**ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР**
**Серия математическая**
25 (1961), 21 — 86

В. И. АРНОЛЬД

# МАЛЫЕ ЗНАМЕНАТЕЛИ. I

## ОБ ОТОБРАЖЕНИЯХ ОКРУЖНОСТИ НА СЕБЯ

В первой части работы показано, что мало отличающееся от поворота аналитическое преобразование окружности, число вращения которого иррационально и удовлетворяет некоторым арифметическим требованиям, может быть превращено в поворот аналитической заменой переменной. Во второй части рассмотрено пространство отображений окружности на себя и место, занимаемое в этом пространстве отображениями разных типов. Указаны приложения к исследованию траекторий на торе и к задаче Дирихле для уравнения струны.

### Введение

Непрерывные отображения окружности на себя изучались Пуанкаре м (¹), гл. XV, стр. 165—191] в связи с качественным исследованием аекторий на торе. К таким отображениям приводит также задача Диихле для уравнения струны, но топологическое исследование оказыется здесь недостаточным [см. (⁵)]. В первой части настоящей работы лагается попытка аналитического уточнения завершающей теорию анкаре теоремы Данжуа (²).

Пусть $F(z)$ — действительная на действительной оси и аналитическая е окрестности периодическая функция $F(z+2\pi) = F(z)$, причем $z) \neq -1$ при $\operatorname{Im} z = 0$. Тогда отображению полосы комплексной плоскости $z \to Az \equiv z + F(z)$ соответствует сохраняющий ориентацию гомеофизм $B$ окружности точек $w(z) = e^{iz}$:

$$w = w(z) \to w(Az) \equiv Bw.$$

том смысле мы говорим, что $A$ есть аналитическое отображение жности на себя.

Пусть число вращения * $A$ равно $2\pi\mu$. Из теоремы Данжуа следует, при иррациональном $\mu$ существует непрерывная обратимая действиьная функция $\varphi(z)$ действительного $z$, периодическая в том смысле,

$$\varphi(z+2\pi) = \varphi(z) + 2\pi,$$

ая, что

$$\varphi(Az) = \varphi(z) + 2\pi\mu. \tag{1}$$

---

* Предполагается, что читатель знаком с результатами работ (¹) (стр. 165—191 —335) и (²), вошедшими в учебники (³) (стр. 65—76) и (⁴) (стр. 442—456).

Мы будем говорить, что $\varphi$ — новый параметр и что в параметре $\varphi$ преобразование $A$ превращается в поворот на угол $2\pi\mu$. Такая функция может быть только одна (с точностью до аддитивной постоянной).

В § 1 показано, что при некоторых иррациональных $\mu$, несмотря да на аналитичность $F(z)$, функция $\varphi$ в (1) может оказаться не абсолют непрерывной. Идея этого примера состоит в следующем. Так как при поворотах окружности длина сохраняется, то приведение преобразовани к повороту надлежащим выбором параметра есть отыскание инвариантн меры преобразования. В случае рационального числа вращения инвариантная мера сосредоточена, как правило, в отдельных точках — точк циклов преобразования. Если же число вращения иррационально, но чре вычайно хорошо аппроксимируется рациональными, то инвариантная ме сохраняет сингулярный характер, хотя и распределена по окружност всюду плотно.

Представляется правдоподобной следующая гипотеза:

*Существует такое множество* $M \subseteq [0, 1]$ *меры* 1, *что для каж* $\mu \in M$ *решения уравнения* (1) *при любом аналитическом преобразовани с числом вращения* $2\pi\mu$ *являются аналитическими.*

Пока это доказано только для достаточно близких к повороту угол $2\pi\mu$ аналитических преобразований (§ 4, теорема 2)*. Доказательст заключается в построении решения уравнения (1) путем решения ура нений вида

$$g(z + 2\pi\mu) - g(z) = f(z). \qquad ($$

При решении этого уравнения с помощью ряда Фурье появляются мал знаменатели, затрудняющие сходимость. Вычисление последовательн поправок, приспосабливающих решение уравнения (2) к уравнению ( производится методом типа метода Ньютона, и быстрая сходимость это метода обеспечивает возможность осуществить не только все приближен теории возмущений, но и предельный переход.

Метод Ньютона был применен с такой целью А. Н. Колмогоровым ( Теорема 2 настоящей работы есть своего рода дискретный аналог е теоремы о сохранении условно периодических движений при мал изменении функции Гамильтона. В отличие от работы ($^6$), мы не распо гаем аналитическим интегральным инвариантом, а ищем его; кроме то мы доказываем (в теореме 2) аналитичность зависимости от малого па метра $\varepsilon$, откуда следует сходимость обычных в теории возмущений ря по степеням $\varepsilon$.

---

* Примечание при корректуре. Во время печатания насто работы автору стали известны труды A. Finzi ($^{38}$), ($^{39}$). Из результатов работы ($^{38}$) текает, что если число вращения достаточно гладкого отображения окружности на удовлетворяет известным арифметическим требованиям, то преобразование мо превратить в поворот *непрерывно дифференцируемой* заменой переменной. Таким об зом, метод A. Finzi не требует, чтобы преобразование было близко к повороту: отчасти подтверждает высказанную выше гипотезу. A. Finzi указывает, однако, что не видит возможности распространить свой метод на случай, когда требуется бол гладкость замены переменной. Настоящая работа содержит частичный ответ на которые из поставленных им вопросов; частичный ответ на некоторые вопросы, п ленные здесь, читатель найдет в упомянутых статьях A. Finzi.

Прямое доказательство сходимости этих рядов не удается, в связи чем А. Н. Колмогоров высказал даже * (до изучения работы К. Л. Зигеля (7)) гипотезу об их расходимости.

Другая гипотеза А. Н. Колмогорова, высказанная им в докладе (8), оказалась верной: вопросы, в которых участвуют малые знаменатели, связаны с моногенными функциями Бореля (9). Для нашего случая это становлено в §§ 7, 8 и используется в § 11.

Некоторые важные задачи с малыми знаменателями решены К. Л. Зигелем [см. (7), (33), (34), (35)]. Непосредственное отношение к отображениям кружности имеет проблема центра для уравнения Шредера: *можно ли аналитической заменой переменной* $\varphi(z) = z + b_2z^2 + \ldots$ *превратить поворот на угол* $2\pi\mu$ *отображение окрестности нуля комплексной плоскости, определяемое аналитической функцией* $f(z) = e^{2\pi i\mu} z + a_2z^2 + \ldots$

Результат Зигеля (7) аналогичен нашей теореме 2 и может быть получен тем же способом. Проблема центра есть особый случай задачи об отображении окружности, радиус которой, в особом случае, равен нулю. По равнению с общим случаем здесь положение проще, так как решение ряд Шредера) формально выписывается сразу. Применение метода Ньютона тоже дает ряд Шредера; в отличие от теоремы 2, каждый коэффициент решения будет точно определен после конечного числа приближений.

Во второй части работы приводится классификация отображений окружности на себя и обсуждается вопрос о типичности различных случаев. В § 9 вводится функция $\mu(T)$ (число вращения) на пространстве отображений окружности. Далее изучаются множества рационального 10) и иррационального (§ 11) уровня $\mu$ с точки зрения их устройства оремы 6 и 7) и массивности (теоремы 5 и 8). Топологически подавляющим оказывается случай грубых в смысле А. А. Андронова и Л. С. Понтрягина (10) отображений с нормальными циклами и рациональным числом ащения; они образуют открытое всюду плотное множество**. С точки рения меры в конечномерных подпространствах типичным является также и эргодический случай. В § 12 рассмотрено двумерное подпространство ображений $x \to x + a + \varepsilon \cos x$.

В §§ 13 и 14 предыдущие результаты применяются к качественному ледованию траекторий на торе и к задаче Дирихле для уравнения уны.

Выражаю благодарность А. Н. Колмогорову за ценные советы и поль, оказанные им автору.

## ЧАСТЬ I

## ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЯХ ОКРУЖНОСТИ НА СЕБЯ

Основное содержание первой части работы заключено в §§ 4—6 (теома 2). Для понимания доказательства теоремы 2 (§§ 5, 6) необходимы . 2.1, 2.3 § 2 и п. 3.3 § 3. К леммам о неявной функции и о конечном ращении, содержащимся в § 3, можно обращаться по мере ссылок.

---

[*] В докладе Московскому математическому обществу 13.I.1959.

[**] Примечание при корректуре. Этот результат получен также . Плиссом в статье (13), опубликованной во время печатания настоящей работы.

Каждый из §§ 1, 2, 7 можно читать независимо от всего остального. В § 8 доказывается обобщение теоремы 2 (теорема 3), используемое во второй части работы.

## § 1. Случай, когда новый параметр не есть абсолютно непрерывная функция старого параметра

1.1. В этом параграфе строятся аналитическое преобразование $A$ окружности $C$, подмножества окружности $G_n$ $(n=1, 2, \dots)$ и натуральные числа $N_n$ $(n=1, 2, \dots)$ такие, что:

1. $\operatorname{mes} G_n \to 0$ при $n \to \infty$.
2. $A^{N_n}(C \setminus G_n) \subset G_n$.
3. Число вращения $\mu$ преобразования $A$ иррационально.

Это преобразование $A$ не может быть превращено в поворот абсолютно непрерывной заменой переменной. Действительно, пусть $\varphi$—непрерывный параметр, в котором преобразование $A$ превращается в поворот на угол $2\pi\mu$ ($\varphi$ существует по теореме Данжуа). Степени $A$ также превращаются в повороты. Пусть $G \subset C$. Мера множества $\varphi(G)$ значений $\varphi(x)$, $x \in G$ совпадает с мерой $\varphi(A^N G)$, так как эти множества совмещаются при повороте. Поэтому из условия 2 вытекает:

$$2\pi - \operatorname{mes} \varphi(G_n) \leqslant \operatorname{mes} \varphi(G_n)$$

и

$$\operatorname{mes} \varphi(G_n) \geqslant \pi.$$

Ввиду условия 1, $\varphi$ не есть абсолютно непрерывная функция на $C$.

1.2. При построении используются следующие леммы.

ЛЕММА $\alpha$. *Пусть $A$ — полуустойчивое вперед * аналитическое в окрестности действительной оси преобразование окружности, и пусть точки $z_0$, $z_k = A(z_{k-1})$ $(0 < k < n)$ образуют цикл, т. е. $A(z_{n-1}) = z_0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ в указанной окрестности действительной оси существует отличающееся от $A$ меньше чем на $\varepsilon$ преобразование $A'$, имеющее ровно один цикл, а именно $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$.*

Доказательство. Построим аналитическую в рассматриваемой полосе поправку $\Delta(z)$, обращающуюся в нуль в точках $z_0, \dots, z_{n-1}$ и положительную в остальных действительных точках.

Положим

$$A'(z) = A(z) + \varepsilon' \Delta(z);$$

при достаточно малом $\varepsilon' > 0$ $|\varepsilon' \Delta(z)| < \varepsilon$ в указанной полосе и $A'(z)$ есть преобразование окружности. Очевидно, преобразование $(A')^n$ сдвигает вперед все точки $z$ не меньше, чем преобразование $A^n$ и при этом точки $z_0, \dots, z_{n-1}$ сдвигаются на $2\pi m$, а остальные точки — больше, чем на $2\pi m$; лемма $\alpha$ доказана.

---

* Это значит, что при некоторых целых $m$, $n$ и любом действительном $z$ $A^n(z) \geqslant z + 2\pi m$, причем равенство достигается.

**Определение.** Пусть $A$ — преобразование окружности $C$, $G$ — множество на ней. Будем говорить, что преобразование $A$ обладает свойством 2 относительно $G$ и $N$, если $A^N(C \setminus G) \subset G$.

ЛЕММА β. *Преобразование $A$ с единственным циклом $z_0, \ldots, z_{n-1}$ при любом $\varepsilon > 0$ обладает свойством 2 относительно множества $G_\varepsilon$ точек $\varepsilon$-окрестности цикла и любого $N$, превосходящего некоторое $N_0(\varepsilon)$.*

**Доказательство.** Пусть $z_i < x < z_j$, где $z_i z_j$ — одна из дуг, на которые цикл делит окружность. Точки $A^{kn}(x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ лежат на дуге $z_i z_j$ и образуют монотонную последовательность (подробнее см. § 10). Отсюда следует, что в случае, если преобразование $A$ полуустойчиво вперед (случай полуустойчивости назад вполне аналогичен),

$$A^{kn}(x) \xrightarrow[k\to+\infty]{} z_j.$$

Действительно, пусть $\lambda$ — предел монотонной последовательности $A^{kn}(x)$: тогда $\lambda$ инвариантно относительно $A^n$ и принадлежит циклу, удовлетворяя неравенствам

$$z_i < \lambda \leqslant z_j.$$

Итак,

$$\lim_{k\to\infty} A^{kn+l}(x) = A^l(z_j).$$

То же верно для других интервалов, на которые цикл делит окружность.

Рассмотрим точки $x_i = z_i + \varepsilon$. По доказанному, начиная с некоторого $N_0(\varepsilon)$, все точки $A^N x_i$ лежат в $\varepsilon$-окрестности цикла. Очевидно, это $N_0$ — искомое.

ЛЕММА γ. *Пусть преобразование $A$ обладает свойством 2 относительно $G$ и $N$, и пусть $\varepsilon > 0$. Тогда существует такое $\delta > 0$, что всякое преобразование $B$, отличающееся от $A$ меньше чем на $\delta$, обладает свойством 2 относительно $N$ и $\varepsilon$-окрестности $G$.*

**Доказательство.** Лемма очевидным образом вытекает из непрерывной зависимости $A^N$ от $A$.

ЛЕММА δ. *Пусть $A$ — полуустойчивое вперед преобразование, $B(z) = A(z) + h$, $h > 0$. Тогда число вращения $\mu$ преобразования $B$ строго больше, чем число вращения $\frac{m}{n}$ преобразования $A$.*

**Доказательство.** Очевидно, $\mu \geqslant \frac{m}{n}$. При этом $B^n(z) > A^n(z)$ и поэтому $B$ не имеет цикла порядка $n$. Значит, $\mu > \frac{m}{n}$.

ЛЕММА ε (вырожденный случай теоремы Лиувилля). *Если неравенство $\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| < \frac{c}{|n|}$ при любом $c > 0$ имеет бесконечное множество несократимых решений $\frac{m}{n}$, то число $\alpha$ иррационально.*

**Доказательство.** Если $\alpha = \frac{p}{q}$, то при $n > q$

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{m}{n}\right| > \frac{\frac{1}{|q|}}{|n|},$$

как дробь $\frac{m}{n}$ несократима и, значит, $|pn - qm| \neq 0$ при $q < n$.

1.3. Преобразование $A$ строится как предел последовательности п образований $A_n$ с рациональными числами вращения. Начнем с п образования $z \to A_1(z)$; будем предполагать, что оно обладает след щими свойствами:

$1_1$. $A_1$ аналитично в полосе $|\operatorname{Im} z| < R$ и в этой полосе $|A_1(z)| < \frac{C}{2}$

$2_1$. Число вращения $A_1$ рационально: $\mu_1 = \frac{p_1}{q_1}$.

$3_{1a}$. $A_1$ полуустойчиво вперед.

$3_{1б}$. $A_1$ имеет ровно один цикл.

Существование такого $A_1$ очевидно: из всякого $A_1''$ со свойством $1_1$ п лежащим выбором $h > 0$ можно получить $A_1' = A_1'' + h$ со свойствами $2_1$ и $3_1$, а затем исправить $A_1'$ в $A_1$ согласно лемме $\alpha$. Последующ преобразования $A_n$ получаются из предыдущих с помощью процес в основании которого лежит нижеследующая

ИНДУКТИВНАЯ ЛЕММА. *Пусть* $\delta_n > 0$ *и пусть даны преобра вания* $A_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ *и* $R > 0$, $C > 0$ *такие, что*

$1_n$. *При* $|\operatorname{Im} z| < R$ $A_k$ *аналитичны и удовлетворяют неравенства*

$$|A_k(z) - A_{k-1}(z)| < \frac{C}{2^k} \qquad (A_0(z) \equiv 0).$$

$2_n$. *Числа вращений* $A_k$ *рациональны и при* $k > 1$

$$\left| \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} \right| < \frac{1}{(k-1)^2 \left(\max\limits_{l<k} q_l\right)^2}.$$

$3_n$. $A_k$ *полуустойчивы вперед и имеют по одному единственно циклу.*

*Тогда можно построить преобразование* $A_{n+1}$ *так, что последовате ность* $A_k$ $(k = 1, 2, \ldots, (n+1))$ *будет обладать свойствами* $1_{n+1}$, $2_n$ $3_{n+1}$ *и*

$4_{n+1}$. $$|A_{n+1}(z) - A_n(z)| < \delta_n \text{ при } \operatorname{Im} z = 0.$$

Доказательство. Рассмотрим преобразования $A_\lambda$: $z \to A_n(z) - \lambda > 0$. Очевидно, существует $\lambda_0 > 0$ такое, что при $\lambda < \lambda_0$

$$|A_\lambda(x) - A_n(z)| < \frac{C}{2^{n+2}} \qquad (|\operatorname{Im} z| < R),$$

$$|A_\lambda(z) - A_n(z)| < \frac{\delta_n}{2} \qquad (\operatorname{Im} z = 0)$$

и число вращения $A_\lambda$ строго больше $\frac{p_n}{q_n}$ (лемма $\delta$) и меньше

$$\frac{p_n}{q_n} + \frac{1}{n^2 \left(\max\limits_{l \leqslant n} q_j\right)^2}$$

(непрерывность числа вращения, см. § 9). Пусть число вращения есть $\mu$; выберем рациональное число $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$,

$$\frac{p_n}{q_n} < \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} < \mu,$$

и среди всех $\lambda$, для которых число вращения $A_\lambda$ есть $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$, выберем наибольшее — пусть это будет $\lambda_1$. Преобразование $A_{\lambda_1}$ обладает свойствами $1_{n+1}$, $2_{n+1}$, $4_{n+1}$ и, как легко видеть, полуустойчиво вперед. Применим к нему лемму $\alpha$; тогда мы получим преобразование $A_{n+1}$, удовлетворяющее всем требованиям индуктивной леммы.

1.4. Преобразование $A_1$ удовлетворяет условиям $1_1$, $2_1$, $3_1$ индуктивной леммы при тех же $C$, $R$. Опишем выбор $\delta_n$ при проведении индукции от $A_n$ к $A_{n+1}$. Обозначим через $G_n^*$ $\varepsilon$-окрестность единственного цикла $A_n$, где $\varepsilon > 0$ таково, что мера $G_n^*$ меньше $2^{-n-2}$. По лемме $\beta$, найдется $N_n$ такое, что $A_n$ обладает свойством 2 относительно $G_n^*$ и $N_n$. По лемме $\gamma$, существует $\delta_n^* > 0$, для которого преобразование $A$ обладает свойством 2 относительно $N_n$ и $G_n$-окрестности $G_n^*$ меры $2^{-n-1}$, если на действительной оси

$$|A(z)-A_n(z)| < \delta_n^*.$$

Выберем

$$\delta_{n+1} = \min\left(\frac{\delta_n}{2}, \frac{\delta_n^*}{2}\right)$$

(формально считаем $\delta_0 = 0$). Применяя индуктивную лемму, мы получим $A_{n+1}$.

Если преобразования $A_n$ ($n = 1, 2, \ldots$) построены описанным способом, то, ввиду свойства $1_n$, эта последовательность сходится равномерно в полосе $|\operatorname{Im} z| < R$, так что предел $A$ есть аналитическое преобразование. Очевидно,

$$|A(z)-A_n(z)| \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} |A_{k+1}(z)-A_k(z)| \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \delta_n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \leqslant \delta_n \quad (\operatorname{Im} z = 0)$$

при любом $n$ и поэтому $A$ обладает свойством 2 относительно $G_n$ и $N_n$ ($n = 1, 2, \ldots$). Из свойства $2_n$ и непрерывности числа вращения на основании леммы $\varepsilon$ заключаем, что число вращения $A$ иррационально. Действительно, при любом $n$

$$\left|\mu - \frac{p_n}{q_n}\right| \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2 (\max\limits_{l \leqslant k} q_l)^2} \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2 q_n^2} < \frac{2}{q_n^2}.$$

Таким образом, все три свойства п. 1.1 выполнены, так что $A$ есть комое преобразование.

1.5. Замечание. Рассматривая построение примера, нетрудно аметить, что преобразование $A$ с указанными свойствами можно найти в любом семействе аналитических преобразований

$$z \to A_\Delta z \equiv z + \Delta + F(z)$$

и притом в любой окрестности любого преобразования с иррациональным числом вращения, если только семейство обладает следующим свойством: среди преобразований $A_\Delta^n$ нет поворотов. Вероятно, семейство $z \to z + \Delta + \frac{1}{2}\cos z$ обладает этим свойством; в таком случае п мер может быть дан простой аналитической формулой.

## § 2. О функциональном уравнении * $g(z+2\pi\mu) - g(z) = f(z)$

2.1. Пусть $f(z)$ — функция периода $2\pi$, $\mu$ — действительное чис Требуется определить из уравнения

$$g(z+2\pi\mu) - g(z) = f(z)$$

функцию $g(z)$, имеющую период $2\pi$.

Очевидно, в случае разрешимости уравнения (1)

$$\int_0^{2\pi} f(z)\,dz = 0.$$

Далее, если $g(z)$ — решение, то $g(z)+C$ — тоже решение. Поэтому будем рассматривать только в среднем равные нулю правые части искать только в среднем равные нулю решения. В каждой функц $\varphi(z)$ на $[0, 2\pi]$ мы выделим постоянную часть

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(z)\,dz$$

и переменную

$$\tilde{\varphi}(z) = \varphi(z) - \bar{\varphi}.$$

Необходимым условием разрешимости уравнения (1) является, так образом, равенство $\bar{f} = 0$; под решением (1) в дальнейшем всегда пон мается переменная часть $g(z)$.

Если $\mu = \frac{m}{n}$, т. е. рационально, то для существования решен необходимо, чтобы

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(z + 2\pi\frac{k}{n}\right) = 0,$$

так как эта сумма выражается через решение в виде

$$\sum_{k=1}^{n} g\left(z+2\pi\frac{m}{n}+2\pi\frac{k}{n}\right) - \sum_{k=1}^{n} g\left(z+2\pi\frac{k}{n}\right),$$

а в этих двух суммах слагаемые одинаковы. Если такое условие выпо нено, то решение существует, но определено лишь с точностью до п

---

* Гильберт (12) указывает на это уравнение, как на пример, когда аналит ская задача имеет неаналитическое решение. Оно встречается в исследования метрической теории динамических систем [см. (13), (14)] и представляет собой пр стейший пример задачи с малыми знаменателями.

Примечание при корректуре. Предлагаемая работа была уже сда в печать, когда автору стала известна статья A. Wintner'a (40), в которой рассма ваемое уравнение, по-видимому, впервые изучено с современной точки зрения.

вольной функции периода $\frac{2\pi}{n}$, так как таковая удовлетворяет одно- дному уравнению

$$g\left(z+2\pi\frac{m}{n}\right)-g(z)=0.$$

Если же μ иррационально, то решение единственно, а именно:

1) *При иррациональном* μ *уравнение* (1) *не может иметь двух разных прерывных решений.*

Доказательство. Разность двух непрерывных решений уравнения (1) удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned}g(z+2\pi)\ \ -g(z)&=0,\\ g(z+2\pi\mu)-g(z)&=0,\end{aligned}$$

е. эта непрерывная функция имеет два несоизмеримых периода. акая функция есть [постоянная [см. ($^{15}$), стр. 55—56]; она принимает дно и то же значение во всех точках вида $2\pi k+2\pi\mu l$, которые обра- ют всюду плотное множество. Так как

$$\int_0^{2\pi} g(z)\,dz=0,$$

указанная постоянная есть нуль.

2) *При иррациональном* μ *уравнение* (1) *не может иметь двух измеримых, не почти всюду совпадающих решений.*

Доказательство. Рассмотрим снова разность двух решений ункцию $g(z)$. Ее можно рассматривать как функцию на окружности так как она имеет период $2\pi$. По условию,

$$g(z+2\pi\mu)-g(z)=0,$$

е. $g(z)$ не меняется при повороте на угол $2\pi\mu$. Поэтому множество точек окружности, где $g(z)>a$, инвариантно относительно поворота за угол $2\pi\mu$. Если функция $g(z)$ (почти всюду) постоянна, то эта постоянная, как и в случае 1), есть нуль. Если $g(z)$ не постоянна, то при некотором $a$ множество $E_a$ имеет меру $0<\operatorname{mes}E_a<2\pi$. Но хорошо вестно, что множество, инвариантное относительно поворота на несоизмеримый с $2\pi$ угол, имеет меру нуль или полную меру [см., например, ($^3$); для доказательства достаточно воспользоваться теоремой о точке плотности]. Итак, $g(z)=0$ (почти всюду).

Если функция $f(z)$ разлагается в ряд Фурье

$$f(z)=\sum_{n\neq 0} f_n e^{inz},$$

для коэффициентов Фурье $g(z)$ имеем:

$$g_n e^{2\pi i\mu n}-g_n=f_n,$$

е.

$$g_n=\frac{f_n}{e^{2\pi i\mu n}-1},\qquad g(z)=\sum_{n\neq 0} g_n e^{inz}. \tag{2}$$

При рациональном μ некоторые из знаменателей обращаются в нуль

При иррациональном $\mu$ среди знаменателей есть сколь угодно малые. Заметим, что

$$|e^{2\pi i\mu n} - 1| > |\mu n - m| \tag{3}$$

при любом целом $n$ и некотором целом $m$. Поэтому малость знаменателей в (2) зависит от приближений $\mu$ рациональными числами.

ЛЕММА 1 [см. ([16])]. *Пусть* $\varepsilon > 0$. *Для почти каждого* (*в смысле меры Лебега*) $\mu$, $0 \leqslant \mu \leqslant 1$, *существует* $K > 0$ *такое, что*

$$|\mu n - m| \geqslant \frac{K}{n^{1+\varepsilon}} \tag{4}$$

*при любых целых* $m$ *и* $n > 0$.

Доказательство. Выберем какое-нибудь $K > 0$ и оценим меру множества $E_K$ точек $\mu$, $0 < \mu < 1$, не удовлетворяющих неравенству (4), которое перепишем в виде

$$\left|\mu - \frac{m}{n}\right| \geqslant \frac{K}{n^{2+\varepsilon}}.$$

Это множество содержит все точки $\frac{m}{n}$ с окрестностями радиуса $\frac{K}{n^{2+\varepsilon}}$. При фиксированном $n$ число этих точек будет равно $n+1$, и общая длина окрестностей (на [0, 1]) равна $\frac{K}{n^{1+\varepsilon}}$. Поэтому

$$\operatorname{mes} E_K \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K}{n^{1+\varepsilon}} = c(\varepsilon) K.$$

Множество точек $\mu$, для которых требуемое в лемме число $K$ не существует, входит в $E_K$ при любом $K > 0$, поэтому его мера меньше $c(\varepsilon) K$ при любом $K$, т. е. равна нулю.

2.2. Покажем, что при почти всех $\mu$ малые знаменатели лишь немного ухудшают сходимость ряда (2).

