собственный вектор-столбец этой матрицы с собственным числом λ.

Построим ортогональную матрицу $C = (c_{ij})$, первым столбцом которой является столбец (5.22). Рассмотрим квадратичную форму $L_1(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, полученную из данной путем преобразования

$$X = CY. \tag{5.23}$$

Матрица D формы $L_1(y_1, \ldots, y_n)$ имеет вид

$$D = C^{\mathrm{T}}AC.$$

Найдем сначала первую строку матрицы $B = C^{\mathrm{T}}A$. Для элементов b_{1j} $(j = 1, 2, \ldots, n)$ этой строки имеем

$$b_{1j} = c_{11}a_{1j} + c_{21}a_{2j} + \ldots + c_{n1}a_{nj} \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Так как (5.22) является собственным вектор-столбцом матрицы A с собственным числом λ и матрица A симметрическая, то

$$c_{11}a_{1j} + c_{21}a_{2j} + \ldots + c_{n1}a_{nj} = \lambda c_{j1},$$

следовательно, $b_{1j} = \lambda c_{j1}$.

Теперь найдем первую строку матрицы $D=BC$. Для элементов d_{1j} $(j=1, 2, \ldots, n)$ этой строки имеем

$$d_{1j}=\lambda c_{11}c_{1j}+\lambda c_{21}c_{2j}+\ldots+\lambda c_{n1}c_{nj}.$$

Так как матрица C ортогональная, то

$$d_{1j}=\begin{cases}\lambda & \text{при } j=1,\\ 0 & \text{при } j\neq 1.\end{cases}$$

Матрица D — симметрическая, следовательно, она имеет вид

$$D=\begin{bmatrix}\lambda & 0 & \ldots & 0\\ 0 & d_{22} & \ldots & d_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & d_{2n} & \ldots & d_{nn}\end{bmatrix}.$$

Поэтому форму $L_1(y_1, \ldots, y_n)$ можно записать в виде

$$L_1(y_1, \ldots, y_n)=\lambda y_1^2+L_2(y_2, \ldots, y_n).$$

Квадратичная форма $L_2(y_2, \ldots, y_n)$ является, вообще говоря, формой n—1-й переменной, и для нее, согласно индуктивному предположению, существует ортогональное преобразование

$$\left.\begin{array}{l} z_2=h_{22}y_2+h_{23}y_3+\ldots+h_{2n}y_n,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ z_n=h_{n2}y_2+h_{n3}y_3+\ldots+h_{nn}y_n,\end{array}\right\}$$

приводящее ее к каноническому виду

$$\lambda_2 z_2^2+\ldots+\lambda_n z_n^2.$$

Преобразование

$$\left.\begin{array}{l} z_1=y_1,\\ z_2=h_{22}y_2+\ldots+h_{2n}y_n,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ z_n=h_{n2}y_2+\ldots+h_{nn}y_n\end{array}\right\} \qquad (5.24)$$

является ортогональным и приводит квадратичную форму $L_1(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ к каноническому виду.

Таким образом, квадратичная форма $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ приводится к каноническому виду последовательным применением ортогональных преобразований (5.23) и (5.24). ■

Теорема 4. *Любая вещественная симметрическая матрица приводима к диагональному виду.*

Доказательство. Пусть A — вещественная симметрическая матрица порядка n. Рассмотрим квадратичную форму L от n переменных с матрицей A. По теореме 3 существует ортогональное преобразование, приводящее форму $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ к каноническому виду. Пусть T — матрица этого преобразования. Тогда $T^{\mathrm{T}}AT=D$, где D — диагональная матрица. Так как матрица T ортогональная, то $T^{\mathrm{T}}=T^{-1}$ и $T^{-1}AT=D$. Следовательно, матрица A приводима к диагональному виду. ■

Из доказательства теоремы 4 следует, что для всякой вещественной симметрической матрицы A существует ортогональная матрица T, такая, что $T^{-1}AT$ — диагональная матрица.

Теорема 5. *Если линейное преобразование вещественного линейного пространства в некотором ортонормированном базисе имеет вещественную симметрическую матрицу, то существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов этого преобразования.*

Доказательство. Пусть линейное преобразование f в ортонормированном базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ имеет вещественную симметрическую матрицу A. По теореме 4, существует ортогональная матрица T такая, что $T^{-1}AT$ — диагональная матрица. Таким образом, преобразование с матрицей T переводит данный базис в ортонормированный базис $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \ldots, \vec{e}\,'_n$, в котором матрица преобразования f является диагональной. Следовательно, $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \ldots, \vec{e}\,'_n$ — собственные векторы преобразования f. ■

§ 5.11. Нахождение ортогонального преобразования, приводящего квадратичную форму к каноническому виду

Из теорем, рассмотренных в предыдущих параграфах, вытекает следующее правило нахождения ортогонального преобразования, приводящего квадратичную форму n переменных к каноническому виду.

1. Записываем матрицу A данной квадратичной формы и находим характеристические числа этой матрицы.

2. Находим ортонормированную систему собственных вектор-столбцов матрицы A.

3. Составляем искомое ортогональное преобразование.

Пример 1. Найти ортогональное преобразование, приводящее к каноническому виду квадратичную форму

$$L(x_1, x_2) = 17x_1^2 + 12x_1x_2 + 8x_2^2.$$

Решение. 1. Матрица данной квадратичной формы

$$A = \begin{bmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

Характеристические числа матрицы A являются корнями уравнения

$$\begin{vmatrix} 17-\lambda & 6 \\ 6 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Решая это уравнение, находим $\lambda_1 = 20$, $\lambda_2 = 5$.

2. Сначала найдем нормированный собственный вектор-столбец матрицы A с собственным числом $\lambda = 20$. Для этого составим систему

$$\left.\begin{aligned} -3u_1 + 6u_2 &= 0, \\ 6u_1 - 12u_2 &= 0, \end{aligned}\right\}$$

из которой находим $u_1 = 2u_2$. Следовательно, при любом t, отличном от нуля, столбец

$$\begin{bmatrix} 2t \\ t \end{bmatrix}$$

является собственным вектор-столбцом матрицы A. Столбец

$$\begin{bmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

является нормированным собственным вектор-столбцом матрицы A.

Координаты v_1 и v_2 собственного вектор-столбца матрицы A с собственным числом $\lambda_2 = 5$ находим из системы

$$\left.\begin{aligned} 12v_1 + 6v_2 &= 0, \\ 6v_1 + 3v_2 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Решая эту систему, получаем $v_2 = -2v_1$. Следовательно, при любом s, отличном от нуля, столбец

$$\begin{bmatrix} s \\ -2s \end{bmatrix}$$

является собственным вектор-столбцом матрицы A. Столбец

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

является нормированным собственным вектор-столбцом матрицы A.

3. Составляем матрицу

$$B = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

Искомым преобразованием является следующее:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{2}{\sqrt{5}}\, y_1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\, y_2, \\ x_2 &= \frac{1}{\sqrt{5}}\, y_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\, y_2. \end{aligned}\right\}$$

Пример 2. Найти ортогональное преобразование, приводящее к каноническому виду квадратичную форму

$$L(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1^2 - 8x_1x_2 - 16x_1x_3 + 7x_2^2 - 8x_2x_3 + x_3^2.$$

Решение. 1. Матрица данной квадратичной формы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Характеристическим уравнением матрицы A является уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & -8 \\ -4 & 7-\lambda & -4 \\ -8 & -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

корни которого $\lambda_1 = -9$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 9$.

2. Координаты x_1, x_2, x_3 собственного вектора X_1 с собственным числом $\lambda_1 = -9$ находятся из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} 10x_1 - 4x_2 - 8x_3 &= 0, \\ -4x_1 + 16x_2 - 4x_3 &= 0, \\ -8x_1 - 4x_2 + 10x_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 - 4x_3 &= 0, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 &= 0, \\ 4x_1 + 2x_2 - 5x_3 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Ранг матрицы этой системы равен двум, и поэтому система имеет ненулевые решения. Для их нахождения решаем систему

$$\left.\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 - 4x_3 &= 0, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Имеем: $x_1 = -18t$, $x_2 = -9t$, $x_3 = -18t$.

Таким образом, вектор-столбец

$$X_1 = \begin{bmatrix} -18 \\ -9 \\ -18 \end{bmatrix}.$$

при любом значении t, отличном от нуля, является собственным вектор-столбцом матрицы A с собственным числом $\lambda_1 = -9$.

Пронормировав вектор X_1, получим вектор-столбец

$$X_1^* = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Чтобы найти собственные вектор-столбцы матрицы A с собственным числом $\lambda = 9$, составим систему

$$\left.\begin{aligned} -8u_1 - 4u_2 - 8u_3 &= 0, \\ -4u_1 - 2u_2 - 4u_3 &= 0, \\ -8u_1 - 4u_2 - 8u_3 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Ранг матрицы этой однородной системы равен 1, и поэтому имеются два свободных неизвестных. Следовательно, решение можно записать в виде $u_1 = s_1$, $u_2 = -2s_1 - 2s_2$, $u_3 = s_2$.

Таким образом, вектор-столбцы

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ -2s_1 - 2s_2 \\ s_2 \end{bmatrix} \tag{5.25}$$

при любых s_1 и s_2, удовлетворяющих условию $s_1^2 + s_2^2 \neq 0$, являются собственными для матрицы A с собственным числом $\lambda = 9$.

Существуют два ортогональных собственных вектор-столбца X_2 и X_3 с собственным числом $\lambda = 9$. Для нахождения X_2 положим в вектор-столбце (5.25), например, $s_1 = 1$, $s_2 = 0$. Получим

$$X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Чтобы найти вектор-столбец X_3, определим s_1 и s_2 в вектор-столбце (5.25) так, чтобы выполнялось условие ортогональности X_2 и X_3, т. е. чтобы $s_1 + 4s_1 + 4s_2 = 0$ или $s_1 = -\frac{4}{5} s_2$.

