В.И.Арнольд, В.В.Козлов, А.И.Нейштадт

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ КЛАССИЧЕСКОЙ И НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

М.: ВИНИТИ, 1985, 304 стр.

Предметный указатель

Тор колмогоровский 198
- нерезонансный 125, 197
- резонансный 125, 197
Точка либрации 84, 212
Точка материальная 13
Трение анизотропное 55
- с полной диссипацией 55
Трубка траекторий 38

ISSN 0233—6723

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ СССР
ПО НАУКЕ И ТЕХНИКЕ

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ВСЕСОЮЗНЫЙ ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ
Фундаментальные направления

Том 3

Научный редактор
член-корреспондент АН СССР Р. В. Гамкрелидзе

Серия издается с 1985 г.

ВИНИТИ

МОСКВА 1985

УДК 517.933:521.1

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ КЛАССИЧЕСКОЙ И НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

В. И. Арнольд, В. В. Козлов, А. И. Нейштадт

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В этой работе описаны основные принципы, задачи и методы классической механики. Основное внимание уделено математической стороне предмета. Хотя физическая основа рассматриваемых моделей, а также прикладные аспекты изучаемых явлений затронуты в значительно меньшей степени, авторы стремились изложить в первую очередь «рабочий» аппарат классической механики. Этот аппарат содержится, в основном, в главах 1, 3, 4 и 5.

Глава 1 посвящена основным математическим моделям классической механики, которые обычно используются для описания движения реальных механических систем. Особое внимание уделено изучению движения со связями, а также вопросам реализации связей в динамике.

В главе 3 обсуждаются группы симметрий механических систем и отвечающие им законы сохранения. Там же изложены ...ичные аспекты теории понижения порядка систем с симметриями, часто использующейся в приложениях.

Глава 4 содержит краткий обзор различных подходов к проблеме интегрируемости уравнений движения и некоторые наиболее общие и эффективные методы их интегрирования. Указаны разнообразные примеры проинтегрированных задач, составляющих «золотой фонд» классической динамики. Материал этой главы используется в главе 5, посвященной одному из наиболее результативных разделов механики — теории возмущений. Основная задача теории возмущений — исследование задач механики, мало отличающихся от задач, точно проинтегрированных. Элементы этой теории (в частности, широко известный и применяемый «принцип усреднения») возникли в небесной механике в связи с попытками учесть взаимные гравитационные возмущения планет Солнечной системы. К главам 4 и 5 примыкает глава 6, в которой исследована принципиальная возможность интегрирования уравнений движения (в точно определенном смысле). Оказывается, интегрируемые системы являются редким исключением и это обстоятельство повышает роль приближенных методов интегрирования, изложенных в главе 5. Классическим вопросам небесной механики посвящена вторая глава. В ней рассмотрена интегрируемая задача 2-х тел, классификация финальных движений задачи 3-х тел, содержится анализ столкновений и вопросы регуляризации в общей задаче n гравитирующих точек, различные предельные варианты этой задачи. С точки зрения теории возмущений задача n тел обсуждается в главе 5; основное внимание уделено проблеме устойчивости Солнечной системы. Элементы теории колебаний механических систем изложены в главе 7.

Наш текст, конечно, не претендует на полноту. Он также не является учебным пособием по теоретической механике: в нем практически отсутствуют подробные доказательства. Основное назначение нашей работы — познакомить читателя с классической механикой в целом — как с классическими, так и с самыми современными ее аспектами. Необходимые доказательства, а также более подробные сведения читатель найдет в книгах и оригинальных работах по этому предмету, указанных в конце данного тома.

Глава 1

ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Для описания движения механических систем используют разные математические модели, в основе которых лежат различные «принципы» — законы движения. В этой главе перечислены основные объекты и принципы классической динамики. Наиболее простой и важной моделью движения реальных тел является ньютонова механика, которая описывает движение свободной системы взаимодействующих точек в трехмерном евклидовом пространстве. В § 6 обсуждается целесообразность рассмотрения с точки зрения ньютоновой механики усложненных моделей движения.

§ 1. Ньютонова механика

1.1. Пространство, время, движение. Пространство, в котором происходит движение, трехмерно и евклидово с фиксированной ориентацией. Будем обозначать его E^3. Зафиксируем некоторую точку $o \in E^3$ — «начало отсчета». Тогда положение каждой точки s в E^3 однозначно задается ее радиусом-вектором $\overrightarrow{os}=r$ (начало вектора совпадает с точкой o, конец — с точкой s). Множество всех радиусов-векторов образует трехмерное линейное пространство R^3. Оно снабжено скалярным произведением $\langle\, ,\rangle$.

Время одномерно. Оно всюду обозначается t. Множество $R=\{t\}$ называется *временной осью.*

Движение (или *путь*) точки s — гладкое отображение $\Delta \to E^3$, где Δ — интервал оси времени. Будем говорить, что движение определено в интервале Δ. Каждому движению однозначно соответствует гладкая вектор-функция $r: \Delta \to R^3$.

Скоростью v точки s в момент времени $t \in \Delta$ называется производная $dr/dt=\dot{r}(t) \in R^3$. Очевидно, что скорость не зависит от выбора начала отсчета.

Ускорением точки называется вектор $a=\dot{v}=\ddot{r} \in R^3$. Скорость и ускорение обычно изображают векторами с началом в точке s.

Множество E^3 называют еще *пространством положений* точки s. Пара (s, v) называется состоянием точки, а множество $E^3 \times R^3\{v\}$ — *пространством состояний.*

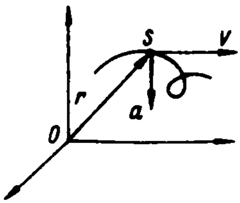


Рис. 1

Рассмотрим более общий случай, когда в пространстве E^3 движутся n точек $s_1, \ldots, s_n$. Множество $E^{3n} = E^3\{s_1\} \times \ldots \times E^3\{s_n\}$ называется пространством положения этой «свободной» системы. Если необходимо исключить столкновение точек, то E^{3n} следует уменьшить, вычитая из него диагонали

$$\Delta = \bigcup_{i<j} \{s_i = s_j\}.$$

Пусть $(r_1, \ldots, r_n) = r \in R^{3n}$ — радиус-векторы точек $s_1, \ldots, s_n$. Движение свободной системы задается гладкими вектор-функциями $r(t) = (r_1(t), \ldots, r_n(t))$. Аналогично определяется скорость

$$v = \dot{r} = (\dot{r}_1, \ldots, \dot{r}_n) = (v_1, \ldots, v_n) \in R^{3n}$$

и ускорение

$$a = \ddot{r} = (\ddot{r}_1, \ldots, \ddot{r}_n) = (a_1, \ldots, a_n) \in R^{3n}.$$

Множество $E^{3n} \times R^{3n}\{v\}$ называется пространством состояний, а пара (s, v) — состоянием системы.

1.2. Принцип детерминированности Ньютона—Лапласа. Этот принцип утверждает, что состояние системы в любой фиксированный момент времени однозначно определяет все ее движение (как будущее, так и прошлое).

Пусть в момент времени t_0 известно состояние системы (r_0, v_0). Тогда, согласно принципу детерминированности, известно движение $r(t)$, $t \in \Delta \subset R$; $r(t_0) = r_0$, $\dot{r}(t_0) = \dot{r}_0 = v_0$. Можно вычислить, в частности, ускорение $\ddot{r}$ в момент времени $t = t_0$[1]. Тогда $\ddot{r}(t_0) = f(t_0, r_0, \dot{r}_0)$, где f — некоторая функция, существование которой вытекает из принципа Ньютона — Лапласа. Поскольку момент времени t_0 можно выбрать произвольно, то для всех t будем иметь уравнение

$$\ddot{r} = f(t, r, \dot{r}).$$

Это дифференциальное уравнение называется *уравнение*

[1] Все функции, встречающиеся в динамике, мы считаем гладкими.

движения или *уравнением Ньютона*. Наличие уравнения Ньютона (с гладкой вектор-функцией f: $R\{t\}\times R^{3n}\{r\}\times R^{3n}\{\dot{r}\}\to R^{3n}$) эквивалентно принципу детерминированности. Это — следствие теоремы существования и единственности из теории дифференциальных уравнений. Функция f в уравнениях Ньютона определяется обычно из экспериментов. Ее задание входит в определение механической системы.

Приведем примеры уравнений Ньютона.

а) Уравнение падения точки в пустоте около поверхности Земли (полученное экспериментально Галилеем (G. Galilei)) имеет следующий вид: $\ddot{r}=-ge_z$, где $g\approx 9{,}8$ м/сек^2 (ускорение свободного падения), e_z — единичный вектор вертикали. Траекторией падающей точки является парабола. Δ

в) Гук (R. Hooke) показал, что уравнение малых колебаний тела, закрепленного на конце упругой пружины, имеет вид $\ddot{x}=-\alpha x$, $\alpha>0$. Постоянный коэффициент α зависит от выбора тела и пружины. Эта механическая система называется *гармоническим осциллятором*. Δ

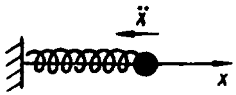


Рис. 2. Гармонический осциллятор

Оказалось, что в экспериментах удобнее определять не ускорение f, стоящее в правой части уравнений Ньютона, а произведение $mf=F$, где m — некоторое положительное число, называемое *массой точки* (раскрытие физического смысла понятия массы не входит в задачу динамики). Так, например, в экспериментах Гука постоянная $m\alpha=c$ зависит от свойства упругой пружины, но не от выбора тела. Она называется коэффициентом упругости.

Пара (s, m) (или (r, m), где r — радиус-вектор точки s) называется *материальной точкой* массы m. В дальнейшем мы будем часто обозначать точку s и ее массу m одной и той же буквой m. Если система материальных точек состоит из n точек с массами $m_1, \ldots, m_n$, то уравнения Ньютона

$$\ddot{r}_i=f_i(t, r_1, \ldots, r_n, \dot{r}_1, \ldots, \dot{r}_n),\ 1\leqslant i\leqslant n,$$

можно переписать так:

$$m_i\ddot{r}_i=F_i(t, r, \dot{r}),\ 1\leqslant i\leqslant n.$$

Вектор $F_i=m_if_i$ называется *силой*, действующей на точку m_i. «Слово сила не входит в основные законы динамики, которые мы только что указали. В действительности, можно обойтись и без него»[1]. Эти уравнения оудем также называть уравнениями Ньютона.

c) Как установил Ньютон (I. Newton), если в пространстве есть n материальных точек $(r_1, m_1), \ldots, (r_n, m_n)$, то на i-ую точку действует сила $F_i = \sum\limits_{i \neq j} F_{ij}$, где

$$F_{kl} = \frac{\gamma m_k m_l}{|r_{kl}|^3} r_{kl}, \quad r_{kl} = r_l - r_k, \quad \gamma = \mathrm{const} > 0.$$

Это — *закон всемирного притяжения.* $\triangle$

d) При быстром движении тела в воздухе сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости (закон Стокса). Уравнение падения тела в воздухе имеет, таким образом, следующий вид: $m\ddot{z} = mg - c\dot{z}^2$, $c > 0$. Оказывается, всегда существует $\lim\limits_{t \to \infty} v(t)$, равный $\sqrt{mg/c}$ и не зависящий от начального состояния. $\triangle$

Принцип детерминированности имеет место и в релятивистской механике. Классическую механику Ньютона отличает от релятивистской механики *принцип относительности Галилея.*

1.3. Принцип относительности. Прямое произведение $E^3 \times R\{t\}$ (пространство-время) имеет естественную структуру аффинного пространства. *Группой Галилея* называется группа всех аффинных преобразований $E^3 \times R$, которые сохраняют промежутки времени и при фиксированных $t \in R$ являются изометриями E^3. Таким образом, если $g: (s, t) \to (s', t')$ — преобразование Галилея, то

1) $t_\alpha - t_\beta = t'_\alpha - t'_\beta$,

2) если $t_\alpha = t_\beta$, то $|s_\alpha - s_\beta| = |s'_\alpha - s'_\beta|$.

Группа Галилея, очевидно, действует в $R^3\{r\} \times R\{t\}$. Приведем три примера галилеевых преобразований этого пространства. Во-первых, равномерное движение со скоростью v:

$$g_1(r, t) = (r + vt, t).$$

Далее, сдвиг начала отсчета в пространстве-времени:

$$g_2(r, t) = (r + x, t + a).$$

Наконец, поворот осей координат:

$$g_3(r, t) = (G\,r, t),$$

где $G: R^3 \to R^3$ — ортогональное преобразование.

Предложение 1. Каждое галилеево преобразование $g: R^3 \times R \to R^3 \times R$ можно представить единственным способом в виде произведения $g_1 g_2 g_3$.

---

[1] Аппель (P. E. Appell) [21] (стр. 89). Во времена Ньютона «силой» (лат. vis) назывались многие объекты, например, ускорение точки. Произведение массы точки на квадрат ее скорости Лейбниц (G. W. Leibnitz) назвал vis viva (живая сила). Современный термин «сила» соответствует vis motrix (ускоряющая сила) у Ньютона.

Введем в E^3 «неподвижную» *систему отсчета*: зафиксируем точку $o \in E^3$ и выберем три взаимно перпендикулярные оси. Каждое преобразование из группы Галилея переводит эту систему отсчета в другую систему отсчета, которая движется равномерно и прямолинейно относительно первой. Такие системы отсчета называются *инерциальными*.

Действие группы Галилея на $E^3 \times R$ можно продолжить до действия на $E^3 \times \ldots \times E^3 \times R$: если $g : (s, t) \to (s', t')$, то $g(s_1, \ldots \ldots, s_n, t) = (s_1', \ldots, s_n', t')$.

Принцип относительности утверждает, что уравнения Ньютона инвариантны относительно группы преобразований Галилея в инерциальной системе отсчета.

Этот принцип налагает ряд условий на вид правой части уравнения Ньютона, записанного в инерциальной системе координат. Так как среди галилеевых преобразований есть сдвиги оси времени, то силы не зависят от t:

$$m_i \ddot{r}_i = F_i(r, \dot{r}), \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Силы, зависящие от времени, могут появляться в ньютоновской механике лишь в упрощенных моделях движения.

Среди преобразований Галилея есть сдвиги в трехмерном пространстве E^3. Из однородности E^3 вытекает, что в инерциальных системах отсчета силы зависят лишь от относительных координат $r_k - r_l$. Из инвариантности уравнений Ньютона относительно подгруппы равномерных движений g_1 следует, что силы зависят также лишь от относительных скоростей точек:

$$m_i \ddot{r}_i = F_i(r_k - r_l, \dot{r}_k - \dot{r}_l); \quad i, k, l = 1, \ldots, n.$$

Изотропность E^3 (инвариантность относительно подгруппы вращений g_3) влечет соотношение

$$F(Gr, G\dot{r}) = GF(r, \dot{r}).$$

Если механическая система состоит всего из одной точки, то относительно любой инерциальной системы координат она движется равномерно и прямолинейно [1]. Действительно, в этом случае сила F не зависит от t, r, $\dot{r}$ и инвариантна относительно поворотов. Следовательно, $F \equiv 0$.

Если система состоит из двух точек, то приложенные к точкам силы F_1 и F_2 направлены по прямой, их соединяющей. Более того, согласно *принципу равенства действия и противодействия* считается, что $F_1 = -F_2$. Этот принцип, независимый от принципа относительности, приводит к общему понятию *сил взаимодействия* и *замкнутой механической системы*. Система n материальных точек (r_i, m_i), $1 \leqslant i \leqslant n$, на которые действуют силы F_i, называется замкнутой, если

---

[1] Это — закон *инерции* Галилея — Ньютона.

$$F_i = \sum_{\substack{i \neq j \\ 1 \leq j \leq n}} F_{ij}, \quad F_{kl} = -F_{lk}.$$

Вектор F_{ij} называется силой, с которой j-ая точка действует на i-ую. Важным примером взаимодействия является всемирное притяжение.

Отметим, что если система состоит из трех материальных точек, то из принципа относительности вытекает, что приложенные к точкам силы лежат в плоскости этих точек.

Среди законов движения, приведенных в п. 1.2 в качестве примеров, галилеево инвариантным является лишь всемирное притяжение. Если, однако, в системе гравитирующих точек масса одной из них исчезающе мала (скажем, пылинка в Солнечной системе), то ее влиянием на движение остальных точек можно пренебречь. Полученная таким путем «ограниченная» задача (имеющая важные применения в астрономии) уже не удовлетворяет принципу относительности Галилея. Все встречающиеся в механике Ньютона законы движения, которые не являются галилеево инвариантными, получены из инвариантных законов движения с помощью подобных упрощающих предположений.

1.4. Основные динамические величины. Законы сохранения. В динамике важную роль играют следующие характеристики движения:

$p = mv$ — *импульс* точки,

$k = r \times p = m(r \times v)$ — *момент импульса (кинетический момент)*,

$M = r \times F$ — *момент силы*,

$T = \dfrac{mv^2}{2}$ — *кинетическая энергия*,

$I = mr^2$ — *момент инерции*.

Если система состоит из нескольких точек, то соответствующие динамические величины являются аддитивными функциями.

Предложение 2. Пусть $P = \Sigma p_i$ и $F = \Sigma F_i$. Тогда $\dot{P} = F$. Точка

$$\xi = \frac{\Sigma m_i r_i}{\Sigma m_i}$$

называется *центром масс*. Легко видеть, что положение центра масс не зависит от выбора начала отсчета.

Следствие. Центр масс замкнутой системы движется равномерно и прямолинейно: $\ddot{\xi} = 0$[1].

Предложение 3. Пусть $K = \Sigma k_i = \Sigma m_i r_i \times v_i$ и $M = \Sigma r_i \times F_i$. Тогда $\dot{K} = M$.

---

[1] Это утверждение отмечено Ньютоном

Следствие 1. Если система замкнута, то $K=\text{const}$[1]. Сила, действующая на материальную точку, называется *центральной*, если ее линия действия все время проходит через точку $o \in E^3$.

Следствие 2. Движение под действием центральной силы происходит в плоскости, проходящей через o.

Предложение 4. Пусть $T=\Sigma m_i v_i^2/2$. Тогда $\dot{T}=\Sigma\langle F_i, v_i\rangle$.

Силы $F_k(r_1, \ldots, r_n)$ называются потенциальными, если 1-форма

$$\sum_{i=1}^{n} \langle F_i(r), dr_i \rangle,$$

называемая *работой сил* F_i на перемещениях dr_i, точна, т. е. является дифференциалом некоторой функции $V(r_1, \ldots, r_n)$, определенной всюду на

$$E^{3n} \setminus \Delta = E^{3n} \setminus \bigcup_{i<j} \{r_i = r_j\}.$$

Функция V называется *силовой*[2], а функция $U=-V$ — *потенциальной энергией* (*потенциалом*) системы точек.

Следствие 1. Если силы потенциальны, то на каждом движении полная энергия $T+U=\text{const}$[3].

Наличие законов сохранения импульса, кинетического момента и полной энергии замкнутой системы материальных точек связано с инвариантностью уравнений Ньютона относительно группы преобразований Галилея.

Предложение 5. Если силы взаимодействия зависят только от взаимных расстояний точек, т. е.

$$F_{ij}=f_{ij}(r_{ij})e_{ij}, \quad r_{ij}=|r_i-r_j|, \quad e_{ij}=\frac{r_j-r_i}{r_{ij}},$$

то они потенциальны[4].

Потенциальная энергия в этом случае равна $\sum_{i<j} u_{ij}$, где $u_{ij}=\int f_{ij}(r_{ij})\,dr_{ij}$ — потенциальная энергия взаимодействия материальных точек m_i и m_j.

Например, в случае всемирного притяжения силовая функция равна

$$V=\sum_{i<j} \frac{\gamma m_i m_j}{r_{ij}}.$$

Предложение 6. Пусть $I=\Sigma m_i r_i^2$ — момент инерции си-

[1] Установлено независимо Эйлером (L. Euler), Д. Бернулли (D. Bernoulli) и Д'Арси (d'Arcy).

[2] Силовая функция введена Лагранжем (J. L. Lagrange).

[3] В частных случаях оно было известно еще Гюйгенсу (Ch. Huygens), Ньютону (I. Newton), И. и Д. Бернулли (I. and D. Bernoulli).

[4] Установлено Лагранжем.

стемы относительно точки $o \in E^3$. Тогда $\ddot{I} = 4T + 2\sum_i \langle F_i, r_i \rangle$.

Если силы потенциальны и силовая функция является однородной степени k, то

$$\ddot{I} = 4T + 2\sum_i \langle \frac{\partial V}{\partial r_i}, r_i \rangle = 4T + 2kV = 4h + 2(k+2)V$$

зависит лишь от положения точек и полной энергии. В случае гравитационного притяжения $k = -1$ и, следовательно, $\ddot{I} = 4h - 2U$. Эта формула получена Лагранжем.

В качестве приложения введенных динамических величин и законов сохранения, рассмотрим задачу об *областях возможности движения* замкнутой системы с зависящими только от расстояния силами взаимодействия.

Свяжем с центром масс (*барицентром*) новую инерциальную систему отсчета и впредь будем считать его неподвижным: $\Sigma m_i r_i = 0$. Ясно, что силы взаимодействия F_{ij} не изменятся при такой смене начала отсчета, поскольку они зависят от разностей $r_i - r_j$.

Суммарный кинетический момент $K = \Sigma m_i (r_i \times v_i)$ относительно центра масс не меняется. Плоскость, проходящую через барицентр перпендикулярно постоянному вектору K, называют обычно неизменяемой плоскостью Лапласа.

Предложение 7. Справедливо неравенство

$$K^2 \leqslant 2IT. \tag{1}$$

◁ Действительно, $K^2 = |\Sigma m_i (r_i \times v_i)|^2 \leqslant (\Sigma m_i (r_i \times v_i))^2 \leqslant (\Sigma m_i r_i^2)(\Sigma m_i v_i^2) = I \cdot 2T$. ▷

Так как $T = h - U$, то из (1) получаем неравенство $K^2 \leqslant 2I(h - U)$ или $U + K^2/2I \leqslant h$. Рассмотрим гиперповерхность

$$\Gamma = \{r = (r_1, \ldots, r_n) \in R^{3n} : \Sigma m_i r_i = 0\}$$

и обозначим $B_{K,h}$ область возможности движения — множество точек Γ, в которых может находиться система с заданной энергией и заданной величиной суммарного кинетического момента. Очевидны включения $B_{K,h} \subset \{r \in \Gamma : U + K^2/2I \leqslant h\} \subset \Gamma$. Обратного включения, вообще говоря, нет.

Предложение 8. В плоской задаче, когда движение точек происходит в плоскости Лапласа, $B_{K,h} = \left\{r \in \Gamma : U + \frac{K^2}{2I} \leqslant h\right\}$.

◁ Пусть $\Sigma m_i r_i = 0$ и $v_i = (K \times r_i)/I + \alpha r_i/I$. Тогда $\Sigma m_i (r_i \times v_i) = K$ и $T = K^2/2I + \alpha^2/2I$. Всегда можно подобрать α таким образом, чтобы $r \in B_{K,h}$. ▷

§ 2. Лагранжева механика

2.1. Предварительные замечания. Начнем с простого примера. Пусть точка массы m движется по гладкой регулярной поверхности Σ[1], заданной уравнением

$$f(x, y, z) = 0 \tag{2}$$

под действием заранее известной силы F. Влияние поверхности Σ на движение точки естественно отождествить с действием некоторой силы N, ортогональной Σ. Считая после этого точку m свободной, ее движение можно описать уравнением Ньютона

$$m\ddot{r} = F + N. \tag{3}$$

Из этого уравнения с учетом *уравнения связи* (2) силу N можно однозначно найти как функцию состояния и времени.

Уравнение (3) можно переписать в виде уравнения

$$\langle m\ddot{r} - F, \xi \rangle = 0, \tag{4}$$

где ξ — произвольный касательный вектор к Σ, и интерпретировать его как закон движения Ньютона в касательной плоскости к поверхности Σ.

В механике сила N обычно называется давлением или, более обще, *реакцией связи* (2), а касательные векторы ξ — *возможными перемещениями* или скоростями несвободной точки m.

В общем случае, когда рассматривается несвободное движение n точек $(m_1, r_1), \ldots, (m_n, r_n)$, связи определяются гладким многообразием M, вложенным в пространство положений свободной системы $R^{3n} = R^3\{r_1\} \times \ldots \times R^3\{r_n\}$. Связями допускаются лишь такие движения, при которых $(r_1(t), \ldots, r_n(t)) \in M$ при всех t. Если на точки действуют известные силы $F_1, \ldots, F_n$, то уравнение (4) естественно обобщить:

$$\sum_{i=1}^{n} \langle m_i\ddot{r}_i - F_i, \xi_i \rangle = 0, \tag{5}$$

где $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — произвольный касательный вектор к M. Это уравнение называется «общим уравнением динамики» или *принципом Даламбера—Лагранжа*. В случае свободной системы точек векторы ξ_i произвольны и, следовательно, уравнение (5) эквивалентно системе уравнений Ньютона.

Пусть $q = (q_1, \ldots, q_k)$ — локальные координаты на M. Тогда r_i — гладкие функции q и

$$\dot{r}_i = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \dot{q}_j.$$

Кинетическая энергия

$$T(\dot{q}, q) = \frac{1}{2} \sum m_i \dot{r}_i^2$$

является положительно определенной квадратичной формой

[1] Гладкость следует понимать в двух смыслах: как бесконечную дифференцируемость и как отсутствие трения.

3-2

Введем еще *«обобщенные силы»* — ковекторы $Q(q)$ — с помощью равенства

$$\sum_{i=1}^{n} \langle F_i, dr_i \rangle = \sum_{j=1}^{k} Q_j dq_j.$$

Теорема 1 (Лагранж). Функции $q(t)$, задающие движение несвободной системы, удовлетворяют уравнению

$$(T'_{\dot q})^{\cdot} - T_q' = Q.$$

Если силы $F_1, \ldots, F_n$ потенциальны (в смысле определения § 1), то форма $\Sigma Q_j(q) dq_j$ является полным дифференциалом некоторой гладкой функции $V(q)$. В этом случае естественно ввести функцию $L = T + V$ и переписать уравнение движения в виде *уравнения Лагранжа*

$$(L'_{\dot q})^{\cdot} = L'_q.$$

Отсюда сразу следует, что движения механической системы совпадают с экстремалями вариационной задачи

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0.$$

«Удивительно, что у Лагранжа это предложение приведено лишь между строк; этим объясняется тот странный факт, что это соотношение в Германии, — главным образом благодаря трудам Якоби, — а затем и во Франции обычно называется *принципом Гамильтона*, тогда как в Англии никто не понимает этого обозначения; там это равенство известно под правильным, хотя и мало наглядным наименованием принципа стационарного действия» (Клейн (F. Klein)).

2.2. Вариации и экстремали. *Лагранжева система* на гладком многообразии M задается одной единственной функцией $L: TM \times \Delta \to R$, где Δ — интервал оси времени $R = \{t\}$. Точку $q \in M$ будем называть положением системы, а касательный вектор $v \in T_q M$ — скоростью в положении q. Пара q, v называется еще состоянием системы. В лагранжевой механике многообразие M принято называть пространством положений, касательное расслоение TM — пространством состояний, L — *функцией Лагранжа* или *лагранжианом*, а $\dim M$ — *числом степеней свободы*.

Пример 1. Натуральная механическая система — тройка (M, T, V), где M — гладкое многообразие положений, T — риманова метрика на M (кинетическая энергия системы), V — гладкая функция на M (потенциал силового поля). Риманова метрика — гладкая функция на касательном расслоении, которая в каждой касательной плоскости является положительно определенной квадратичной формой. Функция Лагранжа $L =$

$=T+V$ (функция $V: M\to R$ очевидным образом продолжается до функции из TM в R) Δ

Пусть a_1 и a_2 — две (не обязательно различные) точки в M. Путем из a_1 в a_2, начинающимся в момент t_1 и заканчивающимся в момент t_2 ($t_1, t_2 \in \Delta$), мы назовем отображение класса C^∞

$$\omega: [t_1, t_2]\to M$$

такое, что $\omega(t_1)=a_1$, $\omega(t_2)=a_2$. Множество всех таких путей обозначим $\Omega(M; a_1, a_2; t_1, t_2)$ или просто Ω, если это не приведет к недоразумениям.

Можно представлять себе Ω как некоторое «бесконечномерное многообразие». Касательным пространством к Ω в точке ω мы назовем векторное пространство, состоящее из гладких векторных полей W на M вдоль пути ω, для которых $W(a_1)=0$, $W(a_2)=0$. *Векторное поле* W_t, заданное в точках $\omega(t)\in M$, по определению считается гладким, если оно является ограничением на $\omega(t)$ гладкого векторного поля, определенного в окрестности пути ω на M. Касательное пространство к Ω в точке ω будем обозначать $T_\omega\Omega$.

Вариацией пути ω (с неподвижными концами) называется отображение $\hat{\alpha}:(-\varepsilon, \varepsilon)\to\Omega$ такое, что:

1) $\hat{\alpha}(0)=\omega$;

2) отображение $\alpha:(-\varepsilon, \varepsilon)\times[t_1, t_2]\to M$, определенное формулой $\alpha(u, t)=\hat{\alpha}(u)(t)$, является гладкой функцией переменных u, t.

Поскольку $\hat{\alpha}\in\Omega(M; a_1, a_2; t_1, t_2)$, то

3) $\alpha(u, t_1)=a_1$, $\alpha(u, t_2)=a_2$ при всех $u\in(-\varepsilon, \varepsilon)$.

Под вариацией пути ω мы будем понимать также отображение α.

Вариацию $\hat{\alpha}$ можно считать «гладким» путем на Ω. Его вектором скорости

$$\frac{d\hat{\alpha}}{du}(0)\in T_\omega\Omega$$

естественно назвать векторное поле $W_t\in T_{\omega(t)}M$ вдоль ω:

$$W_t=\frac{\partial\alpha}{\partial u}(0, t).$$

Поскольку при всех $t_1\leqslant t\leqslant t_2$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial u}(0, t)\in T_{\omega(t)}M$$

и

$$\frac{\partial\alpha}{\partial u}(0, t_1)=0, \quad \frac{\partial\alpha}{\partial u}(0, t_2)=0,$$

то, действительно, $W_t\in T_\omega\Omega$.

Лемма 1. Для любого $W \in T_{\omega}\Omega$ существует вариация $\hat{\alpha}(u)$ такая, что

$$\frac{d\hat{\alpha}}{du}(0) = W.$$

Векторное поле W_t называется *векторным полем вариации*. Оно, конечно, неоднозначно определяет вариацию движения.

Пример 2. Пусть $q_1, \ldots, q_n$ — локальные координаты на M и касательное поле W в базисе $\partial/\partial q_1, \ldots, \partial/\partial q_n$ имеет компоненты $W_1, \ldots, W_n$. Если путь $\omega(t)$ представляется гладкими функциями $q_1^*(t), \ldots, q_n^*(t)$, то вариацию $\alpha(u, t)$ можно задать формулами

$$q_1(u, t) = q^*_1(t) + uW_1(t), \ldots, q_n(u, t) = q^*_n(t) + uW_n(t). \quad \triangle$$

Пусть $F : \Omega \to R$ — числовая функция (по классической терминологии — функционал) на Ω. Мы определим дифференциал $\delta F : T_{\omega}\Omega \to R$, который будем называть *вариацией функционала* F.

Пусть $W \in T_{\omega}\Omega$. Согласно лемме 1, существует вариация $\hat{\alpha}(u) : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \Omega$ такая, что

$$\hat{\alpha}(0) = \omega, \quad \frac{d\hat{\alpha}}{du}(0) = W.$$

Положим, по определению,

$$\delta F(W) = \frac{dF(\hat{\alpha}(u))}{du}(0).$$

Нам следовало бы установить условия корректности определения вариации: линейность относительно W и независимость от выбора вариации пути $\alpha(u)$. Мы, однако, не будем заниматься этими вопросами, поскольку в рассматриваемых ниже случаях эти условия заведомо выполнены.

Точка $\omega \in \Omega$ будет критической (стационарной) для F, если в ней $\delta F = 0$. Пусть, например, F принимает минимальное значение на пути ω_0 и производная

$$\frac{dF(\hat{\alpha}(u))}{du}$$

существует. Тогда, очевидно, путь ω_0 является критическим.

2.3. Уравнения Лагранжа. Пусть $q : [t_1, t_2] \to M$ — гладкий путь из множества Ω. Скорость v в момент t равна производной $\dot{q}(t)$. В каждый момент времени $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ возникают наборы чисел $L'_{\dot{q}_i}$ и $\left(L'_{\dot{q}_i}\right)^{\cdot} - L_{q_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, которые называются импульсом системы и *лагранжевой производной* функции L. Обозначим их p и $[L]$.

Перейдем к новым локальным координатам $\bar{q}$ по формуле $q = q(\bar{q})$. Пусть $J = \partial q / \partial \bar{q}$ — невырожденная матрица Якоби этой замены переменных. В новых координатах функция Лагранжа определяется формулой $\bar{L}(\dot{\bar{q}}, \bar{q}, t) = L(\dot{q}, q, t)$.

Лемма 2. $p = I^{*-1}\bar{p}$, $[L] = I^{*-1}[\bar{L}]$.

Справедливость этих формул устанавливается прямым вычислением.

Так как p и $[L]$ при заменах локальных координат преобразуются по ковариантному закону, то мы можем считать их ковекторами, заданными в точке $q(t) \in M$. Следовательно, для касательных векторов $w \in T_{q(t)}M$ корректно определены выражения $p \cdot w$ и $[L] \cdot w$.

Определение. Функционал

$$F(\omega) = \int_{\omega} L\,dt = \int_{t_1}^{t_2} L(\dot{\omega}(t), \omega(t), t)\,dt$$

называется *действием*.

Теорема 2 (формула первой вариации действия).

$$\delta F(W) = -\int_{t_1}^{t_2} ([L] \cdot W)\,dt. \tag{6}$$

◁ Пусть $\hat{\alpha}(u)$ — вариация пути ω. Тогда

$$\frac{dF(\hat{\alpha}(u))}{du} = \int_{t_1}^{t_2} (L'_{\dot{q}}\, q''_{ut} + L_q' q_u')\,dt.$$

Интегрируя по частям первое слагаемое подынтегральной функции, получим:

$$\frac{dF}{du}(0) = p \cdot W\,\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} ([L] \cdot W)\,dt.$$

Осталось учесть, что $W(t_1) = 0$, $W(t_2) = 0$. ▷

Определение (принцип Гамильтона). Путь $\omega \in \Omega$ называется движением лагранжевой системы (M, L), если он является критической точкой функционала действие.

Из формулы (6) следует, что критические пути функционала F совпадают с решениями уравнения Лагранжа $[L]_{\omega(t)} = 0$. В частности, ограничение движения $\omega(t)$ на любой подынтервал $[t_1, t_2]$ снова будет движением.

В локальных координатах q на M уравнение Лагранжа можно записать в явном виде: $A(\dot{q}, q, t)\ddot{q} + \Phi(\dot{q}, q, t) = 0$, где $A = L''_{\dot{q}\dot{q}}$.

Лемма 3. Пусть $\bar{A} = \bar{L}''_{\dot{\bar{q}}\dot{\bar{q}}}$. Тогда $A = I^{*-1}\bar{A}I^{-1}$.

Если $\det A \neq 0$, то уравнение Лагранжа можно разрешить относительно ускорений. Отсюда вытекает, в частности, что состояние системы в момент времени $t_0 \in \Delta$ однозначно определяет ее движение. Подчеркнем, что, согласно лемме 3, условие невырожденности матрицы A не зависит от выбора локальных координат на M.

2.4. Уравнения Пуанкаре. Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_n$ — независимые касательные векторные поля на n-мерном многообразии M. В каждой точке $q \in M$ коммутаторы $[v_i, v_j]$ можно разложить по векторам $v_1, \ldots, v_n$ как по базису: $[v_i, v_j] = \sum c_{ij}^k(q) v_k$. Если $q: \Delta \to M$ — некоторый гладкий путь и f — гладкая функция на M, то

$$\dot{f} = f_q' \cdot \dot{q} = \sum_{i=1}^{n} v_i(f)\,\omega_i, \tag{7}$$

где $v_i(f)$ — производная от f вдоль v_i. Переменные ω суть линейные функции скоростей. Они называются «*квазискоростями*». Представим лагранжиан в виде функции от q и ω: $\hat{L}(\omega, q) = L(\dot{q}, q)$. Пусть $q(u, t)$ — вариация пути $q(t)$. Положим

$$\frac{\partial f(q(u, t))}{\partial u} = \sum_j v_j(f)\,w_j.$$

Учитывая перестановочность дифференцирований по q и t, получим равенства

$$\frac{\partial \omega_k}{\partial u} = \frac{\partial w_k}{\partial t} + \sum_{i,j} c_{ij}^k \omega_i w_j.$$

Вычислим вариацию действия в квазискоростях:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \hat{L}(\omega, q)\,dt = \frac{\partial \hat{L}}{\partial \omega_k} \cdot w_k \Big|_{t_1}^{t_2} +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} \sum_k \left[-\frac{d}{dt}\frac{\partial \hat{L}}{\partial \omega_k} + \sum c_{ik}^j \frac{\partial \hat{L}}{\partial \omega_j}\,\omega_i + v_k(\hat{L}) \right] \cdot w_k\,dt.$$

Поскольку вариации w_k независимы внутри интервала (t_1, t_2) и обращаются в нуль на его концах, то принцип Гамильтона дает нам уравнения движения в координатах q, ω:

$$\left(\hat{L}'_{\omega_k}\right)^{\cdot} = \sum c_{ik}^j \hat{L}'_{\omega_j}\omega_i + v_k(\hat{L}).$$

Они впервые получены Пуанкаре (H. Poincaré) в 1901 г. Если в качестве v_k взять независимые векторы $\partial/\partial q_k$, то уравнения Пуанкаре перейдут в обычные уравнения Лагранжа.

Пусть теперь M — группа Ли G и $v_1, \ldots, v_n$ — независимые левоинвариантные поля на G. В этом случае $c_{ij}^k = \mathrm{const}$. Предположим, что лагранжиан инвариантен относительно левых сдвигов на G. Тогда $v_k(\hat{L}) \equiv 0$ и, следовательно, $\hat{L}$ зависит лишь от квазискоростей ω, которые следует рассматривать как координаты в алгебре Ли g группы G. В этих предположениях уравнения Пуанкаре являются замкнутой системой дифференциальных уравнений на g.

Пример 3. *Твердым телом* с неподвижной точкой мы назовем совокупность материальных точек, на которую наложены следующие связи (в смысле п. 2.1):

а) неизменны расстояния между точками,

в) одна из точек тела совпадает с некоторой фиксированной точкой из E^3.

Ясно, что множество всех положений твердого тела можно однозначно получить из некоторого его фиксированного положения с помощью поворотов E^3 вокруг точки o. Поэтому пространство положений этой системы можно отождествить с группой $SO(3)$. Вращение твердого тела задается функцией $B(t)$, где B — ортогональная матрица из $SO(3)$. Скорость вращения тела $\dot{B}(t)$ есть касательный вектор к группе в точке $B(t)$. Естественно перенести этот вектор в касательное пространство к группе в единице, т. е. в алгебру Ли $so(3)$. Это можно сделать двумя способами: левым и правым сдвигом. В результате мы получим две кососимметрические матрицы $B^{-1}\dot{B}$ и $\dot{B}B^{-1}$ из алгебры $so(3)$.

Пусть $R(t)$ — радиус-вектор точки тела в неподвижном пространстве. Тогда $R(t)=B(t)R(0)$ и, следовательно,

$$V(t)=\dot{R}(t)=\dot{B}(t)R(0)=\dot{B}(t)B^{-1}(t)R(t).$$

В трехмерном ориентированном евклидовом пространстве любой кососимметрический оператор есть оператор векторного умножения: $\Omega\times(\cdot)$. В результате получаем *формулу Эйлера* $V=\Omega\times R$. Вектор Ω называется вектором *угловой скорости* в пространстве.

Если r — радиус-вектор, v — скорость той же точки в подвижном пространстве, связанном с твердым телом, то снова $v=\omega\times r$, где $\omega=B^{-1}\Omega$ — вектор угловой скорости в теле. Соответствие $f:B^{-1}\dot{B}\to\omega$ задает изоморфизм алгебры $so(3)$ (которую можно трактовать как алгебру левоинвариантных полей на $SO(3)$) и алгебры векторов трехмерного ориентированного евклидова пространства, в котором коммутатором является обычное векторное умножение.

Пусть m — распределение массы в твердом теле. Кинетическим моментом тела (в подвижном пространстве) назовем вектор

$$k=\int(r\times v)dm=\int(r\times(\omega\times r))dm.$$

Линейный симметрический оператор $A:\omega\to k$ называется *оператором инерции*, а его собственные взаимно перпендикулярные направления l_i — *осями инерции*. Собственные значения оператора A можно вычислить по формуле

$$A_i=\int r_i^2 dm,$$

где r_i — расстояния от точек твердого тела до оси l_i. Числа A_i называются моментами инерции тела относительно оси l_i.

Кинетическая энергия твердого тела

$$T=\frac{1}{2}\int V^2 dm=\frac{1}{2}\int v^2 dm,$$

ввиду формулы $T=\langle k, \omega\rangle/2=\langle A\omega, \omega\rangle/2$, является квадратичной формой от угловой скорости.

Пусть e_i — единичные векторы осей инерции, занумерованные так, что $e_1\times e_2=e_3, \ldots$. Пусть v_1, v_2, v_3 — левоинвариантные векторные поля на $SO(3)$, которые являются прообразами векторов e_1, e_2, e_3 при изоморфизме $f: so(3)\to R^3\{\omega\}$. Ясно, что

$$[v_1, v_2]=v_3, \quad [v_2, v_3]=v_1, \quad [v_3, v_1]=v_2. \tag{8}$$

Пусть $\omega=\sum\omega_i e_i$. Тогда

$$T=(A_1\omega^2_1+A_2\omega^2_2+A_3\omega^2_3)/2. \tag{9}$$

Используя формулы (8) и (9), запишем в явном виде уравнения Пуанкаре в отсутствии внешних сил:

$$A_1\dot{\omega}_1=(A_2-A_3)\,\omega_2\omega_3, \quad A_2\dot{\omega}_2=(A_3-A_1)\,\omega_3\omega_1,$$

$$A_3\dot{\omega}_3=(A_1-A_2)\,\omega_1\omega_2.$$

Эти уравнения, полученные впервые Эйлером в 1758 г., можно заменить одним векторным уравнением $A\dot{\omega}+\omega\times A\omega=0$.

Рассмотрим теперь более общий случай, когда твердое тело находится в осесимметричном силовом поле с силовой функцией V. Ввиду уравнений Пуанкаре, в правую часть уравнений Эйлера надо добавить слагаемые $v_i(V)$. Пусть $\gamma=\Sigma\gamma_i e_i$ — единичный вектор оси симметрии поля. Очевидно, что $V=V(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$. Условие постоянства вектора γ в неподвижном пространстве эквивалентно уравнению

$$\dot{\gamma}=\gamma\times\omega, \tag{10}$$

которое называется уравнением Пуассона. Из формулы

$$\dot{V}=\left\langle\frac{\partial V}{\partial\gamma}, \dot{\gamma}\right\rangle=\left\langle\frac{\partial V}{\partial\gamma}, \gamma\times\omega\right\rangle=\left\langle\omega, \frac{\partial V}{\partial\gamma}\times\gamma\right\rangle$$

и соотношения (7) получаем уравнение движения твердого тела

$$A\dot{\omega}+\omega\times A\omega=\gamma\times\frac{\partial V}{\partial\gamma}. \tag{11}$$

Замкнутая система уравнений (10)—(11) называется *уравнениями Эйлера—Пуассона*.

Пример 4. Укажем еще задачу о движении твердого тела в безграничной идеальной жидкости. Пространством состояний твердого тела является группа движений трехмерного евклидова пространства $L(3)$. Ее алгебра $l(3)$ есть полупрямая сумма алгебры вращений $so(3)$ и трехмерной коммутативной алгебры трансляций. Вращение твердого тела описывается *уравнениями Кирхгофа* (G. R. Kirchhoff) (1870)

$$\dot{k}=k\times\omega+e\times u, \quad \dot{e}=e\times\omega,$$

где $\omega=H_k'$, $u=H_e'$, $H(k, e)=\frac{1}{2}\langle Ak, k\rangle+\langle Bk, e\rangle+$ $+\frac{1}{2}\langle Ce, e\rangle$ — кинетическая энергия системы «тело + жидкость», A, B, C — симметрические операторы. Векторы ω и k — угловая скорость и кинетический момент, а e и u — «импульсивная сила» и «импульсивный момент» тела в жидкости.

Можно показать, что уравнения Кирхгофа являются уравнениями Пуанкаре на алгебре $l(3)$. Подробное обсуждение задачи Кирхгофа можно найти в книгах [140], [162].

2.5. Движение со связями. Будем говорить, что на лагранжеву систему (M, L) наложены связи, если в каждый момент времени $t\in\Delta$ в пространстве состояний TM выделено подмногообразие S, которое локально задается уравнениями

$$f_1(\dot{q}, q, t)=\ldots=f_m(\dot{q}, q, t)=0$$

с линейно независимыми ковекторами $f'_{1\dot{q}}, \ldots, f'_{m\dot{q}}$. Связями допускаются лишь те пути $\omega:\Delta\to M$, для которых $(\omega(t), \dot{\omega}(t))\in S$ при всех $t\in\Delta$. Обычно рассматривают линейные связи, когда функции f_s линейны по скоростям.

Лагранжевой системой со связями называется тройка (M, L, S); смысл обозначений уже разъяснен.

Касательные векторы $\xi\in T_qM$, удовлетворяющие уравнениям

$$f'_{1\dot{q}}\cdot\xi=\ldots=f'_{m\dot{q}}\cdot\xi=0,$$

называются возможными скоростями системы (M, L, S) в момент времени t и в состоянии $(q, \dot{q})\in S$. Корректность этого определения вытекает из леммы 2.

Определение (принцип Даламбера—Лагранжа (J. R. d'Alembert—J. L. Lagrange)). Допустимый гладкий путь $q:\Delta\to M$ называется движением лагранжевой системы со связями (M, L, S), если в любой момент времени $t\in\Delta$ значение $[L]_{q(t)}\cdot\xi=0$ для всех возможных скоростей ξ в состоянии $(q(t), \dot{q}(t))$.

С помощью этого принципа можно записать замкнутую систему уравнений движения:

$$[L]=\sum_{j=1}^{n}\mu_j f'_{j\dot{q}}, \quad f_1=\ldots=f_m=0. \tag{12}$$

Они называются уравнениями Лагранжа со множителями. Если матрица

$$\| (f'_{i\dot q} \cdot (L^{\cdot}_{\dot q \dot q})^{-1} f'_{j\dot q}) \| \qquad (13)$$

невырождена, то множители μ_j можно представить в виде функций состояния системы и времени. В этом случае уравнения (12) являются дифференциальными уравнениями на S (возможно, неавтономными) и поэтому лагранжевы системы со связями подчиняются принципу детерминированности.

Принцип Даламбера—Лагранжа имеет несколько эквивалентных формулировок. Мы приведем две из них, принадлежащих Гауссу (C. F. Gauss) и Гёльдеру (O. L. Hölder).

Введем, следуя Гауссу, множество *мыслимых движений* — гладких путей $q_\varkappa : \Delta \to M$, допустимых связями и имеющих в некоторый фиксированный момент $t_0 \in \Delta$ одно и то же состояние $(a, v) \in S$. Путь $q_0 : \Delta \to M$ с тем же состоянием в момент времени t_0 назовем *освобожденным движением*, если $[L]_{q_0(t)} = 0, t \in \Delta$. Наконец, *действительным движением* $q_d : \Delta \to M$ назовем отображение, удовлетворяющее принципу Даламбера—Лагранжа и начальному состоянию $q_d(t_0) = a$, $\dot q_d(t_0) = v$. Подчеркнем, что в отличие от мыслимых и действительных движений освобожденные движения в общем случае не удовлетворяют уравнениям связей.

Пусть снова $A = L^{\cdot}_{\dot q \dot q}$ и пусть $q_\alpha(t)$, $q_\beta(t)$ — произвольные гладкие пути с одним и тем же состоянием (a, v) в момент t_0. Квадратичная форма

$$Z = \frac{1}{2} (A (\ddot q_\alpha - \ddot q_\beta) \cdot (\ddot q_\alpha - \ddot q_\beta))|_{t_0}$$

называется по Гауссу *принуждением*. Легко проверить, что при заменах локальных координат на M разности ускорений $\ddot q_\alpha - \ddot q_\beta$ при $t = t_0$ преобразуются как касательные векторы. Следовательно, согласно лемме 3, принуждение определено инвариантно. За меру «отклонения» движений можно принять значение принуждения.

Теорема 3. Отклонение мыслимых движений от освобожденного принимает стационарное значение на действительном движении.

Доказательство основано на применении известного правила множителей Лагранжа.

Обычно матрица A положительно определена (как в натуральных системах). В этом случае из теоремы 3 выводится

Следствие (*принцип Гаусса* [10]). Среди мыслимых движений действительное менее всего отклоняется от освобожденного движения.

Пример 5. *Математический маятник* длины l — это тяжелая материальная точка, которая движется без трения по вертикальной окружности радиуса l. Пусть φ — угол отклонения маятника от вертикали (рис. 3). Зафиксируем некоторое состояние $(\varphi, \dot\varphi)$; ускорения мыслимых движений маятника a_μ расположены на прямой, параллельной его скорости и отстоящей от точки m на расстояние $l\dot\varphi^2$. Ускорение освобожденного движения совпадает, очевидно, с ускорением свободного падения g. Принуждение $Z = m\langle a_\mu - g, a_\mu - g\rangle/2$ с точностью до постоянного слагаемого совпадает с функцией $m(l\ddot\varphi + g\sin\varphi)^2/2$. Условие минимума Z приводит к уравнению колебаний математического маятника: $l\ddot\varphi + g\sin\varphi = 0$. △

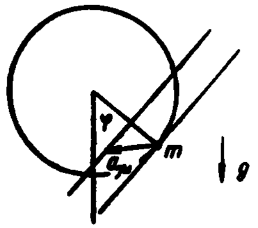


Рис. 3

Для того, чтобы сформулировать *принцип Гёльдера*, нам понадобятся некоторые новые определения. Пусть $\omega \in \Omega$ — гладкий допустимый путь. В линейном пространстве векторных полей вариаций $T_\omega\Omega$ выделим подпространство Γ, состоящее из полей W таких, что при всех t векторы $\tilde W_t$ являются возможными скоростями. Путь ω назовем критической точкой (по Гёльдеру) функционала действие F, если ограничение δF на подпространство Γ обращается в нуль.

Теорема 4 (принцип Гёльдера [10]). Допустимый путь является движением лагранжевой системы со связями тогда и только тогда, когда он является критической точкой (по Гёльдеру) функционала действие.

Это утверждение — простое следствие теоремы 2 и принципа Даламбера—Лагранжа.

Лагранжевы системы с линейными связями Герц (H. Hertz) разделил на *голономные* и *неголономные* в зависимости от того, являются ли наложенные на них связи *вполне интегрируемыми* или нет. Особенно просто определение интегрируемости выглядит в случае однородных связей, не зависящих явно от времени:

$$a_1(q)\cdot\dot q = \ldots = a_m(q)\cdot\dot q = 0. \tag{14}$$

Согласно общему определению связей, ковекторы $a_1, \ldots, a_m$ считаются линейно независимыми во всех точках M^n.

Связь (14) называется *вполне интегрируемой*, если на M^n существует гладкое $(n-m)$-мерное слоение такое, что его слои (гладкие $(n-m)$-мерные подмногообразия в M^n) во всех своих точках касаются плоскостей, определяемых уравнениями

(14). Приведем один из вариантов критерия Фробениуса (F. G. Frobenius) полной интегрируемости распределения касательных плоскостей (14): Пусть $\varphi_s = a_s \cdot dq$ — 1-форма на M^n, $s=1, \ldots, m$; связь (14) вполне интегрируема в том и только в том случае, когда 2-формы $d\varphi_s$, $s=1, \ldots m$, обращаются в нуль на пространстве допустимых скоростей.

Пусть $q : \Delta \to M^n$ — допустимый путь системы с голономными связями. Тогда при всех $t \in \Delta$ значения $q(t)$ принадлежат некоторому слою N^{n-m}. Введем функцию $\hat{L} : TN^{n-m} \to R$, которая является ограничением лагранжиана L на $TN^{n-m} \subset TM^n$.

Предложение 9. Допустимый путь $q: \Delta \to M^n$ является движением голономной системы (M^n, L, S) в том и только том случае, когда путь $\hat{q}: \Delta \to N^{n-m}$, $\hat{q}(t) \equiv q(t)$ является движением лагранжевой системы $(N^{n-m}, \hat{L})$.

Таким образом, голономные системы практически ничем не отличаются от обычных лагранжевых систем без связей.

Следствие. Движение голономной системы определяется ограничением лагранжиана на многообразие $S \subset TM$.

В неголономном случае это, конечно, не так.

Наиболее распространенными примерами движения с неинтегрируемыми связями являются скольжение конька по льду и качение шара по шероховатой поверхности. В первом случае скорость точки контакта в направлении, перпендикулярном плоскости конька, равна нулю, во втором — обращается в нуль скорость точки контакта. В заключение приведем два примера «парадоксального» поведения неголономных систем.

Пример 6. Рассмотрим конек на наклонной плоскости с декартовыми координатами x, y; будем считать ось y горизонтальной, а ось x направленной вниз. Пусть (x, y) — координаты точки контакта «уравновешенного» конька с плоскостью, φ — его угол поворота, отсчитываемый от оси x. Уравнение неинтегрируемой связи есть $\dot{x} \sin \varphi - \dot{y} \cos \varphi = 0$. Выбирая подходящим образом единицы измерения массы, длины и времени, лагранжиан можно представить в следующем виде: $L = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{\varphi}^2)/2 + x$. Соответствующие уравнения Лагранжа со множителем просто интегрируются. Если, например, в начальный момент угол $\varphi = 0$ и конек закручен с угловой скоростью $\dot{\varphi}(0) = \omega$, то

$$x = \frac{\sin^2 \omega t}{2\omega^2}, \quad y = \frac{1}{2\omega^2}\left(\omega t - \frac{1}{2} \sin 2\omega t\right), \quad \varphi = \omega t.$$

Интересной особенностью этого решения является то обстоятельство, что в среднем конек не соскальзывает с наклонной плоскости: $0 \leqslant x(t) \leqslant 1/2\omega^2$. Δ

Рассмотрим задачу о качении однородного шара внутри вертикально поставленной трубы. Естественно ожидать спиральный спуск шара по траектории с возрастающей крутизной. Однако в действительности (когда скорость центра шара в начальный момент не вертикальна) шар будет совершать гармонические колебания между двумя фиксированными горизонтальными плоскостями.

§ 3. Гамильтонова механика

3.1. Симплектическая структура и уравнения Гамильтона. Пусть M^{2n} — гладкое четномерное многообразие. Существует несколько эквивалентных способов введения на M *симплектической структуры*. Перечислим наиболее известные.

а) Симплектической структурой на M называется замкнутая невырожденная 2-форма ω^2. Согласно *теореме Дарбу* (J. G. Darboux), в малой окрестности каждой точки на M в подходящих локальных координатах $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$ симплектическая структура ω^2 приводится к «каноническому» виду

$$\sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i.$$

Локальные координаты p, q называются обычно *симплектическими* или *каноническими*.

Форма ω^2 позволяет построить естественный изоморфизм касательного T_xM и кокасательного $T_x{}^*M$ пространств: вектору $\xi \in T_xM$ ставится в соответствие 1-форма $\omega_\xi{}^1 \in T_x{}^*M$ по правилу $\omega_\xi{}^1(\eta) = \omega^2(\eta, \xi)$, $\eta \in T_xM$. В силу билинейности и невырожденности 2-формы ω^2, соответствие $\xi \mapsto \omega_\xi{}^1$ действительно является линейным изоморфизмом. Пусть $I: T_x{}^*M \to T_xM$ — обратное отображение. Пусть H — гладкая функция на M (возможно, зависящая от времени). Поскольку дифференциал dH является ковектором, то IdH — гладкое векторное поле на M. Оно называется *гамильтоновым*. Соответствующее дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = IdH(x) \tag{15}$$

называется *уравнением Гамильтона*.

Если F и G — гладкие функции на M, то корректно определена гладкая функция $\omega^2(IdG, IdF)$, которая называется *скобкой Пуассона* функций F и G. Обозначим ее $\{F, G\}$. Скобка Пуассона обладает следующими свойствами:

1) билинейность,

2) кососимметричность,

3) $\{F_1 \cdot F_2, G\} = F_1\{F_2, G\} + F_2\{F_1, G\}$ (правило Лейбница),

4) $\{\{H, F\}, G\} + \{\{F, G\}, H\} + \{\{G, H\}, F\} \equiv 0$ (тождество Якоби),

5) невырожденность (если точка $x \in M$ не является критической для F, то существует такая гладкая функция G, что $\{F, G\}(x) \neq 0$).

В локальных симплектических координатах p, q

$$\{F, G\}=\sum_{i=1}^{n}(G'_{p_i}F'_{q_i}-G'_{q_i}F'_{p_i}).$$

Скобку Пуассона $\{F, G\}$ можно вычислять по формуле $dF(IdG)$ — значение ковектора dF на векторе IdG. Следовательно, производная функции F вдоль гамильтонова векторного поля IdH равна как раз $\{F, H\}$. Таким образом, уравнение Гамильтона (15) можно переписать в эквивалентной форме $\dot{F}=\{F, H\}$. Поскольку координатные функции $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$ образуют «полный» набор независимых функций, то уравнения

$$\dot{p}_i=\{p_i, H\}, \ \dot{q}_i=\{q_i, H\}\Leftrightarrow\dot{p}_i=-H'_{q_i}, \ \dot{q}_i=H'_{p_i}(1\leqslant i\leqslant n)$$

замкнуты. Они называются *каноническими* уравнениями Гамильтона.

в) По Дираку (P. Dirac), многообразие M снабжено симплектической структурой, если задано отображение $\{,\}: C^\infty(M)\times C^\infty(M)\to C^\infty(M)$, удовлетворяющее условиям 1—5 предыдущего пункта.

Пусть F — гладкая функция на M. Из условий 1 и 3 следует, что $v_F=\{F, \cdot\}$ является дифференцированием, т. е. касательным вектором к M. Все касательные векторы можно представить в таком виде. Пусть G — еще одна гладкая функция и $v_G=\{G, \cdot\}$ — соответствующий касательный вектор. Определим 2-форму ω^2 по формуле

$$\omega^2(v_G, v_F)=\{F, G\}.$$

Эта форма, очевидно, билинейна, кососимметрична и невырождена. Последнее вытекает из условия невырожденности скобки Пуассона. Из тождества Якоби можно вывести, что ω^2 замкнута. Таким образом, определение симплектической структуры по Дираку эквивалентно определению пункта а).

с) Наконец, согласно «классическому» подходу, симплектическая структура на M вводится с помощью *симплектического атласа* — набора согласованных друг с другом карт, причем переход от карты к карте является *каноническим преобразованием.*

Пусть P, Q и p, q — локальные координаты на M. Преобразование $p, q\mapsto P, Q$ называется каноническим, если

$$PdQ-pdq=dS(p, q),$$

где S — некоторая гладкая функция, которую будем называть *первообразной функцией* канонического преобразования.

Из определения канонических преобразований следует, что форма $\omega_{p,q}^2=dp\wedge dq$ корректно определена на всем M.

Действительно,

$$\omega^2_{p,q}=d(pdq)=d(PdQ-dS)=dP\wedge dQ-ddS=\omega^2_{P,Q}$$

Укажем критерии каноничности преобразования $p, q\to P, Q$.

α) Пусть

$$\Gamma=\begin{Vmatrix} Q_q' & Q_p' \\ P_q' & P_p' \end{Vmatrix}$$

—матрица Якоби преобразования. Условием каноничности является равенство $\Gamma^* I\Gamma=I$, где

$$I=\begin{Vmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{Vmatrix}$$

— единичная симплектическая матрица.

β)

$$\oint\limits_\gamma PdQ=\oint\limits_\gamma pdq$$

для любого стягиваемого в точку замкнутого контура γ.

γ) $\{F, G\}_{P,Q}=\{F, G\}_{p,q}$, для любых гладких функций F и G

Отсюда вытекает, в частности, что канонические преобразования сохраняют канонический вид уравнений Гамильтона. Действительно, $\dot F_{P,Q}=\dot F_{p,q}=\{F, H\}_{p,q}=\{F, H\}_{P,Q}$.

3.2. Производящие функции. Пусть $g:(p, q)\mapsto(x, y)$—каноническая замена переменных такая, что

$$\det\left\|\frac{\partial x(p, q)}{\partial p}\right\|\neq 0. \tag{16}$$

В этом случае можно (хотя бы локально) разрешить уравнение $x=x(p, q)$ относительно p и считать x, q независимыми переменными. Тогда

$$p=p(x, q),\quad y=y(p, q)=y(p(x, q), q).$$

Условие каноничности преобразования g

$$pdq-xdy=dF(p, q)$$

можно записать в следующем виде:

$$pdq+ydx=d(F+xy)=dS(x, q),$$

откуда $p=S_q'$, $y=S_x'$. Из неравенства (16) следует, что

$$\det\left\|\frac{\partial^2 S}{\partial x\partial q}\right\|\neq 0. \tag{17}$$

Функция $S(x, q)$ называется *производящей функцией* преобразования g. Например, если g — тождественное преобразование, то $S=xq$.

Предложение 10. Для любой функцни $S(x, q)$, удовлетворяющей неравенству (17), существует каноническая замена переменных $x=x(p, q)$, $y=y(p, q)$ такая, что $\det\|\partial x/\partial p\|\neq 0$ и S — ее производящая функция.

Отметим, что не все канонические замены переменных удовлетворяют условию (16). Вот простой пример: $x=q$, $y=-p$. В этом случае метод производящих функций можно слегка видоизменить. Пусть, например, отличен от нуля якобиан $\det\|\partial y/\partial p\|\neq 0$. Такие канонические преобразования называют *свободными*. Производящей функцией служит функция $S_*(y, q)=F(p(y, q), q)$: формулы

$$p=S'_{*q}, \quad x=-S'_{*y}$$

задают свободное каноническое преобразование. Для свободных канонических преобразований снова справедливо предложение 10. Эти замечания можно обобщить.

Предложение 11. Пусть g — каноническое преобразование, заданное $2n$ функциями $x=x(p, q)$, $y=y(p, q)$. За локальные независимые координаты всегда можно принять один из 2^n наборов функций (x_i, y_j, q), $i\in I$, $j\in\{1, 2, \ldots, n\}\setminus I$,

$$\frac{\partial(x_i, y_j)}{\partial(p_i, p_j)}\neq 0.$$

При этом преобразование g локально восстанавливается по производящей функции

$$\tilde{S}(x_i, y_j, q)=\sum_{i\in I} x_i y_i+\int(p\,dq-x\,dy)$$

с помощью соотношений

$$p=\frac{\partial\tilde{S}}{\partial q}, \quad y_i=\frac{\partial\tilde{S}}{\partial x_i}, \quad x_j=-\frac{\partial\tilde{S}}{\partial y_j}.$$

3.3. Симплектическая структура кокасательного расслоения. Пусть N^n — гладкое многообразие и $T_q{}^*N$ — кокасательное пространство к N в точке q, состоящее из всех 1-форм на касательном пространстве T_qN. Объединение $\bigcup_{q\in N} T_q{}^*N=M$ имеет естественную структуру гладкого многообразия размерности $2n$. Оно называется пространством кокасательного расслоения N и обозначается T^*N. Если $q=(q_1, \ldots, q_n)$ — локальные координаты на N, то любая 1-форма задается своими n компонентами $p=(p_1, \ldots, p_n)$ в базисе $dq_1, \ldots, dq_n$. Наборы чисел $p_1, \ldots$ $\ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$ являются локальными координатами на M.

Симплектическая структура кокасательного расслоения T^*N определяется исключительно гладкой структурой многообразия N. Вначале мы определим замечательную 1-форму $\omega^1=$ $=p\cdot dq$ — значение ковектора $p\in T_q{}^*N$ на касательном векторе $\dot{q}\in T_qN$. В координатах p_i, q_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ эта форма имеет вид $\Sigma p_i dq_i$. Симплектическая структура на M задается 2-формой $\omega^2=d\omega^1$, которая замкнута и невырождена.

С помощью этой симплектической структуры уравнения Лагранжа, определенные на TN, можно представить в виде уравнений Гамильтона на T^*N. Сначала мы рассмотрим этот вопрос с локальной точки зрения. Пусть $L(\dot{q}, q, t)$ — функция Лагранжа такая, что

$$\det \|L''_{\dot{q}\dot{q}}\| \neq 0.$$

Положим $p = L'_{\dot{q}}$ и будем считать p элементом сопряженного пространства T^*_qN. Это уравнение локально можно разрешить относительно скорости $\dot{q}$. Введем функцию

$$H(p, q, t) = p \cdot \dot{q} - L|_{\dot{q} \to p},$$

которую будем называть «локальным» гамильтонианом. При фиксированных q и t функция $H(p)$ является *преобразованием Лежандра* (A. M. Legendre) функции $L(\dot{q})$[1]. Легко проверить, что $\det \|H''_{pp}\| \neq 0$ и $\dot{q} = H'_p$, $L(\dot{q}) = \dot{q} \cdot p - H|_{p \to \dot{q}}$. Таким образом, преобразование Лежандра инволютивно.

Теорема 5. Пусть $q(t)$—решение уравнения Лагранжа $[L]_{q(t)} = 0$. Тогда функции $q(t)$ и $p(t) = L'_{\dot{q}}|_t$ удовлетворяют уравнениям Гамильтона $\dot{p} = -H'_q$, $\dot{q} = H'_p$.

Использование импульсов вместо скоростей встречается впервые в работах Лагранжа и Пуассона.

Для того, чтобы перейти к уравнениям Гамильтона в целом, будем предполагать, что гладкая функция $L: TN \times R \to R$ выпукла по скоростям, т. е. матрица $\|L''_{\dot{q}\dot{q}}\|$ положительно определена при всех $\dot{q}$, q и t. Определим «глобальный» гамильтониан формулой

$$H(p, q, t) = \sup_{\dot{q}} (p \cdot \dot{q} - L(\dot{q}, q, t)). \tag{18}$$

Если в окрестности точки $\dot{q} = 0$ лагранжиан L удовлетворяет дополнительному условию $L(\dot{q}, q, t) \geqslant |\dot{q}|^2$, где $|\cdot|$ — некоторая риманова метрика на N, то локальный гамильтониан определен при всех p и всюду совпадает с глобальным. Следовательно, H — гладкая функция на $M \times R$. Она выпукла по p и при этом

$$L(\dot{q}, q, t) = \sup_{p} (\dot{q} \cdot p - H(p, q, t)). \tag{19}$$

Из формул (18)—(19) вытекает неравенство выпуклости $p \cdot \dot{q} \leqslant H(p) + L(\dot{q})$.

Применим эти соображения к натуральным механическим системам. Пусть $|\cdot|$—риманова метрика на пространстве положе-

---

[1] «Преобразование Лежандра» имеется уже у Эйлера.

ний N. Функция Лагранжа $L=T-U$, где $T=|\dot{q}|^2/2$ — кинетическая энергия, а $U(q)$ — потенциальная энергия системы. Если $|\dot{q}|^2=A(q)\dot{q}\cdot\dot{q}$, то $p=A\dot{q}$ и, следовательно,

$$H(p, q)=T-U|_{\dot{q}\to p}=\frac{1}{2}|p|^2+U,$$

где $|p|^2=A^{-1}p\cdot p$. Функция H совпадает с полной энергией системы. В более общем случае функция Лагранжа содержит линейные члены:

$$L=\frac{1}{2}|\dot{q}|^2+\langle v(q), \dot{q}\rangle-U(q),$$

где v — гладкое векторное поле на N. Тогда

$$H=\frac{1}{2}|p|^2-p\cdot v(q)+\frac{1}{2}|v(q)|^2+U(q).$$

3.4. Задача n точечных вихрей. Не следует думать, ч. уравнения Гамильтона появляются в механике лишь в результате применения к уравнениям Лагранжа преобразования Лежандра. Рассмотрим плоское стационарное течение идеальной несжимаемой жидкости. Пусть $v=(a(x, y), b(x, y))$ — поле скоростей ее частиц в декартовых координатах x, y. Из условия несжимаемости $\operatorname{div} v=0$ следует, что 1-форма $ady-bdx$ является дифференциалом некоторой функции $\Psi(x, y)$. Уравнение движения частицы жидкости можно представить тогда в виде уравнения Гамильтона

$$\dot{x}=\Psi'_y, \quad \dot{y}=-\Psi'_x \tag{20}$$

с гамильтонианом Ψ. Поскольку на линиях тока — траекториях частиц — функция $\Psi=\text{const}$, то Ψ называется функцией тока.

В гидромеханике важную роль играет течение с функцие тока

$$\Psi=-\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r, \quad r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}.$$

Этой функции соответствует поле скоростей

$$v=\frac{\Gamma}{2\pi r}\left(-\frac{y-y_0}{r}, \frac{x-x_0}{r}\right).$$

В этом случае говорят, что течение порождает *вихрь* тенсивности Γ, расположенный в точке (x_0, y_0). Легко по что интенсивность вихря равна интегралу

$$\oint adx+bdy,$$

взятому по любой окружности с центром в точке (x_0, y_0).

Если на плоскости заданы n точечных вихрей с интенсивн стями Γ_s и координатами (x_s, y_s), то естественно рассмотрет функцию тока

$$\Psi = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{n}\Gamma_k \mathrm{l} \sqrt{(x-x_k)^2+(y-y_k)^2}.$$

Движение частицы жидкости с координатами x, y описывается уравнением (20). Согласно *теореме Томсона* (см. п. 3.7), вихри «вморожены» в идеальную жидкость и их интенсивности не меняются со временем. Следовательно[1], динамику самих вихрей естественно описать системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_s = \frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial y_s}, \quad \dot{y}_s = -\frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial x_s};$$

$$\tilde{\Psi} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k \neq s} \Gamma_k \ln \sqrt{(x_s-x_k)^2+(y_s-y_k)^2}. \tag{21}$$

Если ввести функцию H с помощью равенства

$$H = -\frac{1}{2\pi} \sum_{s \neq k} \Gamma_s \Gamma_k \ln \sqrt{(x_s-x_k)^2+(y_s-y_k)^2},$$

го уравнения (21) системы точечных вихрей можно записать в форме уравнений

$$\Gamma_s \dot{x}_s = H'_{y_s}, \quad \Gamma_s \dot{y}_s = -H'_{x_s} \ (1 \leqslant s \leqslant n).$$

Эти уравнения гамильтоновы. Симплектическая структура $R^{2n}\{x, y\}$ задается скобкой Пуассона

$$\{f, g\} = \sum_s \frac{1}{\Gamma_s} \left(\frac{\partial f}{\partial y_s} \frac{\partial g}{\partial x_s} - \frac{\partial f}{\partial x_s} \frac{\partial g}{\partial y_s} \right).$$

3.5. Действие в фазовом пространстве. Пусть снова $M = T^*N$ и $H: M \times \Delta \to R$ — гладкая функция Гамильтона. На расширенном фазовом пространстве $M \times \Delta$ корректно определена 1-форма $p\,dq - H\,dt$ — форма «энергии-импульса». Рассмотрим гладкий путь $\omega: [0, 1] \to M \times \Delta$, траектория которого в расширенном фазовом пространстве представляется уравнениями $p = p(t)$, $q = q(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$. Множество всех таких путей обозначим $\tilde{\Omega}$. Вариацией пути ω (с подвижными концами) назовем отображение $(-\varepsilon, \varepsilon) \to \tilde{\Omega}$ такое, что

1) $\hat{\alpha}(0) = \omega$.

2) Отображение $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, 1] \to M \times \Delta$, определенное формулой $\alpha(u, s) = \hat{\alpha}(u)(s)$, $-\varepsilon < u < \varepsilon$, $0 \leqslant s \leqslant 1$, является гладкой функцией переменных u, s.

[1] Это рассуждение носит эвристический характер.

Функционал $F:\tilde{\Omega}\to R$, определенный формулой

$$F(\omega)=\int\limits_{\omega} pdq-Hdt, \tag{22}$$

назовем *действием в фазовом пространстве* вдоль пути ω. Действие дифференцируемо и его дифференциал (вариацию) можно найти по формуле

$$\delta F=\frac{dF(\hat{\alpha}(u))}{du}\bigg|_{u=0}=$$

$$=(pq'-Ht')\big|_{t_1}^{t_2}+\int\limits_{t_1}^{t_2}(p'\dot{q}-q'\dot{p}-H'+t'\dot{H})\,dt. \tag{23}$$

Здесь штрихом обозначена производная по u при $u=0$.

Множество путей из $\tilde{\Omega}$ с зафиксированными концами обозначим Ω (как в § 2). Ограничение $F:\Omega\to R$ тоже дифференцируемо и его вариация определяется формулой (23), в которой первое слагаемое отсутствует.

Теорема 6. Путь ω является критической точкой функционала $F:\Omega\to R$ тогда и только тогда, когда его траектория является решением уравнений Гамильтона с гамильтонианом H.

Принцип стационарности действия в фазовом пространстве принадлежит Пуанкаре ([34], см. также [10]).

На вариационную задачу Пуанкаре можно посмотреть с иной точки зрения. Запишем действие в виде интеграла

$$F=\int\limits_{t_1}^{t_2}(p\dot{q}-H)\,dt$$

и будем считать подынтегральное выражение функцией Лагранжа $L:TM\to R$. Уравнения Эйлера—Лагранжа вариационной задачи $\delta F=0$ будут как раз уравнениями Гамильтона. Действительно,

$$(L'_{\dot{p}})^{\cdot}=0=L'_p=\dot{q}-H'_p,\quad (L'_{\dot{q}})^{\cdot}=\dot{p}=L'_q=-H'_q.$$

Если M — произвольное симплектическое многообразие, то действие (22) определено лишь локально (в пределах одной канонической карты на M). При канонических заменах локальных координат действие $F:\Omega\to R$ может изменяться лишь на константу. С этой точки зрения его определение «корректно».

3.6. Интегральные инварианты. Пусть ω — гладкий замкнутый путь в расширенном фазовом пространстве. Точки, лежащие на траектории ω, можно рассматривать как начальные условия для решений уравнений Гамильтона. Множество всех решений с начальными условиями на ω образуют гладкую поверхность Γ в $M\times\Delta$, которая называется *трубкой траекторий*.

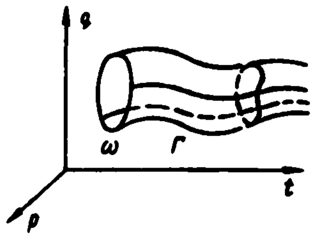


Рис. 4. Трубка траекторий

Пусть $\alpha(u)$, $0\leqslant u\leqslant 1$ — гладкое семейство замкнутых путей в расширенном фазовом пространстве, лежащих на Г и $\hat{\alpha}(0)=\omega$.

Теорема 7. Значения интеграла

$$\oint\limits_{\hat{\alpha}(u)} p\,dq - H\,dt \tag{24}$$

не зависят от u.

Интеграл (24) называется *интегральным инвариантом* Пуанкаре—Картана [34], [23].

◁ Пусть $s \bmod 1$ — угловая переменная, параметризующая замкнутые пути $\hat{\alpha}$. Рассмотрим действие

$$F(\gamma(s)) = \int\limits_{\gamma(s)} p\,dq - H\,dt$$

вдоль путей на поверхности Г, которые являются решениями уравнений Гамильтона и которые начинаются в точках $\hat{\alpha}(0)=\omega$, а заканчиваются в точках $\hat{\alpha}(u)$.

По формуле первой вариации

$$\frac{dF(\gamma(s))}{ds} = \left(p\frac{\partial q}{\partial s} - H\frac{\partial t}{\partial s}\right)\Bigg|_0^u.$$

Интегрируя это равенство по s, получим

$$\int\limits_0^1 \frac{dF(\gamma(s))}{ds}\,ds = \oint\limits_{\hat{\alpha}(u)} (p\,dq - H\,dt) - \oint\limits_{\hat{\alpha}(0)} (p\,dq - H\,dt) = 0. \quad ▷$$

Следствие 1. Пусть g^t — фазовый поток уравнения Гамильтона и γ — замкнутый контур в фазовом пространстве M Значения интеграла

$$\oint\limits_{g^t\gamma} p\,dq \tag{25}$$

не зависят от t.

Следствие 2. Отображение $g^t: M \to M$ при всех t является каноническим.

Интегралу (25) можно придать смысл и в том случае, когда симплектическая структура ω^2 не точна (т. е. 1-форма не определена однозначно на всем M). Действительно, по *формуле Стокса*

$$\oint_\gamma p\,dq = \iint_\sigma dp\wedge dq = \iint_\sigma \omega^2,$$

где σ — поверхность в M с границей γ.

Следствие 3. Значения интеграла

$$\iint_{g^t\sigma} \omega^2$$

не зависят от t.

Так как σ — любая поверхность в M, то дифференциал отображения $g^t: M\to M$ сохраняет, очевидно, симплектическую структуру ω^2. Рассмотрим внешние степени 2-формы ω^2:

$$\omega^4 = \omega^2\wedge\omega^2, \ldots, \omega^{2n} = \omega^2\wedge\omega^2\wedge\ldots\wedge\omega^2.$$

Так как $dg^t: TM\to TM$ сохраняет дифференциальные формы ω^{2k}, то, очевидно, интегралы

$$\int\ldots\int_{g^t\sigma^{2k}} \omega^{2k}, \tag{26}$$

взятые по «подвижным» $2k$-мерным поверхностям σ^{2k}, не зависят от t.

Форма ω^{2n}, записанная в канонических координатах p, q, пропорциональна

$$dp_1\wedge\ldots\wedge dp_n\wedge dq_1\wedge\ldots\wedge dq_n. \tag{27}$$

Поэтому интеграл (26) при $k=n$ естественно назвать объемом области σ^{2n}. Во всех канонических координатах элемент фазового объема с точностью до постоянного множителя имеет вид (27).

Следствие 4. Фазовый поток сохраняет объем в фазовом пространстве.

Это важное утверждение («*теорема Лиувилля* (J. Liouville) о сохранении фазового объема») позволяет применить к гамильтоновой механике результаты эргодической теории (*теорема Пуанкаре о возвращении, теорема о средних Биркгофа* и т. д.). При этом полезно иметь в виду следующее замечание: если гамильтонова система имеет первые интегралы $F_1, \ldots, F_m$ (среди которых может быть функция Гамильтона H), то сужение фазового потока g^t на неособое инвариантное многообразие $M_c = \{p, q : F_1 = c_1, \ldots, F_m = c_m\}$ сохраняет некоторую меру с гладкой положительной плотностью: можно показать, что $g|_{M_c}$ сохраняет значение интеграла

$$\int_D \frac{d\sigma}{V_m},$$

взятого по «подвижной» $(2n-m)$-мерной области D на M_c; здесь $d\sigma$ — элемент объема M_c как вложенного многообразия в $R^{2n}\{p, q\}$, V_m — m-мерный объем параллелепипеда со сторонами $\operatorname{grad} F_1, \ldots, \operatorname{grad} F_m$. Отметим, что форма $d\sigma/V_m$ на самом деле определяется лишь симплектической структурой и не зависит от выбора метрики в R^{2n}.

3.7. Приложения к динамике идеальной жидкости. Уравнение Эйлера, описывающее течение идеальной жидкости в потенциальном силовом поле, имеет следующий вид:

$$a = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \operatorname{grad} U. \tag{28}$$

Здесь a — ускорение частиц, ρ — плотность, p — давление, а U — потенциал массовых сил. В случае баротропных течений p и ρ связаны соотношением $p = p(\rho)$ и, следовательно, можно ввести функцию давления

$$P = \int \frac{dp}{\rho}.$$

Из уравнения (28) видно, что каждая частица жидкости ведет себя как материальная точка единичной массы, помещенная в силовое поле с потенциалом $U-P$. Интегральный инвариант Пуанкаре—Картана в этом случае имеет вид

$$\oint \langle v, dr\rangle - E\,dt,$$

где r — радиус-вектор частицы, v — ее скорость, $E = v^2/2 + P - U$ — функция Бернулли. В стационарном случае E постоянна на линиях тока.

В частности, если взять замкнутый «жидкий» контур, составленный из частиц в один и тот же момент времени, то интеграл

$$\oint \langle v, dr\rangle,$$

называемый *циркуляцией*, будет принимать постоянные значения. Это — известная теорема Томсона о сохранении циркуляции, из которой выводятся основные результаты динамики идеальной жидкости. Отметим два из них. Первый — это *теорема Лагранжа* о сохранении потенциальности течения: если в начальный момент времени $\operatorname{rot} v = 0$, то это равенство справедливо всегда. Второй — *теорема Гельмгольца* о «вмороженности» вихревых линий (интегральных кривых поля $\operatorname{rot} v$): частицы жидкости, образующие в некоторый момент вихревую линию, во все время движения также образуют вихревую линию.

3.8. Принцип стационарности укороченного действия. Пусть (M, L) — лагранжева система с лагранжианом $L = L_2 + L_1 + L_0$, где L_s — гладкие функции на TM, однородные по скоростям степени однородности s. Будем считать форму L_2 положительно определенной, так что L_2 — кинетическая энергия системы —

задает риманову метрику на M. Функцию $L_0: TM \to R$ можно отождествить с силовой функцией $V: M \to R$.

Уравнение Лагранжа $[L]=0$ имеет интеграл энергии $H=L_2-L_0$. При фиксированном значении $H=h$ движение может происходить лишь в области $B_h=\{x \in M : V+h \geqslant 0\}$, называемой областью возможности движения. При $h>\bar{h}=\sup_M(-V)$ множество B_h совпадает со всем пространством положений M. Если $h<\bar{h}$, то граница $\partial B_h \neq \varnothing$. В типичном случае, когда h — регулярное значение функции $H: TM \to R$, область B_h — гладкое многообразие с гладким краем $\partial B_h = \Sigma_h$, размерность которого на единицу меньше размерности B_h.

Пусть, для простоты записи, $h=0$ (если $h \neq 0$, то можно заменить L_0 на L_0+h). Предположим, что $B \setminus \Sigma \neq \varnothing$ (здесь $B=B_0$, $\Sigma=\Sigma_0$).

Определение. Функционал

$$F^* = \int_{t_1}^{t_2} (2\sqrt{L_0 L_2} + L_1)\, dt = F - \int_{t_1}^{t_2} (\sqrt{L_2} - \sqrt{L_0})^2 dt,$$

определенный на гладких кривых $x: [t_1, t_2] \to B$, назовем *укороченным действием* или *действием по Мопертюи* (P. L. Maupertuis).

Подынтегральное выражение в F^* является однородной функцией скорости степени 1. Следовательно, величина укороченного действия F^* не зависит от параметризации пути интегрирования.

Предложение 12. Гладкий путь $x: [t_1, t_2] \to B \setminus \Sigma$, такой, что $H(\dot{x}(t))=0$ для всех $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, является решением уравнения Лагранжа $[L]=0$ в том и только том случае, когда этот путь является критической точкой функционала F^*[1]

◁ Пусть $[L]_{x(t)}=0$ и $L_2(\dot{x}(t)) \equiv L_0(x(t))$. Тогда

$$\delta F^* = \delta F - 2\int_{t_1}^{t_2} (\sqrt{L_2} - \sqrt{L_0})\, \delta(\sqrt{L_2} - \sqrt{L_0})\, dt = 0.$$

Обратно, пусть $x:[s_1, s_2] \to B \setminus \Sigma$ — некоторый гладкий путь, являющийся стационарной точкой функционала F^*. Положим

$$t = \int_{s_1}^{s} \sqrt{L_2}/\sqrt{L_0}\, d\tau.$$

---

[1] Исторически «принцип Мопертюи» (предложение 12) предшествовал более простому принципу стационарности действия Гамильтона. «Фактическое содержание этого «принципа» не было совсем ясным Мопертюи. Точная формулировка, приведенная в тексте, принадлежит Якоби и его предшественникам Эйлеру и Лагранжу» ([42]).

Тогда, очевидно, гладкий путь $x(s(t)):[t_1, t_2]\to B\setminus\Sigma$ удовлетворяет уравнению $L_2=L_0$. Из формулы для δF^* вытекает, что $\delta F=0$. $\triangleright$

Определим внутри области B риманову метрику $\langle\ ,\ \rangle$, положив $\langle\dot{x},\dot{x}\rangle=4V(x)L_2(\dot{x})$, $\dot{x}\in TB$. Эта метрика называется метрикой Мопертюи. Для натуральных систем, когда $L_1\equiv 0$, предложение 12 означает, что в области $B\setminus\Sigma$ траектории движения с нулевой полной энергией совпадают с геодезическими линиями метрики Мопертюи.

Когда $h>\bar{h}$, область B совпадает с M и $(B, \langle,\rangle)$ — обычное риманово многообразие. Это замечание позволяет применить топологические теоремы на римановых многообразиях к изучению механических задач. Так, например, рассмотрим тор T^2 с некоторой римановой метрикой. Среди всех замкнутых кривых на T^2, делающих m оборотов по параллели и n по меридиану, существует кривая минимальной длины. Эта кривая — замкнутая геодезическая. С другой стороны, тор T^2 является пространством положений плоского двойного маятника. Отсюда вытекает, что для любых целых m, n существует периодическое движение двойного маятника, при котором одно звено делает m оборотов за время, за которое второе звено делает n оборотов. Более того, такие периодические движения существуют при любом достаточно большом значении постоянной энергии. С вариационной теорией замкнутых геодезических можно познакомиться по книгам [161], [173].

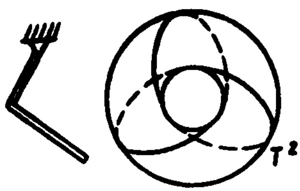


Рис. 5. Периодические колебания двойного маятника

Если $h<\bar{h}$, то граница Σ области B не пуста и метрика Мопертюи имеет особенность: длины кривых, лежащих на Σ, равны нулю. В этом случае геометрия области возможности движения не похожа на привычную риманову геометрию замкнутых многообразий (см. [78]). Вопросы существования замкнутых траекторий при $h<\bar{h}$ рассмотрены в работах [54], [56], [193].

§ 4. Неголономная механика

В пункте 2.5 были рассмотрены лагранжевы системы со связями, движение которых подчиняется классическому принципу Даламбера—Лагранжа (эквивалентному принципам Гаусса и

6-2

Гёльдера). В этом параграфе мы укажем другую математическую модель движения систем со связями, основанную на некотором естественном обобщении принципа Гамильтона стационарности действия; эта модель названа нами *вакономной механикой*. В случае вполне интегрируемых связей вакономная механика оказывается тождественной обычной механике голономных систем. Если же связи неинтегрируемы, то принципы Даламбера—Лагранжа и Гамильтона, будучи примененными к одной и той же лагранжевой системе, дают различные уравнения движения.

4.1. Задача Лагранжа. Пусть M—гладкое многообразие и $L:TM\times R\to R$—гладкая функция. Пусть $f_s:TM\times R\to R$ $(1\leqslant s\leqslant m)$—набор гладких функций с линейно независимыми ковекторами $f'_{1\dot q},\ldots,f'_{m\dot q}$. *Задачей Лагранжа* называется вариационная задача о стационарном значении функционала действие

$$F=\int_{t_1}^{t_2}L\,dt$$

в классе кривых с закрепленными концами, удовлетворяющих уравнениям

$$f_1=\ldots=f_m=0. \tag{29}$$

В отличие от вариаций в принципе Гёльдера (см. п. 2.5), вариации допустимых путей в задаче Лагранжа должны снова удовлетворять уравнениям (29). Однако при буквальном понимании этого высказывания может возникнуть ряд серьезных затруднеиий.

Пример 7. (Каратеодори (C. Carathéodory)). Зададим связь уравнением

$$\dot x_2=\sqrt{1+\dot x_1^2},\quad (x_1,\ x_2)\in R^2. \tag{30}$$

Если зафиксировать значения координат $(x_1,\ x_2)=x$ в момент t_1, то гладкая кривая $x:[t_1,t_2]\to R^2$, удовлетворяющая (30), однозначно определится своей проекцией $x_1(\cdot)$. При этом разность значений x_2—координаты в концах кривой $x(\cdot)$ совпадает с длиной x_1-проекции. Если, в частности, x_1—линейная функция времени, то допустимая кривая $x(\cdot)$ обладает тем свойством, что ее конец $x(t_2)$ нельзя соединить с точкой $x(t_1)$ никакой другой допустимой кривой. $\triangle$

Эту трудиость, связанную с «жесткостью» связей, можно обойти, если слегка изменить определение вариаций.

Определение. Вариацией допустимого пути $\omega:[t_1,\ t_2]\to M$ назовем гладкое семейство путей $\hat\alpha(u):[t_1,\ t_2]\to M,\ u\in(-\varepsilon,\ \varepsilon)$ такое, что

1) $\hat\alpha(0)=\omega$,

2) значения $\alpha(u, t_i)$ не зависят от u,

3) пути $\alpha(u, t)$ удовлетворяют уравнениям (29) с точностью до $o(u)$.

Лемма 4. Гладкое векторное поле $W(t)$ вдоль допустимого пути ω является векторным полем вариации тогда и только тогда, когда

1) $W(t_1)=0$, $W(t_2)=0$,

2) $(a_s\cdot W)^{\cdot}=b_s\cdot W$ при всех $t_1<t<t_2$; здесь $a_s=f'_{s\dot{q}}|_\omega$, $b_s=[f_s]|_\omega$.

Следствие. $\int\limits_{t_1}^{t_2} b_s\cdot W dt=0\,(1\leqslant s\leqslant m)$.

Вариация действия F определяется обычным образом:

$$\delta F(W)=\left.\frac{dF(\hat{\alpha}(u))}{du}\right|_{u=0},\quad W=\left.\frac{d\hat{\alpha}(u)}{du}\right|_{u=0}.$$

Критерий стационарности действия дает

Теорема 8. Допустимый путь $\omega:[t_1, t_2]\to M$ является условной экстремалью действия в том и только том случае, когда существуют m гладких функций $\lambda_s:[t_1, t_2]\to R$ таких, что вдоль пути ω выполняется равенство

$$[L]=\sum_s\lambda_s[f_s]+\sum_s\dot{\lambda}_s f'_{s\dot{q}}\,. \tag{31}$$

Это уравнение вместе с уравнениями связей (29) составляют «замкнутую» систему для нахождения решений задачи Лагранжа. Уравнение (31) можно получить *методом множителей Лагранжа*. Вводя новый лагранжиан $\mathscr{L}=L-\Sigma\lambda_s f_s$ и считая $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ дополнительными координатами, сведем задачу Лагранжа к вариационной задаче без ограничений. Если в новой задаче не принимать во внимание уравнения связей, то уравнения Эйлера—Лагранжа будут иметь вид

$$(\mathscr{L}'_{\dot{q}})^{\cdot}=\mathscr{L}'_q,\quad (\mathscr{L}'_{\dot{\lambda}})^{\cdot}=\mathscr{L}'_\lambda.$$

Первое уравнение совпадает с уравнением (31), а второе — с уравнениями (29). Строгое доказательство теоремы 8 основывается на применении леммы 4 (см. [141]).

Замечание. Теорема 8 не справедлива для «классического» варианта задачи Лагранжа, когда вариации $\hat{\alpha}(u)$ при всех значениях u точно удовлетворяют уравнениям связей. В этом случае уравнениями экстремалей являются уравнения (31) с «подправленной» функцией Лагранжа $\mathscr{L}=\lambda_0 L-\Sigma\lambda_s f_s$, где λ_0 — некоторая постоянная (которая может быть и нулем), причем среди множителей $\lambda_0, \lambda_1,\ldots,\lambda_m$ не все обращаются в нуль. В примере 8 постоянная λ_0 как раз равна нулю.

4.2. Вакономная механика. Принцип Даламбера—Лагранжа не является единственным рациональным определением движения лагранжевых систем со связями. Мы можем заменить его принципом Гамильтона; тогда движения системы со связями будут условными экстремалями вариационной задачи Лагранжа (в смысле определений п. 4.1). Уравнениями движения будут уравнения (29) и (31). Математическую модель движения лагранжевых систем со связями, основанную на таком расширении принципа Гамильтона, назовем для краткости вакономной механикой.[1] Обсуждение целесообразности рассмотрения этой модели мы отложим до § 5.

Уравнения Лагранжа (31) вакономной механики отличаются от неголономных уравнений

$$[L]=\sum_s \mu_s f'_{s\dot q}, \quad f_1=\ldots=f_m=0 \tag{32}$$

слагаемым $\sum\limits_s \lambda_s [f_s]$. Если эта сумма тождественно равна нулю (в силу системы (29) и (31)), то уравнения (31) и (32) совпадают. Пусть, в частности, система подчинена набору интегрируемых связей $g_s(q, t)=0$ $(1 \leqslant s \leqslant m)$. Эти уравнения можно заменить на эквивалентные: $\dot g_s=0$. Так как $[\dot g_s]\equiv 0$, то в случае интегрируемых связей вакономная механика сводится к обычной голономной механике. Отметим, что, в отличие от неголономной механики, движение вакономной лагранжевой системы определяется ограничением лагранжиана на подмногообразие в TM, высекаемое уравнениями связей (29).

Уравнения Лагранжа (29), (31) можно представить в гамильтоновой форме. Для этого введем канонические импульсы

$$p=\mathcal{L}'_{\dot q}=L'_{\dot q}+\sum \lambda_s f'_{s\dot q}, \tag{33}$$

где λ_s — пока неопределенные множители. Добавим к этим соотношениям уравнения связи (29) и разрешим систему (29), (33) относительно $\dot q$ и λ. Условием локальной разрешимости является неравенство

$$\left|\begin{array}{c|c} A & f'_{1\dot q}\cdots f'_{m\dot q} \\ \hline (f'_{1\dot q})^* & \\ \vdots & 0 \\ (f'_{m\dot q})^* & \end{array}\right| \neq 0, \tag{34}$$

где $A=\|\mathcal{L}''_{\dot q\dot q}\|$, $(f'_{s\dot q})^*$ — это ковекторы $f'_{s\dot q}$, записанные в виде строки. Если матрица A невырождена, то неравенство (34)

[1] Вакономная механика развита в работе [83]. Следует отметить, что уравнение (31) встречается в работах Герца, Гёльдера, Г. К. Суслова и др. авторов в связи с анализом применимости принципа стационарности действия (в духе задачи Лагранжа) в неголономной механике (см. [10]). Оказалось, что когда связи неинтегрируемы, то принципы Даламбера—Лагранжа и Гамильтона не эквивалентны.

можно представить в следующем виде:

$$\det \|(f'_{i\dot q} \cdot A^{-1} f'_{j\dot q})\| \neq 0.$$

Если, в частности, связи линейны по скоростям, то $\mathscr{L}''_{\dot q \dot q} = L''_{\dot q \dot q}$ и условие (34) переходит в неравенство (13), которое гарантирует детерминированное поведение лагранжевой системы со связями, подчиняющейся принципу Даламбера—Лагранжа (см. § 2).

Итак, если выполнено (34), то по теореме о неявной функции $\dot q = \dot q(p, q, t)$, $\lambda = \lambda(p, q, t)$. Введем по обычному правилу функцию Гамильтона

$$H(p, q, t) = p \cdot \dot q(p, q, t) - L(\dot q(p, q, t), q, t).$$

Предложение 13. Гладкий путь $q : \Delta \to M$ является движением ваконoмной системы с лагранжианом L и со связями $f_1 = \ldots = f_m = 0$ в том и только том случае, если функция $q(\cdot)$ вместе с некоторой «сопряженной» функцией $p(\cdot)$ удовлетворяют уравнениям Гамильтона

$$\dot q = H'_p, \quad \dot p = -H'_q. \tag{35}$$

Функция Гамильтона H вырождена по импульсам: ранг гессиана H''_{pp} падает на m единиц. В натуральном случае (когда лагранжиан является положительно определенной квадратичной формой по скоростям) отображение $p \mapsto \dot q$, определяемое уравнениями (29) и (33), является вырожденным линейным отображением. Поскольку всякое конечномерное линейное пространство канонически отождествляется с его вторым сопряженным пространством, то уравнения (35) можно трактовать как уравнения Гамильтона на T^*M.

Пример 8. Рассмотрим конёк на наклонной плоскости (см. пример 6 из § 2). Функция Лагранжа этой системы $L = (\dot x^2 + \dot y^2 + \dot\varphi^2)/2 + x$, а уравнение связи—$(\dot x \sin\varphi - \dot y \cos\varphi) = 0$. Канонические импульсы вводятся по формулам

$$p_x = \dot x - \lambda \sin\varphi, \quad p_y = \dot y + \lambda\cos\varphi, \quad p_\varphi = \dot\varphi;$$
$$\lambda = p_y \cos\varphi - p_x \sin\varphi. \tag{36}$$

Функция Гамильтона

$$H = \frac{1}{2}\left[(p_x \cos\varphi + p_y \sin\varphi)^2 + p_\varphi^2\right] - x. \tag{37}$$

Пусть в начальный момент угол φ и импульс p_y равны нулю. Так как p_y—первый интеграл уравнений Гамильтона, то $p_y \equiv 0$. Следовательно, в этом случае гамильтониан принимает совсем простой вид:

$$H = \frac{1}{2}(p_x{}^2 \cos^2\varphi + p_\varphi^2) - x.$$

Канонические уравнения с такой функцией Гамильтона, по-видимому, неинтегрируемы. Однако можно сделать качественные выводы о скольжении вакономного конька. Так как $\dot{p}_x = -H'_x = 1$, то с точностью до аддитивной постоянной импульс p_x равен t. Из уравнений Гамильтона $\dot{\varphi} = p_\varphi$, $\dot{p}_\varphi = p_x^2 \sin\varphi\cos\varphi$ следует, что

$$\ddot{\varphi} = t^2 \sin\varphi\cos\varphi. \tag{38}$$

Из соотношений (36) получим уравнения для определения декартовых координат точки контакта:

$$\dot{x} = t\cos^2\varphi, \quad \dot{y} = t\sin\varphi\cos\varphi.$$

Из первого уравнения вытекает, что конек монотонно соскальзывает вниз с наклонной плоскости. Можно показать (см. [83]), что почти все решения уравнения (38) при $t\to\infty$ стремятся к одной из точек $\pi/2 + k\pi$ $(k\in Z)$. При этом существуют

$$\lim_{t\to\infty} y(t) \quad \text{и} \quad \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \dot{x}(s)\,ds > 0.$$

Следовательно, асимптотически конек опускается вниз по некоторой прямой с ненулевой средней скоростью и стремится стать боком к своему среднему движению. Это движение интересно сравнить с движением неголономного конька, который при тех же начальных условиях смещается вбок по циклоиде.

