

# КУРС ФИЗИКИ

II

А. В. Астахов  
Ю. М. Широков

## электромагнитное поле

$$\square \varphi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

$$\square A = -\frac{1}{\epsilon_0 c^2} J$$

---

# КУРС ФИЗИКИ

Под общей редакцией  
Ю. М. ШИРОКОВА

ТОМ II

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
1980

А. В. АСТАХОВ, Ю. М. ШИРОКОВ

---

# ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

*Допущено Министерством  
высшего и среднего специального образования СССР  
в качестве учебного пособия для студентов  
высших технических учебных заведений*

22.3

A 91

УДК 53

A  $\frac{20401 - 144}{053 (02) - 80}$  92-80 1704010000

© Издательство «Наука».  
Главная редакция  
физико-математической  
литературы, 1980

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	7
Введение . . . . .	9
§ В.1. Поля в физике . . . . .	9
§ В.2. Элементы математической теории поля . . . . .	11
<b>Глава 15. Фундаментальные законы электромагнетизма . . . . .</b>	<b>24</b>
§ 15.1. Электрические заряды . . . . .	24
§ 15.2. Состояния электромагнитного поля . . . . .	30
§ 15.3. Уравнения Максвелла . . . . .	36
§ 15.4. Импульс, энергия и момент импульса электромагнитного поля . . . . .	49
<b>Глава 16. Стационарные поля . . . . .</b>	<b>53</b>
§ 16.1. Общие свойства . . . . .	56
§ 16.2. Некоторые точные решения стационарных уравнений Максвелла . . . . .	67
§ 16.3. Поля на далеких расстояниях . . . . .	80
<b>Глава 17. Стационарные поля и проводники . . . . .</b>	<b>92</b>
§ 17.1. Электропроводность . . . . .	92
§ 17.2. Электрические поля и однородные металлические проводники в равновесных состояниях . . . . .	111
§ 17.3. Стационарные токи, электродвижущая сила, эффекты Холла и Мейснера . . . . .	122
<b>Глава 18. Плазма . . . . .</b>	<b>137</b>
§ 18.1. Плазменные колебания и дебаевский радиус . . . . .	137
§ 18.2. Проводимость плазмы. Плазма в магнитном поле . . . . .	147
<b>Глава 19. Диэлектрики в стационарных электрических полях . . . . .</b>	<b>154</b>
§ 19.1. Поляризованность и связанные заряды поляризации . . . . .	154
§ 19.2. Виды поляризации газов . . . . .	158
§ 19.3. Поляризация плотных сред . . . . .	162
§ 19.4. Свойства стационарных электрических полей в диэлектриках . . . . .	172
<b>Глава 20. Стационарные магнитные поля в веществе . . . . .</b>	<b>182</b>
§ 20.1. Намагниченность и токи намагничивания . . . . .	182
§ 20.2. Диамагнетизм и парамагнетизм . . . . .	187
§ 20.3. Ферромагнетизм . . . . .	195
§ 20.4. Свойства стационарных магнитных полей в веществе . . . . .	203

<b>Глава 21. Квазистационарные распределения зарядов и токов . . . . .</b>	<b>214</b>
§ 21.1. Нестационарные уравнения Максвелла в среде. Условие квазистационарности . . . . .	214
§ 21.2. Генератор переменного тока и мотор индукционного действия . . . . .	223
§ 21.3. Импеданс . . . . .	228
§ 21.4. Электрические колебания . . . . .	238
<b>Глава 22. Электромагнитные волны . . . . .</b>	<b>246</b>
§ 22.1. Электромагнитные волны в свободном пространстве . . . . .	246
§ 22.2. Излучение электромагнитных волн, их генераторы и способы наблюдения . . . . .	260
§ 22.3. Механизм электромагнитного излучения . . . . .	270
<b>Глава 23. Интерференция электромагнитных волн . . . . .</b>	<b>275</b>
§ 23.1. Когерентность . . . . .	275
§ 23.2. Оптические и микроволновые квантовые генераторы . . . . .	286
§ 23.3. Интерференционные явления . . . . .	294
§ 23.4. Дифракция электромагнитных волн . . . . .	305
§ 23.5. Голография . . . . .	312
<b>Глава 24. Взаимодействие электромагнитных волн с веществом . . . . .</b>	<b>320</b>
§ 24.1. Механизм взаимодействия . . . . .	320
§ 24.2. Дисперсия, поглощение, рассеяние электромагнитных волн. Двойное лучепреломление . . . . .	325
§ 24.3. Поведение электромагнитных волн на границах сред . . . . .	339
§ 24.4. Нелинейная оптика . . . . .	348
<b>Предметный указатель . . . . .</b>	<b>356</b>

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Второй том курса посвящен физике некантовых электромагнитных явлений. В нем затронуты также вопросы, последовательное объяснение которым дается только в квантовой теории (например, электропроводность, магнетизм вещества, дисперсия электромагнитных волн в веществе и ряд других). Эти вопросы рассмотрены с помощью классических моделей, в которых квантовая природа явлений феноменологически учтена исходными допущениями.

Уже из школьного курса физики известно, что электромагнитное происхождение имеют не только собственно электрические и магнитные явления, но также оптические, тепловые, механические (не связанные с действием сил гравитации) и химические. Фундаментальность электромагнитных взаимодействий определила подход к изложению материала. Начало книги отведено основам классической физики электромагнетизма — уравнениям Максвелла — Лоренца, обобщившим многочисленные опытные данные об электромагнитных полях и их взаимодействии с электрическими зарядами и токами в некантовых системах. Каждый частный вопрос затем рассматривается на этой единой основе, чем подчеркивается первостепенное значение уравнений электромагнитного поля для описания физических структур и процессов в огромной области пространственных масштабов: от  $10^{-14}$  м до  $10^5$  м. Преимуществом такого подхода является его общность, недостатком — сложность математической структуры уравнений Максвелла. Поэтому последовательное объяснение всех электромагнитных явлений на основе этих уравнений подчас сопряжено с довольно громоздкими математическими выкладками. В связи с этим изучение настоящего тома потребует определенных усилий. Для упрощения изложения наиболее сложные математические выкладки в нем опущены. В таких местах читателю придется принимать на веру приводимые результаты, довольствуясь пояснениями, иллюстрирующими правдоподобность соотношений, данных без вывода.

Особенностью книги является также единое рассмотрение всех электромагнитных волновых процессов, включая и оптиче-

ские явления. При этом внимание постоянно фокусируется на вопросах, общих и важных для физики колебаний и волн любой природы, таких, как соотношения неопределенностей, когерентность, интерференция. Заметное место в книге отведено современной физической оптике и ее приложениям, бурное развитие которых вызвано созданием оптических квантовых генераторов.

Так же, как и в первом томе курса, большое внимание уделено областям применимости физических законов и оценкам порядков физических величин. Петит используется для материала повышенной трудности, относительно громоздких расчетов и сведений исторического характера. Курсивом выделяются важнейшие положения.

Работа над книгой сопряжена с преодолением многочисленных и разнообразных трудностей. В их преодолении мы не были одиноки. С глубокой благодарностью мы обращаемся к рецензентам книги Я. М. Гельферу, А. И. Елькину, Г. Я. Мякишеву и И. В. Савельеву, чьи критические замечания во многом содействовали ее усовершенствованию. Считаю своим приятным долгом выразить искреннюю признательность также Ю. Б. Войтковскому, О. И. Завьялову, М. А. Каллистратовой, А. И. Кецлаху, С. Б. Курман, Н. Д. Максимовой за их помощь в работе над книгой и содействие в создании условий, облегчивших ее написание.