Положив, например, $s_2 = 5$, находим

$$X_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Пронормировав векторы X_2 и X_3, получим

$$X_2^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X_3^* = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} \end{bmatrix}.$$

Ортонормированной системой собственных вектор-столбцов матрицы является система векторов

$$X_1^* = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \quad X_2^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X_3^* = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} \end{bmatrix}.$$

3. Искомым преобразованием является следующее:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{2}{3} y_1 + \frac{1}{\sqrt{5}} y_2 - \frac{4}{3\sqrt{5}} y_3, \\ x_2 &= \frac{1}{3} y_1 - \frac{2}{\sqrt{5}} y_2 - \frac{2}{3\sqrt{5}} y_3, \\ x_3 &= \frac{2}{3} y_1 + \frac{\sqrt{5}}{3} y_3. \end{aligned}\right\}$$

§ 5.12. Упрощение уравнений фигур второго порядка на плоскости

Пусть на плоскости задана прямоугольная декартова система координат $(O;\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$. Если x и y — координаты произвольной точки на плоскости в данной системе координат, то, как известно,

(I) уравнение $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ определяет эллипс;

(II) уравнение $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0$ — точку;

(III) уравнение $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ — пустое множество точек (мнимый эллипс);

(IV) уравнения $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\pm 1$ — гиперболы;

(V) уравнение $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0$ — пару пересекающихся прямых;

(VI) уравнение $y^2=2px$ $(x^2=2py)$, $p\neq 0$, — параболу;

(VII) уравнение $y^2=a^2$ $(x^2=a^2)$, $a\neq 0$, — пару параллельных прямых;

(VIII) уравнение $y^2=0$ $(x^2=0)$ — пару слившихся прямых;

(IX) уравнение $y^2=-a^2$ $(x^2=-a^2)$, $a\neq 0$, — пустое множество точек.

Уравнения (I)—(IX) называются *каноническими уравнениями фигур второго порядка на плоскости.*

Уравнения (I)—(III) определяют фигуру эллиптического типа, уравнения (IV), (V) — гиперболического типа, уравнения (VI)—(IX) — параболического типа.

Рассмотрим уравнение второго порядка

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+gy+f=0, \qquad (5.26)$$

где $a^2+b^2+c^2\neq 0$. Множество точек плоскости, координаты x, y которых удовлетворяют уравнению (5.26), образует некоторую фигуру. Покажем, что это уравнение определяет одну из фигур (I) — (IX). Для этого найдем уравнение фигуры (5.26) в системе координат $(O;$

$\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$), где векторы $\vec{e}_1'$ и $\vec{e}_2'$ получены из векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ ортогональным преобразованием с матрицей

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix},$$

т. е.

$$\left.\begin{aligned} \vec{e}_1' &= t_{11}\vec{e}_1 + t_{21}\vec{e}_2, \\ \vec{e}_2' &= t_{12}\vec{e}_1 + t_{22}\vec{e}_2. \end{aligned}\right\}$$

При этом формулы преобразования координат точек будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned} x &= t_{11}x' + t_{12}y', \\ y &= t_{21}x' + t_{22}y'. \end{aligned}\right\}$$

Подставив эти значения x и y в уравнение (5.26), получим уравнение данной фигуры в системе координат

$$(O;\ \vec{e}_1',\ \vec{e}_2').$$

Сумма первых трех членов

$$ax^2 + bxy + cy^2 \tag{5.27}$$

является квадратичной формой двух переменных x, y, которую мы будем называть *квадратичной формой, соответствующей уравнению (5.26)*. Матрица этой формы имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix}.$$

Пусть выбранное преобразование приводит квадратичную форму (5.27) к каноническому виду (как известно, такое преобразование всегда существует)

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2,$$

где λ_1 и λ_2 — корни характеристического уравнения матрицы A. Тогда уравнение (5.26) примет вид

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + d_1 x' + g_1 y' + f = 0, \tag{5.28}$$

где $d_1=t_{11}d+t_{21}g$, $g_1=t_{12}d+t_{22}g$.

Возможны следующие случаи.

1. $\det A>0$. Так как определитель матрицы квадратичной формы не меняется при ортогональном преобразовании, то $\lambda_1\lambda_2>0$, т. е. λ_1 и λ_2 имеют одинаковые знаки.

В уравнении (5.28) дополняем до полного квадрата члены, содержащие x'^2 и x', а также члены, содержащие y'^2 и y'. После этого уравнение можно записать так:

$$\lambda_1(x'-h_1)^2+\lambda_2(y'-h_2)^2=f_1. \qquad (5.29)$$

Осуществим параллельный перенос репера $(O;\ \vec{e}_1{}',\ \vec{e}_2{}')$ на вектор $\overrightarrow{OO'}$, координатами которого в репере $(O;\vec{e}_1{}',\ \vec{e}_2{}')$ являются h_1 и h_2, т. е. на вектор $\overrightarrow{OO'}=h_1\vec{e}_1{}'+h_2\vec{e}_2{}'$). Тогда уравнение (5.29) в репере $(O';\ \vec{e}_1{}',\ \vec{e}_2{}')$ примет вид

$$\lambda_1x''^2+\lambda_2y''^2=f_1. \qquad (5.30)$$

Если $f_1\neq0$, то уравнение (5.30) приводится к виду (I) или (III), если $f_1=0$ — к виду (II).

2. $\det A<0$, следовательно, и $\lambda_1\lambda_2<0$, т. е. λ_1 и λ_2 — разных знаков.

Как и в первом случае, уравнение (5.28) можно привести к виду (5.30). В этом случае, если $f_1\neq0$, уравнение (5.30) приводится к виду (IV), если $f_1=0$ — к виду (V).

3. $\det A=0$, следовательно, $\lambda_1\lambda_2=0$, т. е. одно из чисел λ_1, λ_2 равно нулю. Не нарушая общности, будем считать, что $\lambda_1\neq0$, $\lambda_2=0$. Дополняя в уравнении (5.28) члены, содержащие x'^2 и x', до полного квадрата, получим

$$\lambda_1(x'-h_1)^2+g_1y'+f=0. \qquad (5.31)$$

Если $g_1\neq0$, то уравнение (5.31) можно записать в виде

$$\lambda_1(x'-h_1)^2=-g_1(y'-h_2). \qquad (5.32)$$

Осуществим параллельный перенос репера $(O;\ \vec{e}_1{}',\vec{e}_2{}')$ на вектор $\overrightarrow{OO'}=h_1\vec{e}_1{}'+h_2\vec{e}_2{}'$. Уравнение (5.32) в репере $(O';\ \vec{e}_1{}',\ \vec{e}_2{}')$ примет вид

$$\lambda_1x''^2=-g_1y''.$$

Это уравнение приводится к виду (VI).

Если $g_1=0$, то уравнение (5.31) имеет вид

$$\lambda_1(x'-h_1)^2+f_1=0.$$

Осуществив параллельный перенос репера $(O; \vec{e}_1', \vec{e}_2')$ на вектор $\overrightarrow{OO'} = h_1\vec{e}_1'$, получим в репере $(O'; \vec{e}_1', \vec{e}_2')$ уравнение

$$\lambda_1 x''^2 + f_1 = 0.$$

Это уравнение при $f_1 \neq 0$ приводится к виду (VII) или (IX), при $f_1=0$ — к виду (VIII).

Итак, если $\det A>0$, то уравнение (5.26) определяет фигуру эллиптического типа; если $\det A<0$ — гиперболического; если $\det A=0$ — параболического типа.

Операция перехода от уравнения (5.26) к уравнению (5.28) называется *отнесением фигуры к главным осям.*

Если фигура, определяемая уравнением (5.26), является эллипсом или гиперболой, то новые оси координат параллельны осям симметрии кривой.

Уравнение (5.26) в случае $\det A \neq 0$ определяет фигуру, называемую *центральной.* Если $\det A=0$, то фигура, определяемая уравнением (5.26), называется *нецентральной.*

К центральным относятся фигуры эллиптического и гиперболического типов, к нецентральным — параболического типа.

Главными направлениями фигуры, заданной уравнением (5.26), назовем направления ортогональных собственных векторов матрицы квадратичной формы, соответствующей этому уравнению.

Из сказанного выше следует, что существует декартова прямоугольная система координат, в которой уравнение (5.26) принимает канонический вид. Чтобы найти эту систему координат, поступаем следующим образом.

1. Находим ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму, соответствующую данному уравнению, к каноническому виду.

2. По этому преобразованию находим главные направления фигуры, т. е. векторы $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$ — ортонормированные собственные векторы матрицы квадратичной формы, соответствующей данному уравнению.

3. Находим уравнение данной фигуры в репере $(O; \vec{e}_1', \vec{e}_2')$.

4. В полученном уравнении производим дополнения до полных квадратов так, как это было указано выше. Находим координаты точки O', которая является началом искомой системы координат.

В найденной системе координат $(O'; \vec{e}_1', \vec{e}_2')$ уравнение данной фигуры имеет канонический вид.

Пример. Привести к каноническому виду уравнение

$$17x^2 + 12xy + 8y^2 + 20\sqrt{5}x + 20 = 0$$

и построить фигуру, определяемую этим уравнением.

Решение. Квадратичная форма, соответствующая данному уравнению, имеет вид

$$L(x, y) = 17x^2 + 12xy + 8y^2.$$

В примере 1 § 5.11 было найдено ортогональное преобразование

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}y', \\ y &= \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y', \end{aligned}\right\} \tag{5.33}$$

приводящее квадратичную форму $L(x, y)$ к каноническому виду.