4.3. Принцип детерминированности. Рассмотрим движение вакономной натуральной системы с лагранжианом $L = (A\dot{q}\cdot\dot{q})/2 + V(q)$ и с не зависящими от времени линейными связями $f_s = a_s(q)\cdot\dot{q} = 0$ $(1 \leqslant s \leqslant m)$. Линейное отображение Ψ_q: $T^*_qM \to T_qM$, задаваемое соотношениями (29) и (33), вырождено; его m-мерное ядро состоит из линейных комбинаций $\Sigma\mu_s a_s$. Пусть $\Gamma_q(\dot{q})$ — m-мерная плоскость в T^*_qM — полный прообраз точки $\dot{q}\in T_qM$ при отображении Ψ_q. Зафиксируем допустимое связями начальное состояние $(q_0, \dot{q}_0)$ и рассмотрим семейство решений уравнений Гамильтона (35) с начальными данными $q(0) = q_0$, $p(0)\in\Gamma_{q_0}(\dot{q}_0)$. Если связи вполне интегрируемы, то функция $q(t, q(0), p(0))$ — движение вакономной системы — не зависит от выбора начального импульса из плоскости $\Gamma_{q_0}(\dot{q}_0)$. Это простое замечание допускает обращение.

Предложение 14. Если для всех допустимых состояний q_0, $\dot{q}_0$ движение $q(t, q(0), p(0))$ не зависит от $p(0)\in\Gamma_{q_0}(\dot{q}_0)$, то линейные связи вполне интегрируемы.

Следствие. Вакономные системы с неинтегрируемыми связями не подчиняются принципу детерминированности.

Пример 9. В задаче о скольжении конька по наклонной плоскости (см. пример 8) начальное значение постоянного импульса p_v не влияет на начальное состояние конька, если $\varphi(0)=0$. Однако решения уравнений Гамильтона с гамильтонианом (37) существенно зависят от p_v. $\triangle$

Замечание. Принцип детерминированности, не справедливый в целом, может выполняться для отдельных состояний. Можно показать, что в вакономной механике имеет место следующий «обобщенный» принцип детерминированности: движение системы на некотором промежутке времени однозначно определяет все ее прошлое и будущее. $\triangle$

Пусть $\Psi : T^*M \to TM$ — отображение, совпадающее на каждом слое T_q^*M с линейным отображением Ψ_q. Функцию $F : T^*M \to R$ назовем *наблюдаемой*, если существует функция $G : TM \to R$ такая, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} T^*M \arrow[r, "\Psi"] \arrow[dr, "F"'] & TM \arrow[d, "G"] \\ & R \end{tikzcd}.$$

Условием наблюдаемости функции $F(p, q)$ является ее инвариантность относительно семейства трансляций $p \mapsto p+\Sigma\mu_s a_s$. Так, например, полная энергия системы наблюдаема, а множители Лагранжа λ_s — нет. Отметим, что свойство наблюдаемости не зависит от интегрируемости связей.

Предложение 15. Линейное пространство наблюдаемых функций замкнуто относительно скобки Пуассона (порожденной стандартной симплектической структурой $dp \wedge dq$) тогда и только тогда, когда связи вполне интегрируемы.

Отметим в заключение, что проблема «скрытых» параметров — ненаблюдаемых величин, участвующих в описании динамики системы — неоднократно обсуждалась в квантовой механике как раз в связи с анализом принципа детерминированности (см. [142]).

4.4. Уравнения Гамильтона в избыточных координатах. Уравнения (35) в случае вполне интегрируемых связей являются уравнениями Гамильтона голономной системы, записанными в *избыточных* координатах. В качестве примера рассмотрим движение материальной точки (m, r) в евклидовом пространстве E^3 по гладкой регулярной поверхности Σ, заданной уравнением $f(r)=0$. Пусть на точку действует потенциальная сила с потенциалом $U(r)$. Положим (согласно (33))

$$p=m\dot{r}+\lambda f'_r, \quad \lambda=\frac{\langle p, f'_r\rangle}{\langle f'_r, f'_r\rangle}. \tag{39}$$

Движение точки описывается уравнениями Гамильтона

$$\dot{r}=H'_p, \quad \dot{p}=-H'_r; \quad H=\frac{m}{2}\langle \dot{r}, \dot{r}\rangle+U=\frac{1}{2m}(p\times n)^2+U, \tag{40}$$

где n — единичный вектор нормали к поверхности Σ. Следовательно, уравнения (40) определяются самой поверхностью Σ

и не зависят от вида уравнения $f=0$, задающего эту поверхность.

Уравнения (40) имеют интеграл энергии H и «геометрический» интеграл $F=f(r)$. Очевидно, что в стандартной симплектической структуре $dp\wedge dr$ скобка Пуассона $\{H, F\}=0$. Пусть $g(\dot{r}, r)$ — первый интеграл уравнений движения

$$m\ddot{r}=-U_r'+\lambda f_r', \quad f(r)=0,$$

а G — функция g, представленная в канонических переменных. Очевидно, что $\{H, G\}=0$ и легко проверить инволютивность функций G и F.

Относительный интегральный инвариант Пуанкаре

$$\oint_\Gamma \langle p, dr \rangle$$

в случае, когда контур лежит на гиперповерхности $\{f=0\}\subset \subset R^6\{p, r\}$, с точностью до постоянного множителя m равен

$$\oint_\gamma \langle \dot{r}, dr \rangle, \tag{41}$$

где γ — замкнутый контур в $R^5\{r, \dot{r}\}$ — образ контура Γ при отображении (39). Интеграл вида (41) в гидродинамике называется циркуляцией скорости вдоль контура γ.

§ 5. Гамильтонов формализм со связями

5.1. Задача Дирака. Пусть (M, Ω^2) — симплектическое многообразие, $H: M\to R$ — гладкая функция и N — подмногообразие в M. Четверку (M, Ω^2, H, N) назовем *гамильтоновой системой со связями*. Ограничение симплектической структуры Ω^2 на N обозначим ω^2, а ограничение функции H обозначим F. Форма ω^2 очевидно, замкнута, но может оказаться вырожденной (если, например, размерность N нечетна).

Определение. Гладкий путь $x:\Delta\to M$, $x(t)\in N$, называется движением гамильтоновой системы (M, Ω^2, H, N), если $\omega^2(\cdot, \dot{x}(t))=dF(x(t))$ для всех значений $t\in\Delta$.

Наша цель — описать множество всех движений гамильтоновой системы со связями[1].

Если N совпадает с M, то система со связями совпадает с обычной гамильтоновой системой (см. § 3) и ее движения суть решения уравнений Гамильтона на M. Есть еще один случай, когда задача Дирака сводится к решению уравнений Гамильтона: если форма ω^2 невырождена, то (N, ω^2) — симплектическое подмногообразие и движения системы (M, Ω^2, H, N) являются решениями уравнения Гамильтона на N с функцией Гамильто-

[1] Эта задача впервые рассмотрена Дираком в 1950 г. для целей квантовой механики (см. [25]).

на F. При этом начальному состоянию $x_0 \in N$ отвечает единственное движение системы со связями. В вырожденном случае есть еще две возможности: задача Дирака может иметь несколько различных движений с начальным состоянием x_0 либо не иметь их вовсе. Как мы увидим, эти две возможности действительно реализуются.

Пусть форма Ω^2 точна на M. Тогда $\Omega^2 = d\Omega^1$ и $\omega^2 = d\omega^1$, где ω^1 — ограничение 1-формы Ω^1 на N. В общем случае (когда Ω^2 не точна) эти соотношения выполнены локально на M.

Лемма 5. Гладкий путь $x: [t_1, t_2] \to N$ является движением системы (M, Ω^2, H, N) тогда и только тогда, когда $x(\cdot)$ — критическая точка функционала действие

$$\int_{t_1}^{t_2} (\omega^1(\dot{x}) - F)\, dt$$

в пространстве гладких путей на N с фиксированными концами.

Это утверждение сводит задачу Дирака к исследованию вариационной задачи Лагранжа (см. п. 4.1) с лагранжианом $L(\dot{x}) = \Omega^1(\dot{x}) - H$, а интегрируемые связи задаются многообразием N.

Укажем некоторые явные формулы, которые будут использованы в дальнейшем. Пусть $x = (p, q)$ — локальные симплектические координаты на M и подмногообразие N задано системой уравнений

$$\Phi_1(p, q) = \ldots = \Phi_m(p, q) = 0 \tag{42}$$

с независимыми во всех точках N функциями Φ_s. Уравнения экстремалей задачи Лагранжа с лагранжианом $L = p \cdot \dot{q} - H(p, q)$ и связями (42) можно представить в виде уравнений со множителями $[L] = \Sigma \lambda_s \Phi_{sx}$, или в явнов виде —

$$\dot{q} = H'_p + \Sigma \lambda_s \Phi'_{sp}, \quad \dot{p} = -H'_q - \Sigma \lambda_s \Phi'_{sq}. \tag{43}$$

К этим уравнениям надо добавить уравнения (42). Поскольку функция Лагранжа L вырождена по скоростям (от $\dot{p}$ она вообще не зависит), то к уравнениям (43) не применим метод § 4.

Из уравнений (42) и (43) получим «условия совместности»

$$\dot{\Phi}_i = \{\Phi_i, H\} + \Sigma \lambda_s \{\Phi_i, \Phi_s\} = 0, \tag{44}$$

когда все $\Phi_s = 0$. Если матрица скобок Пуассона $\|\{\Phi_i, \Phi_j\}\|$ невырождена, то уравнения (44) однозначно задают λ_s как функции от p, q. В этом случае m обязательно четно и N — симплектическое подмногообразие в M. Симплектическая структура на N задается скобкой Пуассона:

$$\{F_1, F_2\}' = \{F_1, F_2\} + \sum_{i, j=1}^{m} \{\Phi_i, F_1\} c_{ij} \{\Phi_j, F_2\},$$

7-2

где $\|c_{ij}\|$ — матрица, обратная к $\|\{\Phi_i, \Phi_j\}\|$. Можно показать, что ограничение скобки $\{F_1, F_2\}'$ на N зависит лишь от ограничений функций F_1 и F_2 на N. Если некоторые из уравнений (44) не содержат множители λ_s, то мы получим новые уравнения связей $\Psi_j = \{\Phi_j, H\} = 0$, которые обычно называются *вторичными связями.* В самом общем случае вторичные связи являются алгебраическими условиями разрешимости уравнений (44) относительно λ_s. Функции Ψ_j следует добавить к функциям Φ_s; если эти функции составляют независимый набор, то можно повторить исследование условий совместности еще раз. В итоге мы либо придем к противоречию (в этом случае задача Дирака не имеет решений), либо система (44) окажется совместной при соответствующем выборе коэффициентов λ. В последнем случае множители λ, возможно, определены неоднозначно. Тогда начальные условия не определяют единственного решения системы уравнений (42)—(43).

Пример 10. Пусть $m=1$ и скобка $\{H, \Phi\}$ отлична от нуля во всех точках N. Тогда задача Дирака не имеет ни одного решения, поскольку условие совместности (44) не выполнено. Пусть снова $m=1$ и $\{H, \Phi\} \equiv 0$ на M. В этом случае коэффициент λ — произвольная гладкая функция на N и поэтому через каждую точку из N в один и тот же момент времени проходит целое семейство различных движений. Более того, имеется бесконечно много разных движений, совпадающих на целом интервале оси времени. В вакономной механике это не так (см. п. 4.3). $\triangle$

Замечание. Для решения задачи Дирака, очевидно, достаточно знать лишь ограничение функции Гамильтона на подмногообразие N.

5.2. Двойственность. Зная гамильтониан H и уравнения связей (42), можно перейти к функции Лагранжа L по обычному правилу: $L = \dot{q}\cdot p - H$. Пусть $\mathscr{H} = H + \Sigma\lambda_s\Phi_s$. Если

$$\det\|\mathscr{H}''_{pp}\| \neq 0 \text{ и } \det\|(\Phi'_{ip}\cdot(\mathscr{H}''_{pp})^{-1}\Phi'_{jp})\| \neq 0,$$

то, по крайней мере, локально, из уравнений

$$\dot{q} = H_p' + \Sigma\lambda_s\Phi'_{sp}, \quad \Phi_1 = \ldots = \Phi_m = 0$$

можно найти p как функцию от $\dot{q}$, q. В итоге лагранжиан является функцией состояния $(q, \dot{q})$, вырожденной по скоростям. Отметим, что переход от H к L в гамильтоновой механике со связями двойственен переходу от L к H в вакономной механике (см. § 4).

Обратно, имея вырожденный по скоростям лагранжиан $L(\dot{q}, q)$, можно ввести канонические импульсы $p = L'_{\dot{q}}$ и получить из этих уравнений несколько независимых соотношений вида (42). В квантовой механике они обычно называются *первичными* *связями*. Затем вводится гамильтониан $H=p\cdot\dot{q}-L$, который, ввиду вырожденности лагранжиана, определен только на многообразии $N=\{\Phi_1=\ldots=\Phi_m=0\}$. Как мы уже видели, это ограничение не существенно. При построении гамильтонова формализма со связями Дирак исходил как раз из вырожденного лагранжиана.

§ 6. Реализация связей

6.1. Различные способы реализации связей. Начнем с простого примера. Рассмотрим движение по прямой двух тел с массами M и m, соединенных упругими пружинами с коэффициентами упругости k и c (как показано на рис. 6). Пусть x, y — расстояния от «стены» до точек M и m. Движение описывается простой системой линейных уравнений

$$M\ddot{x}=-kx-c(x-y), \quad m\ddot{y}=-c(y-x).$$

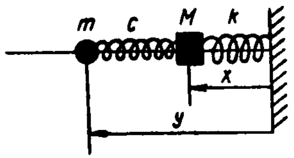


Рис. 6

Зафиксируем параметры M, m, c, а k устремим к бесконечности. Пусть $x(t, k)$, $y(t, k)$ — решение этих уравнений с начальным условием $x(0, k)=\dot{x}(0, k)=0$, а $y(0, k)$ и $\dot{y}(0, k)$ от k не зависят. Очевидно, что

$$\lim_{k\to\infty} x(t, k)=0,$$

а предельное движение

$$\hat{y}(t)=\lim_{k\to\infty} y(t, k)$$

является гармоническим колебанием с частотой $\omega=\sqrt{c/m}$. В этом случае «бесконечно большая» жесткость пружины эквивалентна наложению на систему голономной связи $x=0$.

Эту же связь можно реализовать по-другому. Для этого достаточно устремить к бесконечности массу M и снова считать, что $x(0)=\dot{x}(0)=0$.

Есть еще один физически ясный способ реализации этой связи, основанный на введении сил *вязкого трения*. Предположим, что на тело с массой M действует еще сила сопротивления $F=-\alpha\dot{x}$, $\alpha=\text{const}>0$. Это слагаемое надо добавить в первое уравнение движения. Если $\alpha\to\infty$, то снова $x(t)\to 0$. При этом уже не обязательно, чтобы $x(0)$ и $\dot{x}(0)$ обращались в нуль. Равенство

$$\lim_{\alpha\to\infty} x(t)=0$$

будет иметь место при $t>0$.

Можно рассмотреть более сложный случай, когда одновременно M и α неограниченно возрастают, но их отношение α/M стремится к конечному значению $\mu>0$. После этого предельного перехода уравнения движения упрощаются:

$$\ddot{x}=-\mu\dot{x},\quad m\ddot{y}=-c(y-x).$$

Они снова допускают решения $(x, y)=(o, y_0)$ такие, что $\ddot{y}_0+\omega^2 y_0=0$, $\omega^2=c/m$.

Рассмотрим, наконец, случай, когда масса второго тела m мала. Тогда в пределе оно не оказывает действия на движение тела M (которое будет совершать гармонические колебания с частотой $\sqrt{k/M}$). Если $c>0$, то, очевидно, масса m будет повторять движение массы $M: y(t)\equiv x(t)$.

Если же значение c тоже устремить к нулю и при этом $c/m\to\mu>0$, то в пределе будем иметь «ограниченную» задачу двух тел: масса M совершает гармонические колебания по закону $x_0(t)$, а масса m совершает вынужденные колебания в соответствии с уравнением

$$\ddot{y}+\mu y=\mu x_0(t).$$

Эти простые наблюдения допускают обобщения.

6.2. **Голономные связи.** Пусть $T(\dot{q}, q)$ — кинетическая энергия, а $U(q)$ — потенциальная энергия голономной натуральной механической системы с пространством положений M. Пусть $f: M\to R$ — гладкая функция такая, что $df\neq 0$ на множестве $\Lambda=\{f=0\}\subset M$.

Рассмотрим новую систему с потенциальной энергией $U+Nf^2$, зависящей от параметра N (который затем будет стремиться к бесконечности). Через $q(t, N)$ обозначим ее движение с начальными условиями на Λ:

$$q(0)=q_0\in\Lambda,\quad \dot{q}(0)=\dot{q}_0\in T_{q_0}\Lambda,$$

не зависящими от N.

Теорема 9. При $N\to\infty$ на каждом конечном промежутке $0\leqslant t\leqslant t_0$ существует предел

$$\lim_{N\to\infty} q(t, N)=\hat{q}(t)\in\Lambda.$$

Предельная функция $\hat{q}:[0, t_0]\to\Lambda$ удовлетворяет уравнениям Лагранжа с лагранжианом

$$\hat{L}=(T-U)|_{T\Lambda}.$$

Подробное доказательство теоремы можно найти, например, в работах [187], [195]. Основным моментом является следующее соображение: вследствие сохранения энергии, точка $q(t, N)$ не может удалиться от Λ на расстояние большее, чем $c/\sqrt{N}$, что стремится к нулю при $N \to \infty$.

С помощью теоремы 9 мы можем, исходя из системы свободных точек, получить произвольные лагранжевы голономные механические системы.

6.3. Анизотропное трение. Начнем с определения сил вязкого трения. Будем говорить, что на лагранжеву систему с лагранжианом $L = (A(q)\dot{q}\cdot\dot{q})/2 - U(q)$ действуют силы вязкого трения, если ее движение описывается уравнением

$$[L] = -F'_{\dot{q}}, \tag{45}$$

где F — неотрицательная квадратичная форма по скоростям, называемая *диссипативной функцией* или функцией Рэлея (J. W. Rayleigh). Производная от полной энергии системы в силу уравнения (45) равна $-F$. Если форма F положительно определена (в этом случае говорят о силах трения с *полной диссипацией*), то энергия монотонно убывает на всех движениях, отличных от равновесия. Мы будем рассматривать силы трения с функцией Рэлея $F_N = -N(a(q)\cdot\dot{q})^2/2$, где a — некоторое ковекторное поле, $N = \text{const} > 0$. Легко понять, что форма F_N вырождена и что полная энергия системы не убывает лишь на тех движениях $q(\cdot)$, которые удовлетворяют уравнению

$$a(q)\cdot\dot{q} = 0. \tag{46}$$

Такие движения, отличные от равновесий, конечно, не всегда существуют. Трение с диссипативной функцией F_N называют еще *анизотропным*.

Пусть $q(t, N)$ — решение уравнения с начальным условием, не зависящим от N.

Теорема 10. При $N \to \infty$ на каждом конечном промежутке времени $0 < t \leqslant t_0$ существует предел

$$\lim_{N\to\infty} q(t, N) = \hat{q}(t). \tag{47}$$

Предельная функция удовлетворяет системе неголономных уравнений

$$[L] = \lambda a, \quad a(q)\cdot\dot{q} = 0.$$

В частности, $\hat{q}(t)$ удовлетворяет линейному уравнению связи (46).

Если начальное состояние $(q_0, \dot{q}_0)$ выбрать из множества решений уравнения $a(q)\cdot\dot{q} = 0$, то предел (47) будет существовать при $t = 0$ и сходимость будет равномерной на каждом конечном промежутке времени. В общем случае эта сходимость неравномерна в интервале $0 < t \leqslant t_0$.

Теорема 10 выводится из известной теоремы Тихонова о сингулярно возмущенных системах (см. [58], [75]). Идея реализации линейных по скоростям связей с помощью сил вязкого трения и первые результаты в этом направлении принадлежат Каратеодори [144].

Рассмотрим с этой точки зрения упоминавшуюся в § 2 задачу неголономной механики о качении однородного шара внутри вертикально поставленной трубы большего радиуса. Допустим теперь, что шар может проскальзывать и пусть v — ненулевая скорость точки контакта. Введем силу вязкого трения, приложенную к точке касания и равную $-kv$, где $k=\mathrm{const}>0$. При достаточно больших значениях k движение такого шара будет близко к качению неголономного шара и, следовательно, по крайней мере, в первые моменты времени можно будет наблюдать движение шара с трением вверх по трубе.

6.4. Присоединенные массы. Рассмотрим движение натуральной системы с лагранжианом

$$L_N=\frac{1}{2}(A(q)\dot{q}\cdot\dot{q})+\frac{N}{2}(a(q)\cdot\dot{q})^2-U(q),$$

зависящим от параметра $N\geqslant 0$. Здесь снова $a(q)$ — ненулевое ковекторное поле, заданное на пространстве положений.

Пусть $q(t, N)$ — движение с начальным состоянием q_0, $\dot{q}_0$, таким, что $a(q_0)\cdot\dot{q}_0=0$.

Теорема 11 (см. [83]). При $N\to\infty$ на каждом конечном промежутке времени $0\leqslant t\leqslant t_0$ существует предел

$$\lim_{N\to\infty} q(t, N)=\hat{q}(t).$$

Предельная функция является экстремалью вариационной задачи Лагранжа о стационарном значении функционала

$$\int_{t_1}^{t_2} L_0 dt,\quad L_0=\frac{1}{2}A\dot{q}\cdot\dot{q}-U,$$

с линейным ограничением $a\cdot\dot{q}=0$.

Следовательно предельное движение $\hat{q}(\cdot)$ является движением вакономной системы с функцией Лагранжа L_0 и со связью $a\cdot\dot{q}=0$.

Рассмотрим этот предельный переход подробнее. При $N>0$ обычным способом введем канонические импульсы

$$p=A\dot{q}+N(a\cdot\dot{q})a.$$

Разрешая это уравнение относительно скоростей

$$A\dot{q}=p-\frac{A^{-1}p\cdot a}{A^{-1}a\cdot a}a+\frac{1}{1+N(A^{-1}a\cdot a)}\frac{A^{-1}p\cdot a}{A^{-1}a\cdot a}a,$$

мы видим, что при $N\to\infty$ оно переходит в равенство

$$A\dot{q}=p-\frac{A^{-1}p\cdot a}{A^{-1}a\cdot a}\,a,$$

с помощью которого вводятся импульсы в вакономной механике.

Рассмотрим движения голономной системы при $N>0$ с начальными данными

$$q(0)=q_0,\quad p_\alpha(0)=p_0+\alpha a,\quad \alpha\in R,$$

где $p_0=A\dot{q}_0$ и $a(q_0)\cdot\dot{q}_0=0$. Когда $\alpha=0$, то получим начальные условия, о которых идет речь в теореме 11. При фиксированном значении α начальные условия $q(0)$ и $\dot{q}_\alpha(0)=A^{-1}(q_0)\,p_\alpha(0)$ удовлетворяют уравнению $a\cdot\dot{q}=0$ с точностью до $1/N$.

Гамильтониан голономной системы с лагранжианом L_N равен $H_N=H_0+O(1/N)$, где H_0 — вакономная функция Гамильтона (см. § 4). Следовательно, при фиксированном α и $N\to\infty$ существует предел

$$\lim_{N\to\infty} q_\alpha(t,N)=\hat{q}_\alpha(t), \tag{48}$$

который представляет одно из движений вакономной системы с лагранжианом L_0 и со связью $a\cdot\dot{q}=0$.

При $N\to\infty$ начальное состояние $q(0)$ и $\dot{q}_\alpha(0)$ не зависит от α, однако предел (48) в случае неинтегрируемых связей существенно зависит от параметра α (см. § 4). Таким образом, когда N велико, то ошибки в начальных условиях порядка $1/N$ могут порождать конечные отклонения на временах $t\sim 1$. В этом состоит одно из качественных объяснений недетерминированного поведения вакономных систем.

Пример 11. Покажем, как можно физически реализовать движеиие вакономного конька по наклонной плоскости, изученное нами в § 4. Для этого рассмотрим движение в безграничной идеальной жидкости удлиненной невесомой эллиптической пластинки с жестко закрепленными точкамн положительной массы (см. рис. 7). Предположим, что на точки действует лишь сила тяжести. Симметрия задачи допускает движения, при которых ось x горизонтальна, а оси y и z постоянно лежат в некоторой вертикальной плоскости.

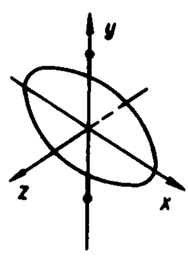


Рис. 7

8–1

Пусть ω — проекция угловой скорости тела на ось x, а u, v — проекции скорости центра масс на оси y, z. Рассмотрим вначале движение эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

в однородной жидкости с плотностью ρ. Кинетическая энергия жидкости равна

$$\frac{1}{2}\left(A\omega^2+Bu^2+Cv^2\right), \tag{49}$$

где

$$A=\frac{1}{5}\,\frac{(b^2-c^2)^2\,(\gamma_0-\beta_0)}{2\,(b^2-c^2)+(b^2+c^2)\,(\beta_0-\gamma_0)}\,\frac{4}{3}\,\pi\rho abc,$$

$$B=\frac{\beta_0}{2-\beta_0}\,\frac{4}{3}\,\pi\rho abc,\qquad C=\frac{\gamma_0}{2-\gamma_0}\,\frac{4}{3}\,\pi\rho abc,$$

$$\beta_0=abc\int\limits_0^\infty\frac{d\lambda}{(b^2+\lambda)\,D},\qquad \gamma_0=abc\int\limits_0^\infty\frac{d\lambda}{(c^2+\lambda)\,D},$$

$$D=\sqrt{(a^2+\lambda)\,(b^2+\lambda)\,(c^2+\lambda)}.$$

Эти формулы можно найти, например, в книге Ламба (H. Lamb) [162].

Устремим c к нулю и положим $b=\varepsilon$, $a=\varepsilon^{-\alpha}$. Считая ε малым, из этих соотношений можно получить следующие асимптотические формулы:

$$A\sim\frac{2}{15}\,\pi\rho\varepsilon^{4-\alpha},\quad B=0,\quad C\sim\frac{4}{3}\,\pi\rho\varepsilon^{2-\alpha}.$$

Таким образом, если $2<\alpha<4$, то $A\to 0$, а $C\to\infty$ при $\varepsilon\to 0$. Кинетическая энергия системы «тело+жидкость» имеет тот же вид (49), только к A надо добавить момент инерции тела относительно оси x, а к B и C надо добавить массу тела. В итоге при $\varepsilon\to 0$ величины A и B будут стремиться к конечным пределам, а $C\to\infty$. Таким образом, мы находимся в условиях теоремы: при $\varepsilon\to 0$ движение эллиптической пластинки с начальной скоростью $v(0)=0$ будет стремиться к движению предельной вакономной системы.

6.5. Присоединенные массы и анизотропное трение. Рассмотрим многомерную натуральную механическую систему с лагранжианом

$$L_N=\frac{1}{2}\,(A\,(q)\,\dot q\cdot\dot q)+\frac{\alpha N}{2}\,(a\,(q)\cdot\dot q)^2+V\,(q).$$

Предположим, что, кроме потенциальных сил с силовой функцией V, на систему действуют силы анизотропного трения с диссипативной функцией Рэлея

$$F_N=\frac{\beta N}{2}\,(a\,(q)\cdot\dot q)^2.$$

Уравнение движения имеет вид уравнения Лагранжа

$$[L_N] = -F'_{N\dot{q}}\,.$$

Фиксируя значения параметров $\alpha > 0$, $\beta \gg 0$, устремим N к бесконечности.

Пусть $q(t, N)$ — решения уравнения движения с не зависящим от N начальным состоянием, удовлетворяющим уравнению $a \cdot \dot{q} = 0$.

Теорема 12 (см. [84]). При $N \to \infty$ на каждом конечном промежутке времени существует предел

$$\lim_{N\to\infty} q(t, N) = \hat{q}(t).$$

Предельное движение $\hat{q}(\cdot)$ вместе с некоторой «сопряженной» функцией $\hat{p}(\cdot)$ удовлетворяет дифференциальным уравнениям

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} - \mu \frac{A^{-1}p\cdot a}{A^{-1}a\cdot a}a, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}; \quad \mu = \frac{\beta}{\alpha}, \tag{50}$$

где $H(p, q)$ — функция Гамильтона ваконумной системы с лагранжианом L_0 и со связью $a \cdot \dot{q} = 0$.

Из второго уравнения (50) следует, что предельное движение $\hat{q}(\cdot)$ удовлетворяет уравнению $a \cdot \dot{q} = 0$.

При $\beta = 0$ теорема 12 совпадает с теоремой 11. В другом предельном случае, когда отношение $\mu = \beta/\alpha$ велико, уравнения (50) будут сингулярными. Следуя общему методу исследования таких уравнений, при $\alpha = 0$ из (50) получим «упрощенное» уравнение

$$\lambda = \frac{A^{-1}p\cdot a}{A^{-1}a\cdot a} = 0.$$

Дифференцируя уравнения $A\dot{q} = p - \lambda a$ по времени и учитывая условие $\lambda = 0$, будем иметь

$$(L'_{0\dot{q}})^{\cdot} = (A\dot{q})^{\cdot} = \dot{p} - \dot{\lambda}a - \lambda\dot{a} = -H'_q - \dot{\lambda}a = L'_{0q} - \dot{\lambda}a.$$

Это соотношение вместе с уравнением связи являются замкнутой системой неголономных уравнений. Используя теорему Тихонова, можно показать, что при $\mu \to +\infty$ решения уравнений (50) действительно стремятся к решениям неголономных уравнеиий.

При каждом фиксированном значении параметра μ уравнения (50) можно рассматривать как уравнения движения механической системы с функцией Лагранжа L_0 и со связью $a \cdot \dot{q} = 0$. Таким образом, мы имеем целое семейство внутренне непротиворечивых математических моделей движения. Каждая из них является синтезом традиционной неголономной механики, основанной на принципе Даламбера—Лагранжа, и ваконумной динамики, в основу которой положен вариационный принцип

Гамильтона. Вопрос о выборе модели в каждом конкретном случае может быть решен только с помощью экспериментов. Обсуждение этих вопросов можно найти в работе [84].

6.6. Малые массы. В заключение обсудим корректность обобщенного гамильтонова формализма Дирака. Как уже отмечалось (см. § 5), связи в фазовом пространстве появляются, например, в том случае, когда лагранжиан вырожден по скоростям. В связи с этим мы рассмотрим голономную систему с функцией Лагранжа

$$L_\varepsilon = L_0(\dot q, q, Q) + \frac{\varepsilon \dot Q^2}{2} + \varepsilon L_1(\dot q, q, Q, \varepsilon); \quad q \in R^n, \ Q \in R,$$

где ε — малый параметр. Функция L_0 предполагается невырожденной по $\dot q$.

При $\varepsilon = 0$ будем иметь вырожденную систему. Первичной связью (по Дираку) служит уравнение $P = 0$, где $P = L'_{0\dot Q}$. Условие совместности дает нам вторичную связь

$$\{P, H_0\} = -H'_{0Q} = 0, \tag{51}$$

где $H_0(p, q, Q) = p \cdot \dot q - L_0|_{\dot q \to p}$.

Предположим, что $Q = f(p, q)$ — решение уравнения (51). После этого вторичную связь можно представить в виде уравнения $\Psi = Q - f(p, q) = 0$, причем $\{P, \Psi\} = -1 \neq 0$.

Гамильтониан Дирака $\mathscr{H}$ является суммой $H_0 + \lambda P + \mu(Q - f)$; коэффициенты λ и μ однозначно найдутся из условий совместности

$$\{P, \mathscr{H}\} = \{P, H_0\} - \mu = 0, \quad \{Q - f, \mathscr{H}\} = -\{f, H_0\} - \lambda = 0.$$

Отсюда получаем, что $\mu = -H'_{0Q}$, $\lambda = \{H_0, f\}$. Уравнения Гамильтона со связями, очевидно, примут следующий вид:

$$\dot p = -\hat H'_{0q}, \quad \dot q = \hat H'_{0p}, \quad P = 0, \quad Q = f, \tag{52}$$

где $\hat H_0(p, q) = H_0(p, q, Q)|_{Q=f}$. Функция Гамильтона полной системы (при $\varepsilon \neq 0$) равна $H_0(p, q, Q) + P^2/2\varepsilon + \varepsilon H_1(p, q, Q, \varepsilon)$. Соответствующие канонические уравнения суть

$$\dot p = -H'_{0q} - \varepsilon H'_{1q}, \quad \dot q = H'_{0p} + \varepsilon H'_{1p}, \tag{53}$$
$$\dot P = -H'_{0Q} - \varepsilon H'_{1Q}, \quad \dot Q = P/\varepsilon.$$

Предложение 16. Если $H''_{0QQ}|_{Q=f} \neq 0$, то уравнения (53) допускают единственное решение в виде формальных рядов по степеням ε

$$p = p_0(t) + \varepsilon p_1(t) + \ldots, \quad q = q_0(t) + \varepsilon q_1(t) + \ldots,$$
$$P = \varepsilon P_1(t) + \ldots, \quad Q = f(p_0(t), q_0(t)) + \varepsilon Q_1(t) + \ldots,$$

где $p_0(t)$, $q_0(t)$ — наперед заданное решение уравнений (52).

К сожалению эти ряды не всегда сходятся. В случае, когда функция H_0 не зависит от Q, уравнения (53) перестают быть сингулярными: вместо импульса P следует взять новую переменную P/ε. Решения этих уравнений можно тогда представить в виде сходящихся степенных рядов, причем начальные условия $Q(0)$ и $\dot{Q}(0)$ могут быть произвольными. Именно так обстоит дело в «ограниченной» задаче n тел, когда масса одного из них стремится к нулю.

Таким образом, механику Дирака можно трактовать как механику малых масс. В противоположность этому, вакономная механика, наоборот, удобна для описания динамики больших масс.

Утверждения этого параграфа могут служить мотивировкой наших теоретических построений, касающихся динамики механических систем со связями.

Глава 2

ЗАДАЧА n ТЕЛ

§ 1. Задача двух тел

1.1. Орбиты. Пусть две точки (r_1, m_1) и (r_2, m_2) взаимодействуют между собой с потенциальной энергией $U(|r_1-r_2|)$ так, что уравнения движения имеют вид

$$m_1\ddot{r}_1=-\frac{\partial U}{\partial r_1},\quad m_2\ddot{r}_2=-\frac{\partial U}{\partial r_2}.$$

Предложение 1. *Изменение относительного радиус-вектора $r=r_1-r_2$ в задаче двух тел такое же, как при движении точки массы $m=m_1m_2/(m_1+m_2)$ в центральном силовом поле с потенциалом $U(|r|)$.*

Если

$$\xi=\frac{m_1r_1+m_2r_2}{m_1+m_2}\ —$$

барицентр точек m_1 и m_2, то, очевидно,

$$r_1=\xi+\frac{m_2}{m_1+m_2}r,\quad r_2=\xi-\frac{m_1}{m_1+m_2}r.$$

Из этих формул вытекает, что в барицентрической системе отсчета траектории материальных точек являются плоскими подобными кривыми (с коэффициентом подобия m_1/m_2). Итак, задача сводится к исследованию одного уравнения

$$m\ddot{r}=-\frac{\partial U}{\partial r},\quad r\in R^3.$$

Пусть x, y — декартовы координаты в плоскости орбиты. Тогда $K_z=m(x\dot{y}-y\dot{x})=\mathrm{const}$. В полярных координатах $x=$

$=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, очевидно, $K_z=mr^2\dot\varphi$. Следовательно, $r^2\dot\varphi=c=\mathrm{const}$. Если $c=0$, то $\varphi=\mathrm{const}$ (точка движется по прямой). Будем считать, что $c\neq 0$. В этом случае φ — монотонная функция t и, следовательно, существует обратная функция $t=t(\varphi)$. При движении точки m ее радиус-вектор заметает некоторый криволинейный сектор с площадью

$$S(t)=\frac{1}{2}\int\limits_{\varphi(0)}^{\varphi(t)} r^2 d\varphi=\frac{1}{2}\int\limits_0^t r^2\dot\varphi\, dt=\frac{ct}{2}.$$

Таким образом, $\dot S=c/2=\mathrm{const}$ («секторная» скорость постоянна). Этот факт называют обычно *интегралом площадей* или *вторым законом Кеплера* (J. Kepler), а постоянную c — постоянной площадей.

Предложение 2 (Ньютон). При фиксированном значении постоянной площадей c

$$m\ddot r=-\frac{\partial U_c}{\partial r},\quad U_c=U+\frac{mc^2}{2r^2}\ (r>0). \tag{1}$$

Это уравнение описывает движение точки массы m по прямой $R=\{r\}$ под действием потенциальной силы с потенциалом U_c. С помощью интеграла энергии

$$\frac{m\dot r^2}{2}+U_c=h$$

оно интегрируется в квадратурах. Функция U_c называется *приведенным потенциалом.*

С помощью интегралов энергии и площадей можно найти уравнение орбит, не решая уравнения (1). Действительно, так как $\dot r=\sqrt{2(h-U_c)/m}$ и $r^2\dot\varphi=c$, то

$$\frac{dr}{d\varphi}=\frac{dr}{dt}\frac{dt}{d\varphi}=\frac{r^2}{c}\sqrt{\frac{2(h-U_c)}{m}}.$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\varphi=\int\frac{c\,dr}{r^2\sqrt{\frac{2(h-U_c)}{m}}}.$$

При вычислении орбит иногда полезно иметь в виду

Предложение 3. (Клеро (A. C. Clairaut)). Пусть $\rho=1/r$ и $\rho=\rho(\varphi)$ — уравнение орбиты. Тогда

$$m\frac{d^2\rho}{d\varphi^2}=-\frac{1}{c^2}\frac{d}{d\rho}U_c\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

При фиксированных значениях h и c орбита заключена в области

$$B_{c,h}=\left\{(r,\varphi)\in R^2: U+\frac{mc^2}{2r^2}\leqslant h\right\},$$

являющейся объединением нескольких колец. Пусть h — некритическое значение приведенного потенциала U_c и область $B_{c,h}$ совпадает с кольцом $0<r_1\leqslant r\leqslant r_2<\infty$.

Покажем, что в этом случае $r(t)$ — периодическая функция времени, причем

$$\min r(t)=r_1, \quad \max r(t)=r_2.$$

Для доказательства положим

$$u=\frac{\pi}{\tau}\int_{r_1}^{r}\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(h-U_c(x))}}, \quad \tau=\int_{r_1}^{r_2}\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(h-U_c(x))}}.$$

Очевидно, что $r(u)$ — периодическая функция u с периодом 2π и $\dot{u}=\pi/\tau=\mathrm{const}$. Период функции $r(\cdot)$ равен, очевидно, 2τ.

Угол φ изменяется монотонно (если, конечно, $c\neq 0$). Точки на орбите, наименее удаленные от центра, называются *перицентрами*, а наиболее удаленные — *апоцентрами*. Орбита симметрична относительно прямых, проходящих через точку $r=0$ и перицентры (апоцентры). Угол Φ между направлениями на соседние апоцентры (перицентры) называется *апсидальным углом*. Орбита инвариантна относительно поворота на угол Φ. Если апсидальный угол

$$\Phi=2\int_{r_1}^{r_2}\frac{c\,dr}{r^2\sqrt{\frac{2}{m}(h-U_c)}}$$

соизмерим с π, то орбита замкнута. В противном случае она заполняет кольцо $B_{c,h}$ всюду плотно. Если $r_2=\infty$, то орбита не ограничена.

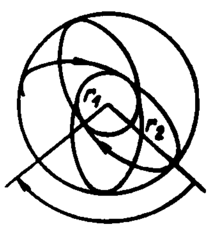


Рис. 8. Орбита в центральном поле

Движение точки по окружности $r=r_0$ называется *относительным равновесием*. Очевидно, что такое движение равномерное и значения r_0 совпадают с критическими точками приведенного потенциала U_c. Если в точке $r=r_0$ функция U_c имеет локальный минимум, то соответствующее круговое движение орбитально устойчиво.

Теорема 1 (Бертран (I. L. F. Bertrand)). Пусть при некотором $c \neq 0$ имеется устойчивое относительное равновесие и потенциал U_c аналитичен при $r>0$. Если все орбиты, достаточно близкие к круговой, замкнуты, то U есть либо $-\gamma r^2$, либо $-\gamma/r$ $(\gamma>0)$.

В первом случае система является гармоническим осциллятором. Орбитами являются эллипсы с центром в точке $r=0$. Второй случай соответствует гравитационному притяжению. Задача о движении точки в силовом поле с потенциалом $U=-\gamma/r$ обычно называется *задачей Кеплера.*

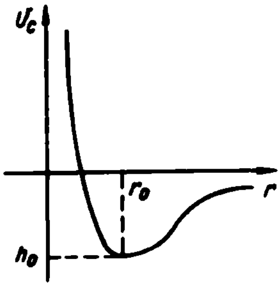


Рис. 9. Приведенный потенциал задачи Кеплера

Приведенный потенциал задачи Кеплера равен

$$U_c = \frac{c^2}{2r^2} - \frac{\gamma}{r}.$$

Согласно *уравнению Клеро* (предложение 3), $\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} = -\rho + \frac{\gamma}{c^2}$. Это линейное неоднородное уравнение легко решается:

$$\rho = A\cos(\varphi-\varphi_0) + \frac{\gamma}{c^2} = \frac{1}{p}(1+e\cos(\varphi-\varphi_0)), \qquad (2)$$

де e и φ_0 — некоторые постоянные, $p=c^2/\gamma>0$. Отсюда

$$r = \frac{p}{1+e\cos(\varphi-\varphi_0)}$$

и, следовательно, орбиты задачи Кеплера — конические сечения с фокусом в притягивающем центре (*первый закон Кеплера*).

При фиксированном $c \neq 0$ существует единственное относительное равновесие $r_0=c^2/\gamma$. Его энергия $h_0=-\gamma^2/2c^2$ минимальна. С помощью простой формулы

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 = c^2(\rho^2+\rho'^2), \quad \rho' = \frac{d\rho}{d\varphi}$$

интеграл энергии можно записать в следующем виде:

$$\frac{c^2}{2}(\rho'^2+\rho^2) - \gamma\rho = h.$$

Подставляя в эту формулу уравнение орбиты (2), получим выражение для эксцентриситета $e=\sqrt{1+2c^2h/\gamma^2}$. Поскольку

$h \geqslant h_0 = -\gamma^2/2c^2$, то эксцентриситет принимает только действительные значения.

Если $h=h_0$, то $e=0$ и орбита круговая. Если $h_0<h<0$, то $0<e<1$. В этом случае орбитой будет эллипс. Если $h=0$, то $e=1$ и орбитой является парабола. При $h>0$ будем иметь $e>1$. В этом случае точка движется по одной из ветвей гиперболы.

На рисунке 10 изображено *бифуркационное множество* Σ на плоскости параметров c, h. Оно состоит из кривой $h= -\gamma^2/2c^2$ и двух координатных прямых $c=0$ и $h=0$. В точках Σ происходит перестройка областей возможности движения $B_{c,h}$ (на рисунке они заштрихованы).

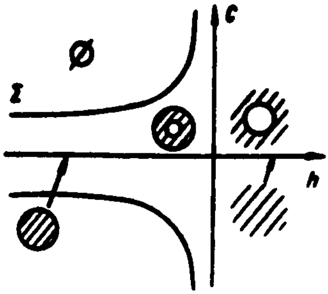


Рис. 10

В случае гармонического осциллятора период обращения по орбите не зависит от начального состояния. В задаче Кеплера это не так. Для эллиптических движений справедлив *«третий закон Кеплера»*: $a^3/T^2=\gamma/4\pi^2=\text{const}$, где a — большая полуось эллипса, T — период обращения. Поскольку $a=\frac{p}{1-e^2}=\frac{\gamma}{2|h|}$, то период зависит лишь от постоянной энергии.

1.2. Аномалии. Для полного решения задачи Кеплера нам осталось найти закон движения по уже известным орбитам. Направим оси x и y по главным осям конического сечения, представляющего орбиту. Ее уравнение можно представить в следующем параметрическом виде:

$$x=a(\cos u-e),\quad y=a\sqrt{1-e^2}\sin u\ (0<e<1),\ \text{если } h<0,$$
$$x=a(\operatorname{ch} u-e),\quad y=a\sqrt{e^2-1}\operatorname{sh} u\ (e>1),\ \text{если } h>0, \tag{3}$$
$$x=\frac{1}{2}(p-u^2),\quad y=\sqrt{p}\,u,\ \text{если } h=0.$$

Вспомогательная переменная u в астрономии называется *эксцентрической аномалией*, а угол φ между направлением на перицентр орбиты (ось x) и радиусом-вектором точки — *истинной аномалией*.

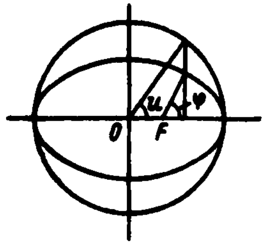


Рис. 11

Имеют место следующие формулы:

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\dfrac{u}{2},\\ \sqrt{\dfrac{e+1}{e-1}}\operatorname{th}\dfrac{u}{2},\\ \dfrac{u}{\sqrt{p}}\end{cases}$$

где $h<0$, $h>0$, $h=0$ соответственно. Подставляя формулы (3) в интеграл площадей $x\dot{y}-y\dot{x}=c$ и интегрируя, получим соотношения между временем и эксцентрической аномалией:

$$u-e\sin u=n(t-t_0),\quad n=\frac{\sqrt{\gamma}}{p^{3/2}};\ \text{если } h<0,$$

$$u-e\operatorname{sh} u=n(t-t_0),\quad n=-\frac{\sqrt{\gamma}}{p^{3/2}};\ \text{если } h>0,$$

$$u+\frac{u^3}{3p}=n(t-t_0),\quad n=\frac{2\sqrt{\gamma}}{p};\ \text{если } h=0.$$

Здесь t_0 — время прохождения точки через перицентр. Эти уравнения (во всяком случае первое) называют *уравнениями Кеплера*. Линейная функция $\zeta=n(t-t_0)$ называется обычно *средней аномалией*.

Таким образом, в эллиптическом случае задачи Кеплера мы должны решить трансцендентное уравнение Кеплера

$$u-e\sin u=\zeta.$$

Ясно, что при $0\leqslant e<1$ оно имеет аналитическое решение $u(e,\zeta)$, причем разность $u(e,\zeta)-\zeta$ периодична по средней аномалии ζ с периодом 2π. Для того, чтобы представить функцию $u(e,\zeta)$ в удобном для вычислений виде, можно избрать два пути:

(1) разложить разность $u-\zeta$ при фиксированных значениях e в ряд Фурье по ζ с зависящими от e коэффициентами,

(2) можно попытаться представить $u(e,\zeta)$ в виде ряда по степеням эксцентриситета e с коэффициентами, зависящими от ζ.

В первом случае

$$u=\zeta+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_m(me)}{m}\sin m\zeta, \tag{4}$$

где

$$J_m(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(mx-z\sin x)\,dx=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(z/2)^{m+2k}}{k!\,(m+k)!}$$

$$(m=0,\ 1\ldots)-$$

функции Бесселя m-го порядка. «Эти функции использовались широко как раз в рассматриваемой задаче самим Бесселем (F. W. Bessel), а также на полстолетие раньше Лагранжем»[1].

Доказательство (4) основано на простом вычислении

$$\frac{du}{d\zeta}=\frac{1}{1-e\cos u}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\zeta}{1-e\cos u}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos m\zeta}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos m\zeta\,d\zeta}{1-e\cos u}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}du+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos m\zeta}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos\left[m(u-e\sin u)\right]du=$$

$$=1+2\sum_{m=1}^{\infty}I_m(me)\cos m\zeta.$$

Остается проинтегрировать эту формулу по ζ.

При втором подходе будем иметь разложение

$$u(e,\ \zeta)=\sum_{m=0}^{\infty}c_m(\zeta)\frac{e^m}{m!}, \tag{5}$$

где

$$c_m(\zeta)=\frac{\partial^m u(e,\ \zeta)}{\partial e^m}\bigg|_{e=0}.$$

Используя известную формулу локального обращения голоморфных функций Лагранжа[2] получим формулу для коэффициентов этого ряда:

$$c_0(\zeta)=\zeta;\quad c_m(\zeta)=\frac{d^{m-1}}{d\zeta^{m-1}}\sin^m\zeta,\quad m>1.$$

Функции $c_m(\zeta)$ — тригонометрические полиномы средней аномалии ζ. Переставляя члены ряда (5), можно получить разложение (4). Именно таким путем Лагранж пришел к формуле (4).

По теореме о неявной функции (с учетом периодичности $u(e,\ \zeta)-\zeta$) ряд (5) сходится на всей числовой прямой $\zeta\in R$ при

---

[1] См. Уинтнер (A. Wintner) [42].

[2] Полученную Лагранжем как раз в связи с решением уравнения Кеплера.

малых e. Детальный анализ разложения (4) показывает, что ряд Лагранжа сходится при $e \leqslant 0{,}6627434\ldots$[1].

1.3. Столкновения и регуляризация. Выше предполагалось, что постоянная площадей $c \neq 0$. Положим теперь $c=0$. Движение точки будет прямолинейным и можно считать, что оно происходит вдоль оси x. Если в некоторый момент времени скорость $\dot{x}$ направлена к притягивающему центру, то $x(t) \to 0$, $\dot{x}(t) \to \infty$ при приближении t к некоторому t_0. Таким образом, в момент $t=t_0$ произойдет столкновение двух тел. Очевидно, что при $c=0$ функция $x(t)$, $t \in R$ обязательно имеет особенность указанного вида.

Покажем, что эксцентрическая аномалия u является *регуляризующей* переменной, устраняющей особенность аналитической функции $x(t)$. Если $c=0$, то $e=1$ в эллиптическом и гиперболическом случаях и $p=0$ в параболическом случае. Следовательно, формулы (3) запишутся в следующем виде:

$$x=a(\cos u-1), \quad x=a(\operatorname{ch} u-1), \quad x=-\frac{u^2}{2}. \tag{6}$$

В соответствии с этими формулами при $h<0$ столкновение имеет место при $u=2\pi k$, $k \in Z$, а при $h \geqslant 0$ — только при $u=0$. В эллиптическом случае тоже достаточно рассмотреть случай $u=0$.

Положим для простоты $t_0=0$. Из уравнений Кеплера (при $e=1$) легко получить, что в окрестности точки $u=0$ справедливо разложение

$$t=u^3 f(u),$$

где f — аналитическая функция в окрестности нуля, причем $f(0) \neq 0$. Из (6) вытекает аналогичное представление

$$x=u^2 g(u)$$

с аналитической функцией g и $g(0) \neq 0$. Исключая из этих формул экцентрическую аномалию u, получим разложение Пюизе (V. A. Puiseux):

$$x(t)=(\sqrt[3]{t})^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n (\sqrt[3]{t})^n.$$

Коэффициенты c_n с нечетными номерами, очевидно, равны нулю, а $c_0 \neq 0$. Следовательно, $x(t)$ — четная функция времени, т. е. движущаяся точка отражается от притягивающего центра после столкновения. Если переменные x и t рассматривать как комплексные, то $t=0$ является алгебраической точкой разветвления аналитической функции $x(t)$. В точке столкновения $t=0$ сходятся три листа ее римановой поверхности,

[1] «Заметим, что основным толчком, приведшим Коши к открытиям в теории функций комплексного переменного, послужило его желание провести удовлетворительный анализ именно ряда Лагранжа» (Уинтнер [42]).

причем действительные значения $x(t)$ при $t>0$ и $t<0$ лежат только на одном листе. Следовательно, функция $x(t)$ допускает единственное вещественное продолжение[1].

В заключение отметим результат Болина (K. Bohlin), касающийся *регуляризации* задачи двух тел в общем эллиптическом случае (когда $h<0$).

Вводя комплексное переменное $z=x+iy$, уравнение задачи Кеплера перепишем в следующем виде:

$$\ddot{z}=-\frac{\gamma z}{|z|^3},$$

а интеграл энергии

$$\frac{|\dot{z}|^2}{2}=\frac{\nu}{|z|}+h. \tag{7}$$

Сделаем замену независимой переменной $z\to w$ и времени $t\to\tau$ по формулам

$$z=w^2,\quad t'=\frac{dt}{d\tau}=4|w^2|=4|z|. \tag{8}$$

Запишем уравнение (7) в новых переменных w, τ:

$$\frac{|w'|^2}{2}=4\gamma+4h|w^2|. \tag{9}$$

Отсюда $w''+8|h|w=0$. Это уравнение описывает колебания гармонического осциллятора. Таким образом, нелинейное отображение (8) переводит орбиты задачи Кеплера с постоянной энергией $h<0$ в орбиты гармонического осциллятора, расположенные на энергетическом уровне (9). Этот вывод удачно дополняет теорему Бертрана.

Регуляризирующая переменная τ линейно зависит от эксцентрической аномалии u. Действительно, так как

$$|z|=r=a(1-e\cos u)\quad \text{и}\quad nt=u-e\sin u,$$

то

$$\frac{du}{dt}=\frac{n}{1-e\cos u}=\frac{na}{r},$$

откуда $u=4na\tau$.

1.4. Геометрия задачи Кеплера. Мозер (J. Moser) заметил, что с помощью подходящей замены времени фазовый поток кеплеровой задачи можно преобразовать в геодезический поток на поверхности постоянной кривизны. При изложении этого результата мы будем следовать Ю. С. Осипову (УМН, 1972, 27 в. 2, 161).

Лемма 1. Пусть $x(t)$ — решение гамильтоновой системы с гамильтонианом $H(x)$, расположенное на уровне $H=0$. Сделаем замену времени $t\mapsto\tau$ вдоль траекторий по формуле $d\tau/dt=G^{-1}(x)\neq0$. Тогда функция $x(\tau)=x(t(\tau))$ является решением гамильтоновой системы (в той же симплектической струк-

[1] Регуляризация столкновений в задаче двух тел восходит к Эйлеру.

туре) с гамильтонианом $\tilde{H}=HG$. Если $G=2(H+\alpha)$, то можно положить $\tilde{H}=(H+\alpha)^2$.

Запишем гамильтониан задачи Кеплера в обозначениях п. 1.3: $H=|p|^2/2-\gamma|z|$, $p=\dot{z}$. Сделаем замену времени $\tau'=|z|^{-1}$ на многообразии $H=h$ (ср. с формулой (8)). Согласно лемме 1, это соответствует переходу к функции Гамильтона $|z|(H-h)=|z|(|p|^2-2h)/2-\gamma$. Сделаем еще одну замену времени $\tau\mapsto{}'\tau$, $d'\tau/d\tau=2(|z|(H-h)+\gamma)$ на том же уровне $H=h$. В итоге будем иметь гамильтонову систему с функцией Гамильтона

$$\tilde{H}=|z|^2(|p|^2-2h)^2/4.$$

Выполним, наконец, преобразование Лежандра, считая p — координатой, а z — импульсом. В результате получим натуральную систему с лагранжианом

$$L=\frac{|p'|^2}{(2h-|p|^2)^2}. \qquad (10)$$

Эта функция задает риманову метрику постоянной гауссовой кривизны (положительной при $h<0$ и отрицательной при $h>0$). В случае $h<0$ геодезические метрики (10) (определенной при всех $p\in R^2$) являются образами больших кругов сферы при стереографической проекции, а в случае $h>0$ (метрика определена в круге $|p|^2<2h$) геодезические являются прямыми плоскости Лобачевского (в модели Пуанкаре).

Замечание (А. Б. Гивенталь). Пусть плоскость (x, y) — конфигурационная плоскость кеплеровой задачи с лагранжианом $L=(\dot{x}^2+\dot{y}^2)/2+1/\sqrt{x^2+y^2}$. Рассмотрим в пространстве (x, y, z) прямой круговой конус $z^2=(x^2+y^2)$ и семейство вписанных в него параболоидов вращения $z=(x^2+y^2)/4\alpha+\alpha$ (α — параметр). Под «проекцией» мы будем понимать проекцию пространства (x, y, z) на плоскость (x, y) вдоль оси z. Можно показать, что

1) траектории задачи Кеплера — проекции плоских сечений конуса (в частности, вершина конуса — фокус проекций его плоских сечений),

2) траектории с одинаковым значением полной энергии — проекции сечений конуса плоскостями, касающимися одного и того же параболоида,

3) траектории с одинаковым значением кинетического момента — проекции сечений конуса плоскостями, проходящими через одну и ту же точку оси.

§ 2. Столкновения и регуляризация

2.1. Необходимое условие устойчивости. Обратимся теперь к общей *задаче n тел*, в которой n материальных точек $(m_1, r_1), \ldots, (m_n, r_n)$ притягиваются друг к другу по закону всемирного тяготения. Кинетическая энергия

$$T=\frac{1}{2}\sum m_i\dot{r}^2_i,$$

а силовая функция

$$V=\sum_{j<k}\frac{m_jm_k}{r_{jk}},\quad r_{jk}=|r_j-r_k|$$

всегда положительна. Введем инерциальную систему отсчета с началом в центре масс и пусть r_i — радиус-векторы точек в новой системе отсчета. Уравнения задачи n тел будут иметь вид уравнений Лагранжа с лагранжианом $L=T+V$.

Назовем движение $r_s(t)$ $(1\leqslant s\leqslant n)$ *устойчивым*, если выполнены два условия:

a) $r_{ij}(t)\neq 0$ для всех значений t и всех $i\neq j$ (нет столкновений),

b) $|r_{ij}(t)|\leqslant c$ $(c=\text{const})$.

Теорема 2 (Якоби (С. Jacobi)). Если движение устойчиво, то полная энергия $h=T-V$ отрицательна.

$\lhd$ Применим формулу Лагранжа

$$\ddot{I}=2V+4h, \tag{11}$$

где $I=\Sigma m_ir_i^2$ — полярный момент инерции. Если $h\geqslant 0$, то $I(t)$. $t\in R$, выпукла вверх и поэтому не может быть ограничена одновременно снизу и сверху. Для завершения доказательства остается воспользоваться тождеством Лагранжа:

$$I\sum m_i=\sum_{j<k}m_jm_kr^2_{jk}+\left(\sum m_ir_i\right)^2. \rhd$$

При дополнительном предположении об ограниченности снизу взаимных расстояний ($|r_{ij}(t)|\geqslant c>0$) из интеграла энергии и формулы Лагранжа (11) вытекает, что вдоль устойчивого движения средние значения

$$\lim_{s\to\infty}\frac{1}{s}\int_0^s V(t)\,dt,\quad \lim_{s\to\infty}\frac{1}{s}\int_0^s 2T(t)\,dt$$

существуют и равны $-2h>0$.

Необходимое условие устойчивости $h<0$ не является достаточным при $n>2$.

2.2. Одновременные столкновения. Когда при $t\to t_0$ радиус-векторы $r_i(t)$ всех точек имеют один и тот же предел r_0, то мы будем говорить, что в момент времени t_0 происходит одновременное столкновение. Очевидно, что точка r_0 должна совпадать с центром масс, т. е. $r_0=0$. Одновременное соударение имеет место тогда и только тогда, когда полярный момент $I(t)$ стремится к нулю при $t\to t_0$.

Теорема 3. Если $I(t)\to 0$ при $t\to t_0$, то постоянный вектор кинетического момента

$$K=\Sigma m_i(r_i\times\dot r_i)$$

равен нулю.

Для $n=3$ это утверждение было уже известно Вейерштрассу (K. Weierstrass).

◁ Поскольку при $t\to t_0$ функция $V(t)\to+\infty$, то, согласно уравнению $\ddot I=2V+4h$, при близких к t_0 значениях времени $\ddot I(t)>0$. Следовательно, перед столкновением $I(t)$ монотонно убывает.

Воспользуемся неравенством $K^2\leqslant 2IT$ (из § 1 гл. 1), которое вследствие формулы Лагранжа эквивалентно неравенству

$$\ddot I\geqslant\frac{K^2}{I}+2h.$$

Умножим это неравенство на положительное число $-2\dot I$ и проинтегрируем его в интервале (t_1, t), $t<t_0$:

$$\dot I^2(t_1)-\dot I^2(t)\geqslant 2K^2\ln\frac{I(t_1)}{I(t)}+4h(I(t_1)-I(t)).$$

Тем более справедливо неравенство

$$2K^2\ln\frac{I(t_1)}{I(t)}\leqslant \dot I^2(t_1)+4\,|\,h\,|\,I(t_1).$$

Отсюда вытекает существование для $I(t)$ положительной нижней грани в интервале (t_1, t_0), если $K^2\neq 0$. ◁

2.3. Парные столкновения. Будем говорить, что в момент времени t_0 происходит парное столкновение, если расстояние между двумя точками, скажем между m_1 и m_n, стремится к нулю при $t\to t_0$, а взаимные расстояния между остальными точками при значениях t, близких к t_0, ограничены снизу некоторой положительной величиной. Влияние точек $m_2,\ldots,m_{n-1}$ на движение m_1 и m_n при таких t, очевидно, пренебрежимо мало по сравнению с взаимодействием m_1 и m_n. Поэтому естественно ожидать, что вблизи момента времени t_0 поведение вектора $r_{1n}(t)$ примерно такое же, как и в задаче о столкновении двух тел (см. § 1). В задаче двух тел локально униформизующей переменной была истинная аномалия $u(t)$, пропорциональная интегралу от обратного расстояния между точками. Поэтому в случае парного столкновения естественно пытаться регуляризовать решение с помощью переменной

$$u(t)=\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{|r_{1n}(s)|}. \tag{12}$$

Можно показать, что это соображение действительно приводит к цели: функции $r_k(u)$ регулярны вблизи точки $u=0$ (соответствующей парному соударению) и, кроме того, $t(u)$—

$-t_0=u^3p(u)$, где $p(\cdot)$ — функция, голоморфная вблизи $u=0$, причем $p(0)\neq 0$. Таким образом, в случае парного столкновения, так же, как в задаче двух тел, координаты точек r_k являются голоморфными функциями переменной $\sqrt[3]{t-t_0}$ и, следовательно, допускают единственное вещественной аналитическое продолжение при $t>t_0$. Можно показать, что функции $r_2(t),\dots$ $\dots, r_{n-1}(t)$ даже голоморфны в окрестности точки t_0.

Для того, чтобы униформизирующая переменная $u(t)$ была пригодной для любой пары точек и для любого момента парного столкновения, (12) следует заменить формулой

$$u(t)=\int_0^t V(s)\,ds=\int_0^t \sum_{j<k}\frac{m_jm_k}{|r_{jk}(s)|}\,ds.$$

Если полярный кинетический момент отличен от нуля, то в задаче трех тел единственными особенностями могут быть лишь парные столкновения. Как показал Зундман (K. F. Sundman), функции $r_k(u)$ $(1\leqslant k\leqslant 3)$ голоморфны в некоторой полосе $|\operatorname{Im} u|<\delta$ комплексной плоскости $u\in C$, содержащей действительную ось. Отобразим теперь эту полосу конформно на единичный круг $|\omega|<1$ преобразованием

$$\omega=\frac{e^{\frac{\pi u}{2\delta}}-1}{e^{\frac{\pi u}{2\delta}}+1},$$

переводящим действительную ось $-\infty<u<+\infty$ в отрезок $-1<\omega<1$. В результате координаты точек r_k станут функциями, голоморфными в круге $|\omega|<1$, и их можно представить в виде сходящихся степенных рядов новой переменной ω. Эти ряды представляют движение трех тел при всех значениях времени t от $-\infty$ до $+\infty$[1].

Этот результат принадлежит Зундману (1913 г.); он следовал более ранним работам Пуанкаре и Вейерштрасса, в которых были получены разложения решений задачи n тел в сходящиеся ряды по степеням вспомогательной переменной ω при отсутствии соударений. Что касается возможности соударений, то в задаче трех тел они бесконечно редки: с помощью теоремы об одновременных столкновениях и с использованием регуляризации парных столкновений можно показать, что в двенадцатимерном пространстве состояний задачи трех тел (при фиксированном положении центра масс) траектории столкновений лежат на некоторых особых аналитических поверхностях размерности 10. Их мера, конечно, равна нулю. Однако неизвестно, могут ли эти особые поверхности всюду плотно заполнять целые области в пространстве состояний.

---

[1] Ряды по степеням ω совершенно бесполезны для практических расчетов ввиду их крайне медленной сходимости.

Приведем в заключение в качестве иллюстрации результаты численных расчетов в «пифагорейском» варианте задачи трех тел, когда тела с массами 3, 4, 5 в начальный момент покоятся в точках плоскости (x, y) с координатами $(1, 3)$, $(-2, -1)$, $(1, -1)$. Центр масс этой системы находится в начале координат.

Расчеты пифагорейской задачи трех тел были начаты Бурро (C. Burrau) еще в 1913 году и продолжены в наше время Себехеем (V. Szebehely) с использованием быстродействующих ЭВМ. На рис. 12—14 можно видеть и тесные сближения точек, и их парные соударения, и распад тройной системы. Рис. 15 показывает «финальное» движение: точка массы $m=5$ удаляется по прямой от «двойной звезды», которую образуют точки $m=3$ и $m=4$, периодически сталкиваясь друг с другом. Интересно отметить, что хотя в этом случае кинетический момент равен нулю, однако тройные столкновения отсутствуют.

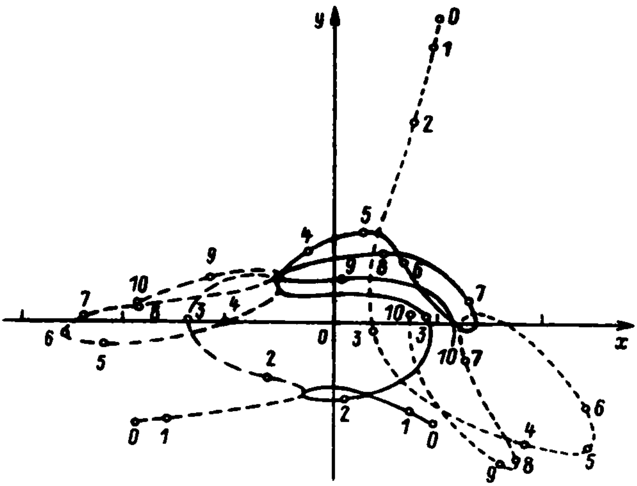


Рис. 12. Движение притягивающихся масс в пифагорейской задаче трех тел в интервале времени от $t=0$ до $t=10$.

2.4. Особенности решений задачи n тел. Особые точки координат r_s гравитирующих точек как функций времени в случае кратных столкновений, когда происходит одновременное соударение $k \geqslant 3$ точек, с аналитической точки зрения устроены гораздо сложнее. Они, вообще говоря, не алгебраические; более того, функции $r_s(t)$ $(1 \leqslant s \leqslant n)$ не имеют вещественного аналитического продолжения после момента соударения.

Это можно показать уже на примерах одновременного соударения в задаче трех тел. Оказывается, при произвольных

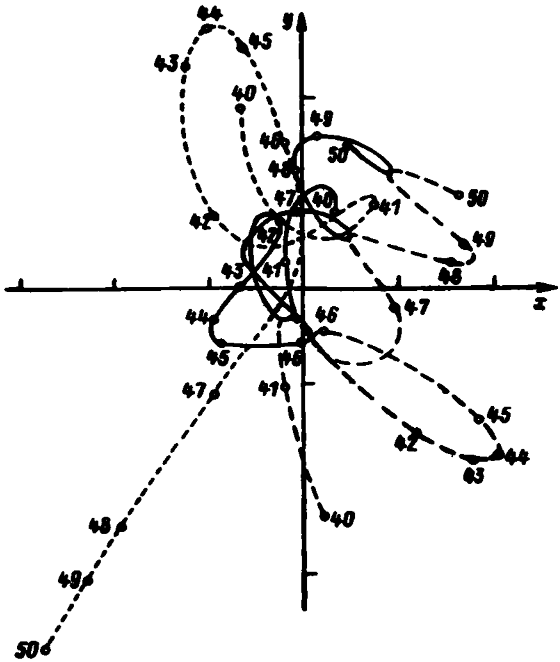


Рис. 13. Вид орбит пифагорейской задачи трех тел на интервале времени от $t=40$ до $t=50$.

значениях масс точек m_1, m_2, m_3 существуют решения

$$r_i(t)=t^{2/3}\sum_{m=0}^{\infty} a_{im}t^{\alpha m}. \qquad (13)$$

Положительное число α является непостоянной алгебраической функцией масс m_1, m_2, m_3, а среди коэффициентов a_{i1} не все равны нулю. В момент времени $t=0$ имело место тройное столкновение. В типичном случае, когда α иррационально, ряд (13) имеет при $t=0$ изолированную логарифмическую особую точку. В частности, это решение, являясь вещественным при $t>0$, имеет бесконечно много различных аналитических ветвей при $t<0$, однако все эти ветви оказываются комплексными.

Решение (13) найдено Блоком (H. Block) (1909 г.) и Шази (I. F. Chazy) (1918 г.) с помощью следующего приема. При всех значениях масс уравнения задачи трех тел допускают «гомографическое» решение, при котором треугольник, образованный телами, все время остается подобным самому себе. Это решение аналитически представляется формулой

$$r_i(t)=a_{i0}^{2/3} \quad (1\leqslant i\leqslant 3). \qquad (14)$$

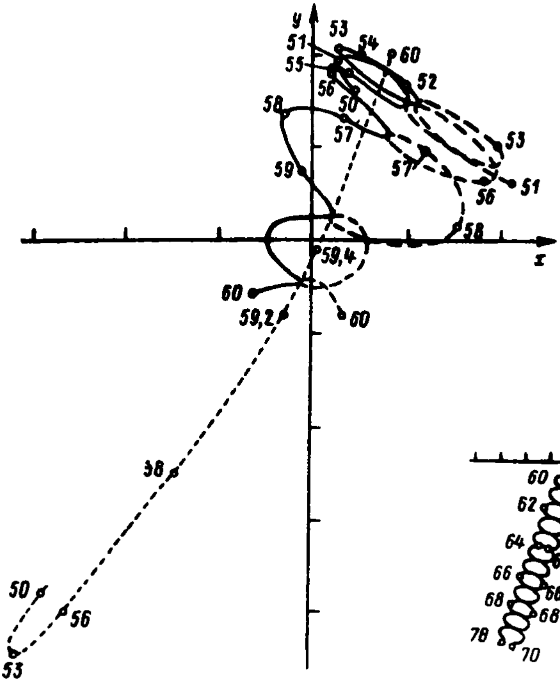


Рис. 14. Эволюция орбит пифагорейской задачи трех тел на интервале времени от $t=50$ до $t=60$.

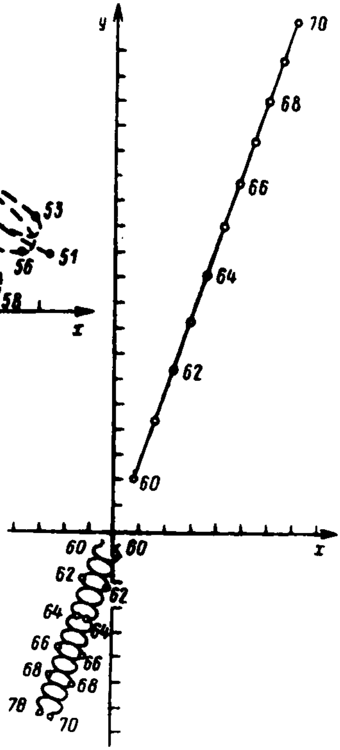


Рис. 15. Образование двойной звезды в пифагорейской задаче трех тел (от $t=60$ до $t=70$).

Среди характеристических корней уравнения в вариациях для этого решения имеется отрицательное число $(-\alpha)$. Согласно известным результатам Ляпунова—Пуанкаре, уравнения движения имеют решение (13), асимптотическое к решению (14). Отметим, что метод Блока—Шази уже раньше применялся А. М. Ляпуновым для доказательства неоднозначности решений уравнений вращения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой как функций комплексного времени (1894 г.).

Рассмотрим определенное решение задачи трех тел $r_k(t)$. Пусть в начальный момент t_0 все $r_{jk} \neq 0$ $(j \neq k)$. Проследим это решение при $t > t_0$. Возможны три случая:

(a) ни при каком $t > t_0$ нет столкновений, тогда это движение совершается без особенностей до момента $t = +\infty$,

(b) в некоторый момент $t_1 > t_0$ происходит аналитически продолжаемое столкновение,

(c) в некоторый момент происходит непродолжаемое столкновение.

Пусть имеет место случай (b). Тогда при $t>t_1$ снова возможен один из вариантов (a)—(c). Продолжая этот процесс, мы можем после конечного числа шагов либо прийти к случаю (a) или (c), либо будем иметь бесконечное число продолжаемых столкновений, происходящих в некоторые моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots$ Можно показать, что при $n=3$ в последнем случае

$$\lim_{k\to\infty} t_k = +\infty.$$

В задаче $n \geqslant 4$ тел возможен, однако, принципиально иной тип особенностей. Уже в задаче о четырех точках на прямой существуют движения, при которых за конечное время t_0 происходит бесконечное число двойных столкновений. Причем в итоге при $t \to t_0$ три тела уходят в бесконечность: одно в одну сторону, а два других — в другую, как в пифагорейской задаче трех тел. Однако в отличие от случая трех тел, сталкивающиеся тела неограниченно сближаются друг с другом, что и дает энергию для ухода в бесконечность за конечное время. Четвертое тело осциллирует между ними. Когда осциллирующее тело подходит близко к двум сближающимся, то происходит почти что тройное соударение. Существование такого движения доказал Дж. Мезер (J. Mather) с помощью регуляризации Мак-Гехи (R. McGehee) одновременного соударения в задаче трех тел (см. [172]).

§ 3. Частные решения

В задаче n тел найдено мало точных решений. Практически все они были уже известны Эйлеру и Лагранжу.

3.1. Центральные конфигурации. Будем говорить, что n материальных точек (m_i, r_i) образуют в барицентрической системе отсчета центральную конфигурацию, если

$$\frac{\partial V}{\partial r_i} = \sigma \frac{\partial I}{\partial r_i}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \tag{15}$$

где

$$V = \sum_{k<j} \frac{m_k m_j}{r_{kj}} -$$

потенциал гравитационного взаимодействия, $I = \Sigma m_i r_i^2$ — полярный момент инерции, а скалярная функция σ не зависит от номера i. Из формулы Эйлера для однородных функций вытекает, что $\sigma = -V/2I$. Таким образом, формулу (15) можно записать еще в следующем виде

$$I \frac{\partial V}{\partial r_i} = -\frac{1}{2} V \frac{\partial I}{\partial r_i}.$$

Следовательно, центральным конфигурациям соответствуют критические точки функции IV^2. Из ее однородности вытекает, что центральными конфигурациями одновременно являются наборы (m_i, r_i) и $(m_i, \alpha r_i)$ для всех $\alpha \neq 0$. Мы не будем их различать.

Отыскание для любого числа точек n всех центральных конфигураций является сложной пока нерешенной алгебраической задачей. Оставляя в стороне тривиальный случай $n=2$, перечислим известные относящиеся сюда результаты.

При $n=3$ единственной неколлинеарной центральной конфигурацией является равносторонний треугольник (Лагранж). При $n=4$ единственной некомпланарной конфигурацией является правильный тетраэдр. Коллинеарные конфигурации описываются следующей *теоремой Мультона* (F. R. Multon) [42]: любой нумерации масс точек соответствует единственная центральная конфигурация, в которой точки в заданном порядке расположены на одной прямой. Таким образом, существует ровно $n!/2$ различных коллинеарных центральных конфигураций. При $n=3$ их ровно три; они были обнаружены Эйлером.

Понятие центральной конфигурации полезно при анализе одновременных столкновений: оказывается, конфигурация гравитирующих точек в момент одновременного столкновения является (в асимптотическом смысле) центральной. Из формулы (15) следует, что если в начальный момент точки образуют центральную конфигурацию и покоятся, то до момента одновременного соударения их конфигурация, очевидно, не изменится.

3.2. **Гомографические решения.** Решение задачи n тел назовем *гомографическим*, если в барицентрической системе отсчета конфигурации, образованные телами, остаются подобными друг другу во все моменты времени. Если при этом конфигурация не вращается, то такое решение будем называть *гомотетическим*. Примером могут служить решения, упомянутые в конце предыдущего пункта. Если же конфигурация остается конгруэнтной самой себе, то решение назовем относительным равновесием.

Несложно показать, что

a) гомографическое решение является гомотетическим тогда и только тогда, когда полярный кинетический момент равен нулю,

b) гомографическое решение является относительным равновесием тогда и только тогда, когда оно плоское и его конфигурация вращается с постоянной угловой скоростью.

Более сложно доказываются следующие факты:

c) если гомографическое решение не компланарное, то оно гомотетическое,

d) если гомографическое решение компланарное, то оно плоское.

В частности, каждое гомографическое решение является либо плоским, либо гомотетическим. В задаче трех тел все гомографические решения обладают тем свойством, что в барицентрической системе отсчета три тела лежат в неизменной плоскости, содержащей центр масс (Лагранж).

Предложение 4. Если решение является гомографическим, то в любой момент времени тела образуют центральную конфигурацию.

Это утверждение дает способ построения гомографических решений. В качестве примера приведем известную *теорему Лагранжа* (1772 г.).

Теорема 4. Задача трех тел при произвольных значениях их масс допускает точное решение, при котором

1) плоскость, содержащая эти точки, неподвижна в барицентрической системе отсчета,

2) равнодействующая ньютоновских сил притяжения, приложенных к каждой из трех материальных точек, проходит через их общий центр тяжести,

3) образованный тремя телами треугольник является равносторонним,

4) траектории трех тел представляют подобные друг другу конические сечения с фокусом в их общем центре масс.

В частном случае равных масс конические сечения конгруэнтны и смещены друг относительно друга на угол в 120°. Это замечание можно обобщить: задача n точек равной массы имеет решения, при которых каждое тело описывает коническое сечение с фокусом в их центре масс; их траектории конгруэнтны и повернуты друг относительно друга на угол $2\pi/n$.

3.3. Приведенный потенциал и относительные равновесия.

Предложение 5. Конфигурации относительных равновесий с полярным кинетическим моментом K совпадают с критическими точками функции

$$U_K = U + \frac{K^2}{2I}.$$

Функция U_K называется приведенным потенциалом. Мы использовали ее в § 1 гл. 1 для описания областей возможности движения в плоской задаче n тел и в § 1 гл. 2 для отыскания траекторий двух тел.

$\lhd$ Предположим, что конфигурация относительного равновесия вращается вокруг центра масс с постоянной угловой скоростью ω. Тогда, очевидно, $K = I\omega$. Перейдем в систему отсчета с координатами u, v, вращающуюся с угловой скоростью ω; в ней конфигурация относительного равновесия неподвижна. В новой системе отсчета функция Лагранжа равна

$$L = T + V = \frac{1}{2}\Sigma m_i (\dot{u}_i^2 + \dot{v}_i^2) + \omega \Sigma m_i (u_i \dot{v}_i - \dot{u}_i v_i) + V_\omega,$$

где $V_\omega = V + I\omega^2/2$. Уравнения движения:

$$m_i \ddot{u}_i = 2m_i\omega\dot{v}_i + \frac{\partial V_\omega}{\partial u_i}, \quad m_i\ddot{v}_i = -2m_i\omega\dot{u}_i + \frac{\partial V_\omega}{\partial v_i}. \qquad (16)$$

Справедливость предложения 2 просто выводится из этих уравнений с учетом следующего замечания: функции U_K и V_ω имеют одни и те же критические точки, поскольку в этих точках $K = I\omega$. ▷

§ 4. Финальные движения в задаче трех тел

4.1. Классификация финальных движений по Шази.

Теорема 5. (Шази, 1922). Каждое решение задачи трех тел $r_k(t)$ $(k=1, 2, 3)$ принадлежит одному из следующих семи кассов:

1°. H (*гиперболические движения*): $|r_k| \to \infty$, $|\dot{r}_k| \to c_k > 0$ при $t \to +\infty$;

2°. HP_k (*гиперболо-параболические*): $|r_i| \to \infty$, $\dot{r}_k \to 0$, $|\dot{r}_i| \to c_i > 0$ $(i \neq k)$;

3°. HE_k (*гиперболо-эллиптические*): $|r_i| \to \infty$, $|\dot{r}_i| \to c_i > 0$ $(i \neq k)$, $\sup\limits_{t > t_0} |r_k| < \infty$;

4°. PE_k (*параболо-эллиптические*): $|r_i| \to \infty$, $|\dot{r}_i| \to 0$ $(i \neq k)$, $\sup\limits_{t > t_0} |r_k| < \infty$;

5°. P (*параболические*): $|r_i| \to \infty$, $|\dot{r}_i| \to 0$;

6°. B (*ограниченные*): $\sup\limits_{t > t_0} |r_k| < \infty$;

7°. OS (*осциллирующие*):

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \sup_k |r_k| = \infty, \quad \underline{\lim_{t\to+\infty}} \sup_k |r_k| < \infty.$$

Примеры движений первых шести типов были известны Шази. Существование осциллирующих движений доказал К. А. Ситников в 1959 году.

Перечисленным семи типам финальных движений естественно поставить в соответствие подмножества двенадцатимерного фазового пространства задачи трех тел M^{12} с фиксированным положением центра масс: эти подмножества целиком составлены из фазовых траекторий, которым отвечают движения заданного типа. Представление о качественном характере разбиения M^{12} на классы финальных движений дает рис. 16. Множества H и HP_k лежат целиком в области, где постоянная полной энергии h положительна, P лежит на гиперповерхности $h = 0$, а множества B, PE_k, OS — в области $h < 0$: движения из класса HE_k возможны при любом знаке h. Известно, что H и HE_k открыты в M^{12}, HP_k состоит из аналитических многообразий коразмерности 1, P состоит из трех связных многообразий коразмерности 2 (изображенных тремя точками на рис. 16) и одного многообразия коразмерности 3 (которое на рис. 16 не показано). Топология остальных классов недостаточно изучена.

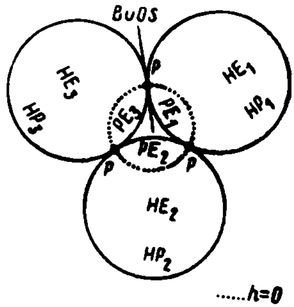


Рис. 16

4.2. Симметрия прошлого и будущего. По теореме Шази можно ввести семь аналогичных *финальных классов* движений, когда t стремится не к $+\infty$, а к $-\infty$. Чтобы различать классы, относящиеся к случаям $t\to\pm\infty$, будем использовать индексы $(+)$ и $(-)$: H^+, HE_3^- и т. д. В одной из работ Шази (1929 г.) было сформулировано неверное утверждение о совпадении финальных типов одного и того же решения задачи трех тел при $t\to\pm\infty$. Представление о «симметрии» прошлого и будущего продержалось довольно долго, несмотря на построенный Бекке-

Таблица 1

$h>0$		$t\to+\infty$	
		H^+	HE_i^+
$t\to-\infty$	H^-	Ж. Лагранж. 1772 (отдельные примеры); Ж. Шази, 1922 Мера >0	ЧАСТИЧНЫЙ ЗАХВАТ Мера >0 О. Ю. Шмидт (численный пример), 1947 К. А. Ситников (качественные методы), 1953
	HE_j^-	ПОЛНЫЙ РАСПАД Мера >0	$i=j$ Мера >0 Дж. Биркгоф, 1927
			$i\neq j$ ОБМЕН, мера >0 Л. Беккер (численные примеры), 1920 В. М. Алексеев (качественные методы), 1956

Таблица 2

$h<0$		$t\to+\infty$		
		HE_i^+	B^+	OS^+
$t\to-\infty$	HE_j^-	$i=j$ Мера >0 Дж Биркгоф, 1927 ОБМЕН $i\neq j$ Мера >0 Л. Беккер, 1920 (численные примеры) В. М. Алексеев, 1956 (качественные методы)	ПОЛНЫЙ ЗАХВАТ Мера $=0$ Ж. Шази, 1929 и Г. А. Мерман, 1954; Дж. Литтлвуд. 1952; В. М. Алексеев, 1968, $\neq\varnothing$	Мера $=0$ Ж. Шази, 1929 и Г. А. Мерман, 1954 В. М. Алексеев, 1968 $\neq\varnothing$
	B^-	ЧАСТИЧНЫЙ РАСПАД $\neq\varnothing$ Мера $=0$	Л. Эйлер, 1772 Ж. Лагранж, 1772 А. Пуанкаре, 1892 (отдельные примеры); Мера >0 В. И. Арнольд, 1963	Дж. Литтлвуд, 1952 Мера $=0$; В. М. Алексеев, 1968 $\neq\varnothing$
	OS^-	Мера $=0$, $\neq\varnothing$	Мера $=0$, $\neq\varnothing$	К. А. Ситников, 1959 $\neq\varnothing$ Мера $=$?

ром(L. Bekker) (1920 г.) численный контрпример, в котором утверждалась возможность «*обмена*»: $HE_1^-\cap HE_2^+\neq\varnothing$. Пример Беккера «объясняли» ошибками в численном интегрировании. В 1947 году О. Ю. Шмидт указал пример «*захвата*» в задаче трех тел: $H^-\cap HE^+\neq\varnothing$. Этот пример, также построенный численным расчетом, был приведен О. Ю. Шмидтом для подтверждения его известной космогонической гипотезы. Строгое доказательство возможности захвата нашел К. А. Ситников в 1953 г.

Современное состояние проблемы финальных движений задачи трех тел кратко отражено в таблицах 1 и 2, которые мы заимствовали из работы В. М. Алексеева [2]. Каждой клетке соответствует один из логически возможных вариантов комбинаций финальных типов в прошлом и будущем. Указана (где это известно) лебегова мера соответствующих множеств в M^{12}.

§ 5. Ограниченная задача трех тел

5.1. Уравнения движения. Интеграл Якоби. Предположим, что Солнце S и Юпитер J вращаются вокруг общего центра масс по круговым орбитам. Единицы длины, времени и массы выберем так, чтобы угловая скорость вращения, сумма масс S и J, а также гравитационная постоянная были равны единице. Нетрудно показать, что при этом расстояние между S и J тоже равно единице.

Рассмотрим движение астероида $\mathscr{A}$ в плоскости орбит S и J. Считая, что масса астероида много меньше масс Солнца и Юпитера, пренебрежем его влиянием на движение больших тел.

Удобно перейти в подвижную систему отсчета, вращающуюся с единичной угловой скоростью вокруг центра масс S и J; в ней тела S и J покоятся. Введем в подвижной системе отсчета декартовы координаты x, y так, что точки S и J постоянно расположены на оси x и их центр масс совпадает с началом координат. Уравнения движения астероида приводятся к следующему виду (см. (16)):

$$\ddot{x}=2\dot{y}+\frac{\partial V}{\partial x},\quad \ddot{y}=-2\dot{x}+\frac{\partial V}{\partial y},$$
$$V=\frac{x^2+y^2}{2}+\frac{1-\mu}{\rho_1}+\frac{\mu}{\rho_2}, \tag{17}$$

где μ — масса Юпитера, ρ_1 и ρ_2 — расстояния астероида $\mathscr{A}$ до S и J. Поскольку S и J имеют координаты $(-\mu, 0)$ и $(1-\mu, 0)$, то

$$\rho_1^2=(x+\mu)^2+y^2,\quad \rho_2^2=(x-1+\mu)^2+y^2.$$

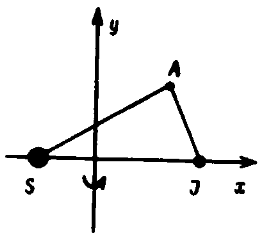


Рис. 17. Ограниченная задача трех тел

Уравнения (17) имеют интеграл

$$\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{2}-V(x, y)=h,$$

называемый *интегралом Якоби*. Он выражает постоянство энергии в относительном движении астероида.

При фиксированном значении h движение астероида происходит в области

$$\{(x, y)\in R^2:\ V(x, y)+h\geqslant 0\},$$

которая называется *областью Хилла*.

5.2. Относительные равновесия и области Хилла. Вид областей Хилла зависит от расположения критических точек функции $V(x, y)$. Каждой критической точке (x_0, y_0) соответствует «равновесное» решение $x(t)\equiv x_0$, $y(t)\equiv y_0$, которое естественно назвать относительным равновесием. Покажем, что при всех значениях $\mu \in (0, 1)$ таких точек ровно пять.

Вычислим

$$V'_y = yf, \quad f = 1 - \frac{1-\mu}{\rho^3_1} - \frac{\mu}{\rho^3_2},$$

$$V'_x = xf - \mu(1-\mu)\left(\frac{1}{\rho^3_1} - \frac{1}{\rho^3_2}\right)$$

и решим систему алгебраических уравнений $V'_x = V'_y = 0$. Пусть сначала $y \neq 0$. Тогда $f=0$ и, следовательно, $\rho_1 = \rho_2 = \rho$. Из уравнения $f=0$ найдем, что $\rho=1$. Таким образом, в этом случае точки S, J и $\mathcal{A}$ находятся в вершинах равностороннего треугольника. Таких относительных равновесий ровно два; они называются *треугольными точками либрации*. Их следует рассматривать как частный случай решений Лагранжа общей «неограниченной» задачи трех тел (см. § 3). Сам Лагранж относился к этим решениям как к «чистому курьёзу» и считал их бесполезными для астрономии. Однако в 1907 году был обнаружен астероид, названный Ахиллесом, который движется практически по орбите Юпитера, постоянно «опережая» его на 60°. Вблизи Ахиллеса есть еще 9 астероидов («Греки»), а по другую сторону обнаружено пять астероидов («Троянцы»), которые тоже образуют с Солнцем и Юпитером правильный треугольник.

Теперь исследуем относительные равновесия, расположенные на оси x. Они являются критическими точками функции

$$g(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1-\mu}{|x+\mu|} + \frac{\mu}{|x-1+\mu|}.$$

Так как $g(x) > 0$ и $g(x) \to +\infty$ при $x \to \pm\infty$, $x \to -\mu$ и $x \to 1-\mu$, то в интервалах $(-\infty, -\mu)$, $(-\mu, 1-\mu)$, $(1-\mu, +\infty)$, на которые делят ось x точки S и J, существуют три локальных минимума функции g. Ввиду неравенства $g''(x) > 0$ эти точки являются единственными критическими точками функции g. *Коллинеарные точки либрации* были найдены Эйлером.

Можно показать, что коллинеарные точки либрации (обозначим их L_1—L_3) имеют гиперболический тип, а треугольные точки либрации (L_4 и L_5) являются точками невырожденного минимума функции V. На рис. 18 изображена перестройка областей Хилла при изменении постоянной Якоби h от $-\infty$ до $+\infty$ в предположении, что масса Юпитера меньше массы Солнца. Если h больше отрицательного числа

$$-\frac{1}{2}(3-\mu+\mu^2),$$

то область Хилла совпадает со всей плоскостью $R^2 = \{x, y\}$. При $\mu = 1/2$ области Хилла симметричны не только относительно оси x, но и относительно оси y.

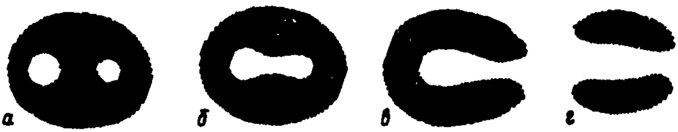


Рис. 18

Коллинеарные точки либрации всегда неустойчивы: среди корней векового уравнения уравнений в вариациях есть числа с положительными вещественными частями. Для случая треугольных точек либрации эти корни чисто мнимы и различны только тогда, когда

$$27\mu(1-\mu)<1. \tag{18}$$

При выполнении этого условия треугольные точки относительного равновесия устойчивы в первом приближении. Задача об их устойчивости в смысле определения Ляпунова оказалась гораздо сложнее; мы отложим ее обсуждение до гл. 7. Отметим в заключение, что для реальной системы Солнце—Юпитер условие (18) заведомо выполнено.

5.3. Задача Хилла. Поместим начало вращающейся системы координат в точку, где находится тело с массой μ. Тогда координаты x, y третьего тела малой массы надо заменить на $x-(1-\mu)$, y. Обозначая эти переменные снова через x, y, мы видим, что уравнения движения (17) сохранят свой вид, только потенциал надо заменить следующей функцией:

$$V=(1-\mu)x+\frac{1}{2}(x^2+y^2)+ \\ +(1-\mu)(1+2x+x^2+y^2)^{-1/2}+\mu(x^2+y^2)^{-1/2}. \tag{19}$$

Сделаем еще одно упрощение задачи; оно введено Хиллом (G. W. Hill) и заимствовано из астрономии. Пусть тело с массой $1-\mu$ снова обозначает Солнце, μ — Землю, а третье тело ничтожно малой массы — Луна — движется вблизи точки (0, 0), в которой постоянно находится Земля. Пренебрежем в уравнениях (17) всеми членами, имеющими по крайней мере второй порядок относительно x, y. Это эквивалентно тому, что в (19) мы должны отбросить члены по крайней мере третьего порядка по x, y. С требуемой точностью V заменяется на функцию

$$V=\frac{\mu}{2}(x^2+y^2)+\frac{3}{2}(1-\mu)x^2+\mu(x^2+y^2)^{-1/2}.$$

Поскольку масса Земли μ много меньше массы Солнца $1-\mu$, то в этой формуле первым слагаемым можно пренебречь.

Удобно слегка изменить единицы расстояния и массы, сделав следующие замены:

$$x\to\alpha x,\quad y\to\alpha y,\quad \mu\to\beta\mu,\quad 1-\mu\to\beta(1-\mu),$$

где

$$\alpha=(\mu/1-\mu)^{1/3}, \quad \beta=(1-\mu)^{-1}.$$

После этого преобразования уравнения движения Луны принимают следующий вид:

$$\ddot{x}-2\dot{y}=\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \ddot{y}+2\dot{x}=\frac{\partial V}{\partial y}; \quad V=\frac{3}{2}x^2+(x^2+y^2)^{-1/2}. \qquad (20)$$

Они имеют первый интеграл — интеграл Якоби:

$$\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{2}-V(x, y)=h.$$

Легко видеть, что при переходе от ограниченной задачи трех тел к ее предельному варианту — *задаче Хилла* — исчезают две треугольные и одна коллинеарная точки либрации. Действительно, система уравнений $V_x'=V_y'=0$ имеет всего два решения $(x, y)=(\pm 3^{-1/3}, 0)$. Области Хилла

$$\{V(x, y)+h \geqslant 0\}$$

при всех значениях h симметричны относительно осей x и y. Если $h \geqslant 0$, то область Хилла совпадает со всей плоскостью. При $h<0$ граница имеет асимптоты, параллельные оси y: $x=\pm(-{}^2/_3 h)^{1/2}$. Вид этих областей зависит от того, будет ли постоянная $(-h)$ больше, равна или меньше единственного критического значения функции V, равного ${}^3/_2\, 3^{1/3}$. Эти три случая показаны на рис. 19. Для астрономических приложений интерес представляет лишь случай (а) и более того, лишь область, окружающая начало координат.

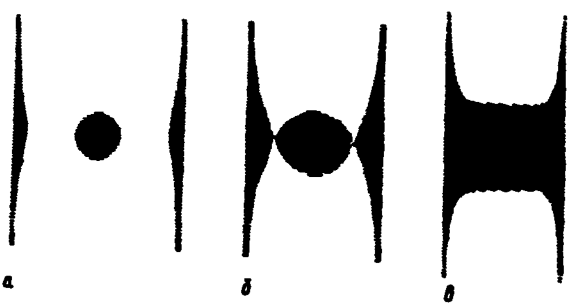


Рис. 19

Рассмотрим вопросы, связанные с регуляризацией задачи Хилла. Для этого перейдем к новым параболическим координатам по формулам $x=\xi^2-\eta^2$, $y=2\xi\eta$ и сделаем замену времени $t \to \tau$ вдоль траекторий:

$$\frac{dt}{d\tau}=4(\xi^2+\eta^2).$$

Обозначая штрихом дифференцирование по τ, запишем уравнения движения в новых переменных:

$$\xi'' - 8(\xi^2+\eta^2)\eta' = \hat{V}'_\xi, \quad \eta'' + 8(\xi^2+\eta^2)\xi' = \hat{V}'_\eta,$$

$$\hat{V} = 4 + 4(\xi^2+\eta^2)h + 6(\xi^2-\eta^2)(\xi^2+\eta^2).$$

Интеграл энергии примет следующий вид:

$$\frac{\xi'^2+\eta'^2}{2} - \hat{V}(\xi, \eta, h) = 0.$$

Эта регуляризация задачи Хилла, предложенная Биркгофом (G. D. Birkhoff) позволяет просто исследовать аналитические особенности решений, соответствующих столкновению Луны с Землей. Предположим, что столкновение происходит в момент времени $t=0$ и пусть $\tau(0)=0$. Тогда, очевидно,

$$\xi = (\sqrt{8}\sin\alpha)\tau + \ldots, \quad \eta = (\sqrt{8}\cos\alpha)\tau + \ldots; \quad t = \frac{32}{3}\tau^3 + \ldots,$$

где α — постоянная интегрирования. Таким образом, униформизующей переменной является новое время τ и, как в случае парных столкновений в общей задаче трех тел, решение $\xi(t)$, $\eta(t)$ допускает единственное вещественное аналитическое продолжение после момента столкновения.

Как уже отмечалось, для астрономии интерес представляют лишь движения, которые происходят вблизи точки $\xi=\eta=0$. При больших отрицательных значениях h удобно перейти к новым переменным

$$\varphi = 2\xi[-2h-3(\xi^2-\eta^2)^2]^{1/2}, \quad \psi = 2\eta[-2h-3(\xi^2-\eta^2)^2]^{1/2}.$$

С учетом этой замены интеграл энергии приобретает совсем простой вид

$$\xi'^2+\eta'^2+\varphi^2+\psi^2=8.$$

Это — уравнение трехмерной сферы в четырехмерном фазовом пространстве переменных ξ', η', φ, ψ. Поскольку точкам (ξ, η) и $(-\xi, -\eta)$ соответствует одна и та же точка в плоскости (x, y), то состояния Луны $(\xi', \eta', \varphi, \psi)$ и $(-\xi', -\eta', -\varphi, -\psi)$ следует отождествить. В результате мы получили, что при больших отрицательных h интересующая нас связная компонента трехмерного уровня энергии диффеоморфна трехмерному проективному пространству. Это замечание справедливо, конечно, при всех $h < -3/2\sqrt[3]{3}$.

Обсудим в заключение периодические решения задачи Хилла, имеющие важные астрономические приложения. Речь идет о периодических решениях $x(t)$, $y(t)$ вблизи Земли (точки $x=y=0$) с малым периодом τ, орбиты которых симметричны относительно осей x и y. Более точно, условия симметрии определяются равенствами

$$x(-t) = x(t) = -x\left(t+\frac{\tau}{2}\right), \quad y(-t) = -y(t) = y\left(t+\frac{\tau}{2}\right).$$

Следовательно, эти решения надо искать в виде тригонометрических рядов

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(m)\cos(2n+1)\frac{t}{m}, \quad y(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(m)\sin(2n+1)\frac{t}{m};$$

$$m=\frac{\tau}{2\pi}.$$

Подставляя эти ряды в уравнения движения (20), мы получим бесконечную нелинейную систему алгебраических уравнений относительно бесконечного числа неизвестных коэффициентов. Хилл (1878 г.) показал, что эта система имеет единственное решение по крайней мере при малых значениях m (см. [37], [42]). Значение $m_0=0{,}08084\ldots$ для реальной Луны попадает в этот допустимый интервал. Сходимость рядов Хилла доказана А. М. Ляпуновым в 1895 году.