*А. В. Астахов  
Ю. М. Широков*

\* \* \*

Книга была уже закончена, готовился ее выпуск, развернулась работа над последним томом курса, к которому Ю. М. Широков написал обширный материал, когда внезапно случилось непоправимое: 5 июля 1980 г. Юрия Михайловича Широкова не стало. Его отличали ясный ум, широта и независимость взглядов, высокая эрудиция и профессиональная требовательность, способность работать с большим напряжением. Ю. М. Широков был крупным исследователем, плодотворно работавшим над фундаментальными вопросами физики микромира, воспитателем научных кадров и инженеров, обладавшим высоким педагогическим мастерством. Он был глубоко убежден в том, что развитие преподавания физики должно идти в ногу с развитием физической науки и много сделал для того, чтобы это было действительно так.

*А. В. Астахов*



## ВВЕДЕНИЕ

### § В.1. Поля в физике

1. Предмет настоящего тома составляют некантовые электромагнитные и как их составная часть оптические явления, излагаемые с единой точки зрения. Основным объектом изложения является *электромагнитное поле*, как свободное, так и взаимодействующее с другим видом материи — частицами.

*В некантовой области электромагнитное поле представляет собой самостоятельный вид материи, не сводимый ни к частицам, ни к колебаниям какой-либо среды.*

Раздел физики, в котором исследуются свойства электромагнитного поля и взаимодействующих с этим полем других видов материи, называется *электромагнетизмом*. Теория электромагнитных некантовых явлений называется *классической электродинамикой*.

В области квантовых явлений частицы и электромагнитное поле остаются самостоятельными видами материи, но сближаются по своим свойствам: квантовые частицы приобретают волновые (т. е. полевые) свойства, а квантовое электромагнитное поле приобретает свойства совокупности специфических частиц — фотонов.

Существуют две основные причины, в силу которых понимание свойств электромагнитного поля, т. е. электромагнитных взаимодействий, исключительно важно для человека. Во-первых, именно электромагнитными взаимодействиями обусловлена структура материи в области пространственных масштабов примерно от  $10^{-14}$  до  $10^5$  м (на меньших расстояниях более важны ядерные взаимодействия, а на больших — становятся существенными еще и гравитационные). Во-вторых, в настоящее время свойства электромагнитных взаимодействий играют главную роль в развитии современной техники.

2. По историческим причинам термин «поле» в физике имеет два разных смысла, которые не следует путать.

*Во-первых, полем называется специфический вид материи.*

*Во-вторых, среди физических величин, являющихся функциями пространственных координат или, что то же самое, точки, имеются такие, которые называются полями.*

Смешение этих разных смыслов термина «поле» проскальзывает даже в справочных изданиях. Во избежание этого в настоящем томе принята следующая терминология. Словосочетание «электромагнитное поле» всюду означает вид материи. Термин же поле без прилагательного «электромагнитное» относится к физической величине полевых типа.

Здесь уместно сделать еще одно терминологическое уточнение. В физике не все функции координат являются полями. Любая функция координат называется локальной физической величиной. Примерами локальных величин являются плотности, кинетические потоки и поля. С плотностями и кинетическими потоками мы уже встречались в гл. 11 тома I. *Поле* называется локальной физической величиной, которой определяется сила, действующая в рассматриваемой точке пространства на материальную точку, подверженную взаимодействию, переносимому данным полем. В этом томе для нас будут главными электрическое поле  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(x, y, z)$  и магнитное поле  $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(x, y, z)$ , определяющие силы, действующие на пробные заряженные частицы со стороны электромагнитного поля (как вида материи). В общем случае поля являются еще и функциями времени  $t$ . Такие поля называются *переменными* или *нестационарными*. *Постоянные* во времени поля называются *стационарными*.

3. Для электромагнитного поля, как и для всякого физического объекта, существуют понятия: а) состояния, б) уравнений движения. В каждый момент времени  $t$  состояние электромагнитного поля описывается двумя полями  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  (§ 15.2). Уравнения движения для электромагнитного поля содержатся в *микроскопических уравнениях Максвелла* (§ 15.3). Микроскопические уравнения Максвелла описывают порождение электромагнитного поля заряженными частицами, а также распространение этого поля в пространстве.

Электромагнитное поле в свою очередь воздействует на движение заряженных частиц. Это воздействие описывается *силой Лоренца* (§ 2.3 тома I и § 15.1). Назовем уравнение движения частицы под действием силы Лоренца *уравнением Лоренца*.

*Микроскопические уравнения Максвелла совместно с уравнениями Лоренца для заряженных частиц образуют фундаментальную систему уравнений Максвелла — Лоренца классической (т. е. некантовой) электродинамики.*

Эти уравнения содержат описание всех электромагнитных явлений, для которых не являются существенными квантовые свойства.

4. Для описания взаимодействия электромагнитного поля с макроскопическими системами (газы, жидкости, твердые тела) фундаментальные уравнения Максвелла — Лоренца, равно как и сами поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ , практически не могут быть использованы

из-за макроскопического числа ( $10^{23}$  и более) заряженных микрочастиц, участвующих во взаимодействии. В этой *практически важной* ситуации производится переход к физическим величинам, усредненным по *физически бесконечно малому объему*. Физически бесконечно малым является объем, содержащий макроскопическое количество частиц ( $10^n$ , где  $n \gg 1$ ), но пренебрежимо малый по сравнению с характерным масштабом изучаемых макроскопических явлений. Усредненные таким образом величины называются макроскопическими. Уравнения для усредненных полей **E** и **B** называются *макроскопическими уравнениями Максвелла* (гл. 17—21, 24). Макроскопические уравнения Максвелла совместно с макроскопическими (т. е. также усредненными) уравнениями Лоренца сами по себе не дают полного описания макроскопических электромагнитных явлений. Число неизвестных функций оказывается больше числа уравнений. Для полного описания нужны дополнительные модельные допущения о поведении усредненных зарядов и токов в среде. Эти модельные допущения выражаются соотношениями, получившими название *материальных уравнений* (§§ 17.1, 19.1, 20.1, 21.1, 24.2, 24.4). С включением материальных уравнений система макроскопических уравнений Максвелла становится замкнутой.

5. В общем случае материальные уравнения довольно сложны. Для не слишком интенсивных полей эти уравнения в хорошем приближении можно считать линейными и тем самым весьма простыми. Одним из таких линейных материальных уравнений является закон Ома (§ 17.1). Макроскопические уравнения Максвелла с линейными материальными уравнениями описывают области явлений, теория которых называется *линейной макроскопической электродинамикой и линейной оптикой*. Эти области очень обширны и охватывают множество явлений, используемых в современной технике. Не описываются линейными материальными уравнениями, например, процессы в любых радиотехнических преобразователях, а также нелинейные оптические явления.

## § В.2. Элементы математической теории поля

1. В этом параграфе будут даны и пояснены основные формулы математической теории поля, нужные для дальнейшего изложения. Кроме того, будут приведены некоторые стандартные обозначения, которые в основном тексте, как правило, будут использоваться без пояснений.

В математике, как и в физике, термин «поле» имеет несколько разных смыслов, из которых нам понадобится только один:

*Поле в математическом смысле называется любая функция пространственных координат  $x, y, z$  или, что то же самое, радиус-вектора  $\mathbf{r}$ , которая может зависеть также и от времени  $t$ .*

Из этого определения следует, что каждое физическое поле описывается соответствующим математическим полем. Математические полями описываются также и другие локальные физические величины (плотности, потоки). Часто для сокращения в обозначении поля будут опускаться аргументы. Так, сокращенными записями поля  $f(\mathbf{r}, t)$  являются  $f(t)$  и просто  $f$ .

По геометрической природе математические поля, рассматриваемые в этом томе, являются или *скалярными*, или *векторными*.

*Скалярным называется поле, имеющее в каждой точке одну компоненту, которая является скалярной величиной.*

Примером скалярного поля является температура  $T(\mathbf{r}, t)$  неравномерно нагретой среды.

*Векторным называется поле, имеющее в каждой точке три компоненты, образующие вектор.*

Примером векторного поля является поле скоростей  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  движущейся жидкости.