Базисные векторы $\vec{e}_1'$ и $\vec{e}_2'$, полученные в результате ортогонального преобразования из базисных векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, задаются формулами

$$\left.\begin{aligned} \vec{e}_1' &= \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{e}_2, \\ \vec{e}_2' &= -\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{e}_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{e}_2. \end{aligned}\right\} \tag{5.34}$$

Найдем уравнение данной фигуры, отнесенное к главным осям, т. е. ее уравнение в системе координат $(O; \vec{e}_1', \vec{e}_2')$. Для этого подставим в данное уравнение значения x, y из соотношений (5.33). Получим уравнение

$$20x'^2 + 5y'^2 + 40x' - 20y' + 20 = 0,$$

которое можно записать в виде

$$\frac{(x'+1)^2}{1} + \frac{(y'-2)^2}{4} = 1. \tag{5.35}$$

Осуществляя параллельный перенос системы $(O;\ \vec{e}'_1,\ \vec{e}'_2)$ на вектор $\overrightarrow{OO'} = -\vec{e}'_1 + 2\vec{e}'_2$, получим систему $(O';\ \vec{e}'_1,\ \vec{e}'_2)$, в которой уравнение (5.35), а следовательно, и данное уравнение принимает канонический вид

$$\frac{x''^2}{1} + \frac{y''^2}{4} = 1. \tag{5.36}$$

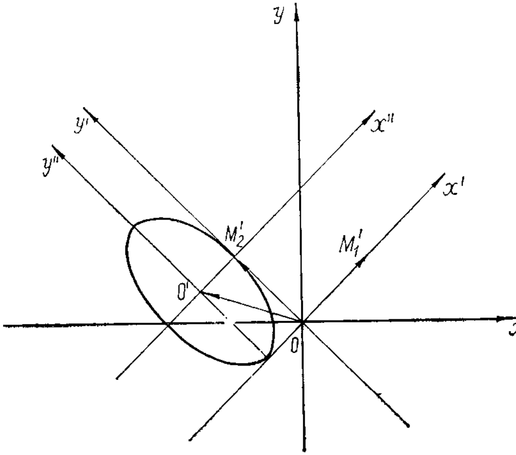


Рис. 5.1

Таким образом, данное уравнение задает эллипс.

Для того чтобы построить этот эллипс, нужно построить фигуру, определяемую уравнением (5.36) в системе $(O';\ \vec{e}'_1,\ \vec{e}'_2)$, которая получается из $(O;\ \vec{e}'_1,\ \vec{e}'_2)$ параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{OO'} = -\vec{e}'_1 + 2\vec{e}'_2$. При этом вместо векторов (5.34) можно строить векторы

$$\overrightarrow{OM'_1} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2,\quad \overrightarrow{OM'_2} = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2.$$

На рис. 5.1 изображена кривая, определяемая данным уравнением.

§ 5.13. Упрощение уравнений фигур второго порядка в пространстве

Рассмотрим общее уравнение фигуры второго порядка

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + {} \\ + 2a_{23}yz + bx + dy + ez + f = 0, \tag{5.37}$$

где хотя бы один из коэффициентов a_{ij} ($i=1, 2, 3$; $j=1, 2, 3$) отличен от нуля.

Сумма первых шести членов этого уравнения

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz \quad (5.38)$$

является квадратичной формой трех переменных x, y, z, которую будем называть *квадратичной формой, соответствующей уравнению (5.37)*. Матрица этой формы имеет вид

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Известно, что существует ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму (5.38) к каноническому виду.

Упрощение уравнения (5.37) и построение фигуры, определяемой этим уравнением, производится способом, аналогичным способу, изложенному в § 5.12.

Пример. Построить фигуру, заданную уравнением

$$9x^2+20y^2+20z^2-40yz-36x-4\sqrt{2}y+4\sqrt{2}z+4=0.$$

Решение. Квадратичная форма, соответствующая этому уравнению, имеет вид

$$9x^2+20y^2+20z^2-40yz,$$

и ее матрица

$$A=\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & -20 \\ 0 & -20 & 20 \end{bmatrix}.$$

Характеристические числа этой матрицы $\lambda_1=9$, $\lambda_2=40$, $\lambda_3=0$, следовательно, канонический вид квадратичной формы будет таким:

$$9x'^2+40y'^2.$$

Найдем ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму, соответствующую данному уравнению, к каноническому виду. Элементы собственного вектор-столбца, соответствующего собственному числу $\lambda_1=9$, находим из системы

$$\left.\begin{aligned} 0u+0v+0w&=0, \\ 0u+11v-20w&=0, \\ 0u-20v+11w&=0, \end{aligned}\right\}$$

следовательно, собственный вектор-столбец имеет вид

$$\begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

где t — любое число, отличное от нуля.

Чтобы найти элементы собственного столбца с собственным числом $\lambda_2 = 40$, составим систему

$$\left.\begin{aligned} 31u + 0v + 0w = 0, \\ 0u - 20v - 20w = 0, \\ 0u - 20v - 20w = 0, \end{aligned}\right\}$$

из которой находим, что

$$\begin{bmatrix} 0 \\ s \\ -s \end{bmatrix} \quad (s \neq 0)$$

является искомым собственным столбцом.

Собственным столбцом матрицы A с собственным числом $\lambda_3 = 0$ является столбец

$$\begin{bmatrix} 0 \\ r \\ r \end{bmatrix} \quad (r \neq 0),$$

элементы которого найдены из системы

$$\left.\begin{aligned} 9u = 0, \\ 20v - 20w = 0, \\ -20v + 20w = 0. \end{aligned}\right\}$$

Пронормировав собственные столбцы, получим матрицу искомого преобразования:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Итак, преобразование

$$\left.\begin{aligned} x &= x', \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}}\, y' + \frac{1}{\sqrt{2}}\, z', \\ z &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\, y' + \frac{1}{\sqrt{2}}\, z' \end{aligned}\right\} \tag{5.39}$$

является ортогональным преобразованием, приводящим квадратичную форму, соответствующую данному уравнению, к каноническому виду. Это преобразование переводит базисные векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ в векторы

$$\left.\begin{aligned} \vec{e}\,'_1 &= \vec{e}_1, \\ \vec{e}\,'_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\, \vec{e}_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\, \vec{e}_3, \\ \vec{e}\,'_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\, \vec{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\, \vec{e}_3. \end{aligned}\right\} \tag{5.40}$$

Найдем уравнение данной фигуры в системе координат $(O;\ \vec{e}\,'_1,\ \vec{e}\,'_2,\ \vec{e}\,'_3)$. Подставив в данное уравнение значения x, y, z из соотношений (5.39), получим

$$9x'^2 + 40y'^2 - 36x' - 8y' + 4 = 0$$

или

$$\frac{(x'-2)^2}{3{,}6} + \frac{(y'-0{,}1)^2}{0{,}81} = 1.$$

Осуществляя параллельный перенос системы $(O;\ \vec{e}\,'_1,\ \vec{e}\,'_2,\ \vec{e}\,'_3)$ на вектор $\overrightarrow{OO'} = 2\vec{e}\,'_1 + 0{,}1\vec{e}\,'_2$, получим систему $(O';\ \vec{e}\,'_1,\ \vec{e}\,'_2,\ \vec{e}\,'_3)$, в которой уравнение данной фигуры имеет вид

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1,$$

где $a = \sqrt{3{,}6}$, $b = 0{,}9$. Это уравнение, а следовательно, и данное уравнение определяют эллиптический цилиндр с образующей, параллельной $\vec{e}\,'_3$. Для того чтобы построить этот цилиндр, наряду с системой координат $(O;\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2,$

$\vec{e}_3$) построим систему координат $(O'; \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$. При этом вместо векторов (5.40) можно строить векторы $\overrightarrow{OM_1} = \vec{e}_1$, $\overrightarrow{OM_2} = \vec{e}_2 - \vec{e}_3$, $\overrightarrow{OM_3} = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$.

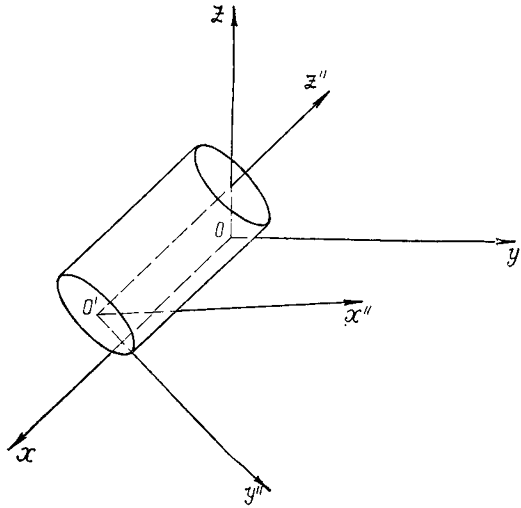


Рис. 5.2

На рис. 5.2 изображен цилиндр, определяемый данным уравнением.

Задачи

В задачах 5.1 — 5.3 записать матрицу каждой из данных квадратичных форм.

5.1. $x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$.

5.2. $2x^2 + 3y^2 - z^2 + 4xy - 6xz + 10yz$.

5.3. $4x_1^2 + x_3^2 - 2x_4^2 - x_1x_2 + 8x_1x_4 - 5x_2x_4$.

В задачах 5.4 — 5.6 найти ранг каждой из данных квадратичных форм.

5.4. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2$.

5.5. $2x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3$.

5.6. $2x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 4xy + 6xz + 12yz$.

В задачах 5.7 — 5.9 записать каждую из квадратичных форм в матричном виде.

5.7. $3x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2$.

5.8. $x_1^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 5x_1x_3$.

5.9. $2x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_3^2 + x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2x_3$.

В задачах 5.10, 5.11 записать матрицу каждой из данных квадратичных форм.

5.10. $[x_1x_2]\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.

5.11. $[x_1 \ \ x_2 \ \ x_3]\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$.

В задачах 5.12 — 5.14 найти квадратичную форму, полученную из данной указанным преобразованием.

5.12. $L(x_1, x_2) = 3x_1^2 - x_2^2 + 4x_1x_2$,

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 2y_1 - y_2, \\ x_2 &= y_1 + y_2. \end{aligned}\right\}$$

5.13. $L(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 + x_1x_2$,

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -y_1 + 2y_2, \\ x_2 &= 3y_1 + y_2 + y_3, \\ x_3 &= -2y_1 - y_2. \end{aligned}\right\}$$

5.14. $L(x_1, x_2, x_3) = 2x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + x_2x_3$,

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= y_1 + y_2 - y_3, \\ x_2 &= y_1 - y_2 + y_3, \\ x_3 &= y_3 + y_2. \end{aligned}\right\}$$

В задачах 5.15 — 5.18 исследовать на знакоопределенность каждую из данных квадратичных форм.

5.15. $x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2$.

5.16. $2x_2^2 - x_1^2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 - 2x_3^2$.

5.17. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3$.

5.18. $3x_1^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$.

В задачах 5.19 — 5.21 исследовать, при каких значениях параметра λ является знакоопределенной каждая из данных квадратичных форм.

5.19. $\lambda x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2$.

5.20. $2x_1^2+3x_2^2+2\lambda x_1x_2+2x_1x_3-4x_2x_3$.

5.21. $\lambda x_2^2-x_1^2-4x_1x_2+6x_1x_3+10x_2x_3$.