Можно показать, что для коэффициентов $a_k(m)$ справедливы следующие асимптотические разложения:

$$a_0=m^{2/3}\left(1-\frac{2}{3}m+\frac{7}{18}m^2-\ldots\right),$$

$$\frac{a_1}{a_0}=\frac{3}{16}m^2+\frac{1}{2}m^3+\ldots, \quad \frac{a_{-1}}{a_0}=-\frac{19}{16}m^2-\frac{5}{3}m^3-\ldots,$$

$$\frac{a_2}{a_0}=\frac{25}{256}m^4+\ldots, \quad \frac{a_{-2}}{a_0}=0\cdot m^4+\ldots, \ldots.$$

Отсюда видно, что при малых значениях m основной вклад в периодические решения Хилла дают слагаемые

$$x_0(t)=m^{2/3}\cos\frac{t}{m}, \quad y_0(t)=m^{2/3}\sin\frac{t}{m},$$

которые представляют закон движения Луны вокруг Земли без учета влияния Солнца. Наличие коэффициента $m^{2/3}$ является следствием третьего закона Кеплера. Солнце, возмущая систему Земля—Луна, при малых значениях параметра m не разрушает периодические круговые движения задачи двух тел, а лишь слегка их деформирует.

§ 6. Эргодические теоремы небесной механики

6.1. Устойчивость по Пуассону. Пусть (M, S, μ) — полное пространство с мерой; здесь S — σ-алгебра подмножеств M, μ — счетно-аддитивная мера на S. Рассмотрим сохраняющий меру автоморфизм g множества M. Множество

$$\Gamma_p=\bigcup_{n\in Z} g^n(p), \quad g^0(p)=p$$

назовем траекторией точки $p\in M$, а

$$\Gamma_p^+=\bigcup_{n\geq 0} g^n(p) -$$

ее положительной полутраекторией.

Теорема Пуанкаре о возвращении. Пусть $\mu(M)<\infty$. Тогда для любого измеримого множества положительной меры $V \in S$ существует равное ему по мере множество $W \subset V$ такое, что для всех $p \in W$ пересечение $\Gamma_p^+ \cap W$ состоит из бесконечного множества точек.

Применим, следуя Пуанкаре (H. Poincaré), этот результат к ограниченной задаче трех лет. В обозначениях предыдущего параграфа уравнения движения астероида имеют вид уравнений Лагранжа с лагранжианом

$$L=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+x\dot{y}-y\dot{x}+V, \quad V=\frac{x^2+y^2}{2}+\frac{1-\mu}{\rho_1}+\frac{\mu}{\rho_2}.$$

Эти уравнения можно представить в гамильтоновом виде с гамильтонианом

$$H=\frac{1}{2}(X^2+Y^2)+yX-xY-G, \quad G=\frac{\mu}{\rho_1}+\frac{1-\mu}{\rho_2},$$

где $X=\dot{x}-y$, $Y=\dot{y}+x$ — канонические импульсы, сопряженные с координатами x, y. Согласно теореме Лиувилля, фазовый поток этой системы, обозначим его g^t, сохраняет обычную меру Лебега (H. L. Lebesgue) в $R^4=\{X, Y, x, y\}$.

Рассмотрим множество всех точек фазового пространства, для которых справедливо неравенство $c_1<-H<c_2$, где c_1 и c_2 — достаточно большие положительные постоянные. Как мы видели в § 5, при этом предположении точка (x, y) лежит в одной из трех связных подобластей области Хилла $\{G \leqslant c_1\}$. Выберем одну из двух областей, содержащих Солнце или Юпитер. Ей будет соответствовать связная область в фазовом пространстве. Очевидно, эта область инвариантна относительно действия g^t. Из нее надо выбросить траектории столкновения; их объединение имеет нулевую меру. Обозначим оставшееся множество через M. Нам надо показать, что его мера конечна. Действительно, координаты (x, y) точек из M принадлежат ограниченному множеству плоскости $R^2=\{x, y\}$. Допустимые импульсы X, Y подчинены неравенствам

$$2(G-c_2)<(Y+x)^2+(X-y)^2<2(G-c_1),$$

которые являются следствием интеграла Якоби. Эти неравенства определяют в плоскости $R^2=\{X, Y\}$ круговое кольцо, площадь которого не превосходит $2\pi(c_2-c_1)$. Из этих замечаний вытекает конечность $\mu(M)$ и, следовательно, возможность применения теоремы Пуанкаре о возвращении: для почти всех $p \in M$ полутраектория $g^t(p)$ пересекается с любой окрестностью точки p при сколь угодно больших значениях t. Такие движения названы Пуанкаре *устойчивыми по Пуассону*.

6.2. Вероятность захвата. Пусть снова V — измеримое множество положительной меры. Для $n \in N$ через V^n обозначим множество точек из V, для которых $g^k(p) \in V$ при всех $0 \leqslant k \leqslant n$.

Очевидно включение: $V^{n_1} \supset V^{n_2}$, если $n_1 < n_2$. Положим

$$B = \bigcap_{n \geqslant 0} V^n.$$

Множество B измеримо и $\mu(B) < \infty$. Если $p \in B$, то, конечно, $\Gamma^{+}_{p} \in V$ для всех $n \geqslant 0$.

Положим $B^n = g^n(B)$. Все множества B^n измеримы и снова $B^{n_1} \supset B^{n_2}$, если $n_1 < n_2$. Множество

$$D = \bigcap_{n \geqslant 0} B^n \subset B$$

тоже измеримо. Если $p \in D$ то, очевидно, $\Gamma_p \in V$.

Предложение 6. $\mu(B \setminus D) = 0$.

Чтобы это утверждение не было бессодержательным, нужно сначала показать, что $\mu(B) > 0$. Однако в конкретных задачах доказательство этого факта может оказаться существенной трудностью. Предложение 6, восходящее к Шварцшильду (K. Schwarzschild), справедливо, конечно, и в том случае, когда время n непрерывно.

Предположим, например, что система Солнце—Юпитер «захватила» из окружающего пространства астероиды («греков» и «троянцев») в окрестность треугольных точек либрации. Предложение 6 сразу дает нам нулевую вероятность этого события. Таким образом, явления «захвата» в небесной механике следует рассматривать лишь в математических моделях, учитывающих диссипацню энергии.

Более интересным приложением является следующее рассуждение Литлвуда (J. Littlwood). Рассмотрим задачу n тел с покоящимся центром масс. Движение точек описывается гамильтоновой системой; функция Гамильтона H регулярна в области, где их взаимные расстояния $r_{kl} > 0$. Для произвольного $c > 1$ рассмотрим открытое множество $A(c)$ точек фазового пространства, где выполнены неравенства

$$c^{-1} < r_{kl} < c \quad (1 \leqslant k < l \leqslant n), \quad -c < H < c.$$

Поскольку $A(c)$ ограничено, то $\mu(A(c)) < \infty$. Следовательно, согласно предложению 6, множество точек $B(c)$, которые остаются в $A(c)$ при $t \geqslant 0$, лишь на множество нулевой меры превосходит множество $D(c)$ точек, которые находятся в $A(c)$ при всех $t \in R$.

Если $c_1 < c_2$, то, очевидно, $A(c_1) \subset A(c_2)$, $B(c_1) \subset B(c_2)$ и $D(c_1) \subset D(c_2)$. Поэтому соответствующее утверждение справедливо и для множеств

$$A = \bigcup_{c > 1} A(c), \quad B = \bigcup_{c > 1} B(c), \quad D = \bigcup_{c > 1} D(c).$$

Для точек $p \in B$ взаимные расстояния r_{kl} для всех $t \geqslant 0$ остаются ограниченными сверху и снизу некоторыми положительными постоянными, зависящими от p. Для точек $p \in D$ это свойство имеет место для всех значений t. Почти все точки из D принадлежат B.

Пусть, например, планетная система устойчива «в прошлом». Если она захватывает новое тело, скажем, пылинку, приходящую из бесконечности, то образовавшаяся система тел уже потеряет свойство устойчивости: с вероятностью единица либо произойдет столкновение, либо одно из тел снова уйдет в бесконечность. Причем совсем не обязательно, что именно пылинка покинет Солнечную систему. Уйти может Юпитер или даже Солнце.

Глава 3

ГРУППЫ СИММЕТРИЙ И ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА

§ 1. Симметрии и линейные интегралы

1.1. Теорема Нётер. Пусть (M, L) — лагранжева система и v — гладкое поле на M. С полем v связана однопараметрическая группа диффеоморфизмов $g^\alpha : M \to M$, определяемая дифференциальным уравнением

$$\frac{d}{d\alpha} g^\alpha(x) = v(g^\alpha(x)) \tag{1}$$

и начальным условием $g^0(x) = x$.

Определение. Лагранжева система (M, L) допускает группу g^α, если лагранжиан L инвариантен относительно отображений $g_*^\alpha : TM \to TM$. Группу g естественно назвать *группой симметрий*, а поле v — *полем симметрий*.

Пусть $\gamma : \Delta \to M$ — движение лагранжевой системы (M, L). Тогда $g^\alpha \circ \gamma : \Delta \to M$ при всех значениях α также является движением.

В неавтономном случае лагранжиан L — гладкая функция на пространстве касательного расслоения *расширенного пространства положений* $'M = M \times R$. Группу диффеоморфизмов $g^\alpha : 'M \to 'M$ будем называть группой симметрий системы $('M, L)$, если $'g^\alpha(x, t) = (y, t)$ для всех $(x, t) \in M \times R$ и отображения $'g_*^\alpha$ сохраняют L. Группе $'g^\alpha$ соответствует гладкое поле на $'M$

$$'v(x, t) = \frac{d}{d\alpha}('g^\alpha(x, t))_{\alpha=0}.$$

Очевидно, что $'v(x, t) = (v(x, t), 0) \in T_{(x,t)}(M \times R)$ и $v(x, t)$ можно интерпретировать как поле на M, гладко зависящее от t.

Лемма 1. Система (M, L) допускает группу симметрий g^α тогда и только тогда, когда

$$(p \cdot v) = [L] \cdot v. \tag{2}$$

◁ Это утверждение вытекает из следующего тождества:

$$\frac{d}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0} L(g^\alpha_* \dot{x}) = (L'_{\dot{x}} \cdot v)^{\cdot} - [L]\cdot v. \ \triangleright \qquad (3)$$

Лемма 1 справедлива и в неавтономном случае. Из равенства (2) вытекает

Теорема 1. Если система (M, L) допускает группу g^α, то $I = p\cdot v$ — первый интеграл уравнений движения[1].

Пусть $(M, \langle\ ,\ \rangle, V)$ — натуральная механическая система. Лагранжиан $L = \langle \dot{x}, \dot{x}\rangle/2 + V(x)$ инвариантен относительно действия группы g только в том случае, когда этим свойством обладают риманова метрика $\langle\ ,\ \rangle$ и потенциал V. Для натуральных систем интеграл I, очевидно, равен $\langle v, \dot{x}\rangle$; он линейно зависит от скорости.

Пример 1. Если в некоторых координатах $x_1, \ldots, x_n$ на M лагранжиан L не зависит от x_1, то система (M, L) допускает (локально) группу симметрий $g^\alpha: x_1 \to x_1 + \alpha,\ x_k \to x_k\ (k \geqslant 2)$. Этой группе соответствует векторное поле $v = \partial/\partial x_1$. Согласно теореме 1, сохраняется величина $I = p\cdot v = p_1 = L'_{\dot{x}_1}$. В механике координата x_1 называется *циклической*, а интеграл I — *циклическим интегралом*. В частности, интеграл энергии является циклическим интегралом некоторой расширенной лагранжевой системы. Для того, чтобы показать это, введем новое время τ по формуле $t = t(\tau)$ и зададим функцию $'L: T'M \to R$ $('M = M \times R)$ формулой

$$'L(x', t', x, t) = L(x'/t', x, t)\,t', \qquad (\cdot)' = \frac{d}{d\tau}(\cdot).$$

Из вариационного принципа Гамильтона с учетом равенства

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} 'L\,d\tau = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt$$

вытекает, что если $x: [t_1, t_2] \to M$ — движение системы (M, L), то $(x, t): [\tau_1, \tau_2] \to 'M$ — движение расширенной лагранжевой системы $('M, 'L)$. В автономном случае время t является циклической координатой и циклический интеграл

$$\frac{\partial' L}{\partial t'} = L - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\cdot \dot{x} = \mathrm{const}$$

совпадает с интегралом энергии. △

Теорема 2. Если $v(x_0) \neq 0$, то в малой окрестности точки x_0 существуют локальные координаты $x_1, \ldots, x_n$ такие, что $I = p\cdot v = p_1$.

---

[1] В таком виде эта теорема впервые сформулирована Э. Нётер (E. Noether) в 1918 г. Связь законов сохранения импульса и кинетического момента с группами трансляций и вращений была известна уже Лагранжу и Якоби. Теорема 1 для натуральных систем опубликована Леви (M. Lévy) в 1878 г.

Это утверждение — следствие *теоремы о выпрямлении* векторного поля[1].

Теорема 3. Предположим, что уравнение движения $[L]=0$ имеет первый интеграл $I=p\cdot v$. Тогда фазовый поток уравнения (1) является группой симметрий лагранжевой системы (M, L).

Из теорем 2 и 3 вытекает

Следствие. Интегралы натуральных систем, линейные по скоростям, локально являются циклическими.

Если имеется несколько полей симметрий $v_1, \ldots, v_k$, то уравнение движения допускает столько же первых интегралов $I_1=p\cdot v_1, \ldots, I_k=p\cdot v_k$. Предполагая, что лагранжева система (M, L) является натуральной, перейдем с помощью преобразования Лежандра к уравнениям Гамильтона на T^*M. Функции $I_1, \ldots, I_k : T^*M \to R$ независимы и инволютивны (в стандартной симплектической структуре на T^*M) тогда и только тогда, когда поля $v_1, \ldots, v_k$ независимы и коммутируют на M. Наличие линейных интегралов налагает ограничения не только на риманову метрику и потенциал силового поля, но и на топологию пространства положений.

Теорема 4. Пусть M — связное, компактное, ориентируемое четномерное многообразие. Если гамильтонова натуральная система на T^*M имеет $k \geqslant (\dim M)/2$ независимых линейных интегралов в инволюции, то характеристика Эйлера — Пуанкаре $\chi(M) \geqslant 0$[2].

Следствие. Пусть $\dim M=2$. Если натуральная система имеет линейный по скорости первый интеграл, то M диффеоморфно сфере или тору.

В неориентируемом случае надо добавить проективную плоскость и бутылку Клейна.

Докажем следствие. Если $\chi(M)<0$, то поле симметрий v имеет особые точки. Поскольку фазовый поток уравнения $\dot{x}=v(x)$ является группой изометрий двумерного риманового многообразия $(M, \langle\ ,\ \rangle)$, то особые точки x_s изолированы и имеют эллиптический тип. По формуле Пуанкаре $\chi(M)=\sum\limits_s \operatorname{ind}(x_s)>0$. Получим противоречие.

Рассмотрим более общую ситуацию, когда на M действует (слева) произвольная группа Ли G. Пусть $\mathcal{G}$ — ее алгебра Ли, $\mathcal{G}^*$ — линейное пространство, дуальное алгебре $\mathcal{G}$. Мы сейчас укажем естественное отображение $I_G : TM \to \mathcal{G}^*$, которое каждой точке $\dot{x} \in TM$ сопоставляет линейную функцию на $\mathcal{G}$.

Каждому вектору $X \in \mathcal{G}$ соответствует однопараметрическая подгруппа g_X, действие которой на M порождает касательное поле v_X. Отображение $X \mapsto v_X$ является гомоморфизмом алгеб-

[1] См. сб. «Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления», 1984, 1, 18

[2] Это утверждение получено С. В. Болотиным и Д. Л. Абраровым

ры $\mathcal{G}$ в алгебру Ли всех векторных полей на M. Положим $I_G(\dot{x}) = L'_{\dot{x}} \cdot v_x$. Эта функция линейна по X.

Определение. Отображение $I_G : TM \to \mathcal{G}^*$ называется *кинетическим моментом* лагранжевой системы (M, L) *относительно группы* G (или просто моментом, если это не приведет к недоразумению).

Наряду с моментом $I_G : TM \to \mathcal{G}^*$ определено отображение $P_G : T^*M \to \mathcal{G}^*$, заданное формулой $P_G(p) = p \cdot v_x$. Момент I_G является композицией отображения P_G и преобразования Лежандра.

Пример 2. Рассмотрим n свободных материальных точек (r_k, m_k) в трехмерном евклидовом пространстве. Пусть $SO(2)$ — группа вращений пространства вокруг оси, заданной единичным вектором e. Группа $SO(2)$ действует в пространстве положений $R^3\{r_1\} \times \ldots \times R^3\{r_n\}$; ей соответствует векторное поле $(e \times (r_1 - 'r_1), \ldots, e \times (r_n - 'r_n))$, где $'r_k$ — радиус-вектор k-ой точки с началом в некоторой точке оси вращения. Поскольку

$$L = \frac{1}{2} \Sigma m_k \langle \dot{r}_k, \dot{r}_k \rangle + V(r_1, \ldots, r_n),$$

то

$$I_{SO(2)} = \Sigma m_k \langle \dot{r}_k, e \times (r_k - 'r_k) \rangle = \langle e, \Sigma m_k (r_k - 'r_k) \times \dot{r}_k \rangle$$

совпадает с уже известным нам кинетическим моментом системы относительно оси.

Пусть теперь $G = SO(3)$ — группа поворотов вокруг некоторой точки o. Дуальное пространство $\mathcal{G}^* = (so(3))^*$ можно канонически отождествить с алгеброй векторов трехмерного ориентированного евклидова пространства, в которой коммутатор задается обычным векторным произведением. Тогда, очевидно, $I_{SO(3)}$, будет соответствовать кинетическому моменту системы относительно точки o. $\triangle$

Определение. Группа G называется *группой симметрии* лагранжевой системы (M, L), если $L(g_* \dot{x}) = L(\dot{x})$ для всех $\dot{x} \in TM$ и $g \in G$.

Теорема 5. Пусть система (M, L) допускает группу симметрий G. Тогда момент I_G является первым интегралом (т. е. I_G принимает постоянные значения на движениях лагранжевой системы (M, L)).

Это утверждение есть следствие теоремы 1.

Пример 3. Мы уже видели в гл. 1, что уравнения задачи n гравитирующих тел допускают группу преобразований Галилея. Однако функция Лагранжа

$$L = \frac{1}{2} \Sigma m_k (\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2) +$$

$$+ \sum_{i<j} \frac{\gamma m_i m_j}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}}$$

инвариантна относительно не всей группы Галилея. Она допускает трансляции оси времени, а также изометрии трехмерного евклидова пространства. Сдвигам оси времени соответствует сохранение полной энергии, трансляциям евклидова пространства — сохранение импульса, а группе вращений — сохранение кинетического момента. Рассмотрим еще группу гомотетий

$$(x, y, z) \mapsto (\alpha x, \alpha y, \alpha z), \quad \alpha > 0. \tag{4}$$

Она порождается векторным полем

$$v = \Sigma x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}.$$

При $\alpha = 1$ будем иметь тождественное преобразование. Лагранжиан задачи n тел не допускает группу гомотетий. Мы, однако, воспользуемся тождеством (3) при $\alpha = 1$. Поскольку при замене (4) $T \to \alpha^2 T$, $V \to \alpha^{-1} V$, то равенство (3) дает уже известное нам тождество Лагранжа:

$$\left.\frac{dL}{d\alpha}\right|_{\alpha=1} = (p \cdot v)^{\cdot} \Leftrightarrow 2T - V = \Sigma m (x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z})^{\cdot} = \frac{\ddot{I}}{2},$$

$$I = \Sigma m (x^2 + y^2 + z^2).$$

1.2. Симметрии в неголономной механике. Предположим, что на неголономную систему (M, S, L) действуют дополнительные непотенциальные силы $F(\dot{x}, x) : T_x M \to T_x{}^* M$. Движения определяются принципом Даламбера—Лагранжа: $([L] - F) \cdot \xi = 0$ для всех возможных скоростей ξ.

Определения. Группа Ли G называется группой симметрий неголономной системы (M, S, L), если

1) G сохраняет L,

2) векторные поля v_X, $X \in \mathscr{G}$, являются полями возможных скоростей.

Моментом силы F относительно группы G назовем отображение $\Phi_G : TM \to \mathscr{G}^*$, определенное формулой $\Phi_G(\dot{x}) = F \cdot v_X$.

Теорема 6. Если (M, S, L) допускает группу симметрий G, то $(I_G)^{\cdot} = \Phi_G$.

Следствие. Если $F = 0$, то в предположениях теоремы 6 момент I_G сохраняется.

Теорема 6 выводится из принципа Даламбера—Лагранжа с помощью тождества (3).

Применим эти общие соображения к динамике систем материальных точек в трехмерном ориентированном евклидовом пространстве. Будем предполагать, что на точку (r, m) действует сила F. Рассмотрим группу сдвигов вдоль подвижной прямой с направляющим вектором $e(t) : r \to r + \alpha e$, $\alpha \in R$.

Теорема 7. ([85]). Предположим, что выполнены следующие условия:

1) векторы $\xi_k = e$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ являются возможными скоростями,

2) $\langle P, \dot{e}\rangle = 0$, где $P = \Sigma m\dot{r}$ — суммарный импульс.

Тогда $\langle P, e\rangle^{\cdot} = \langle \Sigma F, e\rangle$.

Следствие. Предположим, что в каждый момент времени векторы $\xi_k = \eta = (\Sigma mr/\Sigma m)^{\cdot}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ являются возможными скоростями. Если система движется по инерции $(F \equiv 0)$, то скорость ее центра масс $\dot{\eta}$ неизменна по величине.

Пример 4. Рассмотрим скольжение уравновешенного конька по горизонтальной плоскости и качение однородного диска, плоскость которого все время вертикальна. По следствию теоремы 7, величины скоростей их центров масс постоянны. $\triangle$

Рассмотрим еще группу поворотов евклидова пространства вокруг подвижной прямой l с направляющим единичным вектором $e(t)$, проходящей через точку с радиус-вектором $r_0(t)$. Пусть K — кинетический момент системы материальных точек относительно неподвижного начала отсчета, а $K_l(M_l)$ — кинетический момент (момент сил) относительно подвижной оси l.

Теорема 8 ([85]). Предположим, что выполнены следующие условия:

1) векторы скорости материальных точек при вращении системы как твердого тела вокруг оси l в каждый момент времени являются возможными скоростями,

2) $\langle P, (\dot{r}_0 \times e)\rangle + \langle K, \dot{e}\rangle = 0$.

Тогда $\dot{K}_l = M_l$.

Если, в частности, ось l не меняет направления в пространстве ($e(t) = \mathrm{const}$), то условие (2) переходит в условие С. А. Чаплыгина (1897 г.): $\langle e, \dot{r}_0 \times \dot{\eta}\rangle = 0$, где $\dot{\eta}$ — скорость центра масс. В случае, когда $r_0 = \eta$, условие 2) можно упростить: $\langle K + r_0 \times P, \dot{e}\rangle = 0$. Оно заведомо выполнено при дополнительном предположении, что $e(t) = \mathrm{const}$. Например, уравновешенный конек вращается вокруг вертикали с постоянной угловой скоростью.

Пример 5. Рассмотрим *задачу Чаплыгина* о качении по горизонтальной плоскости динамически несимметричного шара, центр масс которого совпадает с его геометрическим центром. Пусть o — точка касания шара с плоскостью, K_0 — его кинетический момент относительно точки o. Задача Чаплыгина допускает группу поворотов $SO(3)$ вокруг точки касания. Момент $I_{SO(3)}$ равен, конечно K_0, а момент сил $\Phi_G = 0$. Следовательно, по теореме 6, $K_0 = \mathrm{const}$. Это замечание позволит нам составить замкнутую систему дифференциальных уравнений качения шара. Пусть k_0 — кинетический момент в подвижном пространстве, связанном с твердым телом, ω — угловая скорость вращения шара, γ — единичный вектор вертикали. Постоянство векторов k_0 и γ в неподвижном пространстве эквивалентно уравнениям

$$\dot{k}_0 + \omega \times k_0 = 0, \quad \dot{\gamma} + \omega \times \gamma = 0. \tag{5}$$

Пусть A — тензор инерции тела относительно центра масс, m — масса шара, a — его радиус. Тогда $k_0 = A\omega + ma^2\gamma \times \times(\omega\times\gamma)$. Это соотношение превращает уравнения (5) в замкнутую систему дифференциальных уравнений относительно ω и γ. Уравнения (5) имеют четыре независимых интеграла: $F_1 = \langle k_0, k_0\rangle$, $F_2 = \langle k_0, \gamma\rangle$, $F_3 = \langle\gamma, \gamma\rangle = 1$, $F_4 = \langle k_0, \omega\rangle$. Последний интеграл выражает постоянство кинетической энергии качения шара. С помощью этих интегралов уравнения (5) можно проинтегрировать в квадратурах (С. А. Чаплыгин, 1903 г.).

1.3. Симметрии в вакономной механике. Пусть (M, S, L) — вакономная система и G — группа Ли, действующая на M.

Определения. Группа G называется группой симметрий вакономной системы (M, S, L), если

1) группа G переводит $S\subset TM$ в S,

2) G сохраняет ограничение L на S.

Кинетическим моментом I_G вакономной системы относительно группы G назовем отображение $T^*M\to\mathcal{G}^*$, заданное формулой: $p\to p\cdot v_X$, $X\in\mathcal{G}$, здесь p — вакономный импульс.

Пример 6. Предположим, что система (M, S, L) натуральная, и кинетическая энергия определяется римановой метрикой $\langle\ ,\ \rangle$. Если связь S задана уравнением $\langle a(x), \dot{x}\rangle = 0$, то

$$I = \langle v, \dot{x}\rangle + \langle p, a\rangle (a\cdot v)/\langle a, a\rangle. \ \Delta$$

Теорема 9. Если вакономная система (M, S, L) допускает группу симметрий G, то $I_G = \mathrm{const}$.

Функция I_G в общем случае не наблюдаема. Если, однако, поля симметрий v_X, $X\in\mathcal{G}$ являются полями возможных скоростей, то I_G равна $L_{\dot{x}}\cdot v_X$ и поэтому наблюдаема.

Пример 7. Конек на горизонтальной плоскости, рассматриваемый как вакономная система, допускает группу трансляций, но не допускает группу поворотов вокруг вертикальной оси. Следовательно, вакономный импульс конька сохраняется. Эта величина, однако, не наблюдаема. Вакономный момент относительно группы поворотов конька совпадает с обычным кинетическим моментом, который не является первым интегралом уравнений движения. Δ

1.4. Симметрии в гамильтоновой механике. Пусть (M, ω^2) — симплектическое многообразие и группа g^s действует на M как группа симплектических диффеоморфизмов. С группой g связано векторное поле

$$v = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} g^s.$$

Это поле локально гамильтоново: 1 — форма $\omega^2(\cdot, v)$ замкнута. Поэтому локально $\omega^2(\cdot, v) = dF$. Продолжение функции F на многообразие M в целом приводит, как правило, к многозначной функции Гамильтона. Если, однако, симплектическая структура ω^2 точна, то поле v имеет однозначный гамильтониан. Действительно, если $\omega^2 = d\omega^1$, то $F = \omega^1(v)$.

Пример 8. Пусть N — гладкое многообразие и g^s — группа его диффеоморфизмов, порожденная векторным полем u. Поскольку каждый диффеоморфизм N переводит 1-формы в 1-формы, то группа g^s действует и на пространстве кокасательного расслоения $M = T^*N$. Напомним, что M имеет стандартную симплектическую структуру $\omega^2 = dp \wedge dq = d(p \cdot dq)$, где p, q — «канонические» координаты на M. Поскольку группа g^s сохраняет 1-форму $p \cdot dq$, то она сохраняет 2-форму ω^2 и, стало быть, является группой симплектических диффеоморфизмов M. Действие g^s на M порождается однозначной функцией Гамильтона $F = p \cdot u$. $\triangle$

Теорема 10. Группа симплектических диффеоморфизмов g^s с однозначной функцией Гамильтона F сохраняет функцию $H: M \to R$ тогда и только тогда, когда F — первый интеграл гамильтоновой системы с функцией Гамильтона H.

$\triangleleft$ Доказательство основано на применении следующей формулы:

$$\frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} H(g^s(x)) = \{H, F\}(x). \quad \triangleright$$

Теперь мы предположим, что на M задано симплектическое действие группы Ли G такое, что каждому элементу X из ее алгебры $\mathcal{G}$ соответствует однопараметрическая подгруппа с однозначной функцией Гамильтона. Эти гамильтонианы определены с точностью до постоянных слагаемых.

Определение. *Симплектическое действие G на M называется пуассоновским*, если соответствие $X \mapsto F_X$ можно подобрать так, что

1) F_X линейно зависит от X,

2) $\{F_X, F_Y\} = F_{[X, Y]}$ $\forall X, Y \in \mathcal{G}$.

Пример 9. Пусть N — гладкое многообразие и G — группа Ли, действующая на N. Продолжим действие G на N до симплектического действия G на T^*N как указано в примере 8. Построенное действие пуассоновское. Это вытекает из линейности функции $p \cdot v_X$ и следующей формулы: $\{p \cdot v_X, p \cdot v_Y\} =$

$$= p \cdot [v_X, v_Y] = p \cdot v_{[X, Y]}. \quad \triangle$$

Пуассоновское действие группы G на M определяет естественное отображение $P_G: M \to \mathcal{G}^*$, которое сопоставляет точке x линейную функцию $F_.(x)$ на алгебре $\mathcal{G}$. Это отображение назовем *моментом пуассоновского действия* группы G.

Предложение 1. Пуассоновское действие связной группы Ли G при отображении момента P переходит в коприсоединенное действие группы G на $\mathcal{G}^*$, то есть коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{g} & M \\ {\scriptstyle P}\downarrow & \mathrm{Ad}^*_{g^{-1}} & \downarrow{\scriptstyle P} \\ \mathcal{G}^* & \longrightarrow & \mathcal{G}^* \end{array}.$$

Пусть (N, L) — лагранжева система и группа Ли G действует на N. Лагранжиан L определяет преобразование Лежандра $TN \to T^*N$. Композиция момеита $P_G : T^*N \to \mathcal{G}^*$ продолженного пуассоновского действия G на симплектическом многообразии T^*N и преобразования Лежандра совпадает с определенным выше моментом $I_G : TN \to \mathcal{G}^*$ лагранжевой системы (N, L) относительно группы G.

Если функция $H : M \to R$ инвариантна относительно пуассоновского действия группы G, то, по теореме 10, момент P_G является первым интегралом системы с функцией Гамильтона H.

В заключение обсудим симметрии в обобщенной гамильтоновой механике Дирака. Пусть (M, ω^2, H, N) — гамильтонова система со связями, $H : M \to R$ — функция Гамильтона, N — подмногообразие в M (см. п. 5.1 гл. 1).

Теорема 11. Пусть задано пуассоновское действие группы Ли G на симплектическом многообразии (M, ω^2) такое, что G сохраняет функцию H и подмногообразие N. Тогда момент P_G принимает постоянное значение на движениях гамильтоновой системы со связями.

§ 2. Приведение систем с симметриями

2.1. Понижение порядка (лагранжев аспект). Если лагранжева система (M, L) допускает группу симметрий g^α, то оказывается возможным уменьшение числа ее степеней свободы. Группе g соответствует первый интеграл I_g, который локально всегда является циклическим. Сначала мы рассмотрим классический *метод Рауса* (E. J. Routh) *исключения циклических координат*, а затем обсудим понижение порядка в целом.

Предположим, что лагранжиан $L(\dot{q}, \dot{\lambda}, q)$ не содержит координаты λ. С помощью равенства $L'_{\dot{\lambda}} = c$ представим циклическую скорость $\dot{\lambda}$ как функцию q, $\dot{q}$ и c. Следуя Раусу, введем функцию

$$R_c(\dot{q}, q) = L(\dot{q}, \dot{\lambda}, q) - c\dot{\lambda}\,|_{\dot{q}, q, c}.$$

Теорема 12. Функция $(q(t), \lambda(t))$ — движение лагранжевой системы (M, L) с постоянной циклического интеграла $I_g = c$ тогда и только тогда, когда $q(t)$ удовлетворяет уравнению Лагранжа $[R_c] = 0$.

Если имеется несколько циклических координат $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, то в качестве *функции Рауса* надо взять функцию $R_{c_1 \ldots c_k} = L - \Sigma c_s \lambda_s$.

Малая окрестность U неособой точки поля симметрий v

«регулярно» расслоена орбитами группы g (интегральными кривыми поля v): факторпространство $N=U/g$ является гладким многообразием с декартовыми координатами q. Пару (N, R_c) естественно назвать (локально) *приведенной лагранжевой системой*. Примером понижения порядка по Раусу служит, например, исключение полярного угла в задаче Кеплера (см. гл. 2, п. 1.1).

Циклические координаты определены неоднозначно: среди новых переменных $Q=q$, $\Lambda=\lambda+f(q)$ координата Λ тоже циклическая. Пусть $\hat{L}(\dot{Q}, \dot{\Lambda}, Q)=L(\dot{q}, \dot{\lambda}, q)$. Тогда, очевидно, $\hat{L}'_{\dot{\Lambda}}=$ $=L'_{\dot{\lambda}}=c$. Функция Рауса, отвечающая новой циклической координате Λ, равна $\hat{R}_c(\dot{Q}, Q)=R_c(\dot{q}, q)+cf'_q\cdot\dot{q}$. Слагаемое $c(f'_q\cdot\dot{q})$, ввиду тождества $[\dot{f}]\equiv 0$, не влияет, конечно, на вид уравнения $[R_c]=0$. Однако при $c\neq 0$ функция Рауса тем самым определена неоднозначно. Эти наблюдения оказываются полезными при анализе понижения порядка в целом, к которому мы сейчас переходим. Для определенности будет рассмотрен случай натуральных лагранжевых систем.

Пусть $(M, N, \mathrm{pr}, S, G)$ — расслоение с пространством расслоения M, базой N, проекцией $\mathrm{pr}: M\to N$ (ранг дифференциала pr_* во всех точках M равен $\dim N$), слоем S и структурной группой G. Группа G свободно и транзитивно действует слева на слое S. Это действие можно продолжить до левого действия G на M; при этом все орбиты G будут диффеоморфны S. В случае главного расслоения многообразие S диффеоморфно пространству группы G. Базу N можно рассматривать как факторпространство многообразия M по отношению эквивалентности, заданному действием группы G. Векторы v_X, $X\in\mathcal{G}$, касательные к орбитам группы G, вертикальны: $\mathrm{pr}_*(v_X)=0$.

Предположим, что G — группа симметрий натуральной механической системы $(M, \langle\ ,\ \rangle, V)$. Введем в расслоении $(M, N, \mathrm{pr}, S, G)$ «каноническую» связность, объявив горизонтальными касательные векторы на M, ортогональные в метрике $\langle\ ,\ \rangle$ всем векторам v_X, $X\in\mathcal{G}$. Эта связность согласована со структурной группой G: распределение горизонтальных векторов переходит в себя при действии G на M. Гладкий путь $\gamma: [t_1, t_2]\to M$ называется *горизонтальным*, если касательные векторы $\dot{\gamma}(t)$ горизонтальны при всех $t_1\leqslant t\leqslant t_2$. Нетрудно проверить, что для любого гладкого пути $\tilde{\gamma}: [t_1, t_2]\to N$ и любой точки $x_1\in M$, лежащей над $\tilde{\gamma}(t_1)$ (т. е. $\mathrm{pr}(x_1)=\gamma(t_1)$), найдется лишь один горизонтальный путь $\gamma: [t_1, t_2]\to M$, накрывающий $\tilde{\gamma}$.

Снабдим многообразие $N=M/G$ «факторметрикой» $\langle\ \tilde{}\ ,\ \rangle$, опустив на N исходную метрику на M, ограничив ее предварительно на распределение горизонтальных векторов. Поскольку потенциал $V: M\to R$ постоянен на орбитах группы G, то существует единственная гладкая функция $\tilde{V}: N\to R$ такая, что коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\mathrm{pr}} & N \\ & V\searrow \swarrow \tilde{V} & \\ & R & \end{array}.$$

Теорема 13. Движения натуральной системы $(M, <, >, V)$ с нулевым значением момента I_G однозначно проектируются в движения *приведенной системы* $(N, \tilde{<, >}, \tilde{V})$.

$\triangleleft$ Пусть $\tilde{\gamma}:[t_1, t_2]\to N$ — движение приведенной системы и $\tilde{\gamma}_\alpha$ — его вариация с закрепленными концами. Пусть $\gamma_\alpha:[t_1, t_2]\to \to M$ — горизонтальный подъем пути $\tilde{\gamma}_\alpha$, причем $\gamma_\alpha(t_1)=\gamma_0(t_1)$ для всех α. Поле вариаций u семейства путей γ_α таково, что $u(t_1)=0$, а $u(t_2)$ — вертикальный вектор. Если $L(\tilde{L})$ — лагранжиан исходной (приведенной) системы, то, согласно формуле первой вариации,

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\tilde{L}dt=\delta\int_{t_1}^{t_2}Ldt=\langle \dot{\gamma}_0, u\rangle\big|_{t_1}^{t_2}=0. \quad \triangleright$$

Пример 10. Рассмотрим движение материальной точки m в центральном силовом поле. В этой задаче имеем расслоение $(R^3\setminus\{0\}, R^+, \mathrm{pr}, S^2, SO(3))$; проекция $\mathrm{pr}\colon R^3\setminus\{0\}\to R^+$ определяется формулой: $(x, y, z)\mapsto\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Лагранжиан $L=m|\dot{r}|^2/2+V(|r|)$ допускает группу поворотов $SO(3)$ вокруг точки $x=y=z=0$. Если кинетический момент $I_{SO(3)}=0$, то на $R^+=\{s>0\}$ появляется одномерная приведенная система с лагранжианом $\tilde{L}=m\dot{s}^2/2+V(s)$. $\triangle$

Рассмотрим теперь понижение порядка, когда момент $I_G\neq \neq 0$. Мы будем предполагать группу G коммутативной (только в этом случае применим метод Рауса). Более того, будем считать, что расслоение (M, N, pr, G) — главное; в частности, группа G действует на M свободно. Кроме факторметрики $\langle \tilde{,}\rangle$ на базе нам потребуется еще форма кривизны канонической связности. Напомним ее построение. Сначала вводится 1-форма связности ω на M со значениями в алгебре Ли $\mathcal{G}$, определенная следующим образом: если $u\in TM$, то $\omega(u)$ равно такому $X\in\mathcal{G}$, что v_X совпадает с вертикальной составляющей вектора u. В случае главного расслоения ядро гомоморфизма алгебры Ли $\mathcal{G}$ в алгебру векторных полей на M нулевое; поэтому форма связности определена корректно. Если, например, $\dim G=1$, то можно положить $\omega(u)=\langle u, v\rangle/\langle v, v\rangle$, где v — поле симметрий. *Формой кривизны* Ω называется $\mathcal{G}$-значная 2-форма такая, что $\Omega(u_1, u_2)=d\omega(u_1^\perp, u_2^\perp)$, где $u^\perp$ — горизонтальная составляющая касательного вектора u. Поскольку G — коммутативная группа симметрий, то форму Ω можно опустить на N. Пусть $I_G=c\in\mathcal{G}^*$. Так как Ω принимает значения в $\mathcal{G}$, то корректно определено значение момента на форме кривизны: $\Omega_c = c \cdot \Omega$. Форма Ω_c является R-значной формой на базе N. Согласно *структурному уравнению Картана* $\Omega = d\omega + [\omega, \omega]$, формы Ω и Ω_c замкнуты.

Лемма 2. Пусть $c \in \mathcal{G}^*$. Тогда для любой точки $x \in M$ найдется единственный вертикальный касательный вектор $w_c \in T_x M$ такой, что $I_G(w_c) = c$.

◁ Действительно, w_c — единственный элемент из множества $\{w \in T_x M : I_G(w) = c\}$, имеющий минимум длины в $\langle\ ,\ \rangle$-метрике. Это утверждение справедливо для произвольной группы G. ▷

Определение. *Приведенной силовой функцией* натуральной системы с группой симметрий G, отвечающей постоянной момента $I_G = c$, называется функция $V_c : M \to R$, равная $V - \langle w_c, w_c \rangle / 2$.

Лемма 3. Функция V_c инвариантна относительно G_c, где $G_c \subset G$ — стационарная подгруппа элемента $c \in \mathcal{G}^*$ коприсоединенного действия G на $\mathcal{G}^*$ (см. предложение 1).

Следствие. Если G коммутативна, то V_c постоянна на орбитах группы G.

Это утверждение позволяет корректно определить приведенный потенциал $\tilde{U}_c = -\tilde{V}_c$ как функцию на базе N.

Теорема 14. Функция $\gamma : \Delta \to M$ является движением натуральной системы $(M, \langle\ ,\ \rangle, V)$ с постоянной момента $I_G = c$ тогда и только тогда, когда проекция $\mu = \mathrm{pr} \circ \gamma : \Delta \to N$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$[L_c]_\mu = F_c(\dot{\mu}), \tag{6}$$

где $L_c = \widetilde{\langle \dot{\mu}, \dot{\mu} \rangle} / 2 + \tilde{V}_c$, $F_c(v) = \Omega_c(\cdot, v)$.

Теорему 14 можно вывести, например, из теоремы 9.

Уравнение (6) можно рассматривать как уравнение движения натуральной системы $(N, \langle\ ,\ \tilde{}\ \rangle, \tilde{V}_c)$ под действием дополнительных непотенциальных сил F_c. Так как $F_c(v) \cdot v = \Omega_c(v, v) = 0$, то эти силы не производят работы на действительном движении. Они называются *гироскопическими*.

Поскольку форма Ω_c замкнута, то локально $\Omega_c = d\omega_c$. Следовательно, уравнение (6) является уравнением Лагранжа $[R_c] = 0$, где $R_c = L_c - \omega_c$. Функция Рауса R_c определена в целом на TN только тогда, когда форма Ω_c точна.

Пример 11. Рассмотрим вращение твердого тела с неподвижной точкой в осесимметричном силовом поле. Кинетическая энергия и потенциал допускают группу поворотов $SO(2)$ вокруг оси симметрии поля. В этой задаче M диффеоморфно базисному пространству группы $SO(3)$. Факторизация $SO(3)/SO(2)$ была впервые проведена Пуассоном (S. D. Poisson) следующим образом. Пусть e — единичный вектор оси симметрии силового поля, рассматриваемый как вектор подвижного пространства. Действие подгруппы $SO(2)$ на $SO(3)$ правыми сдвигами сохраняет e. Множество всех положений вектора e в подвижном пространстве образует двумерную сферу S^2 — «сферу Пуассона». Точки S^2 «нумеруют» орбиты группы поворотов $SO(2)$. Таким образом, мы имеем расслоенное пространство $SO(3)$ со структурной группой $SO(2)$ и базой S^2. Группа симметрий $SO(2)$ порождает первый интеграл — сохраняется проекция кинетического момента твердого тела на ось с направляющим вектором e. Фиксируя его постоянную, можно свести задачу к исследованию приведенной системы с пространством положений S^2. При этом функция Рауса не определена в целом, поскольку форма кривизны Ω не точна: при всех значениях главных моментов инерции

$$\int_{S^2} \Omega = 4\pi \neq 0.$$

Явные формулы понижения порядка будут указаны ниже. △

Теория понижения порядка лагранжевых систем с очевидными изменениями переносится на неголономную механику. Для того, чтобы осуществить факторизацию по группе симметрий неголономной системы, нужно дополнительное предположение об инвариантности связей относительно действия этой группы. Примером может служить задача Чаплыгина о качении шара по горизонтальной плоскости (см. пример 5). Эта задача допускает группу поворотов $SO(2)$ шара относительно вертикальной прямой, проходящей через его центр. Группа $SO(2)$ сохраняет связи и порождающее ее поле является полем возможных скоростей. Исключение группы поворотов фактически проведено нами в примере 5 методом Пуассона.

В заключение отметим еще «проблему *скрытых движений*» или «проблему *дальнодействия*», волновавшую физиков в конце 19-го века. Предположим, что натуральная механическая система с $n+1$ степенями свободы движется по инерции и ее лагранжиан, представляющий только кинетическую энергию, допускает группу симметрий с полем v. Понижая порядок системы, мы видим, что функция Рауса, являющаяся лагранжианом приведенной системы с n степенями свободы, содержит слагаемое — приведенный потенциал — $\tilde{U}_c = \langle w_c, w_c \rangle /2 = c^2/2\langle v, v \rangle$, не зависящее от скоростей. Это слагаемое можно интерпретировать как потенциал сил, действующих на приведенную систему. Гельмгольц, Дж. Томсон (J. J. Thomson), Герц настаивали на том, что все механические величины, проявляющиеся как «потенциальные энергии», обусловлены скрытыми «циклическими» движениями. Характерным примером является вращение симметричного волчка: поскольку вращение волчка вокруг оси симметрии заметить невозможно, то можно считать волчок невращающимся и странности в его поведении объяснить действием дополнительных потенциальных сил.

Так как $U_c = \langle w_c, w_c \rangle / 2 > 0$, то методом Рауса можно получить только положительные потенциалы. Однако, поскольку потенциал определяется с точностью до аддитивной постоянной, то это ограничение несущественно для случая компактного пространства положений.

Теорема 15. Пусть $(M, \langle\ ,\ \rangle, V, \Omega)$ — механическая система с замкнутой формой гироскопических сил Ω. Если M компактно, то существует главное расслоение с базой M и со структурной группой симметрии T^k, $k \leqslant \operatorname{rang} H^2(M, R)$ такое, что после понижения по Раусу при некоторой постоянной момента $J_{T^k} = c$ выполнены равенства $V_c = V + \mathrm{const}$, $\Omega_c = \Omega$.

Это утверждение нам сообщил С. В. Болотин (см. [56]).

Если $\Omega = 0$, то в качестве расслоенного пространства можно взять прямое произведение $M \times S^1 \{\varphi \bmod 2\pi\}$ с метрикой $\langle \dot{x}, \dot{x} \rangle + \dot{\varphi}^2 / U(x)$, где $\langle\ ,\ \rangle$ — риманова метрика на M. Координата φ — циклическая; ей соответствует циклический интеграл $\dot{\varphi} / U = c$. Функция Рауса $R_c = \langle \dot{x}, \dot{x} \rangle / 2 - c^2 U / 2$. При $c = \sqrt{2}$ будем иметь натуральную систему на $M \times S^1 / S^1 \simeq M$ с потенциалом U.

2.2. Понижение порядка (гамильтонов аспект). Пусть $F: M \to R$ — первый интеграл гамильтоновой системы с гамильтонианом H.

Предложение 2. Если $dF(z) \neq 0$, то в некоторой окрестности точки $z \in M$ существуют симплектические координаты $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ такие, что $F(x, y) = y_1$.

Это утверждение — гамильтонов вариант торемы о выпрямлении траекторий.

В координатах x, y функция H не зависит от x_1. Таким образом, если мы зафиксируем значение $F = y_1 = c$, то система уравнений

$$\dot{x}_k = H'_{y_k}, \quad \dot{y}_k = -H'_{x_k} \quad (k \geqslant 2)$$

будет гамильтоновой системой с $n-1$ степенями свободы. Итак, один интеграл позволяет нам понизить размерность *фазового пространства* на две единицы: одна единица пропадает при фиксировании значения $F = c$, а вторая — за счет исключения циклической переменной x_1 вдоль орбиты действия группы симметрий g_F^α. Это замечание можно обобщить: если гамильтонова система имеет s независимых интегралов в инволюции, то ее можно привести к системе с $n-s$ степенями свободы. Отметим, что эффективное использование первого интеграла F для понижения порядка упирается в задачу отыскания орбит группы g_F^α, связанную с интегрированием гамильтоновой системы с гамильтонианом F.

Если алгебра интегралов некоммутативна, то размерность гамильтоновой системы понижается по крайней мере на удвоенную максимальную размерность ее коммутативной подалгебры. Количество коммутирующих интегралов иногда можно увеличить, рассматривая нелинейные функции первых интегралов.

Пример 12. Задача о движении точки в центральном поле имеет алгебру первых интегралов, изоморфную алгебре Ли $so(3)$. Все ее коммутативные подалгебры одномерны. Пусть M_i — проекции кинетического момента точки на i-ую ось декартовой ортогональной системы координат. Легко проверить, что функции M_1 и $M^2 = \Sigma M_i^2$ независимы и коммутируют. Так что эта задача сводится к исследованию гамильтоновой системы с одной степенью свободы. $\triangle$

Этот метод понижения порядка гамильтоновых систем принадлежит Пуанкаре, который применял его в различных задачах небесной механики. По существу — это гамильтонов вариант понижения порядка по Раусу. Если алгебра интегралов некоммутативна, то метод Пуанкаре использует известные интегралы не полностью. Этот недостаток метода Пуанкаре устранил Картан (E. Cartan), изучивший общий случай бесконечномерной алгебры Ли первых интегралов (см. [23]). Более точно, Картан рассматривает гамильтонову систему (M, ω^2, H) с первыми интегралами $F_1, \ldots, F_k$ такими, что $\{F_i, F_j\} = a_{ij}(F_1, \ldots, F_k)$. Набор интегралов $F_1, \ldots, F_k$ задает естественное отображение $F: M \to R^k$. В общем случае функции $a_{ij}: R^k \to R$ нелинейны.

Теорема 16 (Ли (S. Lie) — Картан (E. Cartan)). Предположим, что точка $c \in R^k$ не является критическим значением отображения F и в ее окрестности ранг матрицы $\|a_{ij}\|$ постоянен. Тогда в малой окрестности $U \subset R^k$ точки c найдутся k независимых функций $\varphi_s: U \to R$ таких, что функции $\Phi_s = \varphi_s \circ F$: $N \to R$, $N = F^{-1}(U)$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\{\Phi_1, \Phi_2\} = \ldots = \{\Phi_{2q-1}, \Phi_{2q}\} = 1, \tag{7}$$

все остальные скобки $\{\Phi_i, \Phi_j\} = 0$. Число $2q$ равно рангу матрицы $\|a_{ij}\|$.

Доказательство можно найти в работе [23]. С помощью этой теоремы теперь нетрудно осуществить понижение порядка. Пусть точка $c = (c_1, \ldots, c_k)$ удовлетворяет условиям теоремы 16. Тогда, в частности, множество уровня $M_c = \{x \in M$: $\Phi_s(x) = c_s,\ 1 \leqslant s \leqslant k\}$ является гладким подмногообразием в M, размерность которого равна $2n-k$, где $2n = \dim M$. Поскольку функции $\Phi_{2q+1}, \ldots, \Phi_k$ коммутируют со всеми функциями Φ_s, $1 \leqslant s \leqslant k$, то их гамильтоновы поля касаются многообразия M_c и, следовательно, определено действие коммутативной группы R^l, $l = k-2q$ на M_c, порожденное фазовыми потоками уравнений Гамильтона с гамильтонианами Φ_s, $s > 2q$. В силу функциональной независимости Φ_s, группа R^l действует на M_c без неподвижных точек. Если ее орбиты компактны (тогда они являются l-мерными торами), то факторпространство $M_c/R^l = \widetilde{M}_c$ является

14-1

гладким многообразием. Оно называется *приведенным фазовым пространством.* Поскольку $\dim \tilde{M}_c = (2n-k)-l = 2(n-k+q)$, то многообразие $\tilde{M}_c$ всегда четномерно.

На приведенном фазовом пространстве существует естественная симплектическая структура ω^2, которую можно задать, например, с помощью невырожденной скобки Пуассона $\widetilde{\{,\}}$. Пусть $A, B: \tilde{M}_c \to R$ — гладкие функции. Их можно поднять до гладких функций $'A$, $'B$, заданных на уровне $M_c \subset M$. Пусть $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ — произвольные гладкие функции на M, ограничение которых на M_c совпадает с $'A$, $'B$. Положим, наконец, $\widetilde{\{A, B\}} = \{\tilde{A}, \tilde{B}\}$.

Лемма 4. Скобка $\widetilde{\{,\}}$ корректно определена (не зависит от способа продолжения гладких функций с подмногообразия $\tilde{M}_c$ на все M) и является скобкой Пуассона на $\tilde{M}_c$.

Пусть $'H$ — ограничение функции Гамильтона H на интегральный уровень M_c. Поскольку функция $'H$ постоянна на орбитах группы R^l, то существует гладкая функция $\tilde{H}: M_c/R^l \to R$ такая, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} M_c & \xrightarrow{\mathrm{pr}} & \tilde{M}_c \\ & {\scriptstyle H}\searrow \; R \; \swarrow{\scriptstyle \tilde{H}} & \end{array}$$

коммутативна.

Определение. Гамильтонова система $(\tilde{M}_c, \tilde{\omega}^2, \tilde{H})$ называется *приведенной.*

Теорема 17. Гладкое отображение $\gamma: \Delta \to M$, $F(\gamma(t)) = c$ является движением гамильтоновой системы (M, ω^2, H) тогда и только тогда, когда композиция $\mathrm{pr} \circ \gamma$: $\Delta \to \tilde{M}_c$ есть движение приведенной гамильтоновой системы $(\tilde{M}_c, \tilde{\omega}^2, \tilde{H})$.

$\triangleleft$ Справедливость этой теоремы может быть установлена с помощью следующих соображений. Формулы (7) показывают, что функции $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$ составляют часть симплектических координат в окрестности подмногообразия M_c. Точнее, в малой окрестности любой точки из M_c можно ввести симплектические координаты $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ так, что $x_i = \Phi_{2i-1}$, $y_i = \Phi_{2i}$, если $i \leqslant q$ и $y_i = \Phi_i$, если $i > 2q$. Это утверждение — следствие известной «леммы о пополнении», принадлежащей Каратеодори (см. [6]). Так как функции Φ_s — первые интегралы, то в переменных x, y гамильтониан имеет следующий вид: $H(y, x) = H(y_{q+1}, \ldots, y_n, x_{k-q+1}, \ldots, x_n)$. Нам осталось зафиксировать значения циклических интегралов $y_{q+1}, \ldots, y_{k-q}$ и отметить, что переменные x_s, y_s $(s > k-q)$ являются локальными координатами на $\tilde{M}_s$, в которых форма $\tilde{\omega}^2$ принимает «канонический» вид $\sum\limits_{s>k-q} dx_s \wedge dy_s$. ▷

Замечание. Поскольку $k-q$ первых интегралов $\Phi_2, \ldots, \Phi_{2q}, \Phi_{2q+1}, \ldots, \Phi_k$ коммутируют, то их можно использовать для понижения порядка гамильтоновой системы по Пуанкаре. Размерность локального пространства состояний приведенной системы будет равна $2n-2(k-q)$, то есть размерности $\tilde{M}_c$. Более того, в силу теоремы 16, понижение порядка по Пуанкаре и Картану локально дает один и тот же результат, однако факторизация по методу Пуанкаре может быть проведена в целом лишь при более ограничительных условиях. △

В вырожденных случаях ранг матрицы скобок Пуассона $\|\{F_i, F_j\}\|$ может, конечно, падать. Понижение порядка по схеме Картана (E. Cartan) можно осуществить и в этой ситуации, если дополнительно предположить, что интегралы $F_1, \ldots, F_k$ порождают конечномерную алгебру (функции $a_{ij}: R^k \to R$ линейны). Действительно, пусть задано пуассоновское действие группы G на симплектическом многообразии (M, ω^2). Рассмотрим множество $M_c = P^{-1}(c)$, являющееся прообразом некоторой точки $c \in \mathcal{G}^*$ при отображении момента $P: M \to \mathcal{G}^*$. Если c — некритическое значение момента P, то M_c — гладкое подмногообразие в M. Поскольку действие группы G пуассоновское, то, согласно предложению 1, элементы G переводят интегральные уровни M_c друг в друга. Пусть G_c — стационарная подгруппа точки $c \in \mathcal{G}^*$: она состоит из тех $g \in G$, для которых $Ad_g^* c = c$. Группа G_c является группой Ли и она действует на M_c. Если орбиты G_c на M_c компактны, то приведенное фазовое пространство $\tilde{M}_c = M_c / G_c$ является гладким многообразием. После этого можно определить приведенную гамильтонову систему $(\tilde{M}_c, \tilde{\omega}^2, \tilde{H})$, дословно повторив конструкцию понижения порядка по Картану. Связь исходной и приведенной гамильтоновых систем снова описывается теоремой 17. Необходимые доказательства можно найти в работах Сурио (J.-M. Souriau) [194] и Марсдена (J. Marsden), Вейнстейна (A. Weinstein) [168].

Пример 13. Движение материальной точки единичной массы в центральном поле может быть описано гамильтоновой системой в $R^6 = R^3\{x\} \times R^3\{y\}$ со стандартной симплектической структурой и функцией Гамильтона $H(y, x) = |y|^2/2 + U(|x|)$. Зафиксируем постоянный вектор кинетического момента $x \times y = \mu$ $(\mu \neq 0)$. Можно считать, что $\mu = ce_3$, где $e_3 = (0, 0, 1)$, $c > 0$. Множество уровня M_c задается уравнениями $x_3 = y_3 = 0$, $x_1 y_2 - x_2 y_1 = c$. Ясно, что вектор μ инвариантен относительно группы поворотов $SO(2)$ вокруг оси с единичным вектором e_3. Для того, чтобы провести факторизацию по этой группе, введем в плоскости $R^2 = \{x_1, x_2\}$ полярные координаты r, φ и сопряженные им канонические переменные p_r, p_φ:

$$x_1 = r\cos\varphi, \quad y_1 = p_r\cos\varphi - \frac{p_\varphi}{r}\sin\varphi,$$

$$x_2 = r\sin\varphi, \quad y_2 = p_r\sin\varphi + \frac{p_\varphi}{r}\cos\varphi.$$

Очевидно, что в новых переменных множество M_c задается уравнениями $x_3 = y_3 = 0$, $p_\varphi = c$. Факторизация по группе $SO(2)$ сводится к исключению угловой переменной φ. Таким образом, приведенное фазовое пространство $\tilde{M}_c = M_c/SO(2)$ диффеоморфно $R^+\{r\}\times R\{p_r\}$; оно снабжено приведенной симплектической структурой $\tilde{\omega}^2 = dp_r\wedge dr$. Приведенный гамильтониан имеет вид $\tilde{H} = (p_r^2 + c^2r^{-2})/2 + U(r)$. $\triangle$

Если элемент $c\in\mathcal{G}^*$ находится в общем положении (ранг матрицы $\|a_{ij}\|$ максимален[1]), то группа G_c коммутативна; понижение порядка, проведенное по этой схеме, дает тот же результат, что и понижение по Картану (E. Cartan). Если $c=0$, то ранг матрицы $\|a_{ij}\|$ падает до нуля и интегральное многообразие M_0 устроено наиболее «симметрично»: стационарная подгруппа G_0 совпадает со всей группой G. В этом случае происходит максимально возможное понижение порядка гамильтоновой системы на $2k = 2\dim G$ единиц (ср. с теоремой 13).

Пусть $(N, \langle , \rangle, V)$ — натуральная механическая система и пусть G — компактная коммутативная группа симметрий (изоморфная T^k), свободно действующая на пространстве положений N. Мы можем рассматривать эту систему как гамильтонову систему с симметриями на $M = T^*N$ и применить известную нам схему понижения порядка. Группа G осуществляет пуассоновское действие на T^*N; поскольку это действие свободное, то любое значение момента $c\in\mathcal{G}^*$ является некритическим. Стало быть, определено гладкое интегральное многообразие уровня M_c (коразмерности $k = \dim G$ в M) и приведенное пространство состояний $\tilde{M}_c$ (размерность которого на $2k$ меньше размерности M). С другой стороны, можно определить гладкое приведенное пространство положений $\tilde{N}$, профакторизовав N по орбитам действия G. Более того, при том же самом значении $c\in\mathcal{G}^*$ мы имеем «полунатуральную» приведенную лагранжеву систему $(\tilde{N}, \tilde{\langle , \rangle}, \tilde{V}_c, \Omega_c)$ (см. п. 1.1, теорема 18). *Приведенным лагранжианом* $\tilde{L}$: $T\tilde{N}\to R$ естественно назвать функцию, определенную равенством $\tilde{L}(\dot{x}) = \widetilde{\langle \dot{x}, \dot{x}\rangle}/2 + \tilde{V}_c(x)$.

Теорема 18. При всех $c\in\mathcal{G}^*$ существует диффеоморфизм $f: \tilde{M}_c \to T^*\tilde{N}$ такой, что

[1] В случае пуассоновской алгебры интегралов может быть следует лучше говорить о ранге билинейной формы $\{F_X, F_Y\}$, $X, Y\in\mathcal{G}$

1) $f^*\tilde{\omega}^2=\Omega+\Omega_c$, где Ω—стандартная симплектическая структура на T^*N,

2) функция $f\circ\tilde{H}:T^*\tilde{N}\to R$ является преобразованием Лежандра приведенного лагранжиана, задаваемым метрикой $\widetilde{\langle\ ,\ \rangle}$.

Следствие. Многообразие $\tilde{M}_0$ симплектически диффеоморфно T^*N.

Если группа G некоммутативна, то приведенное фазовое пространство $\tilde{M}_c$ в общем случае не совпадает с кокасательным расслоением никакого гладкого многообразия.

Пусть коммутативная группа G свободно и пуассоновски действует на симплектическом многообразии (M, ω^2). В этом случае переход к приведенному многообразию $(\tilde{M}_c, \tilde{\omega}^2)$ можно осуществить еще следующим способом. Рассмотрим фактормногообразие $N=M/G$ и на нем скобку $'\{\ ,\ \}$, которая является исходной скобкой Пуассона $\{\ ,\ \}$, опущенной на N. Легко понять, что скобка $'\{\ ,\ \}$ вырождена. Если $P:M\to\mathcal{G}^*$ — отображение момента, то существует гладкое отображение $\tilde{P}:N\to\mathcal{G}^*$ такое, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "\mathrm{pr}"] \arrow[dr, "P"'] & & N \arrow[dl, "\tilde{P}"] \\ & \mathcal{G}^* & \end{tikzcd}$$

коммутативна. Поскольку G действует свободно, то точка $c\in\mathcal{G}^*$ одновременно является (не) критическим значением отображений P и $\tilde{P}$. Считая точку $c\in\mathcal{G}^*$ некритической, рассмотрим гладкое многообразие $N_c=\tilde{P}^{-1}(c)$ и ограничим скобку $'\{\ ,\ \}$ на N_c.

Предложение 3. Ограничение скобки $'\{\ ,\ \}$ на N_c задает симплектическую структуру $'\omega^2$, причем многообразия $(\tilde{M}_c, \tilde{\omega}^2)$ и $(N_c, {}'\omega^2)$ симплектически диффеоморфны.

Это замечание можно обобщить на случай некоммутативной группы G, только факторизацию M по всей группе G надо заменить факторизацией по ее центру.

Пример 14. В задаче о вращении твердого тела с неподвижной точкой $M=TSO(3)=SO(3)\times R^3$. Если тело вращается в осесимметричном силовом поле, то имеется однопараметрическая группа симметрий $G=SO(2)$. Фактормногообразие $M/SO(2)$ диффеоморфно $S^2\times R^3$. Уравнения движения на этом пятимерном многообразии записываются в виде уравнений Эйлера—Пуассона

$$\dot{k}+\omega\times k=V'\times e,\quad \dot{e}+\omega\times e=0\ (|e|=1),$$

где $k=A\omega$ — кинетический момент, $V:S^2\to R$ — силовая функция (см. § 2 гл. 1). Скобка $'\{,\}$ в $S^2\times R^3$ задается следующими формулами:

$$\{\omega_1, \omega_2\} = -\frac{A_3\omega_3}{A_1A_2}, \ \ldots, \{\omega_1, e_1\} = 0, \quad \{\omega_1, e_2\} = -\frac{e_3}{A_1},$$
$$\{\omega_1, e_3\} = \frac{e_2}{A_1}, \ \ldots, \{e_i, e_j\} = 0. \tag{8}$$

Уравнения Эйлера—Пуассона имеют интеграл $\langle k, e\rangle = c$, порожденный группой симметрий $SO(2)$. Зафиксируем его постоянную и рассмотрим четырехмерный интегральный уровень $N_c = \{\omega, e : \langle A\omega, e\rangle = c, \langle e, e\rangle = 1\}$, диффеоморфный (ко)касательному расслоению сферы Пуассона $S^2 = \{e \in R^3 : \langle e, e\rangle = 1\}$. Положим $\omega = '\omega + ce/\langle Ae, e\rangle$; вектор $'\omega$ является горизонтальным касательным вектором в канонической связности главного расслоения $(SO(3), S^2, SO(2))$, порожденной инвариантной римановой метрикой $\langle A\omega, \omega\rangle/2$. Проекция $SO(3) \to S^2$ позволяет отождествить горизонтальные векторы $'\omega$ с касательными векторами к сфере Пуассона. Пусть $\langle \widetilde{\ ,\ } \rangle$ — факторметрика на S^2: $\widetilde{\langle 'a, 'b\rangle} = \langle 'a, A'b\rangle$. Функция Лагранжа приведенной системы, очевидно, равна

$$\frac{1}{2}\langle A\omega, \omega\rangle + V(e) = \frac{1}{2}\widetilde{\langle '\omega, '\omega\rangle} + \tilde{V}_c(e),$$

где $\tilde{V}_c = V - c^2/2\langle Ae, e\rangle$ — приведенная силовая функция. В переменных $'\omega$, e стандартная симплектическая структура на T^*S^2 задается формулами (8). При $c \neq 0$ приведенную структуру на T^*S^2 тоже можно определить с помощью формул (8), только правые части надо дополнить слагаемыми, пропорциональными постоянной c. $\triangle$

2.3. Примеры: свободное вращение твердого тела и задача трех тел. Рассмотрим сначала задачу Эйлера о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки по инерции (см. п. 2.4 гл. 1). Здесь $M = TSO(3) = SO(3) \times R^3$, группой симметрий G является группа вращений $SO(3)$; ей соответствует пуассоновская алгебра первых интегралов, изоморфная алгебре Ли $so(3)$. Зафиксируем значение кинетического момента $c \in \mathcal{G}^* \simeq R^3$ и рассмотрим интегральный уровень $M_c = P_{so(3)}^{-1}(c)$. Нетрудно показать, что при всех значениях c множество M_c является трехмерным многообразием, диффеоморфным пространству группы $SO(3)$. Стационарной группой G_c является одномерная группа поворотов $SO(2)$ твердого тела в неподвижном пространстве вокруг постоянного вектора кинетического момента. Приведенное фазовое пространство $\tilde{M}_c = SO(3)/SO(2)$ диффеоморфно двумерной сфере.

Это приведение можно осуществить, например, следующим образом. Поскольку гамильтоново векторное поле на M допускает группу G, то его можно опустить на факторпространство

$M/G \simeq R^3$. Возникающее на R^3 дифференциальное уравнение является уравнением Эйлера

$$\dot{k}+\omega\times k=0, \quad \omega=A^{-1}k.$$

Это уравнение можно представить в гамильтоновом виде $\dot{F}=\{F, H\}$, где $H=\langle k, \omega\rangle/2$ — кинетическая энергия твердого тела, а скобка $\{\ ,\ \}$ определяется с помощью равенств $\{k_1, k_2\}=-k_3$, $\{k_2, k_3\}=-k_1$, $\{k_3, k_1\}=-k_2$. Эта скобка, правда, вырождена: функция $F=\langle k, k\rangle$ коммутирует со всеми функциями, заданными на $R^3=\{k\}$. Мы получим невырожденную скобку Пуассона, если ограничим скобку $\{\ ,\ \}$ на поверхность уровня $F=|c|^2$, диффеоморфную двумерной сфере S^2. На симплектическом многообразии S^2 возникает искомая гамильтонова система; ее функция Гамильтона является полной энергией $\langle k, \omega\rangle/2$, ограниченной на S^2.

Укажем классический способ сведения задачи Эйлера к гамильтоновой системе с одной степенью свободы, использующий специальные канонические переменные. Пусть $oXYZ$ — неподвижный трехгранник с началом в точке подвеса, $oxyz$ — подвижная система координат (главные оси инерции тела). Положение твердого тела в неподвижном пространстве определяется тремя *углами Эйлера* ϑ (угол нутации) — угол между осями oZ и oz, φ (собственного вращения) — между осью ox и линией пересечения плоскостей oxy и oXY (называемой линией узлов), ψ (угол прецессии) — между осью oX и линией узлов. Углы ϑ, φ, ψ образуют на $SO(3)$ систему координат, подобную географическим координатам на сфере: с особенностями у полюсов (где $\vartheta=0, \pi$) и многозначностью на одном меридиане. Пусть p_ϑ, p_φ, p_ψ — канонические импульсы, сопряженные с координатами ϑ, φ, ψ. Если твердое тело вращается в осесимметричном силовом поле с осью симметрии oZ, то функция Гамильтона не будет зависеть от угла ψ. Понижение порядка в этом случае можно трактовать как «исключение узла» — исключение циклической переменной ψ, определяющей положение линии узлов в неподвижном пространстве.

Введем теперь «специальные канонические переменные» L, G, H, l, g, h. Пусть Σ — плоскость, проходящая через точку o и перпендикулярная вектору кинетического момента тела. Тогда L — проекция момента на ось oz, G — величина момента, H — проекция момента на ось oZ, l — угол между осью ox и линией пересечения Σ с плоскостью oxy, g — угол между линиями пересечения Σ с плоскостями oxy и oXY, h — угол между осью oX и линией пересечения Σ с плоскостью oXY.

Предложение 4. Преобразование $\vartheta, \varphi, \psi, p_\vartheta, p_\varphi, p_\psi \to l, g, h, L, G, H$ — «однородное» каноническое:

$$p_\vartheta d\vartheta+p_\varphi d\varphi+p_\psi d\psi=Ldl+Gdg+Hdh.$$

Это утверждение принадлежит Андуайе (H. Andoyer); не-

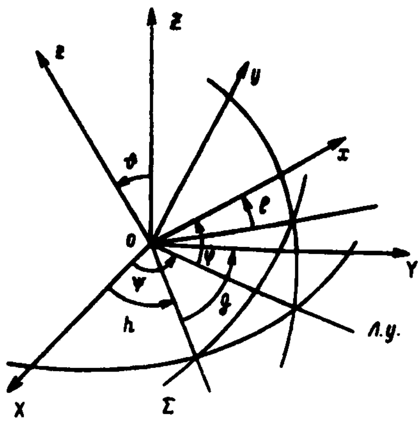


Рис. 20. Специальные канонические переменные

канонические переменные близкие по смыслу к элементам L, G, H, l, g, h были использованы Пуассоном при анализе вращательного движения небесных тел [138].

Из определения специальных канонических переменных нетрудно получить, что $A_1\omega_1=\sqrt{G^2-L^2}\sin l$, $A_2\omega_2=\sqrt{G^2-L^2}\times\times\cos l$, $A_3\omega_3=L$. Следовательно, в задаче Эйлера функция Гамильтона приводится к виду

$$\frac{1}{2}(A_1\omega_1^2+A_2\omega_2^2+A_3\omega_3^2)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin^2 l}{A_1}+\frac{\cos^2 l}{A_2}\right)(G^2-L^2)+\frac{L^2}{2A_3}.$$

При фиксированном значении величины кинетического момента G_0 переменные L, l изменяются в кольце $|L|\leqslant G_0$, $l \bmod 2\pi$. Линии уровня функции Гамильтона показаны на рис. 21. Кривые $L=\pm G_0$ соответствуют особым точкам уравнений Эйлера — постоянным вращениям тела вокруг оси инерции oz. Переменные L, l естественно рассматривать как географические симплектические координаты на приведенном фазовом пространстве S^2.

Рассмотрим теперь с точки зрения понижения порядка задачу трех тел, имеющую (в пространственном случае) 9 степеней свободы. Покажем, что с помощью шести интегралов им-

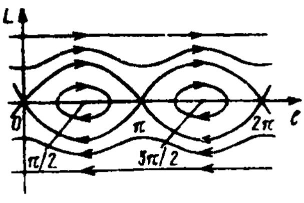


Рис. 21

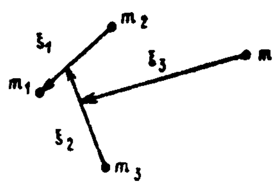


Рис. 22. Исключение центра масс в задаче n тел

пульса и кинетического момента уравнения движения трех гравитирующих тел можно свести к гамильтоновой системе с 4 степенями свободы. Используя еще интеграл энергии, мы приходим к выводу, что задача трех тел сводится к изучению динамической системы на некотором семимерном многообразии. В случае, когда три тела постоянно расположены в одной плоскости, размерность этого многообразия равна пяти. Эти результаты восходят к Лагранжу и Якоби.

Перейдем в барицентрическую систему координат и сначала используем трехмерную коммутативную группу трансляций. С ее помощью размерность гамильтоновых уравнений движения понижается с 18 до 12. При этом приведенная система, как и исходная, будет обладать группой симметрий $G=SO(3)$. Фиксируя значение кинетического момента, мы придем к уравнениям движения на девятимерном интегральном многообразии. Факторизуя его по стационарной подгруппе поворотов вокруг вектора постоянного момента, получаем искомую гамильтонову систему с восьмимерным фазовым пространством. Весь вопрос теперь заключается в том, как такое приведение осуществить в явном виде

Сначала исключим движение центра масс. Пусть r_s — радиус-векторы точечных масс m_s в барицентрической системе отсчета, так что $\Sigma m_s r_s=0$. Для того, чтобы с помощью этого соотношения уменьшить порядок дифференциальных уравнений движения

$$m_s\ddot{r}_s=V'_{r_s}\,(1\leqslant s\leqslant 3),\quad V=\sum_{i<j}\frac{m_i m_j}{r_{ij}},\tag{9}$$

введем относительные радиусы-векторы $\xi=r_2-r_1$, $\eta=r_3-\zeta$, где $\zeta=(m_1r_1+m_2r_2)/(m_1+m_2)$ — центр масс точек m_1 и m_2. Положим $\mu=m_1m_2/(m_1+m_2)$, $\nu=(m_1+m_2)\,m_3/\Sigma m_s$.

Предложение 5. Если $r_s(t)$ — движение гравитирующих точек, то функции $\xi(t)$ и $\eta(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\mu\ddot{\xi}=W'_{\xi},\quad \nu\ddot{\eta}=W'_{\eta},\quad W(\xi,\eta)=V|_{\xi,\eta}.\tag{10}$$

Эти уравнения имеют первый интеграл

$$\mu(\xi\times\dot{\xi})+\nu(\eta\times\dot{\eta})=\Sigma m_s(r_s\times\dot{r}_s)=c.$$

Уравнения (10) описывают движение «фиктивных» материальных точек с массами μ, ν. Предложение 5 легко обобщается на случай любого $n>3$. Уравнения (10) с 6 степенями свободы, разумеется, гамильтоновы.

Исключение кинетического момента («исключение узла») можно провести для уравнений (10). Однако окончательный результат проще независимо сформулировать в форме, симметричной по отношению к массам m_1, m_2, m_3. Пусть Σ — «неизменяемая плоскость» Лапласа: она содержит барицентр и перпендикулярна постоянному кинетическому моменту c. Пусть Π — плоскость, проходящая через точки m_1, m_2, m_3. Обозначим через ϑ_i угол треугольника $m_1m_2m_3$, где находится масса m_i, а через Δ — площадь этого треугольника. Справедливы формулы

$$\sin\vartheta_i=\frac{2\Delta}{\rho_j\rho_k},\quad \cos\vartheta_i=\frac{\rho_i^2-\rho_j^2-\rho_k^2}{2\rho_j\rho_k}$$
$$\Delta=\frac{\Pi\sqrt{\rho_j+\rho_k-\rho_i}}{4\sqrt{\Sigma\rho_s}}, \tag{11}$$

где i, j, k допускают лишь три циклические перестановки чисел 1, 2, 3, а ρ_i — длина стороны треугольника, противоположная вершине m_i. Пусть γ — угол между плоскостями Π и Σ; в плоском движении $\gamma=0$.

Предложение 6. При фиксированном значении кинетического момента $\Sigma m_s(r_s\times \dot r_s)=c$ в барицентрической системе с 4 степенями свободы:

$$\dot\Gamma=-H_\gamma,\ \dot\gamma=H'_\Gamma;\ \dot P_s=-H'_{\rho_s},\ \dot\rho_s=H'_{P_s}\ (1\leqslant s\leqslant 3), \tag{12}$$

$$H(\Gamma, P_1, P_2, P_3, \gamma, \rho_1, \rho_2, \rho_3)=$$
$$=\frac{|c|^2\sin\nu}{4\Delta}\sum\frac{\rho_s^2}{m_s}\sin^2\left(\frac{\Gamma}{|c|\sin\gamma}+\frac{\vartheta_j-\vartheta_k}{3}\right)+$$
$$+\sum\frac{P_j^2+P_k^2-2P_jP_k\cos\vartheta_i}{2m_i}+|c|\cos\gamma\sum\left(\frac{P_j}{\rho_k}-\frac{P_k}{\rho_j}\right)\frac{\sin\vartheta_i}{3m_i}+$$
$$+|c|^2\cos^2\gamma\sum\frac{\rho_j^2+\rho_k^2-\rho_i^2/2}{36m_i\rho_j^2\rho_k^2}-\sum\frac{m_jm_k}{\rho_i};$$

здесь величины Δ, ϑ_1, ϑ_2 и ϑ_3 выражаются по формулам (11) как функции ρ_1, ρ_2, ρ_3 символ Σf_{ijk} означает сумму $f_{123}+f_{231}+$ $+f_{312}$.

Это утверждение принадлежит Ван Кампену (E. R. van Kampen) и Уинтнеру [158]. Доказательство основано на элементарных, но громоздких вычислениях. Выражения импульсов Γ, P_s через координаты и скорости гравитирующих точек очень громоздки и обычно не используются.

Когда движение плоское, то первые два уравнения (12) сводятся к равенствам $\Gamma=\gamma=0$, и мы получаем гамильтонову систему с тремя степенями свободы.

Если $c=0$, то уравнения (12) являются натуральной гамильтоновой системой с тремя степенями свободы (ср. с теоремой 13).

§ 3. Относительные равновесия и бифуркация интегральных многообразий

3.1. Относительные равновесия и приведенный потенциал. Мы вновь возвращаемся к исследованию гамильтоновой системы (M, ω^2, H) с группой симметрий G, действие которой на пространстве состояний M является пуассоновским. Пусть $(\tilde{M}_c, \tilde{\omega}^2, \tilde{H})$ — приведенная гамильтонова система в смысле п. 2.2.

Определение. Фазовые кривые гамильтоновой системы на M с постоянной момента $P_G=c$, переходящие при проекции $M \to \tilde{M}_c$ в положения равновесия приведенной гамильтоновой системы, называются *относительными равновесиями* или *стационарными движениями.*

Пример 15. Рассмотрим вращение твердого тела в осесимметричном силовом поле. Пусть c — фиксированное значение кинетического момента тела относительно оси симметрии поля сил; уравнения движения приведенной системы можно представить в следующем виде:

$$A\dot{\omega} = A\omega \times \omega - e \times V', \quad \dot{e} = e \times \omega; \quad \langle A\omega, e \rangle = c, \quad \langle e, e \rangle = 1, \quad (13)$$

здесь $V(e)$ — силовая функция. В положении равновесия приведенной системы, очевидно, $e=\text{const}$. Следовательно, $\omega=\lambda e$. Из уравнения $\langle A\omega, e\rangle = c$ однозначно находится множитель λ: он равен $c/\langle Ae, e\rangle$. Поскольку $e=\text{const}$, то угловая скорость ω тоже постоянна. Из первого уравнения (13) получаем уравнение для нахождения относительных равновесий с моментом c:

$$c^2(Ae \times e) + (V' \times e)\langle Ae, e\rangle^2 = 0, \quad \langle e, e\rangle = 1.$$

Этот результат впервые отмечен Штауде (O. Staude) в 1894 г. В стационарном движении (относительном равновесии) твердое тело равномерно вращается вокруг оси симметрии силового поля с угловой скоростью $|\omega| = |c|/\langle Ae, e\rangle$. Δ

Предложение 7. Фазовая кривая $x(t)$ гамильтоновой системы (M, ω^2, H) с группой симметрий G является относительным равновесием в том и только том случае, когда $x(t) = g^t(x(0))$, где g^t — однопараметрическая подгруппа группы G.

$\triangleleft$ Если $x(t) = g^t(x_0)$ и g^t — подгруппа G, то проекция $M \to \tilde{M}_c$ переводит решение $x(t)$ в равновесие приведенной системы. Обратно, пусть $x(t) = h^t(x_0)$ — относительное равновесие гамильтоновой системы с гамильтонианом H и начальным условием $x(0) = x_0$. Покажем, что h^t — подгруппа в G. Пусть g^t — однопараметрическая подгруппа G такая, что

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} g^t(x_0) = \dot{x}(0) \quad \left(= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} h^t(x_0)\right).$$

Поскольку G — группа симметрий, то группы h^t и g^t коммутируют и поэтому $x(t)=g^t(x_0)$ в силу равенства (14). ▷

В рассмотренном выше примере 15 траектории стационарных движений являются орбитами группы $SO(2)$ вращений тела вокруг оси симметрии поля.

Для натуральных механических систем с симметриями можно указать более эффективный критерий стационарности движения. Пусть $(M, \langle\ ,\ \rangle, V)$ — механическая система с группой симметрий (в смысле п. 2.1): многообразие M является пространством главного расслоения с базой N и структурной группой G.

Предложение 8. Если группа G коммутативна, то точка $y \in N$ является положением относительного равновесия с постоянной момента $c \in \mathcal{G}^*$ тогда и только тогда, когда y — критическая точка приведенного потенциала $\tilde{U}_c : N \to R$.

Это утверждение — следствие теоремы 14 и определения относительного равновесия. Поскольку, например, любая гладкая функция на сфере имеет по меньшей мере две критические точки, то из предложения 8 вытекает

Следствие. Задача о вращении твердого тела с неподвижной точкой в любом осесимметричном силовом поле при каждом значении момента имеет не менее двух различных стационарных вращений. Количество различных стационарных движений в общем случае можно оценить, например, с помощью неравенств Морса. Однако в конкретных задачах удается, как правило, получить более точную информацию (см. п.п. 3.3—3.4).

3.2. Интегральные многообразия, области возможности движения и бифуркационные множества. Пусть (M, ω^2, H, G) — гамильтонова система с пуассоновской группой симметрий G. Поскольку гамильтониан H является первым интегралом, то эту функцию естественно присоединить к интегралам момента $P : M \to \mathcal{G}^*$ и рассмотреть гладкое *отображение «энергии-момента»* $H \times P : M \to R \times \mathcal{G}^*$.

Определение. *Бифуркационным множеством* Σ гамильтоновой системы (M, ω^2, H, G) назовем множество точек из $R \times \mathcal{G}^*$, над окрестностями которых отображение $H \times P$ не является локально тривиальным расслоением.

В частности, критические значения Σ' отображения «энергии-момента» войдут в Σ. Однако в общем случае множество Σ не исчерпывается Σ'. Примером может служить бифуркационное множество задачи Кеплера, указанное в § 1 гл. 2.

Предложение 9. Критические точки отображения $H \times P : M \to R \times \mathcal{G}^*$ на регулярном уровне момента совпадают с относительными равновесиями.

Это простое утверждение оказывается полезным при изучении структуры бифуркационных множеств.

Определение. При фиксированных значениях энергии $h \in R$ и момента $c \in \mathcal{G}^*$ множество $I_{h,c} = (H \times P)^{-1}(h, c)$ назовем *интегральным многообразием* гамильтоновой системы (M, ω^2, H, G).

Очевидно, что лишь при $(h, c) \in \Sigma$ интегральные уровни $I_{h,c}$ могут не быть гладкими многообразиями. Поскольку действие группы G сохраняет функцию H, то стационарная группа G_c действует на уровне $I_{h,c}$ и поэтому определено фактормногообразие $\tilde{I}_{h,c} = I_{h,c}/G_c$. Если c — регулярное значение момента, то $\tilde{I}_{h,c}$ совпадает с уровнем энергии приведенной гамильтоновой системы $(\tilde{M}_c, \tilde{\omega}^2, \tilde{H})$. Множество $\tilde{I}_{h,c}$ поэтому естественно назвать ***приведенным интегральным многообразием***. Например, в пространственной задаче трех тел типичные многообразия $\tilde{I}_{h,c}$ семимерны, а в плоской задаче их размерность равна пяти. Поскольку над каждой связной компонентой $R \times \mathcal{G}^* \setminus \Sigma$ отображение $H \times P$ является расслоением, то топологический тип интегральных многообразий $\tilde{I}_{h,c}$ может меняться только при прохождении точки через бифуркационное множество Σ.

Итак, изучение исходной гамильтоновой системы с симметриями сводится к исследованию отображения $H \times P$ и структуры фазовых потоков на приведенных интегральных многообразиях $\tilde{I}_{h,c}$.

Рассмотрим более детально строение отображения «энергии-момента» для натуральной механической системы $(M, \langle , \rangle, V)$ с группой симметрий G; мы не будем предполагать, что действие G на M свободное. Введем множество Λ, состоящее из точек $x \in M$, для которых стационарная подгруппа G_x (множество таких $g \in G$, что $g(x) = x$) имеет положительную размерность. Множество Λ замкнуто в M. Например, в пространственной задаче трех тел Λ состоит из троек точек, лежащих на одной прямой. В плоской задаче Λ сводится к единственной точке $r_1 = r_2 = r_3 = 0$ (мы считаем, как обычно, что барицентр совпадает с началом системы отсчета).

Пусть $J : \dot{x} \to \langle \dot{x}, v_X \rangle$ — отображение момента. Согласно лемме 2, для любой точки $x \in M \setminus \Lambda$ и любого $c \in \mathcal{G}^*$ найдется единственный вектор $w_c(x)$, такой, что $J(w_c) = c$ и $\langle w_c, v_X \rangle = 0$ для всех $X \in \mathcal{G}$. Приведенным потенциалом $U_c : M \to R$ мы назвали в п. 2.1 функцию $- V + \langle w_c, w_c \rangle / 2$.

Предложение 10. Приведенный потенциал обладает следующими свойствами:

1) $U_c(x) = \min\limits_{v \in J_x^{-1}(c)} H(v)$, где $H(v) = \dfrac{\langle v, v \rangle}{2} - V(x)$ — полная энергия системы,

2) над $M \setminus \Lambda$ множество критических точек отображения H:

$J^{-1}(c) \to R$ совпадает с $w_c(\Gamma)$, где Γ — множество критических точек приведенного потенциала $U_c : M \setminus \Lambda \to R$,

3) $\Sigma' = \{(h, c) : h \in U_c(\Gamma)\}$,

4) $\pi(I_{h,c}) = U_c^{-1}(-\infty, h]$, где $\pi : TM \to M$ — проекция.

Это предложение отмечено Смейлом (S. Smale); в конкретных ситуациях оно еще раньше использовалось различными авторами. Заключение 2 уточняет предложение 9.

Определение. Множество $\pi(I_{h,c}) \subset M$ называется областью возможности движения при фиксированных значениях энергии h и момента c.

Если группа G коммутативна, то п. 4) предложения 10 можно заменить на

4′) $\pi'(\tilde{I}_{h,c}) \subset \tilde{U}_c^{-1}(-\infty, h]$, где $\pi' : TN \to N$ — проекция $N = M/G$ — приведенное пространство положений, $\tilde{U}_c : N \to R$.

Если M компактно, то $\Sigma = \Sigma'$ и включение 4′) можно заменить на равенство. В некомпактном случае это уже не так: контрпримером может служить пространственная задача n тел. Интересно отметить, что в плоской задаче n тел область возможности движения описывается неравенством $U_c \leqslant h$ (предложение 7 из п. 14 гл. 1).

3.3. Бифуркационное множество в плоской задаче трех тел.

Предложение 11. Для любого заданного набора масс в плоской задаче трех тел

(1) множество критических значений Σ' отображения $H \times J : TM \to R^2\{h, c\}$ состоит из четырех кубических кривых, заданных уравнениями $hc^2 = \alpha_i < 0$ $(1 \leqslant i \leqslant 4)$,

(2) бифуркационное множество Σ состоит из Σ' и координатных осей $h = 0$ и $c = 0$.

◁ Если U — потенциальная энергия в задаче трех тел, то приведенный потенциал V_c, очевидно, равен $U + c^2/2I$, где I — момент инерции точек относительно их барицентра (ср. с § 1 гл. 1). В относительном равновесии dV пропорционален dI, следовательно, три точки образуют центральную конфигурацию (п. 3.1 гл. 2). При фиксированном значении $|c| \neq 0$ таких конфигураций ровно пять: три коллинеарных и две треугольных. В последнем случае треугольник обязательно равносторонний, и эти две треугольные конфигурации отличаются лишь порядком следования гравитирующих точек. Пусть ω — постоянная угловая скорость вращения центральной конфигурации. Тогда, очевидно, $|c| = I|\omega|$, $T = I\omega^2/2$ и

$$h = T + U = \frac{c^2}{2I} + U.$$

Поскольку все конфигурации данного типа подобны, то можно считать $I = \alpha^2 I_0$, $U = \alpha^{-1} U_0$. Коэффициент подобия α можно найти из равенства $2T=U$, которое является следствием тождества Лагранжа $\ddot{I}=2T-U$. Коэффициент α равен c^2/I_0U_0 и поэтому в относительном равновесии $hc^2=\alpha_s<0$. Согласно заключению 2) предложения 10, бифуркационное множество Σ включает кривые, заданные уравнениями $hc^2=\alpha_s$ $(1\leqslant s\leqslant 5)$. Среди пяти чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_5$ по крайней мере два совпадают (они соответствуют треугольным решениям Лагранжа). В бифуркационное множество, очевидно, входят еще прямые $h=0$, $c=0$ (как в задаче Кеплера). Как показал Смейл, множество Σ не содержит никаких других точек (см. [38]). $\triangleright$

В работе Смейла [38] содержится информация о топологическом строении интегральных многообразий в различных связных компонентах множества $R^2\setminus\Sigma$.

3.4. Бифуркационные множества и интегральные многообразия в задаче о вращении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. Пусть $A_1\geqslant A_2\geqslant A_3$ — главные моменты инерции твердого тела, x_1, x_2, x_3 — координаты центра масс относительно осей инерции. Если ω — угловая скорость тела, e — единичный вертикальный вектор (заданные в подвижном пространстве), то $H=\langle A\omega, \omega\rangle/2+\varepsilon\langle x, e\rangle$ и $J=\langle A\omega, e\rangle$, где $A=\mathrm{diag}(A_1, A_2, A_3)$. Наша задача — описать бифуркационную диаграмму Σ в плоскости $R^2=\{h, c\}$ и топологическое строение приведенных интегральных многообразий $\tilde{I}_{h,c}$. Полезно сначала рассмотреть вырожденный частный случай, когда $\varepsilon=0$ (задача Эйлера). Положения относительных равновесий — суть критические точки приведенного потенциала $\tilde{U}_c=c^2/2\langle Ae, e\rangle$ на единичной сфере $\langle e, e\rangle=1$. Если тело несимметрично $(A_1>A_2>A_3)$, то таких точек ровно шесть: $(\pm1, 0, 0)$, $(0, \pm1, 0)$, $(0, 0, \pm1)$. Им соответствуют равномерные вращения твердого тела вокруг осей инерции. Поскольку в относительном равновесии тела $\omega=ce/\langle Ae, e\rangle$ (см. пример 15), то энергия h и момент c связаны одним из соотношений $h=c^2/2A_s$ $(1\leqslant s\leqslant 3)$. Так как пространство положений твердого тела — группа $SO(3)$ — компактно, то бифуркационное множество Σ является объединением трех парабол. В случае динамической симметрии число парабол уменьшается; если $A_1=A_2=A_3=A$, то Σ состоит из единственной параболы $h=c^2/2A$. Пусть $B_{h,c}=\{\tilde{U}_c\leqslant h\}$ — область возможности движения на сфере Пуассона. Классификацию областей $B_{h,c}$ и приведенных интегральных многообразий $\tilde{I}_{h,c}$ в задаче Эйлера дает

Предложение 12. Пусть $A_1>A_2>A_3$. Тогда

(1) если $h<c^2/2A_1$, то $B_{h,c}=\varnothing$, $\tilde{I}_{h,c}=\varnothing$,

(2) если $c^2/2A_1<h<c^2/2A_2$, то $B_{h,c}=D^2\cup D^2$, $\tilde{I}_{h,c}=2S^3$,

(3) если $c^2/2A_2<h<c^2/2A_3$, то $B_{h,c}=D^1\times S^1$, $\tilde{I}_{h,c}=S^2\times S^1$,

(4) если $c^2/2A_3<h$, то $B_{h,c}=S^2$, $\tilde{I}_{h,c}=SO(3)$.

Выяснение топологического строения приведенных интегральных многообразий основано на следующем замечании: $\tilde{I}_{h,c}$ диффеоморфно расслоенному пространству с базой расслоения $B_{h,c}$ и слоем S^1, у которого слой над каждой точкой границы $\partial B_{h,c}$ отождествлен в точку.

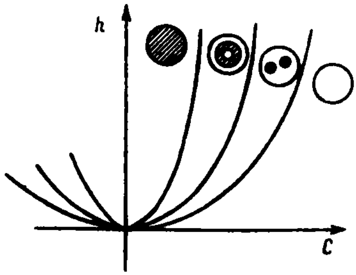


Рис. 23. Бифуркационная диаграмма задачи Эйлера

В общем случае, когда центр масс не совпадает с точкой подвеса, задача полного описания бифуркационных множеств и интегральных многообразий существенно усложняется. Она подробно изучена в работах Я. В. Татаринова [120]. Мы приведем в качестве примера серию рисунков из работы [120], на которой показан механизм перестройки бифуркационной диаграммы, когда центр масс из общего положения в плоскости $x_3 = 0$ переходит на ось $x_1 = x_2 = 0$. Числа на этих рисунках указывают «многозначный род» областей возможности движения на сфере Пуассона. Будем говорить, что связная область $B_{h,c}$ имеет род l, если $B_{h,c}$ диффеоморфна сфере S^2, из которой удалены l непересекающихся открытых дисков. Если область возможности движения несвязна, то присвоим ей многозначный род $l_1, l_2, \ldots$, где l_s — род отдельной ее связной компоненты (поскольку в рассматриваемой ситуации числа l_s не превосходят трех, то путаницы не возникнет). Топология интегральных многообразий однозначно определяется структурой областей возможности движения (ее родом).

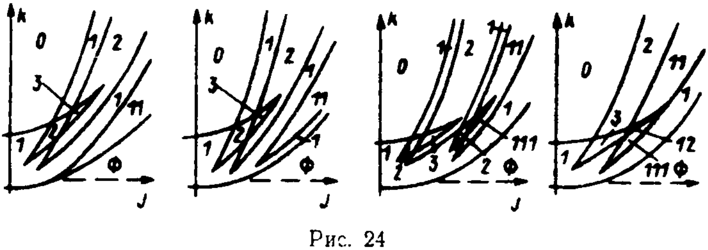


Рис. 24

Глава 4

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ И МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

§ 1. Краткий обзор различных подходов к интегрируемости гамильтоновых систем

Дифференциальные уравнения, в том числе уравнения Гамильтона, принято разделять на интегрируемые и неинтегрируемые. «Если, однако, мы попытаемся сформулировать точное определение интегрируемости, то оказываются возможными многие различные определения, каждому из которых присущ известный теоретический интерес»[1]. В этом параграфе мы дадим краткий перечень различных подходов к интегрируемости гамильтоновых систем, «не забывая при этом указания Пуанкаре, что система дифференциальных уравнений может быть лишь в большей или меньшей степени интегрируемой»[1].

1.1. Квадратуры. Интегрирование в квадратурах системы дифференциальных уравнений в R^n — это отыскание ее решений с помощью конечного числа «алгебраических» операций (включая обращение функций) и «квадратур» — вычисления интегралов известных функций. Следующее утверждение связывает интегрирование гамильтоновой системы в квадратурах с существованием достаточно большого набора ее первых интегралов.

Теорема 1. (В. В. Козлов, Н. Н. Колесников [13]). Пусть R^{2n} — симплектическое многообразие со стандартной симплектической структурой. Предположим, что система с гамильтонианом $H: R^{2n}\times R\{t\}\to R$ имеет n первых интегралов $F_1, \ldots, F_n: R^{2n}\times R\{t\}\to R$ $(F_t'+\{F, H\}=0)$ таких, что $\{F_i, F_j\}=\sum c_{ij}^k F_k$, $c_{ij}^k=\mathrm{const}$. Если

1) на множестве $M_f=\{(x, t)\in R^{2n}\times R: F_i(x, t)=f_i,\ 1\leqslant i\leqslant n\}$ функции $F_1, \ldots, F_n$ независимы;

2) $\sum c_{ij}^k f_k=0$ для всех $i, j=1, \ldots, n$;

3) алгебра Ли $\mathcal{A}$ линейных комбинаций $\Sigma\lambda_s F_s$, $\lambda_s\in R$ разрешима, то решения гамильтоновой системы $\dot{x}=IdH$, лежащие на M_f, можно найти в квадратурах.

Следствие. Если гамильтонова система с n степенями свободы имеет n независимых интегралов в инволюции (алгебра $\mathcal{A}$ коммутативна), то ее можно проинтегрировать в квадратурах.

Это утверждение было сначала доказано Буром (E. Bour) для автономных канонических уравнений и затем обобщено Лиувиллем (J. Liouville) на неавтономный случай.

---

[1] Дж. Биркгоф «Динамические системы».

Пусть функции H и F_i не зависят от времени. Тогда H — тоже первый интеграл, например, $H=F_1$. Теорема об интегрируемости в квадратурах справедлива, конечно, и в этом случае, причем условие $\{F_1, F_i\}=0$ можно заменить более слабым условием $\{F_1, F_i\}=c_{1i}^1 F_1$, $1\leqslant i\leqslant n$.

Доказательство теоремы 1 базируется на одном результате С. Ли (S. Lie).

Теорема 2. Пусть n векторных полей $X_1, \ldots, X_n$ линейно независимы в малой области $U\subset R^n\{x\}$, порождают разрешимую алгебру Ли относительно операции коммутирования и $[X_1, X_i]=\lambda_i X_1$. Тогда дифференциальное уравнение $\dot{x}=X_1(x)$ интегрируется в квадратурах в области U.