Обозначения, которые будут использоваться для векторных полей, следующие. В компонентах вектор  $\mathbf{a}$  будет записываться так  $\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ . Абсолютная величина вектора  $\mathbf{a}$  будет обозначаться через  $|\mathbf{a}|$ :  $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ . Часто выбор системы координат будет производиться так, чтобы изучаемый вектор, скажем  $\mathbf{a}$ , был направлен вдоль одной из координатных осей, например по оси  $z$ . Тогда только  $z$ -компонента вектора не будет нулем:  $\mathbf{a} = \{0, 0, a_z\}$ . В этом случае будет использоваться сокращенное обозначение  $a_z = a$ . Отметим, что  $|\mathbf{a}| = |\mathbf{a}|$ , но сама величина  $a$  может иметь любой знак. Исключение составляет только радиус-вектор  $\mathbf{r} = \{x; y; z\}$ . Его абсолютная величина будет обозначаться через  $r$ :  $r = |\mathbf{r}|$ , так что всегда  $r \geq 0$ .

Единичный вектор преимущественно будет обозначаться через  $\mathbf{n}$ , так что, по определению,  $|\mathbf{n}| = 1$ . Любой вектор  $\mathbf{a}$  всегда может быть представлен в виде

$$\mathbf{a} = n|\mathbf{a}|,$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор, направленный вдоль  $\mathbf{a}$ .

Сформулируем требуемые для дальнейшего свойства полей. Элементарными свойствами являются следующие.

а) Произведение  $g(\mathbf{r}) f(\mathbf{r})$  двух скалярных полей  $g(\mathbf{r})$  и  $f(\mathbf{r})$  является скалярным полем.

б) Произведение  $\mathbf{a}(\mathbf{r}) f(\mathbf{r})$  векторного поля  $\mathbf{a}(\mathbf{r})$  на скалярное  $f(\mathbf{r})$  является векторным полем.

в) Скалярное произведение  $(\mathbf{a}(\mathbf{r})\mathbf{b}(\mathbf{r})) = a_x(\mathbf{r})b_x(\mathbf{r}) + a_y(\mathbf{r})b_y(\mathbf{r}) + a_z(\mathbf{r})b_z(\mathbf{r})$  двух векторных полей  $\mathbf{a}(\mathbf{r})$  и  $\mathbf{b}(\mathbf{r})$  является скалярным полем.

г) Векторное произведение  $[\mathbf{a}(\mathbf{r})\mathbf{b}(\mathbf{r})] = \mathbf{c}(\mathbf{r})$  двух векторных полей  $\mathbf{a}(\mathbf{r})$  и  $\mathbf{b}(\mathbf{r})$  является векторным полем с компонентами

$$c_x(\mathbf{r}) = a_y(\mathbf{r})b_z(\mathbf{r}) - a_z(\mathbf{r})b_y(\mathbf{r}),$$

$$c_y(\mathbf{r}) = a_z(\mathbf{r})b_x(\mathbf{r}) - a_x(\mathbf{r})b_z(\mathbf{r}),$$

$$c_z(\mathbf{r}) = a_x(\mathbf{r})b_y(\mathbf{r}) - a_y(\mathbf{r})b_x(\mathbf{r}).$$

Для векторных полей справедливы следующие свойства тройного (скалярно-векторного или, что одно и то же, смешанного) произведения:

$$(\mathbf{a}(\mathbf{r})[\mathbf{b}(\mathbf{r})\mathbf{c}(\mathbf{r})]) = (\mathbf{b}(\mathbf{r})[\mathbf{c}(\mathbf{r})\mathbf{a}(\mathbf{r})]) = (\mathbf{c}(\mathbf{r})[\mathbf{a}(\mathbf{r})\mathbf{b}(\mathbf{r})]), \quad (\text{B.1})$$

и двойного векторного произведения:

$$[\mathbf{a}(\mathbf{r})[\mathbf{b}(\mathbf{r})\mathbf{c}(\mathbf{r})]] = \mathbf{b}(\mathbf{r})(\mathbf{a}(\mathbf{r})\mathbf{c}(\mathbf{r})) - (\mathbf{a}(\mathbf{r})\mathbf{b}(\mathbf{r}))\mathbf{c}(\mathbf{r}). \quad (\text{B.2})$$

Векторы и скаляры играют важную роль потому, что правильно записанные соотношения между ними отражают инвариантные, т. е. не зависящие от системы координат, свойства. При использовании полей неизвестной геометрической формы есть риск получить формулы, отражающие свойства систем координат, а не изучаемых объектов.

2. Изменение поля при переходе от одной точки к другой характеризуется частными производными поля по координатам. Наиболее важными являются такие комбинации операций дифференцирования скалярных и векторных полей, которые приводят к полям этих же типов.

Начнем с обозначений. Через  $d\mathbf{r}$  будет обозначаться бесконечно малое приращение радиус-вектора  $\mathbf{r}$ . По определению

$$d\mathbf{r} = \{dx, dy, dz\}.$$

Введем теперь математический объект нового типа. Назовем *векторным оператором дифференцирования* обозначаемую через  $\partial/\partial\mathbf{r}$  тройку  $\{\partial/\partial x; \partial/\partial y; \partial/\partial z\}$  операций дифференцирования по координатам:

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}.$$

Для объяснения смысла оператора  $\partial/\partial\mathbf{r}$  прежде всего укажем, что *оператором* в математике называется правило, по которому одна функция превращается в другую. В частности, *оператор дифференцирования*, по определению, переводит функцию в ее производную. Теперь мы можем дать развернутое определение оператора  $\partial/\partial\mathbf{r}$ .

*Оператор  $\partial/\partial\mathbf{r}$  действует на скалярные и векторные поля по следующим правилам: во-первых,  $\partial/\partial\mathbf{r}$  умножается как вектор слева (т. е. как первый множитель) на поле по одному из правил б) — г) из п. 1; во-вторых, в полученных формальных произведениях производятся соответствующие операции дифференцирования.*

Векторные свойства оператора  $\partial/\partial\mathbf{r}$  проявляются в том, что получающиеся в результате перечисленных действий математические поля имеют те же векторные или, соответственно, скалярные свойства, что и при умножении на обычный вектор  $\mathbf{a}(\mathbf{r})$  по правилам б) — г) предыдущего пункта.

Выпишем в явном виде все три способа действия оператора  $\partial/\partial\mathbf{r}$  на поля.

а) Действие оператора  $\partial/\partial\mathbf{r}$  на скалярное поле  $f(\mathbf{r})$ :

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} f(\mathbf{r}) = \left\{ \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial x}; \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial y}; \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial z} \right\}. \quad (\text{В.3})$$

В результате получается векторное поле, которое называется *градиентом скалярного поля*  $f(\mathbf{r})$ . Сокращенно градиент  $f(\mathbf{r})$  будет обозначаться через  $\partial f/\partial\mathbf{r}$ .

б) Скалярное умножение оператора  $\partial/\partial\mathbf{r}$  на векторное поле  $\mathbf{b}(\mathbf{r})$ :

$$\left( \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} \mathbf{b}(\mathbf{r}) \right) = \frac{\partial b_x(\mathbf{r})}{\partial x} + \frac{\partial b_y(\mathbf{r})}{\partial y} + \frac{\partial b_z(\mathbf{r})}{\partial z}. \quad (\text{В.4})$$

Результатом умножения является скалярное поле, которое называется *дивергенцией векторного поля*  $\mathbf{b}(\mathbf{r})$ . Сокращенным обозначением дивергенции является  $\partial\mathbf{b}(\mathbf{r})/\partial\mathbf{r}$ .

в) Векторное умножение оператора  $\partial/\partial\mathbf{r}$  на векторное поле  $\mathbf{b}(\mathbf{r})$ :

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} \mathbf{b}(\mathbf{r}) \right] &= \\ &= \left\{ \frac{\partial b_z(\mathbf{r})}{\partial y} - \frac{\partial b_y(\mathbf{r})}{\partial z}; \frac{\partial b_x(\mathbf{r})}{\partial z} - \frac{\partial b_z(\mathbf{r})}{\partial x}; \frac{\partial b_y(\mathbf{r})}{\partial x} - \frac{\partial b_x(\mathbf{r})}{\partial y} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{В.5})$$

Это действие дает новое векторное поле, которое называется *ротором векторного поля*  $\mathbf{b}(\mathbf{r})$ .