В задачах 5.22 – 5.29 найти ортогональное преобразование, приводящее к каноническому виду каждую из квадратичных форм, и записать канонический вид квадратичной формы.

5.22. $L(x_1, x_2)=x_1^2+x_2^2+4x_1x_2$.

5.23. $L(x_1, x_2)=5x_1^2+12x_1x_2$.

5.24. $L(x_1, x_2)=7x_1^2+3x_2^2+6\sqrt{5}x_1x_2$.

5.25. $L(x_1, x_2, x_3)=2x_1^2+x_2^2+3x_3^2-4\sqrt{2}x_2x_3$.

5.26. $L(x_1, x_2, x_3)=5x_1^2+9x_2^2+9x_3^2-12x_1x_2-6x_1x_3$.

5.27. $L(x_1, x_2, x_3)=4x_1^2+x_2^2+9x_3^2-4x_1x_2-6x_2x_3+12x_1x_3$.

5.28. $L(x_1, x_2, x_3)=5x_1^2+2x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2-4x_2x_3+2x_1x_3$.

5.29. $L(x_1, x_2, x_3)=3x_1^2+3x_2^2-2x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$.

В задачах 5.30 — 5.37 построить на плоскости фигуру, определяемую каждым из данных уравнений, приводя предварительно уравнение к каноническому виду.

5.30. $2xy-6x+4y-20=0$.

5.31. $5x^2+4xy+8y^2-32x-56y+80=0$.

5.32. $8y^2+6xy-12x-26y+11=0$.

5.33. $48x^2+64xy+32x+16y+5=0$.

5.34. $5x^2+6xy+5y^2-16x-16y+16=0$.

5.35. $x^2+2xy+y^2-8x+4=0$.

5.36. $8x^2-4xy+5y^2+4x-10y+41=0$.

5.37. $x^2-8xy+7y^2+6x-6y=0$.

В задачах 5.38 — 5.40 построить в пространстве фигуру, определяемую каждым из данных уравнений, приведя предварительно уравнение к каноническому виду.

5.38. $x^2-2y^2+z^2+4xy-8zx-4yz-14x-4y+14z+16=0$.

5.39. $x^2+y^2-3z^2-6yz-6zx-2xy+2x+2y+4z=0$.

5.40. $6x^2-2y^2+6z^2+4xz+8x-4y-8z+1=0$.

Ответы

Глава 1

1.1. а) $\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 12 & 15 \\ 31 & 32 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 35 & 5 \\ 12 & 27 \end{bmatrix}$. **1.2.** $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 10 \end{bmatrix}$. **1.3.** $A = A_{n\times n}$.

1.4. $a_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ если } i = j; \\ -a_{ij}, \text{ если } i \neq j; \ i = 1, 2, \ldots, n; \ j = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$

1.5. а) $\begin{bmatrix} -6 & 3 \\ -12 & 0 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} -1 & \frac{2}{3} \\ -\frac{8}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$. **1.6.** а) $\begin{bmatrix} 32 & -22 & 16 & -6 \\ 12 & -4 & 20 & 38 \end{bmatrix}$;

б) $\begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \\ -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{7}{5} \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} -2 & 16 & 8 & 6 \\ 0 & 10 & -2 & 4 \end{bmatrix}$.

1.7. $m = 5$, $n = 4$. **1.8.** $m = 5$, $n = 3$, $k = 4$. **1.9.** а) Нет; б) да: в) да; г) нет; д) да; е) да; ж) нет; з) нет; и) нет; к) нет; л) да; м) да; н) нет. **1.10.** $\begin{bmatrix} 8 \\ 9 \end{bmatrix}$. **1.11.** $\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -3 & 18 \end{bmatrix}$. **1.12.** $\begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 0 & 13 \end{bmatrix}$.

1.13. $\begin{bmatrix} 6 & 1 & 12 \\ 10 & -6 & 0 \\ 2 & 2 & 9 \end{bmatrix}$. **1.14.** $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 5 & 10 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7 & 14 & 21 \end{bmatrix}$. **1.15.** Нулевая матрица размеров 4×2. **1.16.** Нулевая матрица размеров 3×1. **1.17.** а) $B = (b_{ij}) = (a_{ij}d_j)$, $C = (c_{ij}) = (a_{ij}d_i)$ $(i = 1, 2, \ldots n; \ j = 1, 2, \ldots n)$; б) либо A — нулевая, либо $d_1 = d_2 = \ldots = d_n$. **1.18.** $d_{23} = 92$. **1.19.** $\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}$. **1.20.** а) Да; б) нет. **1.22.** а) $\begin{bmatrix} 11 & 10 \\ 4 & 19 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix} \cos 3\alpha & -\sin 3\alpha \\ \sin 3\alpha & \cos 3\alpha \end{bmatrix}$. **1.23.** $\begin{bmatrix} 21 & -9 \\ -12 & 12 \end{bmatrix}$.

1.24. $\begin{bmatrix} -76 & 21 \\ -28 & -69 \end{bmatrix}$. **1.25.** $\begin{bmatrix} 15 & -8 \\ -12 & 11 \end{bmatrix}$. **1.26.** $\begin{bmatrix} -7 & 0 & 3 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$.

1.27. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. **1.28.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. **1.31.** $\begin{bmatrix} -18 & 40 \\ 0 & 62 \end{bmatrix}$. **1.32.** $\begin{bmatrix} -8 & -6 \\ -6 & -20 \end{bmatrix}$.

1.33. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$. **1.34.** 8. **1.35.** 2. **1.36.** 13. **1.37.** 10.

1.38. $\frac{n(n-1)}{2}$. **1.39.** $\frac{n(n+1)}{2}$. **1.40.** $k_1 = k+1$, если переставляемые числа не образуют инверсию; $k_1 = k-1$, если образуют. **1.41.** а) k_1 нечетное; б) k_1 четное. **1.42.** Да. **1.43.** Да. **1.44.** Нет. **1.45.** Нет. **1.46.** Нет. **1.47.** Да. **1.48.** Да. **1.49.** а) $k=1$; б) $k=1$, $m=3$. **1.50.** а) Нет; б) да. **1.51.** 111. **1.52.** 24. **1.53.** $x=2$. **1.54.** $x=11$. **1.55.** $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$. **1.56.** 0. **1.57.** 0. **1.58.** 0. **1.59.** 0. **1.60.** 0. **1.61.** 1000. **1.62.** а) 30; б) 2; в) 13. **1.63.** а) 5, —2, —12; б) —5, —2, 12; в) 6, 12, —18. **1.64.** 600. **1.65.** —22. **1.66.** 32. **1.67.** —156. **1.68.** —130. **1.69.** 44. **1.70.** 32. **1.71.** 224. **1.72.** 15. **1.73.** —84. **1.74.** 108. **1.75.** —261. **1.76.** 5. **1.77.** —32. **1.78.** 640. **1.79.** —54. **1.80.** —6. **1.81.** —3. **1.82.** 0. **1.83.** 0.

1.84. $\frac{1}{13}\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$. **1.85.** $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$. **1.86.** $\frac{1}{41}\begin{bmatrix} -9 & 11 & -5 \\ 7 & -4 & 13 \\ 19 & -5 & 6 \end{bmatrix}$.

1.87. Не существует. **1.88.** $-\frac{1}{25}\begin{bmatrix} 13 & 15 & -12 \\ 17 & 10 & -8 \\ -1 & -5 & -1 \end{bmatrix}$.

1.89. $\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$. **1.90.** Не существует. **1.91.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1.95. $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$. **1.96.** $\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 13 & -5 \end{bmatrix}$. **1.97.** $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 11 & -2 \end{bmatrix}$.

1.98. $\begin{bmatrix} -5 & 16 & -8 \\ 4 & -7 & 5 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$. **1.99.** $\frac{1}{15}\begin{bmatrix} -21 & 45 & -156 \\ -21 & 15 & -21 \\ 51 & 20 & -79 \end{bmatrix}$. **1.100.** $\lambda \neq \frac{9}{4}$.

1.101. $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq \pm\sqrt{5}$. **1.102.** 2. **1.103.** 1. **1.104.** 2. **1.105.** 2. **1.106.** 1. **1.107.** 3. **1.108.** 2. **1.109.** 2. **1.110.** 3. **1.111.** 2. **1.112.** 5. **1.113.** 3. **1.114.** 2. **1.115.** 2. **1.116.** 4. **117.** $\lambda = -\frac{1}{2}$. **1.118.** $\lambda = \frac{7}{9}$.

1.119. $\lambda \neq 2$. **1.120.** λ — любое. **1.121.** а) $\lambda = \frac{1}{2}$; б) $\lambda \neq \frac{1}{2}$; в) ни при каком λ.

Глава 2

2.1. $\begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$. 2.2. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. 2.3. $\begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. 2.4. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$.

2.5. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$. 2.6. $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$.