◁ Мы докажем это утверждение в самом простом случае, когда $n=2$. В общем случае доказательство аналогично (см. [126]). Уравнение $\dot{x}=X_1(x)$, $x\in U$ будет проинтегрировано, если нам удастся найти его первый интеграл $F(x)$ такой, что $dF(x)\neq 0$ в области U. Поскольку $X_1(x)\neq 0$, $x\in U$, то такая функция заведомо существует (по крайней мере локально). Если $X_1(F)=0$, то $X_2(F)$ — снова интеграл, так как $X_1(X_2(F))=$ $=X_2(X_1(F))+\lambda_2 X_1(F)=0$. Очевидно, что локально $X_2(F)=$ $=f(F)$, где $f(\cdot)$ — некоторая гладкая функция одной переменной, $f\neq 0$. Положим

$$G(F)=\int\limits_{F_0}^{F}\frac{dz}{f(z)}.$$

Так как $X_1(G)=0$, а $X_2(F)=dG(X_2(F))=X_2(F)/f(F)=1$, то решение системы уравнений

$$X_1(F)=a_{11}\frac{\partial F}{\partial x_1}+a_{12}\frac{\partial F}{\partial x_2}=0,\quad X_2(F)=a_{21}\frac{\partial F}{\partial x_1}+a_{22}\frac{\partial F}{\partial x_2}=1$$

существует. Разрешая эту систему относительно F'_{x_1} и F'_{x_2}, мы найдем функцию F с помощью дополнительного интегрирования. Поскольку $X_2(F)=1$, то $dF\neq 0$. ▷

Для доказательства теоремы 1 (в автономном случае) рассмотрим n гамильтоновых полей IdF_i. Согласно условиям 1—2, они касаются многообразия M_f и независимы всюду на M_f. Так как $\{F_i, F_j\}=\sum c_{ij}^k F_k$, то $[IdF_i, IdF_j]=\sum c_{ij}^k IdF_k$. Следовательно, касательные поля IdF_i образуют разрешимую алгебру, причем $[IdH, IdF_i]=\lambda_i IdH$ $(\lambda_i=c_{1i}^1=\mathrm{const})$. Утверждение теоремы 1 вытекает теперь из теоремы Ли.

Замечание. Теорему 2, в свою очередь, можно вывести из теоремы 1. Для этого рассмотрим n функций $F_i(x, y)=$ $=y\cdot X_i(x)$, определенных в $U\times R^n$. Если $[X_i, X_j]=\sum c_{ij}^k X_k$, то, очевидно, $\{F_i, F_j\}=\sum c_{ij}^k F_k$. Многообразие $M_0=\{(x, y): F_1=\ldots$ $=F_n=0\}=\{(x, y): y=0\}$ является инвариантным для гамильтоновой системы с функцией Гамильтона F_1. Применяя автономный вариант теоремы 1 на M_0 и отождествляя M_0 с U, получим заключение теоремы 2. $\triangle$

Неавтономную теорему можно вывести из автономной с помощью следующего приема. Уравнения Гамильтона

$$\dot{x}=H_y', \quad \dot{y}=-H_x'; \quad H=H(x, y, t)$$

можно представить в виде канонической системы в расширенном пространстве переменных x, y, h, t с функцией Гамильтона $K(x, y, h, t)=H(x, y, t)-h$:

$$\dot{x}=K'_y, \quad \dot{y}=-K'_x, \quad \dot{h}=K'_t, \quad \dot{t}=-K'_h.$$

Если обозначить скобку Пуассона в расширенном симплектическом пространстве $R^{2n}\{x, y\}\times R^2\{h, t\}$ через $\{,\}_*$, то

$$\{F_i(x, y, t), F_j(x, y, t)\}_*=\{F_i, F_j\}=\Sigma c_{ij}^k F_k,$$

$$\{F_i(x, y, t), K(x, y, h, t)\}_*=\{F_i, H-h\}=\frac{\partial F_i}{\partial t}+\{F_i, H\}=0.$$

Остается заметить, что функции $F_1, \ldots, F_n$ и K независимы.

Пример 1. Рассмотрим задачу о движении по прямой трех точек, притягивающихся с силой, обратно пропорциональной кубу расстояния между ними. Пусть m_i — массы, x_i — координаты, а $p_i=m_i\dot{x}_i$ — импульсы точек. Потенциальная энергия взаимодействия равна

$$U=\sum_{i<j}\frac{a_{ij}}{(x_i-x_j)^2}, \quad a_{ij}=\text{const}.$$

Функции $F_1=\Sigma p_i^2/2m_i+U$, $F_2=\Sigma p_i x_i$, $F_3=\Sigma p_i$ независимы и $\{F_1, F_3\}=0$, $\{F_2, F_3\}=F_3$, $\{F_1, F_2\}=2F_1$. Так как соответствующая алгебра $\mathscr{A}$ разрешима, то движения, лежащие на нулевых уровнях полной энергии и импульса, можно найти в квадратурах. Эту возможность нетрудно реализовать непосредственно. Если точки имеют равные массы и коэффициенты a_{ij} $(i<j)$ равны между собой, то уравнения движения интегрируются в квадратурах в целом (см. пример 8 гл. 4). Отметим, что в рассмотренном примере потенциал U можно заменить произвольной однородной функцией степени -2. $\triangle$

1.2. Полная интегрируемость. Пусть M — симплектическое многообразие и $F_1, \ldots, F_n$ — независимые функции на M, порождающие конечномерную подалгебру алгебры Ли $C^\infty(M)$ (так что $\{F_i, F_j\}=\Sigma c_{ij}^k F_k$, $c_{ij}^k=\text{const}$). В каждой точке $x\in M$, где функции $F_1, \ldots, F_n$ независимы, векторы IdF_i порождают n-мерное линейное подпространство $\Pi(x)$ в T_xM. Распределение плоскостей $\Pi(x)$ инволютивно (если $X(x)$, $Y(x)\in\Pi$, то $[X, Y](x)\in\Pi$). Следовательно, по теореме Фробениуса, через каждую точку $x\in M$ проходит максимальное интегральное многообразие N_x распределения Π. Эти многообразия могут быть погружены в M весьма сложным образом; в частности, они не обязательно замкнуты. Если $n=\dim M/2$, то среди интегральных многообразий распределения П есть замкнутые поверхности $M_f=\{x\in M\colon F_i(x)=f_i,\ \Sigma c_{ij}^k f_k=0\}$. Если $x\in M_f$, то N_x совпадает с одной из связных компонент M_f. В частном случае, когда функции $F_1,\ldots,F_n$ попарно коммутируют, почти всё M «расслоено» на замкнутые интегральные многообразия M_f.

Теорема 3. Пусть гладкие функции $F_1,\ldots,F_n\colon M\to R$ находятся попарно в инволюции и $\dim M=2n$. Если

1) они независимы на M_f,

2) гамильтоновы поля IdF_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ полны на M_f, то

1) каждая связная компонента M_f диффеоморфна $T^k\times\times R^{n-k}$,

2) на $T^k\times R^{n-k}$ существуют координаты $\varphi_1,\ldots,\varphi_k \bmod 2\pi$, $y_1,\ldots,y_{n-k}$ такие, что в этих координатах уравнение Гамильтона $\dot{x}=IdF_i$ на M_f имеет следующий вид:

$$\dot{\varphi}_m=\omega_{mi},\quad \dot{y}_s=c_{si}\ (\omega,\ c=\mathrm{const}).$$

Гамильтонову систему с каждой функцией Гамильтона $F_1,\ldots,F_n$ называют вполне интегрируемой.

◁ Укажем схему доказательства этой теоремы. Рассмотрим n однопараметрических групп $g_i^{t_i}$, $t_i\in R$, являющихся фазовыми потоками n гамильтоновых полей IdF_i. В силу условия 2) значение $g_i^{t_i}(x)$, $x\in M_f$ определено при всех t_i. Группы g_i и g_j коммутируют, поскольку векторные поля IdF_i и IdF_j коммутируют на M_f. Следовательно, определено действие абелевой группы $R^n=\{t_1,\ldots,t_n\}$ на M_f:

$$g^t(x)=g_1^{t_1}\ldots g_n^{t_n}(x),\quad t=(t_1,\ldots,t_n).$$

Из условия 1) и связности M_f можно вывести, что группа R^n действует на M_f свободно и транзитивно. Следовательно, M_f диффеоморфно фактормногообразию R^n/Γ, где Γ — стационарная группа действия R^n (она состоит из точек $t\in R^n$, для которых $g^t x=x$). Так как касательные поля IdF_i независимы на M_f, то Γ — дискретная подгруппа в R^n, изоморфная Z^k $(0\leqslant k\leqslant\leqslant n)$. Таким образом, $M_f\simeq R^n/Z^k=T^k\times R^{n-k}$. Равномерно меняющиеся «глобальные» координаты $\varphi \bmod 2\pi$, y линейно выражаются через $t_1,\ldots,t_n$. Все детали доказательства можно найти в [6]. ▷

Замечание. Если алгебра интегралов $\mathscr{A}$ не коммутативна, то замкнутые инвариантные интегральные уровни M_f диффеоморфны односвязной группе алгебры $\mathscr{A}$, профакторизованной по некоторой ее дискретной подгруппе. Реализация этого общего замечания упирается в нерешенную задачу классификации групп и алгебр Ли. △

В теории и практике вполне интегрируемых гамильтоновых систем наибольший интерес представляет случай, когда множество M_f компактно. Тогда $k=n$ и, следовательно, $M_f \simeq T^n$. Равномерное движение по *тору* $T^n = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n \bmod 2\pi\}$ по закону $\varphi_i = \varphi_i^0 + \omega_i t$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ называется *условно-периодическим.* Числа $\omega_1, \ldots, \omega_n$ — его *частоты.* Тор с набором частот $\omega_1, \ldots$ $\ldots, \omega_n$ называется *нерезонансным*, если из равенства $\Sigma k_i \omega_i = 0$ с целыми k_i вытекает, что все $k_i = 0$. На нерезонансных торах фазовые траектории всюду плотны. Это утверждение является простым следствием следующего общего результата, принадлежащего Г. Вейлю (H. Weyl).

Теорема 4. Пусть $f: T^n \to R$ — интегрируемая по Риману функция и числа $\omega_1, \ldots, \omega_n$ рационально независимы. Тогда для любой точки $\varphi^0 \in T^n$ предел

$$\lim_{s \to \infty} \frac{1}{s} \int_0^s f(\omega t + \varphi^0)\, dt$$

существует и равен

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} f(\varphi)\, d\varphi_1 \wedge \ldots \wedge d\varphi_n.$$

Пусть, в частности, f — характеристическая функция измеримой по Жордану (C. Jordan) области D на T^n. Применяя к функции f теорему 4, получим следующее утверждение: средняя доля времени, которое фазовая траектория проводит в области D, пропорциональна мере D. Этот факт характеризует свойство равномерного распределения траекторий на нерезонансных торах. Если тор *резонансный*, то фазовые траектории заполняют торы меньшего числа измерений.

1.3. Нормальные формы. Рассмотрим гамильтонову систему

$$\dot{z} = I dH(z), \quad z = (p, q) \in R^{2n}$$

в окрестности точки $z=0$. Пусть вещественно-аналитическая функция H представлена сходящимся степенным рядом от z, начинающимся с членов второго порядка: $H = \sum_{k \geqslant 2} H_k$. Точка $z=0$ является, очевидно, положением равновесия.

Собственные значения линеарированной системы $\dot{z} = I dH_2$ могут быть четырех типов: вещественные пары $(a, -a)$, $a \neq 0$, чисто мнимые пары $(ib, -ib)$, $b \neq 0$, четверки $(\pm a \pm ib)$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ и кратные нулевые числа (см. гл. 6, п. 2.3). В первом и третьем случаях равновесие $z=0$ заведомо неустойчиво. Мы будем рассматривать случай, когда собственные значения линеаризованной системы чисто мнимы и различны. Можно показать, что тогда существует линейное каноническое преобразование координат $p, q \mapsto x, y$, приводящее квадратичную форму

H_2 к виду

$$\frac{1}{2}\sum_s \alpha_s(x_s^2+y_s^2).$$

Собственными числами являются как раз $\pm i\alpha_1, \ldots, \pm i\alpha_n$.

Теорема 5. (Дж. Биркгоф). Если $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ независимы над полем рациональных чисел, то существует формальное каноническое преобразование $x, y \mapsto \xi, \eta$, задаваемое формальными степенными рядами

$$x=u(\xi, \eta)=\xi+\ldots, \quad y=v(\xi, \eta)=\eta+\ldots, \tag{1}$$

которое переводит $H(x, y)$ в гамильтониан $K(\rho)$ — формальный степенной ряд от $\rho_s=\xi_s^2+\eta_s^2$.

Если ряды (1) сходятся, то уравнения с функцией Гамильтона H можно просто проинтегрировать. Действительно, функции $\rho_1, \ldots, \rho_n$ — сходящиеся степенные ряды по x, y — образуют полный набор независимых интегралов в инволюции. Из канонических уравнений

$$\dot\xi_s=\Omega_s\eta_s, \quad \dot\eta_s=-\Omega_s\xi_s; \quad \Omega_s=2K'_{\rho_s}$$

следует, что $\xi_s(t)$ и $\eta_s(t)$ являются линейными комбинациями $\sin\Omega_s t$ и $\cos\Omega_s t$. Следовательно, исходные координаты x и y суть *условно-периодические функции* времени с частотамн $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$[1]. В частности, равновесие $z=0$ устойчиво.

Замечание. Условие теоремы Биркгофа еще не гарантирует устойчивости по Ляпунову положения равновесия гамильтоновой системы. В бесконечно дифференцируемом случае контрпример приведен в работе [151]. Для аналитических гамильтоновых систем контрпример пока отсутствует.

Теорема 6 (см. [188]). Если система с гамильтонианом $H=\sum_{k>2} H_k$ имеет n аналитических интегралов в инволюции

$$G_m=\frac{1}{2}\sum \varkappa_{ms}(x_s^2+y_s^2)+\sum_{k>2} G_{mk}$$

и $\det\|\varkappa_{ms}\|\neq 0$, то преобразование Биркгофа (1) сходится.

Этот результат показывает, почему мы (следуя Биркгофу) называем интегрируемыми гамильтоновы системы со сходящимся преобразованием Биркгофа. Оставляя обсуждение вопроса сходимости до гл. 7, мы укажем, что ряды Биркгофа, как правило, расходятся.

Теорема 5 допускает обобщение на случай, когда числа $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ рационально зависимы. Введем в рассмотрение все целочисленные векторы $j=(j_1, \ldots, j_n)$, для которых $\langle j, \alpha\rangle=$

---

[1] Функция $g: R\{t\}\to R$ называется *условно-периодической* функцией с частотами $\omega_1, \ldots, \omega_n$, если $g(t)=f(\omega_1 t, \ldots, \omega_n t)$, где $f: T^n\to R$.

$=\sum j_s\alpha_s=0$. Они образуют свободную абелеву группу Γ некоторого ранга r. Если числа α_s независимы, то, очевидно, $r=0$.

Выполним некоторую формальную каноническую замену переменных $x, y \to \xi, \eta$ вида (1). В новых переменных ξ, η гамильтониан $H(x, y)$ будет представлен некоторым формальным степенным рядом $K(\xi, \eta)$. Перейдем к комплексным переменным $\zeta_s=\xi_s+i\eta_s$, $\bar\zeta_s=\xi_s-i\eta_s$ и разложим K в ряд по произведениям

$$\zeta^k\bar\zeta^l=\prod_{s=1}^{n}\zeta_s^{k_s}\bar\zeta_s^{l_s}.$$

Определение. Формальный ряд $K(\xi, \eta)$ имеет *нормальную форму*, если его разложение содержит лишь члены $\zeta^k\bar\zeta^l$ с $(k-l)\in\Gamma$.

В частности, если $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ независимы, то в нормальной форме гамильтониана присутствуют только члены вида

$$\zeta^k\bar\zeta^k=(\xi^2_1+\eta^2_1)^{k_1}\ldots(\xi^2_n+\eta^2_n)^{k_n}.$$

Предложение 1. Ряд $K(\xi, \eta)$ имеет нормальную форму тогда и только тогда, когда $D(K)=0$, где

$$D=\sum_{s=1}^{n}\alpha_s\left(\xi_s\frac{\partial}{\partial\eta_s}-\eta_s\frac{\partial}{\partial\xi_s}\right).$$

Доказательство просто выводится из следующей формулы:

$$D(\zeta^k\bar\zeta^l)=i<\alpha, \quad k-l>(\zeta^k\bar\zeta^l).$$

Теорема 7. Существует формальное каноническое преобразование вида (1) такое, что исходный гамильтониан $H(x, y)$ преобразуется к нормальной форме, т. е. $D(K)=0$.

Доказательство можно найти в [30]. При $\Gamma=\{0\}$ эта теорема совпадает с теоремой Биркгофа.

Покажем, что в рассматриваемом случае можно указать $n-r$ коммутирующих независимых формальных интегралов вида

$$G=\frac{1}{2}\sum\beta_s(\xi^2_s+\eta^2_s),$$

где вектор $\beta=(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ ортогонален всем векторам из группы Γ. Действительно,

$$\frac{d}{dt}G=\sum\beta_s\left(\xi_s\frac{\partial K}{\partial\eta_s}-\eta_s\frac{\partial K}{\partial\xi_s}\right)=0,$$

если $\beta\perp\Gamma$. Так как $\operatorname{rang}\Gamma=r$, то можно найти $n-r$ таких линейно независимых векторов β.

Пример 2. Применим эти соображения к гамильтоновой системе с функцией Гамильтона

$$H=\frac{1}{2}\left(y^2_1+y^2_2+x^2_1+x^2_2+2x^2_1x_2-\frac{2}{3}x^3_2\right),$$

детально изученной Хеноном (M. Hénon) и Хейлесом (C. Heiles) с помощью численных расчетов. В этой задаче $n=2$ и $a_1=a_2=1$. Группа Γ определяется равенством $j_1+j_2=0$; $\dim\Gamma=1$. Чтобы получить интеграл, независимый от H, мы можем положить $\beta_1=\beta_2=1$. Тогда $G=(\xi_1^2+\eta_1^2+\xi_2^2+\eta_2^2)/2$. Если H преобразовать к нормальной форме по теореме 7, то

$$K=\frac{1}{2}(\xi_1^2+\eta_1^2+\xi_2^2+\eta_2^2)+\ldots$$

начинается с тех же членов, что и G. Можно показать прямым вычислением, что (с учетом слагаемых степени $\geqslant 2$) функции K и G действительно независимы. Обсуждение численных результатов Хенона и Хейлеса, в связи с построением формального интеграла, можно найти у Густавсона (F. Gustavson) [156] и Мозера [30].

Преобразование к нормальной форме можно производить не только в окрестности положений равновесия, но и, например, в окрестности периодических траекторий. Все сказанное выше с необходимыми изменениями справедливо и в этом случае. В следующей главе будут рассмотрены различные варианты теории возмущений, в которых функции Гамильтона также преобразуются к некоторому «нормальному» виду. Как и в случае нормальных форм Биркгофа, ряды теории возмущений в общем случае расходятся.

§ 2. Вполне интегрируемые системы

В этом параграфе мы продолжим изучение гамильтоновых систем, обладающих полным набором независимых интегралов в инволюции.

2.1. Переменные действие — угол.

Теорема 8. Пусть выполнены условия теоремы 3 и интегральное многообразие M_f компактно. Тогда

1) малая окрестность M_f в симплектическом многообразии M диффеоморфна прямому произведению $D\times T^n$, где D — малая область в R^n,

2) в $D\times T^n$ существуют симплектические координаты I, $\varphi \bmod 2\pi$ ($I\in D$, $\varphi\in T^n$) такие, что в этих переменных функции $F_1,\ldots,F_n$ зависят лишь от I, а симплектическая структура имеет вид $dI\wedge d\varphi$.

В частности, в переменных I, $\varphi \bmod 2\pi$ функция Гамильтона вполне интегрируемой системы с инвариантными торами принимает вид $H=H(I)$. При этом

$$\dot I=-H'_\varphi=0,\quad \dot\varphi=H_I=\omega(I). \tag{2}$$

Следовательно, $I(t)=I_0$, $\omega(I)=\omega(I_0)$. Переменные I, «нумерующие» инвариантные торы в $D\times T^n$, называются переменными *«действие»*, а равномерно меняющиеся координаты φ — переменными *«угол»*.

Пример 3. Рассмотрим гамильтонову систему с одной степенью свободы с функцией Гамильтона $H : R^2\{p, q\}\to R$. Пусть h_0 — некритическое значение функции H, причем ее линия уровня $H=h_0$ ограничена. Следовательно, при значениях h, близких к h_0, уровни $M_h=\{H=h\}$ диффеоморфны одномерным торам (окружностям). На каждом M_h, очевидно, существует угловая координата $\varphi \bmod 2\pi$, равномерно изменяющаяся со временем. В этой задаче сопряженной переменной действие служит $\Pi(h)/2\pi$, где $\Pi(h)$ — площадь области в R^2, ограниченной M_h. Это вытекает из следующей легко проверяемой формулы:

$$dp\wedge dq=\frac{1}{2\pi}d\Pi\wedge d\varphi.$$

По формуле Грина

$$I(h)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{H<h} dp\wedge dq=\frac{1}{2\pi}\oint\limits_{H=h} p dq.$$

Значит, переменная I имеет размерность действия (по Гамильтону), что объясняет ее название.

Если $H=(a^2p^2+b^2q^2)/2$, то M_h — эллипс, ограничивающий площадь $\Pi(h)=2\pi h/ab=2\pi h/\omega$ $(\omega=ab)$. Следовательно, для гармонического осциллятора переменная действие есть отношение энергии к частоте колебаний. Угловая переменная φ — это, конечно, фаза гармонических колебаний. $\triangle$

$\triangleleft$ В окрестности тора $M_f\approx T^n$ за координаты можно принять функции $I_i=F_i$ и углы $\varphi_i \bmod 2\pi$, существующие по теореме 3. Ввиду линейной независимости dF_i, функции I_i, φ_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ задают диффеоморфизм окрестности M_f на прямое произведение $D\times T^n$ (D — область в $R^n=\{I\}$). Введем в рассмотрение невырожденную матрицу скобок Пуассона

$$\left\|\begin{matrix}\{I_i, I_j\} & \{I_i, \varphi_j\}\\ \{\varphi_i, I_j\} & \{\varphi_i, \varphi_j\}\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix}0 & a_{ij}\\ -a_{ji} & b_{ij}\end{matrix}\right\|.$$

Согласно теореме 3, скобки $\{I_i, \varphi_j\}$ постоянны на M_f, следовательно, $a_{ij}=a_{ij}(I)$. Покажем, что b_{ij} тоже зависят лишь от I. Действительно, по тождеству Якоби

$$\{F_m, \{\varphi_i, \varphi_j\}\}+\{\varphi_i, \{\varphi_j, F_m\}\}+\{\varphi_j, \{F_m, \varphi_i\}\}=0.$$

Скобки $\{F_m, b_{ij}\}=\alpha_{ij}^m$ не зависят от φ. С другой стороны,

$$\alpha_{ij}^m=\sum_s\frac{\partial b_{ij}}{\partial\varphi_s}\{F_m, \varphi_s\}=\sum_s\frac{\partial b_{ij}}{\partial\varphi_s}a_{ms}.$$

Так как $\det\|a_{ms}\|\neq 0$, то отсюда найдем $\partial b_{ij}/\partial\varphi_s$ как функции только I. Следовательно, $b_{ij}=\{\varphi_i, \varphi_j\}=\sum f_{ij}^s(I)\varphi_s+g_{ij}(I)$. Поскольку $d\varphi_i$ — однозначные 1-формы вблизи M_f, то $f_{ij}^s\equiv 0$.

Выполним замену переменных $I_s = I_s(J_1, \ldots, J_n)$ так, чтобы $\{J_i, \varphi_j\} = \delta_{ij}$. Для этого надо решить систему уравнений

$$a_{ij}(I) = \{I_i, \varphi_j\} = \sum \frac{\partial I_i}{\partial J_s} \delta_{sj} = \frac{\partial I_i}{\partial J_j}.$$

Условие разрешимости этой системы

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial J_s} = \frac{\partial a_{is}}{\partial J_j} \Leftrightarrow \sum_k \frac{\partial a_{ij}}{\partial I_k} a_{ks} = \sum_k \frac{\partial a_{is}}{\partial I_k} a_{kj}$$

вытекает из тождества Якоби, примененного к функциям I_i, φ_j и φ_k.

Если переменные φ_i не коммутируют, то следует выполнить переход к новым угловым координатам $\psi_i \bmod 2\pi$ с помощью сдвига $\varphi_i = \psi_i + f_i(J)$. Функции f_i определяются следующей системой уравнений:

$$b_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial J_j} - \frac{\partial f_j}{\partial J_i} \quad (1 \leqslant i,\ j \leqslant n).$$

Условием ее локальной разрешимости является замкнутость 2-формы $\Sigma b_{ij} dI_i \wedge dI_j$. Замкнутость этой формы вытекает из замкнутости исходной симплектической структуры. Итак, существование симплектических переменных действие — угол I, $\psi \bmod 2\pi$ полностью доказано. ▷

Замечание. Пусть p, q — симплектические координаты в R^{2n} и пусть $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ — непрерывно зависящие от постоянных $f = (f_1, \ldots, f_n)$ базисные циклы на M_f. Так как форма $pdq - Id\varphi$ замкнута, то разность

$$\oint_{\gamma_s} pdq - \oint_{\gamma_s} Id\varphi = \oint_{\gamma_s} pdq - 2\pi I_s$$

постоянна. Следовательно.

$$I_s = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_s} pdq \quad (1 \leqslant s \leqslant n), \tag{3}$$

поскольку переменные действие сами определены с точностью до аддитивной постоянной. Формулы (3) наиболее эффективны при анализе систем с разделенными переменными (см. § 3). △

Гамильтонова система с функцией Гамильтона $H(I)$ называется *невырожденной* (в области $D \times T^n$), если якобиан

$$\frac{\partial \omega}{\partial I} = \det \left\| \frac{\partial^2 H}{\partial I^2} \right\| \neq 0$$

в области D. В этом случае почти все (в смысле меры Лебега) инвариантные торы нерезонансны, а резонансные торы всюду плотны в $D \times T^n$.

Система называется *собственно вырожденной*, если

$$\frac{\partial\omega}{\partial I}\equiv 0.$$

Причина вырождения может быть в том, что число первых интегралов, определенных во всем фазовом пространстве, больше n (но не все они, разумеется, находятся в инволюции). Так, например, в задаче Эйлера о вращении твердого тела по инерции, имеющей три степени свободы, существует четыре независимых первых интеграла. Их совместные уровни расслаивают трехмерные инвариантные торы на двумерные торы. Эта ситуация описывается обобщением теоремы 8. Обозначим $F_1, \ldots, F_{n+k}$ независимые первые интегралы гамильтоновой системы с гамильтонианом H и пусть по-прежнему $M_f = \{x\in M: F_i(x) = f_i,\ 1\leqslant i\leqslant n+k\}$. Считаем M_f связным и компактным.

Теорема 9 (Н. Н. Нехорошев [109]). Пусть первые $n-k$ функций F_i находятся в инволюции со всеми. Тогда

1) M_f диффеоморфны $(n-k)$-мерным торам,

2) в окрестности M_f существуют симплектические координаты I, p, $\varphi \bmod 2\pi$, q такие, что

$$I_s = I_s(F_1, \ldots, F_{n-k}),\quad 1\leqslant s\leqslant n-k,$$

а p, q зависят от всех F_i.

Симплектические координаты, о которых идет речь в теореме 9, можно назвать *обобщенными переменными действие—угол*.

Пример 4. Рассмотрим задачу Кеплера в трехмерном пространстве. Эта гамильтонова система с тремя степенями свободы имеет четыре $(3+1)$ интеграла: H (полная энергия), M^2 (квадрат модуля кинетического момента), M_y, M_z (проекции момента на оси y, z). Функции H и M^2 (в количестве $3-1$) коммутируют со всеми интегралами, что позволяет применить теорему 9. Обобщенные переменные действие—угол задачи Кеплера обычно обозначаются L, G, Θ, l, g, ϑ и называются *элементами Делоне* (C. Delaunay). Если a, e и i обозначают большую полуось, эксцентриситет и наклонение эллиптической орбиты, то

$$L=\sqrt{\gamma a},\quad G=\sqrt{\gamma a(1-e^2)},\quad \Theta=G\cos i.$$

Далее, ϑ — долгота восходящего узла, $g+\vartheta$ — долгота перигелия, l — средняя аномалия. В этих переменных $H=-\gamma^2/2L^2$, $M^2=G^2$, $M_z=\Theta$. Выражение M_y через элементы Делоне более громоздко. Подробности можно найти в [24]. В нашей задаче переменными I, φ — служат элементы L, G, l, g, а переменными p, q — элементы Θ, ϑ. Δ

В заключение обсудим вопрос, связанный с усреднением по

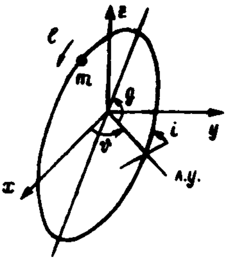


Рис. 25. Элементы Делоне

времени в интегрируемых гамильтоновых системах. Пусть $f: D\times T^n \to R$ — некоторая непрерывная функция. Рассмотрим ее поведение на решениях гамильтоновой системы (2). Образуем среднее по тору

$$\lambda(I)=(2\pi)^{-n}\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi} f(I,\varphi)\,d\varphi_1\wedge\ldots\wedge d\varphi_n$$

и временное среднее

$$g(I,\varphi)=\lim_{S\to\infty}\frac{1}{s}\int_0^s f(I,\omega t+\varphi)\,dt.$$

По теореме 4 предел всегда существует, однако если частоты $(\omega_1(I),\ldots,\omega_n(I))=\omega(I)$ зависимы, то среднее зависит от начальной фазы φ. При этом

$$(2\pi)^{-n}\int_{T^n} g(I,\varphi)\,d\varphi=\lambda(I)$$

для всех $I\in D$. На нерезонансных торах $g(I,\varphi)=\lambda(I)$ для всех $\varphi\in T^n$. Следовательно, временное среднее $g(I,\varphi)$ является, вообще говоря, разрывной функцией в области $D\times T^n$.

Предложение 2. Если тор $I=I_0$ нерезонансный, то равномерно по $\varphi\in T^n$

$$\lim_{I\to I_0} g(I,\varphi)=\lambda(I_0).$$

Таким образом, функция $g(I,\varphi)$ напоминает классический пример функции Римана, непрерывной в иррациональных и разрывной в рациональных точках. Доказательство предложения 2 содержится в работе [12].

2.2. **Некоммутативные наборы интегралов.** Пусть M — симплектическое многообразие размерности $2n$ и $F_1,\ldots,F_k: M\to R$ — гладкие независимые функции. Линейная оболочка $\mathcal{G}$ над полем R функций $F_1,\ldots,F_k$ имеет, следовательно, размерность k.

Предположим, что $\mathscr{G}$ замкнута относительно скобки Пуассона: $\{F_i, F_j\} = \Sigma c_{ij}^s F_s$. Тем самым $\mathscr{G}$ имеет структуру вещественной конечномерной алгебры Ли. Рангом ($\operatorname{rang}\mathscr{G}$) алгебры $\mathscr{G}$ назовем максимальный ранг матрицы $\|a_{ij}(F_1, \ldots, F_k)\|$, $a_{ij} = \{F_i, F_j\}$ (ср. с п. 2.2. гл. 3).

Теорема 10. Предположим, что на множестве уровня $M_f = \{x \in M : F_i(x) = f_i,\ 1 \leqslant i \leqslant k\}$ дифференциалы dF_i линейно независимы и алгебра $\mathscr{G}$ удовлетворяет условию

$$\dim\mathscr{G} + \operatorname{rang}\mathscr{G} = \dim M. \tag{4}$$

Если M_f связно и компактно, то оно диффеоморфно r-мерному тору T^r, где $r = \operatorname{rang}\mathscr{G}$. Далее, если функции $F_1, \ldots, F_k$ являются первыми интегралами гамильтоновой системы с гамильтонианом H, то на M_f можно выбрать угловые координаты $\varphi_1, \ldots, \varphi_r \bmod 2\pi$ так, чтобы уравнения Гамильтона $\dot{x} = IdH(x)$ на T^r приняли следующий вид: $\dot{\varphi}_s = \omega_s = \mathrm{const}$.

Это утверждение, родственное теореме 9, указано А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко [98]. Его можно вывести из теоремы Ли-Картана (теорема 16, п. 2.2., гл. 6), согласно которой в предположениях теоремы 10 существуют k функций $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$ от первых интегралов $F_1, \ldots, F_k$ в окрестности точки $F_s = f_s$ таких, что

$$\{\Phi_i, \Phi_{r+i}\} = 1,\ 1 \leqslant i \leqslant r,$$

а все остальные скобки $\{\Phi_i, \Phi_j\} = 0$. Следовательно, множество $N_c = \{x \in M : \Phi_m(x) = c,\ 1 \leqslant m \leqslant 2r\}$ является симплектическим подмногообразием в M, причем ограничения функций $\Phi_{2r+1}, \ldots, \Phi_k$ на N_c образуют полный набор коммутирующих интегралов. Заключение теоремы 10 вытекает теперь из теоремы 3.

Пример 5. Рассмотрим задачу о движении материальной точки в центральном поле. Соответствующая гамильтонова система имеет четыре независимых интеграла: H, M_x, M_y и M_z. Функции M_x, M_y, M_z порождают алгебру Ли, изоморфную $so(3)$, а функция H коммутирует с M_x, M_y, M_z. Если постоянные «интегралов площадей» M не все равны нулю, то ранг матрицы скобок Пуассона $|a_{ij}|$ равен, очевидно, двум. В этом случае выполнено равенство (4) и, следовательно, применима теорема 10. $\triangle$

В примере 5, как и во всех известных случаях, описываемых теоремой 10, можно указать полный набор интегралов в инволюции. Это наблюдение не случайно; оказывается, справедлива

Теорема 11. Если M компактно, то в предположениях теоремы 10 можно найти $n = \dim M/2$ независимых интегралов $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ в инволюции; эти функции являются полиномами от $F_1, \ldots, F_k$.

В работе А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко [99], где доказана эта теорема, содержится также предположение о том, что условие компактности M можно снять. Отметим, что полная интегрируемость вблизи множества уровня M_f вытекает, конечно, из теоремы Ли — Картана, что является, по сравнению с теоремой 11, более слабым результатом.

2.3. Примеры вполне интегрируемых систем

а) Уравнения Эйлера—Пуассона

$$A\dot{\omega}=A\omega\times\omega+e\times r,\quad \dot{e}=e\times\omega,$$

описывающие вращение тяжелого твердого тела с неподвижной точкой, содержат 6 параметров: три собственных значения оператора инерции A_1, A_2, A_3 и три координаты центра масс r_1, r_2, r_3 относительно его собственных осей. Как показано в гл. 3 (пример 14), уравнения Эйлера—Пуассона гамильтоновы на четырехмерных интегральных многообразиях

$$M_c=\{(\omega, e)\in R^6 : \langle A\omega, e\rangle=c,\ \langle e, e\rangle=1\}.$$

Один интеграл этих уравнений на M_c всегда существует: это интеграл энергии. Таким образом, для полной интегрируемости достаточно иметь еще один независимый интеграл. Перечислим известные случаи интегрируемости.

1) Случай Эйлера (1750 г.); $r_1=r_2=r_3=0$. Новый интеграл — $\langle A\omega, A\omega\rangle$ — квадрат модуля кинетического момента.

2) Случай Лагранжа (1788 г.): $A_1=A_2$, $r_1=r_2=0$. Новый интеграл — ω_3 — проекция угловой скорости на ось динамической симметрии.

3) Случай Ковалевской (1889 г.): $A_1=A_2=2A_3$, $r_3=0$. Интеграл, найденный Ковалевской —

$$(\omega_1^2-\omega_2^2-\nu e_2)^2+(2\omega_1\omega_2-\nu e_2)^2;\quad \nu=r/A_3,\quad r^2=r_1^2+r_2^2.$$

4) Случай Горячева—Чаплыгина (1900 г.): $A_1=A_2=4A_3$, $r_3=0$ и постоянная $c=\langle A\omega, e\rangle=0$. В отличие от случаев 1—3, мы имеем здесь интегрируемую гамильтонову систему лишь на одном интегральном уровне M_0.

Отметим, что все перечисленные интегрируемые случаи образуют в шестимерном пространстве параметров A_i, r_j многообразия одной и той же коразмерности, равной трем.

Уравнения движения в первых двух случаях подробно изучены с разных точек зрения в классических работах Эйлера, Пуансо, Лагранжа, Пуассона, Якоби. Случай Ковалевской нетривиален во многих отношениях. Он был найден из условия мероморфности решений уравнений Эйлера—Пуассона в комплексной плоскости времени. Случай Горячева—Чаплыгина намного проще: его можно проинтегрировать с помощью разделения переменных. Для доказательства запишем функцию Гамильтона в специальных канонических переменных L, G, l, g (гл. 3, § 2, п. 2.3):

$$H=\frac{G^2+3L^2}{8A_3}+r\left(\frac{L}{G}\sin l\cos g+\cos l\sin g\right).$$

Рассмотрим каноническое преобразование

$$L=p_1+p_2,\quad G=p_1-p_2,\quad q_1=l+g,\quad q_2=l-g.$$

В новых симплектических координатах p, q

$$H=\frac{p_1^3-p_2^3}{2A_3(p_1-p_2)}+r\left(\frac{p_1}{p_1-p_2}\sin q_1+\frac{p_2}{p_1-p_2}\sin q_2\right).$$

Полагая это выражение равным h и умножая на p_1-p_2, мы видим, что оно разделяется:

$$p_1^3/2A_3+rp_1\sin q_1-hp_1=p_2^3/2A_3-rp_2\sin q_2-hp_2.$$

Положим

$$p_1^3/2A_3+rp_1\sin q_1-Hp_1=\Gamma,\quad p_2^3/2A_3-rp_2\sin q_2-Hp_2=\Gamma. \quad (5)$$

Функция Г является первым интегралом уравнений движения. В традиционных переменных ω, e она имеет следующий вид:

$$\Gamma=2A_3^2f,\quad f=\omega_3(\omega_1^2+\omega_2^2)-\nu\omega_1e_3\quad (\nu=r/A_3).$$

Выпишем замкнутую систему уравнений для изменения p_1, p_2:

$$\dot p_1=-\frac{\partial H}{\partial q_1}=\frac{rp_1}{p_1-p_2}\cos q_1,\quad \dot p_2=-\frac{\partial H}{\partial q_2}=\frac{rp_2}{p_1-p_2}\cos q_2,$$

или, учитывая (5),

$$\dot p_1=\frac{\pm\sqrt{\Phi(p_1)}}{p_1-p_2},\quad \dot p_2=\frac{\pm\sqrt{\Phi(p_2)}}{p_1-p_2}, \quad (6)$$

где $\Phi(z)=r^2z^2-(\Gamma+Hz-z^3/2A_3)^2$ — многочлен шестой степени. Решения этих уравнений выражаются через гиперэллиптические функции времени. Переменные p_1 и p_2 изменяются в непересекающихся интервалах $[a_1, b_1]$ и $[a_2, b_2]$, где a_i, b_i — соседние корни многочлена $\Phi(z)$, между которыми он принимает положительные значения. Если корень $a_i(b_i)$ кратный, то решение $p_i(t)\to a_i(b_i)$ при $t\to+\infty$ или $t\to-\infty$. Кратные корни отвечают случаям зависимости интегралов H и Г. Ниже рассматривается лишь типичный случай простых корней многочлена $\Phi(z)$.

Введем угловые переменные φ_1, $\varphi_2 \bmod 2\pi$ по формулам

$$\varphi_i=\frac{\pi}{\tau_i}\int_{a_i}^{p_i}\frac{dz}{\pm\sqrt{\Phi(z)}},\quad \tau_i=\int_{a_i}^{b_i}\frac{dz}{\sqrt{\Phi(z)}}. \quad (7)$$

В новых переменных уравнения (6) примут следующий вид:

$$\dot\varphi_i=\frac{\pi}{2\tau_i(p_1(\varphi_1)-p_2(\varphi_2))}\quad (i=1, 2), \quad (8)$$

где $p_i(z)$ — действительные гиперэллиптические функции с периодом 2π, определяемые соотношениями (7). Поскольку траектории уравнений (8) на $T^2=\{\varphi_1, \varphi_2 \bmod 2\pi\}$ — прямые линии, то отношение частот соответствующих условно-периодических движений равно τ_1/τ_2 — отношению вещественных периодов гиперэллиптического интеграла

$$\int_{z_0}^{z}\frac{dz}{\sqrt{\Phi(z)}}.$$

Этот замечательный факт имеет место и для уравнений задачи Ковалевской (см. [12]).

в) Поскольку уравнения вида (8) часто встречаются при исследовании интегрируемых задач классической механики, мы изучим их более подробно. С этой целью рассмотрим дифференциальные уравнения на $T^n=\{x_1, \ldots, x_n \bmod 2\pi\}$ несколько более общего вида:

$$\dot{x}_i=\frac{\omega_i}{f(x)}, \quad 1\leqslant i\leqslant n, \tag{9}$$

где $\omega_i=\mathrm{const}\neq 0$, а f — гладкая (или аналитическая) положительная функция, заданная на T^n. Уравнения (9) имеют инвариантную меру

$$\operatorname{mes}(D)=\int_D f(x)\,dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n.$$

Меру всего тора T^n обозначим Λ. Усредним правые части дифференциального уравнения (9) с помощью оператора

$$\frac{1}{\Lambda}\int_{T^n}(\cdot)\,dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n.$$

В результате получим уравнения

$$\dot{\varphi}_i=\Omega_i=\frac{\omega_i}{\Lambda}=\mathrm{const} \quad (1\leqslant i\leqslant n). \tag{10}$$

Предложение 3. Предположим, что существует гладкое (аналитическое) решение $R(x_1, \ldots, x_n)$: $T^n\to R$ уравнения в частных производных

$$\left\langle \frac{\partial R}{\partial x}, \omega \right\rangle = f-\Lambda. \tag{11}$$

Тогда существует гладкая (аналитическая) замена переменных $x\to\varphi$, приводящая систему (9) к виду (10).

◁ Такой заменой является преобразование

$$\varphi_i=x_i+\frac{\omega_i}{\Lambda}R(x_1, \ldots, x_n). \ ▷$$

Пусть

$$f(x)=\frac{\Lambda}{(2\pi)^n}+\sum_{k\neq 0} f_k e^{i\langle k, x\rangle}.$$

Если $\omega_1, \ldots, \omega_n$ рационально несоизмеримы, то мы можем написать формальное равенство:

$$R(x)=\sum_{k\neq 0}\frac{f_k}{i\langle k, \omega\rangle}e^{i\langle k, x\rangle}. \tag{12}$$

Этот ряд определяет гладкую функцию $R(x)$, если, например, $f(x)$ — тригонометрический полином.

Предложение 4. Если f — гладкая функция, то для почти всех наборов чисел $\omega_1, \ldots, \omega_n$ уравнение (11) имеет гладкое решение.

◁ Действительно, коэффициенты Фурье f_k убывают с ростом k быстрее любой степени, а для почти всех ω справедлива степенная оценка

$$|\langle k, \omega\rangle| \geqslant c/|k|^\gamma; \quad c, \gamma = \mathrm{const}.$$

Следовательно, в этом случае ряд (12) абсолютно сходится и его сумма является гладкой периодической функцией. ▷

Если $f(x) = \sum_s f_s(x_s)$ (как в случае системы (8)), то уравнение (11) разделяется и поэтому оно всегда имеет решение независимо от арифметической природы частот $\omega_1, \ldots, \omega_n$:

$$R = \sum_{s=1}^{n} \frac{F_s(x_s) - I_s x_s}{\omega_s}, \quad F_s(x) = \int_0^x f_s(t)\,dt, \quad I_s = \frac{1}{2\pi} F_s(2\pi).$$

В частности, уравнения (8) всегда приводятся к виду (10), который должен существовать согласно теореме 3.

c) Задача о движении твердого тела в идеальной жидкости намного богаче интегрируемыми случаями. Уравнения движения имеют вид уравнений Кирхгофа (гл. 1, § 2, п. 2.4):

$$\dot{k} = k \times \omega + e \times u, \quad \dot{e} = e \times \omega, \tag{13}$$

где $\omega = H_k'$, $u = H_e'$; $H = \langle Ak, k\rangle/2 + \langle Bk, e\rangle + \langle Ce, e\rangle/2$. Поскольку матрицы A, B, C симметричны, то матрицу A можно привести к диагональному виду: $A = \mathrm{diag}(a_1, a_2, a_3)$. Такчм образом, задача Кирхгофа в общем случае содержит 15 параметров. Уравнения (13) всегда имеют три независимых интеграла: $F_1 = H$, $F_2 = \langle k, e\rangle$, $F_3 = \langle e, e\rangle$. Как и в случае тяжелого волчка, задача их интегрирования сводится к отысканию четвертого независимого интеграла. Укажем два случая интегрируемости; они открыты Клебшем (A. Clebsch) в 1871 г. и В. А. Стекловым в 1893 г. В случае Клебша предполагается, что $B = 0$, $C = \mathrm{diag}(c_1, c_2, c_3)$ и

$$a_1^{-1}(c_2 - c_3) + a_2^{-1}(c_3 - c_1) + a_3^{-1}(c_1 - c_2) = 0.$$

Дополнительный интеграл уравнений Кирхгофа имеет вид

$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - a_1 e_1^2 - a_2 e_2^2 - a_3 e_3^2.$$

В случае Стеклова $B = \mathrm{diag}(b_1, b_2, b_3)$, $C = \mathrm{diag}(c_1, c_2, c_3)$, причем

$$b_j = \mu(a_1 a_2 a_3) a_j^{-1} + \nu, \quad c_1 = \mu^2 a_1 (a_2 - a_3)^2 + \nu', \ \ldots \quad (\mu, \nu, \nu' = \mathrm{const}).$$

Дополнительный интеграл —

$$\sum_j (k_j^2 - 2\mu(a_j + \nu) k_j e_j) + \mu^2((a_2 - a_3)^2 + \nu'') e_1^2 + \ldots.$$

Параметры ν, ν', ν'' — несущественные: их появление связано с наличием классических интегралов F_2 и F_3.

d) Движение n точечных вихрей на плоскости (гл. 1, § 3, п. 3.4) описывается гамильтоновой системой с n степенями свободы. Уравнения Гамильтона имеют четыре первых интеграла H, $P_x=\Sigma\Gamma_s x_s$, $P_y=\Sigma\Gamma_s y_s$, $M=\Sigma\Gamma_s(x_s^2+y_s^2)/2$; здесь Γ_s — интенсивность s-го вихря. Легко сосчитать их скобки Пуассона: $\{P_x, P_y\}=-\Sigma\Gamma_s$, $\{P_x, M\}=-P_y$, $\{P_y, M\}=P_x$. Следовательно, задача n вихрей вполне интегрируема при $n\leqslant 3$. Случай $n=1$ тривиален, при $n=2$ независимыми коммутирующими интегралами являются, например, функции H и M, при $n=3$ — функции H, M и $P_x^2+P_y^2$. В задаче четырех вихрей независимых интегралов равно столько, сколько степеней свободы, однако они не все коммутируют. Можно, однако, показать, что если сумма интенсивностей вихрей равна нулю, то решения уравнений движения с нулевыми постоянными интегралов P_x и P_y можно найти в квадратурах.

§ 3. Некоторые методы интегрирования гамильтоновых систем

Общим моментом различных подходов к проблеме интегрирования гамильтоновых систем, изложенных в § 1, является наличие полного набора независимых коммутирующих интегралов. В этом параграфе мы укажем некоторые общие методы поиска первых интегралов — «законов сохранения». Самым простым и эффективным из них является

3.1. Метод разделения переменных. Рассмотрим систему канонических уравнений

$$\dot{p}=-H'_q, \quad \dot{q}=H'_p, \quad (p, q)\in R^{2n} \tag{14}$$

с функцией Гамильтона $H(p, q)$. Если нам удастся найти каноническое преобразование $g: p, q\mapsto x, y$ такое, что в новых переменных x, y функция $H(p, q)=K(x)$ не зависит от y, то канонические уравнения (14) легко интегрируются:

$$p=p(x, y),\ q=q(x, y);\ x=x_0,\ y=y_0+\omega(x_0)t,\ \omega(x)=K'_x. \tag{15}$$

Если $\det\|\partial p/\partial x\|\neq 0$, то каноническое преобразование g локально можно задать одной производящей функцией $S(x, q)$:

$$p=S'_q,\ y=S'_x.$$

Таким образом, задача интегрирования канонических уравнений сводится к отысканию производящей функции S, удовлетворяющей ввиду равенства $p=S_q'$ нелинейному уравнению в частных производных

$$H(S_q', q)=K(x). \tag{16}$$

Это уравнение получается из *уравнения Гамильтона — Якоби* $V'_t+H(V'_q, q)=0$ заменой $V(q, t)=-Kt+S(q)$. Подчеркнем, что функция K в уравнении (16) считается неопределенной и для ее однозначного задания следует привлекать дополнительные условия (см., например, применение уравнения (16) в теории возмущений гл. 5). Обычно полагают $K(x_1,\dots x_n)=x_1$; траектории системы с таким гамильтонианом являются прямыми в $R^{2n}=\{x, y\}$. Решение S уравнения (16), удовлетворяющее условию

$$\det \|\partial^2 S/\partial q \partial x\| \neq 0,$$

называется его *полным интегралом*.

Теорема 12. Если найден полный интеграл $S(x, q)$ уравнения (16), то канонические уравнения $\dot{p}=-H_q'$, $\dot{q}=H_p'$ интегрируются в квадратурах. При этом n функций $x_1(p, q),\dots$ $\dots, x_n(p, q)$, определяемых из уравнений $p=\partial S(x, q)/\partial q$, образуют полный набор независимых интегралов в инволюции.

Доказательство этой теоремы Якоби вытекает из предложения 9 гл. 1 и формул (15). Метод интегрирования уравнений Гамильтона с помощью теоремы 12 был предложен Якоби в 1837 г. Якоби опирался на более ранние работы Гамильтона (W. R. Hamilton). Метод Гамильтона — Якоби восходит к исследованиям Пфаффа (J. F. Pfaff) и Коши (A. L. Cauchy) по теории характеристик уравнений в частных производных.

Определение. Если уравнение (16) имеет полный интеграл вида $S(x, q)=\sum\limits_k S_k(q_k, x_1,\dots, x_n)$, то переменные $q_1,\dots$ $\dots, q_n$ называются *разделенными*.

Предложение 5. Предположим, что в некоторых симплектических координатах $(p, q)=(p_1,\dots, p_n, q_1,\dots, q_n)$ функция Гамильтона $H(p, q)$ имеет один из следующих видов:

$$1)\ H=f_n(f_{n-1}(\dots f_2(f_1(p_1, q_1), p_2, q_2),\dots, p_{n-1}, q_{n-1}), p_n, q_n),$$
$$1')\ H=\Sigma f_s(p_s, q_s)/\Sigma g_s(p_s, q_s).$$

Тогда функции

$$2)\ F_1=f_1(p_1, q_1),\ F_2=f_2(f_1(p_1, q_1), p_2, q_2),\dots, F_n=H,$$
$$2')\ F_0=H,\ F_s=f_s(p_s, q_s)-Hg(p_s, q_s),\ 1\leqslant s\leqslant n,$$

образуют полный набор интегралов в инволюции гамильтоновой системы с гамильтонианом H.

Рассмотрим для примера случай 1′. Полагая $K=x_0$, запишем уравнение (16):

$$\sum_k x_0 g_k\left(\frac{\partial S}{\partial q_k}, q_k\right)-f_k\left(\frac{\partial S}{\partial q_k}, q_k\right)=0.$$

Его полный интеграл можно найти в виде суммы

$$\sum_k S_k(q_k, x_0, x_k),$$

где S_k, как функция от q_k, удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$x_0 g_k\left(\frac{dS_k}{dq_k},\ q_k\right)-f_k\left(\frac{dS_k}{dq_k},\ q_k\right)=x_k,\qquad \sum_{k>1} x_k=0.$$

Переменные $x_0, x_1, \ldots, x_n$ являются первыми интегралами в инволюции (теорема 12). Любые n из них в общем случае независимы.

Предложение 5 описывает наиболее простые и часто встречающиеся виды разделения переменных. При решении задачи Горячева—Чаплыгина (п. 2.3) мы уже фактически использовали разделение симплектических координат вида 1′. Отметим, что случаи 1 и 1′ предложения 5 могут встречаться в сочетании друг с другом, кроме того, возможны более сложные виды разделения переменных.

Пример 6 (Штекель (P. Stäckel), 1895 г.). Пусть Φ — определитель матрицы $\|\varphi_{ij}(q_j)\|$ $(1\leqslant i,\ j\leqslant n)$ а Φ_{ij} — алгебраическое дополнение элемента φ_{ij}. Предположим, что в симплектических координатах $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$ функция Гамильтона имеет следующий вид:

$$H(p, q)=\sum_{s=1}^{n} \Phi_{1s}(q) f_s(p_s, q_s)/\Phi(p, q); \tag{17}$$

тогда уравнения Гамильтона интегрируются. Полагая $K(x)=$ $=x_1$, запишем уравнение (16):

$$\sum_m \Phi_{1m}\left[\sum_k x_k\varphi_{km}(q_m)-f_m\left(\frac{\partial S}{\partial q_m}, q_m\right)\right]=0.$$

Его полный интеграл можно найти в виде суммы

$$S(x, q)=\sum_m S_m(q_m, x_1, \ldots, x_n),$$

где S_k, как функция q_k, удовлетворяет уравнению

$$f_m\left(\frac{dS_m}{dq_m}, q_m\right)=\sum_k x_k\varphi_{km}(q_m).$$

Можно показать, что n функций

$$F_k(p, q)=\sum_s \frac{\Phi_{ks} f_s}{\Phi}$$

образуют полный инволютивный набор интегралов гамильтоновой системы с гамильтонианом (17). $\triangle$

Для отыскания разделенных переменных нет, конечно, никакого общего правила. «Поэтому мы должны идти обратным путем и, найдя какую-нибудь замечательную подстановку, разыскивать задачи, в которых она может быть с успехом применена»[1]. Мы укажем здесь одну такую «замечательную подстановку», связанную с *эллиптическими координатами* в R^n.

---

[1] Якоби, «Лекции по динамике».

Пусть $0<a_1<a_2<\ldots<a_n$ — различные положительные числа. Для любого $x=(x_1,\ldots,x_n)\in R^n$ уравнение

$$f(\lambda)=\sum_s \frac{x^2_s}{a_s-\lambda}=1 \tag{18}$$

определяет n действительных чисел $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, разделяющих $a_1,\ldots,a_n$ (рис. 26). Числа $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ служат криволинейными координатами в R^n. Они называются *эллиптическими координатами* Якоби.

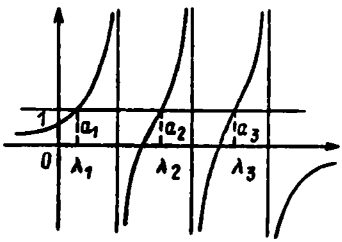


Рис. 26

Можно показать, что

$$x^2_i=\prod_{s=1}^{n}(a_i-\lambda_s)\Big/\prod_{\substack{s=1\\ s\neq i}}^{n}(a_i-a_s). \tag{19}$$

С помощью этой формулы нетрудно вывести соотношение $4\sum_s \dot{x}^2_s=\sum_s M_s\dot{\lambda}^2_s$,

$$M_s=\prod_{i\neq s}(\lambda_i-\lambda_s)\Big/\prod_i(a_i-\lambda_s). \tag{19$'$}$$

Отметим любопытную двойственность формул (19) и (19′). Перейдем теперь к симплектическим координатам λ_s, $\mu_s=M_s\dot{\lambda}_s/4$. Тогда энергия свободного движения точки в R^n примет следующий вид:

$$H=\frac{1}{2}\sum \dot{x}_s^2=2\sum \mu_s^2\Big/M_s(\lambda). \tag{20}$$

Здесь непосредственно не видно, как симплектические переменные λ, μ могут быть разделены. Воспользуемся следующей формулой Якоби: сумма

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\lambda^m_s}{\prod\limits_{i\neq s}(\lambda_s-\lambda_i)}$$

равна нулю при $m<n-1$ и равна 1 при $m=n-1$. С помощью этой формулы равенство (20) можно представить в следующей форме:

$$\sum_s \frac{\sum\limits_{m=0}^{n-1} F_m\lambda^m_s}{\prod\limits_{l\neq s}(\lambda_s-\lambda_l)}=2\sum_s \frac{\mu^2_s \prod\limits_j(\lambda_s-a_j)}{\prod\limits_{l\neq s}(\lambda_s-\lambda_l)}.$$

Здесь $F_{n-1}=H$, а $F_0, F_1,\ldots,F_{n-2}$ пока произвольны. Теперь переменные λ, μ разделяются: мы можем положить

$$\sum_{m=0}^{n-1} F_m\lambda^m_s=2\mu^2_s\prod_{j=1}^{n}(\lambda_s-a_j).$$

Из этой системы уравнений найдем $F_0, F_1,\ldots,F_{n-2}$ как функции λ, μ; они дадут нам полный набор независимых интегралов в инволюции.

Этот результат на первый взгляд может показаться тривиальным: полная интегрируемость задачи о движении по инерции точки в R^n очевидна с самого начала. Однако из полученных выше формул разделения переменных вытекает совсем не очевидный результат Якоби об интегрируемости задачи о движении точки по поверхности многомерного эллипсоида в отсутствии внешних сил (согласно принципу Мопертюи, траектории движущейся точки совпадают с геодезическими линиями). В самом деле, зафиксируем значение переменной λ_1; скажем, $\lambda_1=0$. Тогда $\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ будут криволинейными ортогональными координатами на поверхности $(n-1)$-мерного эллипсоида $\Sigma x_s^2/a_s=1$. Гамильтониан задачи о геодезических задается формулой (20), в которой надо положить $\lambda_1=0$, $\mu_1=0$. Разделение переменных λ_2, $\mu_2,\ldots,\lambda_n$, μ_n осуществляется по указанной выше схеме. Отметим, что в случае двумерного эллипсоида гамильтониан имеет вид 1′ из предложения 5. Если мы зафиксируем значение одной из переменных $\lambda_2,\ldots,\lambda_n$, то тем же методом получим полную интегрируемость задачи о геодезических на многомерных гиперболоидах всех возможных типов. Результаты качественного анализа поведения геодезических на поверхности двумерного эллипсоида, основанного на формулах Якоби, можно найти в [6]. Якоби показал, что задача о движении по инерции по эллипсоиду останется интегрируемой, если на точку будет действовать упругая сила, линия действия которой проходит через центр эллипсоида.

В качестве еще одного применения эллиптических координат мы рассмотрим *задачу* о плоском движении материальной точки в поле притяжения *двух неподвижных центров*. Эта задача была проинтегрирована Эйлером в 1760 г. Пусть x_1, x_2 — декартовы координаты в плоскости движения и $(0, c)$, $(0, -c)$ —

координаты притягивающих центров; $c>0$. Перейдем к эллиптическим координатам в плоскости $R^2=\{x_1, x_2\}$, считая, что $a_2-a_1=2c$. Это означает, в частности, что при фиксированных значениях λ уравнение

$$\frac{x^2_1}{a_1-\lambda}+\frac{x^2_2}{a_2-\lambda}=1$$

задает коническое сечение, фокусы которого совпадают с неподвижными центрами. В симплектических координатах λ, μ функция Гамильтона этой задачи равна

$$H=2\frac{(a_1-\lambda_1)(a_2-\lambda_1)}{\lambda_2-\lambda_1}\mu^2_1+2\frac{(a_1-\lambda_2)(a_2-\lambda_2)}{\lambda_1-\lambda_2}\mu^2_2+U(\lambda_1, \lambda_2),$$

где U — потенциальная энергия взаимодействия. Пусть r_1, r_2 — расстояния от движущейся точки до притягивающих центров. Используя формулу (19) при $n=2$, нетрудно получить, что

$$r^2_1=(x_2+c)^2+x^2_1=(\sqrt{a_2+\lambda_1}+\sqrt{a_2+\lambda_2})^2$$

$$r^2_2=(x_2-c)^2+x^2_1=(\sqrt{a_2+\lambda_1}-\sqrt{a_2+\lambda_2})^2,$$

Следовательно,

$$U=\frac{\gamma_1}{r_1}+\frac{\gamma_2}{r_2}=\frac{\gamma_1 r_1+\gamma_2 r_2}{r_1 r_2}=\frac{(\gamma_1+\gamma_2)\sqrt{a_2+\lambda_1}-(\gamma_1-\gamma_2)\sqrt{a_2+\lambda_2}}{\lambda_1-\lambda_2}.$$

В итоге переменные λ_1, μ_1 и λ_2, μ_2 разделяются и, согласно предложению 5, задача двух неподвижных центров интегрируема. Лагранж показал, что интегрируемость сохранится, если на точку будет дополнительно действовать упругая сила, направленная на середину отрезка, соединяющего притягивающие центры. Качественное исследование задачи двух центров можно найти в книге Шарлье [24].

В заключение укажем две важные задачи, решаемые методом разделения переменных:

1) Задача Кеплера в однородном силовом поле: речь идет о движении точки под действием гравитационного притяжения неподвижного центра и дополнительной силы, постоянной по величине и направлению. Разделение переменных достигается с помощью введения *«параболических» координат*; они получаются из эллиптических координат предельным переходом, когда один из фокусов удаляется в бесконечность. Эта задача решена Лагранжем в 1766 году.

2) Задача о движении точки по сфере $\langle x, x\rangle=1$, $x\in R^n$ в силовом поле с квадратичным потенциалом $U(x)=\langle Ax, x\rangle$. Разделение переменных осуществляется в эллиптических координатах. При $n=3$ эта задача впервые рассмотрена Нейманом (C. Neumann) в 1859 году. Случай произвольного n подробно обсуждается в [32].

3.2. **Метод $L-A$ пары.** Этот метод основан на представлении дифференциального уравнения $\dot{x}=f(x)$, $x=(x_1,\ldots,x_n)$ в виде следующего матричного уравнения

$$\dot{L}=[A, L]=AL-LA; \tag{21}$$

здесь элементы квадратных матриц A и L (возможно, комплексные) являются функциями от $x_1,\ldots,x_n$. Уравнение (21) естественным образом возникает во многих задачах механики и физики.

Пример 7. Уравнение Эйлера $\dot{M}=M\times\omega$ можно представить в виде (21), если положить

$$L=\begin{Vmatrix} 0 & M_1 & -M_2 \\ -M_1 & 0 & M_3 \\ M_2 & -M_3 & 0 \end{Vmatrix}, \quad A=\begin{Vmatrix} 0 & \omega_1 & -\omega_2 \\ -\omega_1 & 0 & \omega_3 \\ \omega_2 & -\omega_3 & 0 \end{Vmatrix},$$

где $(M_1, M_2, M_3)=M$ и $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)=\omega$. Собственными значениями матрицы L являются числа 0, $\pm i\langle M, M\rangle$; они постоянны на траекториях уравнений Эйлера.

Это замечание, оказывается, не случайно.

Предложение 6. Собственные значения оператора L являются первыми интегралами уравнения (21).

$\lhd$ Имеем $L(t+s)=e^{sA}L(t)e^{-sA}+o(s)$ при $s\to 0$. Поэтому $\det(L(t+s)-\lambda E) = \det(L(t)-\lambda E) + o(s)$. Следовательно $\det(L(t)-\lambda E)$ не зависит от t. $\rhd$

На практике удобнее, конечно, иметь дело не с самими характеристическими числами λ, а с симметрическими полиномами от λ — коэффициентами векового уравнения $\det(L-\lambda E)=0$. Вопрос о независимости найденных этим методом первых интегралов и об их полноте в каждом конкретном случае составляет предмет отдельного исследования.

Пример 8 (Цепочка Тоды (M. Toda)). Рассмотрим n частиц на прямой с координатами $x_1,\ldots,x_n$, удовлетворяющими уравнениям

$$\ddot{x}_i=-U'_{x_i}, \quad U=\sum_{k=1}^{n}\exp(x_k-x_{k+1}), \quad x_{n+1}\equiv x_1. \tag{22}$$

Как показали Хенон, Фляшка (H. Flaschka) и С. В. Манаков (1974 г.), эта система может быть представлена $L-A$ парой. Можно положить, например,

$$L=\begin{Vmatrix} b_1 & a_1 & \ldots & 0 \\ a_1 & b_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & a_{n-1} & b_n \end{Vmatrix}, \quad A=\begin{Vmatrix} 0 & a_1 & \ldots & 0 \\ -a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & -a_{n-1} & 0 \end{Vmatrix},$$

где $2a_k = \exp((x_k - x_{k+1})/2)$, $2b_k = -\dot{x}_k$. Из предложения 6 вытекает, что собственные числа L являются интегралами уравнений (22); можно показать, что они независимы и коммутируют. В работе Мозера [178] этим же методом установлена интегрируемость системы точек равной массы на пр мой с потенциалом парного взаимодействия

$$\sum_{k<l} u(x_k - x_l),$$

где $u(z)$ совпадает с одной из функций z^{-2}, $\sin^{-2} z$, $\mathrm{sh}^{-2} z$. С. И. Пидкуйко и А. М. Степин обобщили этот результат, установив полную интегрируемость уравнений движения точек с потенциалом $\wp(z)$ [113]. Потенциалы, рассмотренные Мозером, являются вырожденными случаями $\wp$-функции Вейерштрасса. Движение нескольких точек на прямой можно рассматривать как движение одной точки в камере Вейля алгебры Ли A_k под действием потенциала, растущего у стенок камеры. Аналогичные задачи для других простых алгебр Ли (с такими же потенциалами) тоже интегрируемы (А. М. Переломов, М. А. Ольшанецкий). Интегрируемой оказывается и задача о свободном движении твердого тела в R^n (С. В. Манаков).

Отметим, что L—A-представление найдено почти во всех проинтегрированных задачах классической механики. Найдены также различные алгебро-геометрические конструкции, проясняющие причины существования «скрытых» законов сохранения. Наличие L—A-представления помогает не только найти первые интегралы, но и осуществить явное интегрирование уравнений движения. Обсуждение различных аспектов современной теории интегрирования гамильтоновых систем можно найти в [32], [65], [136].

§ 4. Интегрируемые неголономные системы

4.1. Дифференциальные уравнения с инвариантной мерой. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in R^n \tag{23}$$

и пусть g^t — его фазовый поток. Предположим, что уравнение (23) имеет интегральный инвариант с некоторой гладкой плотностью $M(x)$: т. е. для любой измеримой области $D \subset R^n$ и для всех t выполнено равенство

$$\int_{g^t(D)} M(x)\,dx = \int_D M(x)\,dx. \tag{24}$$

Напомним хорошо известное утверждение Лиувилля о существовании интегрального инварианта.

Предложение 7. Гладкая функция $M: R^n \to R$ является плотностью инварианта

$$\int M(x)dx$$

тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{div}(Mf) = 0. \tag{25}$$

Если $M(x) > 0$ при всех x, то формула (24) определяет *меру* в R^n, *инвариантную* относительно действия g^t. Наличие инвариантной меры облегчает интегрирование дифференциального уравнения; например, при $n=2$ оно интегрируется в квадратурах. Действительно, из (25) следует локальная разрешимость системы уравнений

$$F'_{x_1} = Mf_1, \quad F'_{x_2} = -Mf_2.$$

Функция $F(x_1, x_2)$ находится отсюда простыми квадратурами. Остается заметить, что F — первый интеграл системы (23). По Эйлеру функция M называется еще интегрирующим множителем.

Теорема 13. Предположим, что система уравнений (23) с инвариантной мерой (24) имеет $n-2$ первых интеграла $F_1, \ldots, F_{n-2}$. Пусть на инвариантном множестве $M_c = \{x \in R^n: F_s(x) = c_s, 1 \leqslant s \leqslant n-2\}$ функции $F_1, \ldots, F_{n-2}$ независимы. Тогда

1) решения уравнения (23), лежащие на M_c, находятся квадратурами.

Если L_c — связная компактная компонента множества уровня и $f(x) \neq 0$ на L_c, то

2) L_c — гладкое многообразие, диффеоморфное двумерному тору,

3) на L_c можно подобрать угловые координаты x, $y \bmod 2\pi$ так, чтобы в этих переменных уравнение (23) на L_c приняло следующий вид

$$\dot{x} = \lambda/\Phi(x, y), \quad \dot{y} = \mu/\Phi(x, y), \tag{26}$$

где λ, $\mu = \mathrm{const}$, а Φ — гладкая положительная функция, 2π-периодическая по x и y.

Укажем основные моменты доказательства. Поскольку векторное поле f касается M_c, то дифференциальное уравнение (23) можно ограничить на M_c. Это уравнение на M_c будет иметь инвариантную меру (см. гл. 1, п. 3.6; там же приведена явная формула для плотности инвариантной меры). Интегрируемость в квадратурах на M_c вытекает теперь из замечания Эйлера. Заключение 1 теоремы 13 (отмеченное впервые Якоби) тем самым доказано. Заключение 2 составляет известный топологический факт, что всякое связное, компактное, ориентируемое двумерное многообразие, допускающее касательное поле без особых точек, диффеоморфно двумерному тору. Заключение 3 фактически является *теоремой Колмогорова* [87]

(1953 г.) о приведении дифференциальных уравнений на торе с гладкой инвариантной мерой.

Пример 9. Рассмотрим задачу С. А. Чаплыгина о качении уравновешенного, но динамически несимметричного шара по горизонтальной шероховатой плоскости (гл. 3, п. 1.2, пример 5). Движение шара описывается следующей системой уравнений в $R^6=R^3\{\omega\}\times R^3\{\gamma\}$:

$$\dot{k}+\omega\times k=0,\quad \dot{\gamma}+\omega\times\gamma=0;\quad k=I\omega+ma^2\gamma\times(\omega\times\gamma). \tag{27}$$

Здесь I — тензор инерции шара, m — его масса, a — радиус. Эти уравнения имеют инвариантную меру с плотностью

$$M=1/\sqrt{(ma^2)^{-1}-\langle\gamma,(I+ma^2E)^{-1}\gamma\rangle},\quad E=\|\delta_{ij}\|.$$

Учитывая наличие четырех независимых интегралов $F_1=\langle k,k\rangle$, $F_2=\langle k,\gamma\rangle$, $F_3=\langle\gamma,\gamma\rangle=1$; $F_4=\langle k,\omega\rangle$, мы видим, что уравнения (27) интегрируются в квадратурах. Отметим, что система уравнений (27) не имеет положений равновесия на некритических множествах уровня M_c. Действительно, если $\dot{\gamma}=0$, то векторы ω и γ зависимы. Это, в свою очередь, влечет линейную зависимость дифференциалов dF_2 и dF_4.

Наиболее просто уравнения (27) интегрируются в случае, когда постоянная интеграла «площадей» F_2 равна нулю. В эллиптических координатах u,v на сфере Пуассона $\langle\gamma,\gamma\rangle=1$ уравнения движения на уровне M_c можно привести к следующему виду:

$$\dot{u}=\frac{\sqrt{P_5(u)}}{u(u^{-1}-v^{-1})\Phi(u,v)},\quad \dot{v}=\frac{\sqrt{P_5(v)}}{v(u^{-1}-v^{-1})\Phi(u,v)};$$

$$\Phi=\sqrt{(\alpha-u)(\alpha-v)}.$$

Коэффициенты многочлена 5-ой степени P_5 и постоянная α зависят от параметров задачи и констант первых интегралов (детали можно найти в [19]). Переменные u, v изменяются в различных замкнутых интервалах, где полином P_5 принимает неотрицательные значения. Униформизирующая замена переменных (7) (п. 2.3), в которой вместо $\Phi(z)$ следует подставить функцию $P_5(z)/z^2$, вводит угловые окординаты на M_c, в которых уравнение движения приобретает вид (26). При этом отношение λ/μ (число вращения касательного векторного поля) равно отношеиию вещественных периодов абелева интеграла

$$\int\frac{z\,dz}{\sqrt{P_5(z)}}.$$

В отличие от уравнений (8), в задаче Чаплыгина переменные x, y не разделяются. Δ

Согласно предложениям 3 и 4, для почти всех наборов чисел (λ,μ) дифференциальное уравнение (26) в некоторых угловых координатах x', y' может быть приведено к уравнению

$$\dot{x}'=\lambda',\quad \dot{y}'=\mu'\quad(\lambda',\mu'=\mathrm{const}). \tag{28}$$

Предложение 8. Предположим, что λ и μ рационально несоизмеримы, и пусть $\Phi(x, y)=\Sigma\Phi_{mn}\exp i(mx+ny)$. Если гладкой заменой угловых переменных $x, y\mapsto x', y'$ систему (26) можно привести к системе (28), то

$$\sum_{|m|+|n|\neq 0}\left|\frac{\Phi_{mn}}{m\lambda+n\mu}\right|^2<\infty. \tag{29}$$

В общем случае (когда разложение Фурье функции Φ содержит все гармоники) точки $(\lambda, \mu)\in R^2$, для которых ряд (29) расходится, всюду плотны в R^2. Обсуждение вопросов приводимости уравнений (26) можно найти в работе А. Н. Колмогорова [87].

В заключение укажем некоторые качественные свойства решений системы (26), не зависящие от арифметической природы чисел λ, μ. Обозначим начальные значения x, y соответственно x_0, y_0. Из теоремы 4 (в предложении несоизмеримости λ и μ) вытекает, что

$$x=x_0+\frac{\lambda}{\langle\Phi\rangle}t+X(t, x_0, y_0),\quad y=y_0+\frac{\mu}{\langle\Phi\rangle}t+Y(t, x_0, y_0),$$

где

$$\langle\Phi\rangle=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi dx dy,\quad \lim_{t\to\infty}\frac{X}{t}=\lim_{t\to\infty}\frac{Y}{t}=0.$$

Расстояние d между точками $T^2=\{x, y \bmod 2\pi\}$ зададим метрикой dx^2+dy^2.

Теорема 14 ([12]). Если λ и μ несоизмеримы, то

а) для любых $\varepsilon>0$, $T>0$ существует $\tau>T$ такое, что

$$|X(\tau, x_0, y_0)|<\varepsilon,\ |Y(\tau, x_0, y_0)|<\varepsilon,\ d\{(x(\tau), y(\tau)), (x_0, y_0)\}<\varepsilon$$

для всех $(x_0, y_0)\in T^2$;

в) если $\Phi(x_0, y_0)\neq\langle\Phi\rangle$, то функция $X^2(t, x_0, y_0)+Y^2(t, x_0, y_0)$ имеет бесконечно много нулей при $t\to\infty$;

с) существуют точки $(x_0, y_0)\in T^2$, $\Phi(x_0, y_0)=\langle\Phi\rangle$ такие, что одновременно $X(t, x_0, y_0)\geqslant 0$ $(\leqslant 0)$, $Y(t, x_0, y_0)\geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ для всех t.

Из заключения а) вытекает, в частности, что (при несоизмеримых λ и μ) эргодический фазовый поток системы (26) не обладает свойством перемешивания[1]. Отметим, что если число вращения λ/μ аномально быстро приближается рациональными числами, то система (26) может обладать слабым перемешиванием (или, что то же самое, ее спектр непрерывен) (см. [87]).

4.2. Некоторые решенные задачи неголономной механики.

а) Покажем, что задача о качении уравновешенного динамически несимметричного шара по шероховатой плоскости

[1] См. сб. «Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления», 1985, 2.

останется интегрируемой, если частицы шара будут притягиваться этой плоскостью пропорционально расстоянию. Поскольку центр масс шара совпадает с его геометрическим центром, то потенциал можно вычислить по формуле

$$U(\gamma)=\frac{\varepsilon}{2}\int\langle r,\gamma\rangle^2 dm=\frac{\varepsilon}{2}\langle J\gamma,\gamma\rangle, \tag{30}$$

где γ — единичный вектор вертикали, r — радиус-вектор частиц шара, J — тензор инерции шара относительно его центра. Силы притяжения создают вращательный момент

$$\int r\times(\varepsilon\langle r,\gamma\rangle\gamma)\,dm=\varepsilon\int\langle r,\gamma\rangle(r\times\gamma)\,dm=U_\gamma'\times\gamma=\varepsilon(J\gamma\times\gamma).$$

Для того, чтобы получить момент сил относительно точки касания, надо добавить момент суммарной силы

$$\varepsilon\int\langle r,\gamma\rangle\gamma\,dm=\varepsilon\left\langle\int r\,dm,\gamma\right\rangle\gamma,$$

равный нулю из-за совпадения центра масс с геометрическим центром шара. Таким образом, уравнения качения шара можно представить в следующем виде (ср. с уравнениями (5) из п. 1.2 гл. 3):

$$\dot{k}+\omega\times k=-\varepsilon(J\gamma\times\gamma),\quad \dot{\gamma}+\omega\times\gamma=0. \tag{31}$$

Они имеют четыре независимых интеграла: $F_1=\langle k,\omega\rangle+$ $+\varepsilon\langle J\gamma,\gamma\rangle$,

$$F_2=\langle k,\gamma\rangle,\quad F_3=\langle\gamma,\gamma\rangle=1,\quad F_4=\langle k,k\rangle-\langle A\gamma,\gamma\rangle,$$

где $A=\mathrm{diag}(A_1, A_2, A_3)$, $A_1=\varepsilon(J_2+ma^2)(J_3+ma^2),\ldots$.

Поскольку уравнения (31) имеют инвариантную меру с плотностью (27), то, по теореме 13, они интегрируемы.

Отметим, что задача о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки в осесимметричном силовом поле с потенциалом (30) тоже интегрируема. Кроме трех классических интегралов F_1, F_2, F_3 она обладает интегралом F_4, в котором надо положить $a=0$. Интеграл F_4 найден впервые Тиссераном (F. Tisserand) в 1872 году в связи с исследованием вращения небесных тел. Дело в том, что потенциал твердого тела в центральном ньютоновском силовом поле совпадает с потенциалом (30) с точностью до $O(\rho^4/R^4)$, где ρ — характерный размер твердого тела, а R — расстояние от тела до притягивающего центра. Как заметил впервые В. А. Стеклов (1902 г.), уравнения Эйлера—Пуассона с потенциалом (30) совпадают по виду с уравнениями Кирхгофа задачи о движении твердого тела в идеальной жидкости в случае Клебша (1871 г.). При этом интеграл F_4 в точности соответствует интегралу, найденному Клебшем.

в) В качестве еще одного примера рассмотрим задачу о качении без проскальзования однородного диска по горизонтальной шероховатой плоскости с учетом действия силы тяжести. Эта задача решена Аппелем и Кортевегом (D. Korteweg) в

1899 г. Введем подвижную систему координат $Oxyz$, где O — центр диска, ось Oz ортогональна плоскости диска, ось Ox всегда горизонтальна, ось Oy содержит точку контакта. Пусть u, v, w и p, q, r — проекции на эти оси скорости центра масс и угловой скорости вращения диска. Если a — радиус катящегося диска, то

$$u = -ar, \quad v = 0, \quad w = ap.$$

Пусть m — масса, A и C — моменты инерции диска относительно осей Ox и Oz. Справедливы следующие уравнения движения (см. [21]):

$$(C + ma^2)\dot{r} = ma^2 pq, \qquad A\dot{q} = (Cr - Aq \operatorname{ctg} \vartheta)\, p,$$

где ϑ — угол между осью Oz и вертикалью. Так как $p = \dot{\vartheta}$, то из этой системы можно получить линейные дифференциальные уравнения, определяющие интегралы уравнений движения $q = q(\vartheta)$ и $r = r(\vartheta)$:

$$(c + ma^2)\frac{dr}{d\vartheta} = ma^2 q, \qquad A\frac{dq}{d\vartheta} = Cr - Aq \operatorname{ctg} \vartheta. \tag{32}$$

Как отмечено Аппелем и Кортевегом, функции $q(\vartheta)$ и $r(\vartheta)$ выражаются через гипергеометрический ряд Гаусса. Угол ϑ как функцию t можно найти простой квадратурой из интеграла энергии

$$m(u^2 + v^2 + w^2) + A(p^2 + q^2) + Cr^2 = -2mga \sin \vartheta + h, \tag{33}$$

где g — ускорение силы тяжести, h — произвольная постоянная. Используя эти формулы, можно показать, что для почти всех начальных состояний (за исключением точек, лежащих на некоторой гиперповерхности в фазовом пространстве) выполнено неравенство $0 < \vartheta(t) < \pi$. Этот результат объясняет удивительную способность диска катиться по плоскости, не падая. Действительно, пусть $q_1(\vartheta)$, $r_1(\vartheta)$ — решение линейной системы (32), ограниченное при $\vartheta \to 0$ ($\vartheta \to \pi$). Если $q_2(\vartheta)$, $r_2(\vartheta)$ — другое решение, то, по формуле Лиувилля,

$$q_1(\vartheta) r_2(\vartheta) - q_2(\vartheta) r_1(\vartheta) = c \exp \int_{\pi/2}^{\vartheta} \operatorname{ctg} x\, dx = c / \sin \vartheta, \quad c = \text{const}.$$

Поскольку правая часть этого равенства стремится к $+\infty$ при $\vartheta \to 0$ (π), то любое решение, ограниченное при $\vartheta \to 0$ (или $\vartheta \to \pi$), линейно зависимо с решением $q = q_1(\vartheta)$, $r = r_1(\vartheta)$. Итак, почти наверное $q^2 + r^2 \to \infty$ на концах интервала $(0, \pi)$. Поскольку правая часть интеграла энергии (33) ограничена, то, очевидно, при всех значениях t справедливо неравенство $\varepsilon < \vartheta(t) < \pi - \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$.

Методом Аппеля — Кортевега можно решить родственную задачу о движении круглого однородного диска с острым краем по гладкому горизонтальному льду. Неголономная связь состоит в том, что скорость точки касания диска параллельна его горизонтальному диаметру. В отличие от задачи Аппеля — Кортевега, здесь первые интегралы выражаются через элементарные функции и имеют простой механический смысл: сохраняются проекции кинетического момента диска, вычисленного относительно его центра, на вертикаль и на ось Oz. Для почти всех начальных условий диск никогда не упадет на лед и траектория его точки касания ограничена. Более точно, точка касания описывает некоторую замкнутую кривую, которая, в свою очередь, вращается как твердое тело вокруг некоторой точки с постоянной угловой скоростью (детали см. в работе [79]).

c) Следуя Г. К. Суслову, рассмотрим еще задачу о вращении вокруг неподвижной точки твердого тела с неинтегрируемой связью $\langle a, \omega\rangle=0$, a — постоянный вектор. Пусть тело вращается в осесимметричном силовом поле с потенциалом $U(\gamma)$. Следуя методу множителей Лагранжа (гл. 1, п. 2.5), запишем уравнения движения:

$$A\dot{\omega}+\omega\times A\omega=\gamma\times U'_{\gamma}+\lambda a, \quad \dot{\gamma}+\omega\times\gamma=0. \tag{34}$$

Используя уравнение связи $\langle a, \omega\rangle=0$, множитель Лагранжа можно найти как функцию от ω и γ:

$$\lambda=-\langle a, A^{-1}(A\omega\times\omega)+A^{-1}(\gamma\times U_{\gamma}')\rangle/\langle a, A^{-1}a\rangle.$$

Уравнения (34) всегда имеют три первых независимых интеграла:

$$F_1=\langle A\omega, \omega\rangle/2+U(\gamma), \quad F_2=\langle\gamma,\gamma\rangle, \quad F_3=\langle a, \omega\rangle.$$

Для реальных движений $F_2=1$, $F_3=0$. Таким образом, задача интегрирования уравнений (34) сводится к нахождению инвариантной меры (ее существование вовсе не очевидно) и четвертого независимого интеграла. Рассмотрим частный случай, когда a является собственным вектором оператора A. При этом предположении фазовый поток системы (34) сохраняет «стандартную» меру в $R^6=R^3\{\omega\}\times R^3\{\gamma\}$. Пусть тело вращается в однородном силовом поле: $U(\gamma)=\langle b, \gamma\rangle$. Если $\langle a, b\rangle=0$, то уравнения (34) допускают четвертый интеграл $F_4=\langle A\omega, b\rangle$ и, следовательно, интегрируются в квадратурах. Этот случай отмечен Е. И. Харламовой в 1957 г. Укажем еще один случай интегрируемости: если силовая функция задана формулой (30), то уравнения вращения допускают четвертый интеграл — интеграл Тиссерана (см. а)).

Отметим в заключение, что в неголономной механике известно сравнительно немного точно решенных задач (практически полную информацию можно найти в книгах [19], [21], [17]). Однако в самых простых из них поведение системы может быть весьма неожиданным. Примерами могут служить уже упоминавшиеся в главе 1 (п. 2.5) конек на наклонной плоскости и однородный шар в вертикальном цилиндре.

Глава 5

ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ

В природе часто встречаются системы, отличающиеся от интегрируемых малыми возмущениями. Например, задача о движении планет вокруг Солнца может рассматриваться как возмущение интегрируемой задачи о движении невзаимодействующих точек вокруг неподвижного притягивающего центра. Для изучения таких задач развиты методы, которые объединяют под общим названием — *теория возмущений*. Эти методы обычно просты и эффективны. Часто они позволяют описать возмущенное движение почти с такой же полнотой, как невозмущенное. Некоторые из них предложили и использовали еще Лагранж и Лаплас (P. S. Laplace) в своих исследованиях вековых возмущений планет. Вопросы обоснования в теории возмущений достаточно сложны и начали рассматриваться относительно недавно. Многие из них решены далеко не полностью.

В настоящей главе рассматриваются методы теории возмущений, которые группируются вокруг принципа усреднения и идеи о разделении движения на плавный дрейф и быстрые осцилляции.

§ 1. Усреднение возмущений

1.1. Принцип усреднения. Если на интегрируемую консервативную систему наложить малое возмущение, то величины, бывшие интегралами в невозмущенной задаче, начнут медленно эволюционировать. На временах порядка 1 эволюция мала. На временах порядка $1/\varepsilon$, где ε — малость возмущения, эволюция может быть значительной (порядка 1). Формулируемый ниже основной принцип, который называют *принципом усреднения*, позволяет написать замкнутые уравнения для эволюции, содержащие только плавно изменяющиеся переменные.

Будем считать, что совместные уровни однозначных интегралов невозмущенной интегрируемой системы являются торами, несущими условно-периодические движения (как в случае полной интегрируемости), и что уравнения невозмущенного движения могут быть записаны в виде

$$\dot I = 0, \quad I \in B \subset R^n, \qquad \dot\varphi = \omega(I), \quad \varphi \in T^m. \tag{1}$$

Здесь $I=(I_1,\ldots,I_n)$ — набор интегралов задачи, уравнение $I=\mathrm{const}$ выделяет инвариантный m-мерный тор, $\varphi=(\varphi_1,\ldots$ $\ldots,\varphi_m)$ — координаты на этом торе (фазы), $\omega(I)=(\omega_1(I),\ldots$ $\ldots,\omega_m(I))$ — частоты невозмущенного движения, B — область в R^n, где определены переменные I.

Пример 1. Если невозмущенная система описывает движение по кеплеровским эллипсам не взаимодействующих планет вокруг притягивающего их Солнца, то интегралы I_j — это большие полуоси, эксцентриситеты, наклонения, долготы узлов и перицентров, фазы φ_j — средние аномалии планет. Δ

Малое возмущение системы приводит к появлению малых добавок в уравнениях движения. В переменных I, φ уравнения возмущенного движения примут вид

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \varepsilon f(I, \varphi, \varepsilon), \\ \dot{\varphi} &= \omega(I) + \varepsilon g(I, \varphi, \varepsilon). \end{aligned} \tag{2}$$

Функции f и g имеют по φ период 2π. В уравнениях (2) переменные I называют *медленными переменными*, а фазы φ — *быстрыми переменными*.

В приложениях обычно основной интерес представляет поведение медленных переменных. *Принцип усреднения* состоит в том, что для приближенного описания их изменения на временах порядка $1/\varepsilon$ система возмущенных уравнений (2) заменяется на *усредненную систему*

$$\dot{J} = \varepsilon F(J), \quad F(J) = (2\pi)^{-m} \oint_{T^m} f(J, \varphi, 0)\, d\varphi. \tag{3}$$

Таким образом, получается замкнутая система для описания медленного движения, которая гораздо проще исходной; например, шаг численного интегрирования для нее можно выбрать в $1/\varepsilon$ раз большим. Поэтому принцип усреднения чрезвычайно продуктивен и широко используется на практике.

Пусть $I(t)$ — медленное движение в исходной системе, а $J(t)$ — в усредненной, $J(0) = I(0)$. Согласно принципу усреднения, $I(t)$ заменяется на $J(t)$. Для обоснования этого рецепта (который не всегда приводит к правильному ответу) надо установить условия, при которых $|I(t) - J(t)| \to 0$ при $0 \leqslant t \leqslant 1/\varepsilon$ и $\varepsilon \to 0$. Если последнее соотношение справедливо, то желательно иметь оценки сверху для $|I(t) - J(t)|$ при $0 \leqslant t \leqslant 1/\varepsilon$. Иногда такие оценки удается установить и для гораздо больших интервалов времени. Эти вопросы еще далеки от полного решения, они обсуждаются в следующих пунктах параграфа.

Пример 2. Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{I} = \varepsilon(a + b\cos\varphi), \quad \dot{\varphi} = \omega$$

и соответствующую усредненную систему

$$\dot{J} = \varepsilon a.$$

Здесь

$$\begin{aligned} I(t) &= I_0 + \varepsilon a t + b\,[\sin(\omega t + \varphi_0) - \sin\varphi_0]/\omega, \\ J(t) &= I_0 + \varepsilon a t. \end{aligned}$$

Решения точной системы осциллируют около решений усредненной с амплитудой порядка ε и частотой ω (рис. 27). *Усреднение* сводится к отбрасыванию в правой части уравнения чисто периодического члена. Этот член имеет тот же порядок, что и оставленный. Однако он осциллирует и приводит лишь к малым осцилляциям решения. Оставленный член вызывает дрейф, который за время $1/(\varepsilon a)$ изменяет I на величину 1.

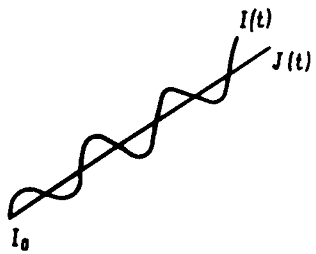


Рис. 27

Принцип усреднения основан на представлении, что и в общем случае отброшенные при усреднении осциллирующие члены приводят только к малым осцилляциям, которые накладываются на дрейф, описываемый усредненной системой. Δ

Сформулированный принцип усреднения использовали Лагранж и Лаплас в теории вековых возмущений орбит планет. После их работ этот принцип стал стандартным средством небесной механики. Позднее его переоткрыл и использовал для решения задач теории нелинейных колебаний Ван-дер-Поль (B. van der Pol). Широкое применение принципа усреднения в теории колебаний было стимулировано работами Л. И. Мандельштама, Н. Д. Папалекси, Н. М. Крылова, Н. Н. Боголюбова и Ю. А. Митропольского. История принципа довольно запутана, ее изложение содержится во вводных параграфах монографии [96]. В настоящее время принцип усреднения в различных вариантах (и иногда под различными названиями) используется во многих прикладных областях.

Пусть теперь в уравнениях невозмущенного движения частоты тождественно целочисленно соизмеримы, т. е. выполнено одно или несколько соотношений вида $(k, \omega)\equiv 0$, где $k=(k_1, \ldots, k_m)\in Z^m\setminus\{0\}$, $(k, \omega)=k_1\omega_1+\ldots+k_m\omega_m$. Тогда траектории невозмущенного движения на торе T^m заполняют торы меньшей размерности и усреднение по всему T^m не может, вообще говоря, правильно описывать движение. Другой довод — в разложении правых частей возмущенной системы в ряд Фурье имеются неосциллирующие гармоники, которые нет причин отбрасывать. Если частоты в течение достаточно долгого времени близки к соизмеримости, то усреднение по всему тору также может оказаться неприменимым. В этих случаях, называемых резонансными, используется следующая процедура, называемая частичным усреднением. Пусть задано одно или несколько *резонансных соотношений*, т. е. равенств вида $(k, \omega)=0$ с целочисленными несократимыми векторами коэффициентов k. Через K обозначим подгруппу целочисленной решетки Z^m, порожденную этими векторами, а через r — ранг K. Гармоника $\exp(i(k, \varphi))$ называется резонансной, если $k \in K$. *Частично усредненной* с учетом заданной системы резонансных соотношений (или просто *резонансов*) называется система

$$\dot{J}=\varepsilon F_k(J, \varphi), \qquad \dot{\varphi}=\omega(J)+\varepsilon G_K(J, \varphi), \tag{4}$$

где F_K и G_K — суммы резонансных гармоник рядов Фурье функций $f(I, \varphi, 0)$ и $g(I, \varphi, 0)$.

Чтобы оправдать термин «частичное усреднение», сделаем в уравнениях возмущенного движения замену фаз $\vartheta=R\varphi$, где R — целочисленная унимодулярная матрица, первые r строк которой принадлежат K (такая матрица существует согласно [145]). Обозначим $\gamma=(\gamma_1, \ldots, \gamma_r)$ — первые r компонент ϑ, а $\chi=(\chi_1, \ldots, \chi_{m-r})$ — остальные компоненты. Усредняя по χ полученную систему, придем к уравнениям, эквивалентным (4).

Это рассуждение показывает также, что для описания изменения J в (4) достаточно рассмотреть систему из $n+r$ уравнений для J, γ. Переменные J медленные, а γ — полубыстрые: они изменяются медленно вблизи точек фазового пространства, где справедливы заданные резонансные соотношения, и быстро — вдали от этих точек.

Пример 3. Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{I}_1=-\varepsilon \sin(\varphi_1-\varphi_2), \quad \dot{I}_2=\varepsilon[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+\sin\varphi_2],$$
$$\dot{\varphi}_1=1+I_1, \quad \dot{\varphi}_2=1.$$

Введем $\gamma=\varphi_1-\varphi_2$. Фазовый портрет задачи на плоскости I_1, γ показан на рис. 28. Колебательная область имеет ширину $4\sqrt{\varepsilon}$. Независимое усреднение по φ_1, φ_2 при $I_1(0)=0$, $\gamma(0)=0$ при-

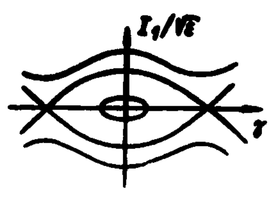


Рис. 28

водит за время $1/\varepsilon$ к погрешности 1. Частичное усреднение с учетом резонанса $\omega_1-\omega_2=0$ дает систему

$$\dot{J}_1=-\varepsilon \sin\gamma, \quad \dot{J}_2=\varepsilon\cos\gamma, \quad \dot{\gamma}=J_1,$$

которая описывает движение на временах $1/\varepsilon$ с точностью порядка ε. $\triangle$

1.2. Процедура исключения быстрых переменных. Нерезонансный случай. Основную роль во всех вопросах, связанных с принципом усреднения, играют замены переменных, позволяющие с заданной точностью исключить из уравнений возмущенного движения быстрые фазы и таким образом отделить медленное движение от быстрого. В первом приближении эти замены приводят исходную систему уравнений к усредненной. Их сконструировали Линдштедт (A. Lindstedt), Болин, Делоне, Ньюком (S. Newcomb), Пуанкаре, Цейпель (H. Zeipel), Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов. Опишем построение этих замен (в неконсервативном случае; консервативный случай разобран в § 2).

Нужная замена переменных $I, \varphi \mapsto J, \psi$ ищется в виде формального ряда

$$\begin{aligned} I &= J + \varepsilon u_1(J, \psi) + \varepsilon^2 u_2(J, \psi) + \ldots \\ \varphi &= \psi + \varepsilon v_1(J, \psi) + \varepsilon^2 v_2(J, \psi) + \ldots, \end{aligned} \tag{5}$$

где u_j и v_j имеют по ψ период 2π. Постараемся подобрать u_j и v_j так, чтобы правые части уравнений для новых переменных не содержали быстрых фаз, т. е. уравнения имели вид

$$\begin{aligned} \dot J &= \varepsilon F_0(J) + \varepsilon^2 F_1(J) + \ldots \\ \dot\psi &= \omega(J) + \varepsilon G_0(J) + \varepsilon^2 G_1(J) + \ldots. \end{aligned} \tag{6}$$

Предположим, что правые части уравнений возмущенного движения (2) аналитичны по всем аргументам. Подставляя замену переменных в эти уравнения, заменяя в получившихся соотношениях $\dot J$ и $\dot\psi$ с помощью (6) и приравнивая члены одинакового порядка по ε получим следующую систему соотношений:

$$\begin{aligned} F_0(J) &= f(J, \psi, 0) - \frac{\partial u_1}{\partial\psi}\omega, \\ G_0(J) &= g(J, \psi, 0) + \frac{\partial\omega}{\partial J}u_1 - \frac{\partial v_1}{\partial\psi}\omega, \\ F_i(J) &= X_i(J, \psi) - \frac{\partial u_{i+1}}{\partial\psi}\omega, \quad i \geqslant 1, \\ G_i(J) &= Y_i(J, \psi) + \frac{\partial\omega}{\partial J}u_{i+1} - \frac{\partial v_{i+1}}{\partial\psi}\omega. \end{aligned} \tag{7}$$

Функции X_i, Y_i определяются членами $u_1, v_1, \ldots, u_i, v_i$ в разложении (5).

Чтобы записать решения полученной системы (7), введем дополнительные обозначения. Пусть функция $h(J, \psi)$ имеет по ψ период 2π. Запишем ее разложение в ряд Фурье:

$$h(J, \psi) = h_0(J) + \sum_{k \neq 0} h_k(J) \exp(i(k, \psi)).$$

Будем обозначать

$$\langle h \rangle^{\psi} = h_0(J), \quad \{h\}^{\psi} = \sum_{k \neq 0} \frac{h_k}{i(k, \omega)} \exp(i(k, \psi)). \tag{8}$$

Очевидно,

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \{h\}^{\psi} \omega = h - \langle h \rangle^{\psi}.$$

Оператор $\{\cdot\}^{\psi}$ называют *интегрирующим оператором*. Он не определен, когда знаменатели в (8) обращаются в нуль или очень малы по сравнению с числителями. Трудности, связанные с наличием этих *малых знаменателей*, являются основными в теории возмущений. Но мы временно забудем о них и будем считать, что интегрирующий оператор можно применить ко всем встречающимся ниже функциям. Тогда решение системы (7) дается формулами

$$\begin{aligned} F_0(J) &= \langle f(J, \psi, 0) \rangle^{\psi}, \\ u_1(J, \psi) &= \{f(J, \psi, 0)\}^{\psi} + u_1^0(J), \\ G_0(J) &= \left\langle g(J, \psi, 0) + \frac{\partial \omega}{\partial J} u_1(J, \psi) \right\rangle^{\psi}, \\ v_1(J, \psi) &= \left\{ g(J, \psi, 0) + \frac{\partial \omega}{\partial J} u_1(J, \psi) \right\}^{\psi} + v_1^0(J), \\ F_i &= \langle X_i \rangle^{\psi}, \qquad u_{i+1} = \{X_i\}^{\psi} + u_{i+1}^0, \quad i \geqslant 1, \\ G_i &= \left\langle Y_i + \frac{\partial \omega}{\partial J} u_{i+1} \right\rangle^{\psi}, \quad v_{i+1} = \left\{ Y_i + \frac{\partial \omega}{\partial J} u_{i+1} \right\}^{\psi} + v_{i+1}^0. \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь $u_i^0(J)$, $v_i^0(J)$ — произвольные функции. Обычно выбирают $u_i^0 = v_i^0 = 0$.