ЛЕММА 2 [см. ([17])]. *Ряд*

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} \frac{1}{|n\mu - m_n|} \tag{5}$$

*сходится при любом* $\varepsilon > 0$ *и любых целых* $m_n$, *если* $\mu$ *таково, что*

$$|\mu n - m| \geqslant \frac{K}{n^{1+\varepsilon-\delta}} \qquad (K > 0, \quad 0 < \delta < \varepsilon) \tag{6}$$

*при всех целых* $m$ *и* $n > 0$.

Доказательство. Не нарушая общности, можно считать, что $|\mu n - m_n| < 1$. Рассмотрим ряды $S_i$ того же вида, что и $S$, но в которых суммирование распространяется лишь на те индексы $n = n_k^{(i)}$, для которых

$$\frac{1}{2^{i+1}} \leqslant |\mu n_k^{(i)} - m_{n_k^{(i)}}| < \frac{1}{2^i} \quad (i = 0, 1, 2, \ldots; \; n_{k+1}^{(i)} > n_k^{(i)}). \tag{7}$$

Ряды $S_i$ в совокупности содержат все члены $S$, так что достаточно показать, что

$$\sum_{i=0}^{\infty} S_i < \infty.$$

Для оценки $S_i$ отметим, что в силу (6) последовательные номера ${}_k^{(i)}$, $n_{k+1}^{(i)}$ членов ряда $S_i$ значительно удалены: так как из (7) следует еравенство

$$|\mu(n_k^{(i)} - n_{k+1}^{(i)}) - m| < \frac{1}{2^{i-1}},$$

о из (6) выводим:

$$\frac{1}{2^{i-1}} > \frac{K}{N_i^{1+\varepsilon-\delta}},$$

где

$$N_i = \min_{0<k<\infty} (n_{k+1}^{(i)} - n_k^{(i)}).$$

тсюда получаем:

$$N_i > (2^{i-1}K)^{\frac{1}{1+\varepsilon-\delta}}. \tag{8}$$

чевидно, что $n_1^{(i)} > N_i$ и вообще $n_k^{(i)} > kN_i$, так что в силу (5), (7), (8) меем:

$$S_i < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{i+1}}{(kN_i)^{1+\varepsilon}} = \frac{2^{i+1}}{N_i^{1+\varepsilon}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\varepsilon}} = \frac{2^{i+1}}{2^{(i-1)\frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon-\delta}}} L(\varepsilon, K) \qquad (L(\varepsilon, K) > 0),$$

$$S_i < 2^{1+\frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon-\delta}} L 2^{i\left(1-\frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon-\delta}\right)} = L'(\varepsilon, \delta, K)\,\theta^i.$$

десь

$$\theta = 2^{1-\frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon-\delta}} < 1,$$

этому

$$\sum_{i=0}^{\infty} S_i < \infty,$$

и требовалось доказать.

Как известно, если $f(x)$ — функция $p+\varepsilon$ раз дифференцируемая *, ее коэффициенты Фурье имеют порядок убывания

$$f_n = O\left(\frac{1}{n}\right)^{p+\varepsilon},$$

ли

$$f_n = O\left(\frac{1}{n}\right)^{p+1+\varepsilon},$$

$f(x)$ дифференцируема $p+\varepsilon$ раз. В силу этого, из неравенства (3) емм 1, 2, примененных к ряду (2), получаем следующий результат: *Если функция $f(z)$ $p+1+\varepsilon+\delta$ раз дифференцируема, то при почти* *$\mu$ уравнение* (1) *имеет $p+\varepsilon$ раз дифференцируемое решение.*

другой стороны, нетрудно построить такие примеры, когда число $\mu$ ь хорошо аппроксимируется рациональными, что, несмотря на быстрое

---

[*] Т. е. функция, у которой $p$-я производная удовлетворяет условию Гёльдера ени $\varepsilon$: $|f^{(p)}(x+h) - f^{(p)}(x)| < Ch^{\varepsilon}$.

убывание числителей $f_n$, ряд (2) сходится медленно или вовсе расходится. Поэтому даже если $f(z)$ аналитична, могут встретиться случаи, когда $g(z)$ не аналитична, но бесконечно дифференцируема, или только конечно число раз дифференцируема, или только непрерывна, или даже разрывна или решение неизмеримо [см. (14), (17)] *.

2.3. Рассмотрим уравнение (1) в классе аналитических функций. Для исследования этого случая напомним две леммы о коэффициентах Фурье аналитических функций.

ЛЕММА 3. *Если функция $f(z)$ периода $2\pi$ в полосе $|\operatorname{Im} z| \leqslant R$ аналитична и в этой полосе $|f(z)| \leqslant C$, то ее коэффициенты Фурье удовлетворяют неравенствам*

$$|f_n| \leqslant Ce^{-|n|R}.$$

Доказательство. Согласно определению,

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z)\, e^{-inz}\, dz.$$

Ввиду периодичности $f(z)\, e^{-inz}$,

$$\int_0^{i\tau} f(z)\, e^{-inz}\, dz = \int_{2\pi}^{2\pi+i\tau} f(z)\, e^{-inz}\, dz,$$

поэтому

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \int_{0+i\tau}^{2\pi+i\tau} f(z)\, e^{-inz}\, dz$$

при любом $\tau \in [-R, R]$. Интегрируя в случае $n > 0$ по прямой $\tau = -$ и при $n < 0$ по $\tau = R$, получаем:

$$|f_n| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Ce^{-|n|R}\, dz,$$

что и требовалось доказать.

ЛЕММА 4. *Пусть коэффициенты Фурье функции $f(z)$ удовлетворяют неравенствам $|f_n| \leqslant Ce^{-|n|R}$. Тогда $f(z)$ аналитична и удовлетворяет при $|\operatorname{Im} z| \leqslant R - \delta$, $0 < \delta < R$, неравенству*

$$|f(z)| \leqslant \frac{2C}{1 - e^{-\delta}},$$

*а ее производная — неравенству*

$$|f'(z)| \leqslant \frac{2C}{(1 - e^{-\delta})^2}.$$

---

* А. Н. Колмогоров (14) высказал гипотезу, что последний случай реализуется всегда, если ряд $\sum\limits_{n \neq 0} \frac{|f_n^2|}{|e^{2\pi i\mu n} - 1|^2}$ расходится.

Доказательство. При $|\operatorname{Im} z| \leqslant R-\delta$, $0<\delta<R$, очевидно, что

$$|e^{inz}| \leqslant e^{|n|(R-\delta)}.$$

Поэтому

$$|f_n e^{inz}| \leqslant Ce^{-|n|\delta}$$

и

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n e^{inz}| \leqslant 2\sum_{n=0}^{\infty} Ce^{-n\delta} \leqslant \frac{2C}{1-e^{-\delta}}.$$

чно так же и

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n i n e^{inz}| \leqslant 2C\sum_{n=0}^{\infty} ne^{-n\delta} \leqslant \frac{2C}{(1-e^{-\delta})^2}.$$

В полосе $|\operatorname{Im} z| \leqslant R-\delta$ ряды сходятся абсолютно равномерно. Лемма доказана.

Теперь нетрудно исследовать аналитические решения уравнения (1).

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $f(z)=\bar{f}(z)$ *— аналитическая функция периода* $2\pi$ *и при* $|\operatorname{Im} z| \leqslant R$ $|f(z)| \leqslant C$. *Пусть* $\mu$ *— иррациональное число,* $K>0$ *и*

$$\left|\mu-\frac{m}{n}\right| \geqslant \frac{K}{n^3} \tag{9}$$

*при любых целых* $m$ *и* $n>0$. *Тогда уравнение*

$$g(z+2\pi\mu)-g(z)=f(z)$$

*имеет аналитическое решение* $g(z)=\tilde{g}(z)$, *и при* $|\operatorname{Im} z| \leqslant R-2\delta$ *и любом* $<1$, $0<\delta<\frac{R}{2}$,

$$|g(z)| \leqslant \frac{4C}{K\delta^3}, \tag{10}$$

$$|g'(z)| \leqslant \frac{8C}{K\delta^4}. \tag{11}$$

Доказательство. Применяя для оценки коэффициентов Фурье $f_n$ функции $f(z)$ лемму 3 и используя неравенства (3), (9), мы получаем из (2):

$$|g_n| \leqslant \frac{C}{K} n^2 e^{-|n|R}. \tag{12}$$

Отметим простое неравенство

$$|n|^p \leqslant \left(\frac{p}{e}\right)^p \frac{e^{|n|\delta}}{\delta^p}, \tag{13}$$

справедливое при любом $\delta>0$. $\Big($В самом деле, $p\ln x < p\ln\frac{p}{e}+x$, ибо функция $x\ p\ln x - x$ имеет максимум при $\frac{p}{x}=1$; полагая $x=\delta|n|$, получаем (13).$\Big)$ Применяя (13) к (12) (при $p=2$), имеем:

$$|g_n| \leqslant \frac{Ce^{-|n|R}e^{|n|\delta}}{K\delta^2} = \frac{Ce^{-|n|(R-\delta)}}{K\delta^2},$$

откуда, на основании леммы 4, находим в полосе $|\operatorname{Im} z| \leqslant R - 2\delta$:

$$|g(z)| \leqslant \frac{2C}{K\delta^2(1-e^{-\delta})}, \quad |g'(z)| \leqslant \frac{2C}{K\delta^2(1-e^{-\delta})^2}.$$

Так как при $\delta < 1$ $|1-e^{-\delta}| > \frac{\delta}{2}$, то отсюда получаем нераве (10), (11). Теорема доказана.

Замечание 1. Очевидно, если $f(z)$ на действительной пр действительна, то и решение действительно.

Замечание 2. Если функция $f(z, \lambda)$ аналитически зависи параметра $\lambda$, то и решение (в условиях теоремы 1) аналитичн параметру.

2.4. Рассмотрим уравнение (1) при комплексных $\mu$. В этом сл решением однородного уравнения

$$g(z+2\pi\mu) - g(z) = 0$$

является любая двоякопериодическая функция с периодами $2\pi$ и поэтому решение задачи заведомо не единственно. Если требов чтобы $g(z)$ была аналитична в полосе шириной $> |\operatorname{Im} 2\pi\mu|$, то решени определяется однозначно с точностью до постоянной. Действител полоса такой ширины содержит параллелограмм периодов, и аналити кое в ней решение однородного уравнения ограничено на всей плоско т. е. есть постоянная. Условие $\bar{g} = 0$ выделяет единственное реше которое дается рядом (2). Этот ряд сходится при любом недействит ном $\mu$, но нас интересуют оценки, поэтому окрестности рациональны надо исключить. Обозначим через $M_K^r$ множество точек $\mu$ из прямоуг ника на комплексной плоскости $0 \leqslant \operatorname{Re} \mu \leqslant 1$, $|\operatorname{Im} \mu| \leqslant r$ таких, что всех целых $m, n$ выполнено неравенство

$$\left|\mu - \frac{m}{n}\right| \geqslant \frac{K}{|n|^3}.$$

Очевидно, вместе с $\mu$ в $M_K^r$ входят $\bar{\mu}$, $1-\mu$, $1-\bar{\mu}$.

Вместо неравенства (3) имеем:

$$|e^{2\pi i z} - 1| \geqslant \min\left(\frac{1}{2}, \pi|z-m|\right) \qquad ($$

для любого комплексного $z$ при некотором целом $m$. Докажем нерав ство (14). Если $|e^{2\pi i z} - 1| \geqslant \frac{1}{2}$, то (14) доказано. Если $|e^{2\pi i z} - 1| <$ то соединим точки 1 и $e^{2\pi i z}$ отрезком и рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_1^{e^{2\pi i z}} \frac{dw}{w} = \frac{1}{2\pi i}(\ln e^{2\pi i z} - \ln 1) = z - m,$$

где $\ln w$ — одна из ветвей логарифма и $\ln 1 = 2\pi i m$ ($m$ — целое). Т как отрезок интегрирования целиком лежит в круге

$$|w-1| < \frac{1}{2},$$

этом круге $|w| > \frac{1}{2}$, то

$$\left| \int\limits_{1}^{e^{2\pi i z}} \frac{dw}{w} \right| \leqslant 2 \left| e^{2\pi i z} - 1 \right|.$$

ому

$$|z - m| \leqslant \frac{1}{\pi} \left| e^{2\pi i z} - 1 \right|,$$

и требовалось доказать.

ли $\mu \in M_K^r$, то, применяя (14) к $z = \mu n$, находим:

$$\left| e^{2\pi i \mu n} - 1 \right| \geqslant \min\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi K}{n^2}\right).$$

*если* $\mu \in M_K^r$, *где* $K < \frac{1}{2\pi}$, *то*

$$\left| e^{2\pi i \mu n} - 1 \right| \geqslant \frac{\pi K}{n^2}. \tag{15}$$

ТЕОРЕМА 1'. *Пусть* $f(z) = \overline{f}(z)$ — *аналитическая функция периода* $2\pi$ $\operatorname{Im} z| \leqslant R$ $|f(z)| \leqslant C$, *и пусть* $\mu \in M_K^r$, $K < \frac{1}{2\pi}$. *Тогда уравнение*

$$g(z + 2\pi\mu) - g(z) = f(z) \tag{1}$$

*аналитическое решение* $g(z) = \overline{g}(z)$, *и при* $|\operatorname{Im}(z - 2\pi\mu)| < R - 2\delta$ и $\delta < 1$, $0 < \delta < \frac{R}{2}$,

$$|g(z)| \leqslant \frac{4C}{\pi K \delta^3}, \quad |g'(z)| \leqslant \frac{8C}{\pi K \delta^4}. \tag{16}$$

Доказательство. Согласно формуле (2) и лемме 3, имеем:

$$\left| g_n e^{inz} \right| \leqslant \frac{C e^{-|n| R}}{e^{2\pi i \mu n} - 1} e^{in(z - 2\pi\mu + 2\pi\mu)}. \tag{17}$$

при $|\operatorname{Im}(z - 2\pi\mu)| < R - 2\delta$

$$\left| e^{in(z - 2\pi\mu)} \right| < e^{|n|(R - 2\delta)},$$

то из (17) вытекает:

$$\left| g_n e^{inz} \right| \leqslant \frac{C e^{-2\delta |n|}}{1 - e^{-2\pi i \mu n}}.$$

ак $1 - \mu \in M_K^r$, то, в соответствии с (15),

$$\left| 1 - e^{-2\pi i \mu n} \right| \geqslant \frac{\pi K}{n^2},$$

значит,

$$\left| g_n e^{inz} \right| \leqslant \frac{C e^{-2\delta |n|} n^2}{\pi K}.$$

да, в силу (13), вытекает сходимость рядов $g(z)$ и $g'(z)$, а следовательно, и справедливость неравенств (16) (см. доказательства теоремы 1 мы 4).

мечание 1. Замечание 2 к теореме 1 применимо и к теореме 1'.

Замечание 2. Зафиксируем функцию $f$ и число $z$ и будем рассматр вать зависимость найденного решения от $\mu$:

$$g(\mu) = \sum_{n \neq 0} \frac{f_n}{e^{2\pi i \mu n} - 1} e^{inz}.$$

Функция $g(\mu)$ аналитична в верхней и нижней полуплоскостях, но $\operatorname{Im} \mu = 0$ есть купюра. Ряд (2) сходится и на ней почти всюду, к всюду разрывному пределу. Это не помешает нам в § 7 дифферен ровать решение по $\mu$ даже при $\operatorname{Im} \mu = 0$, пользуясь идеями Борел Пока же считаем, что формула

$$\frac{\partial g}{\partial \mu} = - \sum_{n \neq 0} \frac{2\pi i n e^{2\pi i \mu n} f_n}{\left(e^{2\pi i \mu n} - 1\right)^2} e^{inz}$$

имеет смысл только в верхней и нижней полуплоскостях отдельно.

## § 3. Леммы, необходимые для доказательства теоремы 2

3.1. ЛЕММА 5. *Если в каждой точке отрезка* $z_1 z_2$ *функция* $f$ *аналитична и* $\left| \frac{df}{dz} \right| \leqslant L$, *то* $|f(z_2) - f(z_1)| \leqslant L |z_2 - z_1|$.

Доказательство. Действительно,

$$f(z_2) - f(z_1) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{df(z)}{dz} dz,$$

откуда следует:

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leqslant \int_{z_1}^{z_2} \left| \frac{df(z)}{dz} \right| |dz| \leqslant L |z_2 - z_1|.$$

Замечание. Пример $f(z) = e^{iz}$, $z_1 = 0$, $z_2 = 2\pi$ показывает. в комплексной области теорема о конечном приращении в виде

$$f(z_2) - f(z_1) = \frac{df(\xi)}{dz} (z_2 - z_1)$$

или

$$|f(z_2) - f(z_1)| = \left| \frac{df(\xi)}{dz} \right| |z_2 - z_1|$$

неверна.

3.2. ЛЕММА 6 (о неявной функции). *Пусть функции* $F(\varepsilon)$, $\Phi$, ε *аналитичны и при* $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$, $|\Delta| \leqslant \Delta_0$

$$|F(\varepsilon)| \leqslant M_1, \quad |\Phi(\varepsilon, \Delta)| \leqslant M_2 |\Delta|,$$

*где* $\frac{M_1}{1 - M_2} < \frac{\Delta_0}{3}$ *и* $M_2 < \frac{1}{6}$. *Тогда*

1. *Уравнение* $\Delta + F(\varepsilon) + \Phi(\varepsilon, \Delta) = 0$ *имеет аналитическое ре* $\Delta^*(\varepsilon)$, *удовлетворяющее при* $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ *неравенству* $|\Delta^*(\varepsilon)| \leqslant \frac{M}{1 -}$

2. *Уравнение* $\Delta + F(\varepsilon) + \Phi(\varepsilon, \Delta) = \Delta_1$ *имеет аналитически зави от* $\Delta_1$ *и* $\varepsilon$, $|\Delta_1| < \frac{\Delta_0}{6}$, $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, *корень* $\Delta = \Delta(\Delta_1, \varepsilon)$, *причем*

$$|\Delta(\Delta_1, \varepsilon) - \Delta^*(\varepsilon)| \leqslant 2 |\Delta_1|.$$

Доказательство. 1. Круг $|\Delta| < \frac{M_1}{1-M_2}$ находится при $\frac{M_1}{1-M_2} < \Delta_0$. $\varepsilon_0$ в области, где $|F(\varepsilon)| \leqslant M_1$, $|\Phi(\varepsilon, \Delta)| < M_2|\Delta|$, а потому пре- азованием $\Delta \to -F(\varepsilon) - \Phi(\varepsilon, \Delta)$ переводится внутрь себя:

$$|F(\varepsilon) + \Phi(\varepsilon, \Delta)| \leqslant M_1 + \frac{M_1}{1-M_2} M_2 = \frac{M_1}{1-M_2}.$$

движная точка преобразования есть искомое решение $\Delta^*(\varepsilon)$; анали- ть следует из обычной теоремы о неявной функции, так как

$$\frac{\partial}{\partial\Delta}(\Delta + F(\varepsilon) + \Phi(\varepsilon, \Delta)) \neq 0,$$

вытекает из оценки $\frac{\partial\Phi}{\partial\Delta}$ с помощью интеграла Коши: при $|\Delta| \leqslant \frac{2\Delta_0}{3}$, $< \varepsilon_0$

$$\left|\frac{\partial\Phi}{\partial\Delta}\right| \leqslant \frac{M_2\Delta_0}{\frac{\Delta_0}{3}} < \frac{1}{2}.$$

При отображении $w \to w + \Phi(w, \varepsilon)$ точка $\Delta^*(\varepsilon)$ переходит в $-F(\varepsilon)$, ки $w$ круга $|w - \Delta^*(\varepsilon)| \leqslant 2|\Delta_1|$ — в точки

$$w + \Phi(\Delta^*(\varepsilon), \varepsilon) + [\Phi(w, \varepsilon) - \Phi(\Delta^*(\varepsilon), \varepsilon)].$$

Так как в условиях леммы для точек этого круга

$$|\Phi(w, \varepsilon) - \Phi(\Delta^*(\varepsilon), \varepsilon)| \leqslant |\Delta_1|$$

ма 5), то образ круга $|w - \Delta^*(\varepsilon)| \leqslant 2|\Delta_1|$ содержит весь круг $- F(\varepsilon)| \leqslant \Delta_1$ и имеет точку $\Delta(\Delta_1, \varepsilon)$, переходящую в $\Delta_1 - F(\varepsilon)$. Эта а удовлетворяет неравенству

$$|\Delta - \Delta^*| \leqslant 2|\Delta_1|$$

авнению

$$\Delta = \Delta_1 - F(\varepsilon) - \Phi(\varepsilon, \Delta).$$

инственность и аналитичность следует из неравенства $\left|\frac{\partial\Phi}{\partial\Delta}\right| < \frac{1}{2}$.

амечание. Легко видеть, что если в условиях леммы 6 функ- $F(\varepsilon)$ и $\Phi(\varepsilon, \Delta)$ действительны при действительных $\varepsilon$, $\Delta$, то $\Delta^*(\varepsilon)$ $\Delta(\Delta_1, \varepsilon)$ действительны при действительных $\Delta_1$, $\varepsilon$.

3.3. Метод Ньютона [см. (18), (6)]. Пусть ищется решение урав- $f(x) = 0$ (рис. 1). Определим $x$ грубо как $x_0$ и найдем точку ения $x_1$ касательной в $[x_0$ к кривой ) с осью $x$:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Далее, определим последовательно

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

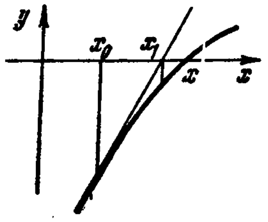

Рис. 1

ним скорость сходимости процесса *. Пусть $x$ — искомое решение

---

* Здесь не приводятся точные предпосылки и оценки. Они даны в работе (16) общей форме, в которую, однако, не укладываются рассуждения следую- параграфов.

и $|x_0 - x| = \varepsilon$. Тогда отклонение кривой от касательной к ней в точке имеет в точке $x$ порядок $\varepsilon^2$, и, значит, $|x_1 - x|$ есть величина пор ка $\varepsilon^2$. Таким образом, после $n$-го шага ошибка будет порядка $\varepsilon^{2^n}$ — с димость чрезвычайно быстрая.

Мы применим метод типа метода Ньютона к решению линейно функционального уравнения, аппроксимируемого уравнением, рассм ренным в § 2. Быстрая сходимость будет парализовать появляющие на каждом шагу малые знаменатели.

## § 4. Теорема 2 и основная лемма

4.1. Наводящие соображения. Преобразование

$$z \to z + 2\pi\mu$$

есть поворот окружности. Преобразование

$$z \to z + 2\pi\mu + \varepsilon F(z)$$

есть поворот, возмущенный членом $\varepsilon F(z)$, который мал вместе с $\varepsilon$. Е число вращения, даже если $\bar{F} = 0$, может отличаться от $2\pi\mu$. Одна можно отыскать $\Delta = \Delta(\varepsilon)$ такое, что преобразование

$$z \to z + 2\pi\mu + \Delta + \varepsilon F(z)$$

будет иметь число вращения, равное $2\pi\mu$. Мы покажем, что *для н мально приближаемых рациональными числами* $\mu$ *и достаточно мал*

1) $\Delta(\varepsilon)$ *аналитически зависит от* $\varepsilon$;

2) *преобразование* $z \to z + 2\pi\mu + \Delta + \varepsilon F(z)$ *может быть превращ в поворот на угол* $2\pi\mu$ *аналитической заменой переменной* $\varphi(z) = z + g$ (

Здесь $g(z)$ — малая вместе с $\varepsilon$ поправка, и свойство 2) означает, ч

$$\varphi(z + 2\pi\mu + \Delta(\varepsilon) + \varepsilon F(z), \varepsilon) = \varphi(z, \varepsilon) + 2\pi\mu,$$

или, что то же (зависимость $g$ от $\varepsilon$ подразумевается),

$$g(z + 2\pi\mu + \Delta + \varepsilon F(z)) - g(z) = -\Delta - \varepsilon F(z). \qquad ($$

Это уравнение отличается от рассмотренного в § 2 только малыми в рого порядка, поэтому естественно в первом приближении выбр $\Delta = \Delta_1(\varepsilon)$ так, чтобы правая часть уравнения (1) была в среднем ра нулю:

$$\Delta_1 = -\varepsilon\bar{F}$$

и искать $g_1(z)$ как решение уравнения

$$g_1(z + 2\pi\mu) - g_1(z) = -\varepsilon\bar{F}(z).$$

Определенное отсюда $g_1$ имеет порядок $\varepsilon$ и в переменной $\varphi_1 =$ наше преобразование

$$z \to z + 2\pi\mu + \Delta_1(\varepsilon) + \varepsilon F(z)$$

имеет вид:

$$\begin{aligned}\varphi_1(z + 2\pi\mu + \Delta_1(\varepsilon) + \varepsilon F(z)) &= z + 2\pi\mu + \Delta_1 + \varepsilon F + \\ + g_1(z + 2\pi\mu + \Delta_1 + \varepsilon F) &= z + g_1(z) + 2\pi\mu + \\ &+ [g_1(z + 2\pi\mu + \Delta_1 + \varepsilon F) - g_1(z + 2\pi\mu)] + \\ &+ [g_1(z + 2\pi\mu) - g_1(z) + \varepsilon\widetilde{F}(z)] + (\Delta_1 + \varepsilon\bar{F}).\end{aligned}$$

Два последних члена, благодаря выбору $\Delta_1$ и $g_1(z)$, обращаются нуль, и мы получаем:

$$\varphi_1(z) \to \varphi_1(z) + 2\pi\mu + F_2(z, \varepsilon).$$

перь «возмущение» имеет вид:

$$F_2(z, \varepsilon) = g_1(z + 2\pi\mu + \Delta_1 + \varepsilon F) - g_1(z + 2\pi\mu) = \frac{dg_1(\xi)}{dz}(\Delta_1 + \varepsilon F).$$

десь $\frac{dg_1}{dz}$, как и $g_1$, есть величина порядка $\varepsilon$, и, так как то же относится ко второму сомножителю, возмущение в параметре $\varphi_1$ имеет рядок $\varepsilon^2$. С преобразованием

$$\varphi_1 \to \varphi_1 + 2\pi\mu + F_2$$

жно поступить таким же образом и определить «поправку в частоту» и новый параметр $\varphi_2$ так, чтобы преобразование

$$\varphi_1 \to \varphi_1 + 2\pi\mu + \Delta_2 + F_2$$

параметре $\varphi_2$ превращалось в преобразование

$$\varphi_2 \to \varphi_2 + 2\pi\mu + F_3,$$

$F_3 \sim \varepsilon^4$. Однако при этом в параметре $z$ преобразование

$$\varphi_1 \to \varphi_1 + 2\pi\mu + \Delta_2 + F_2$$

будет иметь вида

$$z \to z + 2\pi\mu + \Delta + \varepsilon F.$$

этому надо начать с преобразования

$$z \to z + 2\pi\mu + \Delta_1(\varepsilon) + \Delta_1'(\Delta_2) + \varepsilon F;$$

да при должном выборе $\Delta_1'(\Delta_2)$ можно в параметре $\varphi_1$ получить преазование

$$\varphi_1 \to \varphi_1 + 2\pi\mu + \Delta_2 + F_2'(\varphi_1),$$

в параметре $\varphi_2$ — преобразование

$$\varphi_2 \to \varphi_2 + 2\pi\mu + F_3',$$

т. д. Быстрая сходимость метода ($F_n \sim \varepsilon^{2^n-1}$) позволяет провести прельный переход и в пределе получить новый параметр $\varphi(z, \varepsilon)$ и оконльную поправку $\Delta(\varepsilon)$, обладающие свойствами 1) и 2).