2.7. $\left.\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= 1, \\ 4x_1 &= 2. \end{aligned}\right\}$ 2.8. $\left.\begin{aligned} x_1 &= 3, \\ -x_2 &= 4. \end{aligned}\right\}$ 2.9. $\left.\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0, \\ 4x_1 - 2x_3 &= 0, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 &= 0. \end{aligned}\right\}$

2.10. $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \ldots,\ x_n = 0$. 2.11. а) Да; б) нет; в) да; г) да. 2.12. $x_1 = -1,\ x_2 = 3$. 2.13. $x_1 = x_2 = \frac{3}{4}$. 2.14. $x_1 = x_2 = x_3 = 1$. 2.15. $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3$. 2.16. $x_1 = 1,\ x_2 = -2,\ x_3 = 0$. 2.17. $x_1 = -2,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1$. 2.18. $x_1 = 3,\ x_2 = 0,\ x_3 = -2$. 2.19. $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1,\ x_4 = 2$. 2.20. $x_1 = -19.\ x_2 = 26,\ x_3 = 11,\ x_4 = -5$. 2.21. $x_1 = -1,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1,\ x_4 = 1$. 2.22. а) $x_1 = x_2 = x_3 = -1$; б) $x_1 = -1,\ x_2 = -2,\ x_3 = -3$; в) $x_1 = \frac{1}{7},\ x_2 = \frac{2}{7},\ x_3 = -\frac{2}{7}$. 2.23. а) $x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 2$; б) $x_1 = 3,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2$; в) $x_1 = x_3 = 0,\ x_2 = 7$. 2.24. а) $x_1 = x_3 = -1,\ x_2 = x_4 = 1$; б) $x_1 = x_3 = 2,\ x_2 = x_4 = -2$; в) $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = -1,\ x_4 = -2$. 2.25. а) $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1,\ x_4 = 2$; б) $x_1 = x_2 = x_3 = -1,\ x_4 = 0$; в) $x_1 = 2,\ x_3 = 1,\ x_2 = x_4 = 0$. 2.26. Совместна. 2.27. Несовместна. 2.28. Совместна. 2.29. Совместна. 2.30. Совместна. 2.31. Совместна. 2.32. Совместна. 2.33. Совместна. 2.34. Любая пара неизвестных, кроме $x_1,\ x_2$. 2.35. Любая пара неизвестных, кроме пар: $x_3,\ x_4$; $x_3,\ x_5$; $x_4,\ x_5$. 2.36. $x_1,\ x_3$ или $x_2,\ x_3$. 2.37. Любое неизвестное. 2.38. Любые три неизвестных. 2.39. Любая пара неизвестных, кроме $x_1,\ x_2$. 2.40. $x_1 = \frac{18 - 15c}{10},\ x_2 = c,\ x_3 = -\frac{7}{5}$, где c — любое число. 2.41. $x_1 = \frac{7 - c}{3},\ x_2 = \frac{4 + 2c}{3},\ x_3 = c$. 2.42. $x_1 = c_1,\ x_2 = c_2,\ x_3 = -3c_1 + 6c_2 + 4,\ x_4 = 2c_1 - 4c_2 - 3$. 2.43. $x_1 = c_1 + c_2 - 1,\ x_2 = 2c_1 + c_2 + 5,\ x_3 = c_1,\ x_4 = c_2$. 2.44. $x_1 = -2,\ x_2 = 3$. 2.45. $x_1 = \frac{1}{2}(-2c_1 + c_2 - 1),\ x_2 = c_1 - 2c_2 + 2,\ x_3 = c_1,\ x_4 = c_2$. 2.46. $x_1 = x_2 = x_3 = 1$. 2.47. $x_1 = x_2 = 1,\ x_3 = 0$. 2.48. $x_1 = c - 1,\ x_2 = 2 - c,\ x_3 = c$. 2.49. Несовместна. 2.50. $x_1 = c,\ x_2 = 7(c - 1),\ x_3 = 5(c - 1),\ x_4 = 0$. 2.51. $x_1 = x_2 = x_3 = 1$. 2.52. $x_1 = c,\ x_2 = -2c,\ x_3 = c$. 2.53. $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. 2.54. $x_1 = \frac{4c_1 - c_2}{3},\ x_2 = c_1,\ x_3 = c_2,\ x_4 = 0$.

2.55. $x_1=-\frac{1}{4}c$, $x_2=c$, $x_3=\frac{3}{4}c$, $x_4=0$. **2.56.** $x_1=5c$, $x_2=11c$, $x_3=7c$. **2.57.** $x_1=-\frac{1}{4}c_1$, $x_2=\frac{5}{4}c_1+c_2$, $x_3=c_1$, $x_4=c_2$. **2.58.** $x_1=x_2=x_3=0$. **2.59.** $x_1=-\frac{4}{3}(c_1+c_2)$, $x_2=\frac{1}{3}(c_2-5c_1)$, $x_3=c_1$, $x_4=c_2$. **2.60.** $x_1=2c_1+3c_2-c_3$, $x_2=c_1+c_2-c_3$, $x_3=-c_1+2c_2+c_3$, $x_4=c_1$, $x_5=c_2$, $x_6=c_3$. **2.61.** $x_1=c_1$, $x_2=c_2$, $x_3=c_1+3c_2$, $x_4=x_5=0$. **2.62.** Нет. **2.63.** Да. **2.64.** Нет. **2.65.** Да. **2.66.** $x_1=2$, $x_2=3$, $x_3=1$, $x_4=0$; $x_1=x_4=1$, $x_2=2$, $x_3=0$. **2.67.** $x_1=1$, $x_2=x_5=0$, $x_3=3$, $x_4=1$; $x_1=2$, $x_2=1$, $x_3=x_4=x_5=0$; $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=x_4=0$, $x_3=-\frac{4}{3}$, $x_5=1$. **2.68.** $x_1=x_3=1$, $x_2=2$, $x_4=0$; $x_1=-1$, $x_2=x_4=1$, $x_3=0$. **2.69.** $x_1=x_2=1$, $x_3=2$, $x_4=-1$. **2.70.** $x_1=x_2=x_3=1$, $x_4=x_5=0$; $x_1=x_4=1$, $x_2=2$, $x_3=x_5=0$, $x_1=-1$, $x_2=x_5=1$, $x_3=0$, $x_4=0$. **2.71.** $x_1=2$, $x_2=1$, $x_3=3$, $x_4=x_5=0$; $x_1=-3$, $x_2=x_5=0$, $x_3=x_4=1$; $x_1=x_5=1$, $x_2=x_4=0$, $x_3=-1$. **2.72.** $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, $x_4=0$; $x_1=0$, $x_2=-1$, $x_3=5$, $x_4=1$. **2.73.** $x_1=x_2=x_4=1$, $x_3=3$, $x_5=0$; $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=-1$, $x_3=2$, $x_4=0$, $x_5=1$. **2.74.** $x_1=x_2=x_3=1$. **2.75.** $x_1=-10c+10$, $x_2=c$, $x_3=-16c+15$, $x_4=4-5c$. **2.76.** $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$. **2.77.** Несовместна. **2.78.** $x_1=14c$, $x_2=21c$, $x_3=x_4=c$. **2.79.** $x_1=\frac{1}{10}(3-2c_2)-c_1$, $x_2=c_1$, $x_3=-\frac{1}{2}-4c_2$, $x_4=\frac{1}{10}(1-14c_2)$, $x_5=c_2$. **2.80.** Несовместна. **2.81.** $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=2$, $x_4=0$.

Глава 3

3.1. а) Да; б) нет. **3.2.** а) Да; б) да. **3.3.** а) Нет; б) нет. **3.4.** а) Нет; б) нет. **3.5.** $a=0$. **3.6.** а) Да; б) нет. **3.7.** Нет. **3.8.** Да. **3.9.** а) Да; б) нет; в) нет. **3.10.** а) Да; б) нет. **3.11.** а) Да; б) да. **3.12.** а) Да; б) нет. **3.13.** Да. **3.14.** Нет. **3.15.** Да. **3.16.** Нет. **3.17.** Да. **3.18.** Да. **3.19.** Нет. **3.21.** Нет. **3.22.** а) Нет; б) да. **3.23.** $R=\infty$. **3.26.** Нет. **3.27.** Да. **3.28.** а) Нет; б) нет; в) нет. **3.29.** а) Да; б) нет. **3.30.** а) Нет; б) да; в) да; г) нет. **3.31.** а) Нет; б) нет; в) да; г) нет. **3.32.** Да. **3.33.** Да. **3.34.** Нет. **3.37.** а) Да; б) да; в) нет; г) да. **3.38.** а) Нет; б) нет; в) нет; г) нет; д) да; е) да. **3.39.** а) Нет; б) нет; в) нет; г) да. **3.40.** а) Да; б) нет; в) нет. **3.42.** а) Нет; б) да; в) нет; г) да; д) нет. **3.45.** $\dim L=3$; 1, x, x^2. **3.46.** $\dim M_1=4$; $[1\ \ 0\ \ 0\ \ 0]$, $[0\ \ 1\ \ 0\ \ 0]$, $[0\ \ 0\ \ 1\ \ 0]$, $[0\ \ 0\ \ 0\ \ 1]$ **3.47.** $\dim M_2=9$; $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$,

$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$. **3.48.** $\dim V_2 = 2$; $\vec{i}$, $\vec{j}$. **3.49.** $\dim V_3 = 3$; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. **3.50.** $\dim Y = n$; $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — фундаментальная система решений. **3.51.** $\dim P = n+1$; $1, x, x^2, \ldots, x^n$. **3.54.** а) $\vec{a}(3, -1, 5, -4)$; б) $\vec{b}(-5, 1, 2, 3)$; в) $\vec{c}(1, 0, -1, 0)$; г); $\vec{e}_1(1, 0, 0, 0)$. **3.55.** $(3, -1, 2, -2)$. **3.56.** а) $(2, 3, 4)$; б) $(-2, 0, 3)$; в) $(-14, 2, 1)$; г) $(3, -2, 1)$. **3.57.** а) $(2, -3, 5)$; б) $(3, 1, 0)$; в) $(14, 7, 1)$; г) $(0, 2, 0)$. **3.58.** $(13, 6, -5)$. **3.59.** $(2, -3, -1, 3)$. **3.60.** $\vec{x}\left(-3, 4, -\frac{8}{3}\right)$. **3.61.** $\vec{x}\left(-\frac{2}{5}, \frac{6}{5}, \frac{21}{5}, -1{,}2\right)$. **3.62.** б) $\vec{c}\left(\frac{8}{5}, -\frac{1}{5}\right)$. **3.63.** б) $\vec{d}(2, -2, 1)$. **3.64.** Нет. **3.65.** Да. **3.66.** Да. **3.67.** Нет. **3.68.** а) При любом λ; б) $\lambda = \frac{1}{2}$. **3.69.** При любом λ. **3.70.** $\lambda \neq 1$. **3.71.** Ни при каком λ. **3.72.** $\lambda = \frac{5}{3}$. **3.73.** $\lambda = 1$. **3.74.** Ни при каком λ. **3.75.** $\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$.

3.76. $\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}$. **3.77.** $\vec{e}'_1(-1, 2)$, $\vec{e}'_2(1, 0)$. **3.78.** $\vec{e}'_2(2, 1, 0)$. **3.79.** $\vec{e}'_3(3, 4, -5)$. **3.80.** $\begin{bmatrix}2&3&0\\1&-1&0\\-1&1&1\end{bmatrix}$.