Если оборвать ряды для замены переменных (5) на членах порядка $r \geqslant 1$, то получится замена переменных, которая приводит уравнения возмущенного движения к виду

$$\dot{J} = \varepsilon F_{\Sigma}(J, \varepsilon) + \varepsilon^{r+1} \alpha(J, \psi, \varepsilon),$$

$$\dot{\psi} = \omega(J) + \varepsilon G_{\Sigma}(J, \varepsilon) + \varepsilon^{r+1} \beta(J, \psi, \varepsilon).$$

Таким образом, зависимость от фаз оказывается отнесенной в члены порядка ε^{r+1}. Если отбросить эти члены, то система уравнений для J отщепится. Если найти ее решения, то изменение фазы ψ определится с помощью квадратуры. Возвращаясь к исходным переменным, видим, что изменение I сводится к медленному дрейфу (описываемому уравнением для J), на который накладываются малые быстрые осцилляции (описываемые с помощью замены переменных), точно так же, как в примере 1 и на рис. 27. Изменение φ представляется как вращение с медленно изменяющейся частотой, на которое также накладываются осцилляции. В первом приближении эта процедура приводит к усредненной системе (с добавлением уравнений, приближенно описывающих изменение фаз).

Выше предполагалось, что в формулах для замены переменных знаменатели $(k, \omega(J))$ не обращаются в нуль в рассматриваемой области. Это предположение выполнено для одночастотных систем с не обращающейся в нуль частотой, систем с постоянными несоизмеримыми частотами, систем с конечным числом гармоник в возмущении и в некоторых других случаях (см. ниже пп. 1.4—1.6). Но для общих многочастотных систем это условие нарушается. Здесь есть две трудности.

Во-первых, в общем случае знаменатели $(k, \omega(J))$, $k \in Z^m \setminus \setminus \{0\}$ обращаются в нуль на всюду плотном множестве, так что формулы (8), (9) не позволяют даже определить u_i, v_i. Эта трудность обходится с помощью следующей модификации замены переменных. Возмущающие функции εf, εg представляются в виде

$$\varepsilon f = f^{(1)} + f^{(2)} + \ldots, \quad \varepsilon g = g^{(1)} + g^{(2)} + \ldots,$$

где $f^{(m)}$, $g^{(m)}$ — тригонометрические полиномы от φ, ограниченные сверху по модулю величиной порядка ε^m. Описанная выше процедура исключения быстрых фаз проводится так, как будто $f^{(m)}$, $g^{(m)}$ — члены порядка ε^m в разложении возмущения по ε (при этом не учитывается, что $f^{(m)}/\varepsilon^m$ и $g^{(m)}/\varepsilon^m$ сами зависят от ε). Тогда в каждом порядке процедуры возникает лишь конечное число малых знаменателей. Соответственно, функции u_i, v_i не определены лишь на конечном числе резонансных поверхностей $(k, \omega(J)) = 0$, зависящем от ε и номера i. В каждом конечном приближении отображение $J, \psi \mapsto I, \varphi$ оказывается не определенным на конечном (зависящем от ε и от номера приближения) числе поверхностей. Вне некоторой окрестности этих поверхностей (обычно ширины порядка $\sqrt{\varepsilon}$) разности $|I-J|$, $|\varphi-\psi|$ оказываются достаточно малыми (обычно тоже порядка $\sqrt{\varepsilon}$), а отображение $J, \psi \mapsto I, \varphi$ действительно определяет замену переменных. Подстановка этой замены в уравнения позволяет отнести зависимость от фаз в члены более высокого порядка малости.

Вторая трудность состоит в том, что в ходе эволюции частоты $\omega(I)$ сами медленно изменяются. Поэтому на интервале времени $1/\varepsilon$ точка может многократно пересекать окрестности резонансных поверхностей. Следовательно, даже замена переменных первого приближения не определена, вообще говоря, вдоль всей траектории на интервале времени $1/\varepsilon$. Однако эта замена является основным средством анализа движения между резонансами. Происходящие при пересечении резонансной поверхности явления рассмотрены ниже в пп. 1.7, 1.8. Грубо говоря, дело здесь обстоит так: суммарная мера резонансных областей оказывается малой; поэтому для большинства начальных данных движение в них не может сильно повлиять на эволюцию и принцип усреднения позволяет описать большинство траекторий.

Замечания. 1. Существуют разные варианты построения замены переменных, осуществляющей разделение быстрого и медленного движений. В частности, эту замену можно искать не в виде ряда, как выше, а в виде композиции последовательных замен переменных. Первая замена определяется формулами

$$I=J+\varepsilon u_1(J, \psi), \quad \varphi=\psi+\varepsilon v_1(J, \psi),$$

где u_1, v_1 — определенные выше первые члены рядов (5). Уравнения возмущенного движения для новых переменных содержат фазу в членах порядка ε^2. Затем делается аналогичная замена, переносящая зависимость от фазы в члены порядка ε^3 и т. д. Этим методом строится та же самая формальная замена (5), однако технически он часто оказывается более удобным. Для гамильтоновых возмущений метод последовательных замен обладает замечательным свойством квадратичной сходимости: вторая замена переносит зависимость от фазы в члены порядка ε^4, третья — в члены порядка ε^8 и т. д. (см. ниже п. 2.2. В).

2. Еще один вариант процедуры разделения движений получается на основе следующего соображения. Преобразование $x=(I, \varphi)\mapsto(J, \psi)=y$ вида (5) является преобразованием сдвига за «время» ε для некоторой формальной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{d\varepsilon}=W(y, \varepsilon), \quad W=W_1(y)+\varepsilon W_2(y)+\ldots .$$

Обратно, каждая такая система уравнений порождает преобразование сдвига вида (5). Поэтому вместо функций u_i, v_i, входящих в (5), можно искать функции W_i, задающие соответствующую систему дифференциальных уравнений. Получающаяся процедура удобна тем, что в ней имеются достаточно простые общие формулы для высших приближений. Подробности см. в [154]. Δ

1.3. Процедура исключения быстрых переменных. Резонансный случай. Пусть задана подгруппа целочисленных векторов K, определяющая возможные резонансы. Постараемся подобрать замену переменных $I, \varphi\mapsto J, \psi$ так, чтобы правые части уравнений возмущенного движения в новых переменных зависели от быстрых фаз только через комбинации (k, ψ), $k\in K$. Замену переменных будем искать в виде рядов (5).

Уравнения для J, ψ должны иметь вид

$$\begin{aligned} \dot J&= \varepsilon F_0(J, \gamma)+\varepsilon^2F_1(J, \gamma)+\ldots \\ \dot\psi&=\omega(J)+\varepsilon G_0(J, \gamma)+\ldots, \end{aligned} \tag{10}$$

где $\gamma=(\gamma_1, \ldots, \gamma_r)$ — полубыстрые переменные (независимые комбинации фаз ψ с коэффициентами из K), r — ранг K. Введем еще быстрые переменные $\chi=(\chi_1, \ldots, \chi_{n-r})$, $(\gamma, \chi)=R\psi$, где R — унимодулярная матрица, введенная в конце п. 1.1. Подставляя замену переменных в уравнения возмущенного движения, выражая $\dot{J}$, $\dot{\psi}$ согласно (10) и приравнивая члены одинакового порядка по ε, получаем систему соотношений вида (7), но функции F_i, G_i в ее правых частях зависят уже от J и от γ. Частное решение этой[1] системы дается формулами

$$F_0(J, \gamma) = \langle f(J, \psi, 0) \rangle^{\chi},$$

$$u_1(J, \psi) = \{f(J, \psi, 0) - F_0(J, \gamma)\}^{\psi} + u_1{}^0(J),$$

$$G_0(J, \gamma) = \langle g(J, \psi, 0) + \frac{\partial\omega}{\partial J} u_1(J, \psi) \rangle^{\chi},$$

$$v_1(J, \psi) = \left\{g(J, \psi, 0) + \frac{\partial\omega}{\partial J} u_1(J, \psi) - G_0(J, \gamma)\right\}^{\psi} + v^0{}_1(J),$$

$$F_i = \langle X_i \rangle^{\chi}, \quad u_{i+1} = \{X_i - F_i\}^{\psi} + u^0_{i+1}(J),$$

$$G_i = \langle Y_i + \frac{\partial\omega}{\partial J} u_{i+1} \rangle^{\chi}, \; v_{i+1} = \left\{Y_i + \frac{\partial\omega}{\partial J} u_{i+1} - G_i\right\}^{\psi} + v^0_{i+1}(J).$$

Здесь символ $\langle \cdot \rangle^{\chi}$ обозначает усреднение по χ (предварительно надо выразить ψ через γ, χ), символ $\{\cdot\}^{\psi}$, как и в п. 1.2, обозначает применение интегрирующего оператора (8), а $u_i{}^0$, $v_i{}^0$ — произвольные функции от J. В формулах возникают знаменатели (k, ω) только для $k \notin K$.

Обрывая ряды замены переменных на членах r-го порядка, получим систему уравнений, в которой зависимость от быстрых фаз содержится в членах порядка ε^{r+1}. Отбрасывая эти члены, получим укороченную систему, которую следует применять для описания движения в окрестности резонансных поверхностей $(k, \omega(J)) = 0$, $k \in K$. В первом приближении эта система совпадает с частично усредненной с учетом заданных резонансов системой (4) (только надо выбрать $u_1{}^0 = 0$).

1.4. Усреднение в одночастотных системах. Будем рассматривать систему уравнений возмущенного движения (2), в которой есть только одна фаза. Будем предполагать, что частота изменения этой фазы $\omega(I)$ не обращается в 0: $\omega(I) > c^{-1} > 0$, $c = \mathrm{const}$. В таком случае систему называют еще *системой с быстро вращающейся фазой*. Такие системы — один из основных объектов теории возмущений. Вот некоторые примеры:

— колебательная система с одной степенью свободы, на которую наложено малое неконсервативное возмущение (например, маятник с малым возмущающим моментом);

— колебательная система с одной степенью свободы, параметры которой плавно меняются (например, маятник с медленно изменяющейся длиной [63]);

— система, на которую действует малое быстроосциллирующее периодическое по времени возмущение;

— движение в задаче двух тел при наличии малого возмущения (малой тяги [67], сопротивления среды);

[1] В общем решении $u_i{}^0$, $v_i{}^0$ зависят от J, γ и изменяются F_i, G_i.

— вращение твердого тела около центра масс при наличии малого возмущающего момента, который не зависит от расположения тела в пространстве (тяга установленных на теле реактивных двигателей, сопротивление среды [43], [105]); здесь невозмущенное движение происходит по Эйлеру—Пуансо и имеет две быстрые фазы, но одна из них, характеризующая прецессию тела около вектора кинетического момента, не входит в уравнения;

— движение заряженной частицы в магнитном поле, мало изменяющемся на длине ларморовского радиуса [52], [180]; в невозмущенной системе магнитное поле постоянно и движение происходит по ларморовской окружности, дрейфующей вдоль силовых линий поля, а роль быстрой фазы играет угловая координата точки на этой окружности.

Много примеров анализа движения одночастотных систем с помощью усреднения содержится в [63].

В одночастотном случае обоснование принципа усреднения проведено практически полностью. Ниже приводятся результаты о точности усреднения на временах порядка $1/\varepsilon$, свойствах высших приближений процедуры исключения быстрой переменной и о связи интегральных многообразий (стационарных точек, циклов, инвариантных торов) точной и усредненной систем.

Замечание. Ниже всюду в формулировках теорем опускаются естественные условия продолжимости решений: предполагается, что решение усредненной системы $J(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant$ $\leqslant 1/\varepsilon$ не подходит слишком близко к границе области определения системы. Δ

Пусть в уравнениях возмущенного движения (2) частота ω и возмущения f, g — гладкие функции в своей области определения $B \times S^1 \times [0, \varepsilon_0]$, ограниченные вместе со своими производными первого порядка постоянной C.

Теорема 1. Различие между медленным движением $I(t)$ в точной системе и $J(t)$ в усредненной системе остается малым в течение времени $1/\varepsilon$:

$$|I(t) - J(t)| < c_1 \varepsilon, \text{ если } I(0) = J(0),\ 0 \leqslant t \leqslant 1/\varepsilon.$$

Здесь c_1 — постоянная, зависящая от постоянных c и C.

$\triangleleft$ Замена переменных первого приближения из п. 1.2 отличается от тождественной на величину порядка ε. Она приводит точную систему к усредненной с добавлением малого (порядка ε^2) возмущения. За время $1/\varepsilon$ это возмущение может изменить значение медленной переменной, по сравнению с ее значением в усредненной системе, лишь на величину порядка ε. Возвращаясь к исходным переменным, получаем результат теоремы. $\triangleright$

Эта теорема была доказана Фату (P. Fatou) и, другим способом, Л. И. Мандельштамом и Н. Д. Папалекси [96]. Приведенное доказательство, основанное на исключении быстрой фазы с помощью замены, принадлежит Н. Н. Боголюбову[1].

Если возмущенная система аналитична, то процедура пункта 1.2 позволяет исключить из ее правых частей фазу в любом конечном порядке по ε. Однако получаемые ряды, вообще говоря, расходятся, так что полностью исключить фазу и разделить быстрое и медленное движение не удается. Оказывается, исключение фазы можно провести с экспоненциально малой ошибкой. Эта ошибка в общем случае принципиально не устранима ни в каком варианте теории возмущений. Сформулируем точнее утверждение об исключении фазы. Пусть правые части возмущенной системы аналитически продолжаются в комплексную δ-окрестность области определения системы, оставаясь ограниченными по модулю постоянной C. Пусть в этой окрестности $|\omega|>c^{-1}>0$.

Теорема 2 ([108]). Аналитической заменой переменных

$$I=J+\varepsilon u(J, \psi, \varepsilon), \quad \varphi=\psi+\varepsilon v(J, \psi, \varepsilon), \quad |u|+|v|<c_1$$

уравнения возмущенного движения приводятся к виду

$$\dot J=\varepsilon(\Phi(J, \varepsilon)+\alpha(J, \psi, \varepsilon)),$$
$$\dot\psi=\Omega(J, \varepsilon)+\varepsilon\beta(J, \psi, \varepsilon),$$
$$|\alpha|+|\beta|<c_2\exp(-c_3^{-1}/\varepsilon), \quad |\Phi-\langle f\rangle|+|\Omega-\omega|<c_4\varepsilon.$$

Здесь $c_i>0$ — положительные постоянные, зависящие от c, C, δ, ε_0[2].

Экспоненциальный добавок неустраним, так как проекция всякой кривой, первоначально близкой к окружности $I=\mathrm{const}$, на пространство медленных переменных растет, вообще говоря, не медленнее, чем $\varepsilon t c_5 \exp(-c_6^{-1}/\varepsilon)$ при переносе кривой фазовым потоком.

Исследование усредненной системы часто позволяет установить существование предельных циклов и инвариантных торов исходной системы и приближенно их вычислить.

Теорема 3 ([9]). Пусть усредненная система имеет невырожденное[3] положение равновесия. Тогда точная система имеет предельный цикл вдоль которого медленные переменные изменяются в окрестности указанного равновесия размера порядка ε. Если все собственные значения усредненной системы, линеаризованной около этого равновесия, имеют отрицательные вещественные части, то цикл асимптотически устойчив. Если вещест-

[1] Точнее, Н. Н. Боголюбов доказал этим способом подобную теорему для систем более общего вида (названных им системами в стандартной форме), частным случаем которых являются одночастотные системы и системы с квазипериодическим по времени возмущением [8], [9].

[2] Обозначения для постоянных выбирают так, чтобы при увеличении c, C оценки сохранялись.

[3] Положение равновесия называется невырожденным, если линеаризованная около него система не имеет нулевых собственных значений.

венная часть одного из собственных значений положительна, то цикл неустойчив.

◁ Введем фазу в качестве новой независимой переменной (нового времени). Рассмотрим два отображения R^n в себя: T_0 — отображение сдвига за (новое) время 2π для усредненной системы, T_1 — такое же отображение для точной системы, преобразованной с помощью замены переменных первого приближения, построенной в пункте 1.2. Отображения T_0 и T_1 сдвигают точку на величину порядка ε, а отличаются друг от друга на величину порядка ε^2. У отображения T_0 имеется невырожденная неподвижная точка J_*. По теореме о неявной функции у отображения T_1 при достаточно малом ε имеется неподвижная точка $J=J_*+O(\varepsilon)$. Очевидно она служит начальным условием для искомого предельного цикла. ▷

Пример 4. *Уравнением Ван-дер-Поля* называется уравнение

$$\ddot{x}=-x+\varepsilon(1-x^2)\dot{x},$$

описывающее колебания с малым нелинейным «трением», положительным при больших амплитудах и отрицательным при малых. Невозмущенное уравнение $\ddot{x}=-x$ можно записать в стандартном виде $\dot{I}=0$, $\dot{\varphi}=-1$, где $2I=x^2+\dot{x}^2$, $\varphi=\arg(x+i\dot{x})$. Уравнение для I в возмущенном движении имеет вид

$$\dot{I}=\varepsilon(1-x^2)\dot{x}^2=2\varepsilon I(1-2I\cos^2\varphi)\sin^2\varphi.$$

Усредненное уравнение есть

$$\dot{J}=\varepsilon(J-J^2/2).$$

Оно имеет отталкивающее равновесие $J=0$ и притягивающее $J=2$. Равновесию $J=0$ соответствует равновесие $x=0$ исходного уравнения. Равновесию $J=2$ соответствует, в силу сформулированной выше теоремы, устойчивый предельный цикл исходного уравнения, близкий к окружности $x^2+\dot{x}^2=4$ (рис. 29). △

Рис. 29

Если усредненная система имеет предельный цикл, и характеристические показатели линеаризованной около него системы имеют ненулевые вещественные части (кроме одного, который соответствует сдвигу вдоль цикла и равен нулю), то точная система имеет двумерный *инвариантный тор*, устойчивый или неустойчивый вместе с циклом, вдоль которого медленные переменные меняются в окрестности указанного предельного цикла размера порядка ε [9], [89]. Процедура исключения быстрой переменной позволяет получить формальное разложение такого инвариантного тора в ряд по ε. Для этого достаточно разложение предельного цикла системы (6), описывающей медленное движение, подставить в разложение замены переменных (5). Полученные ряды, как правило, расходятся (см. ниже Предложение 1 и пример 5). Однако они носят асимптотический характер: обрывая их на членах порядка ε^r, получаем приближение для инвариантного тора с точностью $O(\varepsilon^{r+1})$.

Движение на двумерном инвариантном торе, рождающемся из цикла усредненной системы, характеризуется введенным А. Пуанкаре *числом вращения* $\mu(\varepsilon) = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\vartheta(t)}{\varphi(t)}$, где ϑ, $\varphi \pmod{2\pi}$ — координаты на торе [7]. Если число вращения иррационально, то движение условно-периодично и каждая траектория обматывает тор всюду плотно. Если число вращения рационально, то на торе существуют циклы; если циклы невырождены, то их четное число (половина — устойчивые, половина — неустойчивые), и остальные траектории притягиваются к ним при $t\to\pm\infty$. Число вращения $\mu(\varepsilon)$ в системе общего положения представляет собой непрерывную кусочно-постоянную на открытом всюду плотном множестве функцию от ε (вроде *канторовой лестницы*, но только суммарная относительная мера интервалов постоянства на отрезке $[0, \varepsilon_0]$ стремится к нулю при $\varepsilon_0\to 0$). Существование интервалов постоянства связано с наличием на торе невырожденных циклов: при малом изменении ε такие циклы не исчезают и, следовательно, число вращения не изменяется. При $\varepsilon\to 0$ в системе общего положения на торе происходит бесконечная последовательность бифуркаций рождения и исчезновения циклов. Все эти явления не улавливаются формальной процедурой теории возмущений.

Заметим, что в аналитической системе предельный цикл, рождающийся из равновесия усредненной системы, аналитичен и аналитически зависит от ε (это видно из доказательства теоремы 3). При рождении тора из цикла усредненной системы картина совершенно другая.

Предложение 1 ([89]). Инвариантный тор возмущенной системы, как правило (в случае общего положения), не аналитичен по параметру ε. Для открытого всюду плотного множества значений ε тор имеет лишь конечное (но растущее с убыванием ε) число производных по фазовым переменным.

◁Пусть при некотором $\varepsilon = \varepsilon_*$ существует асимптотически устойчивый инвариантный тор, число вращения $\mu(\varepsilon_*)$ рационально и соответствующие циклы невырождены. Для простоты рассмотрим случай трехмерного фазового пространства. Сечение тора плоскостью $\varphi = \mathrm{const}$ показано на рис. 30, заимствованном из [177]. Если линеаризовать возмущенную систему около цикла и привести ее к системе с постоянными коэффициентами (согласно теории Флоке—Ляпунова), то неустойчивый цикл превратится в седло, а устойчивый цикл — в узел. Инвариантный тор составлен из соединенных в узлах выходящих усов седел. Ясно, что при малом изменении ε такая картина сохраняется. Но в узле все кривые на рис. 30 кроме четырех, которые мы назовем главными, имеют, как правило, конечное число производных. Это следует уже из линейной теории: в главных осях фазовые кривые имеют вид $y=|cx|^{\lambda_1/\lambda_2}$, где λ_1 и λ_2 — собственные значения приведенной линеаризованной системы, λ_1 характеризует скорость притяжения тором траекторий из объемлющего пространства, λ_2 — скорость сближения траекторий на торе. Поскольку сечения выходящих усов седел не обязаны быть одновременно главными кривыми узлов, то тор имеет конечную гладкость. Впрочем, эта гладкость очень велика и быстро растет с ростом ε, так как $\lambda_1/\lambda_2 > c_1^{-1}\exp(c_2^{-1}/\varepsilon)$ (это следует из теоремы 2: если к системе добавить экспоненциально малый член, то все траектории на торе станут циклами).

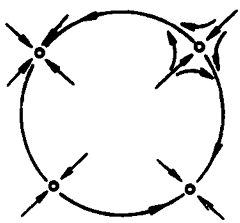


Рис. 30

Далее, если при сколь угодно малых ε тор может быть не аналитичен по фазовым переменным, то он не аналитичен и по ε. Действительно, как отмечалось выше, процедура исключения быстрой переменной позволяет написать формальное разложение тора в ряд по ε. Все коэффициенты в этом разложении — аналитические функции фазовых переменных. Если тор аналитичен по ε в окрестности нуля, то это формальное разложение обязано совпадать с истинным (как асимптотическое разложение аналитической функции), сходиться и, следовательно, представлять аналитическую функцию фазовых переменных. Итак, в рассматриваемом случае тор не аналитичен по ε. ▷

Неаналитичность тора по ε можно продемонстрировать на очень простых примерах, в которых аналитичность по фазовым переменным все же имеется.

Пример 5 ([53]). Пусть ρ, $\vartheta \bmod 2\pi$ — полярные координаты на плоскости медленных переменных. Рассмотрим в кольце $1/2<\rho<2$ уравнения возмущенного движения

$$\dot\rho = -\varepsilon[\rho-1+P(\vartheta,\varphi)],\quad \dot\vartheta=\varepsilon,\quad \dot\varphi=1,$$

$$P=\sum a_k \exp(i(k_1\vartheta+k_2\varphi)),\quad a_k=\exp(-|k|),\quad k\neq 0.$$

Усредняя по φ, получим

$$\dot\rho=-\varepsilon(\rho-1),\quad \dot\vartheta=\varepsilon.$$

Окружность $\rho=1$ — предельный цикл усредненной системы. Легко определяется инвариантный тор точной системы

$$\rho=1+\sum\frac{a_k\exp(i(k_1\vartheta+k_2\varphi))}{i(k_1\varepsilon+k_2)+\varepsilon},\quad k\neq 0.$$

В сколь угодно малом комплексном круге $|\varepsilon|<\varepsilon_0$ найдется значение ε, при котором один из знаменателей в этой формуле обращается в нуль. Следовательно, инвариантный тор не аналитичен по ε. Δ

Если усредненная система имеет вырожденное положение равновесия (цикл), то вопрос о существовании и устойчивости периодического решения (тора) точной системы, как правило[1], может быть решен с помощью высших приближений процедуры исключения быстрых переменных.

Пример 6. (Устойчивость верхнего положения *маятника с вибрирующей точкой подвеса* [51], [74]). Уравнение движения маятника, точка подвеса которого совершает вертикальные синусоидальные колебания, при наличии вязкого трения имеет вид

$$\ddot\vartheta+\nu\dot\vartheta+(g-a\omega^2\sin\omega t)l^{-1}\sin\vartheta=0.$$

Здесь ϑ — угол отклонения маятника от вертикали, a и ω — амплитуда и частота колебаний точки подвеса, l — длина маятника, g — ускорение свободного падения, ν — коэффициент затухания. Покажем, что при достаточно высокой частоте и малой амплитуде колебаний точки подвеса верхнее положение равновесия маятника устойчиво. Обозначим $\tau=\omega t$, $K^2=\frac{g}{\omega^2 a}$, $\delta=\nu K\sqrt{\frac{l}{g}}$, $\varepsilon=\sqrt{\frac{a}{l}}$ и будем считать, что K, δ — величины порядка 1, а ε мало. Уравнение движения, линеаризованное около верхнего положения равновесия, имеет следующий вид (штрих обозначает дифференцирование по τ):

$$x''+\varepsilon\delta x'+\varepsilon^2(\sin\tau-K^2\varepsilon^2)x=0.$$

Введя $y=x'/\varepsilon$, перепишем уравнение в виде системы, пригодной для применения усреднения:

$$x'=\varepsilon y,$$
$$y'=-\varepsilon\delta y+\varepsilon(-\sin\tau+K^2\varepsilon^2)x.$$

---

[1] При неконсервативном возмущении.

В усредненной системе равновесие $x=y=0$ — вырожденное. После двух шагов процедуры исключения быстрых фаз система приводится к виду

$$x'=\varepsilon y+O(\varepsilon^4),$$

$$y'=-\varepsilon\delta y+\varepsilon^3(K^2-1/2)x+O(\varepsilon^4).$$

Отбросив члены порядка ε^4, получаем укороченную систему. В ней равновесие $x=y=0$ устойчиво при $K<1/\sqrt{2}$ и неустойчиво при $K>1/\sqrt{2}$ (для достаточно малых ε). Нетрудно показать, что для затухания $\delta\neq 0$ у исходного маятника при таких K и достаточно малых ε верхнее положение соответственно устойчиво или неустойчиво[1].

Явление стабилизации верхнего положения маятника при вибрации точки подвеса обнаружили Н. Н. Боголюбов [51] и П. Л. Капица [74]. Затем возможность стабилизации с помощью вибрации исследовалась в ряде работ (перечень см. в [96]), среди которых наиболее известна работа В. Н. Челомея [127] о повышении устойчивости упругих систем. Недавно обнаруженные новые примеры влияния вибраций на устойчивость описаны в [128]. Δ

1.5. Усреднение в системах с постоянными частотами. Системы с постоянными, т. е. не зависящими от медленных переменных, частотами возникают, когда рассматривается малое нелинейное взаимодействие линейных колебательных систем[2], влияние на линейные колебательные системы квазипериодических возмущений или действие быстрых внешних квазипериодических сил на нелинейную неколебательную систему (скажем, влияние вибраций от двух несинхронных моторов на движение корабля или самолета).

Рассмотрим аналитическую систему стандартного вида (2) с постоянными частотами. Будем предполагать, что компоненты вектора частот ω сильно несоизмеримы:

$$|(k,\omega)|>c^{-1}|k|^{-\nu},\quad c,\nu=\mathrm{const}>0 \tag{11}$$

для всех целочисленных векторов $k\neq 0$. Как известно [30], при $\nu>m-1$ множество точек ω, для которых условие (11) не выполнено ни при каком c, имеет меру 0.

Теорема 4. Если частоты невозмущенного движения постоянны и сильно несоизмеримы, то различие между медленным движением $I(t)$ в точной системе и $J(t)$ в усредненной системе остается малым в течение времени $1/\varepsilon$:

$$|I(t)-J(t)|<c_1\varepsilon,\quad \text{если } I(0)=J(0),\quad 0\leqslant t\leqslant 1/\varepsilon.$$

---

[1] Если $\delta=0$, $K>1/\sqrt{2}$, то равновесие неустойчиво. Если $\delta=0$, $K<1/\sqrt{2}$, то равновесие устойчиво, но доказательство этого требует новых идей (см. п. 3.5 Б). Применение процедуры исключения быстрых переменных в каждом приближении приводит к устойчивому равновесию с чисто мнимыми собственными значениями.

[2] Действительно, в линейных системах частота не зависит от амплитуды.

◁ Замена переменных первого приближения процедуры п. 1.2 строится по формуле

$$I=J+\varepsilon u(J, \psi), \quad u=\sum_{k\neq 0}\frac{f_k \exp(i(k, \psi))}{i(k, \omega)}. \tag{12}$$

Коэффициенты Фурье f_k аналитической функции f экспоненциально убывают с ростом порядка гармоники: $|f_k|<$ $<c_3\exp(-c_4^{-1}|k|)$. Знаменатели в формуле (12) из-за сильной несоизмеримости частот убывают лишь степенным образом. Поэтому ряд в (12) сходится и определяет близкую к тождественной замену переменных. Дальнейшее доказательство — точно такое, как для теоремы 1.1. ▷

Замечания. 1. Из доказательства видно, что результат теоремы останется справедливым, если возмущение имеет конечную, но достаточно высокую, гладкость по фазе; тогда коэффициенты Фурье возмущения убывают степенным образом с достаточно большим показателем степени. Нетрудно проверить, что хватает наличия $\nu+m+1$ производных.

2. Из доказательства видно также, что результат останется справедливым, если условие сильной несоизмеримости (11) выполнено только для номеров k, входящих в разложение Фурье возмущения f. △

Если вместо (11) выполнено более слабое условие несоизмеримости $(k, \omega)\neq 0$ при $k\in Z^m\setminus\{0\}$, то усреднение все равно применимо для описания движения. Однако точность может быть хуже, чем ε (например, $\sqrt{\varepsilon}$ или $1/|\ln\varepsilon|$). Именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. Для любого $\eta>0$ существует $\varepsilon_0=\varepsilon_0(\eta)$ такое, что при $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ выполнено

$$|I(t)-J(t)|<\eta, \text{ если } I(0)=J(0),\ 0\leqslant t\leqslant 1/\varepsilon.$$

Доказательство см. в [9].

Для систем с постоянными несоизмеримыми частотами имеются многочисленные результаты о существовании интегральных многообразий [97]. В частности, если усредненная система имеет равновесие или периодическое решение, и вещественные части характеристических показателей линеаризованной около него системы отличны от нуля[1], то точная система имеет близкий к нему по медленным переменным инвариантный тор (соответственно m- или $m+1$-мерный). Даже в аналитической системе этот тор, как правило, не аналитичен ни по ε, ни по фазовым переменным (см. Предложение 1 и пример 6), однако процедура исключения быстрых переменных позволяет построить для него асимптотическое по ε разложение.

При анализе движения на торе, рождающемся из равновесия усредненной системы, приходится различать случаи, когда

[1] В случае периодического решения — вещественные части всех показателей, кроме одного, равного нулю.

в уравнениях (2) возмущенного движения $g=0$ (т. е. возмущение квазипериодично по времени) и $g\neq 0$. Если $g=0$, то движение на торе условно-периодично с вектором частот ω [53]. Если $g\neq 0$, то характер движения может быть другим. Например, для двумерного тора он определяется числом вращения Пуанкаре аналогично описанному в пункте 1.4 [89]. Если невозмущенные частоты рассматривать как параметры задачи, то в аналитической системе для любого вектора с сильно несоизмеримыми компонентами $\omega_* \in R^m$ и любого ε можно подобрать невозмущенные частоты $\omega=\omega_*+\varepsilon\Delta(\varepsilon, \omega_*)$ так, что движение на рассматриваемом торе условно-периодично с вектором частот ω_* [53]. Здесь $\Delta(\varepsilon, \omega_*)$ — аналитическая функция от ε. Дело в том, что при подходящем выборе поправки Δ можно аналитической 2π-периодической по фазам близкой к тождественной заменой переменных $I, \varphi \mapsto J, \psi$ привести уравнение для фазы к виду $\dot\psi=\omega_*$. Отсюда следует высказанное утверждение о движении на торе.

Системы с постоянными частотами являются важным частным случаем *систем в стандартной форме Боголюбова*:

$$\dot x=\varepsilon A(t, x, \varepsilon), \quad x\in R^p,$$

где функция A предполагается удовлетворяющей *условию равномерного среднего*: равномерно по x существует

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T A(t, x, 0)\,dt=A_0(x).$$

Действительно, вводя в системе с постоянными частотами отклонение от равномерного вращения $\xi=\varphi-\omega t$ и обозначая $x=(I, \xi)$, придем к уравнениям в стандартной форме. Условие равномерного среднего здесь выполнено, так как $A(t, x, \varepsilon)$ — квазипериодическая функция времени t.

Принцип усреднения Боголюбова [8] состоит в том, что что вместо исходной системы в стандартной форме рассматривается усредненная система

$$\dot y=\varepsilon A_0(y).$$

Многие результаты об усреднении в системах с постоянными частотами (в том числе теорема 5 и теоремы о рождении условно-периодических движений из равновесий и периодических движений усредненной системы) могут быть обобщены на системы в стандартной форме [8].

1.6. Усреднение в нерезонансной области. Рассмотрим многочастотную возмущенную систему (2), в которой частоты зависят от медленных переменных: $\omega=\omega(I)$, $I\in B$. Назовем область B *нерезонансной* в первом приближении теории возмущений (или просто нерезонансной), если для всех $I\in B$ выполнено условие сильной несоизмеримости:

$$|(k, \omega(I))| > c^{-1}|k|^{-\nu} \qquad (13)$$

при некоторых постоянных c, ν и для всех целочисленных векторов $k \neq 0$ таких, что гармоника с фазой (k, φ) входит в разложение Фурье возмущения f из правой части системы (2).

Если область B нерезонансная, то, аналогично теореме 4, усреднение применимо и гарантирует точность порядка ε на временах порядка $1/\varepsilon$. Если условие (13) заменить более слабым условием несоизмеримости $(k, \omega(I)) \neq 0$, то, аналогично теореме 5, усреднение также будет применимо, но точность может ухудшиться.

В многочастотной системе общего положения нерезонансных областей нет, так как условие несоизмеримости (для указанных векторов k) нарушается, вообще говоря, на всюду плотном множестве точек. Однако в приложениях иногда возникают задачи, в которых такие области все же имеются. Например, нерезонансные области существуют, если возмущение содержит конечное число гармоник, а частоты независимы.

1.7. Влияние отдельного резонанса. Основные особенности многочастотных систем связаны с резонансами. В соответствии с принципом усреднения, для описания возмущенного движения вблизи одного выбранного резонанса и вдали от остальных резонансов следует частично усреднить уравнения движения с учетом выбранного резонанса. Это приближение во многих случаях может быть обосновано с помощью процедуры п. 1.3. В настоящем пункте рассматривается получающаяся частично усредненная система. Она имеет обычный вид возмущенной системы, но возмущение зависит от фаз только через одну их целочисленную комбинацию:

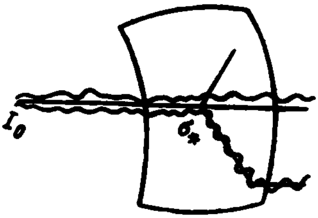
$$\dot{I} = \varepsilon f(I, \gamma), \quad \gamma = (k, \varphi), \qquad (14)$$
$$\dot{\varphi} = \omega(I) + \varepsilon g(I, \gamma).$$

Здесь возможен только один резонанс: $(k, \omega) = 0$. Основные эффекты, связанные с влиянием отдельного резонанса, проявляются уже в системе (14). Поэтому ее изучение представляет значительный интерес.

Предположим, что решение соответствующей (14) усредненной по γ системы трансверсально пересекает *резонансную поверхность* (рис. 31):

$$k \frac{\partial \omega}{\partial I} \langle f \rangle^{\gamma} \neq 0 \quad \text{при} \quad (k, \omega) = 0.$$

Решение точной системы (14) может вести себя совсем иначе. При некоторых соотношениях между фазами возможен *захват в резонанс*: точка, попав в окрестность резонансной поверхности, начинает двигаться так, чтобы приблизительно сохранялась возникшая соизмеримость (рис. 31). Для описания такого движения усреднение по γ неприменимо, решения точной и усредненной систем расходятся за время $1/\varepsilon$ на величину порядка 1. Однако захват в резонанс и такая большая погрешиость усреднения возможны лишь для исключительного множества начальных условий, мера которого оценивается сверху величиной порядка $\sqrt{\varepsilon}$. Для остальных начальных условий усреднение описывает движение по меньшей мере с точностью $\sqrt{\varepsilon}|\ln\varepsilon|$ (при некоторых достаточно общих предположениях).



$(k, \omega)=0$

Рис. 31

Далее, оказывается, что если захват в резонанс происходит, то множество захватывающихся точек при $\varepsilon \to 0$ стремится расположиться в фазовом пространстве всюду плотно: в шаре диаметра порядка ε имеются как захватывающиеся, так и не захватывающиеся точки. Если, как это бывает в практических задачах, начальные условия известны с погрешностью большей, чем ε, то нельзя однозначио сказать, захватится точка в резонанс или нет. Задача приобретает вероятностный характер. Можно утверждать, что вероятность захвата в резонанс мала и при $\varepsilon \to 0$ стремится к нулю как $\sqrt{\varepsilon}$.

Рассмотрим описанные явления на примере. Сначала заметим, что в переменных I, γ система (14) становится одночастотной. Резонансу соответствует обращение частоты в нуль, переходу через резонанс — смена направления вращения γ.

Пример 7. Пусть возмущенное движение описывается системой уравнений

$$\dot{I}=\varepsilon(1+a\sin\gamma-{}^1/_4 I), \quad \dot{\gamma}=I, \quad a=\mathrm{const}>0 \qquad (15)$$

в области $|I|<2$. Соответствующее усредненное уравнение имеет вид

$$\dot{J}=\varepsilon(1-{}^1/_4 J).$$

Дифференцируя уравнение для γ по времени, получим $\ddot{\gamma}=\varepsilon\ (1+a\sin\ \gamma-{}^1/_4\dot{\gamma})$. Вводя медленное время $\tau=\sqrt{\varepsilon}t$ и обозначая штрихом производные по нему, приходим к уравнению

$$\gamma''=1+a\sin\gamma-{}^1/_4\sqrt{\varepsilon}\gamma', \qquad (16)$$

описывающему движение маятника с постоянным крутящим моментом и малым трением. Фазовые портреты маятника без трения при $a<1$ и $a>1$ изображены на рис. 32. В случае $a<1$ фазовый портрет задачи с малым трением такой же, как без трения. Маятник переходит из обратного вращения в прямое. Время τ движения от прямой $\gamma'=-1$ до прямой $\gamma'=+1$ по различным фазовым кривым может отличаться на величину порядка 1. Возвращаясь к исходному времени и исходной переменной I, получаем такую картину. Все точки проходят через резонанс $I=0$, т. е. захват здесь невозможен. Время прохождения $\sqrt{\varepsilon}$-окрестности резонанса для разных траекторий может отличаться на величину порядка $1/\sqrt{\varepsilon}$. Соответственно, при прохождении этой окрестности набирается погрешность усреднения порядка $\sqrt{\varepsilon}$.

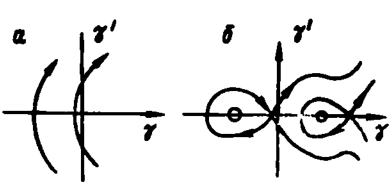


Рис. 32

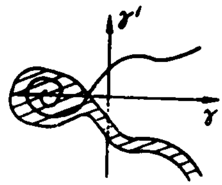


Рис. 33

Для случая $a>1$ фазовый портрет задачи с трением изображен на рис. 33. Вдоль *сепаратрисы* образуется полоса ширины порядка $\sqrt{\varepsilon}$ из фазовых точек, для которых маятник переходит из вращения в колебания. Переходу к колебаниям в исходных переменных соответствует захват в резонанс. В незаштрихованной области на рис. 33 маятник переходит из обратного вращения в прямое. Для траектории, проходящей на расстоянии $\xi>\varepsilon$ от седловой особой точки, этот переход занимает время порядка $|\ln\xi|$. Возвращаясь к исходным переменным, видим, что доля порядка $\sqrt{\varepsilon}$ всех фазовых точек захватывается в резонанс. Составим исключительное множество меры порядка $\sqrt{\varepsilon}$ из точек, которые либо захватываются в резонанс, либо находятся в резонансе в начальный момент, либо проходят ближе ε от седел. Точки, не принадлежащие этому множеству, проходят $\sqrt{\varepsilon}$-окрестность резонанса за время t порядка от $1/\sqrt{\varepsilon}$ до $|\ln\varepsilon|/\sqrt{\varepsilon}$. При прохождении набирается погрешность усреднения порядка от $\sqrt{\varepsilon}$ до $\sqrt{\varepsilon}|\ln\varepsilon|$.

Портрет задачи в исходных переменных I, γ на фазовом цилиндре показан на рис. 34. На расстоянии 1 от резонанса витки сепаратрисы отстоят друг от друга на величину порядка ε. К сепаратрисе прилегает заштрихованная полоса ширины порядка $\varepsilon^{3/2}$ из захватываемых точек. Таким образом, при $\varepsilon\to 0$ захватываемые точки действительно стремятся расположиться в фазовом пространстве всюду плотно. Δ

Основные явления, связанные с отдельным резонансом, про-

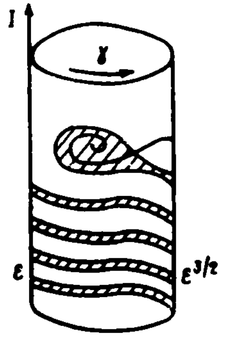


Рис. 34

исходят в $c\sqrt{\varepsilon}$-окрестности резонансной поверхности, $c=\text{const}$. В такой окрестности система (14) может быть приведена к «маятниковой» форме, напоминающей уравнение (16). Это приведение использовалось в ряде работ [95], [100], [101], [131], [174]. Опишем его. Точку на резонансной поверхности будем обозначать $\sigma=(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1})$. Точку I в окрестности резонансной поверхности будем характеризовать координатами ρ, σ, где $\rho=(k, \omega(I))$, σ — проекция I на резонансную поверхность. Введем медленное время $\tau=\sqrt{\varepsilon}t$ и нормированное расстояние до резонансной поверхности $r=\rho/\sqrt{\varepsilon}$. Обозначим штрихом дифференцирование по τ. Получим

$$\begin{aligned} \gamma' &= r+\sqrt{\varepsilon}\,\alpha_1(\gamma, \sigma, \sqrt{\varepsilon}r), \\ r' &= P(\gamma, \sigma)+\sqrt{\varepsilon}r\alpha_2(\gamma, \sigma, \sqrt{\varepsilon}r), \\ \sigma' &= \sqrt{\varepsilon}\alpha_3(\gamma, \sigma, \sqrt{\varepsilon}r). \end{aligned} \tag{17}$$

Функции P, α_i имеют по γ период 2π. Если в (17) положить $\varepsilon=0$, то получится гамильтонова[1)] система, описывающая вращение маятника в потенциальном поле при наличии постоянного крутящего момента:

$$\gamma'=r, \quad r'=P(\gamma, \sigma), \quad \sigma=\text{const}, \quad \langle P\rangle^{\gamma}=k\frac{\partial\omega}{\partial I}\langle f\rangle^{\gamma}\neq 0. \tag{18}$$

Эта система, конечно, интегрируема. Движение в окрестности резонанса описывается с помощью ее малого возмущения согласно (17).

Выше рассматривалось применение усреднения для описания движения точек, проходящих через резонанс без захвата. Покажем теперь, как использовать усреднение для описания движения точек, захватившихся в резонанс. Воспользуемся уравнениями движения в форме (17). Предположим, что соответствующая «промежуточная» невозмущенная система (18) (маятник) удовлетворяет следующим двум условиям общности

---

1) Тут уместно удивиться. Гамильтоновость полученной системы обнаруживается в результате вычислений и отнюдь не очевидна заранее.

положения: на ее фазовом портрете при всех σ неустойчивые особые точки невырождены (условие B) и сепаратрисы не соединяют разные особые точки (условие B'). Тогда этот фазовый портрет выглядит аналогично либо рис. 32б (но может быть больше колебательных областей[1]), либо рис. 32а; последний случай нас сейчас[2] не интересует, так как он соответствует отсутствию захвата. При изменении σ колебательные области не исчезают, не появляются и не сливаются друг с другом. Выберем одну из этих областей. Введем в ней переменные действие — угол λ, χ невозмущенного маятника. Изменение величин σ, λ, χ в возмущенном движении описывается обычной одночастотной системой, где роль фазы играет χ, роль времени — τ, а роль малого параметра — $\sqrt{\varepsilon}$. Усредняя эту систему по χ, получим уравнения, которые приближенно описывают изменение σ, λ на временах τ порядка $1/\sqrt{\varepsilon}$ (т. е. t порядка $1/\varepsilon$)[3]. Изменение σ характеризует дрейф вдоль резонансной поверхности, а изменение λ — амплитуду колебаний около этой поверхности. Скажем, что начальные условия σ_0, λ_0 для решения усредненной в колебательной области системы взяты на сепаратрисе, если $2\pi\lambda_0$[4] равно площади колебательной области при $\sigma=\sigma_0$. Решения с такими начальными условиями описывают движение с момента захвата в резонанс. Аналогично определяются решения, заканчивающиеся на сепаратрисе. Они описывают движение до выхода из резонанса. Полная траектория точки при наличии захвата в резонанс приближенно описывается кривой, склеенной из нескольких гладких участков (рис. 31). Первый участок — траектория обычной усредненной вне резонанса системы до выхода ее на резонансную поверхность; точку выхода обозначим σ_*. Второй участок — кривая на резонансной поверхности, определяемая той колебательной областью невозмущенного маятника, в которую произошел захват. Эта кривая — σ-компонента решения усредненной в нужной колебательной области системы с начальным условием на сепаратрисе при $\sigma=\sigma_*$. Если указанное решение в некоторый момент выходит на сепаратрису (пусть при этом $\sigma=\sigma_{**}$), то имеется третий участок — решение обычной усредненной системы, начиняющееся в точке σ_*. Из точки σ_* встречи с резонансной поверхностью может выходить несколько кривых, отвечающих захвату в разные колебательные области (рис. 31). Можно по-

[1] Внутри колебательных областей системы могут существовать неустойчивые особые точки. Для простоты изложения этот случай рассматривать не будем.

[2] Но все же он очень важен, так как для большинства резонансов после усреднения получится именно он (см. п. 1.8).

[3] Эти уравнения могут иметь невырожденное равновесие с $\lambda\neq0$. Ему соответствует по теореме 3 предельный цикл исходной системы, лежащий внутри петли сепаратрисы.

[4] Напомним, что $2\pi\lambda$ — это площадь, заключенная внутри замкнутой траектории невозмущенного маятника.

казать, что при достаточно общих предположениях приклеивание одной из этих кривых к первому (нерезонансному) участку описывает движение с точностью $O(\sqrt{\varepsilon}|\ln\varepsilon|)$ для большинства начальных условий. Исключение составляет множество, мера которого при $\varepsilon\to 0$ стремится к нулю быстрее любой степени ε. Оно составлено из точек, проходящих близко от седел невозмущенного маятника.

1.8. Усреднение в двухчастотных системах.

Рассмотрим *двухчастотную возмущенную систему* с частотами $\omega_1(I)$, $\omega_2(I)$:

$$\dot I=\varepsilon f(I,\ \varphi,\ \varepsilon),$$
$$\dot\varphi_1=\omega_1(I)+\varepsilon g_1(I,\ \varphi,\ \varepsilon),\quad \dot\varphi_2=\omega_2(I)+\varepsilon g_2(I,\ \varphi,\ \varepsilon). \tag{19}$$

Будем считать, что ее правые части — аналитические функции. Скажем, что система удовлетворяет условию A, если отношение частот ω_1/ω_2 изменяется вдоль ее траекторий с ненулевой скоростью:

$$\mathcal{L}(I,\ \varphi,\ \varepsilon)=\left(\omega_1\frac{\partial\omega_2}{\partial I}-\omega_2\frac{\partial\omega_1}{\partial I}\right)f>c_1^{-1}>0.$$

Скажем, что система удовлетворяет условию $\bar A$, если отношение частот ω_1/ω_2 изменяется с ненулевой скоростью вдоль траекторий соответствующей усредненной системы:

$$L(I)=\langle\mathcal{L}\rangle^{\varphi}=\left(\omega_1\frac{\partial\omega_2}{\partial I}-\omega_2\frac{\partial\omega_1}{\partial I}\right)F>c_1^{-1}>0, F=\langle f\rangle^{\varphi},\ \varepsilon=0.$$

Здесь и ниже c_i, C_i — положительные постоянные.

Теорема 6 ([46]). Если выполнено условие A, то различие между медленным движением $I(t)$ в возмущенной системе и $J(t)$ в усредненной системе остается малым в течение времени $1/\varepsilon$:

$$|I(t)-J(t)|<c_2\sqrt{\varepsilon},\quad \text{если } I(0)=J(0),\quad 0\leqslant t\leqslant 1/\varepsilon.$$

◁ Определим число $N=N(\varepsilon)$ условием: в возмущении (19) суммарная амплитуда гармоник порядка, большего N, не превосходит ε^2. Для аналитической функции амплитуда гармоники экспоненциально убывает с ростом порядка. Поэтому $N<C_1|\ln\varepsilon|$. Резонанс $k_1\omega_1+k_2\omega_2=0$, где k_1 и k_2 взаимно просты, назовем *существенным*, если его порядок $|k_1|+|k_2|$ не превосходит N. На плоскости частот резонансам отвечают прямые с рациональными угловыми коэффициентами, проходящие через начало координат (рис. 35). Прямые, отвечающие существенным резонансам, расположены достаточно редко: угол между соседними прямыми, как можно сосчитать, не меньше, чем $C_2^{-1}|\ln\varepsilon|^{-2}$.

Если резонанс не является существенным, то его влияние на движение на временах $1/\varepsilon$ практически не проявляется. Влияние существенного резонанса проявляется в узкой полосе вокруг

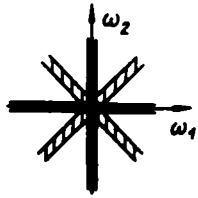


Рис. 35

резонансной прямой (рис. 35). Эту полосу назовем *резонансной зоной*. Как в примере 7, ширина резонансной зоны оказывается порядка $\sqrt{\varepsilon a_k}$, где a_k оценивает сверху амплитуды резонансных гармоник возмущения; величина a_k экспоненциально убывает с ростом $|k|$.

Условие A показывает, что точка последовательно переходит через нерезонансные и резонансные зоны на рис. 35. В нерезонансной зоне определена замена переменных п. 1.2, приводящая в первом приближении точную систему к усредненной. Из-за остающейся при приведении невязки в нерезонансных зонах набегает суммарное различие между решениями точной и усредненной систем, не превосходящее $C_3\sqrt{\varepsilon}$. В резонансных зонах усреднение совершенно не описывает движение. Но суммарная ширина этих зон порядка $\sqrt{\varepsilon}$. В силу условия A, решение находится в этих зонах время порядка $1/\sqrt{\varepsilon}$. За это время решения точной и усредненной систем могут разойтись лишь на величину, не превосходящую $C_4\sqrt{\varepsilon}$. В результате общее расхождение, набирающееся в нерезонансных и резонансных зонах, не превосходит $c_2\sqrt{\varepsilon}$. ▷

Условие теоремы 6 можно ослабить. Скажем, что система (19) удовлетворяет условию A' [123], если выполнено условие A и, кроме того, на каждом резонансе $k_1\omega_1+k_2\omega_2=0$ отношение частот изменяется с ненулевой скоростью вдоль траекторий системы, частично усредненной с учетом этого резонанса (см. п. 1.1):

$$L(I)+\left(\omega_1\frac{\partial\omega_2}{\partial I}-\omega_2\frac{\partial\omega_1}{\partial I}\right)F_k(I,\ \gamma)>{}^1/_2c_1^{-1}>0, \tag{20}$$

где $\gamma=k_1\varphi_1+k_2\varphi_2$, а $F_k(I,\ \gamma)$ — сумма гармоник функции f, зависящих от фазы γ. Величина $|F_k|$ убывает с ростом $|k|$. Поэтому найдется число N_0, не зависящее от ε, такое, что при $|k|>N_0$ неравенство (20) вытекает из условия A. Резонансы с $|k|\leqslant N_0$ назовем *сильными*, а остальные резонансы *слабыми*. Неравенство (20) достаточно проверить для сильных резонансов.

Теорема 6′. Если выполнено условие A', то справедливо заключение теоремы 6.

◁ Как и в доказательстве теоремы 6, надо по отдельности рассмотреть движение в нерезонансных и резонансных зонах. В нерезонансной зоне движение хорошо описывается усредненной системой. Условие $\bar{A}$ показывает, что точка не застревает в этой зоне. Как и в теореме 6, суммарная погрешность усреднения, набирающаяся в нерезонансных зонах, не превосходит $C_5\sqrt{\varepsilon}$. В резонансной зоне определена замена переменных п. 1.3, приводящая в первом приближении систему к частично усредненной с учетом этого резонанса. Из условия A' поэтому вытекает, что застревание в резонансной зоне также невозможно. Время пребывания точки в одной такой зоне имеет порядок ширины зоны, деленной на ε. Остальные оценки — как в доказательстве теоремы 6. ▷

Сформулированное в начале этого пункта условие $\bar{A}$ не препятствует захвату в резонанс. Оказывается, при этом условии суммарный эффект прохождения через резонансы такой же, как эффект отдельного резонанса, описанный в п. 1.7.

Теорема 7 ([101]). Если система удовлетворяет условию $\bar{A}$ и еще некоторому условию B (выполненному почти всегда), то для всех начальных точек I_0, φ_0, кроме множества меры, не превосходящей $c_2\sqrt{\varepsilon}$, различие между медленным движением $I(t)$ в точной системе и движением $J(t)$ в усредненной системе остается малым в течение времени $1/\varepsilon$:

$$|I(t)-J(t)|<c_3\sqrt{\varepsilon}|\ln\varepsilon|, \quad \text{если } I(0)=J(0), \quad 0\leqslant t\leqslant 1/\varepsilon.$$

При любом $\varkappa\geqslant c_2\sqrt{\varepsilon}$ для всех начальных точек, кроме множества меры, не превосходящей $\varkappa$, выполнено

$$|I(t)-J(t)|<c_4\sqrt{\varepsilon}|\ln c_5^{-1}\varkappa|, \text{ если } I(0)=J(0), \quad 0\leqslant t\leqslant 1/\varepsilon.$$

◁ В нерезонансных зонах и резонансных зонах слабых резонансов анализ не отличается от описанного выше. В этих зонах набирается погрешность усреднения, не превосходящая $C_6\sqrt{\varepsilon}$. Остается рассмотреть сильные резонансы, а их, как мы знаем, мало. Условие B состоит в том, что для каждого сильного резонанса частично усредненная с учетом этого резонанса система удовлетворяет условию B п. 1.7 (невырожденность особых точек соответствующего системе «маятника» — см. п. 1.7). В окрестности сильного резонанса делается замена переменных п. 1.3, приводящая в первом приближении точную систему к соответствующей частично усредненной. Получающаяся система лишь малым возмущением отличается от системы с одним резонансом из п. 1.7. Картина прохождения через резонанс описана в п. 1.7. Для всех начальных условий, кроме множества меры порядка $\sqrt{\varepsilon}$, резонансная зона пересекается за время, не превосходящее $C_7|\ln\varepsilon|/\sqrt{\varepsilon}$. За это время набирается погрешность усреднения, не превосходящая

$C_8\sqrt{\varepsilon}\,|\ln\varepsilon|$. Объединяя оценки во всех зонах, получаем, что общая погрешность не превосходит $c_3\sqrt{\varepsilon}\,|\ln\varepsilon|$. При начальных условиях, лежащих вне некоторого множества меры $\varkappa > C_9\sqrt{\varepsilon}$, резонансная зона пересекается за время, не превосходящее $C_{10}|\ln C_{11}^{-1}\varkappa|/\sqrt{\varepsilon}$. Соответственно, при таких начальных условиях погрешность усреднения не превосходит $c_4\sqrt{\varepsilon}\,|\ln c_5^{-1}\varkappa|$. ▷

Пример 8. Рассмотрим колебания частицы в одномерной потенциальной яме при наличии малого периодического возмущения и малого трения:

$$\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x} + \varepsilon a S(t) - \varepsilon\dot{x},$$

где S — 2π-периодическая функция t, график $U(x)$ и фазовый портрет невозмущенной ($\varepsilon=0$) системы показаны на рис. 36. Будем предполагать, что невозмущенная система нелинейна, так что период движения разный для разных траекторий. Пусть $h = {}^1/_2\dot{x}^2 + U(x)$ — энергия невозмущенного движения, φ — фаза на невозмущенных траекториях. Возмущенная система двухчастотна, переменные φ и t — быстрые, а h — медленная. Уравнение для h имеет вид

$$\dot{h} = \varepsilon\,[a\dot{x}S(t) - \dot{x}^2].$$

Усредняя по φ, t, получим

$$\dot{h} = -\varepsilon\,\langle\,\dot{x}^2\,\rangle\,.$$

Движение будем рассматривать в области $1 < h < 2$[1]. Усреднение приводит к выводу, что h убывает и все точки уходят из этой области. При достаточно малых a выполнено условие A и усреднение описывает движение при всех начальных условиях. Условие $\bar{A}$ выполнено для всех a. Оно гарантирует применимость усреднения для большинства начальных данных. Но доля порядка $\sqrt{\varepsilon}$ точек может застрять на резонансах в области $1 < h < 2$. Подробный разбор движения в этой задаче для $U = \frac{x^2}{2} + \frac{\mu x^4}{4}$ (задача Дюффинга (G. Duffing)) содержится в [100]. △

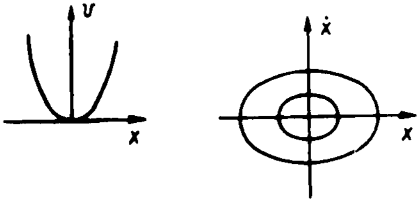


Рис. 36

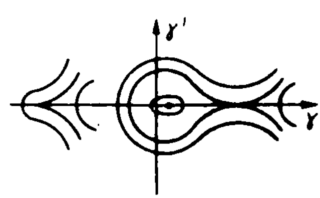


Рис. 37

[1] В действительности результаты справедливы во всей области $h \geq 0$ [100].

Замечания. 1. Для двухчастотных систем остался неисследованным случай, когда условие $\bar{A}$ нарушается, т. е. отношение частот быстрого движения изменяется в усредненном движении немонотонно.

2. Недостаточно исследован также случай, когда нарушается условие B, т. е. фазовый портрет соответствующего резонансу «маятника» может иметь вид, показанный на рис. 37 (условие $\bar{A}$ предполагается выполненным). Если имеется одна медленная переменная, то справедлива неулучшаемая оценка: вне множества меры $\varkappa > c_2\sqrt{\varepsilon}$ погрешность усреднения не превосходит $c_3\sqrt{\varepsilon}/\sqrt{\varkappa}$ [101]. Для случая, когда медленных переменных больше, такая же оценка погрешности известна пока вне множества меры $\varkappa > c_2\varepsilon^{1/3}$ [114]. △

Приведем несколько примеров неконсервативных двухчастотных систем:

— маятник под действием неконсервативной периодически зависящей от времени силы [129];

— два слабо связанных нелинейных осциллятора при наличии слабого трения;

— быстрое вращение тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде [43];

— движение астероида в ограниченной задаче трех тел (см. гл. 2) при наличии сопротивления среды или малой тяги.

В этих задачах большинство решений описывается с помощью независимого усреднения по фазам. Однако при некоторых соотношениях между параметрами возможен и захват в резонанс.

1.9. Усреднение в многочастотных системах. Случай, когда число частот больше двух, изучен гораздо слабее, чем двухчастотный. Особенность двухчастотных систем — простое расположение резонансных поверхностей (рис. 35). При большем числе частот поверхности расположены совсем иначе.

Пример 9. Рассмотрим невозмущенную трехчастотную систему

$$\dot{\varphi}_1 = I_1,\ \dot{\varphi}_2 = I_2,\ \dot{\varphi}_3 = 1,\ \dot{I}_s = 0\ (s = 1, 2).$$

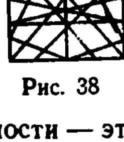


Рис. 38

Здесь резонансные поверхности — это все прямые на плоскости I_1, I_2 с рациональными уравнениями (рис. 38). Кривая на плоскости I пересекает многие резонансные прямые а) под малыми углами (так как сколь угодно близко к любому линейному элементу имеется линейный элемент резонансной прямой) и б) вблизи точек взаимного пересечения резонансных прямых — точек кратного резонанса. Поэтому, если в духчастотном случае основным эффектом является прохождение через отдельный резонанс, то при большем числе частот обязательно надо учитывать касания с резонансами и совместное влияние нескольких (в рассматриваемом примере двух) резонансов.△

Анализ, учитывающий детали этих явлений, для многочастотных систем не проведен. Тем не менее известны некоторые оценки, обосновывающие применимость метода усреднения. Они получены на основе следующего общего соображения: если множество точек, близких к резонансным поверхностям, имеет малую меру, то для большинства начальных данных фазовая кривая проводит в этом множестве малое время; поэтому естественно ожидать, что для большинства начальных данных усреднение правильно описывает движение.

Общие результаты в этом направлении принадлежат Д. В. Аносову [44] и Касуге (T. Kasuga) [160]. Теорема Д. В. Аносова утверждает, что для любого положительного числа ρ мера множества начальных данных (из компакта в фазовом пространстве), для которых погрешность описания точного движения усредненным превосходит ρ:

$$\operatorname{mes}\{I_0, \varphi_0 : \max_{0<t<1/\varepsilon} |I(t) - J(t)| > \rho \text{ при } I(0) = J(0) = I_0\},$$

стремится к 0 при $\varepsilon \to 0$. Эта теорема доказана для возмущенных систем более общего вида, чем стандартный вид (2): не предполагается, что совместные уровни интегралов невозмущенной задачи являются торами; требуется, чтобы при почти всех значениях констант этих интегралов невозмущенное движение на совместном уровне было эргодическим.

Для систем стандартного вида (2) техника работы [160] позволяет получить следующую оценку погрешности усреднения.

Теорема 8 ([103]). Пусть выполнено одно из двух условий невырожденности: ранг отображения $I \mapsto \omega(I)$ равен числу частот, либо ранг отображения $I \mapsto (\omega_1(I) : \omega_2(I) : \ldots : \omega_m(I))$ на единицу меньше числа частот. Тогда средняя (по начальным условиям) погрешность метода усреднения не превосходит величины порядка $\sqrt{\varepsilon}$:

$$\int \max_{0<t<1/\varepsilon} |I(t) - J(t)|\, dI_0 d\varphi_0 < c_1 \sqrt{\varepsilon}. \tag{21}$$

Следствие. Обозначим $E(\varepsilon, \rho)$ множество начальных данных в пределах фиксированного компакта, для которых погрешность достигает величины ρ. Тогда

$$\operatorname{mes} E(\varepsilon, \rho) < c_1 \sqrt{\varepsilon}/\rho. \tag{22}$$

Эквивалентная формулировка: вне множества меры $\varkappa$ справедлива оценка погрешности усреднения

$$|I(t)-J(t)|<c_1\sqrt{\varepsilon}/\varkappa.$$

Эта оценка неулучшаема [103][1]. Однако правдоподобно, что она может быть улучшена, если ограничиться возмущениями общего положения (ср. с оценкой для двухчастотных систем при условиях $\overline{A}$, B: погрешность не превосходит $c_2\sqrt{\varepsilon}|\ln\varkappa|$).

Если $m\geqslant n+2$, то теорема 8 неприменима, однако оценки (21), (22) выполняются для почти всех членов типичного семейства частот с достаточно большим числом параметров λ (В. И. Бахтин). Вместо невырожденности частот, требуемой в теореме 8, здесь используется неравенство: $|(k, \omega)|+|\partial(k, \omega)/\partial I|>c^{-1}|k|^{-\nu}$ для $\nu>m-1$ и всех $k\in Z^m\setminus\{0\}$. При почти всех значениях λ оно выполнено с каким-нибудь $c>0$.

Теорема 9 (В. И. Бахтин). Средняя по начальным условиям погрешность метода усреднения оценивается для систем общего положения с m быстрыми и n медленными переменными величиной порядка $\varepsilon^{1/(k+1)}$, если $m\leqslant C^k{}_{n+k}-n$.

Соответственно, правая часть оценки (22) принимает вид $c_1\varepsilon^{1/(k+1)}/\rho$. Системы не общего положения принадлежат некоторой гиперповерхности в пространстве всех систем.

§ 2. Усреднение в гамильтоновых системах

Задачу о влиянии малых гамильтоновых возмущений на интегрируемую гамильтонову систему Пуанкаре назвал основной задачей динамики. Эта задача имеет много приложений, именно к ней относятся исторически первые формулировки принципа усреднения и первые результаты теории возмущений. Формальная сторона теории здесь в принципе такая же, как для общих негамильтоновых возмущений. Однако характер эволюции под влиянием гамильтоновых возмущений совсем иной. Соответственно, для обоснования рецептов теории возмущений используются существенно другие методы, чем в негамильтоновом случае.

2.1. Применение принципа усреднения. Пусть невозмущенная гамильтонова система вполне интегрируема, некоторая область ее фазового пространства расслоена на инвариантные торы, в этой области введены переменные действие—угол $I, \varphi: I=(I_1, \ldots, I_n)\in B\subset R^n$, $\varphi=(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \pmod{2\pi}\in T^n$. Гамильтониан H_0 невозмущенной системы зависит только от переменных «действие»: $H_0=H_0(I)$. Уравнения невозмущенного движения имеют обычную форму:

[1] В классе степенных оценок.

$$\dot I = 0, \ \dot\varphi = \partial H_0/\partial I.$$

Пусть на систему наложено малое гамильтоново возмущение. Возмущенное движение описывается системой с гамильтонианом

$$H = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \varphi, \varepsilon):$$

$$\dot I = -\varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial \varphi}, \quad \dot\varphi = \frac{\partial H_0}{\partial I} + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial I}. \tag{23}$$

Возмущающий гамильтониан $H_1(I, \varphi, \varepsilon)$ имеет по φ период 2π. Эта форма уравнений — стандартная для применения принципа усреднения. Если не оговорено противное, функции H_0, H_1 будем считать аналитическими.

Замечание. Часто встречаются задачи, в которых возмущение периодически зависит еще и от времени t. Этот случай сводится к рассмотренному введением новой фазы $\varphi_{n+1} = t$ и сопряженной ей переменной I_{n+1}. Изменение расширенного набора фазовых переменных описывается системой уравнений с гамильтонианом

$$H' = I_{n+1} + H_0(I_1, \ldots, I_n) + \varepsilon H_1(I_1, \ldots, I_n, \ \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ \varphi_{n+1}, \ \varepsilon),$$

имеющей тот же стандартный вид (23). △

Предположим, что все частоты $\partial H_0/\partial I_j$ не обращаются тождественно в 0 и что между ними отсутствуют тождественные целочисленные соотношения. Для приближенного описания изменения переменных I в соответствии с принципом п. 1.1 усредним уравнения (23) по фазам φ.

Теорема 10. В гамильтоновой системе с n степенями свободы и n частотами эволюции медленных переменных не происходит в том смысле, что усредненная система имеет вид $\dot J = 0$.

◁ При вычислении интеграла от $dH_1/d\varphi_j$ по n-мерному тору можно сначала проинтегрировать по переменной φ_j. Этот однократный интеграл равен приращению периодической функции H_1 на периоде, т. е. нулю. ▷

Замечание. Чтобы сохранить гамильтонову форму уравнений, немного обобщим принцип п. 1.1: будем усреднять также и второе уравнение (23), описывающее изменение углов (фаз) φ. Полученная усредненная система имеет гамильтониан $\mathcal{H}(J, \varepsilon) = \mathcal{H}_0(J) + \varepsilon\mathcal{H}_1(J)$, $\mathcal{H}_1 = \langle H_1(J, \varphi, 0)\rangle^{\varphi}$. Поэтому фазы испытывают равномерное вращение с частотами $\partial\mathcal{H}/\partial J$. △

Пример 10. Рассмотрим *плоскую ограниченную круговую задачу трех тел* (гл. 2, § 5). Массу Юпитера обозначим ε и будем считать малой по сравнению с массой Солнца. В этой системе две с половиной степени свободы (две степени свободы плюс явная периодическая зависимость от времени). Переходя в равномерно вращающуюся барицентрическую[1] систему координат, одна из осей которой направлена на Юпитер, а другая

[1] Начало — в центре масс системы Солнце—Юпитер.

перпендикулярна ей и лежит в плоскости орбиты Юпитера (рис. 39), получаем систему с двумя степенями свободы.

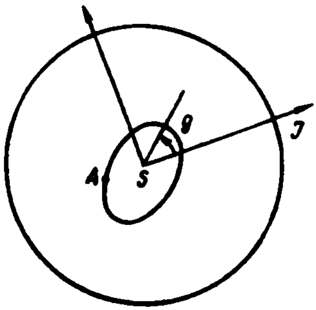


Рис. 39

При $\varepsilon=0$ получается невозмущенная задача двух тел во вращающейся системе координат. В ее фазовом пространстве область эллиптических движений расслоена на двумерные инвариантные торы. В качестве переменных действие — угол можно выбрать канонические элементы Делоне (см. гл. 2) L, G, l, g: $L=\sqrt{a}$, $G=\sqrt{a(1-e^2)}$, a и e — большая полуось и эксцентриситет орбиты астероида, l — средняя аномалия астероида, g — долгота перицентра орбиты, отсчитываемая от направления на Юпитер (рис. 39). Элементы Делоне — это канонические переменные в фазовом пространстве. Их можно использовать и для описания возмущенного движения. Усредним возмущенные уравнения для элементов Делоне по быстрым фазам l и g. Согласно теореме 10 и замечанию к ней, в усредненной системе величины L, G (и, значит, a, e) являются интегралами, а фазы l, g равномерно вращаются с частотами, отличающимися от невозмущенных частот на величины порядка ε. Итак, принцип усреднения приводит к следующей картине движения. Астероид движется по эллипсу, который медленно равномерно вращается вокруг своего фокуса (центра масс системы Солнце — Юпитер). $\triangle$

Пример 11. Рассмотрим вращение тяжелого твердого тела около неподвижной точки. Расстояние от точки подвеса до центра масс тела обозначим ε и будем считать малой величиной. При $\varepsilon=0$ получаем задачу Эйлера—Пуансо (гл. 4). Переменные действие — угол I_1, I_2, Θ, φ_1, φ_2, ϑ для этой задачи описаны в [12] (см. также гл. 3, п. 2.3). Напомним, что I_2 — модуль вектора кинетического момента тела, а Θ — его вертикальная проекция, ϑ — угол поворота вектора кинетического момента вокруг вертикали, переменные I_1, φ_1, φ_2 при заданном I_2 определяют положение тела в системе осей, жестко связанной с вектором кинетического момента и вертикалью (рис. 20).

В этих переменных гамильтониан возмущенной задачи имеет вид

$$H = H_0(I_1, I_2) + \varepsilon H_1(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2, \Theta).$$

Так как Θ — интеграл задачи, то для I_j, φ_j получается система с двумя степенями свободы и двумя частотами. Применяя принцип усреднения, получаем, что «действия» I_j — интегралы, а фазы φ_j испытывают равномерное вращение, близкое к вращению в задаче Эйлера—Пуансо. Из анализа уравнения $\dot{\vartheta} = \varepsilon \partial H_1/\partial\Theta$ легко следует, что в рассматриваемом приближении изменение угла ϑ близко к равномерному вращению с угловой скоростью порядка ε. Итак, получается, что в системе координат, связанной с вектором кинетического момента и вертикалью, тело совершает движение «почти по Эйлеру—Пуансо», а сам вектор кинетического момента медленно прецессирует вокруг вертикали. $\triangle$

Часто встречаются задачи с *собственным вырождением* (гл. 4, п. 2.1) когда невозмущенный гамильтон зависит не от всех переменных «действие» и, соответственно, некоторые из невозмущенных частот тождественно обращаются в нуль:

$$H = H_0(I_1, \ldots, I_r) + \varepsilon H_1(I, \varphi, \varepsilon), \quad r < n.$$

Фазы φ_j, $j > r$ являются медленными переменными. Согласно принципу усреднения, для приближенного описания эволюции надо усреднить уравнения возмущенного движения по быстрым фазам φ_i, $i \leqslant r$. Аналогично предыдущему доказывается следующее утверждение.

Теорема 11. В гамильтоновой системе с n степенями свободы и $r < n$ частотами переменные, сопряженные быстрым фазам, являются интегралами усредненной системы.

В соответствии с этой теоремой для медленных фаз и сопряженных им переменных при усреднении получается приведенная гамильтонова система с $n-r$ степенями свободы. Если число быстрых фаз лишь на единицу меньше числа степеней свободы (однократное вырождение), то приведенная система имеет одну степень свободы. Следовательно, при однократном вырождении принцип усреднения позволяет приближенно проинтегрировать задачу (как и в невырожденном случае).

Пример 12 (*Задача Гаусса*). Рассмотрим *круговую ограниченную задачу трех тел* (не плоскую). Массу Юпитера будем считать малой, по сравнению с массой Солнца. Уравнения движения относительно вращающейся системы отсчета, введенной при описании примера 10, в канонических элементах Делоне L, G, Θ, l, g, ϑ (гл. 2) однократно вырождены — угол g (аргумент широты перицентра астероида) в невозмущенном движении постоянен. Усреднение по быстрым фазам l, ϑ в этой задаче называется *усреднением Гаусса*. Согласно теореме 2.1, величины L, Θ — интегралы усредненной системы. Изменение G, g после усреднения описывается гамильтоновой системой с одной степенью свободы, гамильтониан которой зависит от L, Θ как от параметров. Фазовые портреты этой системы для всех L, Θ построены в [62] (с помощью ЭВМ, так как форма гамильтониана достаточно сложна). Аналитически эта задача исследована в четырех предельных случаях: при малых наклонениях, в хилловском случае (Юпитер находится гораздо дальше от Солнца, чем астероид) [93], внешнем хилловском случае (астероид находится гораздо дальше от Солнца, чем Юпитер) [69] и в случае равномерно близких орбит астероида и Юпитера [165].

При малых наклонениях движение качественно такое же, как в плоской задаче[1].

При исследовании хилловского случая было обнаружено следующее новое явление: у орбит с большими наклонениями возникают значительные колебания эксцентриситета. В частности, у первоначально почти круговых орбит с наклонением 90° эксцентриситет возрастает до единицы, что приводит к превращению орбиты в отрезок и столкновению с Солнцем. Быть может, это объясняет, почему Солнечная система почти плоская и почему отсутствуют спутники с большими наклонениями к плоскости Солнечной системы у сферически симметричных планет.

Во внешнем хилловском случае плоскость орбиты астероида медленно прецессирует вокруг нормали к плоскости орбиты Юпитера, а сама орбита медленно поворачивается в своей плоскости как твердое тело. Для вертикальных орбит прецессия отсутствует. Для орбит с наклонением $\arccos \frac{1}{\sqrt{5}}$ отсутствует поворот в плоскости орбиты[2]. Δ

Пример 13. (*Теорема Лагранжа — Лапласа об устойчивости Солнечной системы*). Рассмотрим *задачу n тел* в предположении, что масса одного тела (Солнца) много больше масс остальных тел (планет). Невозмущенной будем называть систему, в которой планеты не взаимодействуют друг с другом, а Солнце неподвижно. Невозмущенная система распадается на $n-1$ задач Кеплера. Предположим, что невозмущенные орбиты планет — кеплеровские эллипсы, и введем для описания каждого из них *канонические элементы Пуанкаре*[3] [24]. В ре-

---

[1] Если в начальный момент наклонение мало, то в усредненной системе оно остается малым во все время движения [102].

[2] Точно так же эволюционирует орбита далекого спутника осесимметричной планеты (см., например, [50]).

[3] Это канонические переменные, в которых задача регулярна при малых эксцентриситетах и наклонениях. Элементы Пуанкаре Λ, ξ, p, λ, η, q связаны с элементами Делоне L, G, Θ, l, g, ϑ соотношениями

$$\Lambda = L,\quad \xi = \sqrt{2(L-G)}\cos g,\quad p = \sqrt{2(G-\Theta)}\cos\vartheta,$$
$$\lambda = l+g+\vartheta,\quad \eta = -\sqrt{2(L-G)}\sin g,\quad q = -\sqrt{2(G-\Theta)}\sin\vartheta.$$

При нулевых эксцентриситетах и наклонениях $\xi=\eta=p=q=0$. Переменная λ — *средняя долгота* планеты.

зультате получим канонические переменные для возмущенной системы. В рассматриваемой задаче есть $n-1$ быстрых фаз — это средние долготы планет. Сопряженные им переменные $\Lambda_j = \sqrt{\mu_j a_j}$, $j=1, \ldots, n-1$, являются интегралами усредненной по быстрым фазам системы. Здесь a_j — большие полуоси орбит кеплеровских эллипсов планет, μ_j — множители, зависящие от масс. Итак, в усредненной системе большие полуоси орбит планет не эволюционируют. Этот важный вывод называется теоремой Лапласа об отсутствии вековых возмущений полуосей.

Далее оказывается, что усредненная система имеет устойчивое положение равновесия, соответствующее движению всех планет в одной плоскости в одну сторону по круговым орбитам. Движение планет, соответствующее малым колебаниям в линеаризованной около этого равновесия усредненной системе, называется *лагранжевым движением*. Оно имеет простую геометрическую интерпретацию. Вектор, направленный из фокуса в перигелий планеты и имеющий длину, пропорциональную ее эксцентриситету (*вектор Лапласа*), в проекции на основную плоскость системы координат является суммой $n-1$ равномерно вращающихся векторов. Набор угловых скоростей этих векторов одинаков для всех планет. Вектор, направленный по линии пересечения плоскости орбиты планеты с основной плоскостью (линии узлов) и пропорциональный по длине наклонению планеты, является суммой $n-2$ равномерно вращающихся векторов[1]. Если в некоторый момент времени эксцентриситеты и наклонения достаточно малы, то в усредненной системе они останутся малыми и во все время движения. В частности, оказываются невозможными столкновения планет и уходы на бесконечность. Это утверждение называется теоремой Лагранжа — Лапласа об устойчивости Солнечной системы. С момента доказательства теоремы (1784 г.) центральная математическая задача небесной механики состояла в том, чтобы перенести этот вывод об устойчивости с усредненной системы на точную. На этом пути возникли многие разделы теории динамических систем, в том числе теория возмущений и эргодическая теория. Сейчас решение рассматриваемой задачи значительно продвинуто. Оказывается, при достаточно малых массах планет большая доля области фазового пространства, соответствующей невозмущенном движению в одну сторону по кеплеровским эллипсам малых эксцентриситетов и наклонений, заполнена условно-периодическими движениями, близкими к лагранжевым (см. § 3). Таким образом, «устойчивость» имеет место для большинства начальных условий. При начальных условиях из исключительного множества эволюция больших полуосей если и происходит, то очень медленно — ее средняя скорость экспо-

---

[1] Исчезновение одной частоты связано с наличием у системы интеграла момента количества движения.

ненциально убывает при линейном убывании возмущения [18] (см. ниже п. 3.4). Однако до сих пор неизвестно, происходит ли в действительности такая эволюция и, тем более, может ли она привести к разрушению планетной системы. △

Вопросы о соответствии решений точной и усредненной систем во всех приведенных примерах носят общий характер и решаются в рамках теории КАМ, см. § 3.

В случаях, когда частоты невозмущенного движения близки к целочисленной соизмеримости, для приближенного описания эволюции используется частичное усреднение с учетом резонансов (п. 1.1). Для рассматриваемых гамильтоновых систем оно, очевидно, сводится к отбрасыванию в разложении Фурье возмущенного гамильтониана всех гармоник, фазы которых при рассматриваемых соизмеримостях изменяются быстро. Эта процедура также приводит к появлению интегралов усредненной системы.

Теорема 12. Частично усредненная с учетом r независимых резонансов гамильтонова система имеет $n-r$ интегралов в инволюции, являющихся целочисленными линейными комбинациями первоначальных медленных переменных I_j.

◁ Сделаем симплектическую замену переменных $I, \varphi \mapsto p, q$ с производящей функцией $W=(p, R\varphi)$, где R — целочисленная унимодулярная матрица, первые r строк которой образуют базис в подгруппе Z^m, порожденной векторами коэффициентов рассматриваемых резонансных соотношений; матрица R существует согласно [145]. В новых переменных усреднение сводится к отбрасыванию в гамильтониане гармоник, содержащих фазы $q_{r+1}, \ldots, q_n$. Сопряженные им величины $p_{r+1}, \ldots, p_n$ являются интегралами усредненной системы. ▷

Если имеется всего один резонанс, то частично усредненная с его учетом система имеет $n-1$ интегралов в инволюции (отличных от интеграла энергии) и, следовательно, интегрируема.

Пример 14. Пусть в *плоской круговой ограниченной задаче трех тел* период невозмущенного движения астероида близок к половине периода обращения Юпитера. Воспользуемся каноническими переменными L, G, l, g примера 10. Величина $l+2g$ является медленной переменной. Производящая функция W и новые переменные p_j, q_j, введенные при доказательстве теоремы 12, задаются формулами

$$W=p_1(l+2g)+p_2(-l-g),$$

$$p_1=G-L, \quad q_1=l+2g,$$

$$p_2=G-2L, \quad q_2=-l-g.$$

После усреднения с учетом резонанса величина p_2 становится интегралом, а для p_1, q_1 получается гамильтонова система с одной

24-2

степенью свободы. Ее фазовый портрет для различных значений p_2 и малых p_1 показан на рис. 40. На портрете в качестве полярных координат выбраны $-p_1 = -\sqrt{L}(\sqrt{1-e^2}-1) \approx \sqrt{L}e^2/2$ и q_1. $\triangle$

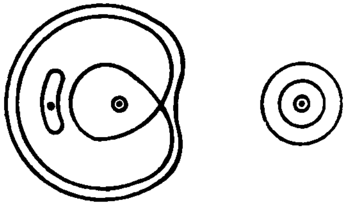


Рис. 40

В случае одного резонанса фазовый портрет усредненной системы близок к фазовому портрету задачи о движении маятника в потенциальном поле (при достаточно общих предположениях) [34]. Действительно, усредненный гамильтониан в переменных p, q, введенных при доказательстве теоремы 12, имеет вид

$$F = F_0(p_1, p_2, \ldots, p_n) + \varepsilon F_1(p_1, p_2, \ldots, p_n, q_1).$$

Пусть $p_1^* = p_1^*(p_2, \ldots, p_n)$ — простое резонансное значение p_1, т. е.

$$\left(\frac{\partial F_0}{\partial p_1}\right)_{p_1^*} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 F_0}{\partial p_1^2}\right)_{p_1^*} = a \neq 0.$$

Введем в его $\sqrt{\varepsilon}$-окрестности новую переменную $P_1 = (p_1 - p_1^*)/\sqrt{\varepsilon}$ и, соответственно, новый гамильтониан $\Phi = F/\sqrt{\varepsilon}$. Если исходный гамильтониан F регуляреи в окрестности резонанса, то

$$\begin{aligned} \Phi &= \sqrt{\varepsilon}\,({}^1/_2\; aP_1^2 + V(q_1)) + O(\varepsilon), \\ V(q_1) &= F_1(p_1^*, p_2, \ldots, p_n, q_1). \end{aligned} \tag{24}$$

Явную зависимость a, V от параметров $p_2, \ldots, p_n$ указывать не будем. Если отбросить в (24) добавок $O(\varepsilon)$, то получим гамильтониан задачи о движении маятника в потенциальном поле, фазовый портрет которой показан на рис. 41. На фазовом портрете имеются области колебательных и вращательных движений маятника, разделенные сепаратрисами. Характерный размер колебательной области по переменной p_1 и характерная амплитуда колебаний p_1 — порядка $\sqrt{\varepsilon}$, характерный период колебаний — порядка $1/\sqrt{\varepsilon}$. Положения равновесия на рис. 41 называются стационарными резонансными режимами. При учете переменных $q_2, \ldots, q_n$ им соответствуют условно-периодические движения (если число степеней свободы $n=2$ — периодические движения).

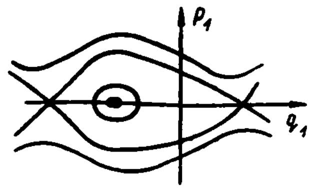


Рис. 41

Замечания. 1. Если в рассматриваемой области значений переменных гамильтониан не является регулярной функцией, то фазовый портрет усредненной системы может быть другим, чем на рис. 41. Так будет в задаче примера 14, если рассматривать малые значения эксцентриситета (ср. рис. 40 и 41).

2. Эффекты, связанные с резонансами, неожиданно часто встречаются в природе. Большие возмущения Сатурна Юпитером («большое неравенство») связаны с соизмеримостью 2 : 5 их кеплеровских частот. Известны три резонансных соотношения в системе спутников Сатурна: частоты Мимаса и Тефии относятся (примерно) как 2 : 1, Энцелада и Дионы — также как 2 : 1, Титана и Гипериона — как 3 : 4. Частота осевого вращения Меркурия составляет 3/2 его орбитальной частоты. Таблицы встречающихся в Солнечной системе соизмеримостей приведены в [50]. В большинстве случаев причины возникновения этих соизмеримостей неизвестны. Для описания движения вблизи соизмеримости успешно используется описанная выше процедура частичного усреднения. △

2.2. Процедуры исключения быстрых переменных

В пункте 1.2 описаны замечательные замены переменных, позволяющие формально исключить быстрые фазы из правых частей уравнений движения. Эти замены играют центральную роль во всех вопросах, связанных с усреднением. В рассматриваемом случае гамильтоновых систем эти замены можно выбрать симплектическими. Ниже описываются основные процедуры симплектического исключения быстрых фаз.

А. Метод Линдштедта. Это — один из первых методов исключения быстрых фаз. Современную форму ему придал Пуанкаре в [34].

Пусть имеется возмущенная гамильтонова система (23) с n степенями свободы и n частотами, причем между частотами нет тождественных резонансных соотношений. Постараемся подобрать симплектическую близкую к тождественной замену переменных $I, \varphi \mapsto J, \psi$ так, чтобы новый гамильтониан $\mathscr{H}$ зависел только от медленных переменных: $\mathscr{H} = \mathscr{H}(J, \varepsilon)$. Производящую функцию замены переменных и новый гамильтониан ищем в виде формальных рядов по ε:

$$I=J+\varepsilon\frac{\partial S}{\partial\varphi},\quad \psi=\varphi+\varepsilon\frac{\partial S}{\partial J},$$
$$S(J,\varphi,\varepsilon)=S_1(J,\varphi)+\varepsilon S_2(J,\varphi)+\ldots,\tag{25}$$
$$\mathscr{H}(J,\varepsilon)=\mathscr{H}_0(J)+\varepsilon\mathscr{H}_1(J)+\ldots .$$

Функции S_i должны иметь по φ период 2π. Старый и новый гамильтонианы связаны соотношением

$$\mathscr{H}(J,\varepsilon)=H_0\left(J+\varepsilon\frac{\partial S}{\partial\varphi}\right)+\varepsilon H_1\left(J+\varepsilon\frac{\partial S}{\partial\varphi},\varphi,\varepsilon\right).$$

Приравнивая здесь члены одинакового порядка по ε, получаем систему уравнений

$$\mathscr{H}_0(J)=H_0(J),$$
$$\mathscr{H}_1(J)=\frac{\partial H_0}{\partial J}\frac{\partial S_1}{\partial\varphi}+H_1(J,\varphi,0),\tag{26}$$
$$\mathscr{H}_i(J)=\frac{\partial H_0}{\partial J}\frac{\partial S_i}{\partial\varphi}+F_i(J,\varphi),\quad i\geqslant 2.$$

Функция F_i является полиномом от $\partial S_1/\partial\varphi,\ldots,\partial S_{i-1}/\partial\varphi$. Решение системы (26) в обозначениях $\langle\cdot\rangle^{\varphi}$, $\{\cdot\}^{\varphi}$ для оператора усреднения и интегрирующего оператора, введенных в п. 1.2, дается формулами

$$\mathscr{H}_1=\langle H_1\rangle^{\varphi},\quad S_1=-\{H_1\}^{\varphi}+S_1^0(J),$$
$$\mathscr{H}_i=\langle F_i\rangle^{\varphi},\quad S_i=-\{F_i\}^{\varphi}+S_i^0(J),\quad i\geqslant 2.$$

Здесь S_i^0 — произвольные функции от J. Часто выбирают $S_i^0\equiv\equiv 0$.

В выражение для интегрирующего оператора (см. п. 1.2) входят знаменатели $(k,\omega(J))=(k,\partial H_0/\partial J)$ с целочисленными векторами $k\neq 0$. Поэтому функции S_i не определены, вообще говоря, на всюду плотном множестве точек J, где эти знаменатели обращаются в нуль или ненормально малы.

Временно забудем о малых знаменателях и предположим, что первые m функций S_i определены и являются гладкими. Оборвем ряд для функции S на членах порядка ε^m и рассмотрим замену переменных с «укороченной» производящей функцией $J\varphi+\varepsilon S_1(J,\varphi)+\ldots+\varepsilon^m S_m(J,\varphi)$. Для новых переменных получим гамильтониан, в котором зависят от фаз лишь члены порядка ε^{m+1} и выше. Отбросив эти члены, получим интегрируемую систему уравнений, в которой $J=\mathrm{const}$, а фаза ψ равномерно вращается с частотой, зависящей от J. Подставляя это решение в формулы замены переменных, получаем приближенное решение исходной системы. Его точность и интервал времени, на котором оно пригодно, растут с увеличением номера приближения m. На интервале времени $(0,T)$ это решение гарантирует точность $O(\varepsilon^{m+1}T)$ для медленных переменных и $O(\varepsilon^{m+1}T^2)$ — для быстрых. При $m=1$ приходим к усредненной системе. Если бы ряд для замены переменных сходился, то описанная процедура давала бы возможность проинтегрировать исходную возмущенную систему.

Чтобы придать этим рассуждениям реальный смысл при наличии *малых знаменателей*, представим возмущение в форме

$$\varepsilon H_1(I, \varphi, \varepsilon)=H^{(1)}(I, \varphi, \varepsilon)+H^{(2)}(I, \varphi, \varepsilon)+\ldots,$$

где $H^{(i)}$ — тригонометрический полином от φ, ограниченный по модулю величиной порядка ε^i. Будем проводить описанную выше процедуру исключения фаз, считая $H^{(i)}$ членом порядка ε^i в разложении возмущения в ряд по ε («забыв» при этом, что функция $H^{(i)}/\varepsilon^i$ сама зависит от ε). Тогда в каждом приближении процедуры возникает лишь конечное число малых знаменателей и, соответственно, функции S_i, $1\leqslant i\leqslant m$, не будут определены лишь на конечной совокупности поверхностей $(k, \omega(J))=0$ (их количество зависит от ε и номера приближения m). Вне малой окрестности этой совокупности поверхностей введенная выше «укороченная» производящая функция определяет замену переменных, приближенно интегрирующую исходную систему уравнений. Полностью система функций S_i, $1\leqslant i<\infty$, по-прежнему не определена, вообще говоря, на всюду плотном множестве значений J.

Метод Линдштедта очень эффективен, так как дает простой способ приближенного интегрирования возмущенной гамильтоновой системы. Этот метод сыграл большую роль в развитии теории, так как позволил построить разложение общего решения возмущенной гамильтоновой системы в формальный ряд, содержащий только периодические по времени члены. Методы, дающие такие разложения, Пуанкаре назвал «новыми» в противовес «старым» методам, в которых появлялись *вековые члены* вида t^m и $t^m \sin lt$, $t^m \cos lt$ [34]. Открытие «новых» методов совершенно изменило постановку вопроса об устойчивости возмущенных гамильтоновых систем (и в том числе Солнечной системы). Появление вековых членов в «старых» методах, обусловленное в действительности способом разложения, (подобно тому как возникает вековой член в разложении $\sin(1+\varepsilon)t=\sin t+\varepsilon t\cos t+\ldots$), считалось признаком неустойчивости движения[1]. Усилия были направлены на доказательство отсутствия таких членов для конкретных возмущений в главных порядках разложения. Для Солнечной системы Лаплас доказал отсутствие вековых членов в первом порядке по возмущению. Пуассон нашел, что во втором порядке по возмуще-

[1] Здесь речь идет об *устойчивости по Лагранжу*. Движение называется устойчивым по Лагранжу, если его траектория вечно остается в ограниченной области фазового пространства.

нию отсутствуют чистые вековые члены (вида t^m), но присутствуют смешанные (вида $t^m \sin lt$, $t^m \cos lt$). С появлением «новых» методов оказалось, что можно построить формальные теории без вековых членов, а вопрос — в сходимости получаемых разложений.

Как указал Пуанкаре, ряды Линдштедта в общем случае расходятся.

Пример 15. Рассмотрим систему, в которой частоты невозмущенного движения постоянны и несоизмеримы:

$$H = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + \varepsilon(I_1 + \Sigma\, a_k \sin(k, \varphi)), \quad k \neq 0$$

$$|(\omega, k)| > c|k|^{-\nu}, \quad c, \ \nu = \mathrm{const} > 0, \quad a_k = \exp(-|k|).$$

Здесь можно вычислить все приближения метода Линдштедта. Если ряды Линдштедта сходятся, то вдоль движения величина $|I|$ испытывает лишь ограниченные колебания.

С другой стороны, возмущенная система легко интегрируется. Фазы равномерно вращаются с частотами $\omega_1 + \varepsilon$, ω_2, а изменение I определяется квадратурой. При рациональном отношении частот $(\omega_1 + \varepsilon)/\omega_2$ величина $|I|$ неограниченно растет вдоль движения (как легко сосчитать). Поэтому ряды Линдштедта расходятся. $\triangle$

Расходимость, как это часто бывает, связана с тем, что строятся некоторые несуществующие объекты. Дело здесь обстоит примерно так. Если при некотором J ряды Линдштедта сходятся, то возмущенная система имеет инвариантный тор $J = \mathrm{const}$, на котором фаза вращается с вектором частот $\hat{\omega}(J, \varepsilon) = \frac{\partial H_0(J)}{\partial J} + \varepsilon \frac{\partial \mathscr{H}_1(J)}{\partial J} + \ldots$. Невозмущенные частоты несоизмеримы (так выбиралось значение J). Но частоты возмущенного движения при некоторых ε становятся соизмеримыми. Тогда инвариантный тор расслаивается на торы меньшей размерности. Такая ситуация является очень вырожденной и в системах общего положения не встречается. Поэтому ряды Линдштедта в общем случае расходятся.

Замечание. Имеется вариант метода Линдштедта, в котором ищутся инвариантные торы с заранее фиксированными несоизмеримыми частотами. Соответствующие ряды сходятся [29]. Доказательство сходимости этих рядов основано на установлении их тождества со сходящимися рядами теории КАМ (см. § 3). Прямое доказательство сходимости пока неизвестно. $\triangle$

Б. Метод Цейпеля. Этот метод распространяет процедуру метода Линдштедта на случай, когда из гамильтониана исключается только часть фаз. Он позволяет рассмотреть системы с собственным вырождением и резонансные ситуации. Метод Цейпеля перекрывает возможности ранее разработанных для этой цели методов Делоне и Болина.

Пусть в системе (23) снова делается симплектическая близкая к тождественной замена переменных вида (25). Новый гамильтониан будем искать в виде формального ряда $\mathscr{H}(J, \psi, \varepsilon) = \mathscr{H}_0(J) + \varepsilon\mathscr{H}_1(J, \psi) + \ldots$. Новый и старый гамильтонианы связаны соотношением

$$\mathscr{H}_0(J) + \varepsilon\mathscr{H}_1\left(J, \varphi + \varepsilon\frac{\partial S}{\partial J}\right) + \ldots = H_0\left(J + \varepsilon\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right) + \\ + \varepsilon H_1\left(J + \varepsilon\frac{\partial S}{\partial \varphi}, \varphi, \varepsilon\right).$$

Приравнивая члены одинакового порядка по ε, снова получаем систему соотношений (26), но только $\mathscr{H}_i$ зависят от фаз и иначе вычисляются F_i.

Пусть $\chi \in T^{n-r}$ — набор фаз, которые требуется исключить из гамильтониана, $\gamma \in T^r$ — остальные фазы. Тогда можно взять

$$\mathscr{H}_1 = \langle H_1(J, \varphi, 0)\rangle^{\chi}, \quad S_1 = -\{H_1 - \mathscr{H}_1\}^{\varphi} + S_1^0(J),$$

$$\mathscr{H}_i = \langle F_i(J, \varphi,)\rangle^{\chi}, \quad S_i = -\{F_i - \mathscr{H}_i\}^{\varphi} + S_i^0(J), \ i \geqslant 2. \quad (27)$$

Здесь S_i^0 — произвольные функции от J. Например, можно выбрать $S_i^0 \equiv 0$.

Если, как и выше, оборвать ряд для S на членах порядка ε^m и рассмотреть «укороченную» замену переменных, а в преобразованном гамильтониане отбросить члены порядка ε^{m+1}, то получим гамильтониан m-го приближения. Он не зависит от фаз χ; соответственно, полученная приближенная система имеет $n-r$ интегралов и сводится к системе с r степенями свободы. Как и в методе Линдштедта, здесь возникают малые знаменатели. Для того, чтобы в каждом приближении имелось лишь конечное число малых знаменателей, надо модифицировать описанную процедуру аналогично п. 2.2.А.

Пусть рассматривается система с *собственным вырождением* — невозмущенный гамильтониан не зависит от некоторых переменных «действие». Тогда среди фаз есть медленные и быстрые, а описанная процедура позволяет формально исключить из гамильтониана быстрые фазы. Система первого приближения для новых переменных совпадает с усредненной по быстрым фазам системой.

Пусть теперь задано r независимых резонансных соотношений между невозмущенными частотами. Преобразуем фазы так, чтобы при выполнении этих соотношений первые r фаз были полубыстрыми, а последние $n-r$ — быстрыми. Тогда описанная процедура позволяет формально исключить из гамильтониана быстрые фазы. Система первого приближения для новых переменных совпадает с частично усредненной с учетом заданных резонансов системой. Практически здесь можно не вводить в качестве переменных резонансные комбинации фаз, а действовать в исходных переменных. При этом в формулах (27) усреднение по быстрым фазам заменяется следующей операцией: в разложении Фурье отбрасываются гармоники, которые в невозмущенном движении осциллируют при наличии заданных резонансных соотношений.

Ряды Цейпеля, как и ряды Линдштедта, в общем случае расходятся.