Формулы (В.3) — (В.5) определяют правила расчета, соответственно, градиента скалярного поля, дивергенции и ротора векторного поля.

Для оператора  $\partial/\partial\mathbf{r}$  в литературе используется другое, менее наглядное обозначение  $\nabla$  (читается: «набла»). Кроме того, для операций градиента, дивергенции и ротора используются также обозначения, соответственно, grad, div, rot. Для справок приведем связи между разными обозначениями:

$$\frac{\partial f}{\partial\mathbf{r}} \equiv \nabla f \equiv \text{grad } f, \quad \frac{\partial\mathbf{b}}{\partial\mathbf{r}} \equiv (\nabla\mathbf{b}) \equiv \text{div } \mathbf{b}, \quad \left[ \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} \mathbf{b} \right] \equiv [\nabla\mathbf{b}] \equiv \text{rot } \mathbf{b}. \quad (\text{В.6})$$

**3.** Перечислим нужные для дальнейшего свойства векторных операций дифференцирования полей. Существуют три группы таких свойств.

В первую группу входят свойства вторых производных полей по координатам. Получение этих свойств сводится к повторному

действию оператора  $\partial/\partial\mathbf{r}$  в соответствии с правилами а) — в) из предыдущего пункта. Дадим перечень важнейших из них.

$$\left[ \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{r}} \right] = \left[ \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} \right] f(\mathbf{r}) = 0, \quad (\text{B.7})$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} \left[ \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} \mathbf{b}(\mathbf{r}) \right] \right) = \left( \left[ \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} \right] \mathbf{b}(\mathbf{r}) \right) = 0. \quad (\text{B.8})$$

Здесь использовано свойство равенства нулю векторного произведения вектора на самого себя. При выводе (B.8) использовано еще и (B.1).

Скалярный оператор  $\left( \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} \right)$  называется *оператором Лапласа* и обозначается через  $\Delta$ :

$$\left( \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} \right) \equiv \Delta = \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial z} \right)^2. \quad (\text{B.9})$$

Оператор Лапласа превращает скалярное поле в скалярное и векторное в векторное. Например,

$$\Delta f(\mathbf{r}) = \frac{\partial^2 f(\mathbf{r})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(\mathbf{r})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(\mathbf{r})}{\partial z^2}. \quad (\text{B.10})$$

Подчеркнем, что в правой части (B.10) скаляром является только вся сумма, но не каждое слагаемое по отдельности.

Еще одно соотношение

$$\left[ \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} \left[ \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} \mathbf{b}(\mathbf{r}) \right] \right] = \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} \left( \frac{\partial \mathbf{b}(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{r}} \right) - \Delta \mathbf{b}(\mathbf{r}), \quad (\text{B.11})$$

которое получается с помощью (B.2), выражает ротор ротора векторного поля через градиент дивергенции поля и результат применения к этому полю оператора Лапласа.

Вторую, менее тривиальную группу свойств определяют теоремы, обобщающие известную теорему из теории функций одной переменной: если нулю равна производная  $dy/dx$  функции  $y(x)$ , то  $y = \text{const}$ . Вот каковы эти свойства.

а) Если  $\partial \mathbf{a}(\mathbf{r})/\partial\mathbf{r} = 0$  в каждой точке пространства, то существует такое векторное поле  $\mathbf{b}(\mathbf{r})$ , что поле

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \left[ \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} \mathbf{b}(\mathbf{r}) \right].$$

*Векторное поле, дивергенция которого равна нулю, называется вихревым.*

Согласно приведенной теореме вихревое поле является ротором другого векторного поля.

б) Если  $\left[ \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} \mathbf{a}(\mathbf{r}) \right] = 0$  в каждой точке пространства, то существует такое скалярное поле  $f(\mathbf{r})$ , что поле

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{r}}.$$

*Векторное поле, ротор которого равен нулю, называется потенциальным.* Следовательно, потенциальное поле является градиентом скалярного поля.

Отметим, что поля  $\mathbf{b}(\mathbf{r})$  и  $f(\mathbf{r})$  могут быть не равными нулю и там, где равны нулю поля  $\mathbf{a}(\mathbf{r})$  из а) и б).

в) Если в каждой точке пространства  $\frac{\partial \mathbf{a}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} = 0$  и  $\left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{a}(\mathbf{r}) \right] = 0$ , то поле  $\mathbf{a}(\mathbf{r})$  однородно. Однородным называется векторное поле, не зависящее от координат ( $\mathbf{a}$  — постоянный вектор),

г) Для любого векторного поля  $\mathbf{a}(\mathbf{r})$  существуют векторное поле  $\mathbf{b}(\mathbf{r})$  и скалярное поле  $f(\mathbf{r})$  такие, что

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{b}(\mathbf{r}) \right] + \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}}.$$

Теорема а) является утверждением, обратным тому, которое выражает (В.8). Так же относится теорема б) к (В.7). Теорема в) интересна тем, что утверждает достаточность равенства нулю четырех комбинаций производных векторного поля по координатам  $\frac{\partial \mathbf{a}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}}$  и трех компонент вектора  $\left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{a}(\mathbf{r}) \right]$  для того, чтобы все девять производных  $\left( \frac{\partial a_x(\mathbf{r})}{\partial x}; \frac{\partial a_x(\mathbf{r})}{\partial y}; \frac{\partial a_x(\mathbf{r})}{\partial z}; \dots \dots; \frac{\partial a_z(\mathbf{r})}{\partial x}; \frac{\partial a_z(\mathbf{r})}{\partial y}; \frac{\partial a_z(\mathbf{r})}{\partial z} \right)$  обратились в нуль.

Интуитивно этот результат понятен из свойств скалярного и векторного произведений. Как известно, скалярное произведение пропорционально проекции одного сомножителя на другой. Поэтому дивергенция характеризует изменение векторного поля вдоль собственного направления. Векторное произведение перпендикулярно каждому сомножителю. Поэтому ротор описывает изменение поля в поперечных полях направлениях. Следовательно, равенства  $\frac{\partial \mathbf{a}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} = 0$  и  $\left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{a}(\mathbf{r}) \right] = 0$  означают, что поле  $\mathbf{a}(\mathbf{r})$  не изменяется в пространстве ни по одному из направлений, т. е. что поле постоянно.

Наконец, содержание теоремы г) состоит в том, что произвольное векторное поле всегда представимо в виде суммы ротора и градиента.

Третья группа дифференциальных свойств полей относится к действию оператора  $\partial/\partial \mathbf{r}$  на различные произведения полей. Общие правила действия оператора  $\partial/\partial \mathbf{r}$  на произведение двух полей таковы. Сначала производится дифференцирование произведения. Затем в каждом из двух полученных слагаемых производятся соответствующие выкладки по правилам векторной алгебры. Вот два нужных нам в дальнейшем примера:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (f(\mathbf{r}) \mathbf{a}(\mathbf{r})) \right] = \left[ \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{a}(\mathbf{r}) \right] + f(\mathbf{r}) \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{a}(\mathbf{r}) \right], \quad (\text{В.12})$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (f(\mathbf{r}) \mathbf{a}(\mathbf{r})) = \left( \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{a}(\mathbf{r}) \right) + f(\mathbf{r}) \frac{\partial \mathbf{a}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}}. \quad (\text{В.13})$$



4. Рассмотрим интегрирование скалярных и векторных полей. Интегрирование приходится производить по объему, по поверхности и по линии, которую обычно называют контуром.