3.81. $\begin{bmatrix}0&-1&1\\1&0&1\\1&2&0\end{bmatrix}$. **3.82.** $\begin{bmatrix}0&1&1&2\\2&-2&0&1\\3&3&0&-1\\1&-1&1&1\end{bmatrix}$. **3.83.** $\vec{e}'_1\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$, $\vec{e}'_2\left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$. **3.84.** $\vec{e}_1\left(\frac{5}{13}, -\frac{3}{13}\right)$, $\vec{e}_2\left(\frac{1}{13}, \frac{2}{13}\right)$. **3.85.** $\vec{e}_2\left(\frac{11}{41}, -\frac{4}{41}, -\frac{5}{41}\right)$. **3.86.** $\vec{e}_1\left(1, \frac{1}{3}, 0\right)$, $\vec{e}_2\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$, $\vec{e}_3\left(0, \frac{1}{3}, 0\right)$. **3.87.** $\vec{e}_2(-1, 1, 0, 0)$, $\vec{e}_3(0, -1,$

1, 0). **3.88.** $\vec{x}\left(-\frac{1}{3},\ -\frac{4}{3}\right)$. **3.89.** $\vec{x}\left(\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$. **3.90.** $\vec{x}\,(-0{,}68;\ -0{,}12;\ 0{,}36)$. **3.91.** $\vec{x}\,(-0{,}6;\ 1{,}2;\ 1{,}6)$. **3.92.** $\vec{x}\,(-4,\ -8,\ 8)$. **3.93.** $\vec{x}\,(7,\ -3,\ 3,\ -1)$. **3.94.** $\vec{d}\left(4;\ -\frac{5}{3},\ -\frac{14}{3}\right)$. **3.95.** $\vec{c}\,(-0{,}2;\ 0{,}8)$. **3.96.** Нет. **3.97.** Нет. **3.98.** Нет. **3.99.** Нет. **3.100.** Да. **3.101.** Да. **3.102.** Да. **3.103.** а) Да; б) да. **3.104.** а) $\sqrt{2\pi}$; б) 0; в) $\frac{\pi}{2}$. **3.105.** а) $\sqrt{\frac{b^3-a^3}{3}}$; б) $e^b(b-1)-e^a(a-1)$; в) $\arccos\frac{(a+b)\sqrt{3}}{2\sqrt{a^2+ab+b^2}}$; г) $\left|\int\limits_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx\right| \leqslant \sqrt{\int\limits_a^b (f(x))^2dx\cdot\int\limits_a^b (g(x))^2\,dx}$; д) $\sqrt{\int\limits_a^b (f(x)+g(x))^2\,dx} \leqslant \sqrt{\int\limits_a^b (f(x))^2\,dx}+\sqrt{\int\limits_a^b (g(x))^2\,dx}$. **3.106.** а) $\sqrt{6}$; б) 8, $\frac{4}{\sqrt{21}}$. **3.107.** а) $\sqrt{n}$; б) $3n$; в) $\frac{n(n+1)}{2}$, $\arccos\sqrt{\frac{3(n+1)}{2(2n+1)}}$; г) 0, если $a>0$; π, если $a<0$; д) $\left|\sum\limits_{i=1}^n x_iy_i\right| \leqslant \sqrt{\sum\limits_{i=1}^n x_i^2}\cdot\sqrt{\sum\limits_{i=1}^n y_i^2}$; е) $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^n (x_i+y_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum\limits_{i=1}^n x_i^2}+\sqrt{\sum\limits_{i=1}^n y_i^2}$. **3.108.** а) $|P_0(x)| = \sqrt{2}$, $|P_1(x)| = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $|P_2(x)| = \sqrt{\frac{2}{5}}$, $|P_3(x)| = \sqrt{\frac{2}{7}}$, $|P_4(x)| = \sqrt{\frac{2}{9}}$; б) $(P_1(x), P_2(x)) = (P_1(x), P_3(x)) = 0$. **3.109.** а) Да; б) нет; в) да; г) нет. **3.110.** а) Нет; б) да; в) нет; г) да. **3.111.** $\vec{x}_1$, $\vec{x}_3$, $\vec{x}_4$, $\vec{x}_6$. **3.112.** а) $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\ \ \frac{1}{\sqrt{3}}\ \ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ или $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\ \ -\frac{1}{\sqrt{3}}\ \ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; б) $\left(0\ \ \frac{2}{\sqrt{13}}\ \ 0\ \ \frac{3}{\sqrt{13}}\right)$ или $\left(0\ \ -\frac{2}{\sqrt{13}}\ \ 0\ \ -\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$; в) $\left(\frac{3}{5}\ \ 0\ \ \frac{4}{5}\right)$ или $\left(-\frac{3}{5}\ \ 0\ \ -\frac{4}{5}\right)$; г) $\left(\frac{12}{13}\ \ 0\ \ 0\ \ \frac{5}{13}\right)$ или $\left(-\frac{12}{13}\ \ 0\ \ 0\ \ -\frac{5}{13}\right)$. **3.113.** а) Является; б) не является;

в) является, г) является. **3.114.** а) $x\sqrt{\frac{3}{2}}$; б) $x^2\sqrt{\frac{5}{2}}$; в) $\frac{\sqrt{2}\sin x}{\sqrt{2-\sin 2}}$; г) $\frac{P_0(x)}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$. **3.115.** а) $\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\ \ \frac{2}{\sqrt{14}}\ \ \frac{3}{\sqrt{14}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{35}}\ \ \frac{5}{\sqrt{35}}\ \ -\frac{3}{\sqrt{35}}\right)$, $\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\ \ 0\ \ \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$; б) $(1\ \ 0\ \ 0)$, $\left(0\ \ \frac{1}{\sqrt{2}}\ \ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(0\ \ \frac{1}{\sqrt{2}}\ \ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. **3.116.** а) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\ \ \frac{1}{\sqrt{2}}\ \ 0\ \ 0\right)$, $\left(0\ \ 0\ \ \frac{1}{\sqrt{2}}\ \ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\ \ -\frac{1}{\sqrt{2}}\ \ 0\ \ 0\right)$, $\left(0\ \ 0\ \ \frac{1}{\sqrt{2}}\ \ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; б) $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\ \ 0\ \ \frac{1}{\sqrt{6}}\ \ \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\ \ 0\ \ -\frac{\sqrt{3}}{3}\ \ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\ \ 0\ \ \frac{1}{\sqrt{2}}\ \ 0\right)$, $(0\ \ 1\ \ 0\ \ 0)$. **3.117.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x\sqrt{\frac{3}{2}}$. **3.118.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x\sqrt{\frac{3}{2}}$, $\frac{1}{4}(3x^2-1)\sqrt{10}$. **3.119.** Можно дополнить векторами $(-5\ \ -2\ \ 1\ \ 1)$, $(5\ \ 2\ \ 30\ \ -1)$. **3.120.** Можно дополнить векторами $(-3\ 2\ 2\ 2)$, $(-2\ -8\ \ 20\ \ -15)$. **3.121.** Можно дополннть векторами $(0\ \ 1\ \ 1\ \ 0)$, $(0\ -1\ \ 1\ \ -2)$. **3.122.** а) $(\vec{x}, \vec{y})=-90$, $|\vec{x}|=2\sqrt{26}$, $|\vec{y}|=\sqrt{105}$; б) $(\vec{x}, \vec{y})=-10$, $|\vec{x}|=\sqrt{74}$, $|\vec{y}|=\sqrt{10}$; в) $(\vec{x}, \vec{y})=12$, $|\vec{x}|=2\sqrt{5}$, $|\vec{y}|=\sqrt{61}$. **3.123.** а) $(\vec{x}, \vec{y})=-4$, $|\vec{x}|=\sqrt{6}$, $|\vec{y}|=\sqrt{15}$; б) $(\vec{x}, \vec{y})=6$, $|\vec{x}|=\sqrt{22}$, $|\vec{y}|=\sqrt{5}$; в) $(\vec{x}, \vec{y})=7$, $|\vec{x}|=\sqrt{51}$, $|\vec{y}|=\sqrt{6}$. **3.124.** а) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{10}}{6}\right)$; б) $\frac{\pi}{2}$; в) $\arccos\frac{69}{10\sqrt{51}}$; г) $\frac{\pi}{2}$. **3.125.** а) $\arccos\left(-\frac{6}{\sqrt{238}}\right)$; б) $\arccos\sqrt{\frac{5}{42}}$; в) $\arccos\sqrt{\frac{6}{13}}$.

Глава 4

4.1. Да. **4.2.** Нет. **4.3.** Нет. **4.4.** Да. **4.5.** Нет. **4.6.** Да. **4.7.** Да. **4.8.** Нет. **4.9.** Да. **4.10.** Да. **4.11.** Да. **4.12.** а) Да; б) да. **4.13.** Да. **4.14.** Да. **4.15.** а) Да; б) да; в) да; г) нет. **4.16.** $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$; **4.17.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$. **4.18.** а) $\begin{bmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 12 & 16 & 20 \\ 15 & 20 & 25 \end{bmatrix}$;

б) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. **4.19.** а) $\begin{bmatrix} 8 & -18 & -2 \\ -4 & 9 & 1 \\ -4 & 9 & 1 \end{bmatrix}$;

б) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 27 & 9 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 8 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. **4.20.** а) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$;

б) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. **4.21.** а) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

б) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. **4.22.** $\begin{bmatrix} a_{11}a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}a_{n2} \ldots a_{nn} \end{bmatrix}$.

4.23. kE, E, O, где E и O — соответственно единичная и нулевая матрицы порядка n. **4.24.** а) $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

4.25. а) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} -1 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$;

г) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$; д) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. **4.26.** $\vec{y}\,(2,3)$.

4.27. $\vec{y}\,(-4,\ 7,\ 7)$. **4.28.** $\vec{y}\,(1,\ 3,\ 4)$. **4.29.** $\vec{y}\,(2,\ 1,\ -1, 1)$. **4.30.** $\vec{y}\,(-3,\ 3)$. **4.31.** $\vec{y}\,(3,0)$. **4.32.** $\vec{y}\,(-3,\ 19)$. **4.33.** $\vec{y}\,(2, 4, -2,\ 0,\ 6)$. **4.34.** $(-2,\ 9)$. **4.35.** $(-10,\ -5,\ -5)$. **4.36.** $(7,\ -3,\ 16)$. **4.37.** $(1,\ 8,\ 7,\ 4)$. **4.38.** $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$. **4.39.** $\begin{bmatrix} -3 & 14 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$.