бычный в теории возмущений путь решения нашей задачи состоял в том, что $\Delta(\varepsilon)$ и $\varphi(z, \varepsilon)$ искались бы в виде рядов по степеням $\varepsilon$, чем коэффициенты рядов определялись бы последовательно из уловыполнения равенства (1) в первом приближении, втором и т. д. азать сходимость таких рядов прямыми оценками не удается, однако вытекает из нижеследующей основной теоремы настоящей работы.

2. ТЕОРЕМА 2. *Пусть даны аналитически зависящее от двух метров* $\varepsilon$, $\Delta$ *семейство аналитических преобразований окружности*

$$z \to A(z, \varepsilon, \Delta) \equiv z + 2\pi\mu + \Delta + F(z, \varepsilon) \qquad (2)$$

*ла* $R > 0$, $\varepsilon_1 > 0$, $K > 0$, $L > 0$ *такие, что*

$F(z + 2\pi, \varepsilon) = F(z, \varepsilon)$;

*при* $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} \varepsilon = 0$ *всегда* $\operatorname{Im} F(z, \varepsilon) = 0$;

*при* $|\operatorname{Im} z| \leqslant R$, $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$

$$|F(z, \varepsilon)| \leqslant L|\varepsilon|; \qquad (3)$$

4) *иррациональное число* $\mu$ *при любых целых* $m$ *и* $n$ *удовлетворя неравенству*

$$\left|\mu - \frac{m}{n}\right| \geqslant \frac{K}{|n|^3}.$$

*Тогда существуют числа* $\varepsilon'$ *и* $R'$, $0 < \varepsilon' \leqslant \varepsilon_0$, $0 < R' \leqslant R$, *и функц* $\Delta(\varepsilon)$, $\varphi(z, \varepsilon)$, *действительные при действительных* $\varepsilon$ *и* $z$ *и аналити ские при* $|\varepsilon| < \varepsilon'$, $|\operatorname{Im} z| < R'$, *такие, что*

$$\varphi(A(z, \varepsilon, \Delta(\varepsilon)), \varepsilon) = \varphi(z, \varepsilon) + 2\pi\mu. \qquad (5$$

Эта теорема доказана в § 6 на основе следующей леммы.

ОСНОВНАЯ ЛЕММА. *Пусть даны аналитически зависящее от пар метров* $\varepsilon$, $\Delta$ *семейство аналитических преобразований окружности*

$$z \to A_0(z, \varepsilon, \Delta) \equiv z + 2\pi\mu + \Delta + F(z, \varepsilon) + \Phi(z, \varepsilon, \Delta) \qquad (6$$

*и числа* $R_0 > 0$, $\varepsilon_0 > 0$, $K > 0$, $\delta > 0$, $C > 0$, $0 < \Delta_0 < 1$ *такие, что*

1) $F(z + 2\pi, \varepsilon) = F(z, \varepsilon)$, $\Phi(z + 2\pi, \varepsilon, \Delta) = \Phi(z, \varepsilon, \Delta)$;

2) *при* $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} \varepsilon = \operatorname{Im} \Delta = 0$ *всегда* $\operatorname{Im} F = \operatorname{Im} \Phi = 0$;

3) *при* $|\operatorname{Im} z| \leqslant R_0$, $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$, $|\Delta| \leqslant \Delta_0$

$$|F(z, \varepsilon)| \leqslant C < \delta^8,$$
$$|\Phi(z, \varepsilon, \Delta)| < \delta|\Delta|;$$

4) *иррациональное число* $\mu$ *при любых целых* $m$ *и* $n$ *удовлетворя неравенству* (4);

5) *число* $\delta$ *удовлетворяет неравенствам*

$$\delta < \frac{K}{64}, \quad \delta < \frac{R_0}{8}, \qquad ($$
$$\delta < \frac{1}{36}, \qquad (1$$

*и, кроме того,*

$$C < \frac{\Delta_0}{6}. \qquad (1$$

*Тогда существуют аналитические функции* $z(\varphi, \varepsilon)$, $\Delta(\Delta_1, \varepsilon)$, $F_1(\varphi, \varepsilon$ $\Phi_1(\varphi, \varepsilon, \Delta_1)$ *такие, что*

1. *Тождественно*

$$z[A_1(\varphi, \varepsilon, \Delta_1), \varepsilon] = A_0[z(\varphi, \varepsilon), \varepsilon, \Delta(\Delta_1, \varepsilon)], \qquad (1$$

*где*

$$A_1(\varphi, \varepsilon, \Delta_1) \equiv \varphi + 2\pi\mu + \Delta_1 + F_1(\varphi, \varepsilon) + \Phi_1(\varphi, \varepsilon, \Delta_1). \qquad (13$$

2. $F_1(\varphi + 2\pi, \varepsilon) = F_1(\varphi, \varepsilon)$, $\Phi_1(\varphi + 2\pi, \varepsilon, \Delta_1) = \Phi_1(\varphi, \varepsilon, \Delta_1)$; $z(\varphi + 2\pi, \varepsilon$ $= z(\varphi, \varepsilon) + 2\pi$.

3. *При* $\operatorname{Im} \varphi = \operatorname{Im} \Delta_1 = \operatorname{Im} \varepsilon = 0$ *всегда* $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} \Delta = \operatorname{Im} F_1 = \operatorname{Im} \Phi_1 =$

4. *При* $|\Delta_1| \leqslant C$, $|\operatorname{Im} \varphi| \leqslant R_0 - 7\delta$, $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$

$$|F_1(\varphi, \varepsilon)| \leqslant \frac{C^2}{\delta^6}, \qquad (1$$
$$|\Phi_1(\varphi, \varepsilon, \Delta_1)| \leqslant \delta^2|\Delta_1|, \qquad (1$$
$$|z(\varphi, \varepsilon) - \varphi| \leqslant \frac{C}{\delta^4}, \quad \left|\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right| < 2, \qquad (1$$

$$|\Delta(\Delta_1, \varepsilon)| \leqslant \Delta_0, \quad \left|\frac{\partial\Delta}{\partial\Delta_1}\right| < 2. \tag{17}$$

новная лемма показывает, что малое (порядка $C$) возмущение пово- $z \to z + 2\pi\mu$ можно компенсировать изменением параметра $z \to \varphi$ $\Delta = \Delta(\Delta_1, \varepsilon)$ так, что в новом параметре отличие от поворота будет дка $C^2$. Доказательство леммы изложено в следующем параграфе.

3. В § 11 мы используем следующее утверждение.

**ледствие теоремы 3.** *Пусть иррациональное число $\mu$ удовле- ряет неравенству (4) теоремы 2, и пусть $R > 0$. Тогда существует $R. K) > 0$ такое, что если преобразование*

$$Az : z \to z + 2\pi\mu + F(z)$$

*число вращения $2\pi\mu$ и $|F(z)| \leqslant C$ при $|\operatorname{Im} z| \leqslant R$, то $Az$ можно тить в поворот на угол $2\pi\mu$ аналитической заменой переменной.*

**Доказательство.** Рассмотрим функцию

$$F_1(z) = \frac{F(z)}{\max\limits_{|\operatorname{Im} z| \leqslant R} |F(z)|}$$

емейство преобразований

$$A_\varepsilon z : z \to z + 2\pi\mu + \varepsilon F_1(z),$$

летворяющее условиям теоремы 2 при $L = 1$, так как $|F_1(z)| \leqslant 1$ $\operatorname{Im} z| \leqslant R$. По теореме 2, существует $\varepsilon'(R, K) > 0$ такое, что при преобразование

$$z \to z + 2\pi\mu + \Delta(\varepsilon) + \varepsilon F_1(z).$$

ет быть превращено в поворот на угол $2\pi\mu$. Выберем $C(R, K) < \varepsilon'$. **да** если $|F(z)| \geqslant C$ при $|\operatorname{Im} z| \leqslant R$, то существует $\Delta$ такое, что

$$z \to z + 2\pi\mu + \Delta + F(z)$$

ет быть аналитическим преобразованием координаты превращено ворот на угол $2\pi\mu$, ибо

$$F(z) = \max_{|\operatorname{Im} z| \leqslant R} |F(z)| F_1(z),$$

$$\max |F(z)| \leqslant C < \varepsilon'.$$

число вращения $Az$ равно $2\pi\mu$, откуда следует, что $\Delta = 0$ (см. п. 2 зательства теоремы 4 в § 10, где показано, что при сколь угодно ом $\Delta$ число вращения преобразования $z \to z + 2\pi\mu + \Delta + F(z)$ больше . Следствие доказано.

тверждение следствия можно получить и непосредственно, исполь- построения, аналогичные построениям теоремы 2. Ввиду отсутствия аметров $\varepsilon$, $\Delta$, эти построения будут менее громоздки.

4.4. **Замечание о многомерном случае.** Все построения —8 можно понимать как многомерные, заменив точку окружности ой тора $k$ измерений. Условие 4) теоремы 2 заменяется следующим условием «несоизмеримости» для вектора $\vec{\mu}$:

$$|n_0 + (\vec{\mu}, \vec{n})| \geqslant \frac{K}{|\vec{n}|^{\omega}} \tag{18}$$

при любом целочисленном векторе $\vec{n} = (n_0, \ldots, n_k)$. Здесь $(\vec{\mu}, \vec{n})$ — скалярное произведение

$$\sum_{i=1}^{k} \mu_i n_i, \qquad |\vec{n}| = \sum_{i=0}^{k} |n_i|.$$

При достаточно большом $\omega$ условие (18) выполнено для почти всех векторов $\vec{\mu}$.

Не останавливаясь подробно на формулировках и доказательствах всех неравенств, лемм и теорем для многомерного случая, приведем лишь один результат.

МНОГОМЕРНАЯ ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $\vec{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_k)$ — *вектор соизмеримыми компонентами такой, что при любом целочисленном векторе*

$$|n_0 + (\vec{\mu}, \vec{n})| > \frac{K}{|\vec{n}|^{k+1}}.$$

*Тогда существует такое* $\varepsilon(R, C, k) > 0$, *что для векторного поля* $\vec{F}(\vec{z})$ *на торе, аналитического и достаточно малого,* $|\vec{F}(\vec{z})| < \varepsilon$ *при* $|\operatorname{Im} \vec{z}| < R$ *найдется вектор* $\vec{a}$, *для которого преобразование тора в себя*

$$\vec{z} \to \vec{z} + \vec{a} + \vec{F}(\vec{z})$$

*превращается в*

$$\vec{\varphi} \to \vec{\varphi} + 2\pi\vec{\mu}$$

*аналитической заменой переменных.*

## § 5. Доказательство основной леммы

5.1. Построение $z(\varphi, \varepsilon)$, $\Delta(\Delta_1, \varepsilon)$, $F_1(\varphi, \varepsilon)$ и $\Phi_1(\varphi, \varepsilon, \Delta_1)$. Функция $z(\varphi, \varepsilon)$ строится как обратная к

$$\varphi(z, \varepsilon) = z + g(z, \varepsilon),$$

а функция $\Delta(\Delta_1, \varepsilon)$ — как обратная к $\Delta_1(\Delta, \varepsilon)$. В п. 4.1 мы видели что эти функции надо выбирать так, чтобы выражение

$$g(A_0(z, \varepsilon, \Delta), \varepsilon) - g(z, \varepsilon) + F(z, \varepsilon) + \Delta + \Phi(z, \varepsilon, \Delta)$$

было мало. Не определяя пока $\Delta(\Delta_1, \varepsilon)$ (т. е. считая $\Delta$ независимым переменным), определим $g^*(z, \varepsilon, \Delta)$ как решение уравнения

$$g^*(z + 2\pi\mu, \varepsilon, \Delta) - g^*(z, \varepsilon, \Delta) = -\widetilde{F}(z, \varepsilon) - \widetilde{\Phi}(z, \varepsilon, \Delta).$$

Выражая преобразование $A_0$ [см. § 4, формула (6)] через параметр

$$\varphi^*(z, \varepsilon, \Delta) = z + g^*(z, \varepsilon, \Delta),$$

получаем:

$$\varphi^*[A_0(z, \varepsilon, \Delta), \varepsilon, \Delta] = z + 2\pi\mu + \Delta + F(z, \varepsilon) + \Phi(z, \varepsilon, \Delta) + \\ + g^*(z + 2\pi\mu, \varepsilon, \Delta) + g^*(A_0(z, \varepsilon, \Delta)) - g^*(z + 2\pi\mu, \varepsilon, \Delta),$$

преобразуя правую часть с помощью (2),

$$\varphi^*[A_0(z, \varepsilon, \Delta), \varepsilon, \Delta] = z + g^*(z, \varepsilon, \Delta) + 2\pi\mu + \Delta + \overline{F}(\varepsilon) + \overline{\Phi}(\varepsilon, \Delta) + $$
$$+ g^*[A_0(z, \varepsilon, \Delta), \varepsilon, \Delta] - g^*(z + 2\pi\mu, \varepsilon, \Delta).$$

ним образом, согласно (1), получаем:

$$\varphi^*[A_0(z, \varepsilon, \Delta), \varepsilon, \Delta] = \varphi^*(z, \varepsilon, \Delta) + 2\pi\mu + \Delta + \overline{F}(\varepsilon) + \overline{\Phi}(\varepsilon, \Delta) + $$
$$+ g^*[A_0(z, \varepsilon, \Delta), \varepsilon, \Delta] - g^*(z + 2\pi\mu, \varepsilon, \Delta). \tag{3}$$

еделим $\Delta_0^*(\varepsilon)$ как решение уравнения

$$\Delta_0^*(\varepsilon) + \overline{F}(\varepsilon) + \overline{\Phi}(\varepsilon, \Delta_0^*(\varepsilon)) = 0 \tag{4}$$

положим

$$g^*(z, \varepsilon, \Delta_0^*(\varepsilon)) = g(z, \varepsilon). \tag{5}$$

перь новый параметр $\varphi(z, \varepsilon)$ определен равенствами (5) и (1). Представим (3) в виде

$$A_0(z, \varepsilon, \Delta), \varepsilon] = \varphi(z, \varepsilon) + 2\pi\mu + \Delta_1(\varepsilon, \Delta) + \hat{F}_1(z, \varepsilon) + \hat{\Phi}_1(z, \varepsilon, \Delta), \tag{6}$$

где

$$\hat{F}_1(z, \varepsilon) = g(z_{\mathrm{I}}, \varepsilon) - g(z_{\mathrm{II}}, \varepsilon), \tag{7}$$

$$\hat{\Phi}_1(z, \varepsilon, \Delta) = g(z_{\mathrm{III}}, \varepsilon) - g(z_{\mathrm{I}}, \varepsilon), \tag{8}$$

$$\Delta_1(\varepsilon, \Delta) = \Delta + \overline{F}(\varepsilon) + \overline{\Phi}(\varepsilon, \Delta), \tag{9}$$

$$z_{\mathrm{I}} = z + 2\pi\mu + \tilde{F}(z, \varepsilon) + \hat{\Phi}(z, \varepsilon, \Delta_0^*(\varepsilon)), \tag{10}$$

$$z_{\mathrm{II}} = z + 2\pi\mu, \tag{11}$$

$$z_{\mathrm{III}} = z + 2\pi\mu + \tilde{F}(z, \varepsilon) + \Delta_1(\varepsilon, \Delta) + \tilde{\Phi}(z, \varepsilon, \Delta). \tag{12}$$

делим $z(\varphi, \varepsilon)$ из (1), $\Delta(\Delta_1, \varepsilon)$ —из (9) и обозначим

$$F_1(\varphi, \varepsilon) = \hat{F}_1(z(\varphi, \varepsilon), \varepsilon), \tag{13}$$

$$\Phi_1(\varphi, \varepsilon, \Delta_1) = \hat{\Phi}_1(z(\varphi, \varepsilon), \varepsilon, \Delta(\Delta_1, \varepsilon)), \tag{14}$$

$$A_1(\varphi, \varepsilon, \Delta_1) = \varphi[A_0(z(\varphi, \varepsilon), \varepsilon, \Delta(\Delta_1, \varepsilon)), \varepsilon]. \tag{15}$$

5.2. Докажем, что построенные функции являются искомыми. Утверждения 1, 2 и 3 основной леммы выполнены очевидным образом. Доказательство утверждения 4 базируется на следующих оценках.

1°. Оценка $\Delta_0^*(\varepsilon)$. На основании неравенств (10), (11) § 4 к уравнению (4) применима лемма 6 (§ 3). При этом $M_1 = C$, $M_2 = \delta$, и так

$$\frac{C}{1-\delta} < \frac{\Delta_0}{3}, \quad \delta < \frac{1}{2}$$

формулы (10), (11) § 4], то

$$|\Delta_0^*(\varepsilon)| < \frac{C}{1-\delta}.$$

нимая во внимание, что $\delta < \frac{1}{2}$, находим при $|\varepsilon| < \varepsilon_0$:

$$|\Delta_0^*(\varepsilon)| < 2C. \tag{16}$$

2°. Оценка $g(z, \varepsilon)$. Неравенство (16) позволяет оценить правую часть уравнения (2). При $|\operatorname{Im} z| < R$, $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$, $\Delta = \Delta_0^*(\varepsilon)$ из (16) и неравенств (7), (8), (10) § 4 вытекает:

$$|\tilde{F}(z, \varepsilon) + \tilde{\Phi}(z, \varepsilon, \Delta)| \leqslant 2C + 2\delta \cdot 2C < 4C. \qquad (17)$$

Применяя к уравнению (2) теорему 1 § 2, получаем на основании ( (17) и условия 4) основной леммы, что при $|\operatorname{Im} z| \leqslant R_0 - 2\delta$, $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$ и любом $\delta < 1$, $0 < \delta < \frac{R_0}{2}$,

$$|g(z, \varepsilon)| < \frac{8 \cdot 4C}{K\delta^3}, \qquad \left|\frac{\partial g}{\partial z}\right| < \frac{16 \cdot 4C}{K\delta^4},$$

откуда, ввиду неравенства (9) § 4,

$$|g(z, \varepsilon)| < \frac{C}{\delta^4}, \qquad \left|\frac{\partial g(z, \varepsilon)}{\partial z}\right| < \frac{C}{\delta^5}. \qquad (18)$$

Так как, в силу неравенства (7) § 4, $C < \delta^8$, то отсюда вытекает, что

$$|g(z, \varepsilon)| < \delta.$$

Поэтому при отображении $z \to \varphi(z, \varepsilon) = z + g(z, \varepsilon)$ полоса

$$|\operatorname{Im} z| \leqslant R_0 - 2\delta \cdot$$

перейдет в область, содержащую полосу

$$|\operatorname{Im} \varphi| \leqslant R_0 - 3\delta.$$

В последней обратная функция аналитична, ибо $\left|\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right| > \frac{1}{2}$ при $|\operatorname{Im} z| < R_0 - 2\delta$. Тем самым доказано неравенство (16) § 4.

3°. Оценка $F_1(\varphi, \varepsilon)$. Пусть $|\operatorname{Im} z| < R_0 - 3\delta$, $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$. Так как, в силу неравенства (16) и условий 3), 5) основной леммы,

$$|\tilde{F}(z, \varepsilon) + \tilde{\Phi}(z, \varepsilon, \Delta_0^*(\varepsilon))| < \delta,$$

то мнимые части $z_{\rm I}$ и $z_{\rm II}$ [см. (10) и (11)] не превосходят $R_0 -$ Применяя лемму 5 § 3, получаем, на основании (17), (18), что пр $|\operatorname{Im} z| < R_0 - 3\delta$, $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$

$$|\hat{F}(z, \varepsilon)| \leqslant \frac{4C^2}{\delta^5}. \qquad (19)$$

Заметим, что появление $C^2$ в этом неравенстве является наиболее существенным моментом доказательства теоремы 2.

При $|\operatorname{Im} \varphi| \leqslant R_0 - 4\delta$ и $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$, имеем, в силу 2°:

$$|\operatorname{Im} z(\varphi, \varepsilon)| < R_0 - 3\delta,$$

и поэтому оценка (14) § 4 вытекает из (19) ввиду определения $F_1(\varphi$ и неравенства (10) § 4.

4°. Оценка $|\Delta(\Delta_1, \varepsilon) - \Delta_0^*(\varepsilon)|$. Уравнение

$$\Delta = \Delta_1 - \bar{F}(\varepsilon) - \bar{\Phi}(\varepsilon, \Delta),$$

определяющее $\Delta(\Delta_1, \varepsilon)$, принадлежит к типу, рассмотренному в лемме 6 § 3. Мы видели [см. (16)], что $|\Delta_0^*(\varepsilon)| < 2C$, откуда, на основании мулы (11) § 4, вытекает:

$$|\Delta_0^*(\varepsilon)| < \frac{\Delta_0}{3}. \tag{20}$$

Таким образом, лемма 6 применима, и при $|\Delta_1| \leqslant C < \frac{\Delta_0}{6}$, $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$

$$|\Delta(\Delta_1, \varepsilon) - \Delta_0^*(\varepsilon)| < 2|\Delta_1|. \tag{21}$$

авнивая (20) и (21), находим, что при $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$, $|\Delta_1| \leqslant C$

$$|\Delta(\Delta_1, \varepsilon)| < \frac{2}{3}\Delta_0.$$

При $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, $|\Delta| < \frac{2}{3}\Delta_0$ по формуле Коши имеем:

$$\left|\frac{\partial\Phi}{\partial\Delta}\right| < \frac{\delta\Delta_0}{\frac{\Delta_0}{3}} < \frac{1}{2}$$

м. неравенства (8), (10) § 4]. Оценка (17) § 4 доказана, ибо очевидно,

$$\left|\frac{\partial\Delta}{\partial\Delta_1}\right| = \left|\frac{1}{1+\frac{\partial\Phi}{\partial\Delta}}\right| < 2.$$

5°. **Оценка** $|\Phi_1(\varphi, \varepsilon, \Delta_1)|$. Составим разность $z_{\text{III}} - z_{\text{I}}$. В силу формул (12), (10), она равна

$$\Delta_1 + \widetilde{\Phi}(z, \varepsilon, \Delta(\Delta_1, \varepsilon)) - \widetilde{\Phi}(z, \varepsilon, \Delta_0^*(\varepsilon)).$$

лемме 5 § 3, при $|\operatorname{Im} z| \leqslant R_0$, $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$, $|\Delta_1| < \frac{\Delta_0}{6}$

$$|\widetilde{\Phi}(z, \varepsilon, \Delta(\Delta_1, \varepsilon)) - \widetilde{\Phi}(z, \varepsilon, \Delta_0^*(\varepsilon))| < |\Delta - \Delta_0^*|,$$

как $\left|\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial\Delta}\right| < 1$. Сопоставляя полученное неравенство с неравенством имеем:

$$|z_{\text{III}} - z_{\text{I}}| < 3|\Delta_1|. \tag{22}$$

меняя лемму 5 § 3 к правой части (8), на основании (22), (18) и венств (7), (10) § 4 находим, что

$$|\hat{\Phi}_1(z, \varepsilon, \Delta)| < \frac{C}{\delta^5} 3|\Delta_1| < \delta^2|\Delta_1| \tag{23}$$

при условии, что $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$, $|\Delta_1| < \frac{\Delta_0}{6}$,

$$|\operatorname{Im}(z + \Delta_1 + \widetilde{F} + \widetilde{\Phi})| \leqslant R_0 - 2\delta.$$

Последнее неравенство выполнено, если

$$|\operatorname{Im} z| < R_0 - 6\delta, \quad |\Delta_1| < C, \quad |\varepsilon| < \varepsilon_0.$$

вительно, тогда

$$|\widetilde{F} + \widetilde{\Phi}| < \delta + 2\delta\Delta_0 < 3\delta$$

формулы (7), (8), (17) § 4 и неравенство (20)] в обоих членах $z_{\text{III}}$ При $|\operatorname{Im}\varphi| \leqslant R_0 - 7\delta$, $|\Delta_1| < C$ имеем, в силу 2°:

$$|\operatorname{Im} z| < R_0 - 6\delta.$$

ому из (23) следует оценка (15) § 4.

новная лемма доказана.