Вместо метода Цейпеля часто используется его модификация, предложенная Хори (G. Hori) и Депри (A. Deprit) (см. например, [154]). В этой модификации симплектическая замена переменных, исключающая фазы, задается не производящей функцией, а *генератором* — функцией $W(J, \psi, \varepsilon) = W_1 + \varepsilon W_2 + \ldots$ такой, что сдвиг за время ε вдоль траекторий гамильтоновой системы с гамильтонианом W дает нужное преобразование $I, \varphi \to J, \psi$. Это удобнее, так как производящая функция зависит сразу и от старых (φ) и от новых (J) переменных, а генератор — только от новых переменных. Поэтому при использовании генератора не надо дополнительно решать функциональные уравнения, выражая все только через старые или только новые переменные. Имеются простые рекуррентные соотношения, выражающие коэффициенты разложения по ε новых переменных и гамильтониана через старые переменные, гамильтониан и генератор. Коэффициенты разложения генератора последовательно определяются из системы соотношений, эквивалентной (27). Например, первое приближение для генератора просто совпадает с первым приближением для производящей функции: $W_1(J, \psi) \equiv S_1(J, \psi)$. Имеются программы для ЭВМ, реализующие процедуру Хори—Депри в буквенном виде. С помощью одной из этих программ была уточнена классическая теория Делоне движения Луны [149].

В. Методы теории КАМ. В *теории Колмогорова—Арнольда—Мозера* (КАМ) разработаны сходящиеся методы интегрирования возмущенных гамильтоновых систем. Эти методы основаны на построении последовательных замен переменных, уничтожающих зависимость гамильтониана от быстрых фаз во все более высоких порядках по малому параметру. Процедуру последовательных замен предложил Ньюком. Современную форму ей придал А. Пуанкаре, который, однако, посчитал процедуру Ньюкома эквивалентом процедуры Линдштедта.

В действительности, как выяснилось в работах А. Н. Колмогорова [14] и В. И. Арнольда [4], [5], процедура последовательных замен обладает замечательным свойством квадратичной сходимости: после m замен невязка в гамильтониане, зависящая от фазы, имеет порядок ε^{2^m} (без учета малых знаменателей). Такая *«сверхсходимость»* парализует влияние малых знаменателей и делает всю процедуру сходящейся на некотором «нерезонансном» множестве.

Процедуру последовательных замен можно реализовать по-разному. Ниже описывается конструкция В. И. Арнольда, близкая к первоначальному методу Ньюкома.

Рассмотрим возмущенную гамильтонову систему с гамильтонианом

$$H(I,\ \varphi,\ \varepsilon)=H_0(I)+\varepsilon H_1(I,\ \varphi,\ \varepsilon). \tag{28}$$

Сделаем симплектическую близкую к тождественной замену переменных $I,\ \varphi\mapsto J,\ \psi$ так, чтобы в новых переменных члены гамильтониана порядка ε не зависели от фаз. Такая замена переменных уже была построена в п. 2.2.А при рассмотрении первого приближения для метода Линдштедта. Она задается производящей функцией

$$J\varphi+\varepsilon S(J,\ \varphi),\quad S=-\{H_{1N}(J,\ \varphi,\ \varepsilon)\}^{\varphi}. \tag{29}$$

Здесь $\{\cdot\}^{\varphi}$ — интегрирующий оператор, $H_{1N}(J,\ \varphi,\ \varepsilon)$ — сумма гармоник ряда Фурье функции H_1, порядок которых не превосходит целого числа N. Число N выбирается так, чтобы остаток ряда Фурье $R_{1N}=H_1-H_{1N}$ по модулю не превосходил ε. Новый гамильтониан $\mathscr{H}(J,\ \psi,\ \varepsilon)$ имеет вид

$$\begin{gathered}\mathscr{H}(J,\ \psi,\ \varepsilon)=\mathscr{H}_0(J,\ \varepsilon)+\varepsilon^2\mathscr{H}_1(J,\ \psi,\ \varepsilon),\\ \mathscr{H}_0(J,\ \varepsilon)=H_0(J)+\varepsilon\langle H_1\rangle^{\varphi},\\ \varepsilon^2\mathscr{H}_1(J,\ \psi,\ \varepsilon)=\left[H_0\left(J+\varepsilon\frac{\partial S}{\partial\varphi}\right)-H_0(J)-\varepsilon\frac{\partial H_0}{\partial J}\frac{\partial S}{\partial\varphi}\right]+\\ +\varepsilon\left[H_1\left(J+\varepsilon\frac{\partial S}{\partial\varphi},\ \varphi,\ \varepsilon\right)-H_1(J,\ \varphi,\ \varepsilon)\right]+\varepsilon R_{1N}(J,\ \varphi,\ \varepsilon).\end{gathered} \tag{30}$$

В правой части последнего из этих равенств надо выразить φ через ψ, J по формулам замены переменных.

Новый гамильтониан выглядит так же, как и старый, но фазы входят в члены порядка ε^2. Сделаем в полученной системе аналогичную замену переменных. После этого фазы сохранятся в членах порядка ε^4 (см. (30)). После m подобных замен переменных зависимость от фаз сохранится лишь в членах порядка ε^{2^m}. Напомним, что после замены переменных m-го приближения метода Линдштедта зависимость от фаз остается в членах гамильтониана порядка ε^{m+1}.

Оценка ε^{2^m} указывает формальный порядок по ε невязки в гамильтониане. Фактически из-за влияния малых знаменателей невязка может быть гораздо больше.

Пример 16. Рассмотрим описанную выше первую замену переменных в области, где частоты удовлетворяют обычному условию несоизмеримости $|(k,\ \omega(J))|\geqslant\varkappa|k|^{-\nu}$, $0\leqslant|k|\leqslant N$. Очевидно

$$|I-J|=\left|\varepsilon\frac{\partial S}{\partial\varphi}\right|\sim\frac{\varepsilon}{\varkappa},\quad |\varphi-\psi|=\left|\varepsilon\frac{\partial S}{\partial J}\right|\sim\frac{\varepsilon}{\varkappa^2},\quad |\varepsilon^2\mathscr{H}_1|\sim\frac{\varepsilon^2}{\varkappa^2}.$$

Значение $\varkappa$ может изменяться от величин порядка 1 до величин порядка $\sqrt{\varepsilon}$ (при $\varkappa\sim\sqrt{\varepsilon}$ имеем $\left|\varepsilon\frac{\partial S}{\partial J}\right|\sim 1$ и введенная производящая функция может не определять взаимно однозначного соответствия I, $\varphi\leftrightarrow J$, ψ). При $\varkappa\sim\sqrt{\varepsilon}$ получаем $|\varepsilon^2\mathscr{H}_1|\sim\varepsilon$ вместо формальной оценки ε^2. $\triangle$

Всю последовательность замен переменных будем рассматривать на нерезонансном множестве, где возникающие малые знаменатели оцениваются снизу величинами $c\sqrt{\varepsilon}|k|^{-\nu}$, где $c=\mathrm{const}>0$, $\nu=\mathrm{const}>n-1$, а $|k|$ — порядок соответствующей знаменателю гармоники. Оказывается, на этом множестве быстрое возрастание порядка невязок по ε подавляет влияние малых знаменателей и композиция последовательных замен сходится. Это — центральное в теории КАМ утверждение. Следствия из него сформулированы в § 3.

Процедура последовательных замен обеспечивает сверхсходимость и для вырожденных систем, где вырождение, как говорят, «снимается». Это означает, что гамильтониан задачи имеет вид

$$H=H_{00}(I)+\varepsilon H_{01}(I)+\varepsilon^2 H_1(I,\ \varphi,\ \varepsilon),$$

где H_{00} зависит только от $r<n$ переменных «действие», а H_{01} — от всех n переменных. В качестве невозмущенного гамильтониана выбирается $H_{00}+\varepsilon H_{01}$. В невозмущенной задаче, как и в невырожденном случае, n частот, но r из них порядка 1, а $n-r$ — порядка ε. Возмущение в $1/\varepsilon$ раз меньше минимальной частоты. Процедура последовательных замен организуется точно так же, как в невырожденном случае. Оказывается, она сходится на соответствующем нерезонансном множестве [5].

Выше предполагалось, что возмущение H_1 — аналитическая функция. Если H_1 имеет конечную гладкость, то описанная процедура последовательных замен приводит к «потере производных»: в каждом приближении возмущение имеет меньше производных, чем в предыдущем. Из-за этого процедура обрывается после конечного числа шагов. При конечной гладкости возмущения Мозер предложил модифицировать процедуру, используя технику сглаживания, восходящую к Нэшу (J. Nash) [179]. Как известно, гладкую функцию можно с любой точностью приблизить аналитической; если функция периодична по некоторым переменным, то приближение можно выбрать в виде тригонометрического многочлена по этим переменным. Пусть H_{1N} в выражении для производящей функции замены переменных первого приближения (29) — аналитическая функция, являющаяся тригонометрическим многочленом по фазам и приближающая H_1 с точностью ε. Такая замена переменных исключит из гамильтониана фазы с точностью до членов порядка ε^2. В следующих приближениях поступим аналогичным образом. При такой процедуре гладкость возмущения сохраняется. Из результатов [176], [177] вытекает, что при достаточной гладкости возмущения последовательные приближения сходятся на нерезонансном множестве.[1] Требования к гладкости возмущения после первых результатов Мозера постепенно понижались в работах Мозера, Рюссманна (H. Rüssmann) и Пешеля (J. Pöschel). В [183] показано, что в невырожденном случае достаточно требовать, чтобы возмущение принадлежало классу C^r, $r>2n$ (здесь r — не обязательно целое, так что C^r—пространство Гёльдера).

§ 3. Теория КАМ

Теория КАМ — это теория возмущений условно-периодических движений гамильтоновых и родственных им систем в целом для бесконечных интервалов времени. Она дает, в частности, строгое оправдание фундаментальному выводу об отсутствии эволюции в таких системах, вытекающему из эвристического принципа усреднения и формальных процедур интегрирования.

3.1. Невозмущенное движение. Условия невырожденности. Напомним основные понятия, связанные с интегрируемыми системами. Рассмотрим невозмущенную интегрируемую гамильтонову систему с гамильтонианом $H_0(I)$. Ее фазовое пространство расслоено на инвариантные торы $I=\text{const}$. Движение по тору является условно-периодическим с вектором частот $\omega(I)=\partial H_0/\partial I$. Тор, на котором частоты рационально независимы, называется *нерезонансным*. Траектория заполняет его всюду плотно (как говорят, является обмоткой тора). Остальные торы $I=\text{const}$ называются *резонансными*. Они расслоены на инвариантные торы меньшей размерности. Невозмущенная система называется *невырожденной*, если ее частоты функционально независимы:

$$\det\frac{\partial\omega}{\partial I}=\det\frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2}\neq 0.$$

В невырожденной системе нерезонансные торы образуют всюду плотное множество полной меры. Резонансные торы образуют множество меры нуль, однако оно также всюду плотно. Более того, всюду плотны множества инвариантных торов с любым числом рационально независимых частот от 1 до $n-1$ и, в частности, торов, на которых все траектории замкнуты.

Невозмущенная система называется *изоэнергетически невырожденной*, если одна из частот не обращается в нуль, и отношения к ней остальных $n-1$ частот функционально независимы на уровне энергии $H_0=\text{const}$. Условие изоэнергетической невырожденности может быть записано в виде

---

[1] Техника последовательных приближений со сглаживанием привела также к новым теоремам нелинейного функционального анализа о неявной функции по Нэшу—Мозеру [177], [197], [157].

$$\det\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} & \frac{\partial H_0}{\partial I} \\ \frac{\partial H_0}{\partial I} & 0 \end{vmatrix} \neq 0.$$

В изоэнергетически невырожденной системе на каждом уровне энергии плотны множества как резонансных, так и нерезонансных торов, но, как и выше, первое имеет полную меру, а второе — меру нуль.

3.2. Инвариантные торы возмущенной системы. Рассмотрим теперь возмущенную систему с гамильтонианом

$$H(I, \varphi, \varepsilon) = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \varphi, \varepsilon). \tag{31}$$

Формулируемая ниже теорема А. Н. Колмогорова [14], [4] показывает, что происходит с нерезонансными торами при возмущении.

Теорема 13. (*Теорема Колмогорова*). Если невозмущенная гамильтонова система невырождена или изоэнергетически невырождена, то при достаточно малом гамильтоновом возмущении большинство нерезонансных инвариантных торов не исчезнет, а лишь немного деформируется, так что в фазовом пространстве возмущенной системы также имеются инвариантные торы, заполненные всюду плотно фазовыми кривыми, обматывающими их условно-периодически с числом частот равным числу степеней свободы. Указанные инвариантные торы образуют большинство в том смысле, что мера дополнения к их объединению мала вместе с возмущением. В случае изоэнергетической невырожденности инвариантные торы образуют большинство на каждом многообразии уровня энергии.

Инвариантные торы, которые строятся в этой теореме, называются *колмогоровскими торами*, а их объединение — *колмогоровским множеством*. Доказательство теоремы основано на сходящейся процедуре исключения быстрых фаз п. 2.2. В.

К общей формулировке теоремы А. Н. Колмогорова можно сделать несколько дополнений.

1°. Теорема справедлива, если невозмущенный гамильтониан аналитичен, а возмущение принадлежит классу C^r, $r>2n$ [183]. (В первоначальных формулировках возмущение предполагалось аналитическим [4]).

2°. Пусть задано число ν, удовлетворяющее неравенствам $n-1<\nu<{}^1/_2 r-1$. При достаточно малом возмущении класса C^r частоты движения по колмогоровским торам принадлежат канторову множеству.

$$\Omega_\varkappa = \{\xi : \xi\in\Omega\subset R^n,\ |(k, \xi)| > \varkappa |k|^{-\nu}\ \forall k\in Z^n\setminus\{0\}\}.$$

Здесь Ω — множество значений невозмущенных частот $\omega(I)$, а $\varkappa$ — величина порядка $\sqrt{\varepsilon}$ [184]. Напомним, что мера Лебега дополнения $\Omega_\varkappa$ до Ω не превосходит величины порядка $\varkappa$.

3°. Мера дополнения к колмогоровскому множеству не превосходит величины порядка $\sqrt{\varepsilon}$. Деформация сохраняющегося тора, т. е. его отличие от невозмущенного тора с теми же частотами условно-периодического движения, зависит от арифметических свойств частот. Если частоты принадлежат Ω_δ, $\delta > \varkappa$ (см. 2°), то деформация не превосходит величины порядка $\varepsilon/\delta \leqslant \sqrt{\varepsilon}$ [90], [107], [115], [184].

4°. Колмогоровские торы образуют гладкое семейство [90], [115], [184]. Сформулируем это утверждение подробнее. Рассмотрим сначала невырожденный случай. Предположим для простоты, что отображение частот $I \mapsto \omega(I)$ — диффеоморфизм. Тогда для возмущений класса C^r, $r > 3\nu + 2 > 3n - 1$, существует диффеоморфизм

$$\Psi : \Omega\{\xi\} \times T^n\{\vartheta\} \to R^n\{I\} \times T^n\{\varphi\},$$

ограничение которого на канторово множество стандартных торов $\Omega_\varkappa \times T^n$ отображает его в колмогоровское множество. В переменных ξ, ϑ при $\xi \in \Omega_\varkappa$ уравнения движения записываются в виде

$$\dot{\xi} = 0, \quad \dot{\vartheta} = \xi.$$

Диффеоморфизм Ψ имеет анизотропную гладкость — число его производных по фазе ϑ больше, чем по частоте ξ. Гладкость по ϑ — это гладкость отдельного инвариантного тора, а гладкость по ξ — собственно гладкость семейства торов.

Порядок гладкости диффеоморфизма Ψ оценивается сверху через порядок гладкости возмущения. В частности, если возмущение аналитично, то Ψ аналитичен по ϑ (т. е. каждый тор аналитичен) и бесконечно дифференцируем по ξ (т. е. торы образуют бесконечно дифференцируемое семейство). Это лучшее, чего можно ожидать, так как если Ψ оказался бы аналитичным по всем переменным, то возмущенная система была бы вполне интегрируемой.

В случае изоэнергетической невырожденности семейство торов на каждом уровне энергии аналогичным образом гладко параметризуется отношениями частот (и гладко зависит от энергии).

5°. Возмущенная система вполне интегрируема на канторовом множестве [184]. Это означает, что в невырожденном случае при достаточно гладком возмущении существуют симплектическая замена переменных $I, \varphi \mapsto J, \psi$ с производящей функцией $J\varphi + \varepsilon S(J, \varphi, \varepsilon)$ и невырожденный гамильтониан $\mathscr{H}(J, \varepsilon)$ такие, что

$$H_0\left(J + \varepsilon \frac{\partial S}{\partial \varphi}\right) + \varepsilon H_1\left(J + \varepsilon \frac{\partial S}{\partial \varphi}, \varphi, \varepsilon\right)\Big|_{B_{\varkappa,\varepsilon} \times T^n} = \mathscr{H}(J, \varepsilon),$$

причем это равенство можно дифференцировать достаточное количество раз. Здесь $B_{\varkappa,\varepsilon}$ — прообраз стандартного канторова множества $\Omega_\varkappa$ (см. 2°) при отображении $J \mapsto \partial\mathscr{H}/\partial J$. В изоэнергетически невырожденном случае формулировка аналогична. Функции S, $\mathscr{H}$ получаются из соответствующих функций, даваемых процедурой п. 2.2.В, сглаживанием в «щелях» между колмогоровскими торами.

Часто встречается случай *собственного вырождения*, когда невозмущенный гамильтониан не зависит от некоторых переменных «действие». Скажем, что возмущение снимает вырождение, если возмущенный гамильтониан приводится к виду

$$H=H_{00}(I)+\varepsilon H_{01}(I)+\varepsilon^2 H_{11}(I,\ \varphi,\ \varepsilon),\qquad(32)$$

где H_{00} зависит только от первых r переменных «действие» и является по этим переменным либо невырожденным, либо изоэнергетически невырожденным, а H_{01} зависит, вообще говоря, от всех «действий» и является невырожденным по последним $n-r$ из них (гессиан H_{01} по $I_{r+1},\ldots,I_n$ отличен от нуля). Систему с гамильтонианом $H_{00}+\varepsilon H_{01}$ назовем промежуточной.

Теорема 14 ([5]). Пусть возмущенная система вырождена, но возмущение снимает вырождение. Тогда большая часть фазового пространства заполнена инвариантными торами, близкими к инвариантным торам $I=\mathrm{const}$ промежуточной системы. Фазовые кривые обматывают эти торы условно-периодически, с числом частот равным числу степеней свободы. Из этих частот r соответствуют быстрым фазам, а $n-r$ — медленным. Если невозмущенный гамильтониан изоэнергетически невырожден по тем r переменным, от которых он зависит, то описанные инвариантные торы составляют большинство на каждом многообразии уровня энергии возмущенной системы.

Замечание. Во многих задачах возмущение периодически зависит от времени: $H=H_0(I)+\varepsilon H_1(I,\ \varphi,\ t,\ \varepsilon)$. Этот случай сводится к автономному введением времени в качестве новой фазы. Если $\det \partial^2 H_0/\partial I^2\neq 0$, то полученная так система изоэнергетически невырождена и в ней, согласно теореме 13, имеется много n-мерных инвариантных торов. Если в такой системе есть собственное вырождение, но возмущение его снимает, то инвариантные торы доставляет теорема 14. Δ

Пусть гамильтониан имеет вид $H=H_0(I,p,q)+\varepsilon H_1(I,\varphi,p,q)$, где H_0 имеет при всех I равновесие $(p,\ q)=0\in R^{2m}$ с не чисто мнимыми собственными числами и невырожден по I. Тогда при малых ε большинство невозмущенных инвариантных торов $p=q=0$, $I=\mathrm{const}$ не разрушается [155][1]. Если $m=1$, то торы сохраняются и при мнимых собственных числах [29].

В [29] Мозер построил теорию возмущений условно-периодических движений негамильтоновых систем. В частности, доказано сохранение инвариантных торов в обратимых системах.

3.3. Системы с двумя степенями свободы.

А. Отсутствие эволюции. В системах с двумя степенями свободы из наличия большого количества инвариант-

---

[1] Такие гиперболические торы изучали также В. К. Мельников и Мозер, см. [29].

ных торов следует отсутствие эволюции для всех (а не только для большинства) начальных условий.

Теорема 15 ([4]). В изоэнергетически невырожденной системе с двумя степенями свободы при всех начальных условиях переменные «действие» вечно остаются вблизи своих начальных значений.

◁ В рассматриваемой системе фазовое пространство четырехмерно, уровень энергии трехмерен, а колмогоровские торы двумерны и заполняют большую часть уровня энергии. Двумерный тор делит трехмерный уровень энергии (на рис. 42 показано расположение торов на уровне энергии). Фазовая кривая, начавшаяся в щели между двумя инвариантными торами возмущенной системы, вечно остается запертой между этими торами. Соответствующие переменные «действие» вечно остаются около своих начальных значений. Колебания переменных «действие» не превосходят величины порядка $\sqrt{\varepsilon}$, так как мера щели и отличие тора от невозмущенного ($I=\text{const}$) оцениваются величинами такого порядка. ▷

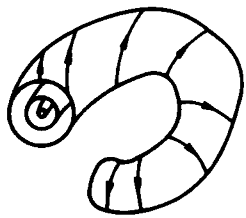


Рис. 42

Эволюция отсутствует и в случае *собственного вырождения*, если возмущение снимает вырождение и на уровне энергии имеется много инвариантных торов. Соответствующее условие снятия вырождения для гамильтониана вида (32) записывается в форме

$$\frac{\partial H_{00}}{\partial I_1}\neq 0, \quad \frac{\partial^2 H_{01}}{\partial I_2^2}\neq 0. \tag{33}$$

Здесь I_1, I_2 — две имеющиеся в задаче переменные «действие».

Теорема 16 ([5]). Если система с двумя степенями свободы в случае собственного вырождения удовлетворяет условиям (33), то при всех начальных данных переменные «действие» вечно остаются вблизи своих начальных значений.

Вырожденная система с двумя степенями свободы «более интегрируема», чем обычная возмущенная система, в следующем смысле.

Теорема 17 ([107]). Пусть для вырожденной системы (32) выполнены условия (33) и, кроме того, условие $\partial H_{01}/\partial I_2\neq 0$ (означающее, что «медленная» частота не обращается в нуль).

Тогда мера множества исчезающих при возмущении торов экспоненциально мала ($O(\exp(-\mathrm{const}/\varepsilon))$ вместо $O(\sqrt{\varepsilon})$ в невырожденной системе), отклонение тора от $I=\mathrm{const}$ имеет порядок ε.

◁ Причина этого явления — в том, что «быстрая» и «медленная» частоты различаются в $1/\varepsilon$ раз, и резонансу между ними соответствуют гармоники возмущения, имеющие высокий порядок $1/\varepsilon$ и, соответственно, малую амплитуду $O(\exp(-\mathrm{const}/\varepsilon))$. ▷

Замечание. Аналогичные утверждения справедливы, если у системы полторы степени свободы, т. е. на систему с одной степенью свободы наложено возмущение, периодически зависящее от времени. Нужное условие невырожденности — $\partial^2 H_0/\partial I^2 \neq 0$. В случае собственного вырождения при полутора степенях свободы гамильтониан имеет вид

$$H=\varepsilon H_{01}(I)+\varepsilon^2 H_{11}(I,\ \varphi,\ t,\ \varepsilon). \tag{34}$$

Условие снятия вырождения — $\partial^2 H_{01}/\partial I^2 \neq 0$. Мера разрушающихся торов экспоненциально мала, если, кроме того, $\partial H_{01}/\partial I \neq 0$. △

Если система с двумя степенями свободы невырождена, но не является изоэнергетически невырожденной, то переменные «действие» вне инвариантных торов иногда могут эволюционировать.

Пример 17 ([18]). Система с гамильтонианианом $H = 1/2(I_1^2-I_2^2)+\varepsilon\sin(\varphi_1-\varphi_2)$ имеет «быстрое» решение $I_1=-\varepsilon t$, $I_2=\varepsilon t$, $\varphi_1=-1/2\varepsilon t^2$, $\varphi_2=-1/2\varepsilon t^2$. Дело в том, что на невозмущенном уровне энергии лежит луч $I_1=-I_2$, вдоль которого отношение частот остается постоянным и равным 1. Этот луч и является «каналом сверхпроводимости». △

Б. Щель между колмогоровскими торами. Опишем структуру щели между колмогоровскими торами, возникающей вблизи заданного резонанса. Для простоты рассмотрим случай полутора степеней свободы (см. замечание к п. 3.3.А). Для приближенного описания движения, в соответствии с п. 2.1, усредним возмущение с учетом резонанса $k_1\omega + k_2=0$. Для I, $q=\varphi+(k_2/k_1)t$ получается гамильтонова система с одной степенью свободы. Ее фазовый портрет в окрестности резонансного значения I в случае общего положения похож на портрет маятника (см. п. 2.1 и рис. 43а). Этот портрет можно считать сечением фазового пространства I, φ, t усредненной системы плоскостью $t=0$. Равновесиям на рис. 43а соответствуют периодические решения, сепаратрисам — асимптотические к этим решениям при $t\to\pm\infty$ поверхности (их также называют сепаратрисами), замкнутым кривым — двумерные инвариантные торы.

Эту картину можно немного уточнить, сделав несколько шагов процедуры исключения быстрой переменной (п. 2.2) и от-

а б

Рис. 43

бросив возникающие в гамильтониане дополнительные члены более высокого порядка малости. При этом снова получится система с одной степенью свободы, фазовый портрет которой близок к портрету рис. 43а.

Как повлияют на движение отброшенные малые члены? Периодические решения сохраняются (это следует из теоремы о неявной функции). Асимптотические к ним поверхности также сохраняются. Однако поверхности, асимптотические при $t \to +\infty$ и $t \to -\infty$ к разным решениям (или даже к одному решению) уже не обязаны совпадать друг с другом (см. рис. 43б, на нем показано сечение фазового пространства плоскостью $t=0$). В этом состоит явление *расщепления сепаратрис*, открытое Пуанкаре [34].

Вопрос о судьбе инвариантных торов решается теоремами 14 и 17. Движение вблизи резонанса может быть описано системой со снятым собственным вырождением вида (34), только роль малого параметра играет $\sqrt{\varepsilon}$; фазовые переменные в этой системе — время и переменные действие—угол на портрете рис. 43а. Поэтому вдали от сепаратрис имеются все найденные при усреднении торы, кроме доли $O(\exp(-c/\sqrt{\varepsilon}))$, $c=$ $=\mathrm{const}>0$. Вблизи сепаратрис нужно специальное исследование. Оно показывает, что торы имеются экспоненциально близко к сепаратрисам, так что сепаратрисы заперты в экспоненциально узкой зоне [108].

Найденные торы при удалении от резонанса переходят в обычные колмогоровские торы.

Замечания. 1. Вопрос о вычислении асимптотики экспоненциально малого угла между расщепляющимися сепаратрисами рассматривался в самое последнее время В. Ф. Лазуткиным.

2. Естественно ожидать, что в системе общего положения суммарная мера «неторического» множества, соответствующего всем резонансам, экспоненциально мала. Однако это не доказано. Δ

3.4. Диффузия медленных переменных в многомерных системах и ее экспоненциальная оценка. При исследовании возмущенного движения вне инвариантных торов следует различать случаи двух и большего числа степеней свободы.

В случае двух степеней свободы инвариантные двумерные торы делят трехмерный уровень энергии. Из этого вытекает невозможность эволюции (п. 3.3.А).

Если же число степеней свободы n больше двух, то n-мерные инвариантные торы не делят $2n-1$-мерное многообразие уровня энергии, но расположены в нем подобно точкам на плоскости или линиям в пространстве. В этом случае «щели», отвечающие разным резонансам, соединяются друг с другом. Поэтому инвариантные торы не препятствуют начавшейся вблизи резонанса фазовой кривой уйти далеко.

Гипотеза ([5]). Типичным случаем в многомерной задаче является *топологическая неустойчивость*: в сколь угодно малой окрестности любой точки проходит фазовая траектория, вдоль которой медленные переменные уходят от начального значения на величину порядка 1.

Теория КАМ доказывает метрическую устойчивость[1], т. е. устойчивость для большинства начальных данных. Таким образом, согласно сформулированной гипотезе, типичным случаем в многомерной задаче является комбинация метрической устойчивости и топологической неустойчивости.

Есть много примеров эволюции медленных переменных в метрически устойчивых задачах. Большинство этих примеров относится к очень вырожденным ситуациям, когда невозмущенный гамильтониан не является крутой функцией (определение крутых функций см. ниже). Аналитически разобран только один пример эволюции в системе с крутым невозмущенным гамильтонианом [45]. Средняя скорость эволюции в этом примере экспоненциально мала $(O(\exp(-1/\sqrt{\varepsilon})))$.

Численные эксперименты показывают, что эволюция переменных «действие» не имеет, по-видимому, направленного характера, а представляет собой более или менее случайное блуждание по резонансам вокруг инвариантных торов. Этот процесс называется *«диффузией»* [68]. Обсуждение возникающих здесь вопросов имеется в [68], [146], [167].

«Диффузия» для систем общего положения происходит экспоненциально медленно. Нужное условие общности положения называется *условием крутизны*. Аналитическая функция называется *крутой*, если она не имеет стационарных точек, а ее ограничение на любую плоскость любой размерности имеет только комплексно-изолированные стационарные точки[2].

Теорема 18 (Н. Н. Нехорошев [18], [111]). Если невозмущенный гамильтониан $H_0(I)$ — крутая функция, то в возмущенной гамильтоновой системе при достаточно малой величине возмущения выполнено $|I(t)-I(0)|<\varepsilon^b$ при $0\leqslant t\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon^a}\right)$.

---

[1] Слово употреблено здесь не в формальном смысле, а как синоним отсутствия эволюции: $\sup\limits_{-\infty<t<\infty}|I(t)-I(0)|\to 0$ при $\varepsilon\to 0$.

[2] Понятие крутизны введено Н. Н. Нехорошевым [110]. Здесь в качестве определения сформулировано доказанное Ю. С. Ильяшенко достаточное условие крутизны.

Здесь a, b — положительные постоянные, зависящие от характеристик невозмущенного гамильтониана.

◁ Доказательство основано на следующих соображениях. В области, где частоты невозмущенного движения не удовлетворяют никаким резонансным соотношениям порядка до $^1/\varepsilon$, процедура исключения фаз п. 2.2. А (метод Линдштедта) позволяет отнести зависимость от фаз в экспоненциально малые члены гамильтониана. Следовательно, в этой области эволюция может быть лишь экспоненциально медленной.

Быстрая эволюция (со скоростью порядка ε) возможна лишь при резонансе. Вблизи резонанса процедура п. 2.2. Б (метод Цейпеля) позволяет отнести в экспоненциально малые члены зависимость от нерезонансных комбинаций фаз. Отбросив эти члены, получим систему, которая, по теореме 12, имеет линейные интегралы. Быстрая эволюция происходит в определяемой этими интегралами плоскости. Условие точного резонанса состоит, как нетрудно сосчитать, в том, что градиент ограничения H_0 на эту плоскость обращается в нуль. Так как H_0 — крутая функция, то точный резонанс осуществляется в изолированной точке. Следовательно, при эволюции резонанс нарушается. Поэтому быстрая эволюция идет лишь короткое время, вследствие чего и получается экспоненциально малая оценка средней скорости эволюции сверху. ▷

Если условия крутизны нарушаются, то, как показывает пример 17, эволюция может идти со скоростью порядка ε и приводить к уходу медленных переменных на расстояние 1 за время $^1/\varepsilon$.

3.5. Разные варианты теоремы об инвариантных торах.

А. Инвариантные торы симплектических отображений. Рассмотрим отображение $2n$-мерного «кольца», близкое к n-мерному повороту:

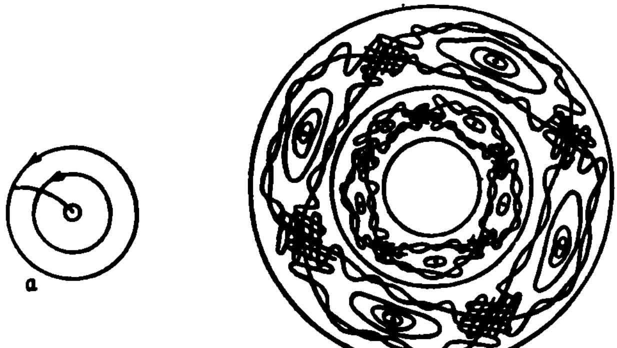
$$\begin{aligned} I' &= I + \varepsilon f(I,\ \varphi,\ \varepsilon), && I \in B \subset R^n, \\ \varphi' &= \varphi + h(I) + \varepsilon g(I,\ \varphi,\ \varepsilon), && \varphi \bmod 2\pi \in T^n. \end{aligned} \tag{35}$$

Пусть отображение точное симплектическое, т. е. оно сохраняет интегралы по замкнутым контурам от 1-формы $I d\varphi$. Невозмущенное ($\varepsilon=0$) отображение называется невырожденным, если $\det(\partial h/dI) \neq 0$.

Теорема 19 ([150]). Пусть невозмущенное отображение аналитично и невырождено. Тогда при достаточно малом возмущении класса C^r, $r > 2n+1$, в кольце $B \times T^n$ имеются инвариантные торы, близкие к торам $I=\mathrm{const}$, причем мера дополнения к их объединению мала вместе с возмущением. Образ точки тора при итерациях отображения заполняет тор всюду плотно.

Если $n=1$, то получается сохраняющее площадь отображение обычного кругового кольца (рис. 44). Невозмущенное ($\varepsilon = 0$) отображение представляет собой на каждой окружности

$I=\text{const}$ поворот. Условие невырожденности означает, что угол поворота от одной окружности к другой меняется (рис. 44а). Окружность, угол поворота которой 2π-иррационален, называется нерезонансной. Образы любой ее точки при итерациях отображения заполняют такую окружность всюду плотно. Окружность, угол поворота которой 2π-рационален, называется резонансной. Она состоит из периодических точек невозмущенного отображения.



а б

Рис. 44

При возмущении нерезонансные окружности (и притом такие, что угол их поворота α не слишком хорошо аппроксимируется 2π-рациональными числами: $|\alpha-2\pi p/q|>c\sqrt{\varepsilon}q^{-\nu}$, $n+1<\nu<{}^1/_2(r+1)$) не исчезают, а лишь немного деформируются. Резонансные окружности разрушаются (рис. 44б).

Теоремы об инвариантных торах для гамильтоновых систем и симплектических отображений сначала доказывались независимо (хотя и почти одинаковыми методами). В случаях конечной гладкости и C^∞ эти теоремы могут быть выведены друг из друга, так как отображение последования для гамильтоновой системы имеет вид (35), и обратно, всякое отображение вида (35) может быть получено как такое отображение последования [150]. Согласно [150], это верно и в аналитическом случае, но доказательство не опубликовано.

Б. Инвариантные торы в теории малых колебаний. Другие случаи, в которых существуют колмогоровские торы, связаны с теорией малых колебаний. Рассмотрим, в частности, гамильтонову систему с n степенями свободы в окрестности ее положения равновесия. Пусть равновесие устойчиво в линейном приближении, так что определены n собственных частот $\omega_1, \ldots, \omega_n$. Пусть, далее, между этими частотами нет резонансных соотношений до 4-го порядка включительно:

$$k_1\omega_1+\ldots+k_n\omega_n\neq 0 \text{ при } 0<|k_1|+\ldots+|k_n|\leqslant 4.$$

Тогда функцию Гамильтона можно привести к нормальной форме Биркгофа (см. гл. 7 § 3)

$$H=H_0(\tau)+\ldots,\quad H_0(\tau)=\Sigma\omega_i\tau_i+{}^1/_2\Sigma\omega_{ij}\tau_i\tau_j,\quad \tau_i={}^1/_2(p_i^2+q_i^2).$$

Здесь точки означают члены выше четвертой степени относительно расстояния от положения равновесия. Система в окрестности равновесия называется *невырожденной*, если

$$\det\left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial \tau^2}\right)=\det(\omega_{ij})\neq 0.$$

Система называется *изоэнергетически невырожденной*, если

$$\det\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 H_0}{\partial \tau^2} & \frac{\partial H_0}{\partial \tau}\\ \frac{\partial H_0}{\partial \tau} & 0\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}\omega_{ij} & \omega_i\\ \omega_j & 0\end{pmatrix}\neq 0.$$

Если система невырождена или изоэнергетически невырождена, то говорят, что гамильтониан общего эллиптического типа.

Система с гамильтонианом H_0 интегрируема, движение в ней происходит по инвариантным торам $\tau=\mathrm{const}$. Система с гамильтонианом H, следовательно, близка к интегрируемой в достаточно малой окрестности положения равновесия. Ситуация похожа на ситуацию теоремы Колмогорова.

Теорема 20 ([5], [30]). У гамильтониана общего эллиптического типа в окрестности положения равновесия имеются инвариантные торы, близкие к торам линеаризованной системы. Они образуют множество, относительная мера которого в полидиске $|\tau|<\varepsilon$ стремится к 1 при $\varepsilon\to 0$. В изоэнергетически невырожденной системе такие торы занимают большую часть каждого уровня энергии, проходящего вблизи равновесия.

Замечание ([184]). Относительная мера множества инвариантных торов в полидиске $|\tau|<\varepsilon$ не меньше $1-O(\varepsilon^{1/4})$. Если между частотами отсутствуют резонансы до порядка $l\geqslant 4$ включительно, то эта мера даже не меньше $1-O(\varepsilon^{(l-3)/4})$. Δ

В случае $n=2$ изоэнергетическая невырожденность гарантирует устойчивость равновесия по Ляпунову [5]. При $n=2$ условие изоэнергетической невырожденности заключается в том, что квадратичная часть функции H_0 не делится на линейную. Если даже квадратичная часть делится на линейную, то равновесие все равно, как правило, устойчиво. Именно, предположим, что между частотами ω_1 и ω_2 нет резонансных соотношений до порядка $l\geqslant 4$ включительно. Тогда функцию Гамильтона можно привести к нормальной форме

$$H=H_0(\tau_1,\tau_2)+\ldots,\quad H_0=\sum_{1\leqslant i+j\leqslant [l/2]} A_{ij}\tau_1^i\tau_2^j,$$

где точки означают члены выше l-го порядка относительно расстояния от положения равновесия. Рассмотрим функцию

$h_0(\varepsilon)=H_0(\varepsilon\omega_2, -\varepsilon\omega_1)$. Если $h_0(\varepsilon)$ не обращается тождественно в нуль, то равновесие устойчиво.

Другие случаи, где имеют место аналогичные утверждения об инвариантных торах и устойчивости, связаны с теорией малых колебаний в окрестности равновесия системы с периодическими и условно-периодическими коэффициентами, периодического решения автономной гамильтоновой системы, а также в окрестности неподвижной точки симплектического отображения. Соответствующие формулировки приведены в [6].

3.6. Вариационный принцип для инвариантных торов. Канторо-торы. Инвариантный тор гамильтоновой системы, несущий условно-периодические движения с заданным набором частот, является экстремалью некоторого вариационного принципа. Сформулируем этот принцип, найденный Персивалем (I. C. Percival) [181], [182].

Для формулировки удобно перейти от гамильтонова описания движения к лагранжевому. Пусть $H(p, q)$ — гамильтониан системы с n степенями свободы. Предположим, что из соотношения $r=\partial H(p,q)/\partial p$ можно выразить $p=p(r, q)$. Тогда изменение со временем величин q, $r=\dot q$ описывается лагранжевыми уравнениями с функцией Лагранжа

$$L(q, r)=p\cdot r-H(p, q).$$

Пусть $\omega\in R^n$ — вектор частот разыскиваемых условно-периодических движений. Для любой гладкой функции $f: T^n\{\vartheta\}\to R$ будем обозначать

$$D_\omega f=\frac{d}{dt}\, f(\omega t+\vartheta)\Big|_{t=0}=\frac{\partial f}{\partial\vartheta}\,\omega.$$

Пусть Σ — гладкий n-мерный тор в фазовом пространстве q, r, заданный параметрически соотношениями $q=q_\Sigma(\vartheta)$, $r=D_\omega q_\Sigma(\vartheta)$, ϑ modd $2\pi\in T^n$. Вариацией тора Σ назовем близкий тор, задаваемый соотношениями

$$q=q_\Sigma(\vartheta)+\delta_q(\vartheta),\quad r=D_\omega q_\Sigma(\vartheta)+D_\omega\delta q(\vartheta).$$

Введем функционал

$$\Phi_\omega(\Sigma)=\langle L(q_\Sigma(\vartheta), D_\omega q_\Sigma(\vartheta))\rangle^\vartheta.$$

Здесь угловые скобки обозначают усреднение по ϑ.

Теорема 21 (*Вариационный принцип* [181]). Гладкий тор Σ является инвариантным тором рассматриваемой системы, несущим условно-периодические движения с вектором частот ω, если и только если он является стационарной точкой функционала Φ_ω.

◁ Запишем первую вариацию функционала

$$\delta\Phi_\omega=\left\langle \frac{\partial L}{\partial q}\delta q+\frac{\partial L}{\partial r}D_\omega\delta q\right\rangle^\vartheta=\left\langle\left(\frac{\partial L}{\partial q}-D_\omega\frac{\partial L}{\partial r}\right)\delta q\right\rangle^\vartheta.$$

В этой выкладке использованы интегрирование по частям и 2π-периодичность функций q_Σ, δq по ϑ.

Если тор Σ инвариантен и заполнен условно-периодическими движениями $q_\Sigma(\omega t+\vartheta)$, $D_\omega q_\Sigma(\omega t+\vartheta)$, то, в силу уравнений Лагранжа, $\delta\Phi_\omega=0$, т. е. рассматриваемый тор — стационарная точка функционала.

Обратно, если $\delta\Phi_\omega=0$, то $D_\omega \frac{\partial L}{\partial r} - \frac{\partial L}{\partial q}=0$. Тогда $q_\Sigma(\omega t+\vartheta)$, $D_\omega q_\Sigma(\omega t+\vartheta)$ — условно-периодическое решение рассматриваемой системы. ▷

Сформулированный вариационный принцип дает возможность разыскивать инвариантные торы как стационарные точки функционала Φ_ω.

Согласно знаменитому высказыванию Гильберта (D. Hilbert), «всякая задача вариационного исчисления имеет решение, если только слову «решение» придать соответствующий смысл» [196]. Колмогоровские торы являются экстремалями сформулированного вариационного принципа для систем, близких к интегрируемым, и векторов частот ω с сильно несоизмеримыми компонентами. Какое «решение» имеет поставленная вариационная задача для систем, далеких от интегрируемых, или для ненормально соизмеримых частот? Ответ имеется пока в случае двух степеней свободы (Мазер [169], [170], Обри (S. Aubry) [139]). Решением оказался *канторо-тор*[1], инвариантное множество, получаемое вложением в фазовое пространство канторова подмножества стандартного двумерного тора. Ниже приводятся более точные формулировки.

Рассмотрим для наглядности гамильтонову систему с полутора (а не двумя) степенями свободы, гамильтониан которой $H(p,q,t)$ имеет период 2π по времени t и кординате q. Предположим, что система имеет два инвариантных тора, задаваемых соотношениями $p=p_0$ и $p=p_1>p_0$. Введем отображение последования для этой системы за время 2π:

$$f=(f_p,\ f_q \bmod 2\pi) : R\times S^1\to R\times S^1.$$

Отображение f сохраняет площади и ориентацию, оставляет инвариантными окружности $p=p_0$, $p=p_1$ и кольцо П между ними.

Предположим, что $\partial f_p/\partial p>0$ в кольце П; в этом случае отображение называется закручивающим. Обозначим ν_0, ν_1 — числа вращения Пуанкаре для граничных окружностей. Так как отображение закручивающее, то $\nu_0<\nu_1$.

Теорема 22 ([169]). Для любого $\nu\in(\nu_0,\nu_1)$ существует отображение h (не обязательно непрерывное) стандартной окружности S^1 в кольцо П, $h=(h_p,\ h_q \bmod 2\pi) : S^1\{\vartheta\}\to \Pi\{p,\ q\}$ такое, что поворот окружности на угол $2\pi\nu$ индуцирует заданное преобразование f образа окружности: $f(h(\vartheta))=h(\vartheta+2\pi\nu)$, причем выполнены следующие свойства:

а) функция h_q — неубывающая,

б) если ϑ — точка непрерывности h_q, то $\vartheta+2\pi\nu$ и $\vartheta-2\pi\nu$ — также точки непрерывности,

[1] Термин «cantorus» предложен Персивалем.

в) функция h_p вычисляется по формуле $h_p(\vartheta) = g(h_q(\vartheta), h_q(\vartheta+2\pi\nu))$, где g — гладкая функция,

г) если число ν иррационально, то функция h_q непостоянна ни на каком интервале.

$\lhd$ Нужная функция h_q отыскивается как точка минимума функционала, являющегося дискретным аналогом введенного выше функционала Φ_ω. Подробности см. в [169], [170]. $\rhd$

Рассмотрим некоторые следствия этого результата. Если $\nu = m/n$ — рационально, то для любого ϑ точка $h(\vartheta) \in \Pi$ при n итерациях отображения f переходит в себя. При этом на универсальном накрытии кольца — полосе $p_1 < p < p_2$, $-\infty < q < \infty$, — координата q точки возрастает на $2\pi m$. Существование таких периодических точек является одним из известных следствий геометрической теоремы Пуанкаре, доказанной Биркгофом [22]. Исходная гамильтонова система имеет в этом случае периодическое решение периода $2\pi n$, делающее за период m оборотов по углу q.

Если ν иррационально, а отображение h непрерывно, то исходное отображение последования имеет инвариантную кривую, гомеоморфную окружности, и на этой кривой топологически сопряжено повороту окружности на угол $2\pi\nu$. Исходная гамильтонова система имеет двумерный инвариантный тор, обматываемый условно-периодическими движениями с отношением частот ν.

Пусть теперь ν иррационально, а h_q имеет разрывы. Тогда, согласно пункту б) теоремы, точки разрыва всюду плотны. Так как, согласно пункту а), h_q не убывает, то есть и точки непрерывности, которые также всюду плотны. Обозначим Ξ и Σ — замыкания соответственно множеств точек $h_q(\vartheta) \bmod 2\pi \in S^1$ и $h(\vartheta) \in \Pi$ таких, что ϑ — точка непрерывности h_q. Тогда, согласно пунктам б)—г) теоремы, Ξ — канторово множество на окружности, а Σ — инвариантная канторо-окружность («одномерный» канторо-тор), движение по которой характеризуется числом вращения ν. Этой канторо-окружности соответствует инвариантный канторо-тор исходной гамильтоновой системы. Имеются примеры отображений, у которых нет непрерывных инвариантных кривых, не гомотопных нулю [139]. Все инвариантные множества таких отображений, соответствующие иррациональным числам вращения, — канторо-окружности.

Найденные канторо-окружности, по-видимому, неустойчивы. Это предположение основано на следующем рассуждении. Пусть ϑ_* — точка разрыва функции h_q. Тогда интервалы $(h_q(\vartheta_*+2\pi\nu j-0),\ h_q(\vartheta_*+2\pi\nu j+0))$, $j=0, \pm 1, \ldots$, являются «дырками» в канторовом множестве Ξ на окружности; концы интервалов принадлежат Ξ. Следовательно, эти интервалы не пересекаются. Поэтому их длины стремятся к нулю при $j \to \pm\infty$. Значит, при $j \to \pm\infty$ стремится к нулю и расстояние между точками $h(\vartheta_*+2\pi\nu j-0)$, $h(\vartheta_*+2\pi\nu j+0)$, принадлежащими канторо-окружности Σ. Следовательно, при движении вдоль канторо-окружности происходит сжатие, а поперек, соответственно, растяжение (в силу сохранения объема). Это — признак неустойчивости.

Открытие канторо-окружностей, по-видимому, объясняет следующий результат численного исследования рассматриваемых отображений: точка может в течение большого числа итераций двигаться в области, ограниченной, казалось бы, инвариантной кривой, а затем за относительно небольшое число итераций перейти через нее и начать двигаться по области с другой стороны от этой кривой. Дело в том, что хотя канторо-окружность не разделяет плоскость, она может представлять собой нечто вроде частого забора, который фазовой точке не так легко преодолеть. Поэтому точка должна долго двигаться вдоль этого забора, прежде чем она проскочит в какую-нибудь щель. Численно этот процесс подробно исследован в [167].

3.7. Приложения теории КАМ. Теория КАМ во многих классических задачах механики и физики дала строгое обоснование выводам, которые ранее были получены с помощью эвристического принципа усреднения и формальной теории возмущений. Вот наиболее известные (см. [6], [30]) примеры:

— если в задаче о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой (пример 11) кинетическая энергия тела достаточно велика по сравнению с потенциальной (в начальный момент времени), то длина вектора кинетического момента и его наклон к горизонту вечно остаются вблизи своих начальных значений (в предположении, что начальные значения энергии и момента не близки к таким, при которых тело может вращаться около средней оси инерции); при большинстве начальных условий движение тела будет вечно близко к комбинации движения Эйлера—Пуансо с медленной азимутальной прецессией;

— *в плоской ограниченной круговой задаче трех тел* (пример 10) при достаточно малой массе Юпитера величина большой полуоси и эксцентриситет кеплерова эллипса астероида будут вечно оставаться близкими к своим начальным значениям (если в начальный момент этот эллипс не пересекал орбиту Юпитера); при большинстве начальных условий движение вечно близко к кеплеровскому движению по эллипсу, медленно вращающемуся вокруг своего фокуса;

— в *задаче n тел* (пример 13) при достаточно малых массах планет бóльшая доля области фазового пространства, соответствующей невозмущенному движению в одну сторону по кеплеровским эллипсам малых эксцентриситетов и наклонений, заполнена условно-периодическими движениями, близкими к лагранжевым (см. пример 13);

— большинство геодезических на близкой к трехосному эллипсоиду поверхности колеблется между двумя замкнутыми линиями, близкими к линиям кривизны поверхности, всюду плотно заполняя кольцо между ними; это кольцо есть проекция на конфигурационное пространство (т. е. рассматриваемую поверхность) инвариантного тора в фазовом пространстве, который заполняет траектория задачи;

— существует магнитное поле, большая часть силовых линий которого в окрестности заданной окружности обматывает вложенные друг в друга тороидальные поверхности, охватывающие эту окружность; остальные силовые линии вечно зажаты между указанными тороидальными поверхностями; при малом возмущении поля большая часть этих поверхностей не разрушается, а лишь немного деформируется (такая конфигурация поля используется для удержания плазмы в тороидальных камерах).

Утверждение об устойчивости равновесия системы с двумя степенями свободы в общем эллиптическом случае также имеет многочисленные приложения.

Пример 18 (Устойчивость треугольных точек либрации). Плоская ограниченная круговая задача трех тел во вращающейся системе координат примера 10 имеет две степени свободы. *Треугольные точки либрации* — ее положения равновесия [94]. Эти равновесия, как было известно еще Лагранжу, устойчивы в линейном приближении, если $\mu<\mu_1=$ $=1/2\left(1-\frac{1}{9}\sqrt{69}\right)\approx 0.03852$, и неустойчивы в противном случае (здесь $\mu/(1-\mu)$ — отношение массы Юпитера к массе Солнца, и мы считаем, что $\mu<1/2$). Оказывается [148], резонансам порядка $\leqslant 4$ соответствуют значения

$$\mu=\mu_2=1/2\left(1-\frac{1}{45}\sqrt{1883}\right)\approx 0.02429,$$

$$\mu=\mu_3=1/2\left(1-\frac{1}{15}\sqrt{213}\right)\approx 0.01352.$$

Далее оказывается [148], что условие изоэнергетической невырожденности нарушается при единственном значении $\mu=\mu_c\approx$ ≈ 0.0109 (сначала было доказано, что задача вырождена лишь в конечном числе точек [92], а затем было вычислено критическое значение μ_c).

Согласно результату п. 3.3, при $0<\mu<\mu_1$, $\mu\neq\mu_2, \mu_3, \mu_c$ треугольные точки либрации устойчивы. В [94] показано, что при $\mu=\mu_2$ и $\mu=\mu_3$ имеет место неустойчивость, а при $\mu=\mu_c$ — устойчивость. В [119] показано, что при $\mu=\mu_1$ имеется устойчивость. $\triangle$

Подобным же образом исследована устойчивость стационарных вращений тяжелого твердого тела около неподвижной точки [76].

Сформулируем некоторые результаты, следующие из утверждений об устойчивости равновесия периодически зависящей от времени системы с одной степенью свободы, периодического движения системы с двумя степенями свободы и неподвижной точки симплектического отображения плоскости:

— если равновесие маятника в периодически меняющемся со временем поле устойчиво в линейном приближении и его мультипликаторы не попадают в точки единичной окружности с аргументами $\frac{\pi}{3}j$, $\frac{\pi}{4}j$, $j=0, 1, \ldots, 7$, то равновесие устойчиво;

— замкнутые геодезические на поверхности общего положения в трехмерном пространстве, устойчивые в линейном приближении, устойчивы;

— если траектория мячика, прыгающего между двумя вогнутыми стенками общего положения (или, что то же, луча, отражающегося от двух зеркал (рис. 45)), устойчива в линейном приближении, то она устойчива.

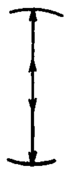


Рис. 45

Применения теории КАМ к задаче о вечном сохранении адиабатических инвариантов описаны в § 4.

Менее традиционные применения связаны с вычислением коротковолнового приближения для собственных значений и собственных функций операторов Шрёдингера, Лапласа и Бельтрами — Лапласа [91]. Дальше для определенности будем говорить об операторе Шрёдингера. Формулы коротковолнового приближения позволяют по решениям уравнений движения классической механической системы строить приближенные решения уравнения Шрёдингера, описывающего поведение соответствующей квантовой системы. В частности, если классическая система имеет в фазовом пространстве инвариантный тор, удовлетворяющий арифметическим условиям квантования, то формулы коротковолнового приближения позволяют построить по этому тору асимптотику собственного значения оператора Шрёдингера и соответствующей почти-собственной функции[1]. В близкой к интегрируемой системе есть много инвариантных торов, причем они образуют гладкое семейство (п. 2.2). Соответственно, вообще говоря, есть много торов, удовлетворяющих условиям квантования. Это позволяет приблизить большую часть спектра соответствующего оператора Шрёдингера.

[1] Почти-собственная функция приближенно удовлетворяет уравнению для собственной функции, но может быть далека от нее.

§ 4. Адиабатические инварианты

В этом параграфе описывается влияние плавного изменения параметров на движение в интегрируемой гамильтоновой системе. *Адиабатическим инвариантом* такой задачи называется функция фазовых переменных и параметров, значение которой мало изменяется при значительном изменении параметров. Основные результаты теории относятся к одночастотным системам.

4.1. Адиабатическая инвариантность переменной «действие» в одночастотных системах. Рассмотрим гамильтонову систему с одной степенью свободы, параметры которой плавно изменяются; гамильтониан $E=E(p, q, \lambda)$, $\lambda=\lambda(\tau)$, $\tau=\varepsilon t$, $0<\varepsilon\ll 1$ (например, маятник с плавно изменяющейся длиной). Функцию $\lambda(\tau)$ будем предполагать достаточно гладкой.

Определение. Функция $I(p, q, \lambda)$ называется адиабатическим инвариантом, если для любого $\varkappa>0$ найдется $\varepsilon_0=\varepsilon_0(\varkappa)$ такое, что для $\varepsilon<\varepsilon_0$ изменение $I(p(t), q(t), \lambda(\varepsilon t))$ при $0\leqslant t\leqslant 1/\varepsilon$ не превосходит $\varkappa$[1].

Предположим, что функция Гамильтона $E(p, q, \lambda)$ имеет при каждом фиксированном λ замкнутые фазовые кривые (скажем, окружающие равновесие маятника (рис. 46)), частота движения по которым отлична от нуля. Тогда можно ввести переменные действие—угол системы с фиксированным λ:

$$I=I(p, q, \lambda), \quad \varphi=\varphi(p, q, \lambda) \bmod 2\pi.$$

Наша ближайшая цель — доказать адиабатическую инвариантность величины I.

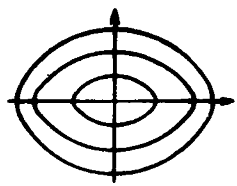


Рис. 46

Предложение 1. Изменение переменных I, φ в системе с плавно изменяющимся параметром описывается гамильтониа-

---

[1] Впервые такие почти-сохраняющиеся величины обнаружил Больцман (L. Boltzmann) при рассмотрении адиабатических процессов в термодинамике. Термин «адиабатический инвариант» ввел Эренфест (P. Ehrenfest). Существовало много различных определений адиабатической инвариантности. Приведенное определение, ставшее теперь общепринятым, дано А. А. Андроновым, М. А. Леонтовичем, Л. И. Мандельштамом. Подробное изложение истории вопроса см. в [49].

$$H = H_0(I, \lambda) + \varepsilon H_1(I, \varphi, \varepsilon t):$$

$$\dot{I} = -\varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial \varphi}, \quad \dot{\varphi} = \frac{\partial H_0}{\partial I} + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial I}, \tag{36}$$

где H_0 — это гамильтониан E, выраженный через I, λ, а H_1 имеет по φ период 2π.

Форма уравнений (36) — стандартная для применения принципа усреднения п. 1.1.

Предложение 2. Переменная «действие» I является интегралом усредненной по фазе системы.

◁Правая часть уравнения для I — производная периодической функции, а потому имеет среднее значение нуль.▷

Теорема 23. Если частота $\omega(I, \lambda)$ системы с одной степенью свободы не обращается в нуль, то переменная «действие» $I(p, q, \lambda)$ — адиабатический инвариант:

$$|I(p(t), q(t), \lambda(\varepsilon t)) - I(p(0), q(0), \lambda(0))| < c\varepsilon,$$

$$0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{\varepsilon}, \quad c = \text{const} > 0.$$

◁Согласно теореме 1 § 1, принцип усреднения описывает решение одночастотной системы с точностью порядка ε за время $1/\varepsilon$, а I — интеграл усредненной системы.▷

Пример 19. Для гармонического осциллятора адиабатическим инвариантом является отношение энергии к частоте $I = h/\omega$. △

Пусть в гамильтоновой системе с $n \geqslant 2$ степенями свободы зависимость гамильтониана E от всех координат, кроме одной (обозначим ее q), плавная: $E = E(p, q, y, \varepsilon x)$. Здесь q, x — координаты, а p, y — сопряженные им импульсы[1]. Адиабатический инвариант такой системы — это функция фазовых переменных, изменение которой мало на временах $1/\varepsilon$. Систему с одной степенью свободы, в которой $\varepsilon x = \text{const}$, $y = \text{const}$, назовем невозмущенной. Пусть фазовый портрет невозмущенной системы содержит замкнутые траектории (рис. 46), частота движения по которым отлична от нуля, так что можно ввести переменные действие — угол

$$I = I(p, q, y, \varepsilon x), \quad \varphi = \varphi(p, q, y, \varepsilon x) \bmod 2\pi.$$

Обозначим через $H_0(I, y, \varepsilon x)$ гамильтониан E, выраженный че-через I, y, εx.

Теорема 24. Переменная «действие» I — адиабатический инвариант системы с гамильтонианом $E(p, q, y, \varepsilon x)$. Изменение переменных y, εx описывается с точностью порядка ε на интер-

[1] Плавная зависимость гамильтониана от времени сводится к этому случаю введением времени в качестве новой координаты и добавлением сопряженного к нему импульса.

вале времени $1/\varepsilon$ системой с гамильтонианом $H_0(I, y, \varepsilon x)$, содержащим I в качестве параметра (это приближение называется адиабатическим).

◁ Преобразование $(p, q) \mapsto (I, \varphi)$ можно дополнить преобразованием $(y, x) \mapsto (Y, X) = (y + O(\varepsilon), x + O(1))$ так, чтобы полное преобразование было симплектическим. Изменение новых переменных описывается гамильтонианом

$$H = H_0(I, Y, \varepsilon X) + \varepsilon H_1(I, \varphi, Y, \varepsilon X, \varepsilon).$$

Усредняя по фазе φ, получаем систему, описывающую изменение решений с точностью ε на временах $1/\varepsilon$. Действие I — интеграл этой системы. ▷

Замечания. 1. Если исходная система имеет две степени свободы, то теорема 2 приводит к системе с одной степенью свободы и усредненные уравнения интегрируются.

2. Та же величина I является адиабатическим инвариантом любой системы с гамильтонианом $F = E(p, q, y, \varepsilon x) + \varepsilon E_1(p, q, y, x, \varepsilon)$, отличающимся от E малым добавком, уже не плавно зависящим от x. △

Пример 20. При движении в квадратичном *потенциальном рве*, вытянутом вдоль оси x (рис. 47), имеем

$$E = \frac{p^2 + y^2 + \omega^2(\varepsilon x) q^2}{2}, \quad I = \frac{p^2 + \omega^2(\varepsilon x) q^2}{2\omega(\varepsilon x)}, \quad H_0 = \frac{y^2}{2} + I\omega(\varepsilon x).$$

Пусть, например, функция $\omega(\varepsilon x)$ четная и при росте $|x|$ сначала растет, а потом убывает (рис. 48а). Фазовый портрет системы с гамильтонианом H_0 показан на рис. 48б. Видно, что при не слишком большой начальной продольной скорости точка оказывается запертой в средней части рва (рис. 48в). Соответствующее условие на скорость (*«условие ловушки»*) обычно записывается в виде

$$\frac{E_\parallel}{E_\perp} < \frac{\omega_m - \omega_0}{\omega_0}, \tag{37}$$

где $E_\parallel = y^2/2$ и $E_\perp = (p^2 + \omega^2 q^2)/2$ — значения энергии продольного и поперечного движений точки в середине рва (при $x = 0$), ω_0 и ω_m — минимальное и максимальное значения функции $\omega(\varepsilon x)$.

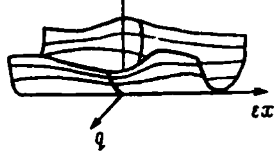


Рис. 47

Справедливость этих выводов на временах $1/\varepsilon$ следует из теоремы 24. На бесконечные времена они переносятся с помощью теории КАМ (см. п. 4.5). △

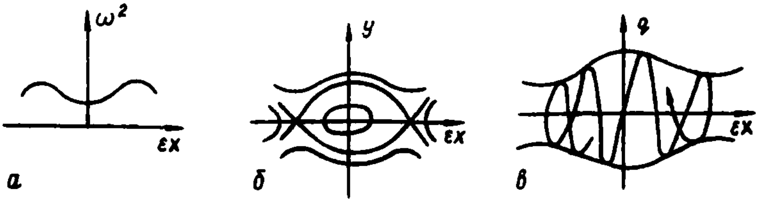


Рис. 48

Пример 21. Коротковолновое возбуждение распространяется по лучам. *Волновод* — это потенциальный ров для лучей. Плавным рефракционным волноводом называется среда, показатель преломления которой плавно меняется вдоль некоторой кривой (оси волновода) и быстро — поперек нее; на оси волновода показатель преломления имеет максимум. Пусть, например, ось волновода — прямая линия, а среда двумерна (рис. 49). Тогда распространение лучей описывается системой с гамильтонианом

$$E=p^2+y^2-n^2(q,\ \varepsilon x),$$

где x — координата вдоль оси волновода, а q — перпендикулярно к ней, импульсы y, p задают направление луча, n^2 — показатель преломления [88]. Решения этой системы надо рассматривать на уровне энергии $E=0$.

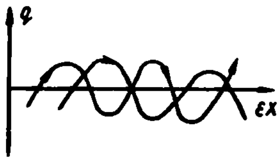


Рис. 49

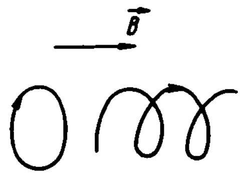


Рис. 50

Вблизи оси показатель преломления можно считать квадратичным: $n^2=a^2(\varepsilon x)-b^2(\varepsilon x)q^2$. Тогда, в обозначениях теоремы 24

$$I=\frac{p^2+b^2q^2}{2b},\quad H_0=y^2-a^2(\varepsilon x)+2Ib(\varepsilon x).$$

Эти соотношения позволяют описать поведение лучей. Лучевая картина показана на рис. 49 (для случая, когда нет «запирания» лучей, такого, как в примере 20). Таким способом описывается распространение света в световодах, распространение в слоистых средах коротких радиоволн и звука [88]. △

Пример 22. В постоянном магнитном поле заряженная частица движется по спирали вокруг силовой линии поля. Это движение является композицией вращения вокруг силовой линии по окружности, называемой ларморовской, и дрейфа этой окружности (рис. 50). Гамильтонова система, описывающая это движение, имеет три степени свободы. Из-за инвариантности гамильтониана относительно сдвига вдоль поля и поворота вокруг направления поля число степеней свободы понижается до единицы. Все траектории приведенной системы периодичны, ее переменная «действие» — *магнитный момент* $I=v_\perp^2/(2B)$, где $v_\perp$ — перпендикулярная полю составляющая скорости частицы, B — напряженность поля[1]. Если теперь поле плавно неоднородно (мало меняется на длине ларморовского радиуса), то магнитный момент является адиабатическим инвариантом [180]. Теория движения в плавно неоднородном поле описана в [180] без использования гамильтоновского формализма; гамильтонова теория построена в [153], [166].

Рассмотрим частный случай, когда плавнонеоднородное поле осесимметрично, причем его силовые линии лежат в плоскостях, проходящих через ось симметрии (рис. 51).

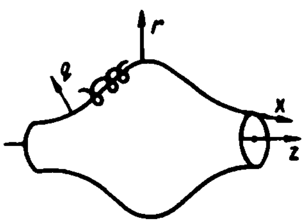


Рис. 51

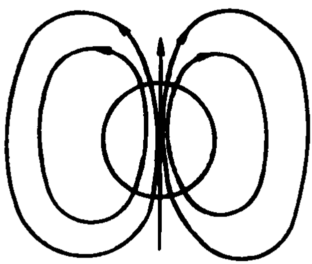


Рис. 52

В цилиндрических координатах r, ϑ, z гамильтониан не зависит от угла ϑ. Задача приводится к двум степеням свободы и, согласно теореме 24, может быть исследована до конца. Оказывается [5], движение в плоскости r, z описывается гамильтонианом

$$E=\frac{y^2+p^2+B^2(\varepsilon x)\,q^2}{2}+\varepsilon E_1(p,\,q,\,y,\,\varepsilon x,\,\varepsilon).$$

Здесь x, q — координаты вдоль и поперек силовой линии магнитного поля, около которой происходит движение точки (рис. 51) (эта линия выделяется условием сохранения импульса, сопряженного углу ϑ), $B(\varepsilon x)$ — значение напряженности поля на этой линии. Отбрасывая в гамильтониане добавок порядка ε, получаем потенциальный ров примера 20. Условие ловушки (37) показывает, какие частицы оказываются запертыми в этом рве. На этом принципе удержания заряженных частиц основано конструирование *ловушек* для плазмы, которые назы-

[1] Магнитный момент равен потоку поля через ларморовский круг.

ваются адиабатическими [180] (или ловушками с магнитными пробками). Гигантская естественная адиабатическая ловушка — магнитное поле Земли (рис. 52). △

Адиабатические инварианты существуют и в системах с ударами.

Пример 23. При движении упругого шарика между двумя медленно движущимися стенками (рис. 53) адиабатическим инвариантом является произведение скорости шарика на расстояние между стенками. Этот факт можно установить непосредственным вычислением, а можно извлечь с помощью предельного перехода из теоремы 23. △

Пример 24 ([88]). При распространении лучей в плоском плавнонерегулярном[1] *световоде* с зеркальными стенками (рис. 54) адиабатическим инвариантом является произведение расстояния между стенками на синус угла между лучем и стенкой. △

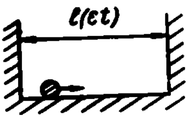


Рис. 53

Рис. 54

4.2. Адиабатические инварианты многочастотных гамильтоновых систем.

Определение. Функция фазовых координат и параметров называется *почти адиабатическим инвариантом,* если для любого $\rho>0$ мера множества начальных условий, для которых изменение этой функции вдоль решения превосходит ρ за время $1/\varepsilon$, стремится к нулю при ε стремящемся к 0.

Рассмотрим гамильтонову систему с $n\geqslant 2$ степенями свободы, гамильтониан которой зависит от плавно изменяющегося параметра λ. Предположим, что при каждом фиксированном λ система вполне интегрируема, так что можно ввести переменные действие — угол I, φ. Для этой системы справедливы предложения 1 и 2 п. 4.1 (доказательство дословно то же): изменение I, φ описывается системой вида (36), а «действия» I — интегралы усредненной системы. Как ведут себя переменные I в точной системе?

Предположим, что $\det\partial^2 H_0/\partial I^2 \neq 0$. Тогда, согласно теореме 8, изменения величин I остаются меньшими $\rho>0$ в течение времени $1/\varepsilon$, если пренебречь множеством начальных условий меры $c\sqrt{\varepsilon}/\rho$ в фазовом пространстве (которое предполагается здесь компактным, $c=\text{const}>0$). Таким образом, переменные

[1] Световод называется плавнонерегулярным, если вдоль него плавно меняется его ширина и направление стенок.

«действие» I являются почти адиабатическими инвариантами невырожденной многочастотной гамильтоновой системы.

Если система двухчастотна, то оценку для изменения переменных I можно уточнить с помощью результатов п. 1.6.

Примеры показывают, что уже в двухчастотных системах может существовать множество начальных условий меры $\sqrt{\varepsilon}$, для которых почти адиабатический инвариант изменяется на величину 1 за время $1/\varepsilon$ из-за застревания на резонансе [48]. Адиабатическая инвариантность в одночастотных системах сохраняется в течение времени, много большего $1/\varepsilon$, а при периодическом изменении параметра λ — даже вечно. В многочастотных системах картина совершенно другая. Примеры показывают, что за время $1/\varepsilon^{3/2}$ для множества начальных условий меры порядка 1 почти адиабатический инвариант может измениться на 1 из-за временных захватов в резонанс.

Выше предполагалось, что при каждом фиксированном λ система вполне интегрируема. Почти адиабатический инвариант существует и в противоположном, гораздо более распространенном случае, когда при каждом λ на почти всех уровнях энергии $E(p, q, \lambda) = \text{const}$ движение эргодично. Предположим, что поверхность $E(p, q, \lambda) = h$ — гладкая и ограничивает конечный фазовый объем[1]. Обозначим этот объем $I(h, \lambda)$. Функция $I(E(p, q, \lambda), \lambda)$ — почти адиабатический инвариант [160].

Детально изучены адиабатические инварианты линейных многочастотных систем [164]. Эта теория относится к линейным гамильтоновым системам с периодическими по времени коэффициентами, зависящими, кроме того, от плавно изменяющегося со временем параметра $\lambda = \lambda(\varepsilon t)$. Предполагается, что при каждом фиксированном λ система сильно устойчива, т. е. она устойчива и любое достаточно малое изменение коэффициентов не нарушает устойчивости. Все мультипликаторы сильно устойчивой системы лежат на единичной окружности и отличны от ± 1 (см., например, [6]). Поэтому при изменении λ мультипликаторы перемещаются по верхней и нижней единичным полуокружностям, не переходя с одной полуокружности на другую[2].

Определение. Группа последовательно расположенных на единичной окружности мультипликаторов невозмущенной ($\lambda = \text{const}$) системы образует кластер, если при изменении λ по закону $\lambda = \lambda(\varepsilon t)$ эти мультипликаторы сталкиваются друг с другом, но не сталкиваются с другими мультипликаторами (рис. 55).

Теорема 25 ([164]). Рассматриваемая линейная гамильтонова система имеет по меньшей мере столько независимых адиабатических инвариантов, изменяющихся на величину по-

---

[1] Для открытой области значений h, λ.

[2] В силу вещественности системы расположение мультипликаторов симметрично относительно вещественной оси.

Рис. 55

рядка ε на временах $1/\varepsilon$, сколько кластеров образуют мультипликаторы невозмущенной системы на верхней единичной полуокружности. Эти адиабатические инварианты являются квадратичными формами фазовых переменных с коэффициентами, зависящими от времени (периодически) и от параметра λ.

Следствия. 1. Если при всех λ мультипликаторы различны, то число независимых адиабатических инвариантов равно числу степеней свободы.

2. Рассматриваемая линейная система имеет по меньшей мере один адиабатический инвариант.

Если в рассматриваемой системе мультипликаторы совпадают друг с другом только в изолированные моменты медленного времени εt, то число независимых адиабатических инвариантов равно числу степеней свободы. Вдали от моментов столкновения мультипликаторов адиабатические инварианты испытывают колебания порядка ε. В окрестности момента столкновения адиабатические инварианты, соответствующие сталкивающимся мультипликаторам, могут изменяться на величину $\gg\varepsilon$ (при столкновении мультипликаторов с ненулевой скоростью — на величину порядка $\sqrt{\varepsilon}$).

4.3. Процедура исключения быстрых переменных. Время сохранения адиабатического инварианта. Для одночастотных гамильтоновых систем с плавно изменяющимися параметрами быстрые переменные можно исключать симплектически и за счет этого получить величины, сохраняющиеся с большей точностью. В переменных I, φ, Y, X, введенных в п. 4. 1, гамильтониан задачи имеет вид

$$H=H_0(I,\ Y,\ \varepsilon X)+\varepsilon H_1(I,\ \varphi,\ Y,\ \varepsilon X,\ \varepsilon). \tag{38}$$

Теорема 26. Из гладкого, класса C^∞, одночастотного гамильтониана (38) формальной симплектической заменой переменных $I,\ \varphi,\ Y,\ X\mapsto J,\ \psi,\ \eta,\ \xi$ можно исключить быструю фазу ψ.

◁ Новый гамильтониан $\mathscr{H}=\mathscr{H}(J,\ \eta,\ \varepsilon\xi,\ \varepsilon)$ и производящая функция замены переменных $J\varphi+\varepsilon S(J,\ \varphi,\ \eta,\ \varepsilon X,\ \varepsilon)$ связаны соотношением

$$H\left(J+\varepsilon\frac{\partial S}{\partial\varphi},\ \varphi,\ \eta+\varepsilon^2\frac{\partial S}{\partial\varepsilon X},\ \varepsilon X,\varepsilon\right)=\mathscr{H}\left(J,\ \eta,\ \varepsilon X+\varepsilon^2\frac{\partial S}{\partial\eta},\ \varepsilon\right). \tag{39}$$

Ищем $\mathscr{H}$, S в виде формальных рядов по ε

$$\mathscr{H}=H_0+\varepsilon\mathscr{H}_1+\varepsilon^2\mathscr{H}_2+\ldots,\qquad S=S_1+\varepsilon S_2+\ldots. \tag{40}$$

Подставляя эти ряды в (39) и приравнивая члены одинакового порядка по ε, получим систему уравнений

$$\frac{\partial H_0}{\partial J}\frac{\partial S_1}{\partial \varphi}+H_1(J,\varphi,\eta,\varepsilon X,0)=\mathscr{H}_1(J,\eta,\varepsilon X),$$

$$\frac{\partial H_0}{\partial J}\frac{\partial S_i}{\partial \varphi}+G_i(J,\varphi,\eta,\varepsilon X)=\mathscr{H}_i(J,\eta,\varepsilon X),\quad i\geqslant 2.$$

Функция G_i определяется членами $S_1, \mathscr{H}_1, \ldots, S_{i-1}, \mathscr{H}_{i-1}$ в разложениях (40). Решение выписанной системы в обозначениях $\langle\cdot\rangle^{\varphi}$, $\{\cdot\}^{\varphi}$ для оператора усреднения и интегрирующего оператора, введенных в п. 1.2, дается формулами

$$\mathscr{H}_1=\langle H_1\rangle^{\varphi},\quad S_1=-\{H_1\}^{\varphi}+S_1^0,$$

$$\mathscr{H}_i=\langle G_i\rangle^{\varphi},\quad S_i=-\{G_i\}^{\varphi}+S_i^0,\quad i\geqslant 2.$$

Здесь S_i^0 — произвольные функции от J, η, εX. Часто выбирают $S_i^0\equiv 0$. $\triangleright$

Следствия. 1. «Функция» J — формальный интеграл задачи.

2. Оборвем ряд для замены переменных на членах порядка ε^m. Такая укороченная замена оставляет зависимость гамильтониана от фазы лишь в членах порядка ε^{m+1}. Эта замена вводит функцию J, которая за время $1/\varepsilon$ испытывает лишь колебания порядка ε^{m+1}.

Ряды (40) даже в аналитической системе могут расходиться (пример см. в [108]). Следующее утверждение описывает предельно достижимую точность исключения фазы.

Предложение 3 ([108], ср. теорема 2). Гамильтониан одночастотной аналитической системы с плавно изменяющимися параметрами (38) с помощью симплектической, на $O(\varepsilon)$ отличающейся от тождественной замены переменных, может быть преобразован к сумме двух членов, первый из которых не зависит от фазы, а второй экспоненциально мал $(O(\exp(-c_1^{-1}/\varepsilon)),\ c_1=\mathrm{const}>0)$.

Следствие. В одночастотной аналитической системе переменная «действие» I в течение времени $T=\exp(^1/_2 c_1^{-1}\varepsilon)$ испытывает лишь колебания порядка ε. Таким образом адиабатическая инвариантность сохраняется на экспоненциально большом интервале времени[1].

$\triangleleft$Замена переменных предложения 3 переводит I в величину $J=I+O(\varepsilon)$, которая изменяется экспоненциально медленно и, следовательно, за время T изменится экспоненциально мало.$\triangleright$

4.4. Точность сохранения адиабатического инварианта. Пусть в системе с одной степенью свободы, зависящей от пара-

[1] Здесь предполагается, что за это время система не выходит из заданной области размера порядка 1.

метра λ, этот параметр плавно изменяется так, что при $\varepsilon t \to \pm\infty$ он достаточно быстро стремится к определенным пределам. Тогда существуют предельные значения адиабатического инварианта $I(+\infty)$, $I(-\infty)$ и можно рассмотреть приращение адиабатического инварианта за бесконечно большое время

$$\Delta I = I(+\infty) - I(-\infty).$$

Хотя при конечных t величина I испытывает колебания порядка ε, приращение ΔI оказывается много меньше, чем ε.

Если параметр меняется гладко ($\lambda \in C^\infty$), то $\Delta I = O(\varepsilon^\infty)$, т. е. убывает при $\varepsilon \to 0$ быстрее любой степени ε [163]. Действительно, процедура п. 4.3 позволяет для любого m ввести величину J, которая испытывает вдоль движения лишь колебания $O(\varepsilon^m)$, а при $t \to \pm\infty$ совпадает с I.

Если зависимость λ от εt аналитическая, то $\Delta I = O(\exp(-c^{-1}/\varepsilon))$, $c = \mathrm{const} > 0$ [106], [116]. Действительно, согласно предложению 3, можно ввести величину J, которая испытывает вдоль движения лишь экспоненциально малые колебания, а при $t \to \pm\infty$ совпадает с I.

Для линейного осциллятора

$$\ddot{x} = -\omega^2(\varepsilon t)\,x, \quad \omega(\pm\infty) = \omega_\pm$$

с аналитической частотой $\omega(\varepsilon t) > \mathrm{const} > 0$ известна асимптотика ΔI [66], [122]. Ее вычисление основано на аналитическом продолжении решения в область комплексных значений времени t.

В [116] найден метод аналитического продолжения для решений нелинейных возмущенных систем и с его помощью вычислен показатель экспоненты в формуле для ΔI, а для ряда случаев — предэкспоненциальный множитель. Показатель экспоненты оказался равным минимуму из мнимых частей приращений фаз в невозмущенном движении

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H_0(I_-, \lambda(\varepsilon t))}{\partial I}, \quad I_- = I(-\infty)$$

вдоль путей на комплексной плоскости времени t от вещественной оси до особых точек гамильтониана и до нулей невозмущенной частоты в верхней полуплоскости (рис. 56).

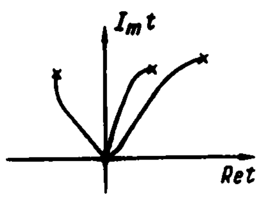


Рис. 56

4.5. Вечное сохранение адиабатических инвариантов. За бесконечное время из-за накопления малых возмущений адиабатические инварианты могут сильно эволюционировать.

Пример 25. Рассмотрим линейный осциллятор

$$\ddot{x} = -\omega^2 (1 + a \cos \varepsilon t) x, \quad a = \mathrm{const} < 1.$$

При сколь угодно малых ε положение равновесия может быть неустойчивым (явление параметрического резонанса [6]). Адиабатический инвариант изменяется неограниченно. Δ

Оказывается, однако, что при периодическом изменении параметра такое несохранение адиабатического инварианта связано именно с линейностью системы (точнее, с независимостью частоты колебаний от амплитуды). В нелинейной системе при увеличении амплитуды частота меняется, и колебания не успевают еще нарасти, как нарушается условие резонанса.

Определение. Адиабатический инвариант называется *вечным*, если при $-\infty < t < \infty$ его значение мало отличается от начального для достаточно малых ε.

Теорема 27 ([5]). При медленном периодическом изменении функции Гамильтона нелинейной колебательной системы с одной степенью свободы переменная «действие» I является вечным адиабатическим инвариантом. Большая часть фазового пространства задачи заполнена инвариантными торами, близкими к торам $I = \mathrm{const}$.

$\lhd$ Сформулируем, прежде всего, нужное условие нелинейности системы. В переменных действие — угол гамильтониан задачи имеет вид

$$H = H_0(I, \tau) + \varepsilon H_1(I, \varphi, \tau), \quad \tau = \varepsilon t, \tag{41}$$

и 2π — периодичен по φ, τ. Обозначим $\bar{\omega}(I)$ — среднее по τ от «адиабатической» частоты изменения фазы $\omega(I, \tau) = \partial H_0/\partial I$. В формулировке теоремы система считается нелинейной, если эта средняя частота зависит от I:

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial I} \neq 0. \tag{42}$$

Доказательство теоремы основано на результатах теории КАМ (§ 3). Чтобы привести уравнения движения к стандартному виду теории КАМ («основной задаче динамики»), нужно выполнить некоторые преобразования.

Во-первых, введем вместо φ новую фазу

$$\psi = \varphi - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\tau} \omega(I, \xi)\, d\xi + \frac{1}{\varepsilon} \bar{\omega}(I) \tau.$$

При этом главная часть гамильтониана перестает зависеть от фазы τ; гамильтониан

$$\mathcal{H}=\mathcal{H}_0(I)+\varepsilon\mathcal{H}_1(I, \psi, \tau),$$

где $\mathcal{H}_0$ — среднее значение $H_0(I, \tau)$ по τ, а $\mathcal{H}_1$ имеет по ψ, τ период 2π.

Во-вторых, введем фазу ψ в качестве нового времени. Гамильтониан задачи будет иметь вид (см. гл. 4, п. 1.1)

$$F=-\dot{\varepsilon}I=-\varepsilon F_0(-h)+\varepsilon^2F_1(h, \psi, \tau, \varepsilon),$$

где h — переменная, сопряженная фазе τ (старый гамильтониан $\mathcal{H}$ с обратным знаком), F_0 — функция, обратная к $\mathcal{H}_0$.

Получилась рассмотренная в пункте 3.3. система с полутора степенями свободы и *собственным вырождением*. В силу условия (42) вырождение снимается. Согласно результатам пункта 3.3, в этой системе есть много инвариантных торов, близких к торам $h=\mathrm{const}$; значение h вечно испытывает колебания с амплитудой порядка ε. Поэтому в фазовом пространстве I, φ, τ исходиой системы есть много инвариантных торов, близких к торам $I=\mathrm{const}$; значение I вечно испытывает колебания с амплитудой порядка ε.

Замечание. Если параметры системы зависят от времени условно-периодически, причем набор частот $\varepsilon\Omega$ удовлетворяет обычным условиям несоизмеримости: $|(k, \Omega)|>c^{-1}|k|^{-\nu}$, $k\in Z^m\setminus\{0\}$, то I также будет вечным адиабатическим инвариантом [5]. Δ

Вечный адиабатический инвариант существует также (при некоторых условиях) в консервативной системе с двумя степенями свободы, гамильтониан которой плавно зависит от одной из координат [5]. Согласно теореме 24, движение в этой задаче приближенно описывается гамильтонианом $H_0(I, y, \varepsilon x)$. Пусть фазовые кривые этого гамильтониана при фиксированном I замкнуты (как на рис. 46). Тогда в рассматриваемом приближении движение в фазовом пространстве происходит по двумерным торам, выделяемым условиями $I=\mathrm{const}$, $H_0=\mathrm{const}$. Это движение двухчастотно, причем одна из частот в $1/\varepsilon$ раз меньше другой. Если при заданном $H_0=\mathrm{const}$ отношение частот изменяется с изменением I, то из результатов теории КАМ вытекает наличие в точной системе большого числа торов, близких к торам приближенной системы. Как всегда в случае двух степеней свободы, отсюда следует вывод об устойчивости: переменная «действие» I вечно близка к своему начальному значению. Подробности см. в [5]. Из этого вывода вытекает, в частности, что осесимметричная магнитная ловушка примера 22 удерживает заряженные частицы вечно.

Глава 6

НЕИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ

Общим моментом указанных в главе 4 различных подходов к проблеме интегрирования гамильтоновых систем является наличие достаточно большого числа независимых первых интегралов — «законов сохранения». К сожалению, в типичной ситуации интегралы не только не удается найти, но они вовсе не существуют, так как траектории гамильтоновых систем, вообще говоря, не ложатся на интегральные многообразия малого числа измерений. Здесь речь идет, конечно, о существовании интегралов во всем фазовом пространстве: полный набор независимых интегралов всегда существует в малой окрестности неособой точки.

Первые строгие результаты о неинтегрируемости гамильтоновых систем принадлежат Пуанкаре. Сущность идеи Пуанкаре состоит в том, что сложное поведение решений (например, рождение невырожденных периодических решений, расщепление асимптотических поверхностей и т. д.) несовместимо с полной интегрируемостью уравнений Гамильтона. В этой главе изложены основные методы доказательства неинтегрируемости гамильтоновых систем, основанные на выявлении различных нетривиальных динамических эффектов, не свойственных вполне интегрируемым системам. Более подробное изложение содержится в работе [13].

§ 1. Гамильтоновы системы, мало отличающиеся от интегрируемых

Здесь описан принадлежащий в основном Пуанкаре метод доказательства несуществования дополнительных аналитических интегралов, основанный на исследовании бифуркаций долгопериодических решений.

Пусть прямое произведение $M=D\times T^n\{\varphi \bmod 2\pi\}$ (D — область в $R^n=\{I\}$) снабжено стандартной симплектической структурой $dI\wedge d\varphi$ и $H: M\times(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)\to R$ — аналитическая функция такая, что $H(I, \varphi, 0)=H_0(I)$. При $\varepsilon=0$ будем иметь вполне интегрируемую гамильтонову систему с гамильтонианом H_0. Рассмотрим полную систему

$$\dot I=-\frac{\partial H}{\partial\varphi},\ \dot\varphi=\frac{\partial H}{\partial I};\ H=H_0(I)+\varepsilon H_1(I, \varphi)+\dots \qquad (1)$$

при малых значениях параметра ε. Многочисленные примеры даны в главе 5. В этом параграфе исследуется задача о существовании первых интегралов уравнений (1), независимых с функцией H и аналитических (или, более общо, формально-аналитических) по параметру ε[1]. Напомним, что с наличием полного коммутативного набора таких интегралов связана возможность построения и сходимость различных вариантов теории возмущений гамильтоновых систем (см. п. 2.2 гл 5).

1.1. Метод Пуанкаре. Сначала дадим некоторые определения. Пусть

$$H_1 = \sum_{m \in Z^n} h_m(I) \exp i \langle m, \varphi \rangle .$$

Множество Пуанкаре — это множество значений $I \in D$, для которых существуют $n-1$ линейно независимых векторов $k_1, \ldots, k_{n-1} \in Z^n$ таких, что

1) $\langle k_s, \omega(I) \rangle = 0, \; 1 \leqslant s \leqslant n-1; \; \omega = H_0'$,

2) $h_{k_s}(I) \neq 0$.

Пусть $\mathcal{A}(V)$ — класс функций, аналитических в области $V \subset R^n$.

Множество $\Lambda \subset V$ назовем *ключевым* (или множеством *единственности*) для класса $\mathcal{A}(V)$, если любая аналитическая функция, равная нулю на Λ, тождественно обращается в нуль всюду в V. Таким образом, если аналитические функции совпадают на Λ, то они совпадают на всем V. Например, множество точек интервала $\Delta \subset R$ является ключевым для класса $\mathcal{A}(\Delta)$ в том и только в том случае, когда оно имеет предельную точку внутри Δ. Достаточность этого условия очевидна, необходимость вытекает из теоремы Вейерштрасса о бесконечном произведении. Отметим, что если Λ — множество единственности для класса функций $C^\infty(V)$, то Λ плотно в V.

Теорема 1. Предположим, что невозмущенная система невырождена: $\det \| \partial^2 H_0 / \partial I^2 \| \neq 0$ в области D. Пусть $I^0 \in D$ — некритическая точка функции H_0 и в любой ее окрестности U множество Пуанкаре является ключевым для класса $\mathcal{A}(U)$. Тогда уравнеиия Гамильтона (1) не имеют независимого от функции H *формального интеграла* F, который можно представить в виде формального степеиного ряда $\sum_{s>0} F_s(I, \varphi)\varepsilon^s$ с аналитическими в области $D \times T^n$ коэффициентами (ср. с [34], [12]).

Формальный ряд $\sum f_s \varepsilon^s$ мы считаем равным нулю, если все $f_s = 0$. Формальный ряд F — формальный интеграл канонических уравнеиий с гамильтонианом H, если формальный ряд $\{H, F\}$ равен иулю. Два формальных ряда считаются зависимыми, когда все миноры второго порядка их матрицы Якоби тождественно обращаются в нуль как формальные ряды по степеням ε.

Для доказательства теоремы 1 нам понадобится

[1] Формальный ряд по ε называется формально-аналитическим, если его коэффициенты — аналитические функции фазовых переменных.

Лемма 1. Пусть функции $F_s: D\times T^n\to R$ непрерывно дифференцируемы и ряд $\Sigma F_s(I,\varphi)\varepsilon^s$ — формальный интеграл уравнений (1) с невырожденной функцией H_0. Тогда

1) $F_0(I,\varphi)$ не зависит от φ,

2) функции H_0 и F_0 зависимы в точках множества Пуанкаре.

$\lhd$ Условие $\{H,F\}=0$ эквивалентно серии уравнений

$$\{H_0,F_0\}=0,\ \{H_0,F_1\}+\{H_1,F_0\}=0,\ldots \qquad (2)$$

Из первого уравнения следует, что F_0 — интеграл невозмущенных уравнений с функцией Гамильтона H_0. Пусть тор $I=I^*$ нерезонансный. Тогда $F_0(I^*,\varphi)$ не зависит от φ, так как любая траектория заполняет нерезонансный тор всюду плотно. Для завершения доказательства заключения 1) остается учесть непрерывность функции F_0 и всюду плотность множества нерезонансных торов невырожденной интегрируемой системы.

Из второго уравнения (2) получим серию равенств для коэффициентов Фурье h_m и f_m функций H_1 и $F_1=\Sigma f_m(I)\exp i\langle m,\varphi\rangle$:

$$\left\langle m,\frac{\partial H_0}{\partial I}\right\rangle f_m(I)=\left\langle m,\frac{\partial F_0}{\partial I}\right\rangle h_m(I),\quad m\in Z^n.$$

Условие разрешимости этих уравнений относительно f_m в точке из множества Пуанкаре — зависимость векторов $\partial H_0/\partial I$ и $\partial F_0/\partial I$. $\rhd$

Доказательство теоремы 1. Так как в точке $I^0\in D$ среди производных $\partial H_0/\partial I_1,\ldots,\partial H_0/\partial I_n$ есть отличная от нуля, то в малой окрестности U этой точки в качестве локальных координат можно взять $H_0, I_2,\ldots,I_n$ (если $H'_{0I_1}\neq 0$).

Согласно лемме 1, функции H_0 и F_0 зависимы на множестве Пуанкаре. Поскольку миноры матрицы Якоби

$$\frac{\partial(H_0,F_0)}{\partial(I_1,\ldots,I_n)}$$

аналитичны в U и множество Пуанкаре является ключевым, то функции H_0 и F_0 зависимы во всей области U и, следовательно, в окрестности значения $H_0(I^0)$ в новых координатах будем иметь равенство $F_0=F_0(H_0)$.

Положим $F-F_0(H)=\varepsilon\Phi$. Тогда Φ — формальный интеграл канонических уравнений (1). Пусть $\Phi=\sum_{s\geq 0}\Phi_s\varepsilon^s$. Тогда, согласно лемме 1, функция Φ_0 не зависит от угловых переменных φ и Φ_0 зависима с H_0 в области U. Следовательно, $\Phi_0=\Phi_0(H_0)$ и снова $\Phi-\Phi_0(H)=\varepsilon\Psi$. Но тогда $F=F_0(H)+\varepsilon\Phi_0(H)+\varepsilon^2\Psi$. Повторяя эту операцию нужное число раз, мы получим, что разложение всех миноров второго порядка матрицы Якоби

$$\frac{\partial(H,F)}{\partial(I,\varphi)}$$

в ряд по степеням ε начинается с членов сколь угодно высокого порядка. Отсюда вытекает зависимость функций H и F. Δ

Теорема 2. Пусть функция H_0 невырождена в области D и множество Пуанкаре всюду плотно в D. Тогда уравнения (1) не имеют независимого от H формального интеграла $\Sigma F_s \varepsilon^s$ с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами $F_s : D \times \times T^n \to R$.

Это утверждение просто доказывается тем же методом, что и теорема 1.

Замечание. При $n=2$ из теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений вытекает существование аналитического по ε первого интеграла с непостоянными непрерывными коэффициентами. Напротив, в многомерном случае, для системы общего вида, по-видимому, невозможен даже непрерывный интеграл (см. [45]).

1.2. Рождение изолированных периодических решений — препятствие к интегрируемости. Напомним некоторые факты из теории периодических решений дифференциальных уравнений. Собственные значения λ оператора монодромии T-периодического решения называются *мультипликаторами*, а числа α, определяемые равенством $\lambda = \exp(\alpha T)$, — *характеристическими показателями*. Мультипликаторы λ могут быть комплексными, поэтому характеристические числа α определены неоднозначно. В автономном случае один из мультипликаторов λ всегда равен 1 (соответствующий собственный вектор касается траектории периодического решения).

Предложение 1 (Пуанкаре — Ляпунов). В случае гамильтоновой системы с n степенями свободы характеристический многочлен $p(\lambda)$ оператора монодромии возвратный: $p(\lambda^{-1}) = \lambda^{-2n} p(\lambda)$.

Доказательство см., например, в [6].

Теорема 3 (Пуанкаре [34]). Предположим, что гамильтонова система с гамильтонианом H имеет p интегралов $F_1 = H$, $F_2, \ldots, F_p$, независимых в точках траектории периодического решения. Тогда $p+1$ характеристических показателей этого решения обращаются в нуль. Если интегралы F_s коммутируют, то среди показателей по крайней мере $2p$ равны нулю.

Следствие 1. Периодические решения автономной гамильтоновой системы всегда имеют два нулевых характеристических показателя.

Один показатель обращается в нуль из-за автономности гамильтоновой системы, а другой — из-за наличия интеграла H (который не имеет критических точек на траекториях периодических решений). Если остальные характеристические показатели отличны от нуля, то периодическое решение называется *невырожденным*. Невырожденные решения изолированы в том смысле, что на соответствующем $(2n-1)$-мерном уровне интеграла энергии H в малой окрестности периодической траектории нет других периодических решений с периодом, близким к T. В случае двух степеней свободы невырожденное решение с действительными показателями обычно называется *гиперболическим*, а с чисто мнимыми — *эллиптическим*. Гиперболическое периодическое решение неустойчиво, а эллиптическое — устойчиво в первом приближении.

Следствие 2. Если гамильтонова система имеет полный набор интегралов в инволюции, независимых на траектории периодического решения, то спектр ее оператора монодромии состоит из одной точки $\lambda=1$.

Теорема Пуанкаре дает нам метод доказательства неинтегрируемости: если траектории невырожденных периодических решений заполняют фазовое пространство всюду плотно или хотя бы это множество обладает ключевым свойством, то гамильтонова система не имеет дополнительного аналитического интеграла. По-видимому, в гамильтоновых системах общего положения периодические траектории действительно всюду плотны (Пуанкаре [34], п. 36). Это пока не доказано. Отметим в связи с гипотезой Пуанкаре следующий результат, касающийся геодезических потоков на римановых многообразиях отрицательной кривизны: все периодические решения имеют гиперболический тип и множество их траекторий всюду плотно заполняет фазовое пространство [3].

Для гамильтоновых систем, мало отличающихся от интегрируемых, можно доказать существование большого числа невырожденных периодических решений и из этого факта вывести результаты п. 1.1. Для простоты ограничимся случаем двух степеней свободы.

Пусть для $I=I^0$ частоты ω_1 и ω_2 невозмущенной интегрируемой задачи соизмеримы, причем $\omega_1\neq 0$. Тогда возмущающая функция $H_1(I^0, \omega_1 t, \omega_2 t+\lambda)$ периодична по t с некоторым периодом T. Рассмотрим ее среднее значение

$$\overline{H}_1(I^0, \lambda)=\lim_{s\to\infty}\frac{1}{s}\int_0^s H_1(I^0, \omega_1 t, \omega_2 t+\lambda)\,dt=\frac{1}{T}\int_0^T H_1 dt.$$

Теорема 4 (Пуанкаре). Предположим, что выполнены следующие условия:

1) $\det\|\partial^2 H_0/\partial I^2\|\neq 0$ в точке $I=I^0$,

2) при некотором $\lambda=\lambda^*$ производная $\partial\overline{H}_1/\partial\lambda=0$, а $\partial^2\overline{H}_1/\partial\lambda^2\neq$ $\neq 0$.

Тогда при малых $\varepsilon\neq 0$ существует периодическое решение возмущенной гамильтоновой системы (1), период которого равен T; оно аналитически зависит от параметра ε и при $\varepsilon=0$ совпадает с периодическим решением невозмущенной системы

$$I=I^0,\quad \varphi_1=\omega_1 t,\quad \varphi_2=\omega_2 t+\lambda^*.$$

Два характеристических показателя $\pm\alpha$ этого решения можно разложить в сходящийся ряд по степеням $\sqrt{\varepsilon}$:

$$\alpha=\alpha_1\sqrt{\varepsilon}+\alpha_2\varepsilon+\alpha_3\varepsilon\sqrt{\varepsilon}+\ldots,$$

причем

$$\omega_1{}^2\alpha_1{}^2=\frac{\partial^2\overline{H}_1}{\partial\lambda^2}(\lambda^*)\left(\omega_1{}^2\frac{\partial^2H_0}{\partial I_2{}^2}-2\omega_1\omega_2\frac{\partial^2H_0}{\partial I_1\partial I_2}+\omega_2{}^2\frac{\partial^2H_0}{\partial I_1{}^2}\right). \tag{4}$$

С доказательством можно познакомиться по книгам [34], [12].