Начнем с интегрирования по объему. Элемент объема  $dV = dx dy dz$  является скаляром. Поэтому интеграл по объему от скаляра является скаляром, а от вектора — вектором. Снизу от знака интеграла указывается объем интегрирования. Так,

$$\int_V \mathbf{a}(\mathbf{r}) dV = \mathbf{A}$$

обозначает, что интеграл от векторного поля  $\mathbf{a}(\mathbf{r})$  по объему  $V$  равен вектору  $\mathbf{A}$ . Физический пример: если проинтегрировать по объему  $V$  плотность энергии  $w_e(\mathbf{r})$  электрического поля, то в результате будет определена полная энергия поля в этом объеме:

$$W_e = \int_V w_e(\mathbf{r}) dV.$$

Перейдем к интегрированию по поверхности (в общем случае криволинейной). Перед проведением такого интегрирования необходимо задать ориентацию поверхности. Задание ориентации состоит в том, что одна из двух сторон поверхности принимается за положительную. Смысл задания ориентации будет объяснен немного позднее. Отметим, что если поверхность замкнута, т. е. ограничивает некоторый объем, то положительной обычно выбирают наружную сторону этой поверхности.

Само интегрирование начинается с того, что поверхность разбивается на большое количество достаточно малых участков, каждый из которых аппроксимируется плоским четырехугольником (рис. В.1). Каждый из этих четырехугольников является элементом поверхности.

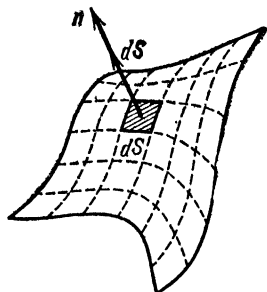


Рис. В.1.

Элемент поверхности является вектором, обозначаемым через  $d\mathbf{S}$ . Абсолютная величина этого вектора обозначается через  $dS = |d\mathbf{S}|$  и равна площади элемента поверхности. Направлен вектор  $d\mathbf{S}$  вдоль нормали (т. е. перпендикулярно) к плоскости элемента поверхности в сторону ее положительной стороны. Если  $\mathbf{n}$  — единичный вектор вдоль такой нормали (рис. В.1), то

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS. \quad (\text{В.14})$$

Очевидно, что при изменении ориентации поверхности вектор  $d\mathbf{S}$  изменит знак.

На практике чаще всего приходится интегрировать по поверхности векторные поля, а именно вычислять пределы сумм скалярных произведений типа  $(\mathbf{a}(\mathbf{r}) d\mathbf{S}) = a_x(\mathbf{r}) dS_x + a_y(\mathbf{r}) dS_y + a_z(\mathbf{r}) dS_z$  (предел берется по измельчению элементов поверхности, при котором участок  $dS$  стягивается в точку  $\mathbf{r}$  (рис. В.2)). При этом в соответствии с правилами векторной алгебры в результате получается скалярная величина

$$\Lambda = \int_S (\mathbf{a}(\mathbf{r}) d\mathbf{S}) = \int_S a_n(\mathbf{r}) dS, \quad (\text{В.15})$$

где  $a_n(\mathbf{r}) = (\mathbf{n} \mathbf{a}(\mathbf{r}))$  (рис. В.2). Индексом снизу у интеграла указывается поверхность, по которой производится интегрирование. Физическим примером интеграла по поверхности является интегральный поток  $J^{(E)}$  кинетического потока  $j^{(E)}(\mathbf{r})$  энергии через поверхность  $S$ :

$$J^{(E)} = \int_S (j^{(E)}(\mathbf{r}) d\mathbf{S}).$$

Интеграл по поверхности от векторного поля, вычисленный согласно (В.15), называется *интегральным потоком векторного поля через поверхность\**. Так, в (В.15) величина  $\Lambda$  является интегральным потоком

поля  $\mathbf{a}(\mathbf{r})$  через поверхность  $S$ . Как уже отмечалось выше, интегральный поток через поверхность является скаляром. Часто эта величина называется короче: «поток через поверхность» и даже просто «поток».

Если поверхность интегрирования замкнута, то это отмечается кружком на знаке интеграла. Например, пишется

$\oint (\mathbf{a}(\mathbf{r}) d\mathbf{S})$ . Поток через замкнутую поверхность называется *полным потоком*.

Введем теперь понятие интеграла по контуру (т. е. по линии, в общем случае кривой). Сначала на контуре выбирается положительное направление (при изображении указывается стрелкой на линии). Затем контур разбивается на достаточно малые участки, которые аппроксимируются прямолинейными отрезками. Элемент контура является вектором, кото-

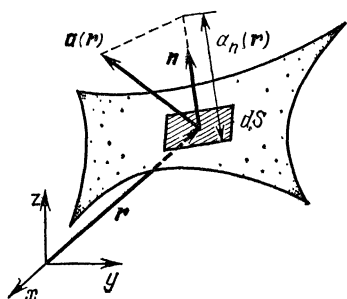


Рис. В.2.

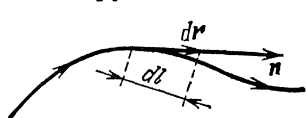


Рис. В.3.

\* Эту величину не следует путать с понятием кинетического потока, введенным в § 11.1 тома I. Кинетический поток по определению скаляром быть не может.

рый будет обозначаться через  $dr$  (рис. В.3). Этот вектор равен

$$dr = n dl, \quad (\text{В.16})$$

где  $n \rightarrow$  единичный вектор вдоль касательной к контуру (в положительном направлении), а  $dl$  — приращение длины контура. Подчеркнем, что  $dl$  может быть как положительным, так и отрицательным в зависимости от того, совпадает или нет направление интегрирования, или, как иначе говорят, обхода контура, с положительным направлением на этом контуре.

На практике чаще всего приходится интегрировать по контуру векторные поля, а именно вычислять пределы сумм скалярных произведений типа  $(b(r) dr) = b_x(r) dx + b_y(r) dy + b_z(r) dz$  (предел берется по измельчению элементов контура, которое стягивает  $dr$  в точку  $r$  на контуре (рис. В.4)). В этих случаях в соответствии с правилами векторной алгебры получается скалярная величина

$$B = \int_L (b(r) dr) = \int_L b_n(r) dl,$$

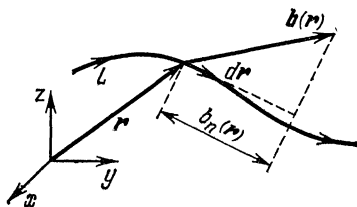


Рис. В.4.

где  $b_n(r) = (nb(r))$ . Индексом внизу у интеграла указывается контур, по которому производится интегрирование. Если контур интегрирования замкнут, то это отмечается кружком на знаке интеграла. Например, пишется

$$C = \oint_L (c(r) dr). \quad (\text{В.17})$$

Интеграл по замкнутому контуру от векторного поля, вычисленный в соответствии с (В.17), называется *циркуляцией векторного поля вдоль контура*. Так, в (В.17)  $C$  является циркуляцией поля  $c(r)$  по контуру  $L$ . Циркуляция является скаляром.

5. В теории функций одной переменной хорошо известно соотношение, связывающее интегрирование с дифференцированием:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dy(x)}{dx} dx = y(x_2) - y(x_1). \quad (\text{В.18})$$

Этому соотношению можно придать общую формулировку:

*Интеграл от производной по некоторой области выражается через значения самой функции на границах этой области.*

(В (В.18) областью интегрирования является промежуток между точками  $x_1$  и  $x_2$ .)

Данная формулировка допускает три обобщения в математической теории поля.