4.40. $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -6 & -8 \end{bmatrix}$. **4.41.** $\begin{bmatrix} -85 & -59 & 18 \\ 121 & 84 & -25 \\ -13 & -9 & 3 \end{bmatrix}$. **4.42.** $\begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 & 3 \\ -3 & -2 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

4.43. $\begin{bmatrix} -2 & 11 & 7 \\ -4 & 14 & 8 \\ 5 & -15 & -8 \end{bmatrix}$. **4.44.** $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. **4.45.** $\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$.

4.46. $\begin{bmatrix} -1 & 18 & -3 \\ -1 & 8 & 0 \\ -2 & 10 & 2 \end{bmatrix}$. **4.47.** $\begin{bmatrix} 3 & -10 & -8 \\ -1 & 8 & 4 \\ 2 & -13 & -7 \end{bmatrix}$.

4.48. $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$. **4.49.** а) $\begin{bmatrix} \frac{13}{29} & -\frac{28}{29} \\ -\frac{24}{29} & -\frac{13}{29} \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} -\frac{13}{29} & \frac{28}{29} \\ \frac{24}{29} & \frac{13}{29} \end{bmatrix}$;

в) $\begin{bmatrix} \frac{21}{29} & -\frac{14}{29} \\ -\frac{12}{29} & \frac{8}{29} \end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix} \frac{8}{29} & \frac{14}{29} \\ \frac{12}{29} & \frac{21}{29} \end{bmatrix}$. **4.50.** а) $\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$;

б) $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

4.51. а) $\lambda^2-1=0,\ \lambda_1=-1,\ \lambda_2=1$; б) $\lambda^2-\lambda=0,\ \lambda_1=0,\ \lambda_2=1$; в) $\lambda^2-\lambda=0,\ \lambda_1=0,\ \lambda_2=1$. **4.52.** а) $(\lambda-k)^3=0,\ \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=k$; б) $\lambda(\lambda-1)^2=0,\ \lambda_1=0,\ \lambda_2=\lambda_3=1$; в) $\lambda(\lambda-1)^2=0,\ \lambda_1=0,$ $\lambda_2=\lambda_3=1$; г) $(\lambda+1)(\lambda-1)^2=0,\ \lambda_1=-1,\ \lambda_2=\lambda_3=1$. **4.53.** а) $(\lambda+6)(\lambda-2)(\lambda-3)=0,\ \lambda_1=-6,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=3$; б) $(\lambda+1)(\lambda-5)(\lambda^2-9\lambda-2)=0,\ \lambda_1=-1,\ \lambda_2=5,\ \lambda_{3,4}=$ $=\frac{9\pm\sqrt{89}}{2}$; в) $\lambda^3-6\lambda^2+12\lambda=0,\ \lambda_1=0,\ \lambda_{2,3}=3\pm i\sqrt{3}$.

4.54. а) $\begin{bmatrix} 6 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 13 & -1 & 9 \\ 5 & 2 & 4 \\ 0 & 13 & 12 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 3 & -4 & -6 \\ 6 & 1 & -5 \\ 7 & -4 & -8 \end{bmatrix}$;

г) $\begin{bmatrix} 11 & -10 & -12 \\ 16 & 3 & -11 \\ 17 & -6 & -16 \end{bmatrix}$. **4.55.** а) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 10 & 13 \\ 5 & 14 \end{bmatrix}$; б) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 13 \\ -4 & 23 \end{bmatrix}$;

в) $\begin{bmatrix} 5 & 12 \\ -10 & 6 \end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix} 1 & 23 \\ -9 & 18 \end{bmatrix}$. **4.56.** а) $\begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 16 & -6 & 7 \\ 8 & -2 & 3 \end{bmatrix}$;

б) $\begin{bmatrix} -2 & -4 & 4 \\ 4 & 12 & -8 \\ 8 & 17 & -7 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -6 \\ -12 & 10 & -7 \\ 4 & 2 & -7 \end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix} -2 & -13 & 4 \\ 4 & 9 & -2 \\ 5 & 11 & -7 \end{bmatrix}$.

4.57. а) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ -\sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$;

г) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$; д) $\begin{bmatrix} -\cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$; е) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$; ж) $\begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}$.

4.58. а) $\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & -k \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & -k \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$;

г) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$; д) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$; е) $\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$; ж) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & -k \end{bmatrix}$;

4.59. а) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$. **4.60.** а) $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$;

б) $\begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$; в) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$; г) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 7 & -10 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$. **4.61.** а) $\begin{bmatrix} -3 & -1 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \\ 5 & 13 & -2 \end{bmatrix}$;

б) $\begin{bmatrix} -4 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 8 \\ -2 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix} 4 & -4 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

4.62. а) Любой ненулевой вектор, коллинеарный оси Ox, с $\lambda=1$ и любой ненулевой вектор, коллинеарный оси Oy, с $\lambda=-1$; б) любой ненулевой вектор, коллинеарный оси Ox, с $\lambda=-1$ и любой ненулевой вектор, коллинеарный оси Oy, с $\lambda=1$; в) любой ненулевой вектор с $\lambda=k$; г) любой ненулевой вектор, коллинеарный оси Ox, с $\lambda=1$ и любой ненулевой вектор, коллинеарный оси Oy, с $\lambda=0$; д) любой ненулевой вектор, коллинеарный оси Ox, с $\lambda=0$ и любой ненулевой вектор, коллинеарный оси Oy, с $\lambda=1$; е) любой ненулевой вектор при $\varphi=\pi n$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), если n — четное, то $\lambda=1$, если n — нечетное, то $\lambda=-1$, при $\varphi\neq\pi n$ собственных векторов нет. **4.63.** а) Любой ненулевой вектор, параллельный плоскости Oxy, с $\lambda=1$ и любой ненулевой вектор, перпендикулярный плоскости Oxy, с $\lambda=-1$; б) любой ненулевой вектор, параллельный плоскости Oyz, с $\lambda=1$ и любой ненулевой вектор, перпендикулярный плоскости Oyz, с $\lambda=-1$; в) любой ненулевой вектор, параллельный плоскости Oxy, с $\lambda=1$ и любой ненулевой вектор, перпендикулярный плоскости Oxy, с $\lambda=0$; г) любой ненулевой вектор, коллинеарный оси Ox, с $\lambda=1$ и любой ненулевой вектор, перпендикулярный оси Ox, с $\lambda=0$. **4.64.** $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$. **4.65.** $\vec{x}_1$, $\vec{x}_3$. **4.66.** $\vec{x}_3$. **4.67.** $\vec{x}_2$. **4.69.** Является, если $\lambda_1=\lambda_2$. **4.70.** $\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}s$, $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}t$, где s, t — любые числа, отличные от нуля. **4.71.** $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}s$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}t$, где s, t — любые числа, отличные от нуля. **4.72.** $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}c$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}t$, $\begin{bmatrix} 6 \\ -7 \\ 5 \end{bmatrix}s$, где c, t, s — любые числа, отличные от нуля. **4.73.** $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}c$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}t$, где c, t — любые числа, отличные от нуля. **4.74.** $\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}c$, $\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}t$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}s$, где c, t, s — любые числа, отличные от нуля. **4.75.** $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}t$,

$\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} s$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} c$, где t, s, c — любые числа, отличные от нуля.
4.76. $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} c$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} t$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s$, где c, t, s — произвольные числа, отличные от нуля. **4.77.** $\begin{bmatrix} 40 \\ -1 \\ -8 \\ 9 \end{bmatrix} c$, $\begin{bmatrix} 0 \\ t \\ -2(t+k) \\ k \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} s$, где c, t, k, s — любые числа такие, что $c \neq 0$, $s \neq 0$, $t^2+k^2 \neq 0$.
4.78. $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} c$, $\begin{bmatrix} t \\ 2t \\ s \\ 0 \end{bmatrix}$, где c, t, s — любые числа такие, что $c \neq 0$. $t^2+s^2 \neq 0$. **4.79.** $\begin{bmatrix} t+s \\ t \\ s \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} c$, где c, t, s — любые числа такие, что $c \neq 0$, $t^2+s^2 \neq 0$. **4.80.** Приводится $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ с точностью до порядка диагональных элементов. **4.81.** Не приводится. **4.82.** Не приводится. **4.83.** Приводится $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ с точностью до порядка диагональных элементов. **4.84.** Приводится

$$\begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

с точностью до порядка диагональных элементов. **4.85.** Не приводится. **4.86.** Не приводится. **4.87.** Приводится

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{-1-\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{-1+\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

с точностью до порядка диагональных элементов. **4.88.** Не приводится. **4.89.** Приводится

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

с точностью до порядка диагональных элементов. **4.90.** Приводится

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

с точностью до порядка диагональных элементов. **4.91.** Не приводится. **4.92.** Приводится

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{9-\sqrt{89}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{9+\sqrt{89}}{2} \end{bmatrix}$$

с точностью до порядка диагональных элементов. **4.93.** Приводится

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

с точностью до порядка диагональных элементов. **4.94.** Не приводится. **4.95.** Приводится

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

с точностью до порядка диагональных элементов. **4.96.** $\vec{e}_1' = (-\vec{e}_1 + \vec{e}_2)\,t$, $\vec{e}_2' = (\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2)\,s$, где t, s — любые вещественные числа, отличные от нуля. **4.97.** $\vec{e}_1' = (\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2)\,t$, $\vec{e}_2' = (\vec{e}_1 + \vec{e}_2)\,s$, где t, s — любые вещественные числа, отличные от нуля. **4.98.** $\vec{e}_1' = (\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3)\,t$, $\vec{e}_2' = (2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3)\,s$, $\vec{e}_3' = 2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + {}$ $+\vec{e}_3)\,k$, где t, s, k — любые вещественные числа, отличные от нуля. **4.99.** $(\vec{e}_1' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)\,k$, $\vec{e}_2' = s_1\vec{e}_1 + t_1\vec{e}_2 + 3\,(t_1 - s_1)\,\vec{e}_3$, $\vec{e}_3' = s_2\vec{e}_1 + {}$ $+ t_2\vec{e}_2 + 3\,(t_2 - s_2)\,\vec{e}_3$, где s_1, s_2, t_1, t_2, k — любые вещественные числа, причем

$$\begin{vmatrix} k & k & k \\ s_1 & t_1 & 3\,(t_1 - s_1) \\ s_2 & t_2 & 3\,(t_2 - s_2) \end{vmatrix} \neq 0.$$