Функция $\overline{H}_1(I^0,\lambda)$ периодична по λ с периодом 2π. Значит, существуют по крайней мере два значения λ, при которых $\partial\overline{H}_1/\partial\lambda=0$. В общем случае эти критические точки невырождены. При этом локальных минимумов (где $\partial^2\overline{H}_1/\partial\lambda^2>0$) ровно столько, сколько локальных максимумов (где $\partial^2\overline{H}_1/\partial\lambda^2<0$). В типичной ситуации при $I=I^0$ квадратичная форма

$$\omega_1{}^2\frac{\partial^2H_0}{\partial I_2{}^2}-2\omega_1\omega_2\frac{\partial^2H_0}{\partial I_1\partial I_2}+\omega_2{}^2\frac{\partial^2H_0}{\partial I_1{}^2}\neq0. \tag{5}$$

Кстати сказать, это условие геометрически означает отсутствие перегиба у кривой $H_0(I)=h$ в точке $I=I_0$. Таким образом, уравнение $d\overline{H}_1=0$ будет иметь столько же корней, для которых $\alpha_1^2>0$, сколько корней, для которых $\alpha_1^2<0$. Это равносильно тому, что при малых значениях $\varepsilon\neq0$ возмущенная система будет иметь ровно столько периодических решений эллиптического типа, сколько она имеет решений гиперболического типа. В этой ситуации обычно говорят, что при распаде невозмущенного инвариантного тора $I=I^0$ рождаются пары изолированных периодических решений. Согласно результатам КАМ-теории, траектории типичных эллиптических периодических решений «окружены» инвариантными торами. Гиперболические периодические решения имеют две инвариантные поверхности (*сепаратрисы*), заполненные решениями, асимптотически приближающимися к периодической траектории при $t\to\pm\infty$. Различные *асимптотические поверхности* могут пересекаться, образуя в пересечении довольно запутанную сеть (см. рис. 44). Поведение асимптотических поверхностей будет подробно обсуждаться в следующем параграфе.

Принципиальной основой доказательства неинтегрируемости возмущенных уравнений является лемма 1: если $F=F_0(I,\varphi)+\varepsilon F_1(I,\varphi)+\ldots$ — первый интеграл канонических уравнений (1), то F_0 не зависит от φ и функции H_0 и F_0 зависимы на множестве Пуанкаре. Первая часть леммы вытекает из невырожденности невозмущенной задачи. Используя теорему 3, мы докажем зависимость функций H_0 и F_0 на множестве невозмущенных торов $I=I^0$, которые удовлетворяют условиям теоремы 4 и неравенству (5).

◁ Действительно, периодические решения $\Gamma(\varepsilon)$, рождающиеся из семейства периодических решений на резонансном торе I^0, удовлетворяющем условиям теоремы 4, не вырождены. Поэтому (теорема 4) функции H и F зависимы во всех точках траектории $\Gamma(\varepsilon)$. Устремим ε к нулю. Периодическое решение $\Gamma(\varepsilon)$ перейдет в одно из периодических решений $\Gamma(0)$ невозмущенной задачи, лежащее на торе $I=I^0$, а функции H и F станут равными H_0 и F_0. По непрерывности они будут зависимы во всех точках траектории $\Gamma(0)$. Следовательно,

$$\operatorname{rang} \frac{\partial(H_0, F_0)}{\partial(I, \varphi)} \leqslant 1$$

в точках $(I, \varphi) \in \Gamma(0)$. В частности, в этих точках

$$\det \frac{\partial(H_0, F_0)}{\partial(I_1, I_2)} = 0.$$

Для завершения доказательства осталось заметить, что функции H_0 и F_0 не зависят от φ. ▷

При малых фиксированных значениях параметра $\varepsilon \neq 0$ теорема 4 гарантирует существование большого (но конечного) числа различных изолированных периодических решений. Поэтому из этой теоремы нельзя вывести неинтегрируемость возмущенной системы при фиксированных значениях $\varepsilon \neq 0$. Правда, в случае двух степеней свободы, который мы как раз рассматриваем, справедливо следующее утверждение: если невозмущенная система невырождена, то при фиксированных малых значениях $\varepsilon \neq 0$ возмущенная гамильтонова система имеет бесконечно много различных периодических решений. К сожалению, они могут быть не изолированы. Существование бесконечного числа периодических решений выводится из теоремы Колмогорова о сохранении условно-периодических движений (гл. 5, п. 3.2) и *геометрической теоремы Пуанкаре — Биркгофа* (см. [6]).

1.3. Приложения метода Пуанкаре. а) Обратимся к ограниченной задаче трех тел, рассмотренной нами в § 5 гл. 2. Предположим сначала, что масса Юпитера μ равна нулю. Тогда в «неподвижном» пространстве астероид будет вращаться вокруг Солнца единичной массы по кеплеровским орбитам. Пусть орбиты — эллипсы. Тогда удобно перейти от прямоугольных координат к каноническим элементам Делоне L, G, l, g (см. пример 4, п. 2.1, гл. 4). В новых координатах уравнения движения астероида будут каноническими с функцией Гамильтона $F_0 = -{}^1/{}_2L^2$. Если $\mu \neq 0$, то полный гамильтониан F можно разложить в ряд по возрастающим степеням $\mu: F = F_0 + \mu F_1 + \ldots$. Поскольку в подвижной системе координат, связанной с Солнцем и Юпитером, кеплеровские орбиты вращаются с единичной угловой скоростью, то функция Гамильтона F зависит от L, G, l и $g-t$. Положим $x_1 = L$, $x_2 = G$, $y_1 = l$, $y_2 = g-t$ и $H = F-G$.

Функция H теперь зависит лишь от x_i, y_i, причем относительно угловых переменных y_1, y_2 она 2π-периодична. В итоге мы представили уравнения движения астероида в виде следующей гамильтоновой системы:

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \dot{y}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}; \quad H = H_0 + \mu H_1 + \ldots,$$

$$H_0 = -\frac{1}{2x_1^2} - x_2. \tag{6}$$

Разложение возмущающей функции в кратный тригонометрический ряд по углам y_1 и y_2 было изучено еще Леверье (J. Leverrier) (см., например, [24]). Оно имеет следующий вид:

$$H_1 = \sum_{u=-\infty}^{\infty} \sum_{v=-\infty}^{\infty} h_{u,v} \cos\,[uy_1 - v\,(y_1 + y_2)].$$

Коэффициенты $h_{u,v}$, зависящие от x_1 и x_2, вообще говоря, отличны от нуля.

Множество Пуанкаре этой задачи состоит из прямых, параллельных оси $x_2: u/x_1^3 - v = 0$, $h_{u,v} \neq 0$. Оно всюду плотно заполняет полуплоскость $x_1 > 0$. Однако применить теорему 1 об отсутствии новых аналитических интегралов непосредственно нельзя из-за вырождения невозмущенной задачи: $\det\|\partial^2 H_0/\partial x^2\| = 0$. Эта трудность преодолевается тем, что канонические уравнения с гамильтонианами H и $\exp H$ имеют одни и те же траектории (но не решения). Следовательно, эти уравнения интегрируемы или неинтегрируемы одновременно. Остается заметить, что

$$\exp H = \exp H_0 + \mu(\exp H_0) H_1 + \ldots \quad \text{и} \quad \det\|\partial^2 \exp H_0/\partial x^2\| \neq 0.$$

Итак, мы получили, что уравнения ограниченной задачи трех тел в форме (6) не имеют независимого от функции H формально-аналитического по параметру μ интеграла $\Phi = \Sigma \Phi_s \mu^s$, коэффициенты которого — гладкие функции на множестве $D \times T^2\{y \bmod 2\pi\}$, где D — произвольная область в полуплоскости $x_1 > 0$.

в) «Перейдем к другой задаче, а именно задаче о движении тяжелого тела вокруг неподвижной точки ... можно спросить, препятствуют ли существованию однозначного интеграла, отличного от интегралов живых сил и площадей, соображения, изложенные в этой главе» (Пуанкаре, [34], п. 86).

Группе симметрий, состоящей из поворотов тела вокруг вертикальной прямой, соответствует линейный интеграл $\langle k, \gamma \rangle$: проекция кинетического момента на вертикаль постоянна. Фиксируя эту постоянную, понизим число степеней свободы до двух. На четырехмерных интегральных уровнях $M_c\{\langle k, \gamma \rangle = c, \langle \gamma, \gamma \rangle = 1\}$ возникает гамильтонова система с двумя степенями свободы. Ее функция Гамильтона — полная энергии тела с фиксированным значением проекции $\langle k, \gamma \rangle$ — равна $H_0 + \varepsilon H_1$, где

H_0 — кинетическая энергия (функция Гамильтона интегрируемой задачи Эйлера о движении тела по инерции), а H_1 — потенциальная энергия тела в однородном поле силы тяжести (ε — произведение веса тела на расстояние от центра масс до точки подвеса). Будем считать параметр ε малым (ср. с п. 2.1, гл. 5, пример 2). Это эквивалентно изучению быстрых вращений тела в умеренном силовом поле. В невозмущенной интегрируемой задаче Эйлера можно ввести переменные действие — угол I, φ. Формулы перехода от специальных канонических переменных L, G, l, g к переменным действие — угол I, φ можно найти, например, в работе [12]. В новых переменных $H = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \varphi)$. Переменные действие I_1, I_2 могут изменяться в области $\Delta = \{|I_1| \leqslant I_2,\ I_2 \geqslant 0\}$. Гамильтониан $H_0(I_1, I_2)$ — однородная функция степени 2, аналитическая в каждой из четырех связных подобластей Δ, на которые делят область три прямые π_1, π_2 и $I_1 = 0$. Уравнение прямых π_1 и π_2 есть $2H_0/I_2^2 = A_2^{-1}$. Они симметричны относительно вертикальной оси и стремятся к прямой $I_1 = 0$, когда $A_2 \to A_1$ и к паре прямых $|I_1| = I_2$, когда $A_2 \to A_3$ (напомним, что A_1, A_2, A_3 — главные моменты инерции тела и $A_1 \geqslant A_2 \geqslant A_3$). Линии уровня функции H_0 изображены на рис. 57.

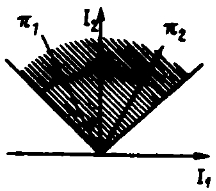


Рис. 57

Разложение возмущающей функции H_1 в кратный ряд Фурье по угловым переменным φ_1 и φ_2 фактически содержится в одной из работ Якоби:

$$\sum_{m \in Z} h_{m,1} e^{i(m\varphi_1 + \varphi_2)} + \sum_{m \in Z} h_{m,-1} e^{i(m\varphi_1 - \varphi_2)} + \sum_{m \in Z} h_{m,0} e^{im\varphi_1}.$$

Когда главные моменты инерции подчинены неравенству $A_1 > A_2 > A_3$, множество Пуанкаре состоит из бесконечного числа прямых, проходящих через точку $I = 0$ и накапливающихся у пары прямых π_1 и π_2. Можно показать, что функция H_0 невырождена в области Δ. Если функция H была бы аналитичной по I по всей области Δ, то можно было бы применить результаты п. 1.1: точки I^0, лежащие на прямых π_1 и π_2, удовлетворяли бы условиям теоремы 1. Трудность, связанную с аналитическими особенностями функции Гамильтона в переменных действие — угол, можно преодолеть, рассматривая задачу о дополнительном интеграле, аналитическом на всем интегральном уровне M_c. С помощью метода Пуанкаре доказывается

Теорема 6. Если тяжелое твердое тело динамически несимметрично, то уравнения вращения не имеют независимого от функции $H_0+\varepsilon H_1$ формального интеграла $\Sigma F_s \varepsilon^s$ с аналитическими на уровне M_c коэффициентами ([12]).

Это утверждение дает отрицательный ответ на вопрос, поставленный Пуанкаре в [34] (п. 86).

§ 2. Расщепление асимптотических поверхностей

Невырожденные неустойчивые периодические решения имеют асимптотические многообразия, заполненные траекториями, неограниченно приближающимися к периодическим траекториям при $t\to\pm\infty$. В интегрируемых гамильтоновых системах эти поверхности, как правило, попарно совпадают. В неинтегрируемых случаях ситуация иная: асимптотические поверхности могут пересекаться не совпадая, образуя в пересечении довольно запутанную сеть (см. рис. 44). В этом параграфе мы опишем восходящий к Пуанкаре способ доказательства неинтегрируемости, основанный на анализе асимптотических поверхностей гамильтоновых систем, мало отличающихся от интегрируемых.

2.1. Условия расщепления. Пусть V — гладкое n-мерное пространство положений гамильтоновой системы, T^*V — ее фазовое пространство, $H: T^*V\times R\{t\}\to R$ — функция Гамильтона. В расширенном фазовом пространстве $M=T^*V\times R^2\{E,t\}$ уравнения движения снова гамильтоновы:

$$\dot{x}=\frac{\partial K}{\partial y},\quad \dot{y}=-\frac{\partial K}{\partial x},\quad \dot{E}=\frac{\partial K}{\partial t},\quad \dot{t}=-\frac{\partial K}{\partial E},\tag{7}$$

где $K=H(y,x,t)-E$, $x\in V$, $y\in T_x^*V$.

Гладкая поверхность $\Lambda^{n+1}\subset M$ называется *лагранжевой*, если для любого стягиваемого в точку замкнутого контура γ

$$\oint_\gamma y\,dx-E\,dt$$

($E=H(y,x,t)$ на поверхности Λ^{n+1}) равен нулю. Лагранжевы поверхности инвариантны относительно действия фазового потока системы (7). В автономном случае лагранжевы поверхности $\Lambda^n\subset T^*V$ задаются условием

$$\oint_\gamma y\,dx=0\quad (\gamma\subset\Lambda^n,\ \partial\gamma=0).$$

Если лагранжева поверхность Λ^{n+1} однозначно проектируется на $D\times R\{t\}$, $D\subset V$, то ее можно представить в виде графика

$$y=\frac{\partial S(x,t)}{\partial x},\quad H(y,x,t)=-\frac{\partial S(x,t)}{\partial t},$$

где $S:D\times R\to R$ — некоторая гладкая функция. В автономном случае Λ^n задается графиком

$$y=\frac{\partial S}{\partial x},\quad x\in D.$$

Функция $S(x,t)$ удовлетворяет уравнению Гамильтона — Якоби:

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(\frac{\partial S}{\partial x},x,t\right)=0.$$

В этом параграфе мы будем иметь дело с лагранжевыми поверхностями, составленными из асимптотических траекторий. Такие поверхности естественно назвать асимптотическими.

Предположим, что функция Гамильтона 2π-периодична по t и зависит еще от некоторого параметра $\varepsilon: H=H(y,x,t,\varepsilon)$. Пусть при $\varepsilon=0$ функция $H(y,x,t,0)=H_0(y,x)$ не содержит времени и удовлетворяет следующим условиям:

1) Существуют две критические точки y_-, x_- и y_+, x_+ функции H_0, в которых собственные значения линеаризованной гамильтоновой системы

$$\dot y=-\frac{\partial H_0}{\partial x},\quad \dot x=\frac{\partial H_0}{\partial y}$$

действительны и отличны от нуля. В частности, 2π-периодические решения $x_\pm(t)=x_\pm$, $y_\pm(t)=y_\pm$ имеют гиперболический тип.

2) Если $\Lambda^+(\Lambda^-)$ — устойчивое (неустойчивое) асимптотическое многообразие в T^*V, проходящее через точку x_+, y_+, (x_-, y_-), то $\Lambda^+=\Lambda^-$. Отсюда вытекает, в частности, что $H_0(y_+,x_+)=$ $=H_0(y_-,x_-)$.

3) Существует область $D\subset V$, содержащая точки $x_\pm$, такая, что в $T^*D\subset T^*V$ уравнение поверхности $\Lambda^+=\Lambda^-$ можно представить в следующем виде: $y=\partial S_0/\partial x$, где S_0 — некоторая аналитическая функция в области D. Полезно рассмотреть дифференциальное уравнение

$$\dot x=\left.\frac{\partial H_0}{\partial y}\right|_{y(x)},\quad y=\frac{\partial S_0}{\partial x}. \tag{8}$$

В малой окрестности точки $x_\pm$ его решения стремятся при $t\to$ $\to\pm\infty$ к точке $x_\pm$.

4) Уравнение (8) имеет в области D двоякоасимптотическое решение: $x_0(t)\to x_\pm$ при $t\to\pm\infty$ (рис. 58).

Гамильтонову систему с функцией Гамильтона H_0 следует рассматривать как невозмущенную. В приложениях она чаще всего бывает вполне интегрируемой. Пусть $D_+(D_-)$ — подоб-

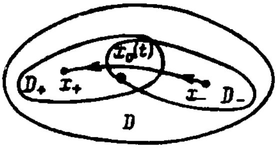


Рис. 58

ласть D, содержащая точку $x_+(x_-)$ и не содержащая $x_-(x_+)$. При малых значениях ε асимптотические поверхности Λ^+ и Λ^- не исчезнут, а перейдут в «возмущенные» поверхности Λ_ε^+ и Λ_ε^-. Более точно, в области $D_\pm\times R\{t\}$ уравнение асимптотической поверхности можно представить в следующем виде:

$$y=\frac{\partial S^\pm}{\partial x},$$

где $S^\pm(x,\ t,\ \varepsilon)$ — 2π-периодическая по t функция, которая определена и аналитична при $x\in D_\pm$ и малых значениях ε (Пуанкаре, [34]). Функция $S^\pm$ должна, конечно, удовлетворять уравнению Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial S^\pm}{\partial t}+H\left(\frac{\partial S^\pm}{\partial x},\ x,\ t,\ \varepsilon\right)=0. \tag{9}$$

Согласно предположению, при $\varepsilon=0$ поверхности Λ_0^+ и Λ_0^- совпадают. Однако, как заметил впервые Пуанкаре [34], в общем случае при малых значениях параметра $\varepsilon\neq0$ поверхности Λ_ε^+ и Λ_ε^-, рассматриваемые как множества точек в $T^*(D_+\cap D_-)\times R$, уже не будут совпадать. Это явление называется *расщеплением асимптотических поверхностей*. Очевидно, что Λ_ε^+ совпадает с Λ_ε^- тогда и только тогда, когда уравнение (9) имеет решение $S(x,t,\varepsilon)$, аналитическое по x во всей области D.

Теорема 7 (Пуанкаре). Если $H_1(y_+,x_+,t)=H_1(y_-,x_-,t)$ и

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\{H_0,\ H_1\}(y(x_0(t)),\ x_0(t),\ t)\,dt\neq0, \tag{10}$$

то при малых значениях параметра $\varepsilon\neq0$ возмущенные асимптотические поверхности Λ_ε^+ и Λ_ε^- не совпадают.

◁ Предположим, что уравнение (9) имеет аналитическое решение $S(x,\ t,\ \varepsilon)$, которое при малых значениях ε можно представить в виде сходящегося степенного ряда

$$S=S_0(x,\ t)+\varepsilon S_1(x,\ t)+\ldots.$$

Функция S_0 должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial S_0}{\partial t}+H_0\left(\frac{\partial S_0}{\partial x},\ x\right)=0.$$

Откуда $S_0=-ht+W(x)$, где $h=H_0(y_\pm,\ x_\pm)$, а W — решение уравнения

$$H_0\left(\frac{\partial W}{\partial x}, x\right)=h.$$

Ясно, что W совпадает с функцией $S_0(x)$.

Пусть $H=H_0(y, x)+\varepsilon H_1(y, x, t)+\ldots$. Тогда из (9) мы получим квазилинейное дифференциальное уравнение для S_1:

$$\frac{\partial S_1}{\partial t}+\left.\frac{\partial H_0}{\partial x}\right|_{y(x)}\frac{\partial S_1}{\partial x}+H_1(y(x), x, t)=0. \tag{11}$$

Так как уравнение (8) автономное, то оно вместе с решением $x_0(t)$ имеет семейство решений $x_0(t+\alpha)$, $\alpha\in R$. Из (11) следует, что на этих решениях

$$S_1(x_0(t+\alpha), t)=$$

$$=S_1(x_0(\alpha), 0)-\int\limits_0^t H_1(y(x_0(t+\alpha)), x_0(t+\alpha), t)\,dt. \tag{12}$$

Без ущерба общности можно считать, что $H_1(y_\pm, x_\pm, t)=0$ для всех t. Если это не так, то вместо возмущающей функции следует взять функцию $H_1-H_1(y_\pm, x_\pm, t)$. При этом скобка Пуассона $\{H_0, H_1\}$ не изменится.

Поскольку разложение Тейлора функции H_1 в окрестности точек $x_\pm$, $y_\pm$ начинается с линейных членов по $x-x_\pm$, $y-y_\pm$ и функции $x_0(t)-x_\pm$, $y(x_0(t))-y_\pm$ экспоненциально быстро стремятся к нулю при $t\to\pm\infty$, то интеграл

$$J(\alpha)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} H_1(y_0(t+\alpha), x_0(t+\alpha), t)\,dt \tag{13}$$

сходится. Из уравнения (12) следует также, что значение $S_1(x, t)$ в точках $x_\pm$ не зависит от t. Согласно (12), интеграл $J(\alpha)$ равен $S_1(x_+)-S_1(x_-)$ и поэтому не зависит от α. Для завершения доказательства осталось вычислить производную

$$\left.\frac{dJ}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sum\left(\frac{\partial H_1}{\partial x_s}\dot{x}_s+\frac{\partial H_1}{\partial y_s}\dot{y}_s\right)dt=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\{H_0, H_1\}\,dt=0. \ \triangleright$$

Другое доказательство теоремы Пуанкаре можно найти в работе [45].

В автономном случае условие расщепления асимптотических поверхностей, расположенных на некотором фиксированном уровне энергии, можно представить в следующем виде:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\{F_0, H_1\}\,dt\neq 0, \tag{14}$$

где F_0 — интеграл невозмущенной системы. Если в точках неустойчивых периодических траекторий $dF_0=0$, то интеграл (14) заведомо сходится.

2.2. Расщепление асимптотических поверхностей — препятствие к интегрируемости. Рассмотрим гамильтонову систему с гамильтонианом $H(z,t,\varepsilon)=H_0(z)+\varepsilon H_1(z,t)+O(\varepsilon^2)$ в предположениях п. 2.1. В частности, невозмущенная система имеет два гиперболических положения равновесия $z_\pm$, соединенных двоякоасимптотическим решением $t\mapsto z_0(t)$, $t\in\mathbb{R}$.

Теорема 8 (С. В. Болотин). Пусть выполнены следующие условия:

$$1)\quad \int_{-\infty}^{\infty}\{H_0,\{H_0,H_1\}\}(z_0(t),t)\,dt\neq 0,$$

2) при малых ε возмущенная система имеет двоякоасимптотическое решение $t\mapsto z_\varepsilon(t)$, близкое к $t\mapsto z_0(t)$.

Тогда при малых фиксированных значениях $\varepsilon\neq 0$ в любой окрестности замыкания траектории $z_\varepsilon(t)$ уравнения Гамильтона $\dot z=IdH$ не имеют полного набора независимых интегралов в инволюции.

Замечание. Условие 1) можно заменить на следующее: при некотором $m\geqslant 2$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\{\underbrace{H_0,\ldots\{H_0}_{m},H_1\}\ldots\}(z_0(t),t)\,dt\neq 0.$$

Если выполнено условие 1), то асимптотические поверхности заведомо не совпадают. Условие 2) выполнено, конечно, не всегда. Приведем достаточное условие существования семейства двоякоасимптотических траекторий.

Пусть $H_0=F_1,\ldots,F_n$ — коммутирующие интегралы невозмущенной задачи, независимые на $\Lambda_0^+=\Lambda_0^-$. Если

$$\int_{-\infty}^{\infty}\{F_i,H_1\}(z_0(t),t)\,dt=0,$$

$$\det\left\|\int_{-\infty}^{\infty}\{F_i,\{F_j,H_1\}\}(z_0(t),t)\,dt\right\|\neq 0,$$

то существует аналитическое по ε семейство асимптотических решений $t\mapsto z_\varepsilon(t)$. Это утверждение просто выводится из теоремы о неявной функции.

Если мы исследуем задачу о существовании независимых инволютивных интегралов $F_i(z,t,\varepsilon)$, $1\leqslant i\leqslant n$, аналитических (или формально аналитических) по параметру ε, то условие 2) можно отбросить. В частности, если выполнено условие 1), то ряды теории возмущений расходятся в окрестности расщепленных асимптотических поверхностей.

Методом нормальных форм Биркгофа в окрестности неустойчивых периодических решений $z_{\pm}+O(\varepsilon)$ можно найти 2π-периодическую по t формальную каноническую замену переменных $z\mapsto u$, приводящую функцию Гамильтона $H(z, t, \varepsilon)$ к функции $H^{\pm}(u, \varepsilon)$, не зависящей от t. Из-за соизмеримости характеристических показателей это преобразование Биркгофа может расходиться. Однако в случае одной степени свободы $(n=1)$ формальные ряды замены переменных $z\mapsto u$ всегда сходятся и аналитически зависят от параметра ε (см. [175]).

Теорема 9. Предположим, что преобразование Биркгофа сходится и аналитически зависит от ε. Если выполнено условие 1) теоремы 8, то при малых $\varepsilon\neq 0$ уравнения Гамильтона не имеют полного набора независимых аналитических интегралов в инволюции.

В частности, при $n=1$ достаточным условием неинтегрируемости является условие 1) (С. Л. Зиглин [71]).

Доказательство теоремы 9. Определим на поверхности $\Lambda_0^{\pm}$ функцию $R^{\pm}$ по формуле

$$R^{+}(z)=-\int_{0}^{+\infty}\{H_0, \{H_0, H_1\}\}(z(t), t)\,dt,$$

$$R^{-}(z)=\int_{-\infty}^{0}\{H_0, \{H_0, H_1\}\}(z(t), t)\,dt,$$

где $t\mapsto z(t)$ — асимптотическое движение невозмущенной системы с начальным условием $z(0)=z$.

Лемма 2. Функции $R^{\mp}$ определяются функцией H_0, семейством поверхностей $\Lambda_\varepsilon^{\mp}$ и симплектической структурой.

◁ Действительно, согласно результатам п. 2.1, функции

$$S^{+}(z)=-\varepsilon\int_{0}^{+\infty}(H_1(z(t), t)-H_1(z_{+}, t))\,dt,$$

$$S^{-}(z)=\varepsilon\int_{-\infty}^{0}(H_1(z(t), t)-H_1(z_{-}, t))\,dt$$

являются производящими функциями лагранжевых поверхностей $\Lambda_\varepsilon^{\pm}$ с точностью до $O(\varepsilon^2)$. Но $\varepsilon R^{\pm}=\{H_0, \{H_0, S^{\pm}\}\}$. ▷

Композиция преобразования Биркгофа со степенями отображения за период позволяет продолжить функции $H^{\pm}$ с окрестностей критических точек $u_{\pm}(\varepsilon)$ на некоторые окрестности $W_{\pm}$ асимптотических поверхностей $\Lambda_\varepsilon^{\pm}$. Так как возможное расщепление поверхностей Λ_ε^+ и Λ_ε^- имеет порядок ε, то при малых ε окрестности W_+ и W_- пересекаются.

Лемма 4. $\{H^+, H^-\} \not\equiv 0$ при $\varepsilon \neq 0$.

◁ Положим

$$H^\pm (u, \varepsilon) \doteq H_0^\pm (u) + \varepsilon H_1^\pm (u) + O(\varepsilon^2).$$

Так как $H_0^\pm (u) = H_0(u)$, то

$$\{H^+, H^-\} = \varepsilon \{H_0, H_1^- - H_1^+\} + O(\varepsilon^2).$$

Поскольку Λ_0^- — инвариантное асимптотическое многообразие гамильтоновой системы $\dot{u} = IdH_0$, то, согласно лемме 3,

$$\{H_0, H_1^-\}(u) = \int_{-\infty}^{0} \{H_0, \{H_0, H_1^-\}\}(u_0(t))\, dt = R^-(u), \quad u \in \Lambda_0^-.$$

Аналогично

$$\{H_0, H_1^+\}(u) = \int_{0}^{+\infty} \{H_0, \{H_0, H_1^+\}\}(u_0(t))\, dt = R^+(u), \quad u \in \Lambda_0^+.$$

Следовательно,

$$\{H^+, H^-\} = \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \{H_0, \{H_0, H_1\}\}(z_0(t), t)\, dt + O(\varepsilon^2).$$

Согласно условию 1), при малых $\varepsilon \neq 0$ скобка Пуассона $\{H^+, H^-\} \not\equiv 0$. ▷

В новых переменных u интегралы $F_1, \ldots, F_n$ не зависят от t. Пусть при $\varepsilon \neq 0$ в некоторой точке $W_+ \cap W_-$ интегралы $F_1, \ldots$ $\ldots, F_n$ независимы. Поскольку $\{H^\pm, F_i\} \equiv 0$, то вектор $IdH^\pm$ есть линейная комбинация векторов IdF_i. Так как $\{F_i, F_j\} = 0$, то, очевидно, в этой точке $\{H^+, H^-\} = 0$. Для завершения доказательства осталось заметить, что на всюду плотном множестве аналитическая функция $\{H^+, H^-\}$ отлична от нуля. ▷

Теорема 10. Пусть $n = 1$. Если

1) $\int_{-\infty}^{\infty} \{H_0, H_1\}(z_0(t), t)\, dt \neq 0$;

2) при малых ε возмущенная система имеет двоякоасимптотическое решение $t \mapsto z_\varepsilon(t)$, близкое к $t \mapsto z_0(t)$, то при малых значениях $\varepsilon \neq 0$ гамильтонова система $\dot{z} = IdH$ не имеет дополнительного аналитического интеграла.

◁ Рассмотрим отображение за период g сечения $t = t_0$ на себя. При малых ε это отображение имеет две неподвижные гиперболические точки z_1 и z_2 с инвариантными сепаратрисами $W_1^\pm$ и $W_2^\pm$. Согласно условиям теоремы, при $\varepsilon \neq 0$ сепаратрисы W_1^+ и W_2^- пересекаются и не совпадают. Пусть V — малая окрестность точки z_1 и Δ — малый отрезок сепаратрисы W_2^-, пересекающийся с W_1^+. При достаточно большом n отрезок $g^n(\Delta)$ будет целиком лежать в области V, снова пересекаясь с W_1^+. Согласно *теореме Гробмана—Хартмана* (F. Hartman) [33], в области V отображение g топологически сопряжено линейному гиперболическому повороту. Следовательно, при $n\to\infty$ отрезки $g^n(\Delta)$ будут «растягиваться» вдоль сепаратрисы W_1^-, неограниченно к ней приближаясь. Очевидно, что объединение

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} g^n(\Delta) \tag{15}$$

будет ключевым множеством для класса функций, аналитических в сечении $t=t_0$.

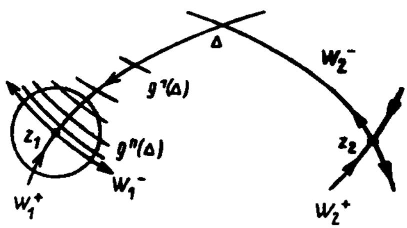


Рис. 59

Предположим теперь, что уравнение Гамильтона имеет аналитический интеграл $f(z,t)$. Функция $f(z,t_0)$ инвариантна относительно отображения g и постоянна на сепаратрисе W_2^- (так как последовательность точек $g^n(z)$, $z\in W_2^-$ при $n\to-\infty$ сходится к точке z_2). Следовательно, аналитическая функция $f(z,t_0)$ постоянна на множестве (15), и поэтому она постоянна при любом t_0. ▷

Замечание. А. Пуанкаре разделил двоякоасимптотические решения на два типа: *гомоклинные* (когда $z_+=z_-$) и *гетероклинные* (когда $z_+\neq z_-$). Если $n=1$, то при малых ε возмущенная задача всегда имеет гомоклинные решения (если, конечно, они были при $\varepsilon=0$).

2.3. Некоторые приложения.

а) Рассмотрим вначале наиболее простую задачу о колебаниях маятника с вибрирующей точкой подвеса (сп. п. 1.4 гл. 5, пример 6). Функция Гамильтона H равна $H_0+\varepsilon H_1$, где

$$H_0=y^2/2-\omega^2\cos x,\quad H_1=-\omega^2 f(t)\cos x,$$

а f — 2π-периодическая функция времени. Когда $\varepsilon=0$, то верхнее положение маятника — неустойчивое равновесие. Невозмущенная задача имеет два семейства гомоклинных решений:

$$\cos x_0 = \frac{2e^{\pm\omega(t-t_0)}}{e^{\pm 2\omega(t-t_0)}+1},\quad x_0 \to \pm\pi, \text{ при } t\to\pm\infty. \tag{16}$$

Так как $\{H_0, H_1\} = -\omega^2 f(t)\dot{x}\sin x$, то интеграл (10) с точностью до постоянного множителя равен

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dot{f}(t)\cos x_0 dt.$$

Пусть $f(t) = \Sigma f_n e^{int}$. Тогда интеграл (10) можно представить в виде ряда

$$\sum_{n\in Z} 2in f_n J_n e^{int_0},\quad J_n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pm\omega t}e^{int}}{e^{\pm 2\omega t}+1}\,dt.$$

Интегралы J_n нетрудно вычислить с помощью вычетов:

$$J_n = \frac{-ie^{-n\pi/2\omega}}{2\omega(1+e^{\pm n\pi/\omega})} \neq 0.$$

Следовательно, если $f(t)\neq\text{const}$ (т. е. $f_n\neq 0$ при некотором $n\neq 0$), то интеграл (10) отличен от нуля хотя бы на одном двоякоасимптотическом решении из семейства (16). Таким образом, если $f(t)\neq\text{const}$, то согласно результатам п. 2.2, рассматриваемая задача при достаточно малых (но фиксированных) значениях параметра $\varepsilon\neq 0$ не имеет аналитического первого интеграла $F(y, x, t)$, 2π-периодического по x и t. Можно показать, что уравнения колебаний маятника могут быть вполне интегрируемыми лишь при конечном множестве значений параметра ε из интервала $[-a, a]$, где $a = 1/\max|f(t)|$ (см. [13]).

Замечание. В работе [13] указан пример гамильтоновой системы с аналитическим гамильтонианом, аналитически зависящим от параметра, которая при всюду плотных множествах значений параметра является как вполне интегрируемой, так и неинтегрируемой. Таким образом, интегрируемые случаи изолированы не всегда.

b) В задаче о быстром вращении тяжелого несимметричного твердого тела функция Гамильтона $H = H_0 + \varepsilon H_1$, где $H_0 = \langle AM, M\rangle/2$, $H_1 = \langle x, e\rangle$; $A = \mathrm{diag}(a_1, a_2, a_3)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$. Числа a_1, a_2, a_3 обратны главным моментам инерции тела, а x_1, x_2, x_3 — координаты центра масс в главных осях инерции. При $\varepsilon = 0$ будем иметь интегрируемый случай Эйлера. В этой невозмущенной задаче на всех некритических трехмерных уровнях $M_{h,c}$

$$\{M, e : H_0 = h,\ \langle M, e\rangle = c,\ \langle e, e\rangle = 1\}$$

существуют два неустойчивых периодических решения: если $a_1<a_2<a_3$, то

$$M_1=M_3=0,\ M_2=M_2^0=\pm\sqrt{2h/a_2},\ e_2=e_2^0=\pm c/M_2^0, \tag{17}$$
$$e_1=\alpha\cos(a_2M_2^0)t,\ e_3=\alpha\sin(a_2M_2^0)t;\ \alpha^2=1-(c/M_2^0)^2.$$

Из неравенства $\langle M, e\rangle^2\leqslant\langle M, M\rangle\ \langle e, e\rangle$ и независимости первых интегралов на $M_{h,c}$ вытекает, что $\alpha^2>0$. Устойчивые и неустойчивые асимптотические поверхности периодических решений (17) можно представить как пересечения многообразия $M_{h,c}$ гиперплоскостями $M_1\sqrt{a_2-a_1}\pm M_3\sqrt{a_3-a_2}=0$. В задаче Эйлера асимптотические поверхности «сдвоены»: они сплошь заполнены двоякоасимптотическими траекториями, которые при $t\to\pm\infty$ неограниченно приближаются к периодическим траекториям (17). Расщепление этих поверхностей изучено в работах В. В. Козлова (1976) и С. Л. Зиглина (1980). Оказалось, что при возмущении асимптотические поверхности расщепляются всегда, кроме «случая Гесса—Аппельрота» (L. O. Hesse):

$$x_2=0,\ x_1\sqrt{a_3-a_2}\pm x_3\sqrt{a_2-a_1}=0. \tag{18}$$

В этом случае одна пара сепаратрис расщепляется, а другая — нет.

Причина нерасщепления состоит в том, что при выполнении условия (18) возмущенная задача при всех значениях ε имеет «частный» интеграл: $F=M_1\sqrt{a_2-a_1}\pm M_3\sqrt{a_3-a_2}$ ($\dot F=0$, если $F=0$). Можно показать, что замкнутые инвариантные поверхности $M_{h,c}\cap\{F=0\}$ при малых значениях ε будут как раз парой сдвоенных сепаратрис (см. [12]).

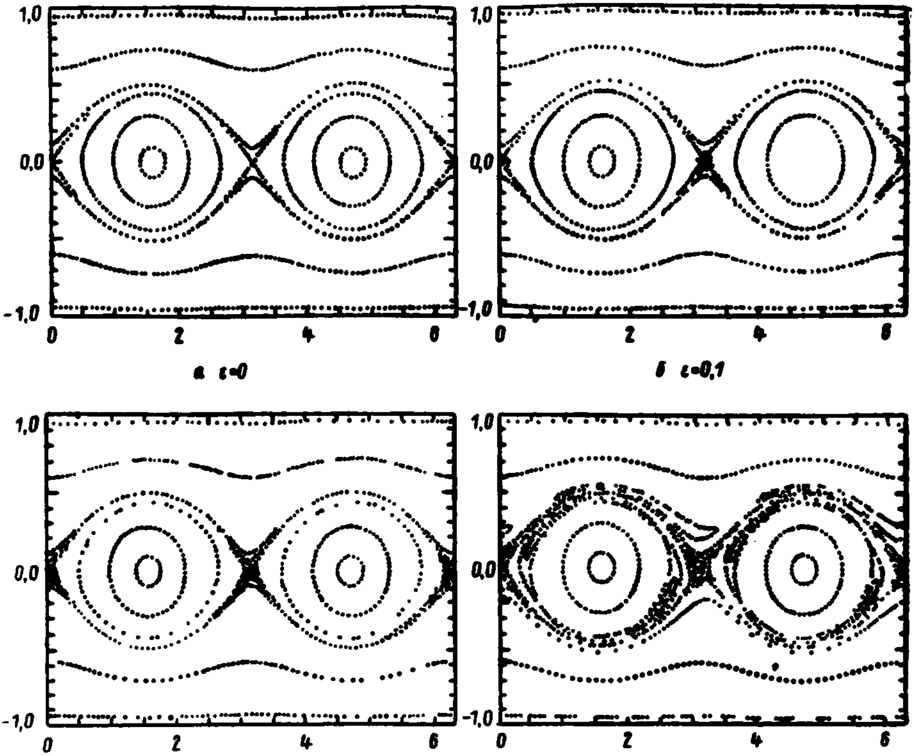
В задаче о быстром вращении тяжелого несимметричного волчка расщепленные сепаратрисы пересекаются по-видимому, не всегда. Однако здесь применима теорема 9, с помощью которой можно установить отсутствие дополнительного аналитического интеграла возмущенной задачи при малых, но фиксированных значениях параметра $\varepsilon\neq0$ (С. Л. Зиглин (1980)).

Поведение решений возмущенной задачи исследовалось численно (L. Galgani, A. Giorgilli, J.-M. Strelcyn (1980)). На рис. 60 показаны результаты вычислений при разных значениях возмущающего параметра ε. Хорошо видно, что картина инвариантных кривых невозмущенной задачи начинает разрушаться как раз в окрестности сепаратрис.

c) Рассмотрим теперь уравнения Кирхгофа

$$\begin{cases}\dot M=M\times\omega+e\times u,\ \dot e=e\times\omega;\ \omega=H'_M,\ u=H'_e,\\ H=\frac{1}{2}\langle AM, M\rangle+\langle BM, e\rangle+\frac{1}{2}\langle Ce, e\rangle,\end{cases} \tag{19}$$

описывающие вращение твердого тела в идеальной жидкости.



а ε=0 *б* ε=0,1 *в* ε=0,5 *г* ε=1

Рис. 60

Матрица $A=\mathrm{diag}(a_1, a_2, a_3)$ диагональна, а матрицы B и C симметричны.

Теорема 11. Пусть среди чисел a_1, a_2, a_3 нет равных. Если уравнения Кирхгофа имеют дополнительный интеграл, независимый от функций $F_1=H$, $F_2=\langle M, e\rangle$, $F_3=\langle e, e\rangle$ и аналитический в $R^6\{M, e\}$, то матрица $B=\mathrm{diag}(b_1, b_2, b_3)$ и

$$a_1^{-1}(b_2-b_3)+a_2^{-1}(b_3-b_1)+a_3^{-1}(b_1-b_2)=0 \tag{20}$$

Если $B=0$, то независимый аналитический интеграл существует лишь в случае, когда $C=\mathrm{diag}(c_1, c_2, c_3)$ и

$$a_1^{-1}(c_2-c_3)+a_2^{-1}(c_3-c_1)+a_3^{-1}(c_1-c_2)=0. \tag{21}$$

Матрица B в интегрируемом случае Стеклова определяется как раз условием (20). Условие (21) дает интегрируемый случай Клебша. Интересно отметить совпадение вида условий (20) и (21).

Следствие. В общем случае уравнения Кирхгофа неинтегрируемы.

Доказательство теоремы 11, установленной В. Козловым и Д. А. Онищенко (1982 г.), тоже основано на явлении расщепления сепаратрис: в уравнения (19) вводится малый параметр ε заменой e на εe; при $\varepsilon=0$ будем снова иметь интегрируемую задачу Эйлера, сдвоенные сепаратрисы которой расщепляются при добавлении возмущений, если не выполнены условия (20) — (21). Подробности можно найти в [13].

d) С помощью метода расщепления асимптотических поверхностей можно установить неинтегрируемость задачи о движении четырех точечных вихрей (С. Л. Зиглин, [70]). Точнее, рассмотрим эту задачу в ограниченной постановке: вихрь нулевой интенсивности (т. е. просто частица идеальной жидкости) движется в «поле» трех вихрей одинаковой интенсивности. Оказывается, уравнение движения нулевого вихря можно представить в гамильтоновой форме с периодическим по времени гамильтонианом; эти уравнения имеют гиперболические периодические движения с пересекающимися сепаратрисами. Поэтому ограниченная задача четырех вихрей не является вполне интегрируемой, хотя (как и в неограниченной постановке) имеет четыре независимых некоммутирующих интеграла.

§ 3. Квазислучайные колебания

Большинство методов доказательства неинтегрируемости основано на том, что достаточно запутанное топологическое поведение фазовых кривых препятствует существованию первых интегралов. Один из случаев, когда удается явно установить такую топологическую запутанность, следовательно и неинтегрируемость, — теория *квазислучайных колебаний*, которую мы здесь рассмотрим в простейшей модельной ситуации.

Рассмотрим, следуя В. М. Алексееву, неавтономную систему с одной степенью свободы, движение которой описывается уравнением

$$\ddot{x} = -Q(x, t), \quad x \in R. \tag{22}$$

Будем предполагать выполненными следующие условия:

a) Q — гладкая функция, 2π-периодическая по t.

b) $Q(-x, t) = -Q(x, t)$; в частности $Q(0, t)=0$ и, следовательно, точка $x=0$ — положение равновесия.

c) $Q>0$ при $x>0$ и

$$\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} Q(x, t)\,dx\wedge dt < \infty.$$

Если система автономная, то последнее условие означает ограниченность потенциальной энергии при $|x| \to \infty$.

d) $Q_x' \leqslant 0$ при $x \geqslant x_* > 0$. Это означает выпуклость графика потенциальной энергии $U(x, t)$ (определяемой равенством $U_x' = -Q$) при $|x| > x_*$. Следующие два условия носят технический характер:

e) $|Q_t'| \leqslant \Psi(x)$, $\int_0^\infty \Psi(x)\,dx < \infty$,

f) $\Psi(x)/Q^2(x, t) = O(1)$ при $x \geqslant x_0$.

Важным примером является вариант ограниченной задачи трех тел, в котором две точки одинаковой массы описывают эллиптические орбиты в плоскости x, y, симметричные относительно оси z, а третья точка нулевой массы все время остается на оси z (см. рис. 61). Движение последней описывается дифференциальным уравнением

$$\ddot{z} = -z/[z^2 + r^2(t)]^{3/2}, \tag{23}$$

где

$$r(t) = \frac{1}{1 + e\cos\varphi(t)}, \quad \dot{\varphi} = (1 + e\cos\varphi)^2, \quad \varphi(0) = 0;$$

здесь e — эксцентриситет эллиптической орбиты массивных тел. В этом примере все условия a—f, очевидно, выполнены.

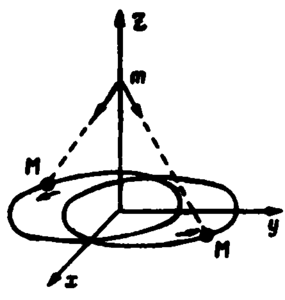


Рис. 61

3.1. Отображение последования.

Определение. Решение $x(t)$ уравнения (24) назовем гиперболическим в будущем, если существует $\dot{x}(+\infty) = \lim\limits_{t \to +\infty} \dot{x}(t) > 0$, параболическим, если $\dot{x}(+\infty) = 0$, и колеблющимся, если функция $x(\cdot)$ имеет бесконечно много нулей при $t \to +\infty$. Аналогично определяются эти три вида движений в прошлом (при $t \to -\infty$) (см. гл. 2, § 4, п. 4.1).

В указанном выше примере ограниченной задачи трех тел движения первого (второго) вида называются, согласно Шази, гиперболо-эллиптическими (параболо-эллиптическими). Финальный тип движений третьего вида пока не определен.

Предложение 2. Каждое решение уравнения (22) принадлежит одному из этих трех видов (как при $t\to+\infty$, так и при $t\to-\infty$).

Несложное доказательство основано на использовании свойств a—c функции Q.

Пусть $x(t)$ — решение уравнения (22) со следующими начальными данными: $x(\tau)=0$, $\dot{x}(\tau)=v>0$. Здесь возможны два случая. В первом из них функция x монотонно возрастает при $t\to+\infty$; это решение является либо гиперболическим, либо параболическим. Во втором случае x достигает максимума $X^+(v,\tau)$, а затем убывает до значения $x=0$. Введем функцию

$$h^+(v,\tau)=\begin{cases}\dfrac{\dot{x}^2(+\infty)}{2}+\displaystyle\int_0^\infty Q_0(x)\,dx \text{ — в первом случае,}\\ \displaystyle\int_0^{X^+} Q_0(x)\,dx \text{ — во втором случае.}\end{cases}$$

Здесь

$$Q_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Q(x,t)\,dt.$$

Аналогично определяется функция $h^-(v,\tau)$ (когда $t\to-\infty$). В стационарном случае $h^+(v)\equiv h^-(v)$. В дальнейшем анализе важную роль играет постоянная

$$J=\int_0^\infty Q_0(x)\,dx,$$

существующая согласно условию c. Если Q не зависит от времени, то J — полная энергия параболического движения. Можно показать, что $h^\pm$ — дифференцируемые функции.

Рассмотрим на плоскости Σ с полярными координатами v, $\tau \bmod 2\pi$ две кривые $\Pi^\pm=\{h^\pm=J\}$. Эти замкнутые дифференцируемые кривые ограничивают на Σ некоторые открытые области $R^\pm$, содержащие точку $v=0$.

Предложение 3. Если точка (v,τ) лежит вне (на) $\Pi^\pm$, то функция $x(t)$ монотонна и движение гиперболическое (параболическое) при $t\to\pm\infty$. Если же точка (v,τ) лежит внутри $R^\pm$, то $x(t)$ имеет хотя бы один нуль при $t\gtrless\tau$.

◁ Неравенство $h^+\geqslant J$ эквивалентно условию $X^\pm(v,\tau)=\infty$, что, в свою очередь, влечет равенство $h^+-J=\dot{x}^2(+\infty)/2$. Если $\dot{x}(+\infty)>0$ $(=0)$, то движение гиперболическое (параболическое). ▷

Согласно предложению 3, для точек (v,τ) из R^+ определено естественное отображение $S:(v,\tau)\mapsto(v',\tau')$, где τ' — ближайший к τ нуль функции $x(t)$, v' — скорость точки в момент τ' (в силу симметрии $x \to -x$ можно считать, что $v'>0$; см. рис. 62). Ясно, что $SR^+=R^-$ и $h^+ \circ S=h^-$.

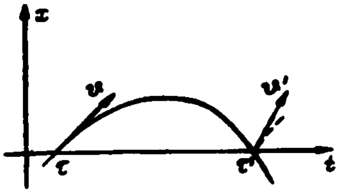


Рис. 62

Лемма 5. Отображение $S: R^+ \to R^-$ сохраняет площадь на Σ.

$\lhd$ Уравнение (24), разумеется, гамильтоново с функцией Гамильтона $H(y, x, t)=y^2/2+U(x, t)$, где $y=\dot{x}$. Пусть Γ — замкнутый контур в области R^+ и пусть $\Gamma'=S(\Gamma)$. В силу теоремы об интегральном инварианте

$$\oint_\Gamma y\,dx-H\,dt=\oint_{\Gamma} y\,dx-H\,dt \Leftrightarrow \oint_\Gamma v^2 d\tau=\oint_{\Gamma'} v^2 d\tau. \quad \rhd$$

Из этого утверждения выводится, в частности,

Предложение 4. Почти все решения, колеблющиеся в прошлом, будут колеблющимися в будущем, и наоборот.

$\lhd$ Пусть A_m — множество точек $(v, \tau)\in\Sigma$, при которых решение $x(t)$ имеет бесконечно много нулей при $t \geqslant \tau$ и ровно m нулей при $t<\tau$. Ясно, что $S(A_m)=A_{m+1}$, $\operatorname{mes}(A_m)=\operatorname{mes}(A_{m+1})$ (лемма 5) и $A_k \cap A_l=\varnothing$ при $k \neq l$. Нас интересует мера множества $A=\bigcup_{m \geqslant 0} A_m$. Если $\operatorname{mes} A_m \neq 0$, то $\operatorname{mes} A=\infty$. Но мера A конечна, поскольку это множество целиком лежит в круге радиуса

$$2\sqrt{\pi\int_0^\infty \Psi(x)\,dx}.$$

Действительно, умножая уравнение (24) на $\dot{x}$ и интегрируя в пределах от τ до t, будем иметь:

$$\frac{v^2}{2}-\frac{\dot{x}^2}{2}=-\int_t^\tau \dot{x}Q\,dt=\int_0^{x(t)} Q(x, t)\,dt.$$

Осталось воспользоваться неравенством $Q<2\pi\Psi(x)$ при $x>0$, вытекающим из условия е). $\rhd$

Поскольку области R^+ и R^- имеют непустое пересечение и их меры совпадают, то границы Π^+ и Π^- пересекаются по крайней мере в двух точках. Мы будем предполагать в дальнейшем, что Π^+ и Π^- пересекаются трансверсально. Например, в случае уравнения (25) при нулевом значении эксцентриситета $\Pi^+=\Pi^-=\{v=\sqrt{2}\}$. В силу симметрии задачи относительно момента соединения $\tau=0$, в общем случае кривые Π^+ и Π^- имеют общие точки на луче $\tau=0$. Можно показать, что по крайней мере при малых значениях $e>0$ кривые Π^+ и Π^- пересекаются в этих точках трансверсально.

В окрестности точки пересечения Π^- и Π^- функции $\xi=h^+-J$, и $\eta=h^--J$ можно принять за локальные координаты на Σ. Рассмотрим малый квадрат $B=\{|\xi|\leqslant\varepsilon,\ |\eta|\leqslant\varepsilon\}$. Можно показать, что при малых значениях ε множество $S(B\cap R^+)$ является «спиралью», наматывающейся на кривую Π^-, а множество $S^{-1}(B\cap R^-)$ является аналогичной спиралью, наматывающейся на Π^+ (см. рис. 63). Это является следствием гиперболичности

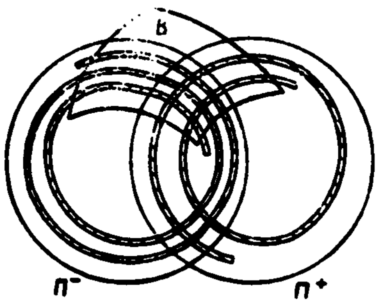


Рис. 63

отображения $S(S^{-1})$ в окрестности точки $\xi=\eta=0$: отображение S является сжимающим вдоль оси η и растягивающим вдоль оси ξ (подробности см. в [1]). Множество $S(B\cap R^+)\cap B\cap R^+$ состоит уже из бесконечного числа связных компонент. Каждая из них при отображении S переходит в узкую спираль, лежащую внутри спирали $S(B\cap R^+)$. Итерируя отображение S как в положительную, так и в отрицательную сторону, мы будем получать все более узкие полоски в квадрате B, трансверсально пересекающиеся друг с другом. В пределе мы получим канторово (совершенное нигде не плотное) множество $\Lambda\subset B$, инвариантное относительно всех целых степеней отображения S. При этом орбита точки $(v,\tau)\in\Lambda$ (т. е. множество $S^n(v,\tau)$, $n\in Z$) имеет очень запутанный вид, характерный для случайного блуждания по множеству Λ. Доказательство этих утверждений можно найти в работах В. М. Алексеева [1]. Мы поясним сказанное на некотором модельном примере.

3.2. Символическая динамика. Рассмотрим единичный квадрат $B=\{(x,y)\in R^2 : 0\leqslant x,\ y\leqslant 1\}$ и определим отображение квадрата B в себя по формулам:

$$\begin{aligned}&\text{если } 0\leqslant x\leqslant {}^1/_3, \text{ то } x\mapsto 3x,\ y\mapsto y/3,\\ &\text{если } {}^2/_3\leqslant x\leqslant 1, \text{ то } x\mapsto 3x-2,\ y\mapsto y/3+{}^2/_3.\end{aligned}\tag{24}$$

В полосе $1/3 < x < 2/3$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ отображение S не определено. Геометрический смысл преобразования $S: B \to B$ ясен из рис. 64.

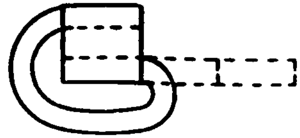


Рис. 64

Выясним, как устроены множества $S^n B \subset B$ при $n > 1$. Для того' чтобы получить SB, надо из квадрата B выбросить горизонтальную полосу $[0, 1] \times (1/3, 2/3)$. Если из оставшихся двух полос выбросим более узкие полосы $[0, 1] \times [1/9, 2/9]$ и $[0, 1] \times \times [7/9, 8/9]$, то получим множество $S^2 B$ и т. д. (см. рис. 65). Продолжая этот процесс неограниченно, мы придем к множеству $[0, 1] \times K_{[0,1]} \subset B$ (здесь $K_{[0,1]}$ — канторово множество на отрезке $[0, 1]$), на котором определены все отрицательные степени S. Рассуждая точно так же, мы получим, что на множестве $K_{[0,1]} \times [0, 1]$ определены все положительные степени отображения S. Следовательно, на прямом произведении канторовых множеств $\Lambda = K_{[0,1]} \times K_{[0,1]}$ определены все целые степени S.

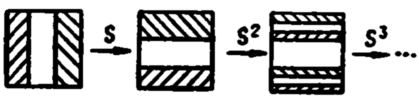


Рис. 65

Как же устроено отображение $S: \Lambda \to \Lambda$? Для того, чтобы ответить на этот вопрос, введем пространство Ω последовательностей $\omega = \{\omega_n\}$ нулей и единиц, где n пробегает все целые значения. Зададим в Ω топологию $\mathscr{T}$, определив следующим образом сходимость: последовательность $\omega^{(k)} \in \Omega$ сходится к $\omega \in \Omega$, если $\omega_n^{(k)} \to \omega_n$ при всех n.

Лемма 6. Пространство $(\Omega, \mathscr{T})$ гомеоморфно Λ.

$\lhd$ Действительно, последовательности $\{\omega_n\}$ можно поставить в соответствие два числа

$$x = 2 \sum_{s \geqslant 0} \omega_s / 3^{s+1}, \quad y = 2 \sum_{s > 0} \omega_{-s} / 3^s, \tag{25}$$

которые принадлежат, очевидно, $K_{[0,1]}$. Легко сообразить, что это соответствие — гомеоморфизм. $\rhd$

Пусть T — отображение Ω на себя, которое переводит $\omega = \{\omega_n\}$ в $\omega' = \{\omega_{n+1}\}$ (сдвиг всех индексов на единицу).

Теорема 12. Существует гомеоморфизм $f: \Lambda \to \Omega$ такой, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{S} & \Lambda \\ f\downarrow & T & \downarrow f \\ \Omega & \rightarrow & \Omega. \end{array}$$

Доказательство основано на простом сопоставлении формул (24) и (25).

Таким образом, каждой траектории $S^n(a)$, $a\in B$, $n\in Z$, целиком содержащейся в квадрате B, мы поставили в соответствие последовательность символов $\omega=\{\omega_n\}$, причем действию отображения S отвечает сдвиг всех символов на единицу влево. Этот *метод кодировки траекторий*, восходящий к работам Биркгофа, Морса (H. M. Morse), Хедлунда (G. Hedlund), составляет содержание *«символической динамики»*. Более подробно с ней можно познакомиться по работам [1], [33].

Из теоремы 12 вытекает ряд важных следствий.

Предложение 5. Отображение $S:\Lambda\to\Lambda$ обладает следующими свойствами:

1) любые две периодические траектории можно соединить двоякоасимптотической траекторией,

2) периодические точки плотны в Λ,

3) существуют траектории, всюду плотно заполняющие Λ.

◁ Действительно, периодической траектории соответствует точка $(a)=(\ldots a, a, a,\ldots)\in\Omega$, где a — конечный блок из нулей и единиц. Пусть точкам (a), $(b)\in\Omega$ отвечают две периодические траектории. Тогда последовательности $(\ldots, a, a, b, b,\ldots)$ отвечает, очевидно, искомая двоякоасимптотическая траектория. Далее, любому элементу $\omega\in\Omega$ можно поставить в соответствие последовательность $\omega^{(n)}=(a_n)\in\Omega$, где $a_n=\{\omega_{-n},\ldots,\omega_n\}$. Очевидно, что $\omega^{(n)}\to\omega$. Рассмотрим, наконец, точку $\omega^*\in\Omega$ такую, что в последовательности $\{\omega_n^*\}$, начиная с некоторого места, подряд записаны все конечные блоки из нулей и единиц. Легко понять, что замыкание орбиты $\bigcup T^n\omega^*$ $(n\in Z)$ совпадает с Ω. ▷

3.3. Отсутствие аналитических интегралов.

Теорема 13. В предположениях пункта 3.1 дифференциальное уравнение (24) не имеет первого интеграла, аналитического по x, $\dot{x}$, t и 2π-периодического по t.

Если такой интеграл существует, то отображение $S:R^+\to R^-$ из п. 3.1 имеет непостоянную аналитическую инвариантную функцию $f(v,\tau)$. Можно показать, что ограничение S на канторово инвариантное множество Λ обладает свойствами, перечисленными в предложении 5 (см. [1]). В частности, в силу непрерывности, функция $f=\text{const}$ на множестве Λ. Из способа построения совершенного множества Λ вытекает, что для любой точки $(v_0, \tau_0)\in\Omega$ существуют две последовательности точек из Λ, сходящиеся к (v_0,τ_0) по двум независимым направлениям. Поэтому производные всех порядков по v и τ в точке (v_0, τ_0) равны нулю. Для завершения доказательства осталось воспользоваться аналитичностью f. ▷

В заключение сделаем несколько замечаний.

1. Поскольку Λ нигде не плотно, то из этого рассуждения нельзя вывести отсутствие гладких первых интегралов.

2. Символическая динамика в ограниченной (и даже неограниченной) задаче трех тел из п. 3.1 построена в работах В. М. Алексеева [1]. С ее помощью В. М. Алексеев получил все логически возможные комбинации финальных типов движений по классификации Шази.

3. В окрестности гомоклинических периодических траекторий с трансверсальными асимптотическими поверхностями справедливо утверждение, аналогичное теореме 12. Строгое доказательство этого утверждения, восходящего к Биркгофу (1935), принадлежит Смейлу (1965) и Л. П. Шильникову (1967) (см. [33]). Отметим, что доказательство отсутствия аналитических интегралов (теорема 10) не зависит от свойства трансверсальности. Однако наличие нетрансверсальных асимптотических поверхностей может сильно влиять на качественное поведение траекторий (см. [33]).

4. Можно показать, что периодические траектории, лежащие в Λ, являются гиперболическими и, следовательно, невырожденными. С другой стороны, они плотны в Λ, а множество Λ является ключевым в B. Поэтому отсутствие аналитических интегралов можно установить методом Пуанкаре (см. п. 1.2).

§ 4. Неинтегрируемость в окрестности положения равновесия (метод К. Зигеля)

Еще один метод доказательства неинтегрируемости основан на оценках снизу коэффициентов степенных рядов для формальных интегралов. Причиной расходимости здесь оказываются аномально *малые знаменатели*, то есть в конечном счете влияние резонансов, близких к изучаемому положению равновесия.

Рассмотрим каноническую систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_k = \frac{\partial H}{\partial y_k}, \quad \dot{y}_k = -\frac{\partial H}{\partial x_k} \quad (1 \leqslant k \leqslant n) \tag{26}$$

и предположим, что H — аналитическая функция в окрестности точки $x=y=0$, причем $H(0)=0$ и $dH(0)=0$. Пусть $H=\sum_{s\geqslant 2} H_s$, где H_s — однородный полином от x и y степени s.

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n}$ — собственные значения линеаризованной канонической системы с гамильтонианом H_2. Можно считать, что $\lambda_{n+k}=-\lambda_k$ $(1\leqslant k\leqslant n)$. Будем рассматривать случай, когда числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ чисто мнимы и независимы над полем рациональных чисел.

В этом параграфе мы исследуем полную интегрируемость уравнений (26) в окрестности положения равновесия $x=y=0$ и сходимость нормализующего преобразования Биркгофа.

Рассмотрим множество $\mathscr{H}$ всех степенных рядов

$$H=\Sigma h_{ks}x^k y^s,\quad k=(k_1, \ldots, k_n),\quad s=(s_1, \ldots, s_n),$$

сходящихся в некоторой окрестности точки $x=y=0$. Введем в $\mathscr{H}$ следующую топологию $\mathscr{T}$: окрестностью степенного ряда H^* с коэффициентами h_{ks}^* мы будем называть множество степенных рядов с коэффициентами h_{ks}, удовлетворяющими неравенствам $|h_{ks}-h_{ks}^*|<\varepsilon_{ks}$, где ε_{ks} — произвольная последовательность положительных чисел.

Теорема 14. В любой окрестности любой точки $H^*\in\mathscr{H}$ найдется гамильтониан H такой, что соответствующая каноническая система (26) не имеет независимого от функции H интеграла, аналитического в окрестности равновесия $x=y=0$.

Таким образом, неинтегрируемые системы всюду плотны в $\mathscr{H}$. В частности, всюду плотны гамильтоновы системы, для которых расходится преобразование Биркгофа. Идея доказательства теоремы состоит в следующем. Пусть

$$F=\Sigma f_{ks}x^k y^s \tag{27}$$

формальный интеграл уравнений (26), независимый с функцией H. Его существование вытекает из теоремы Биркгофа (гл. 4, п. 1.3). Можно показать, что в любой окрестности точки $H^*\in\mathscr{H}$ найдется гамильтониан H, которому отвечает формальный ряд (27), причем бесконечно много его коэффициентов удовлетворяют оценке $|f_{ks}|\geqslant m^{m^2}$, где $m=|k|+|s|$. Это достигается выбором собственных значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, достаточно быстро приближающихся рациональными числами. С другой стороны, если уравнения (26) имеют аналитический интеграл, независимый от H, то справедлива оценка $|f_{ks}|<cm^m$, $c=\text{const}$. Все детали доказательства можно найти в работе [35]:

Относительно расходимости преобразования Биркгофа справедлива более сильная.

Теорема 15 ([36]). Функции Гамильтона H со сходящимся преобразованием Биркгофа образуют в $\mathscr{H}$ подмножество первой категории Бэра[1)] в топологии $\mathscr{T}$.

Более точно, Зигель (C. L. Siegel) доказал существование бесконечного счетного множества аналитически независимых

[1)] То есть его можно представить в виде конечного или счетного объединения нигде не плотных множеств.

степенных рядов $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ от бесконечного числа переменных h_{ks}, абсолютно сходящихся при $|h_{ks}|<\varepsilon$ (для всех k, s) таких, что если точка $H\in\mathscr{H}$ сходящимся преобразованием Биркгофа приводится к нормальной форме, то в этой точке почти все Φ_s (кроме, быть может, конечного числа) обращаются в нуль. Так как функции Φ_s аналитичны, их нули нигде не плотны в $\mathscr{H}$. Следовательно, множество точек из $\mathscr{H}$, удовлетворяющих хотя бы одному уравнению $\Phi_s=0$, имеет первую категорию в смысле Бэра. Если мы попытаемся исследовать сходимость преобразования Биркгофа в какой-нибудь конкретной гамильтоновой системе, то придется проверить выполнение бесконечного числа условий. Для этого не известно никакого конечного метода, хотя все коэффициенты рядов Φ_s можно явно вычислить. Доказательство теоремы основано на тщательном анализе изолированных долгопериодических решений в окрестности положения равновесия. Так что в идейном отношении оно также восходит к более ранним исследованиям Пуанкаре (см. п. 1.2).

Замечание. Введем в множестве $\mathscr{H}$ новую топологию $\mathscr{T}'$, рассматривая в качестве окрестностей ряда с коэффициентами h_{ks}^* все сходящиеся степенные ряды с коэффициентами h_{ks}, удовлетворяющими неравенствам $|h_{ks}-h_{ks}^*|<\varepsilon$ при $|k|+|s|\leqslant N$ для некоторых $\varepsilon>0$ и $N\geqslant 3$. Можно показать, что относительно топологии $\mathscr{T}'$ множество гамильтонианов со сходящимися преобразованиями Биркгофа всюду плотно в $\mathscr{H}$. Действительно, если в формальных степенных рядах, задающих преобразование Биркгофа, мы отбросим члены степени больше N, а затем подправим коэффициенты ряда данного гамильтониана при старших членах, то получим сходящееся каноническое преобразование, приводящее модифицированный таким способом гамильтониан к нормальной форме. Отметим, что топология $\mathscr{T}'$, конечно, много слабее топологии $\mathscr{T}$.

С помощью метода Зигеля можно доказать всюду плотность неинтегрируемых систем в некоторых подпространствах $\mathscr{H}$. В качестве примера рассмотрим уравнение

$$\ddot{x}=-\frac{\partial U}{\partial x}, \quad x\in R^n, \tag{28}$$

которое описывает движение материальной точки в силовом поле с потенциалом $U(x)$. Это уравнение, разумеется, можно записать в гамильтоновой форме:

$$\dot{x}=H_y', \quad \dot{y}=-H_x'; \quad H=y^2/2+U(x).$$

Пусть $U(0)=0$, $dU(0)=0$. Тогда точка $x=0$ будет положением равновесия. Положим $U=\sum\limits_{s\geqslant 2} U_s$ и пусть $U_2=\sum \omega_k^2 x_k^2/2$. Будем считать частоты малых колебаний $\omega_1, \ldots, \omega_n$ рационально независимыми.

Введем пространство $\mathcal{U}$ степенных рядов

$$\sum_{|k|\geq 2} u_k x^k,$$

сходящихся в некоторой окрестности точки $x=0$. Снабдим $\mathcal{U}$ топологией $\mathcal{T}$, указанной выше для пространства $\mathcal{H}$.

Теорема 16. В пространстве $\mathcal{U}$ с топологией $\mathcal{T}$ всюду плотны точки, для которых уравнения (28) не имеют интеграла $F(\dot{x}, x)$, аналитического в окрестности точки $\dot{x}=x=0$ и независимого от интеграла энергии $E=\dot{x}^2/2+U(x)$.

По-видимому, точки $U\in\mathcal{U}$, для которых преобразование Биркгофа к нормальной форме сходится, образуют в $\mathcal{U}$ подмножество первой категории. Доказательство теоремы 16 содержится в работе [13].

В связи с анализом нормальных форм полезно иметь в виду следующее важное обстоятельство: расходящееся преобразование Биркгофа может сходиться на некотором аналитическом инвариантном многообразии Λ, содержащем положение равновесия. Возникающая при этом динамическая система на Λ будет интегрируемой. Классический пример такой ситуации доставляет нам

Теорема 17 (А. М. Ляпунов). Если при всех $s>1$ отношение λ_s/λ_1 не является целым числом, то существует обратимое аналитическое каноническое преобразование $x, y\mapsto\xi, \eta$, которое приводит гамильтониан $H(x, y)$ к виду

$$\Phi(\rho)+O(|\zeta|^2),$$

где Φ — функция одной переменной $\rho=\xi_1^2+\eta_1^2$, а $\zeta=(\xi_2, \ldots, \xi_n, \eta_2, \ldots, \eta_n)$.

Таким образом, на инвариантном многообразии $\Lambda=\{\zeta=0\}$ гамильтонова система (28) приводится к системе с одной степенью свободы:

$$\dot{\xi}_1=2\Phi_\rho'\eta_1, \quad \dot{\eta}_1=-2\Phi_\rho'\xi_1.$$

Следовательно, $\rho=\mathrm{const}$ и $\xi_1+i\eta_1=c\exp(-2i\Phi_\rho')t$. Фазовая плоскость $R^2=\{\xi_1, \eta_1\}$ расслоена на инвариантные концентрические окружности $\xi_1^2+\eta_1^2=\rho$, по которым происходит равномерное движение с частотой Φ_ρ', зависящей от ρ, причем $\Phi_\rho'(0)=\lambda_1/2$.

Аналогичное утверждение справедливо и в том случае, когда среди характеристических чисел λ_s есть вещественная пара λ_1, $-\lambda_1$. В этом случае $\rho=\xi_1\eta_1$ (подробности см. в [37]).

Замечание. Как показал Зигель, условие $\lambda_s/\lambda_1\notin Z$ $(s>1)$ в теореме Ляпунова отбросить нельзя. Обобщения теоремы на случай, когда это условие не выполняется, см. в работах Роэля (J. Roels) 1971 г.

Все сказанное выше с необходимыми изменениями можно распространить, например, на случай нормальных форм гамильтоновых систем в окрестности периодических траекторий. Обстоятельный анализ сходимости нормализующих преобразований (причем не только уравнений Гамильтона) можно найти в книге А. Д. Брюно [61].

§ 5. Ветвление решений и отсутствие однозначных интегралов

В большинстве проинтегрированных задач гамильтоновой механики известные первые интегралы продолжаются в комплексную область изменения канонических переменных до некоторых голоморфных или мероморфных функций. В этом параграфе будет показано, что ветвление решений гамильтоновых систем в плоскости комплексного времени в общем случае препятствует появлению новых однозначных первых интегралов.

5.1. Ветвление решений — препятствие к интегрируемости. Пусть $D_{C,\delta}=\{I\in C^n : \mathrm{Re}\, I\in D\subset R^n \ |\mathrm{Im}\, I|<\delta\}$, $T_C^n=C^n/2\pi Z^n$ — комплексный тор (над R это $T^n\times R^n$) с комплексно-угловыми координатами $\varphi_1,\ldots,\varphi_n \bmod 2\pi$, E — некоторая окрестность нуля в C. Пусть $H: D_{C,\delta}\times T_C^n\times E\to C$ — голоморфная функция, которая при действительных значениях I, φ, ε принимает действительные значения, причем $H(I, \varphi, 0)=H_0(I)$.

Прямое произведение $D_{C,\delta}\times T_C^n$ снабжено простейшей симплектической структурой, в которой уравнения Гамильтона с гамильтонианом H имеют канонический вид:

$$\frac{dI}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial\varphi},\quad \frac{d\varphi}{dt}=\frac{\partial H}{\partial I};\quad H=H_0+\varepsilon H_1+\ldots. \tag{29}$$

Все решения системы с функцией Гамильтона H_0 однозначны на комплексной плоскости времени $t\in C$:

$$I=I^0,\quad \varphi=\varphi^0+\omega(I^0)t.$$

При $\varepsilon\neq 0$ решения «возмущенных» уравнений (29), вообще говоря, уже неоднозначны. Пусть γ — некоторый замкнутый контур на комплексной плоскости времени. Согласно известной *теореме Пуанкаре*, решения уравнений (29) можно разложить в степенные ряды

$$I=I^0+\varepsilon I^1(t)+\ldots,\quad \varphi=\varphi^0+\omega t+\varepsilon\varphi^1(t)+\ldots,$$
$$I^1(0)=\ldots=\varphi^1(0)=\ldots=0, \tag{30}$$

сходящиеся при достаточно малых значениях параметра ε, если $t\in\gamma$.

Будем говорить, что аналитическая вектор-функция $f(t)$, $t\in C$ неоднозначна вдоль контура γ, если она испытывает скачок $\Delta f=\xi\neq 0$ при обходе γ. Если, например, функция $I^1(t, I^0, \varphi^0)$

неоднозначна вдоль γ, то при малых значениях параметра ε возмущенное решение (30) тоже неоднозначно вдоль контура γ. Скачок ΔI^1 равен, очевидно,

$$\xi = \int_\gamma \Phi(t)\,dt, \quad \Phi(t) = -\left.\frac{\partial H_1}{\partial \varphi}\right|_{I^0, \varphi^0 + \omega(I^0)t}.$$

Если при фиксированных значениях I функция H_1 голоморфна в T^n_C, то, конечно, $\xi = 0$. Однако в практически важных случаях эта функция имеет особенности (скажем, полюсы). Поэтому мы будем считать функцию голоморфной лишь в области $D_{C,\delta} \times \Omega \times E$, где Ω — связная область в $T_C{}^n$, содержащая действительный тор $T_R{}^n$ и замкнутый контур Γ, который является образом контура γ при отображении $\varphi = \varphi^0 + \omega(I^0)t$, $t \in \gamma$.

Зафиксируем начальные данные I^0, φ^0 и будем непрерывно деформировать контур γ так, что при этом контур Γ не пересечет ни одной особой точки функции H. Тогда, согласно теореме Коши, функция $I^1(t)$ при обходе деформированного контура будет изменяться снова на ту же величину $\xi \neq 0$. С другой стороны, так как решения (30) непрерывны по начальным данным, то неоднозначность функции $I^1(t, I^0, \varphi^0)$ вдоль контура γ будет иметь место и для всех близких значений I^0, φ^0.

Теорема 18. Пусть выполнены следующие условия:

1) $\det|\partial^2 H_0/\partial I^2| \not\equiv 0$ в $D_{C,\delta}$,

2) для некоторых начальных данных I^0, φ^0 функция I^1 неоднозначна вдоль замкнутого контура $\gamma \subset C\{t\}$.

Тогда уравнения (29) не имеют полного набора независимых формальных[1)] интегралов

$$F_s = \sum_{i=0}^{\infty} F^s_i(I, \varphi)\varepsilon^i \quad (1 \leqslant s \leqslant n),$$

коэффициенты которых — однозначные голоморфные функции в прямом произведении $V \times \Omega \subset D_{C,\delta} \times T^n_C$, где V — окрестность точки I^0 в $D_{C,\delta}$ ([79], [12]).

$\lhd$ Укажем основные моменты доказательства теоремы. Как всегда, покажем сначала, что функции $F^s_0(I, \varphi)$ не зависят от φ. Пусть $(I, \varphi) \in D \times T^n_R$ и $F^s_0 = \Phi^s_0 + i\Psi^s_0$. Тогда Φ^s_0, Ψ^s_0 — первые интегралы невырожденной невозмущенной системы. Согласно лемме 1, они не зависят от $\varphi \in T_R{}^n$. Когда $\varphi \in \Omega$, постоянство функций $F_0{}^s$ вытекает из связности области Ω и единственности аналитического продолжения.

Затем докажем, что функции $F^1_0(I), \ldots, F^1_n(I)$ зависимы в

---

1) Мы снова считаем, что формальный ряд $F = \Sigma F_i \varepsilon^i$ — интеграл канонических уравнений (1.1), если формально $\{H, F\} \equiv 0$. Легко понять, что в этом случае композиция степенных рядов (1.2) и $\Sigma F_i \varepsilon^i$ будет степенным рядом с постоянными коэффициентами.

области $V \subset D_{C,\delta}$. Действительно, так как $F_s(I, \varphi, \varepsilon)$ — интеграл канонической системы (29), то эта функция постоянна на решениях (30). Следовательно, ее значения в момент времени $t \in \gamma$ и после обхода контура γ совпадают:

$$F_0^s(I^0+\varepsilon I^1(\tau)+\ldots)+\varepsilon F_1^s(I^0+\varepsilon I^1(\tau)+\ldots, \varphi^0+\omega\tau+$$
$$+\varepsilon\varphi^1(\tau)+\ldots)+\ldots \equiv F_0^s(I^0+\varepsilon(I^1(\tau)+\xi(I^0))+\ldots)+$$
$$+\varepsilon F_1^s(I^0+\ldots, \varphi^0+\omega\tau+\ldots)+\ldots$$

Разлагая это тождество в степенные ряды по ε и приравнивая коэффициенты при первой степени ε, получим

$$\left\langle \frac{\partial F_0^s}{\partial I}, \xi \right\rangle = 0, \quad 1 \leqslant s \leqslant n.$$

Так как скачок ξ отличен от нуля в окрестности точки I^0, то якобиан

$$\frac{\partial (F_0^1, \ldots, F_0^n)}{\partial (I_1, \ldots, I_n)} \equiv 0$$

с целой области V, содержащей точку I^0.

С другой стороны, применяя метод Пуанкаре из § 1, можно доказать существование таких независимых интегралов

$$\Phi_s(I, \varphi, \varepsilon) = \sum_{i \geqslant 0} \Phi_i^s(I, \varphi)\varepsilon^i$$

с коэффициентами, голоморфными в области $W \times \Omega$ (W — малая подобласть V), что функции $\Phi_0^1, \ldots, \Phi_0^n$ независимы. ▷

Пример 1. Вновь рассмотрим задачу о быстром вращении тяжелого несимметричного твердого тела вокруг неподвижной точки. Функция Гамильтона H в этой задаче есть $H_0(I)+$ $+\varepsilon H_1(I, \varphi)$, $I \in \Delta \subset R^2\{I\}$, $\varphi \in T^2$ (см. п. 1.3). Возмущающую функцию H_1 можно представить в виде суммы

$$h_1(I, \varphi_1)e^{i\varphi_2}+h_2(I, \varphi_1)e^{-i\varphi_2}+h_3(I, \varphi_1),$$

причем при фиксированных значениях $I \in \Delta$ функции $h_s(I, z)$ $(1 \leqslant s \leqslant 3)$ — эллиптические (двоякопериодические мероморфные функции от $z \in C$). Следовательно, гамильтониан H продолжается до однозначной мероморфной функции в T_C^2.

Пусть $\varphi^0=0$, а I^0 принадлежит множеству Пуанкаре возмущенной задачи. Рассмотрим на комплексной плоскости $t \in C$ замкнутый контур γ — границу прямоугольника $ABCD$ (см. рис. 66). Здесь T и iT' — соответственно действительный и чисто мнимый периоды эллиптических функций $f_s(I^0, \omega_1 z)$, $\omega_1 =$ $=\partial H_0/\partial I_1$. Число τ выбрано так, чтобы эти мероморфные функции не имели полюсов на γ. Можно показать, что функция $I_2^1(t, I^0, 0)$ неоднозначна вдоль контура γ [79]. Следовательно, решения возмущенной задачи ветвятся в плоскости комплексного времени и это обстоятельство препятствует появлению нового однозначного интеграла. △

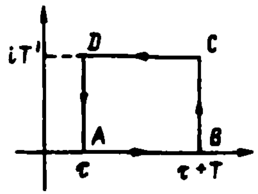


Рис. 66

Используя ветвление решений, можно установить отсутствие однозначных аналитических интегралов при малых, но фиксированных значениях параметра $\varepsilon \neq 0$ (см. [72]).

5.2. Группы монодромии гамильтоновых систем с однозначными интегралами. Наличие неоднозначных решений можно установить не только с помощью разложений в ряды по степеням малого параметра. Для этой цели А. М. Ляпунов в 1894 г. предложил другой метод, основанный на анализе уравнений в вариациях для известных однозначных решений. Мы уже применяли метод Ляпунова при исследовании аналитических особенностей кратных столкновений в задаче многих тел (см. гл. 2, п. 2.4). В этом пункте мы сперва займемся исследованием линейных гамильтоновых уравнений с голоморфными коэффициентами.

Пусть $H=\langle z, A(t)z\rangle/2$ — квадратичная форма относительно $z\in C^{2n}$, $A(t)$ — заданная $2n\times 2n$ матрица, коэффициенты которой — голоморфные функции, определенные на некоторой римановой поверхности X. Если, например, элементы матрицы $A(t)$ — мероморфные на C функции, то X — это комплексная плоскость с некоторым количеством выколотых точек (полюсов). Линейные уравнения Гамильтона с функцией H будут иметь вид

$$\dot{z}=IdH=IA(t)z. \tag{31}$$

Локально при заданном начальном условии $z(t_0)=z_0$ всегда существует однозначно определенное голоморфное решение. Его можно продолжать вдоль любой кривой в X, однако это продолжение в общем случае уже не будет однозначной функцией на X. Ветвление решений линейной системы (31) описывается ее группой монодромии G: каждому элементу σ фундаментальной группы $\pi_1(X)$ соответствует $2n\times 2n$ матрица T_σ такая, что после обхода вдоль замкнутых путей из гомотопического класса σ значение функции $z(t)$ становится равным $T_\sigma z(t)$. Если τ — другой элемент группы $\pi_1(X)$, то $T_{\tau\sigma}=T_\tau T_\sigma$. Соответствие $\sigma\mapsto T_\sigma$ определяет тем самым гомоморфизм групп $\pi_1(X)\to G$.

Нас будет интересовать задача о наличии у уравнения (31) голоморфных интегралов $F: C^{2n}\times X\to C$. Так как любой интеграл $F(z, t)$ постоянен на решениях уравнений (34), то при каждом $t_0\in X$ функция $F(z, t_0)$ инвариантна относительно действия группы монодромии G. Это свойство налагает жесткие ограничения на вид первых интегралов: если группа G достаточно «богата», то инвариантными функциями (интегралами) являются лишь константы.

Поскольку система (31) гамильтонова, то преобразования группы монодромии являются симплектическими. Задача об интегралах групп симплектических преобразований изучена С. Л. Зиглиным в работе [73]. Мы кратко изложим его результаты.

Согласно предложению 1, собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n}$ симплектического преобразования $g: C^{2n}\to C^{2n}$ разбиваются на пары $\lambda_1=\lambda_{n+1}^{-1}, \ldots, \lambda_n=\lambda_{2n}^{-1}$. Назовем преобразование $g\in G$ нерезонансным, если из равенства $\lambda_1^{m_1}\ldots\lambda_n^{m_n}=1$ с целыми $m_1, \ldots$ $\ldots, m_n$ следует, что все $m_s=0$. При $n=1$ это условие означает, что λ не является корнем из 1. Пусть T — матрица нерезонансного симплектического отображения g. Так как ни одно из собственных значений матрицы T не равно 1, то уравнение $Tz=z$ имеет тривиальное решение $z=0$.

Удобно перейти к *симплектическому базису* отображения g: если $z=(x, y)$, $x=(x_1, \ldots, x_n)$, $y=(y_1, \ldots, y_n)$ — координаты в этом базисе, то $g:(x, y)\mapsto(\lambda x, \lambda^{-1}y)$. Симплектический базис существует, если все $\lambda_s\neq 1$ $(1\leqslant s\leqslant n)$ (это утверждение доказано, например, в книге [37]).

Пусть $F(z)=\sum\limits_{s\geqslant 1} F_s(z)$ — интеграл отображения g. Тогда все днородные формы F_s тоже будут интегралами. Пусть $F_s(x, y)=\sum\limits_{k+l=s} f_{kl}x^ky^l$. Тогда, очевидно,

$$\Sigma f_{kl}x^ky^l=\Sigma\lambda^{k-l}f_{kl}x^ky^l.$$

Если g нерезонансно, то s четно и $f_{kl}=0$ при $k\neq l$.

Теорема 19 [73]. Пусть $g\in G$ нерезонансно. Если гамильтонова система имеет n независимых голоморфных интегралов $F: C^{2n}\times X\to C$, то любое преобразование $g'\in G$ имеет ту же неподвижную точку, что и g, и переводит собственные направления g в собственные направления. Если при этом никакие $k\geqslant 2$ собственных значений преобразования g' не образуют на комплексной плоскости правильного многоугольника с центром в нуле, то g' коммутирует с g.

Последнее условие заведомо выполняется, если g' тоже нерезонансно.

Мы сейчас докажем теорему 18 для простого, но важного для приложений случая, когда $n=1$. Пусть собственное значение отображения g не является корнем из единицы и пусть $(x, y)=z$ — симплектический базис для g. Собственные направления g — две прямые $x=0$ и $y=0$. Выше было показано, что любой однородный интеграл g имеет вид $c(xy)^s$, $s \in N$. Пусть g' — другое отображение из группы G. Поскольку функция $(xy)^s$ инвариантна относительно действия g', то множество $xy=0$ остается неподвижным при отображении g'. Так как g' — невырожденное линейное отображение, то точка $x=y=0$ неподвижна и отображение g' либо сохраняет собственные направления отображения g, либо переставляет их. В первом случае g', очевидно, коммутирует с g, а во втором случае оно имеет вид

$$x \mapsto \alpha y, \quad y \mapsto \beta x.$$

Так как отображение g' симплектическое, его матрица

$$S=\begin{Vmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{Vmatrix}$$

удовлетворяет условию

$$S^* I S = I,$$

откуда $\alpha\beta = -1$. Но в этом случае собственные значения матрицы S равны $\pm i$. Точки $\pm i$ образуют как раз тот исключительный правильный многоугольник, о котором идет речь в заключении теоремы. Что и требовалось доказать.

Рассмотрим случай, когда элементы матрицы $A(t)$ — однозначные двоякопериодические мероморфные функции времени $t \in C$, имеющие внутри параллелограмма периодов только один полюс. Можно считать, что $A(t)$ — мероморфная функция на комплексном торе X, полученном из комплексной плоскости C факторизацией по решетке периодов. Рассмотрим два симплектических отображения g и g' за периоды матрицы $A(t)$. Предположим, что их собственные значения удовлетворяют условиям теоремы 18. Тогда для того чтобы уравнение (31) имело n независимых аналитических интегралов, необходимо, чтобы g и g' коммутировали. Следовательно, обходу особой точки (элементу $gg'g^{-1}g'^{-1} \in G$) будет отвечать тождественное отображение пространства C^{2n}.

Пусть нелинейная гамильтонова система

$$\dot{z} = IdH, \quad z \in C^{2n}, \tag{32}$$

имеет частное решение $z_0(t)$, однозначное на его римановой поверхности X. Положим $u=z-z_0(t)$. Тогда уравнение (32) можно переписать в следующем виде:

$$\dot{u} = IH''(z_0(t))\,u + \ldots . \tag{33}$$

Линейное неавтономное уравнение

$$\dot{u} = IH''(t)u$$

будет уравнением в вариациях для решения $z_0(t)$. Оно разумеется, будет гамильтоновым с функцией Гамильтона

$$\frac{1}{2}\langle u, H''(t)u\rangle .$$

Интегралу $H(z)$ автономной системы (32) соответствует линейный интеграл уравнений в вариациях:

$$\langle H'(z_0(t)), u\rangle .$$

С его помощью можно, например, понизить число степеней свободы системы (33) на единицу.

Предположим, что нелинейное уравнение (32) имеет несколько независимых голоморфных интегралов $F_s(z)$ $(1 \leqslant s \leqslant m)$. Тогда уравнение (33) также будет иметь первые интегралы. Ими будут однородные формы разложений функций F_s в ряды по степеням u:

$$\langle F_s'(z_0(t)), u\rangle + \dots .$$

Эти формы — голоморфные функции в прямом произведении $C^{2n} \times X$. Справедлива

Лемма 7. Если уравнение (32) имеет m независимых интегралов, то уравнение в вариациях (33) имеет m независимых полиномиальных интегралов ([73]).

Таким образом, задача о полной интегрируемости гамильтоновых систем в комплексной области сводится к исследованию интегрируемости линейных канонических систем.

Следуя А. М. Ляпунову, С. Л. Зиглин применил эти результаты к задаче о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Оказалось, что дополнительный голоморфный (и даже мероморфный) интеграл существует только в трех классических случаях Эйлера, Лагранжа и Ковалевской. Если зафиксировать нулевое значение постоянной площадей, то к этим случаям надо добавить еще случай Горячева—Чаплыгина.

С помощью этого метода можно доказать неинтегрируемость гамильтоновой системы Хэнона — Хейлеса (пример 2, п. 1.3 гл. 5) не только в комплексной, но и в действительной области. Аналогичный результат справедлив для однородной двухкомпонентной модели *уравнений Янга—Миллса*, описываемой гамильтоновой системой с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + q_1^2 q_2^2 .$$

Более трудный вопрос о существовании дополнительного вещественного аналитического интеграла при произвольном распределении масс в твердом теле остается пока открытым.

Замечание. В последнее время вновь возродился интерес к интегрированию дифференциальных уравнений механики в ϑ-функциях (так называемая «алгебраическая интегрируемость»). Отыскание необходимых условий алгебраической интегрируемости следует методу С. В. Ковалевской, примененному ею в 1888 году в динамике твердого тела. С современным состоянием этих вопросов можно познакомиться по работам [65, 136, 137].

§ 6. Топологические и геометрические препятствия к полной интегрируемости натуральных систем с двумя степенями свободы

Согласно результатам вариационного исчисления, любой одномерный замкнутый цикл на многообразии положений можно реализовать в виде траектории периодического решения достаточно большой фиксированной энергии. С другой стороны, почти все периодические решения вполне интегрируемой системы с n степенями свободы расположены на n-мерных торах, объединенных в гладкие семейства. Таким образом, достаточное сложное топологическое строение многообразия положений натуральной системы является препятствием к ее полной интегрируемости. Эту идею удается полностью реализовать в случае двух степеней свободы.

6.1. Топология пространства положений интегрируемой системы. Пусть M — связная, компактная, ориентируемая, аналитическая поверхность, которая служит пространством положений натуральной механической системы с двумя степенями свободы. Хорошо известно топологическое строение таких поверхностей — это сферы с некоторым числом $\varkappa$ приклеенных ручек. Число $\varkappa$ — топологический инвариант — называется ее родом.

Пространство состояний — расслоенное пространство TM — имеет естественную структуру четырехмерного аналитического многообразия. Будем считать, что лагранжиан $L=T+V$ является аналитической вещественной функцией на TM. На траекториях уравнения движения $[L]=0$ полная энергия $H=T-V$, разумеется, постоянна.

Теорема 19. Если род M больше 1 (т. е. M негомеоморфна сфере S^2 и тору T^2), то уравнение движения не имеет первого интеграла, аналитического на TM и независимого от интеграла энергии.

Хорошо известны многочисленные примеры интегрируемых систем с пространством положений S^2 или T^2. В бесконечно дифференцируемом случае теорема 19 не справедлива: для любой гладкой поверхности M можно указать «натуральный» лагранжиан L такой, что уравнение Лагранжа $[L]=0$ на TM имеет гладкий интеграл, независимый (точнее, не всюду зависимый) с функцией H (см. [13]).

Теорема 19 является следствием более сильного утверждения, устанавливающего неинтегрируемость уравнения движения при фиксированных достаточно больших значениях полной энергии. Точная формулировка состоит в следующем. При всех $h>h^*=\max_M(-V)$ множество уровня полной энергии $M_h=\{H=h\}$ является трехмерным инвариантным аналитическим многообразием, на котором естественно возникает аналитическое дифференциальное уравнение. Это уравнение будем называть приведенным. Справедлива

Теорема 20. Если род M больше 1, то при всех $h>h^*$ приведенное уравнение на M_h не имеет первого интеграла, аналитического на всем M_h (см. [13]).

Замечание. Теоремы 19—20 справедливы и в неориентируемом случае, если дополнительно исключить проективную плоскость RP^2 и бутылку Клейна K. Действительно, стандартное регулярное двулистное накрытие $N\to M$, где N — ориентируемая поверхность, индуцирует натуральную систему на N, которая обладает дополнительным интегралом, если новый интеграл есть у системы на M. Остается заметить, что род поверхности N больше 1, если M негомеоморфна RP^2 и K. Δ

Пусть k — гауссова кривизна римановой метрики Мопертюи $(ds)^2=2(h+V)T(dt)^2$ на M. Согласно формуле Гаусса—Бонне (P. O. Bonnet):

$$\int_M k d\sigma = 2\pi\chi(M),$$

где $\chi(M)$ — эйлерова характеристика компактной поверхности M. Если род M больше 1, то $\chi(M)<0$ и, следовательно, гауссова кривизна в среднем отрицательна. Если кривизна отрицательна всюду, то динамическая система на M_h будет *У-системой* и, в частности, эргодической на M_h (см. [3]). Эти заключения справедливы и в многомерном случае (нужно только потребовать отрицательность кривизны по всем двумерным направлениям). При этом дифференциальное уравнение на M_h не имеет даже непрерывного интеграла, поскольку почти все траектории всюду плотны на M_h. Конечно, кривизна, отрицательная в среднем, далеко не всегда будет отрицательной всюду.

Укажем основные моменты доказательства теоремы 20. Согласно принципу наименьшего действия, траектории на M с полной энергией h являются геодезическими линиями римановой метрики Мопертюи ds. Зафиксируем точку $x\in M$ и рассмотрим касательные векторы $v\in T_xM$, удовлетворяющие равенству $H(v, x)=h$. Вектор v назовем критическим, если значение первого интеграла $f:M_h\to R$ в точке (v, x) является критическим. Покажем сначала, что различных критических скоростей бесконечно много. Если это не так, то окружность $S_x=\{v\in T_xM: H(v, x)=h\}$ разбивается на конечное число интервалов Δ_i, таких, что все $v \in \Delta_i$ — некритические. По теореме 3 гл. главы 5 каждому вектору $v \in \Delta_i$ соответствует единственный тор T_v^2, на котором лежит движение $z(t)$ с начальными данными $z(0)=x$, $\dot{z}(0)=v$. Объединение $D_i = \bigcup\limits_{v \in \Delta_i} T_v^2$ диффеоморфно, очевидно, $\Delta_i \times T^2$. Пусть $\pi: TM \to M$ — естественная проекция; положим $X_i = \pi(D_i)$. Утверждается, что группы гомологий $H_1(X_i) \subset H_1(M)$ накрывают «почти всю» группу $H_1(M)$, за исключением, быть может, элементов из $H_1(M)$, принадлежащих некоторому конечному множеству одномерных подгрупп. Это можно вывести из одной *теоремы Е. В. Гайдукова* (1966): для любого нетривиального класса свободно гомотопных путей на M существует геодезическая полутраектория $\gamma(t)$, выходящая из точки x и асимптотически приближающаяся к некоторой замкнутой геодезической из данного гомотопического класса. Если скорость $\dot{\gamma}(0)$ не является критической, то $\gamma(t)$ замкнута. Исключительные одномерные подгруппы в $H_1(M)$, о которых говорилось выше, порождаются как раз замкнутыми геодезическими, на которые «наматываются» не совпадающие с ними асимптотические полутраектории. Поскольку непрерывное отображение $D_i \to X_i$ порождает гомоморфизм групп гомологий $H_1(D_i) \to H_1(X_i)$ и $H_1(D_i) \simeq Z^2$, то группа $H_1(M)$ накрыта конечным числом групп, ранг которых не превосходит двух. Известно, что если $\varkappa$ — род M, то $H_1(M) \simeq Z^{2\varkappa}$. Так как $\varkappa > 1$, то получаем противоречие.

Итак, различных критических скоростей бесконечно много. Поскольку всякая аналитическая функция на компактном аналитическом многообразии имеет лишь конечное число критических значений, то интеграл $f(v, x)$ постоянен на окружностях S_x. Следовательно, f есть функция на M. Так как M связно и и компактно, то любые две его точки можно соединить кратчайшей геодезической и поэтому $f \equiv \mathrm{const}$.

Замечание. Для всех известных многомерных вполне интегрируемых натуральных механических систем с компактным аналитическим многообразием положений M выполняется неравенство $\mathrm{rang} H_1(M) \leqslant \dim M$.

6.2. Геометрические препятствия к интегрируемости. Пусть N — замкнутое подмногообразие с краем на аналитической поверхности (уже необязательно компактной). Через N_h обозначим множество всех точек на M_h, которые при отображении $\pi: TM \to M$ переходят в точки из N. Будем говорить, что N геодезически выпукло, если кратчайшая геодезическая метрики Мопертюи на M, соединяющая близкие точки границы ∂N, целиком лежит в N.

Теорема 21. Если на аналитической поверхности M существует компактная геодезически выпуклая подобласть N с отрицательной эйлеровой характеристикой, то приведенная система на M_h не имеет аналитического первого интеграла. Более того, аналитический интеграл отсутствует даже в окрестности множества N_h.

Доказательство теоремы 21 следует схеме рассуждений, указанной в п.6.1. Незначительное отличие состоит в том, что вместо группы гомологий $H_1(M)$ используются свободно гомотопические классы замкнутых путей на M.

Теорема 21 удачно применена С. В. Болотиным для доказательства неинтегрируемости *задачи* о движении точки в гравитационном поле *n неподвижных центров* при $n>2$ (см. [55]). Напомним, что значениям $n=1$ и $n=2$ соответствуют интегрируемые случаи Кеплера и Эйлера.

Глава 7

ТЕОРИЯ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ

Изучение колебаний системы в окрестности положения равновесия или периодического движения обычно начинается с ее линеаризации. Линеаризованная система интегрируется. Основные свойства колебаний в исходной системе после этого часто могут быть выяснены с помощью теории нормальных форм Пуанкаре—Биркгофа. Эта теория — аналог теории возмущений (гл. 5 § 2). Линеаризованная система играет роль невозмущенной по отношению к исходной. В настоящей главе описаны основные элементы этого подхода.

Центральная задача теории малых колебаний — исследование устойчивости рассматриваемого положения равновесия или периодического движения. Теории устойчивости посвящена большая литература (см. обзор [11] и В. И. Арнольд, Ю. С. Ильяшенко, Обыкновенные дифференциальные уравнения. Итоги науки и техн. ВИНИТИ, Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, 1984, 1). Ниже кратко рассмотрены только некоторые результаты этой теории, позволяющие судить об устойчивости на основании изучения нормальных форм. Описаны также результаты, связанные с проблемой обращения теоремы Лагранжа об устойчивости равновесия в потенциальном поле.

§ 1. Линеаризация

Рассмотрим натуральную лагранжеву систему

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=0, \quad L=T-U(q), \qquad T=(A(q)\dot q, \dot q)/2. \tag{1}$$

Положения равновесия системы (1) — критические точки потенциальной энергии U. Чтобы линеаризовать систему (1) около равновесия $q=0$, достаточно заменить кинетическую энергию T ее значением T_2 при $q=0$, а потенциальную энергию U — ее квадратичной частью U_2 в окрестности нуля.