а) Интеграл от градиента  $\partial f(\mathbf{r})/\partial r$  скалярного поля  $f(\mathbf{r})$  по некоторому контуру  $L$  равен разности значений функции  $f$  на концах контура:

$$\int_L \left( \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial r} d\mathbf{r} \right) = f(\mathbf{r}_2) - f(\mathbf{r}_1), \quad (\text{В.19})$$

если контур начинается в точке  $\mathbf{r}_1$  и кончается в точке  $\mathbf{r}_2$ , а интегрирование производится в положительном направлении. Если  $L$  — замкнутый контур, то интеграл (В.19) превращается в циркуляцию градиента. Из равенства (В.19) видно, что циркуляция градиента равна нулю:

$$\oint_L \left( \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial r} d\mathbf{r} \right) = 0. \quad (\text{В.20})$$

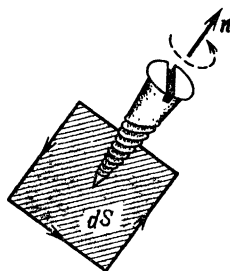


Рис. В.5.

Физический пример: если скалярным полем является потенциальная энергия  $U(\mathbf{r})$ , то ее градиент равен вектору силы со знаком минус (см. § 2.4 тома I):

$$\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} = -\mathbf{F}(\mathbf{r}).$$

В этом случае (В.19) выражает независимость работы потенциальной силы от формы пути. Существенно только, где находятся начало и конец пути. Равенство же (В.20) показывает, что при перемещении по любому замкнутому контуру в потенциальном поле работа не производится.

Формула (В.19) получается просто:

$$\begin{aligned} \int_L \left( \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} d\mathbf{r} \right) &= \int_L \left( \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial x} dx + \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial y} dy + \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial z} dz \right) = \int_L df = \\ &= f(\mathbf{r}_2) - f(\mathbf{r}_1). \end{aligned}$$

б) Для второго обобщения (В.18) необходимо согласовать ориентации замкнутого контура и поверхности, ограниченной этим контуром. Назовем эти ориентации согласованными, когда для них выполняется правило буравчика: если буравчик ориентирован по нормали к элементарному участку поверхности, то при вращении буравчика в положительном направлении контура, ограничивающего этот участок, буравчик движется в направлении элемента поверхности (рис. В.5).

Само второе обобщение называется *теоремой Стокса*. Ее содержание заключается в следующем:

*Интегральный поток ротора векторного поля через произвольную поверхность равен циркуляции этого поля вдоль контура, ограничивающего данную поверхность, если ориентации поверхности и контура согласованы.*

Записывается это так:

$$\int_S \left( \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{a}(\mathbf{r}) \right] d\mathbf{S} \right) = \oint_L (\mathbf{a}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}), \quad (\text{В.21})$$

где  $\mathbf{a}(\mathbf{r})$  — данное векторное поле, а  $S$  — поверхность, краем которой является контур  $L$  (рис. В.6).

В частном случае замкнутой поверхности полный поток ротора векторного поля через эту поверхность равен нулю, поскольку замкнутая поверхность ограничена нулевым контуром:

$$\oint_S \left( \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{a}(\mathbf{r}) \right] d\mathbf{S} \right) = 0. \quad (\text{В.22})$$

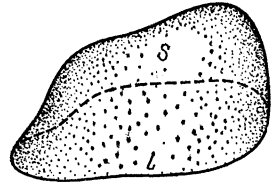


Рис. В.6.

Докажем теорему Стокса для частного случая плоского прямоугольника. Выберем начало координат в одной из вершин прямоугольника, проведем оси  $x$  и  $y$  вдоль двух его сторон, пересекающихся в данной вершине, а ориентацию контура зададим против часовой стрелки (рис. В.7). По правилу согласования ориентаций положительной стороной площади прямоугольника будет сторона, обращенная к читателю, что отмечено на рис. В.7 символом  $\odot$ . Элемент поверхности  $dS$  будет иметь компоненты  $\{0, 0, dS_z\}$ , где  $dS_z = dx dy$ . По определению ротора

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{a}(\mathbf{r}) \right]_z = \frac{\partial a_y(\mathbf{r})}{\partial x} - \frac{\partial a_x(\mathbf{r})}{\partial y}.$$

Тем самым левая часть (В.21) расписывается так:

$$\begin{aligned} \int_S \left( \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{a}(\mathbf{r}) \right] d\mathbf{S} \right) &= \int_S dS_z \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{a}(\mathbf{r}) \right]_z = \\ &= \int_0^{x_1} dx \int_0^{y_1} dy \left( \frac{\partial a_y(\mathbf{r})}{\partial x} - \frac{\partial a_x(\mathbf{r})}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

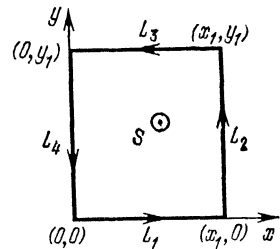


Рис. В.7.

Здесь через  $x_1$  и  $y_1$  обозначены длины сторон прямоугольника. В последнем выражении  $\partial a_y(\mathbf{r})/\partial x$  интегрируем сначала по  $dx$ , а  $\partial a_x(\mathbf{r})/\partial y$  — сначала по  $dy$  (аргумент  $z = 0$  и поэтому ниже не выписывается):

$$\int_0^{x_1} dx \frac{\partial a_y(\mathbf{r})}{\partial x} = a_y(x_1, y) - a_y(0, y), \quad \int_0^{y_1} dy \frac{\partial a_x(\mathbf{r})}{\partial y} = a_x(x, y_1) - a_x(x, 0).$$

Отсюда следует, что

$$\int_S \left( \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{a}(\mathbf{r}) \right] d\mathbf{S} \right) = \int_0^{y_1} dy a_y(x_1, y) - \int_0^{y_1} dy a_y(0, y) - \\ - \int_0^{x_1} dx a_x(x, y_1) + \int_0^{x_1} dx a_x(x, 0). \quad (\text{B.23})$$

Перейдем теперь к вычислению правой части (B.21). В выбранной системе координат элемент контура равен  $\{dx, 0, 0\}$  на  $L_1$ ,  $\{0, dy, 0\}$  на  $L_2$ ,  $\{-dx, 0, 0\}$  на  $L_3$  и  $\{0, -dy, 0\}$  на  $L_4$  (рис. B.7). Поэтому

$$\oint_L (\mathbf{a}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}) = \left( \int_{L_1} + \int_{L_2} + \int_{L_3} + \int_{L_4} \right) (\mathbf{a}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}) = \\ = \int_0^{x_1} dx a_x(x, 0) + \int_0^{y_1} dy a_y(x_1, y) - \int_0^{x_1} dx a_x(x, y_1) - \int_0^{y_1} dy a_y(0, y). \quad (\text{B.24})$$

Теперь видно, что выражения (B.23) и (B.24) одинаковы, чем и подтверждает теорема Стокса.

в) Третье обобщение (B.18) называется *теоремой Гаусса — Остроградского*. Эта теорема утверждает, что *интеграл по объему от дивергенции векторного поля равен полному потоку этого поля через замкнутую поверхность,*

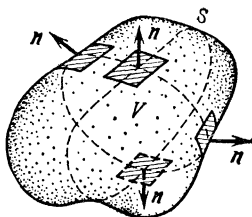


Рис. B.8.

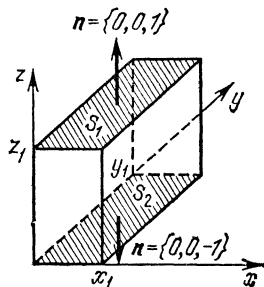


Рис. B.9.

*ограничивающую этот объем, если нормаль к каждому элементу поверхности направлена наружу от объема.*

Теорема Гаусса — Остроградского записывается так:

$$\int_V \frac{\partial \mathbf{a}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} dV = \oint_S (\mathbf{a}(\mathbf{r}) d\mathbf{S}) = \oint_S a_n(\mathbf{r}) dS, \quad (\text{B.25})$$

где  $S$  — ограничивающая объем  $V$  поверхность, а векторы  $\mathbf{n}$  направлены так, как это показано на рис. B.8.