4.100. $\vec{e}_1' = (6s_1 + 4t_1)\,\vec{e}_1 + s_1\vec{e}_2 + t_1\vec{e}_3$, $\vec{e}_2' = (6s_2 + 4t_2)\,\vec{e}_1 + s_2\vec{e}_2 + t_2\vec{e}_3$,

$\vec{e}'_3 = 3k\vec{e}_1 + k\vec{e}_3$, где s_1, s_2, t_1, t_2, k — любые вещественные числа, причем

$$\begin{vmatrix} 6s_1 + 4t_1 & s_1 & t_1 \\ 6s_2 + 4t_2 & s_2 & t_2 \\ 3k & 0 & k \end{vmatrix} \neq 0.$$

4.101. $\vec{e}'_1 = (\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3)\,k$, $\vec{e}'_2 = (2t_1 + 3s_1)\vec{e}_1 - 2t_1\vec{e}_2 - 2s_1\vec{e}_3$, $\vec{e}'_3 = (2t_2 + 3s_2)\vec{e}_1 - 2t_2\vec{e}_2 - 2s_2\vec{e}_3$, где s_1, s_2, t_1, t_2, k — любые вещественные числа, причем

$$\begin{vmatrix} k & k & -k \\ 2t_1 + 3s_1 & -2t_1 & -2s_1 \\ 2t_2 + 3s_2 & -2t_2 & -2s_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

4.102. $\vec{e}'_1 = -t_1\vec{e}_1 + t_1\vec{e}_2 + s_1\vec{e}_3 - s_1\vec{e}_4$, $\vec{e}'_2 = -t_2\vec{e}_1 + t_2\vec{e}_2 + s_2\vec{e}_3 - s_2\vec{e}_4$, $\vec{e}'_3 = k_1\vec{e}_1 + k_1\vec{e}_2 + p_1\vec{e}_3 + p_1\vec{e}_4$, $\vec{e}'_4 = k_2\vec{e}_1 + k_2\vec{e}_2 + p_2\vec{e}_3 + p_2\vec{e}_4$, где t_1, t_2, s_1 s_2, k_1, p_1, k_2, p_2 — любые вещественные числа, причем

$$\begin{vmatrix} -t_1 & t_1 & s_1 & -s_1 \\ -t_2 & t_2 & s_2 & -s_2 \\ k_1 & k_1 & p_1 & p_1 \\ k_2 & k_2 & p_2 & p_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

4.103. $\vec{e}'_1 = (24\vec{e}_1 - 12\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + 9\vec{e}_4)\,s$, $\vec{e}'_2 = (-2\vec{e}_2 + 9\vec{e}_3 + \vec{e}_4)\,t$, $\vec{e}'_3 = k\vec{e}_3$, $\vec{e}'_4 = (\vec{e}_3 + \vec{e}_4)\,p$, где s, t, k, p — любые вещественные числа, отличные от нуля. **4.104.** $\vec{e}'_1 = (2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3)\,s$, $\vec{e}'_2 = (2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3)\,t$, $\vec{e}'_3 = (\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3)\,k$, где k, s, t — любые вещественные числа, причем

$$\begin{vmatrix} 2s & 2s & s \\ 2t & -t & -2t \\ k & -2k & 2k \end{vmatrix} \neq 0.$$

4.105. $\vec{e}'_1 = k\vec{e}_1 - k\vec{e}_2$, $\vec{e}'_2 = t_1\vec{e}_1 + t_1\vec{e}_2 + s_1\vec{e}_3$, $\vec{e}'_3 = t_2\vec{e}_1 + t_2\vec{e}_2 + s_2\vec{e}_3$, где k, t_1, t_2, s_1, s_2 — любые вещественные числа, причем

$$\begin{vmatrix} k & -k & 0 \\ t_1 & t_1 & s_1 \\ t_2 & t_2 & s_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

4.106. $\vec{e}'_1 = s_1\vec{e}_1 + t_1\vec{e}_2 + 2k_1\vec{e}_3 + k_1\vec{e}_4$, $\vec{e}'_2 = s_2\vec{e}_1 + t_2\vec{e}_2 + 2k_2\vec{e}_3 + k_2\vec{e}_4$, $\vec{e}'_3 = s_3\vec{e}_1 + t_3\vec{e}_2 + 2k_3\vec{e}_3 + k_3\vec{e}_4$, $\vec{e}'_4 = (\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4)\,p$, где s_1, s_2, t_1, t_2, t_3, k_1, k_2, k_3, p любые вещественные числа, причем

$$\begin{vmatrix} s_1 & t_1 & 2k_1 & k_1 \\ s_2 & t_2 & 2k_2 & k_2 \\ s_3 & t_3 & 2k_3 & k_3 \\ p & p & p & p \end{vmatrix} \neq 0.$$

4.107. $\vec{e}_1{}' = t_1\vec{e}_1 + s_1\vec{e}_2 - (t_1 + s_1)\vec{e}_3$, $\vec{e}_2{}' = t_2\vec{e}_1 + s_2\vec{e}_2 - (t_2 + s_2)\vec{e}_3$, $\vec{e}_3{}' = k_1\vec{e}_2 + p_1\vec{e}_3 - (3k_1 + 2p_1)\vec{e}_4$, $\vec{e}_4{}' = k_2\vec{e}_2 + p_2\vec{e}_3 - (3k_1 + 2p_2)\vec{e}_4$, где t_1, s_1, t_2, s_2, k_1, k_2, p_1, p_2 — любые вещественные числа, причем

$$\begin{vmatrix} t_1 & s_1 & -(t_1+s_1) & 0 \\ t_2 & s_2 & -(t_2+s_2) & 0 \\ 0 & k_1 & p_1 & -(3k_1+p_1) \\ 0 & k_2 & p_2 & -(3k_1+2p_1) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Глава 5

5.1. $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$. **5.2.** $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 5 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$.

5.3. $\begin{bmatrix} 4 & -\frac{1}{2} & 0 & 4 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -\frac{5}{2} & 0 & -2 \end{bmatrix}$. **5.4.** $r=2$. **5.5.** $r=2$. **5.6.** $r=2$.

5.7. $[x_1x_2]\begin{bmatrix} 3 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$. **5.8.** $[x_1x_2x_3]\begin{bmatrix} 1 & -1 & \frac{5}{2} \\ -1 & 0 & 0 \\ \frac{5}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}\times$ $\times\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$. **5.9.** $[x_1x_2x_3]\begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 3 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$. **5.10.** $\begin{bmatrix} 1 & \frac{7}{2} \\ \frac{7}{2} & 5 \end{bmatrix}$.

5.11. $\begin{bmatrix} -1 & 1 & \frac{5}{2} \\ 1 & 4 & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$. **5.12.** $L_1(y_1, y_2) = 19y_1^2 - 2y_2^2 - 10y_1y_2$.

5.13. $L_1(y_1, y_2, y_3) = 22y_1^2 + 12y_2^2 + 3y_3^2 + 11y_1y_2 + 17y_1y_3 + 8y_2y_3$. **5.14.** $L_1(y_1, y_2, y_3) = 7y_2^2 + 9y_3^2 - 3y_1y_2 + 5y_1y_3$. **5.15.** Положительно-определенная. **5.16.** Отрицательно-определенная. **5.17.** Не является знакоопределенной. **5.18.** Не является знакоопределенной. **5.19.** Ни при каком λ не является отрицательно-определенной. При $\lambda > 4$ — положительно-определенная. **5.20.** Ни при каком λ не является знакоопределенной. **5.21.** Ни при каком λ не является знакоопределенной.

5.22. $L_1(y_1, y_2) = 3y_1^2 - y_2^2$; $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_2$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} y_2$. **5.23.** $L_1(y_1, y_2) = 9y_1^2 - 4y_2^2$; $x_1 = \frac{3}{\sqrt{13}} y_1 - \frac{2}{\sqrt{13}} y_2$, $x_2 = \frac{2}{\sqrt{13}} y_1 + \frac{3}{\sqrt{13}} y_2$. **5.24.** $L_1(y_1, y_2) = 12y_1^2 - 2y_2^2$; $x_1 = \frac{3}{\sqrt{14}} y_1 + \sqrt{\frac{5}{14}} y_2$, $x_2 = \sqrt{\frac{5}{14}} y_1 - \frac{3}{\sqrt{14}} y_2$. **5.25.** $L_1(y_1, y_2, y_3) = 2y_1^2 + 5y_2^2 - y_3^2$; $x_1 = y_1$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} y_2 + \sqrt{\frac{2}{3}} y_3$, $x_3 = -\sqrt{\frac{2}{3}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} y_3$. **5.26.** $L_1(y_1, y_2, y_3) = 9y_1^2 + 14y_2^2$; $x_1 = -\frac{5}{\sqrt{70}} y_2 + \frac{3}{\sqrt{14}} y_3$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} y_1 + \frac{6}{\sqrt{70}} y_2 + \frac{2}{\sqrt{14}} y_3$, $x_3 = -\frac{2}{\sqrt{5}} y_1 + \frac{3}{\sqrt{70}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{14}} y_3$. **5.27.** $L_1(y_1, y_2, y_3) = 14y_1^2$; $x_1 = \frac{2}{\sqrt{14}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{5}} y_2 - \frac{6}{\sqrt{70}} y_3$, $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{14}} y_1 + \frac{2}{\sqrt{5}} y_2 + \frac{3}{\sqrt{70}} y_3$, $x_3 = \frac{3}{\sqrt{14}} y_1 + \frac{5}{\sqrt{70}} y_3$. **5.28.** $L_1(y_1, y_2, y_3) = 6y_1^2 + 3y_2^2$; $x_1 = \frac{2}{\sqrt{6}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{3}} y_2$, $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{6}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{3}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_3$, $x_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_3$. **5.29.** $L_1(y_1, y_2, y_3) = 4y_1^2 + 4y_2^2 - 2y_3^2$; $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{6}} y_3$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{6}} y_3$, $x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} y_1 - \frac{2}{\sqrt{6}} y_3$.

ОГЛАВЛЕНИЕ