## § 6. Доказательство теоремы 2

6.1. Построение $z(\varphi, \varepsilon)$ и $\Delta(\varepsilon)$. Положим в основной лем $\Phi = 0$, а за $F(z, \varepsilon)$ примем функцию $F(z, \varepsilon)$ теоремы 2. Выберем $\delta_1$ так, чтобы

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \frac{R_0}{8}, \text{ где } \delta_n = \delta_{n-1}^{1\frac{1}{2}} \quad (n = 2, 3, \dots);$$

$$2)\ \delta_1 < \frac{K}{64}, \quad \delta_1 < \frac{1}{36}.$$

Пусть $6\delta_1^{12} < \Delta_0 < 1$, $R = R_0$, $K$ — то же, что в условии теоремы. П $L\varepsilon' < C_1 = \delta_1^{12}$, $0 < \varepsilon' < \varepsilon_0$, $C_1$ и $\delta_1$ — соответственно $\varepsilon_0$, $C$ и $\delta$ основ леммы. Тогда все ее предположения выполнены, и при $|\operatorname{Im} \varphi_1| \leqslant R - 7$ $\varepsilon| \leqslant \varepsilon'$, $|\Delta_1| \leqslant C_1$ мы получаем:

$$\varphi_1 \to \varphi_1 + 2\pi\mu + \Delta_1 + F_1(\varphi_1, \varepsilon) + \Phi_1(\varphi_1, \varepsilon, \Delta_1),$$

где

$$|F_1(\varphi_1, \varepsilon)| \leqslant \delta_1^{18} = \delta_2^{12},$$

$$|\Phi_1(\varphi_1, \varepsilon, \Delta_1)| \leqslant \delta_1^2 |\Delta_1| < \delta_2 |\Delta_1|,$$

$$|z(\varphi_1, \varepsilon) - \varphi_1| \leqslant \delta_1, \quad \left|\frac{\partial z}{\partial \varphi_1}\right| < 2,$$

$$|\Delta(\Delta_1, \varepsilon)| \leqslant \Delta_0,$$

$$\left|\frac{\partial \Delta}{\partial \Delta_1}\right| < 2.$$

Вообще, если определены функции $(k = 1, 2, \dots, n)$

$$\Delta_{k-1}(\Delta_k, \varepsilon), \quad F_k(\varphi_k, \varepsilon), \quad \Phi_k(\varphi_k, \varepsilon, \Delta_k), \quad \varphi_{k-1}(\varphi_k, \varepsilon)\,^*,$$
$$A_k(\varphi_k, \varepsilon, \Delta_k),$$

удовлетворяющие заключению основной леммы с заменой $z$ на $\overset{*}{\varphi}_{k-1}$, $\varphi$ $\varphi_k$, $R_0$ на $R_{k-1}$, $R_0 - 7\delta$ на $R_k = R_{k-1} - 7\delta_k$, $\Delta_0$ на $\delta^*_{k-1}$, $A_0$ на $A_{k-1}$. на $A_k$, $\delta$ на $\delta_k$, $C$ на $C_k = \delta_k^{12}$ при каждом $k = 1, 2, \dots, n$, то мы мо ввести функции $\varphi_{n+1}$ и $\Delta_{n+1}$ так, что заключение основной леммы бу для них справедливо при $k = 1, \dots, n + 1$. Действительно, неравенст (9) и (10) § 4 будут выполнены для $\delta_n$ в силу определения $\delta_1$, (1 следует из неравенства $C_{k+1} = C_k^{1\frac{1}{2}} < \frac{1}{6} C_k$, а все остальные услов леммы входят в заключение (конечно, для функций предыдущего номе Поэтому мы можем считать все указанные выше функции построенн Функции $\varphi_{n-1}(\varphi_n, \varepsilon)$, $\Delta_{n-1}(\Delta_n, \varepsilon)$ $(n = N, \; N - 1, \dots, 1)$ определя функции

$$z^{(N)}(\varphi_N, \varepsilon) = z(\varphi_1(\dots(\varphi_N, \varepsilon)\dots), \varepsilon),$$
$$\Delta_0^{(N)}(\Delta_N, \varepsilon) = \Delta(\Delta_1(\dots(\Delta_N, \varepsilon)\dots), \varepsilon).$$

Положим $\Delta_N = 0$, и пусть $\Delta_0^{(N)}(0, \varepsilon) = \Delta^{(N)}(\varepsilon)$. Тогда

$$\Delta(\varepsilon) = \lim_{N \to \infty} \Delta^{(N)}(\varepsilon),$$

---

* $\varphi_0$ означает $z$, $C_0$ означает $\Delta_0$; $\Delta_{1-1}(\Delta_1, \varepsilon) = \Delta(\Delta_1, \varepsilon)$.

$$z(\varphi,\ \varepsilon)=\lim_{N\to\infty} z^{(N)}(\varphi,\ \varepsilon).$$

обоснования сходимости $\Delta^{(N)}(\varepsilon)$ и $z^{(N)}(\varphi,\ \varepsilon)$ отметим, прежде всего, согласно определению $\delta_n$, при $\omega>0$

$$\lim_{N\to\infty} 2^N \delta_N^{\omega}=0.$$

.2. Сходимость $\Delta^{(N)}(\varepsilon)$. Функции $\Delta_0^{(N)}(\Delta_N,\ \varepsilon)$, как это следует ормулы (7) и из неравенства (17) § 4, определены при $|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0$, $\leqslant\delta_N^{12}$. Так как

$$\frac{\partial\Delta_0^{(N)}}{\partial\Delta_N}=\frac{\partial\Delta}{\partial\Delta_1}\cdots\frac{\partial\Delta_{N-1}}{\partial\Delta_N},$$

указанной области, на основании (5), выполнено неравенство

$$\left|\frac{\partial\Delta_0^{(N)}}{\partial\Delta_N}\right|<2^N,$$

ак как

$$|\Delta_N\ [\Delta_{N+1}(\ldots(\Delta_M,\varepsilon)\ldots\varepsilon),\varepsilon]|\leqslant\delta_N^{12},$$

$\Delta_M|\leqslant\delta_M^{12}\ (M\geqslant N)$, то, по лемме 5 § 3,

$$|\Delta_0^N[\Delta_N(\Delta_{N+1}\ldots(\Delta_M,\ \varepsilon)\ldots,\varepsilon),\ \varepsilon]-\Delta_0^{(N)}(0,\ \varepsilon)|<2^N\delta_N^{12}.$$

да, в силу (7), выводим:

$$|\Delta^{(N)}(\varepsilon)-\Delta^{(M)}(\varepsilon)|<2^N\delta_N^{12},$$

да непосредственно следует равномерная сходимость $\Delta^{(N)}(\varepsilon)$ при $\leqslant\varepsilon_0$, а значит, и аналитичность $\Delta(\varepsilon)$.

3. Сходимость $z^{(N)}(\varphi,\ \varepsilon)$. Согласно основной лемме, функции $\varphi_n$, $\varepsilon)$ определены при $|\mathrm{Im}\,\varphi_n|\leqslant R_n$, $|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0$ и, в силу (3), отлия от своего аргумента $\varphi$ меньше, чем на $\delta_n$, поэтому

$$|\mathrm{Im}\,\varphi_{n-1}(\varphi_n,\ \varepsilon)|<R_{n-1}.$$

м образом, формула (6) определяет $z^{(N)}(\varphi,\ \varepsilon)$ в полосе

$$|\mathrm{Im}\,\varphi|\leqslant R_n=R_0-7\sum_{k=1}^{n}\delta_k.$$

но условию 1) выбора $\delta_1$, все эти полосы содержат полосу $\leqslant\frac{R}{8}$, так что в последней определены все функции $z^{(N)}(\varphi,\ \varepsilon)$.

ак как

$$|\varphi_N(\varphi_{N+1}\cdots(\varphi_M,\ \varepsilon),\ldots,\varepsilon)-\varphi_M|<\sum_{k=N}^{M}\delta_k,$$

сумма, согласно определению $\delta_n$, не больше $2\delta_N$, то из (6) нахо-

$$|z^{(N)}(\varphi,\ \varepsilon)-z^{(M)}(\varphi,\ \varepsilon)|<\left|\frac{\partial z^{(N)}}{\partial\varphi}\right|2\delta_N.$$

На основании (3),

$$\left|\frac{\partial z^{(N)}}{\partial\varphi}\right| < 2^N,$$

следовательно,

$$|z^{(N)}(\varphi, \varepsilon) - z^{(M)}(\varphi, \varepsilon)| < 2^{N+1}\delta_N,$$

что доказывает равномерную сходимость $z^{(N)}(\varphi, \varepsilon)$ при $|\operatorname{Im}\varphi| \leqslant$ $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$.

6.4. Определим $\varphi(z, \varepsilon)$ как обратную функцию к $z(\varphi, \varepsilon)$. Из не венств (1), (2), ввиду того, что $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$, вытекает, что

$$\varphi(z, \varepsilon) \to \varphi(z, \varepsilon) + 2\pi\mu,$$

когда $z \to A(z, \varepsilon, \Delta(\varepsilon))$. Теорема 2 доказана.

## § 7. О моногенных функциях

7.1. Понятие моногенности. При исследовании зависимо решения уравнения (1) § 2 от параметра $\mu$ мы встретились с ана тической в верхней и нижней полупл костях и всюду разрывной на действи тельной оси функцией. Такими же св ствами обладают (см. § 8) все построен в § 6 функции $\Delta_n$, $g_n$, $\varphi_n$, $F_n$, $\Phi_n$, р сматриваемые как функции от $\mu$. Функц эти принадлежат к типу тех, котор Борель (9) назвал моногенными.

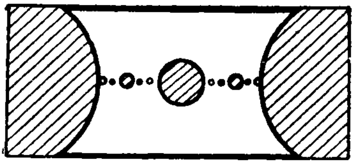

Рис. 2

Моногенные функции Бореля определены на множестве $E = \bigcup_{k=1}^{\infty}$ где $E_k \subseteq E_{k+1}$ — совершенные компактные подмножества комплекс плоскости. В нашем случае $E_k$ есть множество $M_K^R$ точек $\mu$ прямоуго ника комплексной плоскости $|\operatorname{Im}\mu| \leqslant R$, $0 \leqslant \operatorname{Re}\mu \leqslant 1$, для которых

$$\left|\mu - \frac{m}{n}\right| \geqslant \frac{K}{|n|^3} \quad \left(K = \frac{1}{k}\right),$$

т. е. множество, образованное выкидыванием из прямоуголь $|\operatorname{Im}\mu| \leqslant R$, $0 \leqslant \operatorname{Re}\mu \leqslant 1$ заштрихованных на рис. 2 кругов $C_{\frac{m}{n}}$, диусов $\frac{K}{|n|^3}$ с центрами в рациональных точках $\frac{m}{n}$.

Определение. Функция $f(\mu)$ *равномерно дифференцируем* совершенном компакте $F$ комплексной плоскости, и функция $g(\mu)$ — производная, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon)$ такое, что

$$\left|\frac{f(\mu_1) - f(\mu_2)}{\mu_1 - \mu_2} - g(\mu_3)\right| < \varepsilon,$$

коль скоро $|\mu_1 - \mu_3| < \delta$, $|\mu_2 - \mu_3| < \delta$, $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in F$.

нкция *моногенна* на $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, если она равномерно дифферен- ма на каждом $E_k$.

частности, равномерно дифференцируемая на $E$ функция моногенна $= \bigcup_{k=1}^{1} E_k$, и, наоборот, моногенная на $E = \bigcup_{k=1} E_k$ функция равномер- дифференцируема на $E$. Такие функции мы будем называть моно- ми на $E$, в отличие от моногенных на $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$.

чевидны следующие свойства моногенных функций.

Из моногенности на $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ следует непрерывность производ- на $E_k$.

2) Если Г — спрямляемая кривая, соединяющая две точки $\alpha$ и $\beta$ в то

$$\int_{\Gamma} f'(\mu)\, d\mu = f(\beta) - f(\alpha).$$

Функция, аналитическая в окрестности каждой точки множества огенна на нем.

4) Если $E_k$ содержит область, то в ней моногенная на $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ ия аналитична.

Пример неаналитической моногенной функции построен в § 2, что зано в п. 7.4 (см. лемму 10; то, что $g(\mu)$ не аналитична при $= 0$, предоставляется доказать читателю).

войства моногенной функции могут существенно зависеть от ее ти определения $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ и от разложения $E$ на $E_k$. Если ско- убывания компонент дополнений к $E_k$ достаточно велика, то, как ал Борель, моногенные функции на $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ обладают многими твами аналитических (интеграл Коши, бесконечная дифференци- ость, единственность моногенного продолжения). Вопрос о том, е из этих свойств сохраняются в нашем случае, мы оставим в сто- так как в дальнейшем (§ 8 и § 11) используется только опреде- равномерной дифференцируемости.

ласс моногенных на $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ функций зависит не только от $E$, от $E_k$. Однако если $E$ получается при помощи другой системы жеств, $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$, $F_k \subseteq F_{k+1}$, таких, что

$$E_{\alpha k} \subseteq F_k \subseteq E_{\beta k} \quad (\alpha < 1 < \beta),$$

лассы функций, моногенных на $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ и на $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$, совпа- т. Множества $M_K^R$ (рис. 2) неудобны для исследования моногенных ний ввиду запутанного характера пересечений кругов $C_{\frac{m}{n}, K}$. Пользуясь предыдущим замечанием, мы заменим эти множества друг системой множеств, $N_K^R$, так, что

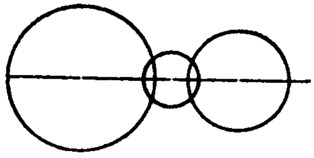

Рис. 3

1. $M^R_{2K} \subseteq N^R_K \subseteq M^R_{\frac{K}{2}}$.

2. Множество $N_K^R$ получается из прямоугольника $|\operatorname{Im}\mu|\leqslant R$, $\operatorname{Re}\mu\in[0,1]$ выкидыванием непересекающихся открытых кругов.

▼ Построение $N_K^R$ $\left(K<\frac{1}{9}\right)$ изложено в п. 7. оно громоздко и может быть пропущено читателем.

7.2. Построение $N_K^R$. Преобразование $M_K^R$ в $N_K^R$ состоит из двух операций. Сперва выкидываемые круги $C_{\frac{m}{n},K}$ уменьшаются до кругов $C'_{\frac{m}{n},K}$ так, чтобы в системе $C'_{\frac{m}{n},K}$ $(m=0,1,\dots;n=1,2,\dots)$ не было «мостов» (см. рис. 3), т. е. троек кругов, из которых меньший пересекается с обоими бо́льшими, тогда как последние между собой не пересекаются. Затем круги $C'$ увеличиваются до $C''_{\frac{m}{n},K}$ так, чтобы два таких круга либо не пересекались, либо один лежал внутри другого. При этом нужно распорядиться таким образом, чтобы

$$C_{\frac{m}{n},K}\supseteq C'_{\frac{m}{n},K}\supseteq C_{\frac{m}{n},\frac{K}{2}},$$

$$C'_{\frac{m}{n},K}\subseteq C''_{\frac{m}{n},K}\subseteq C_{\frac{m}{n},2K}.$$

Тогда

$$C_{\frac{m}{n},\frac{K}{2}}\subseteq C''_{\frac{m}{n},K}\subseteq C_{\frac{m}{n},2K}$$

и после выкидывания из прямоугольника кругов $C''_{\frac{m}{n},K}$ останется множество $N_K^R$, обладающее обоими нужными свойствами.

ЛЕММА 7. *Пусть круги $C_{\frac{m}{n},K}$ и $C_{\frac{p}{q},K}$ $(n\geqslant q)$ пересекаются и $K<\frac{1}{9}$. Тогда $n>2\sqrt[3]{q^4}$, т. е. меньший круг гораздо меньше большего.*

Доказательство. Действительно, сумма радиусов кругов больше расстояния между их центрами, так что

$$\frac{K}{n^3}+\frac{K}{q^3}>\left|\frac{p}{q}-\frac{m}{n}\right|.$$

Так как $pn-qm\neq 0$, то $\left|\frac{p}{q}-\frac{m}{n}\right|\geqslant\frac{1}{qn}$, и

$$K(n^3+q^3)\geqslant q^2n^2;$$

ду неравенства $n \geqslant q$, получаем:

$$K(n^3 + q^3) \geqslant q^4,$$

и

$$n^3 > \frac{q^4}{K} - q^3.$$

тывая, что $K < \frac{1}{9}$, имеем:

$$n^3 > 9q^4 - q^3 \geqslant 8q^4,$$

и требовалось доказать.

Операция 1 — построение $C'_{\frac{m}{n},K}$. Это построение состоит из онечного количества последовательно проводимых этапов таких, после $n$-го этапа оказываются построенными круги $C'_{\frac{m}{n},K}$ $(0 \leqslant m \leqslant n)$, адающие следующими свойствами:

$A_n$. Никакой круг $C_{\frac{m_1}{n_1},K}$ $(n_1 > n)$ не может соединять круг $C'_{\frac{m}{n},K}$ угом $C'_{\frac{m_2}{n_2},K}$ $(n_2 \leqslant n)$, если эти круги $C'_{\frac{m}{n},K}$ и $C'_{\frac{m_2}{n_2},K}$ сами не пересе- ются.

$B_n$. $C_{\frac{m}{n},\frac{K}{2}} \subseteq C'_{\frac{m}{n},K} \subseteq C_{\frac{m}{n},K}$.

Начнем с первого этапа. Пусть $C'_{\frac{m}{1},K} = C_{\frac{m}{1},K}$. Тогда свойство $B_1$ олнено. Свойство $A_1$ тоже выполнено, так как диаметр круга $C_{\frac{m_1}{n_1},K}$ $(n_1 > 1)$ меньше

$$\frac{2K}{n_1^3} < \frac{2}{9\cdot 8} \quad \left(K < \frac{1}{9}\right),$$

стояние между кругами $C_{\frac{0}{1},K}$ и больше

$$1 - 2K > \frac{2}{3}.$$

вый этап закончен.

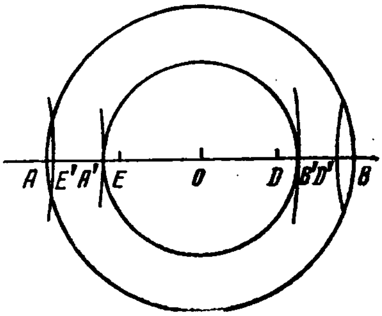

Рис. 4

Предположим, что последовательно елан $n - 1$ этап. Рассмотрим й-нибудь круг $C = C_{\frac{m}{n},K}$ (рис. 4). Пусть $O$ — его центр, $AB$ — диа- лежащий на действительной оси, $E$ и $D$ — середины $AO$ и $OB$. т $C$ может пересекаться только с теми кругами $C'_{\frac{m_2}{n_2},K}$ $(n_2 < n)$, у ко- х $C_{\frac{m_2}{n_2},K}$ пересекается с $C$ (вследствие свойства $B_k$, $k \leqslant n - 1$). Далее, все такие круги $C'_{\frac{m_2}{n_2},K}$ пересекаются и друг с другом (вследствие с ства $\mathrm{A}_k$, $k\leqslant n-1$).

Расположим круги в порядке убывания $n_2$ (роста кругов):

$$C_i = C_{\frac{m_{2,i}}{n_{2,i}},K} \quad (n = n_{2,0} > n_{2,1} > \ldots > n_{2,l} \geqslant 1).$$

На основании леммы 7, $n_{2,i}\geqslant 2n_{2,i+1}$ $(0\leqslant i\leqslant l-1)$, откуда следует. $n>2^l$ или $l<\log_2 n$. Таким образом, окружности кругов $C_{\frac{m_2}{n_2},K}$ в пересечении с диаметром $AB$ не более $2\log_2 n$ точек. Поэтому с частей, на которые эти точки делят отрезок $BD$ и отрезок $AE$, най по части длины большей, чем $\frac{K}{4n^3\log_2 n}$. Диаметр же окруж $C_{\frac{m_1}{n_1},K}$ $(n_1>n)$, пересекающейся с $C$, по лемме 7 не превосходит

$$\frac{K}{8n^4} < \frac{K}{4n^3\log_2 n}.$$

Примем ближние к $O$ концы $B'$ и $A'$ бóльших частей $BD$ и $AE$, о наченных через $B'D'$ и $A'E'$, за концы диаметра $C'_{\frac{m}{n},K}$. Такой вы не противоречит свойству $\mathrm{B}_n$. Ясно, что если окружность $C_1 = C_{\frac{m_1}{n_1},K}$ $(n_1>n)$ пересекается с $C'_{\frac{m}{n},K}$, то она лежит внутри $C$, и кругов $C_{\frac{m_2}{n_2},K}$ $(n_2\leqslant n)$ может пересекаться только с $C_i$. Но так диаметр $C_1$ меньше длин $B'D'$ и $A'E'$, то $C_1$ может пересечь лишь $C_i$, с которыми пересекается $C'_{\frac{m}{n},K}$. Поэтому свойство $\mathrm{A}_n$ тоже вы нено, и, таким образом, нами указан способ проведения $n$-го этапа.

По окончании всех этапов получится система кругов $C'_{\frac{m}{n},K}$, об ющих следующими свойствами:

А. *Никакой круг* $C'_{\frac{m_1}{n_1},K}$ *не может соединять* $C'_{\frac{m_2}{n_2},K}$ *с* $C'_{\frac{m_3}{n_3},K}$. $n_1>n_2$, $n_1>n_3$ *и* $C'_{\frac{m_2}{n_2},K}\cap C'_{\frac{m_3}{n_3},K}=0$.

В. $C_{\frac{m}{n},\frac{K}{2}} \subseteq C'_{\frac{m}{n},K} \subseteq C_{\frac{m}{n},K}$.

Свойство В следует из $\mathrm{B}_n$, а свойство А — из $\mathrm{A}_{n_2}$, если $n_2\geqslant n_3$, $\mathrm{A}_{n_3}$, если $n_3\geqslant n_2$.

Операция 2 — построение $C''_{\frac{m}{n},K}$. Теперь мы увеличим кр системы $C'_{\frac{m}{n},K}$.

Назовем *хвостом* $C = C'_{\frac{m}{n},K}$ совокупность всех $C'_{\frac{m_i}{n_i},K}$ $(n_i>n)$. рые соединимы с $C$ монотонной конечной цепочкой попарно перес кругов $C'_{\frac{m_{j_k}}{n_{j_k}}, K}$ $(0 \leqslant k \leqslant l_i)$:

$$\frac{m_{j_0}}{n_{j_0}} = \frac{m}{n}, \quad n_{j_k} < n_{j_{k+1}}, \quad C'_{\frac{m_{j_k}}{n_{j_k}}, K} \cap C'_{\frac{m_{j_{k+1}}}{n_{j_{k+1}}}, K} \neq 0, \quad \frac{m_{j_{l_i}}}{n_{j_{l_i}}} = \frac{m_i}{n_i}.$$

евидно, если круг $C_1$ входит в хвост круга $C_2$, то хвост $C_1$ весь ит в хвост $C_2$. Более того, если хвосты $C_1$ и $C_2$ пересекаются *, ин из хвостов целиком входит в другой. Докажем это. Предпом противное: пусть круги $C_1$ и $C_2$ о соединить с общим кругом их ов, $C_3$, монотонными цепочками. акие цепочки вместе соединяют $C_1$ Из соединяющих $C_1$ и $C_2$ цепочек ем состоящую из наименьшего а кругов. В ней пересекаются ко соседние круги (см. рис. 5; в изображенной системе кругов рихован хвост наибольшего). Если эта цепочка монотонна, то наше ждение доказано. Если цепочка не монотонна, то в ней есть круг, няющий два превосходящих его, что противоречит свойству А опе 1. Итак, если два хвоста пересекаются, то один из них содер другой.

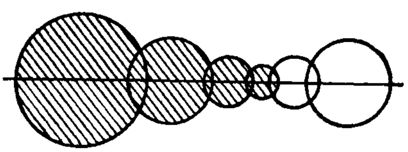

Рис. 5

Пусть $\alpha$ и $\beta$ — верхняя и нижняя грани точек действительной оси, ытых хвостом круга $C = C'_{\frac{m}{n}, K}$. Круг с диаметром $\alpha\beta$ и будет кру $C''_{\frac{m}{n}, K}$. Из сказанного выше следует, что окружности двух таких в не пересекаются **. Очевидно, что $C''_{\frac{m}{n}, K} \supseteq C'_{\frac{m}{n}, K}$. Покажем, что

$$C''_{\frac{m}{n}, K} \subseteq C_{\frac{m}{n}, 2K}.$$

йствительно, основываясь на лемме 7, легко оценить размер а $C$. Пусть круг $C_1$ входит в хвост $C$ и монотонная цепочка, яющая $C_1$ с $C$, состоит из $N$ кругов. Так как каждый следующий х, по лемме 7, не менее чем в 8 раз меньше предыдущего, то их диаметров не превосходит $\frac{1}{7}$ диаметра $C$ при любом $N$. а видно, что $\alpha$ и $\beta$ удалены от $C'_{\frac{m}{n}, K}$ не более чем на $\frac{1}{7}$ диа а $C_{\frac{m}{n}, K}$, а от центра $\frac{m}{n}$ — не более чем на $1\frac{2}{7}$ радиуса $C_{\frac{m}{n}, K}$, а следует, что

$$C''_{\frac{m}{n}, K} \subseteq C_{\frac{m}{n}, 2K}.$$

---

* егко видеть, что если два хвоста пересекаются как множества точек, то они общий круг.

** Но могут касаться.

Построение $N_K^R$ закончено.

7.3. Дифференцирование последовательности. Вы в комплексную плоскость $\mu$ был предпринят главным образом р следующей леммы, которая несправедлива, если под множеством понимать его часть, лежащую на действительной оси.

ЛЕММА 8. *Пусть последовательность функций $f_n(\mu)$, моногенны множестве $N_K^R$, сходится на нем равномерно к $f(\mu)$, а производные дятся равномерно к $g(\mu)$. Тогда $f(\mu)$ м генна на $N_K^R$ и $f'(\mu) = g(\mu)$.*

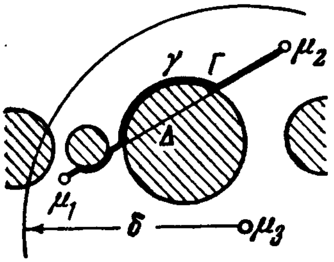

Рис. 6

Доказательство. 1. Пусть ε Мы должны найти $\delta > 0$ такое, чтобы

$$\left|\frac{f(\mu_1)-f(\mu_2)}{\mu_1-\mu_2} - g(\mu_3)\right| < \varepsilon,$$

когда $|\mu_1-\mu_3| < \delta$, $|\mu_2-\mu_3| < \delta$, $\mu_1$, $\mu_3 \in N_K^R$.

Если $\delta > 0$ достаточно мало, то все эти точки лежат в одной к поненте $N_K^R$.

Покажем, что в таком случае точки $\mu_1$, $\mu_2$ можно соединить в спрямляемой кривой $\Gamma$ так, чтобы выполнялись условия:

1) для любой точки $\mu \in \Gamma$ $|\mu-\mu_3| < 2\delta$;

2) длина $\Gamma$ меньше $2|\mu_1-\mu_2|$.

Действительно, соединим точки $\mu_1$ и $\mu_2$ отрезком $\mu_1\mu_2$ (см. рис. Этот отрезок может пересекаться с некоторыми кругами $C_i$, вы ванием которых из прямоугольника $|\mathrm{Im}\,\mu| \leqslant R$, $\mathrm{Re}\,\mu \in [0,1]$ обра множество $N_K^R$. Эти круги попарно не пересекаются и не отделяю от $\mu_2$ в $N_K^R$, так как точки $\mu_1$ и $\mu_2$ лежат в одной компоненте. К $C_i$ высекают на $\mu_1\mu_2$ непересекающиеся интервалы $\Delta_i$. Заменим ка акой интервал $\Delta_i$ меньшей из двух дуг, на которые $\mu_1\mu_2$ делит о ность $C_i$,— дугой $\gamma_i$. Длина $\Delta_i$ увеличится при такой замене не чем в $\frac{\pi}{2}$ раз, поэтому длина $\Gamma$ будет меньше $2|\mu_1-\mu_2|$. Рассто $|\mu_1-\mu_2|$, по условию, не превосходит $2\delta$, поэтому все точки $\gamma_i$ ме чем на $\delta$ удалены от середины $\Delta_i$. Последняя точка, как и все отрезка $\mu_1\mu_2$, лежит в круге $|\mu-\mu_3| < \delta$, поэтому для любой $\mu \in \gamma_i$

$$|\mu-\mu_3| < 2\delta.$$

Таким образом, кривая $\Gamma$ — искомая.

2. Мы уже отмечали, что если $\varphi(\mu)$ моногенна в $N_K^R$ и $\Gamma$ — спря емая кривая с концами $\mu_1$ и $\mu_2$, то

$$\int_\Gamma \varphi'(\mu)\,d\mu = \varphi(\mu_2) - \varphi(\mu_1).$$

(Для доказательства достаточно сравнить интеграл с интеграл суммой.)

рименяя это равенство к построенной выше кривой Γ и моногенным, ловию, функциям $f_n(\mu)$, получаем:

$$\int_{\Gamma} f_n'(\mu)\,d\mu = f_n(\mu_2) - f_n(\mu_1).$$

у равномерной сходимости $f_n$ к $f$ и $f_n'$ к $g$, слева и справа можно йти к пределу:

$$\int_{\Gamma} g(\mu)\,d\mu = f(\mu_2) - f(\mu_1).$$

Оценим

$$\left|\frac{f(\mu_2) - f(\mu_1)}{\mu_2 - \mu_1} - g(\mu_3)\right|.$$

этого рассмотрим интеграл

$$\int_{\Gamma} (g(\mu) - g(\mu_3))\,d\mu = f(\mu_2) - f(\mu_1) - (\mu_2 - \mu_1)\,g(\mu_3).$$

имеем:

$$g(\mu) - g(\mu_3))\,d\mu\,\Big| \leqslant \int_{\Gamma} |g(\mu) - g(\mu_3)|\,|d\mu| \leqslant \max_{\mu\in\Gamma} |g(\mu) - g(\mu_3)|\cdot 2\,|\mu_2 - \mu_1|,$$

как длина Γ меньше $2|\mu_2 - \mu_1|$.