Докажем теорему Гаусса — Остроградского для частного случая прямоугольного параллелепипеда. Выберем начало координат в одной из вершин параллелепипеда и направим координатные оси вдоль его сторон, сходящихся к этой вершине (рис. В.9). Покажем, что при таком выборе координатных осей в расписанном по компонентам выражении (В.25)

$$\int_V \left( \frac{\partial a_x(\mathbf{r})}{\partial x} + \frac{\partial a_y(\mathbf{r})}{\partial y} + \frac{\partial a_z(\mathbf{r})}{\partial z} \right) dV = \oint_S (a_x(\mathbf{r}) dS_x + a_y(\mathbf{r}) dS_y + a_z(\mathbf{r}) dS_z),$$

в котором  $V$  — объем параллелепипеда, а  $S$  — его поверхность, будут соблюдаться равенства

$$\begin{aligned} \int_V dV \frac{\partial a_x(\mathbf{r})}{\partial x} &= \oint_S a_x dS_x, \\ \int_V dV \frac{\partial a_y(\mathbf{r})}{\partial y} &= \oint_S a_y dS_y, \\ \int_V dV \frac{\partial a_z(\mathbf{r})}{\partial z} &= \oint_S a_z dS_z. \end{aligned}$$

Докажем последнее из них (остальные доказываются аналогично). Обозначим длины сторон параллелепипеда через  $x_1$ ,  $y_1$  и  $z_1$  (рис. В.9). Тогда

$$\begin{aligned} \int_V dV \frac{\partial a_z(\mathbf{r})}{\partial z} &= \int_0^{x_1} dx \int_0^{y_1} dy \int_0^{z_1} dz \frac{\partial a_z(\mathbf{r})}{\partial z} = \\ &= \int_0^{x_1} dx \int_0^{y_1} dy \{a_z(x, y, z_1) - a_z(x, y, 0)\}. \end{aligned} \quad (\text{В.26})$$

При вычислении  $\oint_S a_z(\mathbf{r}) dS_z$  надо учесть, что на заштрихованных на рис. В.9 гранях  $S_1$  и  $S_2$  элемент  $dS_z$  равен, соответственно,  $dx dy$  и  $-dx dy$ , а на остальных гранях  $dS_z = 0$ . Поэтому

$$\oint_S a_z(\mathbf{r}) dS_z = \int_0^{x_1} dx \int_0^{y_1} dy a_z(x, y, z_1) - \int_0^{x_1} dx \int_0^{y_1} dy a_z(x, y, 0). \quad (\text{В.27})$$

Одинаковость (В.26) и (В.27) теперь очевидна. Это и подтверждает справедливость теоремы Гаусса — Остроградского.

Соотношения (В.19), (В.21) и (В.25) будут неоднократно использоваться в настоящем томе.

## ГЛАВА 15

# ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМА

### § 15.1. Электрические заряды

1. Существование электромагнитных сил обнаружено очень давно. Их действие было известно уже древним грекам, которым мы обязаны такими терминами, как «электрон», «электричество», «магнит», «магнетизм» \*). Понимание фундаментальности электромагнитных взаимодействий началось с открытия электрона и утвердилось после открытия Э. Резерфордом электрической структуры вещества. В 1911—1913 гг. Э. Резерфорд установил (подробнее об этом будет рассказано в последнем томе курса), что атомы построены из электрически заряженных частиц. Каждый атом имеет положительно заряженное ядро, которое окружают очень легкие в сравнении с ядром отрицательно заряженные электроны. Электрон в тысячи раз легче самых легких ядер, но его электрический заряд по абсолютной величине равен заряду ядра легчайшего элемента — водорода. В каждом атоме суммарный отрицательный заряд электронов точно компенсирует положительный заряд ядра. Такая компенсация существует и для подавляющего большинства макроскопических физических объектов в земных условиях. Это объясняется тем, что силы между нейтральными комплексами микрочастиц (атомов, молекул и др.), как правило, заметно слабее сил между заряженными частицами внутри этих комплексов. Поэтому электрические свойства вещества в механических, тепловых и многих других явлениях обычно проявляются лишь через взаимодействие электрически нейтральных комплексов (атомов, молекул и др.).

---

\*) В переводе с греческого языка на русский «электрон» — это «янтарь», что означает «способный к себе притягивать». Слово «магнит» происходит от названия «магнетит». Магнетит — это обладающий магнитными свойствами минерал. Впервые он был найден в Малой Азии вблизи древнего города Магнезии. Отсюда этот минерал и получил свое название. Сейчас мы знаем, что магнетит — это соединение  $Fe_3O_4$ .



По современным представлениям, *электрический заряд является физической величиной, определяющей интенсивность электромагнитных взаимодействий.*

Об этом свидетельствует закон Кулона, который определяет силу электрического взаимодействия двух покоящихся точечных заряженных частиц. Если расстояние между частицами равно  $r$ , то

$$F_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r},$$

где  $q_1$  и  $q_2$  — заряды частиц,  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, определяющий их взаимное расположение и направленный от первой частицы ко второй,  $F_{12}$  — сила, с которой частица, несущая заряд  $q_1$ , действует на частицу с зарядом  $q_2$ , а  $k$  — постоянный коэффициент, зависящий от выбора единиц измерения (см. (2.21) тома I). Именно  $k = 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Кл}^2$  в СИ и  $k = 1$  в СГС (см. § 2.3 тома I). Выбор коэффициента  $k$  фиксирует единицу заряда. В системе СИ такой единицей является *кулон* (Кл), в СГС единица заряда не имеет специального наименования. Видно, что чем больше заряды, тем сильнее они взаимодействуют.

Закон Кулона дает возможность определять заряды частиц, если заряд одной из них принят за эталонный. Действительно, примем в качестве эталонного заряд  $q_1$ . Тогда для того, чтобы определить заряд  $q_2$  какой-нибудь частицы, нужно знать ее расстояние  $r$  от носителя эталонного заряда и измерить силу, действие которой на этом расстоянии частица будет испытывать. По этим данным заряд  $q_2$  определяется так:

$$q_2 = \frac{r (F_{12} \mathbf{r})}{k q_1}.$$

Опытным путем было установлено, что электрические заряды обладают следующими свойствами.

а) *Электрический заряд не является знакоопределенной величиной. Существуют и положительные, и отрицательные заряды.*

Так, в атомах отрицательными зарядами обладают электроны, а положительными — ядра.

б) *Электрический заряд — величина инвариантная. Он не изменяется при движении носителя заряда.*

Например, в каких бы движениях электрон ни участвовал, его заряд всегда остается одним и тем же.

в) *Электрический заряд аддитивен: заряд любой системы всегда равен сумме зарядов составляющих систему частиц.*

Так, электрический заряд иона равен сумме зарядов ядра атома и тех его электронов, которые сохранились после ионизации атома.

г) Все электрические заряды кратны элементарному. (Элементарный заряд  $q_0$  равен  $1,6022 \cdot 10^{-19}$  Кл.)

Это свойство называется *квантованностью* или *атомистичностью* электрических зарядов. Элементарный заряд впервые был измерен Р. Милликоном в 1909 г.

Напомним, что в кулонах заряды измеряются в системе СИ. При этом 1 Кл равен  $2,998 \cdot 10^9 \approx 3 \cdot 10^9$  единиц электрического заряда в системе СГС (ед. СГСЭ). Таким образом, в системе СГС элементарный заряд  $q_0$  равен  $4,80324 \cdot 10^{-10}$  ед. СГСЭ.

Носителями элементарных зарядов являются электроны, протоны, а также все другие заряженные элементарные частицы. Равенство абсолютных значений зарядов этих частиц установлено сейчас с огромной относительной точностью ( $10^{-20}$ ).