Пример 1. Для одномерной системы $L=a(q)\dot{q}^2/2-U(q)$,

$$L_2=T_2-U_2=(a\dot{q}^2-bq^2)/2,\ a=a(0),\ b=\partial^2U/\partial q^2|_{q=0},$$

линеаризованное уравнение движения есть $a\ddot{q}+bq=0$. △

Рассмотрим теперь гамильтонову систему. Ее положения равновесия — критические точки функции Гамильтона. Чтобы линеаризовать гамильтонову систему около положения равновесия, достаточно заменить гамильтониан его квадратичной частью в окрестности этого равновесия.

Линеаризация гамильтоновой системы около замкнутой траектории рассмотрена в пункте 3.2.

§ 2. Нормальные формы линейных колебаний

2.1. Нормальная форма линейной лагранжевой натуральной системы. Рассмотрим динамическую систему с квадратичной функцией Лагранжа $L_2=T_2-U_2$, $T_2\geqslant 0$. Ее колебания выглядят особенно просто в специальных координатах, которые называются главными или нормальными.

Теорема 1. Линейной заменой координат $Q=Cq$ квадратичная функция Лагранжа приводится к диагональному виду

$$L_2=(\dot{Q}_1^2+\ldots+\dot{Q}_n^2)/2-(\lambda_1Q_1^2+\ldots+\lambda_nQ_n^2)/2, \tag{2}$$

а уравнения движения — соответственно, к виду

$$\ddot{Q}_i=-\lambda_iQ_i,\quad i=1,\ldots,n. \tag{3}$$

Собственные числа λ_i являются корнями характеристического уравнения

$$\det(B-\lambda A)=0,\ T_2=(A\dot{q},\dot{q})/2,\ U_2=(Bq,q)/2.$$

◁ Пару квадратичных форм, T_2 и U_2, одна из которых (T_2) положительно определена, можно привести к главным осям единой линейной заменой переменных. Координаты можно выбрать так, что форма T_2 приведется к сумме квадратов. ▷

Следствие 1. Система, совершающая линейные колебания, есть прямое произведение n линейных одномерных систем.

Для каждой одномерной системы (3) могут представиться три случая:

1) $\lambda_i=\omega^2>0$, решение $Q=c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t$ (колебания),

2) $\lambda_i=0$, решение $Q=c_1+c_2t$ (безразличное равновесие),

3) $\lambda_i=-k^2<0$, решение $Q=c_1\operatorname{ch}kt+c_2\operatorname{sh}kt$ (неустойчивость).

Следствие 2. Пусть одно из собственных чисел положительно: $\lambda=\omega^2>0$. Тогда система может совершать периодическое колебание вида $q(t)=(c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t)\xi$, где ξ — соответствующий λ собственный вектор: $B\xi=\lambda A\xi$.

Это периодическое движение называется *собственным* (или главным, или нормальным) *колебанием*, а число ω — *собственной* (главной, нормальной) *частотой*.

Эти результаты справедливы и когда среди собственных чисел есть кратные: в лагранжевой натуральной системе, в отличие от общей системы дифференциальных уравнений (и даже общей гамильтоновой системы) резонансные члены вида $t\sin\omega t$ и т. п. не возникают даже в случае кратных собственных чисел (лишь при $\lambda=0$ возникают жордановы клетки порядка 2).

2.2. Теоремы Релея—Фишера—Куранта о поведении собственных частот при увеличении жесткости и наложении связи. Из двух линейных лагранжевых систем с одинаковой кинетической энергией более жесткой называется та, у которой потенциальная энергия больше.

Теорема 2. При увеличении жесткости системы, совершающей малые колебания, все собственные частоты увеличиваются.

Говорят, что лагранжева натуральная система с $n-1$ степенями свободы получена из системы с n степенями свободы, совершающей малые колебания, наложением линейной связи, если ее кинетическая и потенциальная энергии получаются ограничением кинетической и потенциальной энергий исходной системы на $n-1$-мерное подпространство.

Теорема 3. Собственные частоты ω_i', $i=1,\ldots,n-1$, системы со связью разделяют собственные частоты ω_i исходной системы (рис. 67).

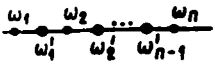


Рис. 67

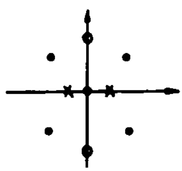


Рис. 68

2.3. Нормальные формы квадратичных гамильтонианов. Рассмотрим гамильтонову систему с квадратичной функцией Гамильтона

$$\dot z=I\partial H/\partial z,\quad z\in R^{2n},\quad H={}^1/_2(\Omega z, z),\quad I=\begin{pmatrix}0 & -E_n\\ E_n & 0\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим характеристическое уравнение

$$\det(I\Omega-\lambda E_{2n})=0.$$

Его корни называются собственными числами гамильтониана.

Теорема 4. Собственные числа гамильтониана на плоскости комплексного переменного λ расположены симметрично относительно координатного креста (рис. 68): если λ — собственное число, то собственными числами являются также $\bar\lambda$, $-\lambda$, $-\bar\lambda$.

◁ Если λ — собственное число, то

$$\det(I\Omega-\bar{\lambda}E_{2n})=\overline{\det(I\Omega-\lambda E_{2n})}=0,$$

$$\det(I\Omega+\lambda E_{2n})=\det(-I\Omega+\lambda E_{2n})^T=0 \ \triangleright$$

Следствия. 1. Устойчивость в системе Гамильтона всегда нейтральная: если равновесие устойчиво, то вещественные части всех собственных чисел равны нулю.

2. Если имеется чисто мнимое простое собственное число, то при малом возмущении гамильтониана оно остается на мнимой оси. Аналогично вещественное простое собственное число при малом возмущении остается вещественным.

3. Если $\lambda=0$ — собственное число, то оно обязательно имеет четную кратность.

Согласно теореме 4, собственные числа бывают четырех типов: вещественные пары $(a, -a)$, чисто мнимые пары $(ib, -ib)$, четверки $(\pm a\pm ib)$ и нулевые собственные числа.

Следующее утверждение заменяет для гамильтоновых систем теорему о приведении матрицы линейного дифференциального уравнения к жордановой форме.

Теорема 5 (Вильямсон (J. Williamson) [40]). Вещественной симплектической заменой переменных гамильтониан приводится к сумме частичных гамильтонианов (функций от непересекающихся подмножеств сопряженных переменных), а матрица системы — соответственно к клеточному виду. Каждый частичный гамильтониан отвечает либо вещественной паре, либо мнимой паре, либо четверке собственных чисел, либо нулевому собственному числу. Частичные гамильтонианы с точностью до знака определяются жордановыми клетками оператора $I\Omega$.

Список частичных гамильтонианов приведен в [6], [64].

У гамильтониана общего положения все собственные числа простые. Простой вещественной паре $(a, -a)$ соответствует частичный гамильтониан $\mathscr{H}=-ap_1q_1$, простой чисто мнимой паре $(ib, -ib)$ — гамильтониан $\mathscr{H}=\pm b(p_1^2+q_1^2)/2$ (гамильтонианы с верхним и нижним знаком не переводятся друг в друга), четверке $(\pm a\pm ib)$ — гамильтониан $\mathscr{H}=-a(p_1q_1+p_2q_2)+b(p_1q_2-p_2q_1)$. Для мнимой пары часто используются *симплектические полярные координты* $\rho, \varphi: p=\sqrt{2\rho}\cos\varphi, \quad q=\sqrt{2\rho}\sin\varphi$. Тогда гамильтониан $\mathscr{H}=\pm b\rho$.

Следствия. 1. Пусть имеется простое чисто мнимое собственное число $\lambda=i\omega$. Тогда система может совершать периодическое колебание вида $z=\mathrm{Re}(\xi\exp(i\omega(t+t_0)))$, где ξ — соответствующий собственный вектор: $(I\Omega-i\omega E_{2n})\xi=0$. Это движение называется *собственным колебанием*, а ω — *собственной частотой*.

2. Если все собственные числа различные и чисто мнимые, то гамильтониан приводится к нормальной форме

$$H=\omega_1(p_1^2+q_1^2)/2+\ldots+\omega_n(p_n^2+q_n^2)/2 \tag{4}$$

или, в симплектических полярных координатах, $H=\omega_1\rho_1+\ldots$ $\ldots+\omega_n\rho_n$. Движение является суммой собственных колебаний.

Замечание. Если гамильтониан имеет вид (4), то равновесие устойчиво независимо от того, положительно определен гамильтониан или нет (для лагранжевой натуральной линейной системы равновесие устойчиво только при положительно определенной полной энергии).

Часто бывает необходимо рассматривать не индивидуальный гамильтониан, а семейство, зависящее от параметров. В таком семействе при некоторых значениях параметров могут возникать, и притом неустранимым малым шевелением семейства образом, особенности: кратные собственные числа и, соответственно, жордановы клетки порядка большего 1 у матрицы системы. В [64] для любого конечного l указаны особенности, возникающие неустранимым образом в l-параметрическом семействе квадратичных гамильтонианов. Вычислены также версальные деформации этих особенностей — нормальные формы, к которым можно привести в окрестности особых значений параметров любое семейство гладко зависящих от параметров квадратичных гамильтонианов с помощью гладко зависящей от параметров симплектической линейной замены переменных. В частности, в однопараметрическом семействе гамильтонианов встречаются, вообще говоря, только следующие три особенности: двукратная вещественная пара $(\pm a)^2$ с двумя жордановыми клетками порядка 2, двукратная мнимая пара $(\pm ib)^2$ также с двумя жордановыми клетками порядка 2, двукратное нулевое собственное число $(0)^2$ с одной жордановой клеткой порядка 2. Версальные деформации этих особенностей следующие:

$$(\pm a)^2:\mathscr{H}=-(a+\delta_2)(p_1q_1+p_2q_2)+p_1q_2+\delta_1p_2q_1, \tag{5}$$

$$(\pm ib)^2:\mathscr{H}=\pm(p_1^2+p_2^2)/2+(b+\delta_2)(p_2q_1-p_1q_2)+\delta_1(q_1^2+q_2^2)/2,$$

$$(0)^2:\mathscr{H}=\pm p_1^2/2+\delta_1q_1^2/2.$$

Здесь δ_1, δ_2 — параметры деформации.

§ 3. Нормальные формы гамильтоновых систем около равновесия

3.1. Приведение к нормальной форме. Пусть начало координат — положение равновесия аналитической гамильтоновой системы с n степенями свободы. Пусть все собственные числа квадратичной части гамильтониана в окрестности равновесия различные и чисто мнимые. В соответствии со сказанным в § 1 и п. 2.2, гамильтониан представим в виде

$$H=\omega_1(p_1^2+q_1^2)/2+\ldots+\omega_n(p_n^2+q_n^2)/2+H_3+H_4+\ldots, \qquad (6)$$

где H_m — форма степени m от фазовых переменных p, q. (Среди частот ω_i могут быть и отрицательные).

Определение. Собственные частоты $\omega_1,\ldots,\omega_n$ удовлетворяют резонансному соотношению порядка $l>0$, если существуют целые числа k_i, для которых $k_1\omega_1+\ldots+k_n\omega_n=0$, $|k_1|+\ldots+|k_n|=l$.

Определение. *Нормальной формой Биркгофа* степени L для гамильтониана называется многочлен степени L от симплектических фазовых переменных P, Q, являющийся в действительности многочленом степени $[L/2]$ от переменных $\rho_i=(P_i^2+Q_i^2)/2$.

Пример 2. Для системы с двумя степенями свободы нормальной формой Биркгофа степени 4 будет

$$H=\omega_1\rho_1+\omega_2\rho_2+\omega_{11}\rho_1^2+2\omega_{12}\rho_1\rho_2+\omega_{22}\rho_2^2. \qquad (7)$$

Квадратичные по ρ члены описывают зависимость частот колебаний от амплитуд. $\triangle$

Теорема 6 (Биркгоф [22]). Предположим, что собственные частоты ω_i не удовлетворяют ни одному резонансному соотношению порядка L и меньше. Тогда существует такая симплектическая замена переменных p, $q\mapsto P$, Q в окрестности положения равновесия, что в новых переменных функция Гамильтона приводится к нормальной форме Биркгофа степени L с точностью до членов степени $L+1$:

$$H(p,q)=\mathscr{H}_L(\rho)+R,\ R=O(|P|+|Q|)^{L+1}. \qquad (8)$$

Отбрасывая в (8) ненормализованные члены, получаем интегрируемую систему, переменными действие — угол являются симплектические полярные координаты ρ_i, φ_i:

$$P_i=\sqrt{2\rho_i}\cos\varphi_i,\quad Q_i=\sqrt{2\rho_i}\sin\varphi_i, \qquad (9)$$

траектории обматывают торы $\rho=\mathrm{const}$ с частотами $\partial\mathscr{H}_L/\partial\rho$. Большая часть этих торов в общем случае существует и в исходной системе; это вытекает из результатов теории КАМ (гл. 5, п. 3.5 Б).

Нормализация Биркгофа сводится к процедуре исключения быстрых фаз Линдштедта (гл. 5, п. 2.2), если нормировать отклонения от равновесия малой величиной ε ($p=\varepsilon\hat{p}$, $q=\varepsilon\hat{q}$, $\hat{H}=H/\varepsilon^2$) и перейти к симплектическим полярным координатам.

Процедура нормализации описана ниже для более общего случая (см. доказательство теоремы 7). Нормализующее преобразование строится в виде многочлена степени $L-1$ по фазовым переменным. Изменение членов степени l в исходном гамильтониане не изменяет членов степени меньшей l в нормальной форме и меньшей $l-1$ в нормализующем преобразовании.

Рассматривая нормализацию при $L \to \infty$, приходим к понятию формальной нормальной формы, которое обсуждается в гл. 4, п. 1.3.

Для случая, когда собственные частоты удовлетворяют некоторым резонансным соотношениям, определение нормальной формы надо модифицировать. Такая же модификация целесообразна и для частот, близких к резонансным. Пусть K — подгруппа целочисленной решетки Z^n.

Определение. *Резонансной нормальной формой* гамильтониана степени L для резонансов из K называется многочлен степени L от симплектических переменных P_i, Q_i, который в полярных координатах (9) зависит от фаз φ_i только через их комбинации (k, φ), $k \in K$.

Теорема 7 ([156]). Предположим, что собственные частоты не удовлетворяют никаким резонансным соотношениям степени L и меньше, за исключением, быть может, соотношений $(k, \omega)=0$, $k \in K$. Тогда существует такая симплектическая замена переменных $p, q \mapsto P, Q$ в окрестности положения равновесия, что в новых переменных функция Гамильтона приводится к резонансной нормальной форме степени L для резонансов из K с точностью до членов степени $L+1$.

◁ Сделаем в системе с гамильтонианом (6) замену переменных с производящей функцией $Pq+S(P, q)$, $S=S_3+\ldots+S_L$. Новый гамильтониан имеет вид

$$\mathscr{H}=\omega_1(P_1^2+Q_1^2)/2+\ldots+\omega_n(P_n^2+Q_n^2)/2+\mathscr{H}_3+\mathscr{H}_4+\ldots .$$

Здесь S_l, $\mathscr{H}_l$ — формы степени l от (P, q) и (P, Q) соответственно. Старый и новый гамильтонианы связаны соотношением

$$H(P+\partial S/\partial q, q)=\mathscr{H}(P, q+\partial S/\partial P).$$

Приравнивая здесь формы одинакового порядка по P, q, получаем

$$\sum_{j=1}^{n} \omega_j \left(P_j \frac{\partial S_l}{\partial q_j} - q_j \frac{\partial S_l}{\partial P_j}\right)=\mathscr{H}_l-F_l, \quad l=3, \ldots, L.$$

Форма F_l определена, если известны S_ν, $\mathscr{H}_\nu$, $\nu \leqslant l-1$. В симплектических полярных координатах ρ, φ последнее уравнение приобретает вид

$$\omega \partial S_l/\partial\varphi=\mathscr{H}_l-F_l.$$

Выберем

$$S_l=\sum i(f_k(\rho)/(k, \omega))\exp(i(k, \varphi)), \quad k \notin K,$$

где f_k — коэффициенты ряда Фурье F_l. Тогда $\mathscr{H}_l$ имеет нужную нормальную форму. Так можно последовательно определить все S_l, $\mathscr{H}_l$. Возвращаясь к декартовым координатам, получаем доказываемое. ▷

Пусть гамильтониан имеет резонансную нормальную форму. Если ранг подгруппы $K \subset Z^n$, определяющей возможные резонансы, равен r, то система имеет $n-r$ независимых интегралов в инволюции, являющихся линейными комбинациями величин $\rho_i = (P_i^2 + Q_i^2)/2$ (ср. с теоремой 12 гл. 5). В частности, если возможно только одно резонансное соотношение, то система в нормальной форме интегрируема.

Резонансная нормализация сводится к процедуре исключения быстрых нерезонансных фаз Цейпеля (гл. 5, п. 2.2), если нормировать отклонения от равновесия малой величиной ε и перейти к симплектическим полярным координатам.

3.2. Фазовые портреты систем с двумя степенями свободы в окрестности равновесия при резонансе. Система с двумя степенями свободы, гамильтонианом которой является резонансная нормальная форма, интегрируема. Можно свести ее к системе с одной степенью свободы, зависящей от постоянной интеграла, как от параметра, и построить фазовые портреты. Если коэффициенты при младших членах нормальной формы находятся в общем положении, то для данного резонанса существует лишь конечное число типов фазового портрета, и эти типы различаются по младшим членам нормальной формы. Фазовые портреты качественно различаются лишь для конечного числа резонансов. Перечисление портретов дает исчерпывающую информацию о движении вблизи резонанса для систем в нормальной форме в случае общего положения. Соответственно получается значительная информация о движении для систем, младшие члены гамильтониана которых приводятся к данной нормальной форме. Ниже дается список фазовых портретов и их бифуркаций. Из-за недостатка места мы ограничиваемся случаем, когда частоты ω_1 и ω_2 имеют разные знаки, как более интересным с точки зрения теории устойчивости (если $\omega_1\omega_2 > 0$, то уровень энергии $H = h \ll 1$ — сфера, и равновесие устойчиво). Информация, необходимая для построения этих портретов, содержится в ряде работ Алфренда (K. T. Alfriend), Хенрара (J. Henrard), Роэля, Шмидта (D. S. Schmidt) и др. Портреты для резонансов порядка выше 4 см. в [192].

Пусть k_1, k_2 — взаимно простые положительные коэффициенты резонансного соотношения. Существуют взаимно простые l_1, l_2 такие, что $k_1 l_2 - k_2 l_1 = 1$. Перейдем в окрестности равновесия к каноническим полярным координатам ρ, φ (9), а затем сделаем замену переменных

$$\rho_1, \rho_2, \varphi_1, \varphi_2 \mapsto G, I, \psi, \chi$$

с производящей функцией

$$S = (k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2) G + (l_1\varphi_1 + l_2\varphi_2) I:$$

$$\psi = k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2, \quad G = l_2\rho_1 - l_1\rho_2,$$

$$\chi = l_1\varphi_1 + l_2\varphi_2, \quad I = -k_2\rho_1 + k_1\rho_2.$$

Так как, по предположению, гамильтониан имеет нормальную форму, то он не зависит от χ; соответственно I — интеграл задачи. Сделаем изоэнергетическую редукцию на уровне энергии $H=h$ (см. [6]), в качестве нового времени введем фазу χ. Получим приведенную систему с одной степенью свободы, гамильтониан которой зависит от параметра h. Ее фазовый портрет и надо исследовать. В случае общего положения портрет существенно зависит еще от одного параметра — резонансной расстройки $\delta=k_1\omega_1+k_2\omega_2$.

Окрестность начала координат на плоскости h, δ разбивается на области, соответствующие разным типам фазового портрета. Эти разбиения для различных резонансов показаны на рис. 69 а—74 а, а бифуркации фазового портрета при обходе вокруг начала координат по часовой стрелке — на рис. 69 б—74 б соответственно. Нумерация портретов соответствует нумерации областей на плоскости параметров. Непронумерованные портреты соответствуют разделяющим области кривым, они приведены только на рис. 69—71.

Нормальные формы, для которых приведены бифуркации, имеют вид

$$H_{k_1,k_2}=\omega_1\rho_1+\omega_2\rho_2+F(\rho_1, \rho_2)+B\rho_1^{k_1/2}\rho_2^{k_2/2}\cos(k_1\varphi_1+k_2\varphi_2+\psi_0).$$

Здесь F — многочлен от ρ_1, ρ_2, начинающийся с квадратичной формы $F_2(\rho_1, \rho_2)$, в гамильтониане $H_{2,1}$ член F надо опустить, B и ψ_0 — постоянные. Нужные условия общности положения имеют вид $B\neq 0$, $A=F_2(k_1, k_2)\neq 0$ и, для гамильтониана $H_{3,1}$, $|A|\neq 3\sqrt{3}|B|$. Рисунки соответствуют случаю $\omega_1>0$, $A>0$, $B>0$ (это не ограничивает общности). Рисунки приведены для следующих резонансных векторов (k_1, k_2): (2, 1) — рис. 69, (3, 1) — рис. 70, если $A<3\sqrt{3}B$ и рис. 71, если $A>3\sqrt{3}B$, (4, 1) — рис. 72, (2, 3) — рис. 73, (3, 4) — рис. 74. Для резонансных векторов $(1, n)$, $n\geqslant 5$ бифуркации такие же, как для (1,4), для $(2, n)$, $n\geqslant 5$ — такие же, как для (2, 3), но пропускается область (5) на рис. 73, для $(3, n)$, $n\geqslant 5$ — такие же, как для 3, 4), а для (m, n) $m\geqslant 4$, $n\geqslant 5$ — такие же, как для (3, 4), но пропускается область (2) на рис. 74. (Конечно, число особых точек каждого типа надо изменить с учетом симметрии гамильтониана). Ось $\delta=0$ не является линией бифуркации. Расположение линий бифуркации относительно нее может быть другим, чем показано на рисунках.

Еще несколько замечаний с представлении информации. Чтобы фазовые портреты не имели особенностей, они изображены для $h>0$ в полярных координатах ρ_2, ψ/k_2, а для $h<0$ — в полярных координатах ρ_1, ψ/k_1. Для $h=0$ фазовый портрет на рис. 69—71 изображен и в тех и в других координатах. Можно считать, что при $h>0$ на портрете изображено сечение трехмерного многообразия уровня энергии плоскостью $\varphi_1=0$, а при

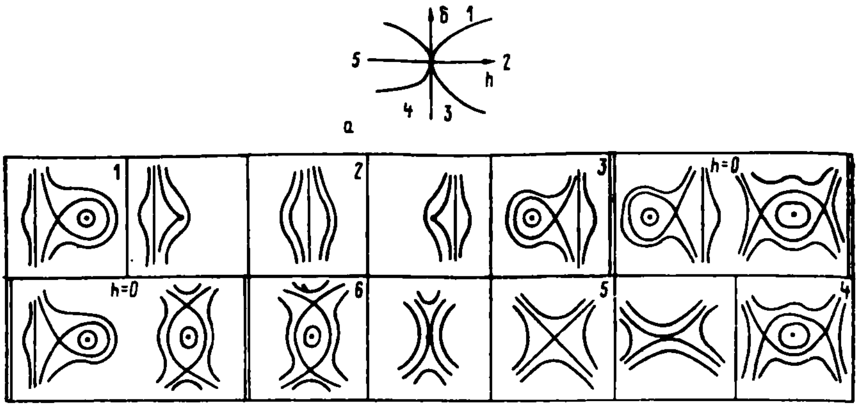


Рис. 69

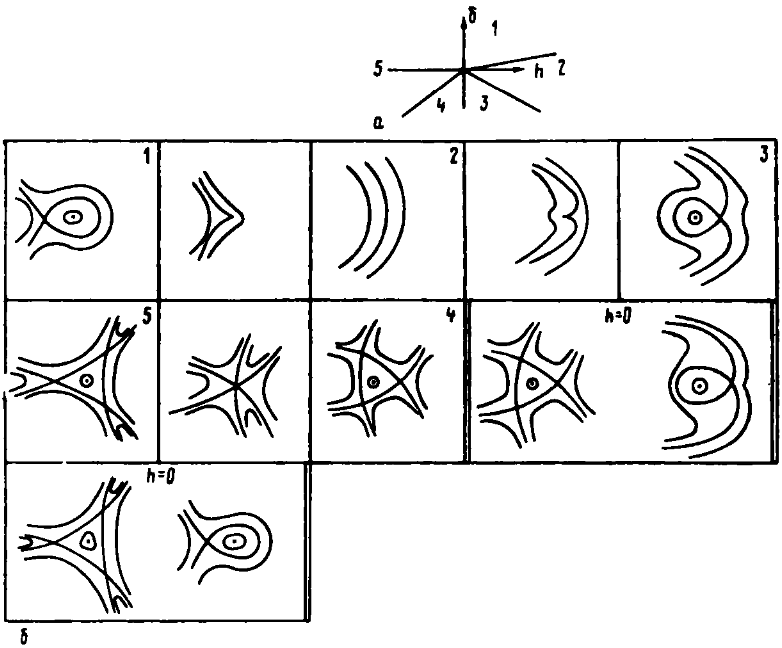


Рис. 70

$h<0$ — сечение плоскостью $\varphi_2=0$. Положениям равновесия на фазовом портрете соответствуют периодические решения исходной системы с двумя степенями свободы[1], замкнутым кривым соответствуют двумерные инвариантные торы. При этом равновесиям, получающимся друг из друга поворотом на угол

[1] При $h=0$ равновесию в центре портрета соответствует равновесие исходной системы.

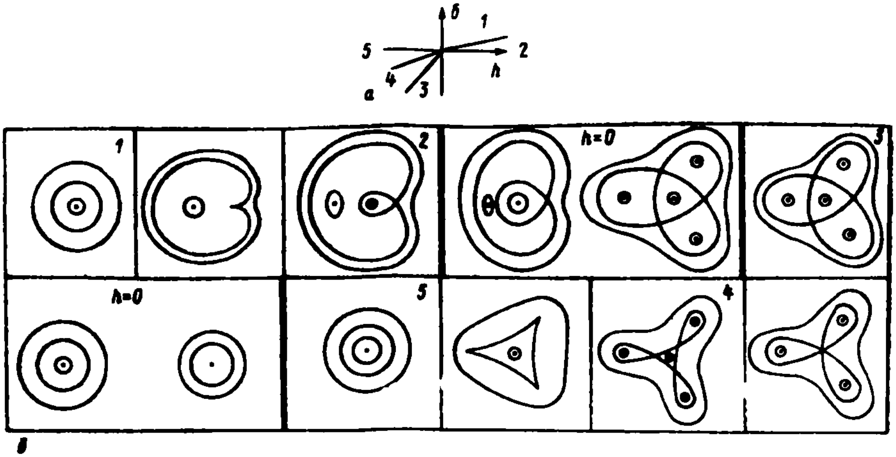


Рис. 71

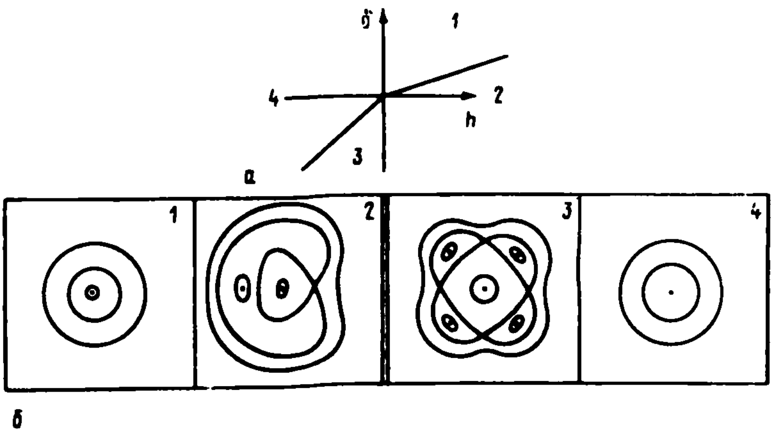


Рис. 72

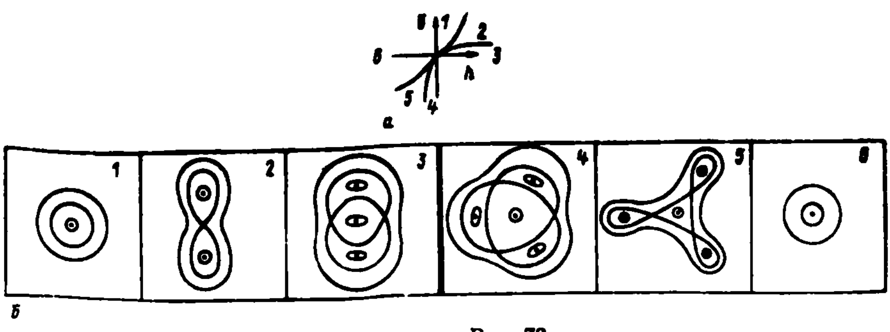


Рис. 73

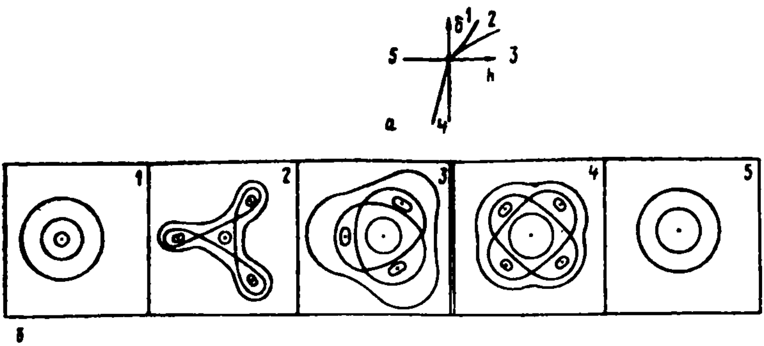


Рис. 74

$2\pi/k_2$ в области $h>0$ или $2\pi/k_1$ в области $h<0$, соответствует одно и то же периодическое решение, протыкающее поверхность сечения k_2 (соответственно, k_1) раз. Точно так же и для двумерных торов.

Для завершения анализа резонансов в системах с двумя степенями свободы осталось рассмотреть еще резонансы, существенные уже в квадратичных членах гамильтониана: случай кратных собственных чисел и случай нулевого собственного числа.

При кратных собственных числах в типичном случае матрица линейной гамильтоновой системы имеет две жордановы клетки второго порядка (см. п. 2.3). При собственных числах, близких к кратным, квадратичная часть гамильтониана приводится к виду $(\pm ib)^2$ из (5). Согласно [117], в этом случае члены гамильтониана до 4-го порядка включительно можно привести к следующему виду, также называемому нормальной формой:

$$H=a(p_1^2+p_2^2)/2+\omega(p_2q_1-p_1q_2)+\delta(q_1^2+q_2^2)/2+$$
$$+(q_1^2+q_2^2)[D(q_1^2+q_2^2)+B(p_2q_1-p_1q_2)+C(p_1^2+p_2^2)],$$
$$a=\pm 1. \tag{10}$$

Формальная нормальная форма — ряд по $q_1^2+q_2^2$, $p_1^2+p_2^2$, $p_2q_1-p_1q_2$. Перейдем, следуя [77], [119], к полярным координатам r, χ на плоскости q_1, q_2 и введем соответствующие импульсы P, I:

$$\begin{aligned} q_1&=r\cos\chi, & p_1&=P\cos\chi-I\sin\chi/r,\\ q_2&=r\sin\chi, & p_2&=P\sin\chi+I\cos\chi/r. \end{aligned} \tag{11}$$

В новых переменных гамильтониан (10) принимает вид

$$H=\frac{1}{2}a\left(P^2+\frac{I^2}{r^2}\right)+\omega I+r^2\left(\frac{\delta}{2}+Dr^2+BI+C\left(P^2+\frac{I^2}{r^2}\right)\right). \tag{12}$$

Так как гамильтониан не зависит от угла χ, то I — интеграл, а для P, r получается система с одной степенью свободы, зависящая от двух параметров, I и δ. Ее бифуркационная диаграмма приведена на рис. 75 для случая $a=1$, $D>0$ и на рис. 76 для случая $a=1$, $D<0$. Принято, что $I\geqslant 0$ — это не ограничивает общности.

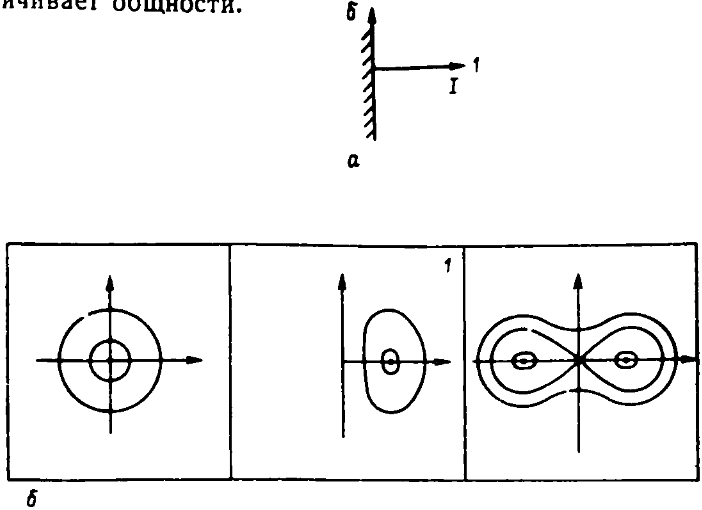


Рис. 75

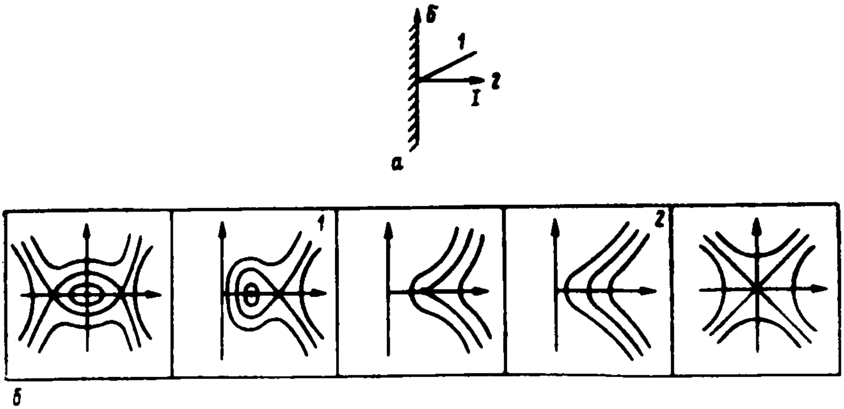


Рис. 76

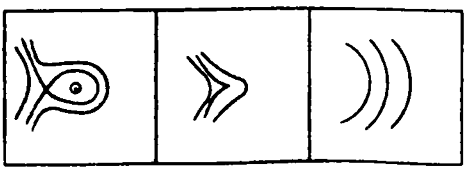


Рис. 77

Крайние фазовые портреты на рис. 75, 76 соответствуют $I=0$. Чтобы они не имели особенностей, приходится считать, что r принимает значения обоих знаков. Симметричные относительно оси $r=0$ кривые на портретах соответствуют одним и тем же инвариантным поверхностям в фазовом пространстве системы с двумя степенями свободы. Δ

Наконец, рассмотрим случай нулевого собственного числа (вырожденного равновесия). Он возникает уже в системе с одной степенью свободы; такую систему и будем рассматривать[1]. Будем считать, что в линеаризованной системе нулевому собственному числу соответствует жорданова клетка второго порядка (п. 2.3). Если равновесие близко к вырожденному, то его нельзя переместить в начало координат гладкой по параметрам задачи заменой переменных. Поэтому в гамильтониане сохраняется линейная часть. Члены гамильтониана до 3-го порядка включительно приводятся к виду

$$H=\delta q+ap^2/2+bq^3,\quad a=\pm 1. \tag{13}$$

Предположим, что $a=1$, $b>0$. Бифуркация фазового портрета при переходе от отрицательных δ к положительным показана на рис. 77. Два равновесия сливаются и исчезают.

Приведенные диаграммы исчерпывают все связанные с резонансами бифуркации, которые происходят в однопараметрических семействах гамильтонианов общего положения с двумя степенями свободы и могут быть вычислены по нормальной форме.

Эти диаграммы полезны и при большем числе степеней свободы. Действительно, пусть в системе с n степенями свободы приближенно выполнено единственное резонансное соотношение между двумя частотами. Тогда ее нормальная форма имеет $n-2$ интеграла $\rho_i=\mathrm{const}$ и приводится к системе с двумя степенями свободы. В результате получается одна из рассмотренных нормальных форм, коэффициенты которой зависят от параметров $\rho_i \ll 1$.

Исследование кратных резонансов в системах со многими степенями свободы только начинается. В [134] исследован случай с отношением частот $1:2:1$, найдены его периодические решения и дополнительные интегралы, возникающие при особых значениях параметров. В [135] показано, что для резонанса $1:2:2$ нормальная форма третьего порядка имеет дополнительную симметрию и соответствующая система вполне интегрируема. В [152] показано, что для резонанса $1:1:2$ нормальная форма третьего порядка порождает неинтегрируемую систему[2].

3.3. Устойчивость равновесий гамильтоновых систем с двумя

[1] При двух степенях свободы порядок понижается до единицы с помощью интеграла, соответствующего ненулевой собственной частоте.

[2] В этих работах предполагается, что кратной собственной частоте соответствуют в матрице линеаризованной системы четыре жордановы клетки первого порядка, а не две клетки второго порядка, т. е. дополнительное вырождение: для реализации такого случая в системе общего положения нужно 4 параметра.

степенями свободы при резонансах. Изучение нормальной формы дает значительную информацию о движении исходной системы, младшие члены гамильтониана которой приводятся к этой форме. Например, если у нормальной формы есть невырожденное периодическое решение, то близкое периодическое решение есть у исходной системы. Это следует из теоремы о неявной функции. Большая часть инвариантных торов, имеющихся у нормальной формы, в общем случае есть и у исходной системы. Это следует из результатов теории КАМ (надо использовать теорему 14 из гл. 5, § 3). Как всегда в системах с двумя степенями свободы из наличия инвариантных торов следуют выводы об устойчивости.

Если между собственными частотами системы с двумя степенями свободы отсутствуют резонансные соотношения до 4-го порядка включительно, то равновесие устойчиво (при дополнительном условии изоэнергетической невырожденности); этот результат уже обсуждался в гл. 5, п. 3.5 Б. Для оставшегося конечного числа резонансных случаев справедлив следующий результат.

Теорема 8. ([77], [94], [117—119], [132]). Если собственные частоты удовлетворяют резонансному соотношению порядка $\leqslant 4$ и выполнены условия общности положения п. 3.2, то равновесие исходной системы устойчиво или неустойчиво одновременно с равновесием нормальной формы.

◁ Устойчивость доказывается с помощью теории КАМ, а неустойчивость — сравнением скорости ухода от равновесия для исходной системы и нормальной формы, либо построением функции Четаева. ▷

В обозначениях п. 3.2 имеем следующие результаты.

Следствие 1 ([94]). При резонансе (2,1) равновесие неустойчиво, если $B \neq 0$ (рис. 69).

Следствие 2 ([94]). При резонансе (3, 1) равновесие устойчиво, если $|A| > 3\sqrt{3}|B| > 0$ (рис. 71) и неустойчиво, если $0 < |A| < 3\sqrt{3}|B|$ (рис. 70).

Следствие 3 ([77], [117], [119]). При кратной ненулевой частоте у линеаризованной системы, имеющей пару жордановых клеток порядка 2, равновесие полной системы устойчиво, если $aD > 0$ (рис. 75), и неустойчиво, если $aD < 0$ (рис. 76).

Следствие 4 ([118], [132]). При нулевой собственной частоте у линеаризованной системы, имеющей жорданову клетку порядка 2, равновесие полной системы неустойчиво, если $b \neq 0$ (рис. 77).

Когда некоторые из сформулированных условий общности положения нарушаются, устойчивость проанализирована в [94], [117], [118], [132].

Имеющиеся на фазовых портретах нормальной формы сепаратрисы при переходе к точной системе оказываются, вообще говоря, расщепленными, как описано в гл. 5, п. 3.3. Б.

36-1

§ 4. Нормальные формы гамильтоновых систем около замкнутых траекторий

4.1. Сведение к равновесию системы с периодическими коэффициентами. Пусть гамильтонова система с $n+1$ степенями свободы имеет замкнутую траекторию, отличную от равновесия. Такие траектории не лежат изолированно, а образуют, как правило, однопараметрические семейства. Приведем задачу о колебаниях в окрестности этого семейства к удобному виду.

Предложение 1. В окрестности замкнутой траектории можно выбрать новые симплектические координаты $\varphi \bmod 2\pi$, J и $z \in R^{2n}$ так, что на рассматриваемой траектории будет $J=0$, $z=0$, а обход по ней изменяет φ на 2π; на самой траектории $\dot{\varphi}=\mathrm{const}$. В новых координатах функция Гамильтона принимает вид $H=f(J)+\mathcal{H}(z, \varphi, J)$, $f_J' \neq 0$, разложение $\mathcal{H}$ по z, J начинается с членов второго порядка малости.

Теперь сделаем изоэнергетическую редукцию (см. [6]), выбрав на уровне энергии $H=h$ в качестве нового времени фазу φ (обозначать ее теперь будем t). Гамильтониан задачи примет вид $F=F(z, t, h)$. При $h=0$ начало координат — положение равновесия системы. Предположим, что оно невырождено (все мультипликаторы отличны от нуля; вырожденный случай рассмотрен в п. 4.3). Тогда при малых h система также имеет невырожденное равновесие. Гладкой по параметру заменой переменных можно перенести это равновесие в начало координат. Гамильтониан примет вид

$$F=(\Xi(t, h)z, z)/2+G(z, t, h), \tag{14}$$

где разложение G по z начинается с членов третьего порядка малости, гамильтониан имеет период 2π по t.

Рассмотрим линеаризованную систему.

Теорема 9 (см., например, [133]). Линейная 2π-периодическая по времени гамильтонова система приводится к автономному виду линейной симплектической заменой переменных. Если система не имеет вещественных отрицательных мультипликаторов, то приводящую замену переменных можно выбрать 2π-периодической по времени, а если имеет, то 4π-периодической. Если система гладко зависит от параметра, то и замена переменных выбирается гладкой по этому параметру.

Предположим, что все мультипликаторы линеаризованной системы лежат на единичной окружности и различны. Тогда, согласно сформулированной теореме и п. 2.2., гамильтониан (14) можно линейной 2π-периодической заменой привести к виду

$$\Phi=\omega_1(p_1^2+q_1^2)/2+\ldots+\omega_n(p_n^2+q_n^2)/2+\Psi(p, q, t, h), \tag{15}$$

где разложение Ψ по фазовым переменным начинается с членов 3-го порядка малости, Ψ имеет период 2π по времени t.

4.2. Приведение системы с периодическими коэффициентами к нормальной форме.

Определение. Собственные частоты $\omega_1, \ldots, \omega_n$ удовлетворяют резонансному соотношению порядка $l>0$ для 2π-периодических систем, если существуют целые числа $k_0, k_1, \ldots, k_n$, для которых $k_1\omega_1+\ldots+k_n\omega_n+k_0=0$, $|k_1|+\ldots+|k_n|=l$.

Теорема 10. (Биркгоф [22]). Предположим, что собственные частоты ω_i 2π-периодической системы (15) не удовлетворяют ни одному резонансному соотношению порядка L и меньше. Тогда симплектической 2π-периодической по времени заменой переменных функция Гамильтона приводится к такой же нормальной форме Биркгофа степени L, как если бы система была автономной, с той лишь разницей, что остаточные члены степени $L+1$ и выше будут 2π-периодически зависеть от времени.

Процедура нормализации аналогична описанной в п. 3.1. Если система гладко зависит от параметра, то гладким по параметру выбирается и нормализующее преобразование.

Для резонансных случаев используется резонансная нормальная форма. Пусть K — подгруппа целочисленной решетки Z^{n+1}.

Определение. *Неавтономной резонансной нормальной формой* гамильтониана степени L для резонансов из K называется многочлен степени L от симплектических переменных P_i, Q_i, который в полярных координатах (9) зависит от фаз φ_i и времени t только через их комбинации $k_1\varphi_1+\ldots+k_n\varphi_n+k_0t$, где $(k_1, \ldots, k_n, k_0)\in K$.

Теорема 11. Пусть собственные частоты не удовлетворяют никаким резонансным соотношениям порядка L и меньше, за исключением, быть может, соотношений $k_1\omega_1+\ldots+k_n\omega_n+$ $+k_0=0$, где $(k_1, \ldots, k_n, k_0)\in K$. Тогда существует симплектическая 2π-периодическая замена переменных, приводящая гамильтониан к неавтономной резонансной нормальной форме степени L для резонансов из K с точностью до членов степени $L+1$.

Если ранг подгруппы K равен r, то система в нормальной форме для резонансов из K имеет $n-r$ независимых интегралов в инволюции, являющихся линейными комбинациями величин $\rho_i=(P_i^2+Q_i^2)/2$. В частности, если резонансное соотношение только одно, то система интегрируема.

4.3. Фазовые портреты систем с двумя степенями свободы около замкнутой траектории при резонансе. Колебания около замкнутой траектории в системе с двумя степенями свободы описываются периодической по времени системой с одной степенью свободы, зависящей от параметра (п. 4.1). Система, имеющая резонансную нормальную форму для такой задачи, сводится к системе с одной степенью свободы; можно строить ее фазовые портреты. Если коэффициенты при младших членах нормальной формы находятся в общем положении, то для данного резонанса существует лишь конечное число типов фазового портрета, и эти типы различаются по младшим членам нормальной формы. Фазовые портреты качественно различаются лишь для конечного числа резонансов. Их список и описание бифуркаций, которые испытывают портреты при прохождении параметров системы через точный резонанс, содержатся в [59], [60] и воспроизводятся ниже.

Нормальные формы H_{k,k_0} для резонансов (k, k_0) имеют в переменных ρ, $\psi=\varphi+k_0t/k+\psi_0$ вид

$$H_{3,k_0}=\delta\rho+B\rho^{3/2}\cos 3\psi,$$
$$H_{k,k_0}=\delta\rho+\rho^2A(\rho)+B\rho^{k/2}\cos k\psi,\quad k\geqslant 4.$$

Здесь ρ и ψ — сопряженные фазовые переменные, $\delta=\omega+k_0/k$ — резонансная расстройка, A — многочлен от ρ; B, ψ_0 — постоянные. Нужные условия общности положения состоят в том, что $B\neq 0$, $A(0)\neq 0$ для $k\geqslant 4$, $|A(0)|\neq|B|$ для $k=4$. Все коэффициенты зависят еще от параметра h. Будем считать, что $d\delta/dh\neq 0$, так что вместо h можно использовать δ. При сформулированных условиях малое изменение B и коэффициентов A не приводит к бифуркациям; поэтому зависимость их от параметра можно не учитывать. Будем считать, что $B>0$ и $A(0)>$ >0 — это не ограничивает общности.

Перестройка фазового портрета при росте δ с прохождением через нуль показана для $k=3$ — на рис. 78 а, для $k=4$ — на рис. 78 б, если $A(0)<B$, и на рис. 78 в, если $A(0)>B$, для $k=$ $=5$ — на рис. 78 г.

Для $k\geqslant 6$ перестройка такая же, как для $k=5$, только особых точек вокруг начала координат не 10, а $2k$. При $k\geqslant 5$ эти особые точки расположены на расстоянии порядка $\sqrt{\delta}$ от начала координат. Окружающие устойчивые точки «острова колебаний» имеют ширину порядка $\delta^{(k-2)/4}$. Следовательно, при $k\geqslant 5$ острова занимают лишь малую долю рассматриваемой окрестности начала координат, а остальные фазовые кривые близки к окружностям.

Есть еще два резонансных случая, которые проявляются уже в квадратичных членах гамильтониана. Это случаи, когда мультипликаторы замкнутой траектории равны -1 или 1.

Если мультипликаторы равны -1, (резонанс $(2, k_0)$), то младшие члены гамильтониана в типичном случае 4π-периодической заменой переменных приводятся к нормальной форме

$$H=\delta q^2+ap^2/2+Dq^4,\quad a=\pm 1.$$

Перестройка показана на рис. 79а для $a=1$, $D>0$ и на рис. 79 б для $a=1$, $D<0$.

Если мультипликаторы равны 1 (резонанс $(1, k_0)$), то младшие члены гамильтониана приводятся к нормальной форме

$$H=\delta q+ap^2/2+bq^3,\quad a=\pm 1.$$

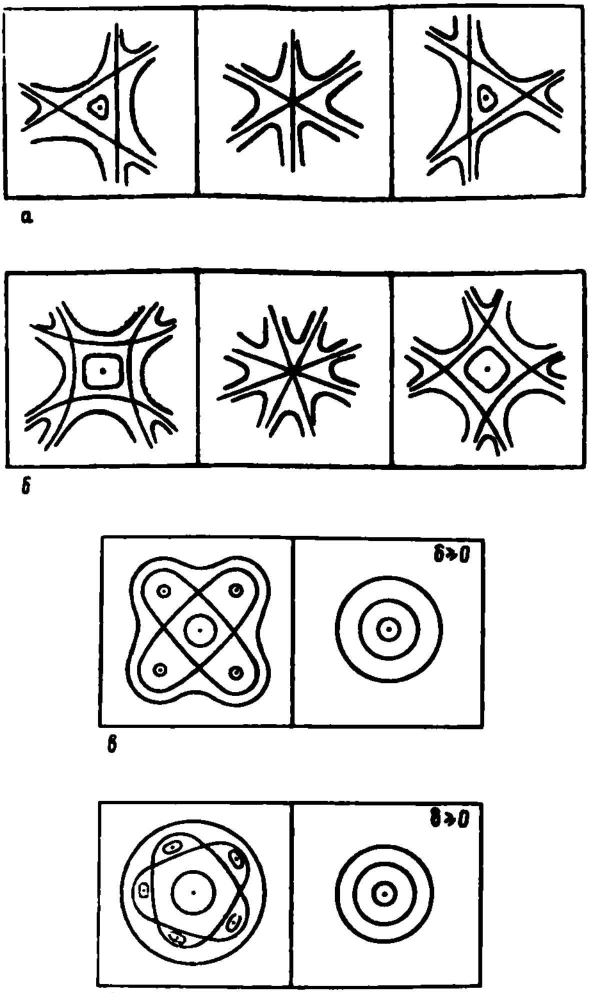


Рис. 78

Перестройка показана на рис. 80 (в предположении, что $a=1$, $b>0$).

Построенные фазовые портреты позволяют выяснить многие свойства исходной системы, когда ее младшие члены приводятся к соответствующей нормальной форме. Так, невырожденным равновесиям на портретах соответствуют периодические траектории полной системы, обходящие исходную периодическую траекторию k раз. Для резонанса третьего порядка такая траектория одна, она неустойчива и сливается с исходной в момент точного резонанса ($\delta=0$). Для резонанса порядка $k\geqslant5$

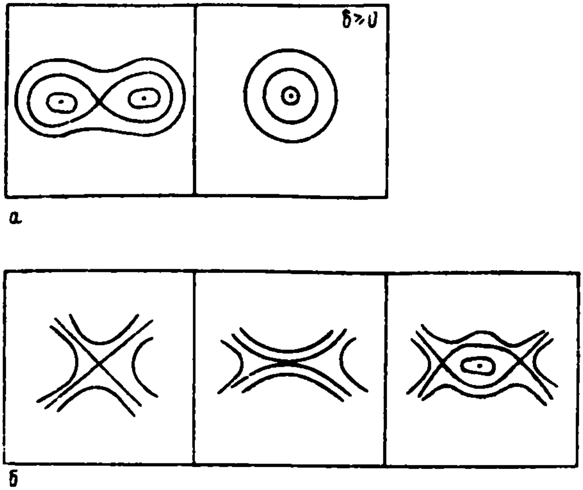


Рис. 79

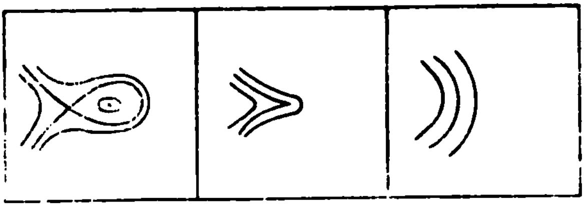


Рис. 80

таких траекторий две, одна устойчива, другая неустойчива, они ответвляются от исходной при прохождении через резонанс по оси δ с одной определенной стороны. Для резонанса четвертого порядка, в зависимости от значений параметров, картина либо такая, как для третьего порядка, либо такая, как для порядка $k \geqslant 5$. При переходе через резонанс второго порядка (мультипликаторы -1) исходная траектория теряет или приобретает устойчивость; при этом ответвляется дважды обходящая ее периодическая траектория. Наконец, при резонансе первого порядка (мультипликаторы 1) исходная траектория исчезает, слившись с другой траекторией того же периода (или, если двигаться с другой стороны по параметру, рождаются две периодические траектории).

Большей части замкнутых кривых на фазовых портретах соответствуют двумерные инвариантные торы полной системы, несущие условно-периодические движения (согласно теории КАМ).

Устойчивость или неустойчивость исходной замкнутой траектории при сформулированных условиях общности положения устанавливается по нормальной форме (ср. с теоремой 8). При $k=3$ будет неустойчивость, если $B\neq 0$, при $k=4$ — устойчивость, если $|A(0)|>|B|>0$, и неустойчивость, если $0<|A(0)|<B$, при $k\geqslant 5$ — устойчивость, если $A(0)B\neq 0$. При мультипликаторах равных -1 будет устойчивость, если $aD>0$, и неустойчивость, если $aD<0$. При мультипликаторах, равных 1, будет неустойчивость, если $ab\neq 0$.

При переходе от нормальной формы к точной системе имеющиеся на фазовых портретах сепаратрисы, вообще говоря, расщепляются аналогично описанному в гл. 5, п. 3.3.Б.

§ 5. Устойчивость равновесия в потенциальном поле

Теорема 12 (Лагранж (J. L. Lagrange) — Дирихле (P. Dirichlet)). Если в положении равновесия потенциал имеет строгий локальный минимум, то соответствующее состояние равновесия устойчиво.

◁ В качестве функции Ляпунова можно взять полную механическую энергию. ▷

Условие теоремы Лагранжа не является необходимым для устойчивости.

Пример 3 (Пенлеве (P. Penleve) — Уинтнер).

Рассмотрим бесконечно дифференцируемый потенциал $U(q)=\cos q^{-1}\times\exp(-q^{-2})$, $q\neq 0$, $U(0)=0$. Равновесие $q=0$ устойчиво, хотя точка $q=0$ не является, конечно, локальным минимумом функции U (рис. 81). △

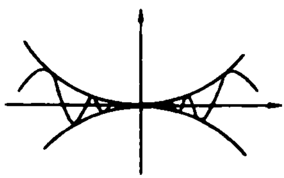


Рис. 81

В 1892 году А. М. Ляпунов поставил задачу об обращении теоремы Лагранжа для случая, когда коэффициенты квадратичной формы $T=\Sigma a_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j$ и потенциал U являются аналитическими функциями в окрестности положения равновесия. Эта задача решена пока лишь в частных случаях.

Теорема 13. Пусть положение равновесия $q=0$ не является строгим локальным минимумом аналитического потенциала U. Состояние равновесия $(q,\dot{q})=(0,0)$ неустойчиво, если выполнено одно из следующих дополнительных условий:

1) число степеней свободы $n\leqslant 2$,

2) U является квазиоднородной или полуквазиоднородной функцией,

3) первая нетривиальная форма разложения Маклорена функции U не имеет в 0 локального минимума.

Случай $n=1$ тривиален. Неустойчивость равновесия в случае $n=2$ установлена В. П. Паламодовым [112]. Доказательство опирается на утверждение, восходящее к Н. Г. Четаеву [130].

Лемма 1 (см. [112]). Пусть точка $q=0$ не является локальным минимумом функции U. Предположим, что в области $\Sigma_\varepsilon=\{q:U(q)<0,\ |q|<\varepsilon\}$ существует гладкое векторное поле v такое, что:

1) $\langle v, U'\rangle\leqslant 0$ в области Σ_ε,

2) $\langle v'\xi, \xi\rangle\geqslant c\langle \xi, \xi\rangle$ для всех $\xi\in R^n$ и $q\in\Sigma_\varepsilon$ $(c>0)$,

3) $|v(q)|=O(|q|)$ при $|q|\to 0$.

Тогда существует $\varepsilon_0>0$ такое, что если $q(\cdot)$ — движение механической системы с отрицательной энергией и $q(0)\in\Sigma_{\varepsilon_0}$, то $|q(t)|>\varepsilon_0$ при некотором $t>0$.

Замечание. Пусть $q(\cdot)$ — движение с нулевой полной энергией. Если равновесие $q=0$ изолировано, то (в предположениях леммы 1) точка $q(t)$ либо покидает некоторую область $|q|\leqslant\varepsilon_0$ за конечный промежуток времени, либо стремится к нулю при $t\to\infty$. $\triangle$

Основная трудность в доказательстве теоремы Паламодова состоит как раз в построении нужного нам поля v.

Если U — квазиоднородная функция с показателями $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in N$, то в качестве поля v можно взять поле Ax, где $A=\operatorname{diag}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$. В полуквазиоднородном случае поле v является некоторым возмущением поля Ax (детали см. в [80]).

Замечание. В приложениях потенциал U чаще всего зависит еще от параметров. Функция общего вида, зависящая не более чем от 6 параметров, в окрестности критической точки подходящей заменой переменных приводится к квазиоднородному виду (см., например, [47]). Следовательно, для таких потенциалов справедлива обратная теорема Лагранжа. Для практических целей это более чем достаточно, однако общий случай к этому, конечно, не сводится. $\triangle$

Доказательство теоремы 12 в случае 3 основано на другой идее: если уравнения движения имеют решение $q(t)$, асимптотически стремящееся к точке $q=0$ при $t\to+\infty$, то равновесие $(q,\dot q)=(0,0)$ неустойчиво. При этом надо различать три случая: разложение потенциала начинается с квадратичных членов, с формы нечетной степени и, наконец, с четной формы степени больше двух. Первый случай разобран еще А. М. Ляпуновым: уравнение движения имеет асимптотическое решение $q(t)=\Sigma x_k e^{-k\lambda t}$, $k\geqslant 1$, $x_k\in R^n$, $\lambda>0$. Если $U=U_{2m+1}+\ldots$ $\ldots(m\geqslant 1)$ и $U_{2m+1}\not\equiv 0$, то асимптотическое решение можно представить в виде ряда

$$\sum x_k/t^{k\mu}, \quad k>1, \quad \mu=2/(2m-1), \tag{16}$$

сходящегося при достаточно больших значениях t [82]. Если же $U=U_{2m}+\ldots$ ($m\geqslant 2$) и $U_{2m}\not\equiv 0$, то ряд (16) заменяется на следующий (см. [86]):

$$\sum \frac{x_{ij}(\ln t)^j}{t^{i/(m-1)}}, \quad x_{ij}\in R^n, \quad i, j=0, 1, \ldots; \; j\leqslant i/(m-1).$$

Из заключения 3 теоремы 12 можно вывести ряд следствий:

а) Пусть $f: R^n\to R$ и $df(0)=0$. Тогда состояние равновесия $(q, \dot{q})=(0, 0)$ неустойчиво либо когда $U=f$, либо когда $U=-f$.

б) Если в положении равновесия аналитический потенциал имеет локальный максимум, то равновесие неустойчиво.

в) Равновесия механической системы в потенциальном силовом поле с гармоническим потенциалом (удовлетворяющим уравнению Лапласа $\Delta U=0$) неустойчивы. Частным случаем является «теорема Ирншоу» (S. Irnshaw): равновесие системы электрических зарядов в стационарном электрическом поле всегда неустойчиво. До работ [82], [86] теорема Ирншоу была доказана лишь когда характеристические числа первого приближения отличны от нуля.

Пусть на механическую систему действуют еще непотенциальные силы $F(q, \dot{q})$; движение описывается уравнением Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=F, \quad L=T-U. \tag{17}$$

Определение. Силу F будем называть силой вязкого трения с полной диссипацией, если $F(q, 0)=0$ и $(T+U)^{\cdot}=F\dot{q}<0$ при $\dot{q}\neq 0$.

Положения равновесия и после добавления сил вязкого трения снова будут совпадать с критическими точками потенциала U. При этом состояния равновесия, устойчивые по теореме Лагранжа, останутся устойчивыми с учетом диссипации энергии. Более того, если потенциал — аналитическая функция, то они станут асимптотически устойчивыми.

Теорема 14 (см. [81]). Пусть точка $q=0$ не является локальным минимумом функции U, $U(0)=0$. Состояние равновесия $(q, \dot{q})=(0, 0)$ системы (17) неустойчиво, если выполнено одно из следующих условий:

а) функция U аналитична в окрестности точки $q=0$,

б) функция U гладкая и при некотором $\varepsilon>0$ в области $\sum_\varepsilon=\{q: U(q)<0, |q|<\varepsilon\}$ нет ее критических точек.

В аналитическом случае условие б) заведомо выполнено.

▷ Рассмотрим движение $q(\cdot)$ с отрицательной полной энергией и $q(0) \in \Sigma_\varepsilon$. Утверждается, что за конечное время точка $q(t)$ покинет Σ_ε. Действительно, на таком движении $\dot{q}(t) \neq 0$. Следовательно, полная энергия $E = T + U$ монотонно убывает. Если $q(t) \in \Sigma_\varepsilon$ для всех $t > 0$ и при этом $E(t)$ стремится к конечному пределу при $t \to +\infty$, то $\dot{q}(t) \to 0$. Но при малых значениях скорости силы трения малы по сравнению с потенциальными силами, которые сообщат системе достаточно большую скорость. Δ

КОММЕНТАРИЙ К СПИСКУ ЛИТЕРАТУРЫ

Основные принципы механики достаточно полно и подробно изложены в книгах [6], [20], [21], [39]. С генезисом основных понятий механики можно познакомиться по книге [28]. В [26] содержится оригинальное построение динамики, в которой отсутствует понятие ускоряющей силы: искривление траекторий вызывается лишь связями, наложенными на систему. Сборник статей [10] дает хорошее представление о развитии вариационных методов классической механики до 1950 года. В книге [23] развивается систематический подход к гамильтоновой механике, основанный на использовании интегральных инвариантов. Работа [25] содержит построение теории гамильтоновых систем со связями.

Работы [34], [22] оказали решающее влияние на современное развитие теории дифференциальных уравнений и классической механики. В них введены новые понятия и методы, ставшие теперь классическими. Качественным аспектам теории динамических систем посвящены работы [1], [3], [7], [12], [15], [31], [33], [38].

С математическими аспектами небесной механики можно познакомиться по книгам [24], [34], [37], [42]. В [37], [42] задачи небесной механики трактуются как задачи качественной и аналитической теории дифференциальных уравнений, а книга [24] содержит обстоятельное введение в теорию возмущений. Работа [2] является обзором результатов, посвященных качественному анализу финальных движений в задаче трех тел (см. также [31]).

Вопросы понижения порядка гамильтоновых систем подробно обсуждаются в [23], [34] (см. также [168]). Относительно понижения порядка по Раусу лагранжевых систем см. [121], [124]. Работа [38] содержит детальное исследование отображения энергии-момента.

Различные вопросы теории интегрируемых систем обсуждаются в [6], [13], [19], [27], [30], [32], [65], [136], [137]. В [19], [27], [30] подчеркнуты аналитические аспекты, а в [32], [65], [136], [137], [178] обсуждаются современные алгебро-геометрические методы интегрирования гамильтоновых систем.

Теория возмущений в системах дифференциальных уравнений общего вида обсуждается в [7], [8], [9], [16], [29], а для гамильтоновых систем в [18], [24], [34]. КАМ-теории положила начало работа [14]. Работы [4, 5] содержат первые подробные доказательства теорем о сохранении инвариантных торов гамильтоновых систем. В [29] построена теория возмущений условно-периодических решений негамильтоновых систем дифференциальных уравнений.

В работе [13] изложены методы доказательства неинтегрируемости гамильтоновых систем. Работы [35], [36] содержат подробные доказательства неинтегрируемости уравнений Гамильтона вблизи положений равновесия. Вопросы качественного анализа поведения траекторий в неинтегрируемых динамических системах рассматриваются в [1], [3], [31], [33].

Обзор результатов по теории устойчивости положений равновесия и стационарных движений механических систем содержится в [11]. Элементы теории колебаний изложены в [6], [7], [39]. Работы [40], [41] содержат полное описание нормальных форм линейных гамильтоновых систем.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Алексеев В. М.*, Квазислучайные динамические системы I, II, III. Мат. сб., 1968, 76, вып. 1, 72—134; 1968, 77, вып. 4, 545—601; 1969, 78, вып. 1, 3—50
2. —, Финальные движения в задаче трех тел и символическая динамика. Успехи мат. наук, 1981, 36, вып. 4, 161—176
3. *Аносов Д. В.*, Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны. Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1967, 90, 210 с.
4. *Арнольд В. И.*, Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона. Успехи мат. наук, 1963, 18, вып. 5, 13—40
5. —, Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике. Успехи мат. наук, 1963, 18, вып. 6, 91—192
6. —, Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974, 432 с.
7. —, Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978, 304 с.
8. *Боголюбов Н. Н.*, О некоторых статистических методах в математической физике. Львов: Изд-во АН УССР, 1945, 140 с.
9. —, *Митропольский Ю. А.*, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Изд. 2-е. М.: Наука, 1974, 504 с.
10. Вариационные принципы механики (сборник статей). М.: Физматгиз, 1959, 932 с.
11. *Карапетян А. В., Румянцев В. В.*, Устойчивость консервативных и диссипативных систем. Общая механика. Т. 6. Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР. М.: 1983, 132 с.
12. *Козлов В. В.*, Методы качественного анализа в динамике твердого тела. М.: Изд-во МГУ, 1980, 232 с.
13. —, Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике. Успехи мат. наук, 1983, 38, вып. 1, 3—67
14. *Колмогоров А. Н.*, О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона. Докл. АН СССР, 1954, *98*, № 4, 527—530
15. —, Общая теория динамических систем и классическая механика. В кн.: Международный математический конгресс в Амстердаме. М.: Физматгиз, 1961, 187—208
16. *Моисеев Н. Н.*, Асимптотические методы нелинейной механики. Изд. 2-е. М.: Наука, 1981, 400 с.
17. *Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.*, Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967, 519 с.
18. *Нехорошев Н. Н.*, Экспоненциальная оценка времени устойчивости гамильтоновых систем, близких к интегрируемым. Успехи мат. наук, 1977, *32*, вып. 6, 5—66
19. *Чаплыгин С. А.*, Исследования по динамике неголономных систем. М.-Л.: Гостехиздат, 1949, 112 с.
20. *Abraham R., Marsden J.*, Foundations of mechanics. New York—Amsterdam: Benjamin, 1978, 806 p.
21. *Appell P.*, Traité de mécanique rationnelle. T. 1—2. Ed. 4-e. Paris. Gauthier—Villars, 1919, 619 p.; 1924, 575 p.
(Перевод на русский язык: Аппель П., Теоретическая механика. Т. 1—2. М.: Физматгиз, 1960, 515 с.; 487 с.)
22. *Birkhoff G. D.*, Dynamical systems. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 1927, 9, 296 p.
(Перевод на русский язык: Биркгоф Дж. Д., Динамические системы. М. Л.: Гостехиздат, 1941, 320 с.)
23. *Cartan E.*, Lecons sur les invariants intégraux. Paris: Hermann, 1922, 210 p.

(Перевод на русский язык: Картан Э., Интегральные инварианты, М.-Л.: Гостехиздат, 1940, 216 с.)
24. *Charlier C. L.*, Die Mechanik des Himmels. Bd. 1—2. Aufl. 2. Berlin—Leipzig: Walter de Gruyter, 1927, 488 s.; 479 s.
(Перевод на русский язык: Шарлье К. Л. Небесная механика. М.: Наука, 1966, 627 с.)
25. *Dirac P. A.*, On generalized Hamiltonian dynamics. Can. J. Math., 1950, *2*, № 2, 129—148
26. *Hertz H.*, Die Prinzipien der Mechanik in neuem Zusammenhange dargestellt. Ges. Werke. Bd. 3. Leipzig: Barth, 1910, 312 s.
(Перевод на русский язык: Герц Г., Принципы механики, изложенные в новой связи. М.: Изд-во АН СССР, 1959, 386 с.)
27. *Jacobi C. G. J.*, Vorlesungen über Dynamik. Aufl. 2. Berlin: G. Reimer, 1884, 300 s.
(Перевод на русский язык: Якоби К., Лекции по динамике. М.-Л.: Гостехиздат, 1936, 271 с.)
28. *Lagrange J. L.*, Mécanique Analytique. Oeuvres de Lagrange. T. 11—12. Paris, Gauthier-Villars, 1888, 502 p.; 1889, 391 p.
(Перевод на русский язык: Лагранж Ж., Аналитическая механика. Изд. 2-е. Т. 1—2. М.-Л.: Гостехиздат 1950, 594 с.; 440 с.)
29. *Moser J.*, Convergent series expansions for quasiperiodic motions. Math. Ann., 1967, *169*, 136—176
(Перевод на русский язык: Мозер Ю., О разложении условно-периодических решений в сходящиеся степенные ряды. Успехи мат. наук, 1969, 24, вып. 2, 165—211)
30. —, Lectures on Hamiltonian systems. Mem. AMS, 1968, № 81, 1—60
(Перевод на русский язык в кн.: Мозер Ю., Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973, 168 с.)
31. —, Stable and random motions in dynamical systems. Ann. Math., Stud., № 77. Princeton: Univ. Press, 1973, 198 p.
32. —, Various aspects of integrable Hamiltonian systems. Progress in Math., 8. Boston: Birkhäuser, 1980, 233—289
(Перевод на русский язык: Мозер Ю., Некоторые аспекты интегрируемых гамильтоновых систем. Успехи мат. наук, 1981, 36, вып. 5, 109—151)
33. *Nitecki Z.*, Differentiable dynamics. An introduction to the orbit structure of diffeomorphisms. Cambridge, Massachusetts, and London: MIT Press, 1971, 282 p.
(Перевод на русский язык: Нитецки З., Введение в дифференциальную динамику. М.: Мир, 1975, 304 с.)
34. *Poincaré H.*, Les métodes nouvelles de la mécanique céleste. T. 1—3. Paris: Gauthier—Villars, 1892, 385 p.; 1893, 472 p.; 1899, 414 p.
(Перевод на русский язык: Пуанкаре А., Новые методы небесной механики. Т. 1—3. В кн.: Избр. труды. Т. 1—2. М.: Наука, 1971, 771 с.; 1972, 9—356)
35. *Siegel C. L.*, On the integrals of canonical systems. Ann. Math., 1941, *42*, № 3, 806—822
(Перевод на русский язык: Зигель К. Л., Об интегралах гамильтоновых систем. Математика. Период. сб. перев. ин. статей, 1961, *5*, № 2, 103—117)
36. —, Über die Existenz einer Normal-form analytischer Hamiltonscher Differetialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung. Math., Ann., 1954, *128*, 144—170
(Перевод на русский язык: Зигель К. Л., О существовании нормальной формы аналитических дифференциальных уравнений Гамильтона. Математика. Период. сб. перев. ин. статей, 1961, 5, № 2, 129—156)
37. —, *Moser J. K.*, Lectures on celestial mechanics. Berlin—Heidelberg—New York: Springer—Verlag, 1971, 290 p.
38. *Smale S.*, Topology and mechanics. Invent. Math., 1970, *10*, № 6, 305—331; *11*, № 1, 45—64

(Перевод на русский язык: Смейл С., Топология и механика. Успехи мат. наук, 1972, *27*, № 2, 77—133)
39. *Whittaker E. T.*, A treatise on the analytical dynamics. Ed. 3-d. Cambridge: Univ. Press, 1927, 456 p.
(Перевод на русский язык: Уиттекер Е. Т., Аналитическая динамика. М.-Л.: Гостехиздат, 1937, 500 с.)
40. *Williamson J.*, On the algebraic problem concerning the normal forms of linear dynamical systems. Amer. J. Math., 1936, *58*, № 1, 141—163
41. —, The exponential representation of canonical matrices. Amer. J. Math., 1939, *61*, № 4, 897—911
42. *Wintner A.*, The analytical foundations of celestial mechanics. Princeton: Univ. Press, 1941, 448 p.
(Перевод на русский язык: Уинтнер А., Аналитические основы небесной механики. М.: Физматгиз, 1967, 524 с.)

ЛИТЕРАТУРА

43. *Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д., Черноусько Ф. Л.*, Быстрое движение вокруг неподвижной точки тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде. Изв. АН СССР. Мех. твердого тела, 1982, № 3, 5—13
44. *Аносов Д. В.*, Осреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений с быстроколеблющимися решениями. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1960, *24*, № 5, 721—742
45. *Арнольд В. И.*, О неустойчивости динамических систем со многими степенями свободы. Докл. АН СССР, 1964, *156*, № 1, 9—12
46. —, Условия применимости и оценка погрешности метода усреднения для систем, которые в процессе эволюции проходят через резонансы. Докл. АН СССР, 1965, 161, № 1, 9—12
47. —, *Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М.*, Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов. М.: Наука, 1982, 304 с.
48. *Бакай А. С.* Резонансные явления в нелинейных системах. Дифференц. уравн., 1966, *2*, № 4, 473—493
49. —, *Степановский Ю. П.*, Адиабатические инварианты. Киев: Наукова думка, 1981, 283 с.
50. *Белецкий В. В.*, Очерки о движении космических тел. Изд. 2-е. М.: Наука, 1977, 430 с.
51. *Боголюбов Н. Н.*, Теория возмущений в нелинейной механике. Сб. Института строительной механики АН УССР, 1950, *14*, 9—34
52. —, *Зубарев Д. Н.*, Метод асимптотического приближения для систем с вращающейся фазой и его применение к движению заряженных частиц в магнитном поле. Укр. мат. ж., 1955, *7*, № 1, 5—17
53. —, *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.*, Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. Киев: Наукова думка, 1969, 248 с.
54. *Болотин С. В.*, Либрационные движения натуральных динамических систем. Вестн. Моск. ун-та. Мат., мех., 1978, № 6, 72—77
55. —, Неинтегрируемость задачи n центров при $n>2$. Вестн. Моск. ун-та. Мат., мех., 1984, № 3, 65—68
56. —, Замечание о методе Рауса и гипотезе Герца. Вестн. Моск. ун-та. Мат., мех., 1985, № 2
57. —, *Козлов В. В.*, Либрация в системах со многими степенями свободы. Прикл. мат. и мех., 1978, *42*, вып. 2, 245—250
58. *Бренделев В. Н.*, О реализации связей в неголономной механике. Прикл. мат. и мех., 1981, *45*, вып. 3, 481—487
59. *Брюно А. Д.*, Неустойчивость в системе Гамильтона и распределение астероидов. Мат. сб., 1970, *83*, вып. 2, 273—312
60. —, Исследование по ограниченной задаче трех тел. I. Периодические

решения системы Гамильтона. М.: Ин-т прикл. математики АН СССР, 1978, 44 с.
61. —, Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979, 255 с.
62. *Вашковьяк М. А.*, Эволюция орбит в ограниченной круговой двукратно осредненной задаче трех тел I. Качественное исследование. Космич. исследования, 1981, *19*, № 1, 5—18
63. *Волосов В. М., Моргунов Б. И.*, Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971, 506 с.
64. *Галин Д. М.*, Версальные деформации линейных гамильтоновых систем. Тр. семинара им. И. Г. Петровского, 1975, вып. 1, 63—74
65. *Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П.*, Нелинейные уравнения типа Кортевега-де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия. Успехи мат. наук, 1976, *31*, вып. 1, 55—136
66. *Дыхне А. М.*, Квантовые переходы в адиабатическом приближении. ЖЭТФ, 1960, *38*, вып. 2, 570—578
67. *Евтушенко Ю. Г.*, Влияние касательного ускорения на движение спутника. Прикл. мат. и мех., 1966, *30*, вып. 3, 594—598
68. *Заславский Г. М., Чириков Б. В.*, Стохастическая неустойчивость нелинейных колебаний. Успехи физ. наук, 1971, *105*, вып. 1, 3—40
69. *Зиглин С. Л.*, О вековой эволюции орбиты планеты в системе двойной звезды. Письма в Астрон. ж., 1975, *1*, № 9, 45—47
70. —, Неинтегрируемость задачи о движении четырех точечных вихрей. Докл. АН СССР, 1979, *250*, № 6, 1296—1300
71. —, Расщепление сепаратрис, ветвление решений и несуществование интеграла в динамике твердого тела. Тр. Моск. мат. о-ва, 1980, *41*, 287—303
72. —, Самопересечение комплексных сепаратрис и несуществование интеграла в гамильтоновых системах с полутора степенями свободы. Прикл. мат. и мех., 1981, *45*, вып. 3, 564—566
73. —, Ветвление решений и несуществование первых интегралов в гамильтоновой механике I, II. Функц. анализ и его прил., 1982, *16*, вып. 3, 30—41; 1983, *17*, вып. 1, 8—23
74. *Капица П. Л.*, Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса. ЖЭТФ, 1951, *21*, вып. 5, 588—598
75. *Карапетян А. В.*, О реализации неголономных связей и об устойчивости кельтских камней. Прикл. мат. и мех., 1981, 44, вып. 1, 42—51
76. *Ковалев А. М., Савченко А. Я.*, Устойчивость равномерных вращений твердого тела вокруг главной оси. Прикл. мат. и мех., 1975, *39*, вып. 4, 650—660
77. *Ковалев А. М., Чудненко А. Н.*, Об устойчивости положения равновесия гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в случае равных частот. Доповіді АН УРСР. А, 1977, *11*, 1010—1013
78. *Козлов В. В.*, О геометрии областей возможных движений с краем. Вестн. Моск. ун-та. Мат., мех., 1977, № 5, 118—120
79. —, Несуществование однозначных интегралов и ветвление решений в динамике твердого тела. Прикл. мат. и мех., 1978, *42*, вып. 3, 400—406
80. —, О неустойчивости равновесия в потенциальном поле. Успехи мат. наук, 1981, *36*, вып. 3, 215—216
81. —, Неустойчивость равновесия в потенциальном поле с учетом сил вязкого трения. Прикл. мат. и мех., 1981, *45*, вып. 3, 570—572
82. —, Асимптотические решения уравнений классической механики. Прикл. мат. и мех., 1982, *46*, вып. 4, 573—577
83. —, Динамика систем с неинтегрируемыми связями I, II, III. Вест. Моск. ун-та. Мат., мех., 1982, № 3, 92—100; 1982, № 4, 70—76; 1983, № 3, 102—111
84. —, Реализация неинтегрируемых связей в классической механике. Докл. АН СССР, 1983, *272*, № 3, 550—554
85. —, *Колесников Н. Н.*, О теоремах динамики. Прикл. мат. и мех., 1978, *42*, вып. 1, 28—33

86. —, *Паламодов В. П.*, Об асимптотических решениях уравнений классической механики. Докл. АН СССР, 1982, *263*, № 2, 285—289
87. *Колмогоров А. Н.*, О динамических системах с интегральным инвариантом на торе. Докл. АН СССР, 1953, *93*, № 5, 763—766
88. *Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И.*, Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980, 304 с.
89. *Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.*, Приложение методов нелинейной механики к теории стационарных колебаний. В кн.: Боголюбов Н. Н. Избр. труды, Т. I, Киев: Наукова думка, 1969, 257—337
90. *Лазуткин В. Ф.*, К теореме Мозера об инвариантных кривых. В сб.: Вопр. динамич. теории распростр. сейсмич. волн. Вып. 14. Л.: Наука, 1974, 109—120
91. — ,Выпуклый биллиард и собственные функции оператора Лапласа. Л.: Изд-во ЛГУ, 1981, 196 с.
92. *Леонтович А. М.*, Об устойчивости лагранжевых периодических решений в ограниченной задаче трех тел. Докл. АН СССР, 1962, *143*, № 3, 525—528
93. *Лидов М. Л.*, О приближенном анализе эволюции орбит искусственных спутников. В кн.: Проблемы движения искусственных небесных тел. М.: Изд. АН СССР, 1963, 119—134
94. *Маркеев А. П.*, Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978, 312 с.
95. *Мельников В. К.*, Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях. Тр. Моск. мат. о-ва, 1963, *12*, 3—52
96. *Митропольский Ю. А.*, Метод усреднения в нелинейной механике. Киев Наукова думка, 1971, 440 с.
97. —, *Лыкова О. Б.*, Интегральные многообразия в нелинейной механике. М.: Наука, 1973, 512 с.
98. *Мищенко А. С., Фоменко А. Т.*, Обобщенный метод Лиувилля интегрирования гамильтоновых систем. Функц. анализ и его прил., 1978, *12*, вып. 2, 46—56
99. —, —, Интегрирование гамильтоновых систем с некоммутативными симметриями. Тр. Семинара по вектор. и тензор. анализу с их прил. к геометрии, мех. и физ. Моск. ун-т, 1980, *20*, 5—54
100. *Морозов А. Д.*, О полном качественном исследовании уравнения Дюффинга. Дифференц. уравнения, 1976, *12*, № 2, 241—255
101. *Нейштадт А. И.*, О прохождении через резонансы в двухчастотной задаче. Докл. АН СССР, 1975, *221*, № 2, 301—304
102. —, Устойчивость плоских решений двукратноосредненной ограниченной круговой задачи трех тел. Письма в Астрон. ж., 1975, *1*, № 10, 41—45
103. —, Об осреднении в многочастотных системах II. Докл. АН СССР, 1976, *226*, № 6, 1295—1298
104. —, Прохождение через сепаратрису в резонансной задаче с медленно изменяющимся параметром. Прикл. мат. и мех., 1975, *39*, вып. 4, 621—632
105. —, Об эволюции вращения твердого тела под действием суммы постоянного и диссипативного возмущающих моментов. Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела, 1980, № 6, 30—36
106. —, О точности сохранения адиабатического инварианта. Прикл. матем. и мех., 1981, *45*, вып. 1, 80—87
107. —, Оценки в теореме Колмогорова о сохранении условно-периодических движений. Прикл. мат. и мех., 1981, *45*, вып. 6, 1016—1025
108. —, О разделении движений в системах с быстро вращающейся фазой. Прикл. мат. и мех., 1984, *48*, вып. 2, 197—204
109. *Нехорошев Н. Н.*, Переменные действие—угол и их обобщения. Тр. Моск. мат. о-ва, 1972, 26, 181—198
110. —, Устойчивые оценки снизу для гладких отображений и для градиентов гладких функций. Мат. сб., 1973, *90*, вып. 3, 432—478
111. —, Экспоненциальная оценка времени устойчивости гамильтоновых си-

стем, близких к интегрируемым II. Тр. семинара им. И. Г. Петровского, 1979, вып. 5, 5—50
112. *Паламодов В. П.*, Об устойчивости равновесия в потенциальном поле. Функц. анализ и его прил., 1977, *11*, вып. 4, 42—55
113. *Пидкуйко С. И., Степин А. М.*, Полиномиальные интегралы гамильтоновых систем. Докл. АН СССР, 1978, *239*, № 1, 50—51
114. *Пронтатов В. Е.*, Оценка погрешности метода усреднения в двухчастотной задаче. Мат. сб., 1983, *122*, вып. 2, 245—264
115. *Сванидзе Н. В.*, Малые возмущения динамической системы с интегральным инвариантом на торе. В кн.: Краевые задачи математической физики, 10. Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1980, *147*, 124—146
116. *Слуцкин А. А.*, О движении одномерного нелинейного осциллятора в адиабатических условиях. ЖЭТФ, 1963, *45*, вып. 4, 978—988
117. *Сокольский А. Г.*, Об устойчивости автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в случае равных частот. Прикл. мат. и мех., 1974, *38*, вып. 5, 791—799
118. —, Об устойчивости автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы при резонансе первого порядка. Прикл. мат. и мех., 1977, *41*, вып. 1, 24—33
119. —, Доказательство устойчивости лагранжевых решений при критическом соотношении масс. Письма в Астрон. ж., 1978, *4*, № 3, 148—152
120. *Татаринов Я. В.*, Портреты классических интегралов задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки. Вест. Моск. ун-та. Мат., мех., 1974, № 6, 99—105
121. —, Геометрический формализм классической динамики. Вест. Моск. ун-та. Мат., мех., 1978, № 3, 109—118
122. *Федорюк М. В.*, Адиабатический инвариант системы линейных осцилляторов и теория рассеяния. Дифференц. уравнения, 1976, *12*, № 6, 1012—1018
123. *Хапаев М. М.*, Об осреднении в многочастотных системах. Докл. АН СССР, 1974, *217*, № 5, 1021—1024
124. *Харламов М. П.*, Характеристический класс расслоения и существование глобальной функции Рауса. Функц. анализ и его прил., 1977, *11*, вып. 1, 89—90
125. *Харламова-Забелина Е. И.*, Быстрое вращение твердого тела вокруг неподвижной точки при наличии неголономной связи. Вест. Моск. ун-та. Мат.-мех., 1957, № 6, 25—34
126. *Чеботарев Н. Г.*, Теория групп Ли. М.-Л.: Гостехиздат, 1940, 396 с.
127. *Челомей В. Н.*, О возможности повышения устойчивости упругих систем при помощи вибраций. Докл. АН СССР, 1956, *110*, № 3, 345—347
128. —, Парадоксы в механике, вызываемые вибрациями. Докл. АН СССР, 1983, *270*, № 1, 62—67
129. *Черноусько Ф. Л.*, О резонансе в существенно нелинейной системе. Ж. вычисл. мат. и матем. физ., 1963, *3*, № 1, 131—144
130. *Четаев Н. Г.*, О неустойчивости равновесия в некоторых случаях, когда функция сил не есть максимум. Прикл. мат. и мех., 1952, *16*, вып. 1, 89—93
131. *Чириков Б. В.*, Прохождение нелинейной колебательной системы через резонанс. Докл. АН СССР, 1959, *125*, № 5, 1015—1018
132. *Чудненко А. Н.*, К устойчивости положений равновесия гамильтоновой системы с двумя степенями свободы при наличии двойного нулевого корня. В кн.: Мех. тверд. тела. Респ. межвед. сб., вып. 10. Киев: Наукова думка, 1978, 54—60
133. *Якубович В. А., Старжинский В. М.*, Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972, 718 с.
134. *Aa E. van der, Sanders J. A.*, The 1 : 2 : 1 resonance, its periodic orbits and integrals. Lect. Notes Math., 1980, *711*, 186—208
135. —, *Verhulst F.*, Asymptotic integrability and periodic solutions of a Ha-

miltonian system in 1 : 2 : 2 resonance. Utrecht: Utrecht Univ., 1982, 23 p.
136. *Adler M., Moerbeke P. van.* Completely integrable systems, Euclidian Lie algebras and curves. Adv. Math., 1980, *38*, № 3, 267—317
137. —, —, The algebraic integrability of geodesic flow on SO (4). Invent. Math., 1982, *67*, 297—331
138. *Andoyer H.*, Cours de mécanique céleste. T. I, Paris: Gauthier—Villars, 1923, 439 p.
139. *Aubry S.*, The twist map, the extended Frenkel-Kontorova model and the devil's staircase. Physica D. 1983, *7D*, № 1—3, 240—258
140. *Birkhoff G.*, Hydrodynamics. Ed. 2nd. Princeton: Univ. Press, 1960, 184 p.
(Перевод на русский язык: Биркгоф Г., Гидродинамика. Изд. 2-е. М.: ИЛ, 1963, 244 с.)
141. *Bliss G. A.*, Lectures on the calculus of variations. Chicago: Univ. Press, 1946, 296 p.
(Перевод на русский язык: Блисс Дж. А., Лекции по вариационному исчислению. М.: ИЛ, 1950, 348 с.)
142. *Bohm D.*, Quantum Theory. New York: Prentice-Hall, 1952, 646 p. (Перевод на русский язык: Бом Д., Квантовая теория. Изд. 2-е. М.: Наука, 1965, 727 с.)
143. *Burgh A. H. P. van der*, Studies in the asymptotic theory of nonlinear resonance. Delft: Math. Dept. Techn. Univ., 1974, 85 p.
144. *Caratheodory C.*, Der Schlitten. Z. angew. Math. und Mech., 1933, *13*, 71—76
145. *Cassels J. W. S.*, An introduction to diophantine approximation. Cambridge: Univ. Press, 1957, 166 p.
(Перевод на русский язык: Касселс Д. В. С., Введение в теорию диофантовых приближений. М.: ИЛ, 1961, 216 с.)
146. *Chirikov B. V.*, A universal instability of many-dimensional oscillator systems. Phys. Rep., 1979, *52*, № 5, 263—379
147. *Cushman R.*, Examples of nonintegrable analytic Hamiltonian vector field with no small divisors. Trans. Amer. Math. Soc., 1978, *238*, 45—55
148. *Deprit A., Deprit-Bartolome A.*, Stability of the triangular Lagrangian p ints. Astron. J., 1967, *72*, № 2, 173—179
149. —, *Henrard J., Rom A.*, Analytical Lunar ephermeris: Brouwer's sugges tion. Astron. J., 1970, *75*, № 6, 747—750
150. *Douady R.* Une démonstration directe de l'équivalence des théorémes de tores invariants pour difféomorphismes et champs de vecteures. C. r. Acad. sci. Paris A., 1982, *295*, 201—204
151. —, *Le Calvez P.*, Example de point fixe elliptique non topologiquemen stable en dimension 4. C. r. Acad. sci. Paris A., 1983, *296*, 895—898
152. *Duistermaat J. J.*, Non-integrability of the 1 : 1 : 2-resonance. Utrecht : Utrecht Univ., 1983, 22 p.
153. *Gardner C. S.*, Adiabatic invariants of periodic classical systems. Phys. Rev., 1959, *115*, № 4, 791—794
154. *Giacaglia G. E. O.*, Perturbation methods in non-linear systems. New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag, 1972, 369 p.
(Перевод на русский язык: Джакалья Г. Е. О., Методы возмущений дл нелинейных систем. М.: Наука, 1979, 320 с.)
155. *Graff S. M.*, On the conservation of hyperbolic tori for Hamiltonian sy stems. J. Differ. Equat., 1974, *15*, № 1, 1—69
156. *Gustavson F.*, On constructing formal integrals of a Hamiltonian system near an equilibrium point. Astron. J., 1966, *71*, № 8, 670—686
157. *Hamilton R. S.*, The inverse function theorem of Nash and Moser. Bull Amer. Math. Soc., 1982, *7*, № 1, 65—222
158. *Kampen E. R. van, Wintner A.*, On a symmetrical canonical reduction of the problem of three bodies. Amer. J. Math., 1937 *59*, № 1, 153—166
159. *Kaplansky I.*, An introduction to differential algebra. Paris: Hermann, 1957, 62 p.

(Перевод на русский язык: Капланский И. Введение в дифференциальную алгебру. М.: ИЛ, 1959, 85 с.)
160. *Kasuga T.*, On the adiabatic theorem for the Hamiltonian system of differential equations in the classical mechanics I, II, III. Proc. Jap. Acad., 1961, *37*, № 7, 366—382
161. *Klingenberg W.*, Lectures on closed geodesics. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1978, 227 p.
(Перевод на русский язык: Клингенберг В., Лекции о замкнутых геодезических. М.: Мир, 1982, 414 с.)
162. *Lamb H.*, Hydrodynamics. Ed. 6-th. New York; Dover publ., 1945, 738 p. (Перевод на русский язык: Ламб Г., Гидродинамика. М.: Гостехиздат, 1947, 928 с.)
163. *Lenard A.*, Adiabatic invariance to all orders. Ann. Phys. (USA), 1959, *6*, № 3, 261—276
164. *Levi M.*, Adiabatic invariants of the linear Hamiltonian systems with periodic coefficients. J. Differ. Equat., 1981, *42*, № 1, 41—47
165. *Lidov M. L.*, *Ziglin S. L.*, The analysis of restricted circular twice-averaged three body problem in the case of close orbits. Celest. Mech., 1974, *9*, № 2, 151—173
166. *Littlejohn R. G.*, Hamiltonian theory of guiding center motion. Berkeley: Lawrence Berkeley Lab., 1980, 224 p.
167. *Mac-Kay R. S.*, *Meiss J. D.*, *Percival I. C.*, Transport in Hamiltonian systems. London: Queen Mary College, 1983, 81 p.
168. *Marsden J.*, *Weinstein A.*, Reduction of symplectic manifolds with symmetry. Repts. Math. Phys., 1974, *5*, № 1, 121—130
169. *Mather J. N.*, Existence of quasi-periodic orbits for twist homeomorphism of the annulus. Topology, 1982, *21*, № 4, 457—467
170. —, Concavity of the Lagrangian for quasi-periodic orbits. Comment. Math. Helv., 1982, *57*, № 3, 356—376
171. —, A criterion for non-existence of invariant circles. Princeton: Princeton Univ., 1982, 10 p.
172. —, McGehee R., Solutions of the collinear four-body problem which become unbounded in finite time. Lect. Notes Phys., 1975, *38*, 573—597
173. *Milnor J.*, Morse theory. Princeton: Univ. Press, 1963, 153 p.
(Перевод на русский язык: Милнор Дж., Теория Морса. М.: Мир, 1965, 184 с.)
174. *Moltchanov A. M.*, The resonant structure of the Solar System. ICARUS, 1968, *8*, № 2, 203—216
175. *Moser J.*, The analytical invariants of an area-preserving mapping near hyperbolic point. Communs. Math. Phys., 1956, *9*, № 4, 673—692
176. —, On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus. Nachr. Acad. Wiss. Göttingen. II Math.-Phys. Kl., 1962, № 1, 11—20
(Перевод на русский язык: Мозер Ю., Об инвариантных кривых сохраняющего площадь отображения кольца в себя. Математика. Период. сб. перев. ин. статей, 1963, *6*, № 5, 51—67)
177. —, A rapidly convergent iteration method and non-linear differential equations I, II. Ann. scuola norm. super. Pisa, Ser. fis. e mat., 1966, *20*, № 2, 265—315; № 3, 499—535
(Перевод на русский язык: Мозер Ю., Быстро сходящийся метод итераций и нелинейные дифференциальные уравнения. Успехи матем. наук, 1968, *23*, вып. 4, 179—238)
178. —, Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformation. Adv. Math., 1975, *16*, № 2, 197—220
179. *Nash J.*, The imbedding problem for Riemanian manifolds. Ann. Math., 1956, *63*, № 1, 20—63
180. *Northrop T. G.*, The adiabatic motion of charged particles. New York-London-Sydney: Intersciece, 1963, 109 p.
(Перевод на русский язык: Нортроп Т., Адиабатическая теория движения заряженных частиц. М.: Атомиздат, 1967, 128 с.)

181. *Percival I. C.*, A variational principle for invariant tori of fixed freq cy. J. Phys. A: Math., Nucl. and Gen., 1979, *12*, № 3, 57—60
182. —, Variational principles for invariant tori and cantori. Simposium nonlinear dynamics and beam-beam interactions. Amer. Institute of F sics, Conf. Proc. № 55, 1980, 302—310
183. *Pöschel J.*, Über invariante Tori in differenzierbaren Hamiltonschen Sy men. Bonn. Math. Schr., 1980, *120*, 103 p.
184. —, Integrability of Hamiltonian systems on Cantor sets. Communs. P and Appl. Math., 1982, *35*, № 1, 653—695
185. *Roels J.*, An extension to resonant cases of Lyapunov's theorem conc ning the periodic solutions near a Hamiltonian equilibrium. J. Differe Equat., 1971, *9*, № 2, 300—324
186. —, Families of periodic solutions near a Hamiltonian equilibrium, wh the ratio of two eigenvalues is 3. J. Different. Equat., 1971, *10*, № 431—447
187. *Rubin H., Ungar P.*, Motion under a strong constraining force. Coı muns. Pure and Appl. Math., 1957, *10*, № 1, 65—87
188. *Rüssmann H.*, Über das Verhalten analytischer Hamiltonscher Differetia gleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung. Math. Ann., 196 *154*, 285—300
189. —, Kleine Nenner I: Über invariante Kurven Differensierbaren Abbi dungen eines Kreisringes. Nachr. Acad. Wiss. Göttingen. II Math. Phy Kl., 1970, № 5, 67—105
190. —, Kleine Nenner II: Bemerkungen zur Newtonshen Methode. Nachr. Aca Wiss. Göttinden, II Math. Phys. Kl., 1972, № 1, 1—10
191. —, On optimal estimates for the solutions of linear partial differenti equation of first order with constant coefficient on the torus. Lect. Note Phys., 1975, *38*, 598—624
192. *Sanders J. A.*, Are higher order resonances really interesting? Celes Mech., 1977, *16*, № 4, 421—440
193. *Seifert H.*, Periodische Bewegungen mechanischer Systeme. Math. Z 1948, *51*, № 2, 197—216
194. *Souriau J.-M.*, Structure des systemes dynamiques. Paris: Dunod, 197(414 p.
195. *Takens F.*, Motion under the influence of a strong constraining force. Ir Global Theory Dyn. Syst., Berlin: Springer-Verlag, 1980, 425—445
196. *Youg L. C.*, Lectures on the calculus of variations and optimal contr theory. Philadelfia-London-Toronto: W. B. Saunders comp., 1969, 331 p (Перевод на русский язык: Янг Л., Лекции по вариационному исчисле нию и теории оптимального управления. М.: Мир, 1974, 488 с.)
197. *Zehnder E.*, Generalized implicit function theorems with applications t some small divisor problems I, II. Communs. Pure and Appl. Math., 197 *28*, № 1, 91—140; 1976, *29*, № 1, 49—111

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

(соответствует рубрике 27.29.27 Рубрикатора ГАСНТИ)

УДК 517.933:521 7

В. И. Арнольд, В. В. Козлов, А. И. Нейштадт, Математические аспекты классической и небесной механики. «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 3 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1985. 5—304

Изложены основные принципы, задачи и методы классической механики. Основное внимание уделено математической стороне предмета. Обсуждаются математические модели движения механических систем, изложены различные аспекты теории понижения порядка систем с симметриями, содержится обзор наиболее общих и эффективных методов интегрирования уравнений движения, исследованы явления качественного характера, препятствующие полной интегрируемости гамильтоновых систем и, наконец, изложены наиболее результативные разделы классической механики — теория возмущений и теория колебаний. Результаты общего характера проиллюстрированы многочисленными примерами из небесной механики и динамики твердого тела. Изложены различные аспекты задачи n тел: столкновения, регуляризация, частные решения, финальные движения и т. д. Обсуждается применение общих результатов теории возмущений к проблемам устойчивости в небесной механике.

Технический редактор *А. М. Мартынова*

Сдано в набор 27.12.84 Подписано в печать 25.06.85
Формат 60х90 1/16 Печать офсетная
Усл. печ.л. 19,0 Усл.кр.-отт. 19,25 Уч.-изд.л. 18,01
Тираж 500 экз. Заказ 9813 Цена 2 р. 60 к.

Адрес редакции: 125219, Москва, А-219, Балтийская ул., 14
Тел. 155-42-41

Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ
140010, Люберцы 10, Московской обл., Октябрьский пр., 403

Индекс 56849

ИНТ Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 3, 1985, 1—304

ОПЕЧАТКИ

Современные проблемы математики. Фунд. направл. Том 3

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
160	1 сверху	J, ψ	$J, \dot{\psi}$
282	13 сверху	$\varphi = \mathrm{const}$	$\dot{\varphi} = \mathrm{const}$

Зак. 9813