Итак,

$$\left|\frac{f(\mu_2) - f(\mu_1)}{\mu_2 - \mu_1} - g(\mu_3)\right| \leqslant 2\max_{\mu\in\Gamma} |g(\mu) - g(\mu_3)|.$$

ая часть последнего неравенства, согласно свойству 1) кривой Γ, (удвоенное) приращение $g(\mu)$ на отрезке длиной меньше $2\delta$ и, ввиду омерной непрерывности непрерывной на компакте $N_K^R$ функции $g(\mu)$, ится к нулю вместе с $\delta$. Лемма 8 доказана.

**.4. Функции нескольких переменных и действия ми.** В дальнейшем нам понадобятся функции, аналитические по м переменным и моногенные по другим.

усть переменная $z$ — угловая (меняется в полосе $\operatorname{Im} z \in (ab)$ *) и имеет д $2\pi$ **, переменные $\varepsilon$ и $\Delta$ меняются в окрестности нуля, а $\mu \in N_K^R$.

пределение. Функция $f(z, \varepsilon, \Delta, \mu)$ *аналитична по* $z$, $\varepsilon$, $\Delta$ *и моно-* *по* $\mu \in N_K^R$, если ряд

$$f(z, \varepsilon, \Delta, \mu) = \sum f_{kmn}(\mu)\, e^{ikz}\, \varepsilon^m\, \Delta^n,$$

тором коэффициенты суть моногенные функции $\mu \in N_K^R$, сходится те с производной по $\mu$ равномерно при $\mu \in N_K^R$ *и* $z$, $\varepsilon$, $\Delta$, меняющихся азанных областях.

чевидно, такая функция непрерывна, причем

а) при фиксированном $\mu$ она аналитична по $z$, $\varepsilon$, $\Delta$ и

b) при фиксированных $z$, $\varepsilon$, $\Delta$ она моногенна по $\mu \in N_K^R$. Свойство b) кает из леммы 8.

---

* Границы могут зависеть от $\mu$.

** Т. е. при увеличении $z$ на $2\pi$ функции $z$ получают приращение 0 или $2\pi$.

ЛЕММА 9. *Пусть функции* $h_i(z, \varepsilon, \Delta, \mu)$ *моногенны по* $\mu \in E$ *и ана тичны по* $z, \varepsilon, \Delta$. *Тогда тем же свойством обладают в соответствую областях*:

1) *функции*

$$h_1(z, \varepsilon, \Delta, \mu) + h_2(z, \varepsilon, \Delta, \mu), \quad h_1(z, \varepsilon, \Delta, \mu) h_2(z, \varepsilon, \Delta, \mu),$$
$$h_1(h_2(z, \varepsilon, \Delta, \mu), \varepsilon, \Delta, \mu), \quad h_1(z, \varepsilon, h_2(z, \varepsilon, \Delta, \mu), \mu);$$

2) *решение* $\varphi(z, \varepsilon, \Delta, \mu)$ *уравнения* $h(\varphi, \varepsilon, \Delta, \mu) = z$;

3) *решение* $\gamma(z, \varepsilon, \Delta, \mu)$ *уравнения* $h(z, \varepsilon, \gamma, \mu) = \Delta$;

4) *частные производные* $h$ *по* $z, \varepsilon, \Delta$;

5) *интеграл по параметру* $\int\limits_0^{2\pi} h(z, \varepsilon, \Delta, \mu)\, dz$,

*причем во всех этих случаях применимы обычные правила диффе цирования, например в случае* 2)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mu} = - \frac{\dfrac{\partial h}{\partial \mu}}{\dfrac{\partial h}{\partial \varphi}}.$$

Доказательство повторяет хорошо известные из обычного ана рассуждения и опускается.

ЛЕММА 10. *Пусть функция* $f(z, \varepsilon, \Delta, \mu) = \tilde{f}$ *аналитична по* $z$ *в об сти* $|\operatorname{Im} z| \leqslant R$; $\varepsilon$, $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$; $|\Delta| \leqslant \Delta_0$ *и моногенна по* $\mu \in N_K^R$, *и пуст указанной области*

$$|f| \leqslant C, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial \mu}\right| \leqslant L.$$

*Тогда решение уравнения*

$$g(z + 2\pi\mu, \varepsilon, \Delta, \mu) - g(z, \varepsilon, \Delta, \mu) = f(z, \varepsilon, \Delta, \mu)$$

*моногенно по* $\mu \in N_K^R$ *и аналитично по* $z$ *в области* $|\operatorname{Im}(z - 2\pi\mu)| \leqslant R -$ $\varepsilon$, $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$, $\Delta$, $|\Delta| \leqslant \Delta_0$, *причем в этой области*

$$|g| \leqslant \frac{4C}{K\delta^3}, \quad \left|\frac{\partial g}{\partial z}\right| \leqslant \frac{8C}{K\delta^4}, \quad \left|\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}\right| \leqslant \frac{10C}{K\delta^5},$$
$$\left|\frac{\partial g}{\partial \mu}\right| \leqslant \frac{C + L}{K^2} \frac{10^3}{\delta^6}, \quad \left|\frac{\partial^2 g}{\partial z \partial \mu}\right| \leqslant \frac{C + L}{K^2} \frac{10^3}{\delta^7}.$$

Доказательство. Решение дается при фиксированном рядом (2) § 2

$$\sum_{n \neq 0} \frac{f_n(\mu, \varepsilon, \Delta)}{e^{2\pi i n \mu} - 1} e^{inz},$$

равномерную сходимость которого при $|\operatorname{Im}(z - 2\pi\mu)| \leqslant R - 2\delta$ требу установить, ибо

$$f_n(\mu, \varepsilon, \Delta) = \sum f_{nkl}(\mu) \varepsilon^k \Delta^l.$$

Но равномерная сходимость этого ряда установлена в § 2 в с искомыми оценками $g$ и $\frac{\partial g}{\partial z}$ при доказательстве теоремы 1′, ибо

$$N_K^{\frac{1}{2\pi}} \subseteq M_{\frac{K}{2}}^{\frac{1}{2\pi}}.$$

остальных производных получаются путем дифференцирования по обычным формулам с учетом неравенства (13) § 2.

## § 8. О зависимости построений теоремы 2 от $\mu$

Мы видели в п. 7.4, что решение линейного уравнения (1) § 2 от $\mu$ моногенно. В настоящем параграфе доказывается моноген- $\mu$ функций $\Delta_n$, $F_n$, $\Phi_n$, $g_n$, $\Delta^{(n)}$, построенных в § 6.

ывается, область моногенности по мере увеличения $n$ сужается $2\pi\mu|$ за каждый шаг), и автору не удалось установить, моно- ли зависит от $\mu$ решение уравнения (1) § 4.

огенность $\Delta^{(n)}$ по $\mu$ при действительных $\mu$ используется в § 11. будем опираться также на (равномерную по $n$) малость $\frac{\partial\Delta^{(n)}}{\partial\mu}$ ых $\varepsilon$.

сокращения громоздких выражений в этом параграфе аргумент $\varepsilon$ функций опускается, подобно тому как раньше игнорировалась сть от $\mu$ и аргументами считались только $z$, $\varphi$, $\varepsilon$, $\Delta$.

роение $\Delta^{(n)}(\mu)$ в § 6 проводилось следующим образом.

за шагом строились такие новые параметры $\varphi_n = \varphi_n(\varphi_{n-1}, \mu)$ е $\Delta_{n-1} = \Delta_{n-1}(\Delta_n, \mu)$, что преобразование

$$\to \varphi_{n-1} + 2\pi\mu + \Delta_{n-1}(\Delta_n, \mu) + F_{n-1}(\varphi_{n-1}, \mu) + \Phi_{n-1}(\varphi_{n-1}, \Delta_{n-1}(\Delta_n, \mu)\,\mu)$$

ращалось в преобразование

$$\varphi_n \to \varphi_n + 2\pi\mu + \Delta_n + F_n(\varphi_n, \mu) + \Phi_n(\varphi_n, \Delta_n, \mu)$$

начительно меньшими $F$ и $\Phi$, причем $\varphi_0 = z$, $F_0' = F$, $\Phi_0 = 0$, $\Delta_0 = \Delta$. Далее, строились такие $\Delta^{(n)}(\mu)$, что преобразование

$$z \to z + 2\pi\mu + \Delta^{(n)}(\mu) + F(z)$$

ращалось в переменной $\varphi_n$ в преобразование

$$\varphi_n \to \varphi_n + 2\pi\mu + F_n(\varphi_n, \mu) + \Phi_n(\varphi_n, 0, \mu),$$

его мы полагали

$$\begin{aligned} &\Delta_k^{(n)}(\mu) = \Delta_k(\Delta_{k+1}^{(n)}(\mu), \mu) \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1), \\ &\Delta_n^{(n)}(\mu) = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

образом мы получили:

$$\Delta_0^{(n)}(\mu) = \Delta^{(n)}(\mu).$$

ТЕОРЕМА 3. *В условиях теоремы* 2 *при достаточно малом* $\varepsilon > 0$, $K < \frac{1}{9}$

$$\Delta(\mu) = \lim_{n\to\infty} \Delta^{(n)}(\mu),$$

*функции* $\Delta^{(n)}(\mu)$ *моногенны по* $\mu \in N_K^{r_n}$ $(r_n > 0)$ *и при этих условиях* $< 6L|\varepsilon|$.

казательство этой теоремы опирается на следующую лемму, ряющую основную лемму [см. §§ 4 и 5].

ЛЕММА 11. *Пусть даны аналитически зависящее от* $\Delta$ *и моногенн* *от* $\mu\in N_K^r$ *семейство аналитических отображений окружности*

$$z\to A_0(z,\ \Delta,\ \mu)=z+2\pi\mu+F(z,\ \mu)+\Delta+\Phi(z,\ \Delta,\ \mu)$$

*и числа* $R_0>0$, $\frac{1}{9}>K>0$, $\delta>0$, $C>0$, $0<\Delta_0<1$, $0<r<\frac{1}{2\pi}$, $2\pi r\leqslant$ $\leqslant R_0-5\delta$ *такие, что*

1) $F(z+2\pi,\ \mu)=F(z,\ \mu)$, $\Phi(z+2\pi,\ \Delta,\ \mu)=\Phi(z,\ \Delta,\ \mu)$;

2) *при* $\operatorname{Im}z=\operatorname{Im}\mu=\operatorname{Im}\Delta=0$ *всегда* $\operatorname{Im}F=\operatorname{Im}\Phi=0$;

3) *при* $|\operatorname{Im}z|\leqslant R_0$, $\mu\in N_K^r$, $|\Delta|\leqslant\Delta_0$

$$|F(z,\ \mu)|\leqslant C,\qquad (2$$

$$\left|\frac{\partial F(z,\ \mu)}{\partial\mu}\right|\leqslant C,\qquad ($$

$$|\Phi(z,\ \mu,\ \Delta)|\leqslant\delta^2|\Delta|,\qquad ($$

$$\left|\frac{\partial\Phi(z,\ \mu,\ \Delta)}{\partial\mu}\right|\leqslant\delta^2|\Delta|;\qquad ($$

4) *число* $\delta$ *удовлетворяет неравенству*

$$\delta<\frac{K^2}{5\cdot10^4};\qquad ($$

5) $C=\delta^{27}$, $\Delta_0=\delta^{26}$.

*Тогда существуют функции* $z(\varphi,\mu)$, $\Delta(\Delta_1,\ \mu)$, *аналитические по* $\varphi$, $\Delta$ *и моногенные по* $\mu\in N_K^r$, *такие, что*

1. *Тождественно*

$$z(A_1(\varphi,\ \mu,\ \Delta_1),\ \mu)=A_0(z(\varphi,\ \mu),\ \Delta(\Delta_1,\ \mu),\ \mu),$$

*где*

$$A_1(\varphi,\ \mu,\ \Delta_1)\equiv\varphi+2\pi\mu+\Delta_1+F_1(\varphi,\ \mu)+\Phi_1(\varphi,\ \mu,\ \Delta_1).$$

2. $F_1(\varphi+2\pi,\ \mu)=F_1(\varphi,\ \mu)$, $\quad\Phi_1(\varphi+2\pi,\ \mu,\ \Delta_1)=\Phi_1(\varphi,\ \mu,\ \Delta_1)$

$$z(\varphi+2\pi,\ \mu)=z(\varphi,\ \mu)+2\pi.$$

3. *При* $\operatorname{Im}\varphi=\operatorname{Im}\Delta_1=\operatorname{Im}\mu=0$ *всегда* $\operatorname{Im}z=\operatorname{Im}\Delta=\operatorname{Im}F_1=\operatorname{Im}\Phi_1=$

4. *При* $|\Delta_1|\leqslant\delta^{28}$, $|\operatorname{Im}\varphi|\leqslant R_0-7\delta-|\operatorname{Im}2\pi\mu|$, $\mu\in N_K^r$ *построенны* *функции аналитичны по* $\varphi$, $\Delta_1$, *моногенны по* $\mu\in N_K^r$ *и имеют мест* *соотношения:*

$$|F_1|\leqslant\frac{C^2}{\delta^6},\qquad (7$$

$$|\Phi_1|\leqslant\frac{C}{\delta^6}|\Delta_1|,\qquad (8$$

$$\left|\frac{\partial F_1}{\partial\mu}\right|\leqslant\frac{C^2}{\delta^{13}},\qquad ($$

$$\left|\frac{\partial\Phi_1}{\partial\mu}\right|\leqslant\frac{C}{\delta^{13}}|\Delta_1|,\qquad (1$$

$$\left|\frac{\partial z}{\partial\mu}\right|\leqslant\frac{C}{\delta^7},\qquad (1$$

$$\left|\frac{\partial\Delta}{\partial\mu}\right|\leqslant 4C,\qquad (1$$

$$|\Delta(\Delta_1,\ \mu)|\leqslant\Delta_0,\qquad (1$$

$$|z(\varphi,\ \mu)-\varphi|\leqslant\frac{C}{\delta^4},\qquad ($$

$$\left|\frac{\partial\Delta}{\partial\Delta_1}\right|\leqslant 2,\qquad ($$

$$\left|\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right|\leqslant 2.\qquad (1$$

8.2. Доказательство леммы 11 более громоздко, чем доказательство эвной леммы. Построение повторяет рассуждения п. 5.1 с той разницей, $\mu$ из фиксированного действительного числа превращено в незави- мое комплексное переменное. При построении $\Delta(\Delta_1)$, $z(\varphi)$, $g$, $F_1$ и $\Phi_1$, гласно п. 5.1, используются интегрирование по $z$, решение уравнения § 2, построение обратной функции и подстановка функции в функцию. гласно леммам п. 7.4 все эти операции не выводят из класса функций, ногенных по $\mu \in N_K^r$ и аналитических по $z$, $\Delta$, $\varphi$, $\Delta_1$ в соответствующих ластях.

Поэтому особого рассмотрения требуют только неравенства (9), (10), . (12), которых нет в основной лемме. Их доказательство базируется следующих оценках.

1°. Оценка $\frac{\partial g^*}{\partial\mu}$. На основании пп. 5.1, 7.4 и в силу условия леммы, $\mathrm{Im}\, z| \leqslant R_0$, $\mu \in N_K^r$, $|\Delta| \leqslant \Delta_0$

$$\left|\frac{\partial \tilde{F}}{\partial\mu}\right| \leqslant 2C, \quad \left|\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial\mu}\right| \leqslant 2\delta^2 |\Delta_0| \leqslant 2C.$$

Таким образом, правая часть уравнения (2) § 5 имеет производную $\mu$, не превосходящую $4C$. Применяя лемму 10, находим:

$$|g^*| \leqslant \frac{16C}{K\delta^3}, \tag{17}$$

$$\left|\frac{\partial g^*}{\partial z}\right| \leqslant \frac{32C}{K\delta^4}, \tag{18}$$

$$\left|\frac{\partial^2 g^*}{\partial z^2}\right| \leqslant \frac{40C}{K\delta^5}, \tag{19}$$

$$\left|\frac{\partial g^*}{\partial\mu}\right| \leqslant \frac{5\cdot 10^3 C}{K^2\delta^6}, \tag{20}$$

$$\left|\frac{\partial^2 g^*}{\partial z\partial\mu}\right| \leqslant \frac{5\cdot 10^3 C}{K^2\delta^7} \tag{21}$$

$|\mathrm{Im}(z-2\pi\mu)| \leqslant R-2\delta$, $\mu \in N_K^r$, $|\Delta| \leqslant \Delta_0$.

°. Оценка $\frac{\partial\Delta_0^*}{\partial\mu}$. Из уравнения (4) § 5 и п. 7.4 следует, что

$$\frac{\partial\Delta_0^*(\mu)}{\partial\mu} = -\frac{\frac{\partial\bar{F}}{\partial\mu} + \frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\mu}}{1+\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\Delta}}.$$

ценивая $\Delta_0^*$ как в 1° п. 5.2, находим:

$$|\Delta_0^*| < 2C < \frac{\Delta_0}{2}.$$

При $|\Delta| \leqslant \frac{\Delta_0}{2}$ с помощью интеграла Коши получаем из (4):

$$\left|\frac{\partial\Phi}{\partial\Delta}\right| \leqslant \frac{\delta^2\Delta_0}{\frac{\Delta_0}{2}} = 2\delta < \frac{1}{2}, \quad \left|\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\Delta}\right| < \frac{1}{2}, \quad \left|\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\Delta}\right| < 1.$$

Следовательно, $\left|1+\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\Delta}\right|>\frac{1}{2}$ при $|\Delta|\leqslant\frac{\Delta_0}{2}$. Поэтому, на основании (3 (5) и леммы 9,

$$\left|\frac{\partial\Delta_0^*}{\partial\mu}\right|<2(C+\delta^2\Delta_0).$$

Ввиду (6), $\delta^2\Delta_0<C$, так что

$$\left|\frac{\partial\Delta_0^*}{\partial\mu}\right|<4C \qquad (2$$

при $\mu\in N_N^r$.

3°. Оценка $\frac{\partial g}{\partial\mu}$. Согласно пп. 7.4 и 5.1,

$$\frac{\partial g}{\partial\mu}=\frac{\partial g^*}{\partial\mu}+\frac{\partial g^*}{\partial\Delta}\frac{\partial\Delta_0^*}{\partial\mu}, \qquad (2$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial z\partial\mu}=\frac{\partial^2 g^*}{\partial z\partial\mu}+\frac{\partial^2 g^*}{\partial z\partial\Delta}\frac{\partial\Delta_0^*}{\partial\mu}. \qquad (2$$

Оценим сперва $\frac{\partial g^*}{\partial\Delta}$ и $\frac{\partial^2 g^*}{\partial z\partial\Delta}$. Заметим, что уравнение

$$g^*(z+2\pi\mu,\ \Delta,\ \mu)-g^*(z,\ \Delta,\ \mu)=-\widetilde{F}\ (z,\ \mu)-\widetilde{\Phi}\,(z,\ \Delta,\ \mu)$$

при дифференцировании по $\Delta$ дает уравнение

$$\frac{\partial g^*}{\partial\Delta}(z+2\pi\mu,\ \Delta,\ \mu)-\frac{\partial g^*}{\partial\Delta}(z,\ \Delta,\ \mu)=-\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial\Delta}$$

того же вида относительно $\frac{\partial g^*}{\partial\Delta}$, и мы можем воспользоваться леммой 1 С этой целью оценим $\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial\Delta}$ с помощью интеграла Коши: при $|\operatorname{Im} z|\leqslant 1$ $\Delta|\leqslant\frac{\Delta_0}{2}$

$$\left|\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial\Delta}\right|\leqslant\frac{2\delta^2\Delta_0}{\frac{\Delta_0}{2}}<4\delta^2.$$

По лемме 10, при $|\operatorname{Im}(z-2\pi\mu)|\leqslant R_0-2\delta$, $|\Delta|\leqslant\frac{\Delta_0}{2}$, $\mu\in N_K^r$

$$\left|\frac{\partial g^*}{\partial\Delta}\right|<\frac{4}{K\delta^3}4\delta^2,$$

$$\left|\frac{\partial^2 g^*}{\partial\Delta\,\partial z}\right|<\frac{8}{K\delta^4}4\delta^2.$$

Подставляя эти оценки, оценки (20), (21) и оценку $\Delta_0^*$ из п. 2° в форму (23), (24), находим:

$$\left|\frac{\partial g}{\partial\mu}\right|<\frac{5C}{K^2}\frac{10^3}{\delta^6}+\frac{16}{K\delta}4C<\frac{C10^4}{K^2\delta^6},$$

$$\left|\frac{\partial^2 g}{\partial z\partial\mu}\right|<\frac{5\cdot10^3C}{K^3\delta^7}+\frac{32}{K\delta^2}4C<\frac{C10^4}{K^2\delta^7}$$

при $|\operatorname{Im}(z-2\pi\mu)|\leqslant R-2\delta$, $\mu\in N_K^r$.

4°. Оценка $\frac{\partial\Delta(\Delta_1,\ \mu)}{\partial\mu}$. Аналогично п. 2°, имеем:

$$\frac{\partial\Delta}{\partial\mu}=-\frac{\frac{\partial\overline{F}}{\partial\mu}+\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\mu}}{1+\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\Delta}},$$

ли $|\Delta| \leqslant \frac{\Delta_0}{2}$, то, как в п. 2°, получаем:

$$\left|\frac{\partial \Delta}{\partial \mu}\right| < 4C.$$

того чтобы выполнялось неравенство $|\Delta| < \frac{\Delta_0}{2}$, достаточно, чтобы $\leqslant \delta^{27}$. Действительно, тогда (как это показано в § 5) $|\Delta_0^*| \leqslant 2C$, $-\Delta_0^*| \leqslant 2|\Delta_1|$, и так как $C = \delta^{27}$, то при $|\Delta_1| \leqslant \delta^{27}$ имеем:

$$|\Delta(\Delta_1, \mu)| \leqslant 4\delta^{27} < \frac{\delta^{26}}{2} = \frac{\Delta_0}{2}.$$

к, при $|\Delta_1| \leqslant \delta^{27}$, $\mu \in N_K^r$,

$$\left|\frac{\partial \Delta(\Delta_1, \mu)}{\partial \mu}\right| < 4C. \tag{25}$$

дновременно мы показали, что при $|\Delta_1| \leqslant \delta^{27}$ справедливы оцен- п. 1°.

. Оценка $\frac{\partial \hat{F}_1}{\partial \mu}$. Из пп. 5.1 и 7.4 имеем:

$$\frac{\partial \hat{F}_1(z, \mu)}{\partial \mu} = \left[\frac{\partial g(z_{\text{I}}, \mu)}{\partial \mu} - \frac{\partial g(z_{\text{II}}, \mu)}{\partial \mu}\right] + \left[\frac{\partial g(z_{\text{I}}, \mu)}{\partial z} - \frac{\partial g(z_{\text{II}}, \mu)}{\partial z}\right] 2\pi + \\ + \frac{\partial g(z_{\text{I}}, \mu)}{\partial z}\left[\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \mu} + \frac{\partial \widetilde{\Phi}}{\partial \mu} + \frac{\partial \widetilde{\Phi}}{\partial \Delta}\frac{\partial \Delta_0^*}{\partial \mu}\right], \tag{26}$$

$$z_{\text{I}} = z + 2\pi\mu + \widetilde{F}(z, \mu) + \widetilde{\Phi}(z, \mu, \Delta_0^*(\mu)), \tag{27}$$

$$z_{\text{II}} = z + 2\pi\mu. \tag{28}$$

вые две скобки в правой части (26) оцениваются при помощи лем- о конечном приращении (лемма 5 § 3). Мы имеем:

$$\left|\frac{\partial g(z_{\text{I}})}{\partial \mu} - \frac{\partial g(z_{\text{II}})}{\partial \mu}\right| \leqslant |z_{\text{I}} - z_{\text{II}}| \left|\frac{\partial^2 g}{\partial \mu\, \partial z}\right|;$$

тавляя вместо $z_{\text{I}} - z_{\text{II}}$ и $\frac{\partial^2 g}{\partial \mu\, \partial z}$ их оценки, получаем:

$$\left|\frac{\partial g(z_{\text{I}})}{\partial \mu} - \frac{\partial g(z_{\text{II}})}{\partial \mu}\right| \leqslant \frac{4 \cdot 10^4 C^2}{K^2 \delta^7}$$

налогично,

$$\left|\frac{\partial g(z_{\text{I}})}{\partial z} - \frac{\partial g(z_{\text{II}})}{\partial z}\right| \leqslant \left|\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}\right| |z_{\text{I}} - z_{\text{II}}| \leqslant \frac{40\, C}{K\delta^5} 4C = \frac{160\, C^2}{K\delta^5}.$$

леднее слагаемое в правой части (26) оценивается с помощью не- енств (3), (5), (22), (18) и не превосходит

$$\frac{32\, C}{K\delta^4}(4\, C + 2\, C) < \frac{200\, C^2}{K\delta^4}.$$

Итак,

$$\left|\frac{\partial \hat{F}_1}{\partial \mu}\right| < C^2\left[\frac{4 \cdot 10^4}{K^2\delta^7} + 2\pi\frac{160}{K\delta^5} + \frac{200}{K\delta^4}\right] < \frac{5 \cdot 10^4}{K^2\delta^7} C^2.$$

Все эти оценки справедливы, если аргументы $z_{\text{I}}$ и $z_{\text{II}}$ не выходят бласти $|\operatorname{Im}(z - 2\pi\mu)| \leqslant R_0 - 2\delta$, где действуют оценки $g$ и ее производных. Для этого достаточно, например, чтобы $|\mathrm{Im}\,z|\leqslant R_0$. Действительно, тогда

$$|\widetilde{F}(z,\ \mu)+\widetilde{\Phi}(z,\ \mu,\ \Delta_0^*(\mu))|\leqslant 2C<\delta,$$

т. е.

$$|\mathrm{Im}\,(z_\mathrm{I}-2\pi\mu)|<R_0-2\delta.$$

Таким образом, при $|\mathrm{Im}\,z|\leqslant R_0-3\delta$, $\mu\in N_K^r$, $|\Delta_1|<\delta^{27}$

$$\left|\frac{\partial\hat{F}_1}{\partial\mu}\right|<\frac{5\cdot 10^4}{K^2\delta^7}C^2.$$

6°. Оценка $\frac{\partial}{\partial\mu}(\Delta-\Delta_0^*)$. Мы имеем:

$$\frac{\partial}{\partial\mu}(\Delta(\Delta_1,\ \mu)-\Delta_0^*(\mu))=\frac{\partial\Delta(\Delta_1,\ \mu)}{\partial\mu}-\frac{\partial\Delta(0,\ \mu)}{\partial\mu};$$

по лемме о конечном приращении,

$$\left|\frac{\partial}{\partial\mu}(\Delta-\Delta_0^*)\right|\leqslant\left|\frac{\partial^2\Delta(\Delta_1,\ \mu)}{\partial\Delta_1\partial\mu}\right||\Delta-\Delta_0^*|.$$

Оценим $\left|\frac{\partial^2\Delta(\Delta_1,\ \mu)}{\partial\Delta_1\partial\mu}\right|$ с помощью интеграла Коши как производную $\frac{\partial\Delta}{\partial\mu}$. При $|\Delta_1|\leqslant\delta^{27}$, как это следует из (25), $\left|\frac{\partial\Delta}{\partial\mu}\right|<4C$. Поэтому в кр ге $|\Delta_1|\leqslant\frac{\delta^{27}}{2}$ всегда

$$\left|\frac{\partial^2\Delta}{\partial\Delta_1\partial\mu}\right|<\frac{4C}{\frac{\delta^{27}}{2}}=8.$$

В частности, $\left|\frac{\partial^2\Delta}{\partial\Delta_1\partial\mu}\right|<8$, когда $|\Delta_1|\leqslant\delta^{28}$. Так как

$$|\Delta-\Delta_0^*|\leqslant 2|\Delta_1|,$$

то при $|\Delta_1|\leqslant\delta^{28}$, $\mu\in N_K^r$

$$\frac{\partial}{\partial\mu}(\Delta(\Delta_1,\ \mu)-\Delta_0^*(\mu))|<16|\Delta_1|.$$

7°. Оценка $\frac{\partial}{\partial\mu}[\widetilde{\Phi}(\Delta(\Delta_1,\ \mu))-\widetilde{\Phi}(\Delta_0^*(\mu))]$. Эта производная ра

$$\frac{\partial\widetilde{\Phi}(\Delta)}{\partial\mu}-\frac{\partial\widetilde{\Phi}(\Delta_0^*)}{\partial\mu}+\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial\Delta}\frac{\partial\Delta(\Delta_1)}{\partial\mu}-\frac{\partial\widetilde{\Phi}(\Delta_0^*)}{\partial\Delta}\frac{\partial\Delta_0^*}{\partial\mu}.$$

Первую разность оценим по лемме о конечном приращении: п $|\Delta|\leqslant\frac{\Delta_0}{2}$, $\mu\in N_K^r$, $|\mathrm{Im}\,z|\leqslant R$

$$\left|\frac{\partial\widetilde{\Phi}(\Delta)}{\partial\mu}-\frac{\partial\widetilde{\Phi}(\Delta^*)}{\partial\mu}\right|\leqslant\left|\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial\mu\partial\Delta}\right||\Delta-\Delta_0^*|\leqslant 8\delta^2|\Delta_1|$$

$\Bigg($здесь $\left|\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial\mu\partial\Delta}\right|$ мы оценили с помощью интеграла Коши: $\left|\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial\mu\partial\Delta}\right|$ $<\frac{2\delta^2|\Delta_0|}{\frac{|\Delta_0|}{2}}\leqslant 4\delta^2\Bigg)$.

Вторая разность может быть записана в виде

$$\frac{\partial\widetilde{\Phi}(\Delta)}{\partial\Delta}\left(\frac{\partial\Delta(\Delta_1)}{\partial\mu}-\frac{\partial\Delta_0^*}{\partial\mu}\right)+\frac{\partial\Delta_0^*}{\partial\mu}\left(\frac{\partial\widetilde{\Phi}(\Delta)}{\partial\Delta}-\frac{\partial\widetilde{\Phi}(\Delta_0^*)}{\partial\Delta}\right), \tag{31}$$

первое слагаемое оценивается при помощи неравенства (30) и не восходит 16 $|\Delta_1|$, ибо $\left|\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial\Delta}\right|<1$ (см. п. 2°), а второе слагаемое, по ме о конечном приращении, не превосходит

$$\left|\frac{\partial\Delta^*}{\partial\mu}\right|\left|\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial\Delta^2}\right|\left|\Delta(\Delta_1)-\Delta_0^*\right|\leqslant 4\,C\,\frac{16}{\delta^{24}}\,2\,|\Delta_1|.$$

ь новой является только оценка $\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial\Delta^2}$. Для ее нахождения мы воспользовались выражением для второй производной, получаемым из теграла Коши:

$$\left|\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial\Delta^2}\right|\leqslant 2\,\frac{2\delta^2\Delta_0}{\left(\frac{\Delta_0}{2}\right)^2}=\frac{16}{\delta^{24}}$$

$|\Delta|\leqslant\frac{\Delta_0}{2}$, для чего, как мы видели в п. 4°, достаточно, чтобы вы нялось неравенство $|\Delta_1|\leqslant\delta^{27}$. Сопоставляя все три полученные ки, находим:

$$\left|\frac{\partial}{\partial\mu}[\widetilde{\Phi}(\Delta)-\widetilde{\Phi}(\Delta_0^*)]\right|<8\delta^2|\Delta_1|+16|\Delta_1|+128\,\delta^3|\Delta_1|.$$

чательно имеем:

$$\left|\frac{\partial}{\partial\mu}[\widetilde{\Phi}(\Delta(\Delta_1,\mu))-\widetilde{\Phi}(\Delta_0^*(\mu))]\right|<100|\Delta_1| \tag{32}$$

$\Delta_1|\leqslant\delta^{28}$, $|\operatorname{Im} z|\leqslant R_0$, $\mu\in N_K^r$.

°. Оценка $\frac{\partial}{\partial\mu}\hat{\Phi}_1(z,\mu,\Delta(\Delta_1,\mu))$. Нам будет удобнее рассмотреть функцию от $z$, $\mu$ и $\Delta_1$, а не от $z$, $\mu$, $\Delta$. Мы имеем:

$$=\left[\frac{\partial g(z_{\mathrm{III}})}{\partial\mu}-\frac{\partial g(z_{\mathrm{I}})}{\partial\mu}\right]+\left[\frac{\partial g(z_{\mathrm{III}})}{\partial z}-\frac{\partial g(z_{\mathrm{I}})}{\partial z}\right]\frac{\partial z_{\mathrm{I}}}{\partial\mu}+\frac{\partial g(z_{\mathrm{III}})}{\partial z}\left[\frac{\partial z_{\mathrm{III}}}{\partial\mu}-\frac{\partial z_{\mathrm{I}}}{\partial\mu}\right], \tag{33}$$

$$z_{\mathrm{I}}=z+2\pi\mu+\overline{F}(z,\mu)+\widetilde{\Phi}(z,\mu,\Delta_0^*(\mu)), \tag{27}$$

$$z_{\mathrm{III}}=z+2\pi\mu+\Delta_1+\overline{F}(z,\mu)+\widetilde{\Phi}(z,\mu,\Delta(\Delta_1,\mu))+\Delta_1. \tag{34}$$

е две скобки в правой части (33) оценим как в п. 5°:

$$\left|\frac{\partial g(z_{\mathrm{III}})}{\partial\mu}-\frac{\partial g(z_{\mathrm{I}})}{\partial\mu}\right|\leqslant\left|\frac{\partial^2 g}{\partial\mu\,\partial z}\right|\left|z_{\mathrm{III}}-z_{\mathrm{I}}\right|\leqslant\frac{C\,10^4}{K^2\delta^7}\,3\,|\Delta_1|,$$

ак

$$z_{\mathrm{III}}-z_{\mathrm{I}}=\Delta_1+\widetilde{\Phi}(z,\mu,\Delta)-\widetilde{\Phi}(z,\mu,\Delta^*(\mu))$$

лу оценки (22) § 5,

$$|z_{\mathrm{III}}-z_{\mathrm{I}}|\leqslant 3|\Delta_1|.$$

Аналогично,

$$\left|\left(\frac{\partial g(z_{\text{III}})}{\partial z}-\frac{\partial g(z_{\text{I}})}{\partial z}\right)\frac{\partial z_{\text{I}}}{\partial \mu}\right| \leqslant \left|\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}\right| |z_{\text{III}}-z_{\text{I}}| \left|\frac{\partial z_{\text{I}}}{\partial \mu}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{40\,C}{K\delta^5}\, 3\,|\Delta_1| \left|2\pi+\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \mu}+\frac{\partial \widetilde{\Phi}}{\partial \mu}+\frac{\partial \widetilde{\Phi}}{\partial \Delta}\frac{\partial \overset{*}{\Delta}_0}{\partial \mu}\right| \leqslant \frac{40\,C}{K\delta^5}\, 3\,|\Delta_1|\,(2\pi+6\,C) \leqslant \frac{1600\,C}{K\delta^5}\,|\Delta_1$$

где множитель $\left|\frac{\partial z_{\text{I}}}{\partial \mu}\right|$ оценен с помощью условия 3) леммы 11 и оп ки (22) с учетом того, что $C < 1$. Нам остается оценить $\frac{\partial}{\partial \mu}(z_{\text{III}}-$

Мы имеем:

$$z_{\text{III}}-z_{\text{I}} = \Delta_1+\widetilde{\Phi}(z,\ \mu,\ \Delta(\Delta_1,\ \mu))-\widetilde{\Phi}(z,\ \mu,\ \overset{*}{\Delta}_0(\mu)).$$

В силу оценки (32), находим:

$$\frac{\partial}{\partial \mu}(z_{\text{III}}-z_{\text{I}}) \leqslant 100\,|\Delta_1|,$$

где $|\Delta_1| \leqslant \delta^{28}$, $\mu \in N_K^r$.

Таким образом,

$$\left|\frac{\partial g(z_{\text{III}})}{\partial z}\left(\frac{\partial z_{\text{III}}}{\partial \mu}-\frac{\partial z_{\text{I}}}{\partial \mu}\right)\right| \leqslant 100\,|\Delta_1|\,\frac{32\,C}{K\delta^4} \leqslant \frac{10^4 C}{K\delta^4}\,|\Delta_1|.$$

Сопоставляя оценки всех трех слагаемых правой части равенства ( находим:

$$\frac{\partial}{\partial \mu}\,\hat{\Phi}_1(z,\ \mu,\ \Delta(\Delta_1,\ \mu))\Big| \leqslant \frac{C\,10^4}{K^2\delta^7}\,3\,|\Delta_1| + \frac{1600\,C}{K\delta^5}\,|\Delta_1| + \frac{C\,10^4}{K\delta^4}\,|\Delta_1| \leqslant \frac{C\,10^5}{K^2\delta^7}$$

Все эти оценки выведены в предположении, что $|\Delta_1| \leqslant \delta^{28}$, $\mu \in N$ $z_{\text{I}}$, $z_{\text{III}}$ не выходят из полосы $|\operatorname{Im}(z-2\pi\mu)| \leqslant R_0-2\delta$, где дейст лемма 10. Для этого достаточно, например, чтобы $|\operatorname{Im} z| \leqslant R_0 -$ ибо тогда

$$|\Delta_1+\widetilde{F}(z,\ \varepsilon)+\widetilde{\Phi}(z,\ \varepsilon,\ \Delta)| \leqslant \delta+2C+2C < 2\delta,$$

$$|\operatorname{Im}(z_{\text{III}}-2\pi\mu)| \leqslant R_0-4\delta+2\delta = R_0-2\delta.$$

9°. **Оценка** $\frac{\partial z}{\partial \mu}$. Функция $g(z,\ \mu)$ определена при

$$|\operatorname{Im}(z-2\pi\mu)| \leqslant R_0-2\delta.$$

Значит, в той же полосе определена и функция

$$\varphi(z,\ \mu) = z+g(z,\ \mu).$$

Так как в указанной полосе $|g(z,\mu)| < \delta$ [см. (6), (17)], то о этой полосы при $z \to \varphi$ содержит полосу

$$|\operatorname{Im}(\varphi-2\pi\mu)| \leqslant R_0-3\delta,$$

которая при $\varphi \to z$ переходит в область, содержащую полосу

$$|\operatorname{Im}(z-2\pi\mu)| \leqslant R_0-4\delta.$$

Из пп. 5.1 и 7.4 следует, что

$$\frac{\partial z}{\partial \mu} = -\frac{\dfrac{\partial g}{\partial \mu}}{1+\dfrac{\partial g}{\partial z}}.$$

асно неравенству (18) и условиям 4), 5) леммы 11, $\left|\frac{\partial g}{\partial z}\right| < \frac{1}{2}$, так применяя оценку (23), мы получаем:

$$\left|\frac{\partial z}{\partial \mu}\right| \leqslant \frac{10^4 C}{K^2\delta^6}$$

$\operatorname{Im}(z - 2\pi\mu)| \leqslant R_0 - 2\delta$, $\mu \in N_K^r$ и, в частности, при

$$|\operatorname{Im}(\varphi - 2\pi\mu)| \leqslant R_0 - 3\delta.$$

. Оценка $\frac{\partial}{\partial\mu}F_1(\varphi, \mu)$, $\frac{\partial}{\partial\mu}\Phi_1(\varphi, \mu, \Delta_1)$. Согласно п. 5.1,

$$F_1(\varphi, \mu) = \hat{F}_1(z(\varphi, \mu), \mu),$$

$$\Phi_1(\varphi, \mu, \Delta_1) = \hat{\Phi}_1(z(\varphi, \mu), \mu, \Delta(\Delta_1, \mu)).$$

ункция $z(\varphi, \mu)$ определена при $|\operatorname{Im}(\varphi - 2\pi\mu)| \leqslant R_0 - 3\delta$, $\mu \in N_K^r$, ли

$$\operatorname{Im}(z - 2\pi\mu)| \leqslant R_0 - 4\delta,$$

ля этого $z$ найдется такое $\varphi$, что $z = z(\varphi, \mu)$, и

$$|\operatorname{Im}(\varphi - 2\pi\mu)| \leqslant R_0 - 3\delta.$$

нкции $\hat{F}_1(z)$, $\hat{\Phi}_1(z)$ определены при $|\operatorname{Im} z| \leqslant R_0 - 4\delta$ и поэтому ии $F_1(\varphi, \mu)$, $\Phi_1(\varphi, \mu, \Delta_1)$ определены при

$$|\operatorname{Im}\varphi| \leqslant R_0 - |\operatorname{Im} 2\pi\mu| - 5\delta$$

положении, что $|\operatorname{Im} 2\pi\mu| \leqslant R_0 - 5\delta$, т. е. что $2\pi r \leqslant R_0 - 5\delta$. В этой сти

$$\frac{\partial F_1}{\partial\mu} = \frac{\partial \hat{F}_1}{\partial\mu} + \frac{\partial \hat{F}_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\mu}, \qquad \frac{\partial \Phi_1}{\partial\mu} = \frac{\partial \hat{\Phi}_1}{\partial\mu} + \frac{\partial \hat{\Phi}_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\mu},$$

ри вычислении $\frac{\partial \hat{\Phi}_1}{\partial\mu}$ независимыми переменными считаются $z$, $\mu$ и ак в п. 8°.

Для оценок $\frac{\partial \hat{F}_1}{\partial z}$ и $\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial z}$ воспользуемся интегралом Коши. Отступив т края полосы, где известны оценки $\hat{F}_1$ и $\hat{\Phi}_1$, мы из оценок 3° 5 получим:

$$\left|\frac{\partial \hat{F}_1}{\partial z}\right| \leqslant \frac{4C^2}{\delta^6}, \quad \left|\frac{\partial \hat{\Phi}_1}{\partial z}\right| \leqslant \frac{3C|\Delta_1|}{\delta^6}$$

$\operatorname{Im} z| \leqslant R_0 - 5\delta$; применяя оценки 5°, 8° и 9°, находим из (35):

$$\left|\frac{\partial F_1}{\partial\mu}\right| \leqslant \frac{5\cdot 10^4 C^2}{K^2\delta^7} + \frac{10^4 C}{K^2\delta^6}\frac{4C^2}{\delta^6},$$

$$\left|\frac{\partial \Phi_1}{\partial\mu}\right| \leqslant \frac{C\cdot 10^5|\Delta_1|}{K^2\delta^7} + \frac{3C|\Delta_1|}{\delta^6}\frac{10^4 C}{K^2\delta^6}.$$

образом, при

$$\Delta_1| \leqslant \delta^{28}, \quad \mu \in N_K^r, \quad 2\pi r \leqslant R_0 - 5\delta, \quad |\operatorname{Im}\varphi| \leqslant R_0 - |\operatorname{Im} 2\pi\mu| - 6\delta$$

$$|F_1(\varphi, \mu)| \leqslant \frac{C^2}{\delta^6}, \qquad |\Phi_1(\varphi, \mu, \Delta_1)| < \frac{C|\Delta_1|}{\delta^6},$$

$$\left|\frac{\partial F_1}{\partial\mu}\right| \leqslant \frac{C^2}{\delta^{13}}, \qquad \left|\frac{\partial \Phi_1}{\partial\mu}\right| \leqslant \frac{C|\Delta_1|}{\delta^{13}}.$$

ибо

$$\frac{5\cdot 10^4}{K^2}\delta < 1.$$

Точно так же и все остальные оценки 1°—9°, в силу условий 4 5) леммы 11, можно привести к виду (7)—(16).

Лемма 11 доказана.

8.3. Доказательство теоремы 3. Теорема 3 выводится леммы 11 так же, как теорема 2 выводилась из основной леммы в §

Выберем $\delta_1 > 0$ так, чтобы

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \delta_n < \frac{R}{8}$, где $\delta_n = \delta_{n-1}^{1\frac{1}{2}}$ $(n = 2, 3, \ldots)$,

2) $\delta_1 < \frac{K^2}{5\cdot 10^4}$.

Пусть $R = R_0$, $K$ — то же, что в условии теоремы 2, $\mu \in N_K^{\frac{R}{16\pi(n+1)}}$, $\Delta$ $= \delta_1^{26}$, $L\varepsilon_0 < C_1$, где

$$C_1 = \delta_1^{27},$$

и $C_1$, $\delta_1$ — соответственно $C$, $\delta$ леммы 11. Тогда из неравенств (7 (16) получаем:

$$|F_1| < \frac{\delta_1^{54}}{\delta_1^{13}} < \delta_1^{40,5} = (\delta_1^{1\frac{1}{2}})^{27} = \delta_2^{27},$$

$$\left|\frac{\partial F_1}{\partial \mu}\right| < \delta_2^{27},$$

$$|\Phi_1| \leqslant \frac{\delta_1^{27}}{\delta_1^{13}} |\Delta_1| < \delta_1^3 |\Delta_1| = \delta_2^2 |\Delta_1|,$$

$$\left|\frac{\partial \Phi_1}{\partial \mu}\right| < \delta_2^2 |\Delta_1|$$

при

$$\Delta_1| < \delta_2^{26} = \delta_1^{39} < \delta_1^{28}, \quad |\operatorname{Im} \varphi_1| \leqslant R_0 - 7\delta_1 - |\operatorname{Im} 2\pi\mu| = R_1, \quad \mu \in N_K^{\frac{R}{16\pi(n+}}$$

Таким образом, мы снова находимся в условиях леммы 11, но с ум шенным на $7\delta_1 + \frac{R}{8(n+1)}$ радиусом $R_1$. Так как

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \frac{R}{8},$$

то мы сможем произвести $n$ последовательных приближений, и посл нее будет действовать при

$$|\operatorname{Im} \varphi_n| \leqslant \frac{R}{8(n+1)}, \quad \mu \in N_K^{\frac{R}{16\pi(n+1)}}, \quad |\Delta_n| < \delta_{n+1}^{26}.$$

Опуская обычное (см. § 6) доказательство сходимости приближе при действительных $\mu$, оценим $\left|\frac{\partial \Delta^{(n)}}{\partial \mu}\right|$.

Из п. 8.1 следует, что

$$\frac{\partial\Delta_k^{(n)}}{\partial\mu}=\frac{\partial\Delta_k}{\partial\mu}+\frac{\partial\Delta_k}{\partial\Delta_{k+1}}\,\frac{\partial\Delta_{k+1}^{(n)}}{\partial\mu}.$$

агая $C_k=\delta_k^{27}$, на основании леммы 11 находим:

$$\left|\frac{\partial\Delta_k^{(n)}}{\partial\mu}\right|\leqslant 4C_{k+1}+2\left|\frac{\partial\Delta_{k+1}^{(n)}}{\partial\mu}\right|.$$

и

$$\left|\frac{\partial\Delta_{k+1}^{(n)}}{\partial\mu}\right|<C_{k+1},$$

$$\left|\frac{\partial\Delta_k^{(n)}}{\partial\mu}\right|<6C_{k+1}<C_k.$$

как

$$\left|\frac{\partial\Delta_n^{(n)}}{\partial\mu}\right|=0,$$

$$\left|\frac{\partial\Delta_0^{(n)}}{\partial\mu}\right|<6C_1.$$

ема 3 доказана.

Замечание. Точно так же можно было бы доказать моногенность кций $g_n$, $F_n$, $\Phi_n$, $\varphi_n$ и получить аналогичные оценки.

## ЧАСТЬ II

## О ПРОСТРАНСТВЕ ОТОБРАЖЕНИЙ ОКРУЖНОСТИ НА СЕБЯ

адача изучения зависимости числа вращения от коэффициентов ения была поставлена Пуанкаре (1). Рассмотрение числа вращения ункции на пространстве отображений помогает уяснению вопроса ичных и исключительных случаях.

ловые координаты точки на окружности будем обозначать строч- греческими буквами; $\varphi$ и $\varphi+2\pi$ есть одна и та же точка окруж- Преобразования будем обозначать прописными буквами:

$$T:\varphi\rightarrow T\varphi.$$

удем рассматривать только непрерывные взаимно однозначные е (сохраняющие ориентацию) преобразования. Примером может ть поворот на угол $\theta:\varphi\rightarrow\varphi+\theta$. Каждому преобразованию сопо- ется «сдвиг» — функция на окружности, показывающая, насколь- игается каждая точка. Сдвиг будем обозначать той же буквой, еобразование, но только строчной:

$$T:\varphi\rightarrow T_\varphi=\varphi+t(\varphi).$$

$\varphi$) — сдвиг. Если $T$ — поворот на угол $\theta$, то $t(\varphi)\equiv\theta$. Вообще сдвиг, как и $\varphi$, определен лишь с точностью до кратного $2\pi$, . определив $t(\varphi)$ в одной точке, мы можем однозначно продол- го по непрерывности.

Если $T$ — гладкое преобразование, то $t(\varphi)$ — гладкая пер функция:

$$t(\varphi + 2\pi) = t(\varphi).$$

Обозначим через

$$T^n \varphi = \varphi + t^{(n)}(\varphi)$$

$n$-ю степень преобразования $T$. При этой записи предпола ветвь $t^{(n)}(\varphi)$ выбрана соответствующей ветви $t(\varphi)$:

$$t^{(n)}(\varphi) = t^{(n-1)}(\varphi) + t\,(T^{n-1}(\varphi)) \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

При этом условии $t^{(n)}(\varphi)$ называется сдвигом за $n$ шагов.

## § 9. Функция $\mu(T)$ и ее множества уровня

Рассмотрим пространства

$$C \supset C^1 \supset C^2 \supset \ldots \supset C^n \supset \ldots \supset C^\infty \supset A$$

взаимно однозначных прямых отображений окружности на се рывных, непрерывно и бесконечно дифференцируемых и ана в окрестности действительной оси с обычной в этих простран логией. Каждая следующая топология сильнее предыдущей из пространств всюду плотно в предыдущем *.

Пуанкаре (1) определил для каждого преобразования $T$ вращения $2\pi\mu$; таким образом, на пространстве $C$ дана функ Следующая теорема высказана Пуанкаре без доказательства.

ТЕОРЕМА 4. *Функция $\mu(T)$ непрерывна в каждой точке*

Доказательство. Покажем, что $\mu(T)$ непрерывна в

Пусть дано $\varepsilon > 0$. Выберем целое $n > \frac{2}{\varepsilon}$ так, чтобы

$$\frac{m}{n} < \mu(T_0) < \frac{m+1}{n}.$$

Тогда при преобразовании

$$T_0^n : \varphi \to \varphi + t_0^{(n)}(\varphi)$$

каждая точка сдвигается больше чем на $2\pi m$. Действите бы некоторые точки сдвигались меньше, а другие больше че то нашлась бы точка, сдвигающаяся ровно на $2\pi m$, т. е. точ вижная для $T_0^n$; тогда, очевидно, вопреки выбору $n$, мы имел

$$\mu = \frac{m}{n}.$$

Если бы все точки сдвигались меньше чем на $2\pi m$, то мы бы $\mu \leqslant \frac{m}{n}$, что снова противоречит выбору $n$.

Аналогично доказывается, что каждая точка сдвигается з меньше чем на $2\pi(m+1)$. Итак,

$$2\pi m < t_0^{(n)}(\varphi) < 2\pi(m+1).$$

---

* Если $T$ входит в одно из пространств $C^1$, $C^2$, ..., $A$, причем какое именно, то мы будем называть $T$ *гладким* преобразованием.

непрерывности $t_0^{(n)}(\varphi)$,

$$2\pi m + \eta < t_0^{(n)}(\varphi) < 2\pi(m+1) - \eta$$

тором $\eta > 0$, а ввиду непрерывной зависимости $T^n$ от $T$ най-
такое $\delta > 0$, что

$$|t^{(n)}(\varphi) - t_0^{(n)}(\varphi)| < \eta,$$

о преобразование $T$ отличается от $T_0$ меньше чем на $\delta$:

$$|t(\varphi) - t_0(\varphi)| < \delta.$$

х $T$

$$2\pi m < t^{(n)}(\varphi) < 2\pi(m+1)$$

.

$$\frac{m}{n} < \mu(T) < \frac{m+1}{n}.$$

$T) - \mu(T_0)| < \varepsilon$ при $|t(\varphi) - t_0(\varphi)| < \delta$. Теорема доказана.
чание. Даже в самых хороших случаях функция $\mu(T)$ толь-
ывна. Например, рассмотрим семейство преобразований

$$T_h : \varphi \rightarrow \varphi + h + 0{,}1 \sin^2 \varphi,$$

— параметр. По доказанному, $\mu(T_h)$ — непрерывная функция $h$.
$h$ функция $\mu(T_h)$ растет, но задерживается на каждом рацио-
значении $\mu$: ему отвечает целый отрезок $[h_1 h_2]$ значений $h$.
$h > h_2$ функция $\mu(T_h)$ увеличивается очень быстро: Э. Г. Бе-
зал, что, например, в окрестности нуля $\mu(T_h)$ растет по край-
как $\frac{C\sqrt{h}}{-\log h}$.

ества уровня $\mu(T)$ суть множества преобразований с одним и
лом вращения $2\pi\mu$. К таким преобразованиям относятся по-
угол $2\pi\mu$, преобразования, превращающиеся в поворот на
при надлежащей замене переменной, и, быть может, другие
вания.

тура множества уровня $\mu(T) = \mu$ существенно зависит от того,
льно $\mu$ или иррационально.

## § 10. Случай рационального $\mu$

Если $\mu(T) = \frac{m}{n}$, то, как показал Пуанкаре, $T^n$ имеет непо-
точки: $t^{(n)}(a) = 2\pi m$. Множество их инвариантно относительно
нуто, как множество уровня непрерывной функции $t^{(n)}(a)$.
$Ta, \ldots, T^{n-1}a$ называются *циклом*. Для исследования цикла
рассмотреть график преобразования $T^n$ и график функции $t^{(n)}(\varphi)$
7; на этом рисунке изображен график $T(\varphi) = \varphi + \frac{1}{2}\cos\varphi$ и

указаны образы 0 при нескольких итерациях $T$). Цикл называется *изол* *ванным*, если в некоторой окрестности его точек нет точек других цик. Изолированный цикл *устойчив*, если его точка (а значит и все его ки) имеет сколь угодно малые окрестности, переходящие при преобраз нии $T^n$ внутрь себя. Легко видеть, что при $n \to +\infty$ точки такой окрестн стремятся к точкам цикла, чем и объясн ся название. Устойчивый цикл преобр вания $T^{-1}$ называется *неустойчивым* лом $T$. Изолированный цикл *полуус* *чив вперед* (*назад*), если все точки нек рой окрестности точки цикла (искл ее самое) сдвигаются преобразование вперед (назад), т. е. если в этой окр ности

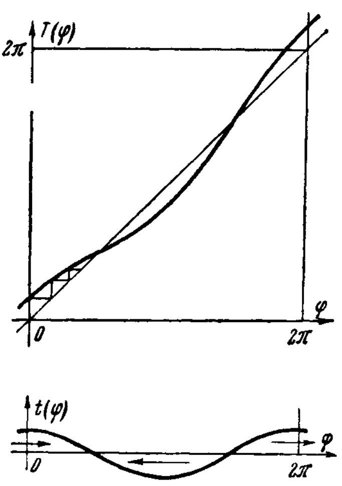

Рис. 7

$$t^{(n)}(\varphi) - 2\pi m > 0 \quad (< 0).$$

Преобразование $T \in C^1$ *нормально*, ес точках его циклов

$$\frac{dt^{(n)}(\varphi)}{d\varphi} \neq 0.$$

Очевидно, нормальное преобразов имеет конечное число циклов, пр все его циклы устойчивы или неустойчивы. Именно, те ко $t^{(n)}(\varphi) - 2\pi m$, где $\frac{dt^{(n)}}{d\varphi} < 0$, суть точки устойчивых циклов, а те. $\frac{dt^{(n)}}{d\varphi} > 0$, — точки неустойчивых циклов. Отсюда вытекает, что т устойчивых и неустойчивых циклов нормального преобразования межаются.

10.2. ТЕОРЕМА 5. *Нормальные преобразования образуют множес открытое в $C^1$ и всюду плотное в $A$.*

Доказательство. 1. Точками цикла являются те точки, $t^{(n)}(\varphi) = 2\pi m$. В них $\frac{dt^{(n)}(\varphi)}{d\varphi} \neq 0$. Поэтому при малом вместе с пе производной изменении $t^{(n)}(\varphi)$ функция $t^n(\varphi) - 2\pi m$ не приобретает вых корней и старые не исчезают, а сдвигаются непрерывно, пр производная в корне сохраняет знак. Это значит, что преобразов $T$ с такой измененной функцией $t^{(n)}(\varphi)$ будет нормальным. Ввиду н рывной зависимости $t^{(n)}(\varphi)$ от $T$, первое утверждение теоремы дока

2. Покажем, что в любой близости к любому прео зованию есть аналитическое преобразование с цик Очевидно, это достаточно доказать для аналитического преобразов и аналитической близости. Пусть $T$ — аналитическое преобразова иррациональным числом вращения, и пусть $\varepsilon > 0$. Среди точек $\varphi_n =$ есть удаленная от $\varphi_0$ меньше чем на $\varepsilon$, например, назад:

$$2\pi m - \varepsilon < t^{(n)}(\varphi_0) < 2\pi m$$

(теорема Данжуа). Рассмотрим семейство аналитических преобразо

$\geqslant 0,\ T_0 = T$):

$$T_\lambda : \varphi \to \varphi + t(\varphi) + \lambda.$$

нетрудно видеть, при $\lambda = \varepsilon$ $T_\lambda^n$ сдвигает $\varphi_0$ вперед:

$$t_\lambda^{(n)}(\varphi_0) \geqslant 2\pi m.$$

да, ввиду непрерывности $t_\lambda^{(n)}(\varphi_0)$ по $\lambda$, вытекает, что при некото-
$\lambda_0 \leqslant \varepsilon$ $T_{\lambda_0}$ имеет цикл $\varphi_0,\ T_{\lambda_0}\varphi_0,\ \ldots$ :

$$t_{\lambda_0}^{(n)}(\varphi_0) = 2\pi m.$$

Аналитическое преобразование с циклом сколь но малым изменением можно превратить в нормаль-

В самом деле, пусть $T$ — аналитическое преобразование, и среди циклов нет устойчивых (стало быть, нет и неустойчивых). Выберем $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ и введем аналитическую функцию $\Delta(\varphi)$, обращаю- в этих точках в 0 и имеющую в них отрицательную производ- Преобразование

$$T_\theta : t_\theta(\varphi) = t(\varphi) + \theta\Delta(\varphi)$$

малом $\theta$ сколь угодно близко к $T$ и имеет по крайней мере один чивый цикл $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$. Поэтому достаточно рассмотреть ай, когда исходное преобразование $T$ имеет устойчивый цикл. По- м по $T$ аналитическую функцию $\delta(\varphi)$, которая

равна нулю и имеет отрицательную (положительную) производную ах устойчивых (неустойчивых) циклов $T$;

положительна (отрицательна) в точках циклов $T$, полуустойчи- вперед (назад).

уществование такой функции очевидно, так как число всех циклов нечно, ибо аналитическая функция $t^{(n)}(\varphi) - 2\pi m$ имеет изолированный ь и потому не есть тождественный нуль.

Рассмотрим преобразование $T_\theta : \varphi \to \varphi + t(\varphi) + \theta\delta(\varphi)$. При малом $\theta$ преобразование нормально; формальное доказательство того, что ичивые циклы $T$ при малых $\theta$ лишь несколько сдвигаются, причем $t^{(n)}(\varphi) - 2\pi m$ делаются однократными, а полуустойчивые циклы ают, предоставляется читателю. При достаточно малом $\theta$ преобра- ние $T_\theta$ — искомое.

рема 5 доказана.

3. Строение нормального преобразования легко усмотреть из ка функции $t^{(n)}(\varphi) - 2\pi m$.* Ее корни — точки циклов преобразова- — делят окружность на дуги. Каждая такая дуга $\alpha\beta$ ограничена ой стороны точкой $\alpha$ устойчивого, а с другой стороны — точкой $\beta$ йчивого цикла. При $n \to +\infty$ точки дуги наматываются на устой- цикл, а при $n \to -\infty$ — на неустойчивый цикл, т. е.

$$\lim_{k\to\infty} T^{kn}(\gamma) = \alpha \pmod{2\pi}, \qquad \lim_{k\to-\infty} T^{kn}(\gamma) = \beta \pmod{2\pi},$$

$\in (\alpha,\ \beta)$. Утверждения такого типа хорошо известны в качествен- теории дифференциальных уравнений, и мы опускаем их доказа- тва.

Таким образом, топологически нормальное преобразование характеризуется тремя целыми числами: $m$, $n$, $k$, где $\frac{m}{n}$ — число вращения, $k$ — число устойчивых (а значит, и неустойчивых) циклов. Два преобразования с одинаковыми $m$, $n$, $k$ устроены одинаково в том смысле что одно из них может быть превращено в другое непрерывной заменой переменной на окружности (т. е. $T_2=\Phi T_1 \Phi^{-1}$, где $\Phi \in C$). Инвариантом гладкой замены переменной является также производная $\frac{dt^{(n)}(\varphi)}{d\varphi}$ в точках цикла, характеризующая скорость наматывания на цикл. Вероятно других инвариантов не существует, но я не сумел этого доказать.

ТЕОРЕМА 6. *Множество* $E_{\frac{m}{n}}$ *уровня* $\mu=\frac{m}{n}$ *в любом из пространст* $C^1, \ldots, A$ *связно и состоит из*

1) *плотного в* $E_{\frac{m}{n}}$ *и открытого в* $C^p(A)$ *ядра* $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E^k_{\frac{m}{n}}$ *нормальны преобразований. Ядро состоит из связных компонент* $E^k_{\frac{m}{n}}$ *преобразовани с* $k$ *устойчивыми и* $k$ *неустойчивыми циклами. Два преобразования одно компоненты* $E^k_{\frac{m}{n}}$ *могут быть превращены одно в другое непрерывной заменой переменной*;

2) *границ* $E_{\frac{m}{n}}$ *и* $E^k_{\frac{m}{n}}$. *Граница* $E_{\frac{m}{n}}$ *состоит из преобразований* $T$, *которых* $t^{(n)}(\varphi)-2\pi m$ *не меняет знака. Ее части* $F_+ (t^{(n)}(\varphi)-2\pi m \geqslant 0)$ *и* $F_- (t^{(n)}(\varphi)-2\pi m \leqslant 0)$ *содержат полуустойчивые вперед и назад преобразования, связны и пересекаются по связному множеству* $F_0$. *Преобразования из* $F_0$ *превращаются гладкой заменой переменной в поворот* $F_0$ *входит в границу каждой компоненты* $E^k_{\frac{m}{n}}$.

Доказательство. 1. Множества $E_{\frac{m}{n}}$, $F_+$, $F_-$ связны

Для доказательства соединим, не выходя из взятого множества, любо преобразование $T \in E_{\frac{m}{n}}(F_+, F_-)$ с поворотом $T_2$ на угол $2\pi\frac{m}{n}$ дуго $T_\theta\,(0 \leqslant \theta \leqslant 2,\ T_0=T)$. Пусть $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}$ — цикл $T$. При помощи гладкой замены переменной

$$\varphi \to \Psi\varphi = \varphi + \psi(\varphi)$$

переведем точки $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}$ в $2\pi\frac{m}{n}l$ $(0 \leqslant l \leqslant n-1)$. Положим

$$\Psi_\theta\varphi = \varphi + \theta\psi(\varphi)$$

и рассмотрим

$$T_\theta\,\varphi = \Psi_\theta T \Psi_\theta^{-1}\,\varphi = \varphi + t_\theta(\varphi) \qquad (0 \leqslant \theta \leqslant 1).$$

Это преобразование является преобразованием $T$, записанным в переменной $\Psi_\theta$, и принадлежит $E_{\frac{m}{n}}(F_+, F_-)$.

Рассмотрим теперь отрезок, соединяющий $T_1$ и $T_2$:

$$T_\theta\varphi = \varphi + (\theta - 1)\,2\pi\frac{m}{n} + (2 - \theta)\,t_1(\varphi) \quad (1 \leqslant \theta \leqslant 2).$$

$2\pi\frac{m}{n}l$ $(0 \leqslant l \leqslant n-1)$ образуют цикл $T_\theta$ при всех $1 \leqslant \theta \leqslant 2$ и поэ- линия $T_\theta$ лежит целиком в $E_{\frac{m}{n}}$ (соответственно, $F_+$, $F_-$). Связ- оказана.

Множество $E^k_{\frac{m}{n}}$ нормальных преобразований с дан- $m$, $n$, $k$ связно в любом из пространств $C^1, \ldots, A$. казательства соединим в выбранном пространстве преобразования дугой $T_\theta$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2)$. Произведем гладкую замену переменной

$$\Psi\varphi = \varphi + \psi(\varphi),$$

ящую точки циклов $T_0$ в соответствующие точки циклов $T_2$ (что но сделать, так как число этих точек одинаково и они следуют аковом порядке). Преобразование $T_1 = \Psi T_0 \Psi^{-1}$ действует на точки $T_2$ как преобразование $T_2$; легко видеть, что других циклов имеет. Полагая

$$\Psi_\theta(\varphi) = \varphi + \theta\psi(\varphi)$$

$$T_0 = \Psi_\theta T_0 \Psi_\theta^{-1} \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 1),$$

единим $T_0$ с $T_1$ кривой, лежащей в $E^k_{\frac{m}{n}}$.

мотрим преобразования

$$T_1(\varphi) = \varphi + t_1(\varphi), \quad T_2(\varphi) = \varphi + t_2(\varphi).$$

ии $t_1(\varphi)$ и $t_2(\varphi)$ совпадают в точках циклов, поэтому все преоб- ания

$$T_\theta(\varphi) = \varphi + (2 - \theta)\,t_1(\varphi) + (\theta - 1)\,t_2(\varphi) \quad (1 \leqslant \theta \leqslant 2)$$

одни и те же циклы. Следовательно, линия $T_\theta$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2)$, со- ющая $T_0$ с $T_2$, целиком лежит в $E^k_{\frac{m}{n}}$.

3. Доказательство того, что множество $E^k_{\frac{m}{n}}$ открыто и что множество нормальных преобразований с числом вращения $\frac{m}{n}$ всюду плотно аналогично доказательству теоремы 5 (пп. 1 и 3).

Если $T_1$, $T_2 \in E^k_{\frac{m}{n}}$, то можно произвести непрерыв- замену переменной $\Psi = \varphi + \psi(\varphi)$ такую, что $T_1$ пе- т в $T_2 : T_2 = \Psi T_1 \Psi^{-1}$. В самом деле, обозначим точки устойчи- иклов $T_1$ через $a^l_i$ $(1 \leqslant l \leqslant k,\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ T_1 a_i = a_{i+1},\ a_{n+1} = a_1)$ и еустойчивых циклов $T_1$ — через $b^l_i$ (через $l$ мы обозначаем номер цикла в порядке следования на окружности). При этом на ду $a_1^1b_1^1$ нет точек циклов (значит, то же относится к каждой дуге $a$ $b_i^la_i^{l+1}$ *).

Пусть, далее, $c_i^l$ и $d_i^l$ — занумерованные аналогичным образом точ устойчивых и неустойчивых циклов $T_2$. Замена переменной $\Psi$ перево точки $a_i^l$, $b_i^l$ в $c_i^l$, $d_i^l$, и нам остается доопределить $\Psi$ на дугах $b_i^la_i^{l+1}$. Выберем точки $x$ и $y$ внутри дуг $a_1^1b_1^1$ и $c_1^1d_1^1$. Точки $T_1^nx$ и $T$ лежат в тех же дугах соответственно ближе к $a_1^1$ и $c_1^1$. Отобразим п помощи $\Psi$ дугу $(x, T_1^nx)$ на дугу $(y, T_2^ny)$ гомеоморфно и прямо: $x \to$ $T_1^nx \to T_2^ny$. Очевидно, при преобразованиях $T_1^p$ образы дуги $[x, T$ (соответственно дуги $[y, T_2^ny]$ при преобразованиях $T_2^p$) целиком пок ют все дуги $a_i^1b_i^1$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ (соответственно все дуги $c_i^1d_i^1$). Таким об зом, мы определяем $\Psi(\varphi)$ на дуге $T_1^px$, $T_1^{p+n}x$ как $T_2^p\Psi T_1^{-p}$. Аналог ное построение можно проделать на дугах $a_i^lb_i^l$ и $b_i^la_i^{l+1}$. Доказательс того, что найденная замена переменной является искомой, несло и мы его опускаем.

5. Строение границ. Если $t^{(n)}(\varphi) - 2\pi m$ меняет знак, то $T$ внутренняя точка $E_{\frac{m}{n}}$, ибо при малом изменении $T$ $t^{(n)}(\varphi) - 2\pi m$ б по-прежнему менять знак и $T$ сохранит цикл. Поэтому граница входит в сумму $F_+$ ($T \in F_+$, если $t^{(n)}(\varphi) - 2\pi m \geqslant 0$) и $F_-$. Чтобы вратить преобразование $T \in F_0 = F_+ \bigcap F_-$ в поворот, надо гла заменой переменной перевести точки одного цикла в $2\pi \frac{m}{n} l$ и з переопределить параметр на всех дугах $\left[2\pi\frac{ml}{n}, 2\pi\frac{ml+1}{n}\right]$, кроме од ($l = 0$), по формуле

$$\Psi(\varphi) = 2\pi\frac{ml}{n} + T^{-l}(\varphi).$$

Малым изменением поворота на угол $2\pi\frac{m}{n}$ можно превратить ег преобразование из любого $E^k_{\frac{m}{n}}$ — примерно так, как это сделано в доказательстве теоремы 5 (п. 3). Из предыдущего рассуждения след что то же верно и для всех преобразований из $F_0$, что доказыв последнее утверждение теоремы 6.

10.4. Из теоремы 6 (п. 4 доказательства) вытекает, что нормальн преобразования являются грубыми в смысле Андронова — Понтр гина (10). Так как, в силу теоремы 5, множество всех нормальных п образований всюду плотно, то никакое не нормальное преобразова не может быть грубым.

С топологической точки зрения нормальные преобразования зап няют подавляющую часть пространства преобразований — всюду плот

---

* Под $l + 1$ при $l = k$ понимается 1.

ткрытое множество. В следующем параграфе будет показано, что с чки зрения меры типичным является также эргодический случай.

## § 11. Случай иррационального μ

11.1. Рассмотрим теперь множество $E_\mu$ иррационального уровня μ. В пространствах $C^2, \ldots, A$, по теореме Данжуа, каждое преобразование $T \in E_\mu$ может быть превращено в поворот на угол $2\pi\mu$ непрерывной заменой переменной. Нас же будут интересовать преобразования, превращающиеся в поворот гладкой заменой переменной. Множество таких преобразований мы обозначим через $E_\mu^{C^p}$ (соответственно через $E_\mu^A$; общее обозначение — $E'_\mu$).

ТЕОРЕМА 7. 1°. *Множество $E_\mu^A$ всюду плотно в $E_\mu$ по топологии $C$. е множества $E'_\mu$ связны.*

2°. *Если μ таково, что $\left|\mu - \frac{m}{n}\right| > \frac{K}{|n|^3}$ при любых целых m и $n \neq 0$, множество $E_\mu^A$ открыто в $E_\mu$ по топологии $A$.*

Доказательство. 1°. Пусть $T_0$ обозначает поворот на угол $2\pi\mu$, и пусть $T_1 \in E'_\mu$. Тогда существует гладкая замена переменной

$$\Psi(\varphi) = \varphi + \psi(\varphi)$$

ая, что $T_1 = \Psi T_0 \Psi^{-1}$. Замена

$$\Psi_\theta(\varphi) = \varphi + \theta\psi(\varphi) \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 1)$$

превращает $T_0$ в $T_\theta = \psi_\theta T_0 \psi_\theta^{-1}$; таким образом, линия $T_\theta$, соединяющая с $T_1$, лежит целиком в $E'_\mu$. Связность $E'_\mu$ доказана.

Построим в $E_\mu^A$ преобразование $T^*$ в заданной окрестности $T \in E_\mu$. теореме Данжуа, существует непрерывная замена переменной $\Psi(\varphi)$ ая, что $T = \Psi T_0 \Psi^{-1}$. Построим аналитическую замену $\Psi^*(\varphi)$ переменной $\varphi$ так, чтобы $\Psi$ и $\Psi^*$, $\Psi^{-1}$ и $\Psi^{*-1}$ мало отличались в метрике Тогда $T^* = \Psi^* T_0 \Psi^{*-1}$ аппроксимирует $T$ в метрике $C$ и принадлежит Утверждение 1° доказано полностью.

2°. То, что множество $E_\mu^A$ открыто в $E_\mu \cap A$, вытекает из теоремы 2. видно, достаточно показать, что некоторая окрестность поворота $T_0$ $\cap A$ входит в $E_\mu^A$. Преобразование $T \in E_\mu \cap A$ можно записать в виде

$$\varphi \to \varphi + 2\pi\mu + F(\varphi),$$

ем окрестность $U_{R,C}$ преобразования $T_0$ задается неравенством $< C$ при $|\mathrm{Im}\,\varphi| < R$. Но в силу следствия теоремы 2 (см. п. 4.3) данном $R$ существует $C$ такое, что все преобразования $T \in U_{R,C} \cap E_\mu$ аналитически приводятся к повороту. Теорема 7 доказана.

11.2. При подходе к вопросу о типичности с точки зрения меры (8)] мы наталкиваемся на отсутствие разумной меры в функциональных пространствах и поэтому вынуждены ограничиться конечномерными пространствами.

Рассмотрим двумерное пространство аналитических преобразований

$$A_{a,b}: z \to z + a + F(z, b),$$

где при $|\operatorname{Im} z| < R$, $|b| < b_0$ $F(z, b)$ есть аналитическая функция, удовлетворяющая неравенству $|F(z, b)| < L|b|$.

ТЕОРЕМА 8.

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{mes} E_\theta}{2\pi\theta} = 1, \tag{1}$$

*где $E_\theta$ — множество точек плоскости $(ab)$, $a \in [0, 2\pi]$, $b \in [0, \theta]$, таких. что преобразование $A_{ab}$ превращается в поворот аналитической заменой координаты $z$.*

Доказательство. 1. Рассмотрим множество $M_K$ — компактное множество точек $0 < \mu < 1$, удовлетворяющих неравенству

$$\left|\mu - \frac{m}{n}\right| \geqslant \frac{K}{n^3}$$

при всех $m, n > 0$. По теореме 2, для любого $\mu \in M_k$ существуют $C = C(K, R) > 0$ и аналитическая по $b$ функция $\Delta(b, \mu)$ такие, что преобразования $A_{2\pi\mu+\Delta(b,\mu),b}$ при $\mu \in M_K$, $|b| < C$ могут быть превращены в поворот аналитическим изменением параметра: $(2\pi\mu + \Delta(b, \mu), b) \in E_\theta$. Обозначим через $M_K(b)$ множество точек $\mu + \frac{\Delta(b, \mu)}{2\pi}$, $\mu \in M_K$, при фиксированном $b$. Тогда преобразование $D_b: \mu \to \mu + \frac{\Delta(b, \mu)}{2\pi}$ переведет $M_K$ в множество $M_K(b)$.

Положим $\varepsilon > 0$ и выберем $K > 0$ так, чтобы $\operatorname{mes} M_{2K} > 1 - \frac{\varepsilon}{3}$ (по лемме 1 § 2 это возможно). Мы покажем, что при достаточно малом $b$ справедливо неравенство

$$\operatorname{mes} M_{\frac{K}{2}}(b) > 1 - \varepsilon,$$

из которого теорема 8 будет следовать непосредственно, ибо очевидно, что

$$2\pi\theta \geqslant \operatorname{mes} E_\theta \geqslant 2\pi \int_0^\theta \operatorname{mes} M_{\frac{K}{2}}(b)\, db.$$

2. В § 7 построено совершенное множество $N_K^0 = N_K$, $M_{2K} \subseteq N_K \subseteq M_{\frac{K}{2}}$. Очевидно, достаточно показать, что при достаточно малом $b$

$$\operatorname{mes} N_K(b) > 1 - \varepsilon. \tag{2}$$

(Поскольку $K > 0$ фиксировано, индекс $K$ будем теперь опускать: $N_K = N$.)

Согласно теореме 3, отображение $D_b: N \to N(b)$ есть предел равномерно сходящейся последовательности моногенных отображений

$$D_b^n: \mu \to \mu + \frac{1}{2\pi} \Delta^n(b, \mu).$$

Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $b(\varepsilon)$ такое, что при $b < b(\varepsilon)$ и любом $n$

$$\operatorname{mes} D_b^n(N) > 1 - \varepsilon. \tag{3}$$

силу теоремы 3, найдется такое $b(\varepsilon)$, что при всех $n$, $b<b(\varepsilon)$, $\mu\in N$ дет справедливо неравенство

$$\left|\frac{\partial\Delta^n}{\partial\mu}\right|<\frac{\varepsilon}{3},$$

е. при отображении $D_b^n$ $N$ отображается почти без растяжения. Докажем, что это $b(\varepsilon)$ искомое (индекс $n$ будет всюду опущен, так рассуждения теперь ведутся при $n$ фиксированном). Пусть $b<b(\varepsilon)$. определению моногенности, для $\frac{\varepsilon}{3}$ найдется $\delta>0$ такое, что

$$\left|\frac{\Delta(\mu_1)-\Delta(\mu_2)}{\mu_1-\mu_2}-\frac{\partial\Delta(\mu_3)}{\partial\mu}\right|<\frac{\varepsilon}{3},$$

ли $|\mu_1-\mu_3|<\delta$, $|\mu_2-\mu_3|<\delta$, $\mu_1, \mu_2, \mu_3\in N$. Тогда при тех же условиях

$$\left|\frac{\Delta(\mu_1)-\Delta(\mu_2)}{\mu_1-\mu_2}\right|<\frac{2\varepsilon}{3}, \tag{4}$$

ласно выбору $b(\varepsilon)$.

3. Разобьем $N$ на непересекающиеся (разумеется, измеримые) части $\bigcup\limits_{i=1}^{L} N^i=N$, диаметр каждой из которых меньше $\delta$, и пусть $N^i(b)$ — их азы при преобразовании $D_b^n$. Так как при этом преобразовании стояния между двумя точками $N^i$ могут уменьшаться, как это явствует (4), не более чем в $1-\frac{2\varepsilon}{3}$ раз, то

$$\operatorname{mes} N^i(b)>\left(1-\frac{2\varepsilon}{3}\right)\operatorname{mes} N^i,$$

ткуда следует:

$$\sum_{i=1}^{L}\operatorname{mes} N^i(b)>\left(1-\frac{2\varepsilon}{3}\right)\sum_{i=1}^{L}\operatorname{mes} N^i.$$

Таким образом,

$$\operatorname{mes} N(b)>\left(1-\frac{2\varepsilon}{3}\right)\operatorname{mes} N,$$

ак как

$$\operatorname{mes} N>1-\frac{\varepsilon}{3},$$

учаем:

$$\operatorname{mes} N(b)>\left(1-\frac{2\varepsilon}{3}\right)\left(1-\frac{\varepsilon}{3}\right)>1-\varepsilon,$$

еравенство (3) доказано. Из него следует неравенство (2), ибо спра-
ива следующая

ЛЕММА. *Пусть* $E\subseteq[0,1]$ — *совершенное множество,* $f_n$ — *последова-
ность его непрерывных отображений на* $F_n\subseteq[0,1]$, *равномерно схо-
ся к отображению* $f: E\to F$, *и пусть* $0\leqslant\Delta<1$. *Если* $\operatorname{mes} F_n>1-\Delta$
*ех* $n$, *то* $\operatorname{mes} F\geqslant 1-\Delta$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon>0$. Рассмотрим множество $D_\varepsilon$ смежных
рвалов $F$, превосходящих $\varepsilon$. Их будет конечное число, и при
аточно большом $n$ эти интервалы будут сколь угодно мало отличаться

от соответствующих смежных интервалов $F_n$. Сумма длин последних при любом $n$ меньше $\Delta$, так как mes $F_n > 1 - \Delta$. Поэтому общая длина $I'$ не превосходит $\Delta$. Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$, мера всего дополнения к $F$ тоже не больше $\Delta$, что и требовалось доказать.

Полагая $E = N$, $f_n = D_b^n$, $F_n = D_b^n(N)$, $\Delta = \varepsilon$, получим из (3) неравенство (2). Теорема 8 доказана.

## § 12. Пример

Рассмотрим двумерное пространство отображений окружности на себя

$$\varphi \to \varphi + a + \varepsilon \cos \varphi \equiv T_{a,\varepsilon}(\varphi). \qquad (1)$$

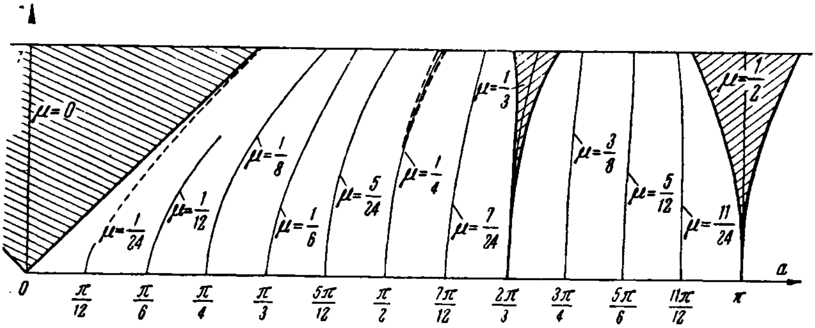

Рис. 8

При $\varepsilon = 0$ получим $T_{a,0}$ — поворот на угол $a$. При $|\varepsilon| < 1$ формула (1) определяет прямое взаимно однозначное непрерывное отображение окружности на себя.

Множества уровня непрерывной при $|\varepsilon| \leqslant 1$ функции

$$\mu(a, \varepsilon) = \mu(T_{a,\varepsilon})$$

можно изучать с двух сторон. Во-первых, можно искать те точки $(a, \varepsilon)$ плоскости, где $\mu$ рационально; границы таких областей даются условиями полуустойчивости цикла. Например, точка $(a, \varepsilon)$ входит в множество уровня $\mu = 0$, если уравнение

$$\varphi = \varphi + a + \varepsilon \cos \varphi$$

имеет действительное решение, т. е. границей области $\mu = 0$ служат прямые $a = \pm \varepsilon$. Таким же путем находятся области $\mu = \frac{m}{n}$. Они подходят к прямой $\varepsilon = 0$ все более узкими языками (рис. 8): две границы области $\mu = \frac{m}{n}$ имеют $(n-1)$-й порядок касания. Например, области $\mu = \frac{1}{2}$ и $\mu = \frac{1}{3}$ имеют границами кривые

$$a = \pi \pm \frac{\varepsilon^2}{4} + O(\varepsilon^4), \qquad (2)$$

$$a = \frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{12}\varepsilon^2 \pm \frac{\sqrt{7}}{24}\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4). \qquad (3)$$

Отсюда получаются приближенные формулы, годные и для не очень малых $\varepsilon$: при $\varepsilon = 1$ формула (2) дает $\pi \pm 0{,}25$ вместо $\pi \pm 0{,}23237\ldots$

торой подход к определению множеств уровня $\mu(a, \varepsilon)$ состоит чтобы использовать метод Ньютона для приближенного отыскания иррационального уровня $\mu$. После двух шагов метода Ньютона олучаем приближенное уравнение линии уровня

$$a = 2\pi\mu + \frac{\varepsilon^2}{4}\operatorname{ctg}\pi\mu - \frac{\varepsilon^4}{32}\operatorname{ctg}^3\pi\mu + \frac{\varepsilon^4}{32}\operatorname{ctg}2\pi\mu\,(1 + \operatorname{ctg}^2\pi\mu), \qquad (4)$$

вующее хорошо, когда котангенсы невелики. Рис. 9 дает понятие актере сходимости приближений и о соответствии этого результата лущему (на этом рисунке изобра- рафик функции $\mu(a) = \mu(a, 1)$; 0 обозначено нулевое, через ервое, через II — второе прибли- метода Ньютона; горизонталь- частки при $\mu = 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ опре- независимо в соответствии с лами (2), (3)). При указанном лой (4) числе $a$ замена перемен-

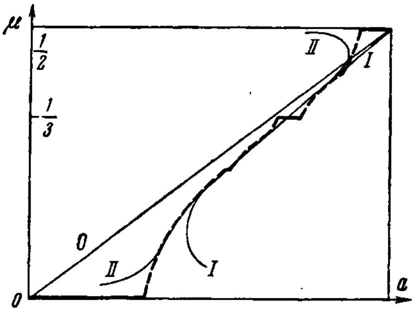

Рис. 9

$$\psi(\varphi) = \varphi - \frac{\varepsilon}{2}\frac{\sin(\varphi - \pi\mu)}{\sin\pi\mu} + \frac{\varepsilon^2}{4}\frac{\sin(2\varphi - \pi\mu)}{\sin\pi\mu\sin 2\pi\mu}$$

ащает преобразование (1) в преобразование

$$\psi \to \psi + 2\pi\mu + F_2(\psi, \varepsilon, \mu),$$

$F_2 \sim \varepsilon^4$.

мечание. В теории колебаний хорошо известно явление «захваты- которому соответствуют зоны с рациональными числами вращения. еобразования вида (1) и диаграммы вида рис. 8 описывают некоторый работы генератора релаксационных колебаний, синхронизируемого оидальными импульсами [см. (36)]. Другая задача подобного рода, вязанная с отображениями окружности на себя, рассмотрена е (37) (стр. 221—231).

## § 13. О траекториях на торе *

Пусть на торе $x, y \in [0, 2\pi]$ дано дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y) \quad (F(x + 2\pi k,\ y + 2\pi l) = F(x, y) > 0)$$

лнены обычные условия теорем существования и единственности . Через каждую точку $y_0$ меридиана $x = 0$ проходит траектория

$$y(x, y_0), \quad y(0, y_0) = y_0.$$

Пуанкаре, сопоставим точке $y_0$ точку $y_1 = y(2\pi, y_0)$. Тогда мы отображение окружности $x = 0$ на себя — прямое, взаимно ное, непрерывное и при достаточной гладкости (или аналитич- правой части гладкое (соответственно аналитическое); если же я $F(x, y)$ мало отличается от постоянной, то это отображение будет к повороту. Все свойства преобразования $y_1(y_0)$ отражают соответ-

---

(1) — (4), (14), (19) и (20).

ствующие свойства решений уравнения (1), и мы должны только сформу ровать результаты предыдущих параграфов в новых терминах.

Если отображение $y_1(y_0)$ заменой переменной $y$ на $\varphi(y)$ превращае в поворот на угол $2\pi\mu$, то эту замену естественно продолжить на в тор, положив в точке $(x, y(x, y_0))$

$$\varphi(x, y) = \varphi(y_0) + \mu x.$$

Очевидно, если $\varphi(y)$ — гладкая (соответственно аналитическая) заме то такою же будет замена $\varphi(x, y)$ на всем торе. В координатах $x$ траектории запишутся в виде

$$\varphi = \varphi_0 + \mu x$$

и поэтому говорят, что такого рода замена *выпрямляет траектор* Аналитическое выпрямление траекторий получил А. Н. Колмогоров в случае наличия аналитического интегрального инварианта. Мы. основании теоремы 2, можем утверждать, что *если функция $F(x, y)$ ана тически близка к постоянной и если число вращения $\mu$ удовлетвор обычным арифметическим условиям, то траектории можно выпрям аналитически.* Отсюда вытекает наличие аналитического интеграль инварианта у динамической системы

$$\frac{dy}{dt} = F(x, y), \qquad \frac{dx}{dt} = 1$$

(инвариантная мера — площадь в координатах $x$, $\varphi$).

С другой стороны, подобно примеру § 1, можно построить та аналитическую функцию $F(x, y)$, что инвариантная мера системы будет абсолютно непрерывна относительно площади $dx\,dy$, хотя чи вращения $\mu$ иррационально и система эргодична *.

13.2. Пусть на торе дана система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = B(x, y) \qquad (A(x, y) > 0, \quad B(x, y) > 0)$$

с аналитической правой частью. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B(x, y)}{A(x, y)},$$

имеющее те же интегральные кривые, что и система. Если их мо выпрямить согласно п. 13.1, то в новых координатах система примет

$$\frac{dx}{dt} = A'(x, \varphi), \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \mu A'(x, \varphi),$$

где $A'(x, \varphi) = A(x, y(x, \varphi))$. Эта система имеет аналитический интеграль инвариант $\frac{1}{A'(x, \varphi)}$, и в работе (14) показано, как (при обычных п положениях о $\mu$) превратить ее в систему

$$\frac{du}{dt} = 1, \qquad \frac{dv}{dt} = \mu$$

аналитической заменой переменных.

---

* Примечание при корректуре. Противоположное утверждение в вившемся во время печатания настоящей работы реферате (41) ошибочно.

ротивоположной возможностью как в случае уравнения, так и в слу- истемы, является наличие предельных циклов (20). Разбиение ранства правых частей систем (1) на множества уровня числа ения, выделение грубых систем и обсуждение вопроса о типичности гичны рассмотрениям §§ 9—11. Оказывается, что

Топологически подавляющим является случай нормальных циклов же грубый) *. Соответствующее множество правых частей открыто юду плотно; однако в системах с интегральным инвариантом этот ай вовсе не может иметь места.

Эргодический случай (случай иррационального $\mu$) тоже типичен, исходить при оценке типичности из мер в конечномерных подпро- твах. Для систем с аналитическим интегральным инвариантом лучай — подавляющий.

13.3. В многомерном случае в отсутствие интегрального инварианта вращения не определено. Тем не менее, пользуясь замечанием можно получить следующее утверждение.

ОРЕМА 9. *Пусть $\vec{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ — вектор с несоизмеримыми нентами такой, что при любом целочисленном векторе $\vec{k}$*

$$|(\vec{\mu}, \vec{k})| > \frac{c}{|\vec{k}|^n}.$$

*существует такое $\varepsilon(R, C, n) > 0$, что для любого аналитического рного поля $\vec{F}(\vec{x})$ на торе (т. е. такого, что $\vec{F}(\vec{x} + 2\pi\vec{k}) = \vec{F}(\vec{x})$) таточно малого, $|\vec{F}(\vec{x})| < \varepsilon$ при $|\mathrm{Im}\, \vec{x}| < R$, найдется вектор $\vec{a}$, для го система дифференциальных уравнений*

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(\vec{x}) + \vec{a}$$

*ащается в*

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = 2\pi\vec{\mu}$$

*ической заменой переменных.*

## § 14. О задаче Дирихле для уравнения струны

1. Пусть $D$ — область на плоскости, выпуклая по координатным авлениям, т. е. ее граница Г пересекает каждую прямую $x = c$, не более чем в двух точках.

*ача Дирихле* для уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = 0$ на $D$ состоит в том, чтобы *на $D$ функцию $u(x, y) = \varphi(x) + \psi(y)$, обращающуюся на Г в за- функцию $f(a)$ $(a \in \Gamma)$: $u|_\Gamma = f$.*

и этом на $f$, $\varphi$, $\psi$, Г могут налагаться различные требования сти, аналитичности и т. п.

---

работе (19), судя по реферату (21), утверждается, что необходимое и доста- условие грубости — наличие *одного* устойчивого цикла. Это неверно.

В случае, когда $D$ — прямоугольник $0 \leqslant x+y \leqslant l$, $0 \leqslant y-x \leqslant$ удобно перейти к координатам $\xi = x+y$, $\tau = y-x$. Тогда наше ур нение оказывается уравнением струны, а задача может быть интерп тирована как нахождение движения струны по двум мгновенным фо графиям и движению концов. Из физических соображений (стоя волны) ясно, что при соизмеримых $l$ и $t$ задача разрешима не все а если и разрешима, то не единственным образом. Этой задаче пос щен ряд работ [см. (22), (23), (5), (24), (17), (28)]; трудности аналогичн порядка встречаются и в решении некоторых других задач [см. (25)—(

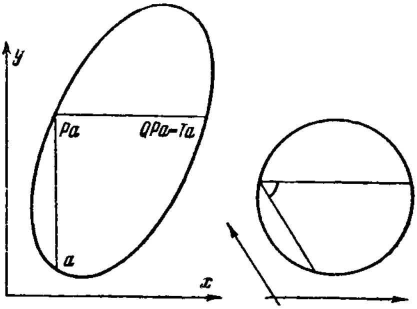

Рис. 10

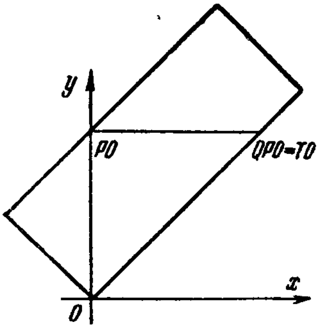

Рис. 11

14.2. Теоремы единственности [см. (5)]. Сопоставим гран Г некоторые ее отображения на себя (см. рис. 10). Пусть $P$ — пре разование, переводящее точку $a \in \Gamma$ в точку $Pa \in \Gamma$ с той же коорди той $x$; $Q$ — преобразование, переводящее точку $a \in \Gamma$ в точку $Qa$ с той же координатой $y$. Эти преобразования непрерывны, взаи однозначны и меняют ориентацию контура Г. Обозначим $QP =$ Очевидно,

$$P^2 = Q^2 = E, \quad PQ = T^{-1}.$$

$T$ — прямое гомеоморфное отображение.

ТЕОРЕМА 10 [см. (5)]. *Если контур* Г *таков, что для некот точки* $a_0 \in \Gamma$ *множество* $T^n a_0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ *всюду плотно на* Г, *задача Дирихле для* Г *не может иметь более одного непрерывного реше*

Доказательство. Решение $u(x, y) = \varphi(x) + \psi(y)$ опреде функции $\varphi(x)$, $\psi(y)$ с точностью до постоянной. Покажем, что в у виях теоремы знание $\varphi(x)$ в одной точке $a \in \Gamma$ позволяет опреде $\varphi(T^n a)$, $\psi(T^n a)$ во всех точках $T^n a$ $(n = 0, 1, \ldots)$ (мы пишем $\varphi(a)$ и для обозначения $\varphi(x)$ и $\psi(y)$, где $x$, $y$ — координаты точки $a \in \Gamma$).

Зная $\varphi(a)$, легко найти

$$\psi(Pa) = f(Pa) - \varphi(a),$$

так как у точек $a$ и $Pa$ абсциссы одинаковы. Затем можно опреде

$$\varphi(Ta) = f(Ta) - \psi(Pa),$$

пользуясь совпадением ординат точек $Pa$ и $Ta$. Далее мы таки образом получим $\varphi$, $\psi$ во всех точках $T^n Pa$, $T^n a$. Они образуют вс плотное на Г множество, поэтому совпадающие в этих точках не рывные функции совпадают на Г везде. Теорема доказана.

В случае, когда $D$ — прямоугольник $0 \leqslant x+y \leqslant l$, $0 \leqslant y-x \leqslant t$, образование $T$ есть, в сущности, поворот. Именно, если ввести на туре Г параметр

$$\vartheta=\frac{2\alpha\pi}{\sqrt{2}\,(l+t)},$$

$x$ — длина, отсчитываемая по контуру от точки $O$ до $a$ (рис. 11), то преобразование

$$T: T\vartheta=\vartheta+\frac{2\pi t}{t+l}$$

поворот на угол $2\pi\frac{t}{t+l}$. Если $D$ — эллипс, то нетрудно ввести на параметр так, чтобы в нем преобразование записывалось как ворот. Именно, отобразим эллипс аффинно на круг. Прямые коордиых направлений перейдут в два семейства параллельных прямых, чем две прямые разных семейств образуют угол $\pi\mu$, вообще не мой. Очевидно, когда эллипс подвергается преобразованию $T$, кность поворачивается на угол $2\pi\mu$ (рис. 10).

сли Г — кривая ограниченной кривизны, то $T$ — дважды дифференуемое преобразование, откуда, по теореме Данжуа, вытекает, что иррациональном числе вращения $\mu$ отображения $T$ множество юду плотно на Г. Отсюда следует

РЕМА 11 [см. (5), (24)]. *Если Г имеет ограниченную кривизну и ционально, то задача Дирихле может иметь только одно непрее решение.*

**Замечание.** Воспользовавшись теоремой о точке плотности, легко зать, что в условиях нашей теоремы может быть только одно измое решение. С другой стороны, метод доказательства теоремы 10 ляет при иррациональном $\mu$ построить сколько угодно решений обще, неизмеримых.

### 3. Подробное исследование прямоугольника.

ОРЕМА 12 [см. (23), (17)]. *Пусть на границе Г прямоугольника* $-y \leqslant l$, $0 \leqslant y-x \leqslant t$ *задана* $p+\varepsilon$ *раз дифференцируемая вдоль ы функция* $f(\vartheta)$. *Тогда для всех* $\mu=\frac{t}{t+l} \in M_k$, *удовлетворяющих нству* $\left|\mu-\frac{m}{n}\right|>\frac{K}{|n|^3}$ *при любых* $m$ *и* $n$ *и некотором* $K>0$, *заирихле с указанной граничной функцией имеет* $p-1$ *раз диффеуемое решение и поставлена относительно* $f(\vartheta)$ *корректно. В аналитичности* $f$ *решение при тех же* $\mu$ *аналитично.*

*некоторых иррациональных* $\mu$, *даже несмотря на аналитичность*
*шение может оказаться*
*лько бесконечно дифференцируемым,*
*фференцируемым* $k$, *но не* $k+1$ *раз,*
*лько непрерывным,*
*азрывным,*
*змеримым.*

азательство. Если

$$f(\vartheta)=\sum_{n\neq 0} a_n e^{in\vartheta}, \quad \varphi(\vartheta)=\sum_{n\neq 0} b_n e^{in\vartheta}, \quad \psi(\vartheta)=\sum_{n\neq 0} c_n e^{in\vartheta},$$

то, поскольку $\varphi(\vartheta)$ зависит только от $x$, а $\psi(\vartheta)$ — только от $y$, име

$$\varphi(\vartheta)=\varphi(-2\pi\mu-\vartheta),\quad b_n=b_{-n}e^{in2\pi\mu},$$
$$\psi(\vartheta)=\psi(-\vartheta),\qquad c_n=c_{-n}.$$

Так как $f(\vartheta)$ действительна и потому $a_n=\bar{a}_{-n}$, то из равенст $f(\vartheta)=\varphi(\vartheta)+\psi(\vartheta)$ получаем:

$$b_n+c_n=a_n,\qquad b_ne^{-in2\pi\mu}+c_n=\bar{a}_n,$$

или

$$b_n=\frac{\bar{a}_n-a_n}{e^{-2\pi i\mu n}-1},\quad c_n=a_n-b_n.$$

Теперь, когда формальное решение найдено, окончание доказате ства можно провести, в точности повторяя рассуждения § 2 *.

Замечание. Из формул (1) видно, что при всех $\mu$ можно, обр вая ряд, построить «приближенное решение», степень приближе которого тем больше, чем менее соизмеримы $l$ и $t$. При рациональ $\mu$ приближение не выше определяемой $\mu$ грани, а при сильно несо меримых $l$ и $t$ мы имеем теорему 11. В этом смысле корректность области отмечает Н. Н. Вахания в работе ([28]).

Мы можем утверждать, что зависимость решения от $\mu$ *моноге* (см. § 7).

14.4. Общий случай. Если граница $D$ такова, что преобразо ние $T$ можно представить как поворот в параметре, являющемся гл кой функцией точки границы, то, очевидно, для такого контура пр нимы все рассуждения п. 14.3, и в случае «достаточно иррациональн $\mu$ задача Дирихле имеет гладкое решение.

Примером может служить эллипс, для которого параметр постр в п. 14.2. В общем же случае при иррациональном $\mu$, несмотря какую угодно гладкость Г, нельзя гарантировать, что параметр (су ствующий по теореме Данжуа), в котором преобразование $T$ станов ся поворотом, гладок. Ф. Джон ([5]) показал, что *непрерывной* заме переменных $x$, $y$ вида $x\to u(x)$, $y\to v(y)$ («сохраняющей уравне $\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}=0$») можно отобразить область, для которой $T$ имеет ирра нальное $\mu$, на прямоугольник или на эллипс с таким же $\mu$. Однако замена, вообще говоря, только непрерывна, и гладкое граничное ус вие на кривой она может превратить в негладкое на эллипсе.

Заметим, что если Г — аналитическая кривая, то $P$ и $Q$, а зна $T$ и $T^n$, суть аналитические отображения. Если же Г, кроме того аналитически близкая к эллипсу кривая, то в подходящем парам преобразование будет аналитически близко к повороту. Поэтому теоремы 2 вытекает, что *среди кривых, для которых* $\mu\in M_K$, *аналоги эллипсу по отношению к разрешимости задачи Дирихле во всяком чае все кривые, достаточно близкие к эллипсу.*

Точно так же и другие теоремы об отображениях окружности

---

* Примечание при корректуре. В вышедшей во время печат настоящей работы статье П. П. Мосолова ([42]) аналогичное теореме 12 утвержд доказано для любого линейного дифференциального уравнения с постоян коэффициентами, у которого порядки всех производных четные.

могут быть сформулированы в этих терминах. В частности, если
азование $T$ имеет цикл, то задача Дирихле с нулевым гранич-
условием имеет ненулевое решение (по крайней мере кусочно
нное; подробнее см. (24)).

адача Дирихле для уравнения струны является задачей о собствен-
значениях для двумерного уравнения С. Л. Соболева

$$\frac{\partial^2 \Delta u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

(24), (27), (29), (30)]. В спектр входят те значения $\lambda$, для которых
бражение $T_\lambda$, построенное по кривой $\Gamma_\lambda$, имеет цикл (здесь через
обозначена кривая $\Gamma$, подвергнутая зависящему от $\lambda$ растяжению).
Из результатов § 10 вытекает, что если цикл устойчив, то все кри-
близкие к $\Gamma_\lambda$, дают аналогичный цикл и, следовательно, точка $\lambda$
дит в спектр с окрестностью. Пример кривой $\Gamma$, порождающей
образование с устойчивым циклом, построен Р. А. Александряном (24).
основании § 10 мы можем показать, что такие кривые имеются
любой окрестности любой кривой $\Gamma$.

Задача Дирихле для волнового уравнения с данными на эллипсоиде
следована недавно Р. Денчевым (31), (32).

Поступило
17. IX. 1959

## ЛИТЕРАТУРА

уанкаре А., О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, М.— Л., 1947.

enjoy A., Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore, Journ. de Math., XI, Fasc. IV (1932), 333—375.

мыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, М.— Л., 1949.

ддингтон Э. А., Левинсон Н., Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, ИЛ, Москва, 1958.

hn F., The Dirichlet problem for a hyperbolic equation, Amer. J. Math., 63 (1941), 141 — 154.

олмогоров А. Н., О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона, Доклады Ак. наук СССР, 98, № 4 (1954), — 530.

el C. L., Iterations of analytic functions, Ann. of Math., 43, № 4 (1942), 607—

лмогоров А. Н., Общая теория динамических систем и классическая механика, Proc. of the Intern. Congress of Mathematicians, Amsterdam, vol. 1 (1954), — 333.

el E., Leçons sur les fonctions monogènes uniformes d'une variable complexe, ris, 1917.

дронов А. А., Понтрягин Л. С., Грубые системы, Доклады Ак. наук СР, 14, № 5 (1937), 247 — 250.

лмогоров А. Н., Лекции о динамических системах, читанные в МГУ 57/1958).

bert D., Gesammelte Abhandlungen, t. 3, № 17, 5, Berlin, 1935.

zai, Ergodic skew product transformations on the torus, Osaca math. Journ., 3. № 1 (1951), 83—99.

олмогоров А. Н., О динамических системах с интегральным инвариантсм торе, Доклады Ак. наук СССР, 93, № 5 (1953), 763—766.

cobi C. G. J., De functicnibus duarum variabilium quadrupliciter periodicis bus theoria transcendentium abelianarum innititur, J. für Math., XIII (1835), — 78.

[16] Хинчин А. Я., Цепные дроби, Москва, 1935.

[17] Вахания Н. Н., Диссертация, МГУ, 1958.

[18] Канторович Л. В., Функциональный анализ и прикладная математика, Успехи матем. наук, III, 6 (28) (1948), 89 — 185.

[19] Цинь Юань-сюнь, О дифференциальных уравнениях на торе, Кэсюэ цзилу, Sci. Rec., I, № 3 (1957), 7 — 11.

[20] Kneser H., Reguläre Kurvenscharen auf die Ringflächen, Math. Ann., 91 (1923), 135 — 154.

[21] Грабарь М. И., Реферат 3711, РЖМат, № 5, 1958.

[22] Huber A., Die erste Randwertaufgabe für geschlossene Bereiche bei der Gleichung $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f(x, y)$, Monatshefte für Math. und Phys., 39,8 (1932), 79—100.

[23] Bourgin D. G., Diffin R., The Dirichlet problem for the vibrating string equation, Bull. Am. Math. Soc., 45 (1939), 851 — 859.

[24] Александрян Р. А., Диссертация, МГУ, 1950.

[25] Власов В. З., К теории безмоментных оболочек вращения, Известия Ак. наук СССР, ОТН, № 5 (1955), 55—84.

[26] Соколов А. М., К расчету оболочек отрицательной кривизны, Известия Ак. наук СССР, ОТН, № 5 (1955), 85—101.

[27] Соболев С. Л., Об одной новой задаче математической физики, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 18 (1953), 3 — 50.

[28] Вахания Н. Н., Об одной краевой задаче с заданием на всей границе для гиперболической системы, эквивалентной уравнению колебания струны, Доклады Ак. наук СССР, 116, № 6 (1957), 906 — 908.

[29] Александрян Р. А., О задаче Дирихле для уравнения струны и о полноте одной системы функций в круге, Доклады Ак. наук СССР, 73, № 5 (1950), 869—872.

[30] Александрян Р. А., Об одной задаче С. Л. Соболева для специального уравнения с частными производными 4-го порядка, Доклады Ак. наук СССР, 73, № 4 (1950), 631 — 634.

[31] Денчев Р., О спектре одного оператора, Доклады Ак. наук СССР, 126, № 2 (1959), 259 — 262.

[32] Денчев Р., О задаче Дирихле для волнового уравнения, Доклады Ак. наук СССР, 127, № 3 (1959), 501 — 504.

[33] Siegel C. L., Über die Normalform analytischer Differentialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung, Nachr. Acad. Wiss. Göttingen, 5 (1952), 21 — 30.

[34] Siegel C. L., Über die Existenz einer Normalform analytischer Hamiltonscher Differentialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung, M. Ann., 128, 2 (1954), 145 — 170.

[35] Зигель К. Л., Лекции по небесной механике, ИЛ, Москва, 1959.

[36] Теодорчик К. Ф., Автоколебательные системы, ГТТИ, Москва, 1952.

[37] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, 1958.

[38] Finzi A., Sur le problème de la génération d'une transformation donnée d'une courbe fermée par une transformation infinitésimale, Ann. Ecole Norm. Sup., 67 (3) (1950), 273—305.

[39] Finzi A., Sur le problème de la génération d'une transformation donnée d'une courbe fermée par une transformation infinitésimale, Ann. Ecole Norm. Sup., 69 (3) (1952), 371—430.

[40] Wintner A., The linear difference equations of first order for angular variables, Duke Math. J., 12 (1945), 445—449.

[41] Грабарь М. И., Реферат 333, РЖМат, № 1, 1960.

[42] Мосолов П. П., О задаче Дирихле для уравнений в частных производных, Известия ВУЗ'ов, Математика, № 3 (1960), 213 — 218.

[43] Плисс В. А., О грубости дифференциальных уравнений, заданных на торе, Вестн. ЛГУ, сер. мат.-мех., астр., № 13, вып. 3 (1960), 15—23.