Отсутствие зарядов, не кратных элементарному, является пока загадкой. В 60-х годах нашего столетия М. Гелл-Манном и Г. Цвейгом было выдвинуто предположение о существовании частиц, заряды которых составляют  $1/3$  и  $2/3$  элементарного. Эти частицы назвали кварками. Представление о кварках родилось «на кончике пера» при теоретическом исследовании элементарных частиц. Оно выглядело столь правдоподобным, что сразу же были предприняты многочисленные попытки экспериментального обнаружения кварков. Поиски кварков продолжаются и по сей день. Однако ни одна из попыток зарегистрировать эти частицы успехом пока не увенчалась. Несмотря на это, вера в их существование не только не пошатнулась, но за последние годы даже окрепла. Получены новые данные, которые хотя и косвенным образом, но все же достаточно убедительно свидетельствуют о том, что кварки есть. Но от всех известных до сих пор частиц они отличаются тем, что могут существовать только в определенных сочетаниях друг с другом, но не поодиночке. В этом в настоящее время усматривают причину всех неудач обнаружения одиночных кварков.

д) *Суммарный электрический заряд всякой изолированной системы сохраняется.*

Это свойство называется *законом сохранения электрического заряда*. Подчеркнем, что перечисленные свойства а) — д) являются фундаментальными законами. Они не выводятся из каких-либо иных физических законов. Не обнаружено ни одного явления, которое противоречило бы свойствам а) — д).

2. Локальными величинами, характеризующими распределение зарядов и их движение, являются *плотность заряда* и *плотность тока*.

Плотность заряда  $\rho(\mathbf{r}, t)$  определяется так, чтобы величина  $\rho(\mathbf{r}, t) dV$  была равна заряду, находящемуся в момент времени  $t$  в физически бесконечно малом объеме  $dV$ , содержащем точку  $\mathbf{r}$ . Тем самым величина  $\rho(\mathbf{r}, t)$  действительно играет роль плотности по отношению к зарядам. Согласно только что данному определению

$$\rho(\mathbf{r}, t) dV = \sum_i q_i,$$

где суммирование распространено на все заряды, находящиеся в момент времени  $t$  в объеме  $dV$ . Очевидно, что интеграл

$$q(t) = \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV$$

по любому объему  $V$  равен полному заряду в этом объеме в момент времени  $t$ .

По определению в системе СИ плотность заряда измеряется в Кл/м<sup>3</sup> (в системе СГС — в ед. СГСЭ/см<sup>3</sup>).

Плотность тока для частиц с одинаковыми зарядами равна

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}, \quad (15.1)$$

где  $\mathbf{v}$  — средняя скорость, которой обладают заряды в момент времени  $t$ , находящиеся в бесконечно малом объеме вокруг точки  $\mathbf{r}$ .

Пусть  $dS$  — бесконечно малая площадка с нормалью  $\mathbf{n}$ , которая начинается от точки  $\mathbf{r}$  (рис. 15.1). Найдем заряд, который пересечет  $dS$  за бесконечно малый промежуток времени  $dt$ . Очевидно, что за время  $dt$  через  $dS$  пройдут те заряды, которые до начала отсчета времени  $dt$  были в объеме прямоугольного параллелепипеда с основанием  $dS$  и высотой  $(\mathbf{v}\mathbf{n})dt$ , где  $\mathbf{v}$  — средняя скорость движения заряда в момент  $t$  в точке  $\mathbf{r}$ . Объем этого параллелепипеда равен  $(\mathbf{v}\mathbf{n})dS dt$ . Следовательно, искомый заряд равен

$$\begin{aligned} dq &= \rho(\mathbf{v}\mathbf{n}) dS dt = (\rho\mathbf{v}\mathbf{n} dS) dt = \\ &= (\mathbf{j} dS) dt = j_n dS dt. \end{aligned}$$

Здесь использовано равенство (B.14). Очевидно, что величина

$$dI = (\mathbf{j} dS) = j_n dS \quad (15.2)$$

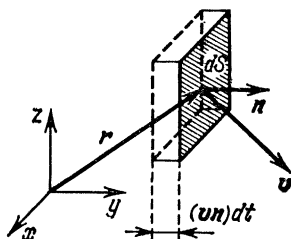


Рис. 15.1.

равна электрическому заряду, который в единицу времени проходит через площадку  $dS$ . Величина  $dI$  называется *силой тока через площадку  $dS$* . Соотношение (15.2) является определением плотности тока  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ , пригодным (в отличие от (15.1)) и при наличии одновременного движения многих частиц с разными зарядами и скоростями. Согласно (15.1) ориентация  $\mathbf{j}$  указывает, куда движутся заряды в каждом месте и в каждый момент времени. Подчеркнем, что мы говорим о движении зарядов, а не самих заряженных частиц. Для отрицательно заряженных частиц направление плотности тока противоположно направлению средней скорости частиц.

Как показывает (15.2), абсолютное значение плотности тока равно электрическому заряду, который в единицу времени пересекает единичную площадку, перпендикулярную движению

зарядов в данной точке и в данный момент времени. Поэтому в системе СИ плотность тока измеряется в Кл/(с·м<sup>2</sup>) (в системе СГС — в ед. СГСЭ/(с·м<sup>2</sup>)). Как известно, Кл/с называется ампером и обозначается через А. Таким образом, в системе СИ единицей плотности тока является А/м<sup>2</sup>. Сила же тока измеряется в амперах (в системе СГС — в ед. СГСЭ/с: 1 ед. СГСЭ/с = = 0,333·10<sup>-9</sup> А). Кроме ампера широко используются его доли — миллиампер (мА) и микроампер (мкА): 1 мА = 10<sup>-3</sup> А, 1 мкА = 10<sup>-6</sup> А.

Прохождение зарядов через поверхность  $S$  конечных размеров характеризуется суммой сил токов через все бесконечно малые участки данной поверхности. Эта сумма равна интегралу

$$I = \int dI = \int_S (\mathbf{j} d\mathbf{S}) = \int j_n dS,$$

который называется *силой тока через поверхность  $S$* . На языке математической теории поля  $I$  — это интегральный поток векторного поля  $\mathbf{j}$  через поверхность  $S$ .

Из определений следует, что величины  $\rho(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  являются усредненными по объему, принятому за бесконечно малый. Поэтому поведение  $\rho(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  как математических полей зависит от величины этого объема. Во Введении в томе I отмечалось, что в физике бесконечно малая величина всегда ограничена, причем, как правило, не только сверху, но и снизу.

При исследовании макроскопических электромагнитных явлений за бесконечно малый принимают объем, содержащий очень много ( $N \gg 1$ ) атомов или молекул, но малый по сравнению с размерами макроскопических неоднородностей любого вида. В этом случае  $\rho(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  плавно меняются внутри сплошных сред, но могут иметь скачки на границах их раздела. Полученные при таком усреднении величины  $\rho$  и  $\mathbf{j}$  называют макроскопическими.

Если же усреднение провести по объему, малому в сравнении с объемом атома, но превышающему объем ядра ( $10^{-10}$  м  $\gg \sqrt[3]{V} > > 10^{-14}$  м), то получатся атомные микроскопические величины  $\rho(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ . В этом случае, например, плотность заряда будет иметь огромные острые пики в точках, где находятся ядра, провалы с довольно глубоким дном вокруг каждого ядра (там, где расположены атомные электроны) и сравнительно небольшие значения в промежутках между атомами. Величины  $\rho(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ , полученные таким усреднением, называют микроскопическими\*). Макро- и микроскопические  $\rho$  и  $\mathbf{j}$  в этой книге будут

\*) Величины  $\rho$  и  $\mathbf{j}$ , полученные при усреднении по объему, значительно меньшему объема атомного ядра, в настоящем курсе рассматриваться не будут. Они исследуются в физике элементарных частиц.

обозначаться одинаково. Способ усреднения всюду будет либо специально оговорен, либо ясен из контекста.

Отметим, что все распределения зарядов и токов подразделяются на стационарные и нестационарные. Соответственно говорят о *постоянных* и *нестационарных*, или *переменных*, токах. В стационарном случае  $\rho$  и  $\mathbf{j}$  от времени не зависят. Постоянной является и сила тока через любую поверхность. В этом случае постоянство во времени плотности заряда обусловлено тем, что каждый заряд, покинувший свое место, тут же замещается точно таким же зарядом, движущимся со скоростью своего предшественника. Благодаря этому движение зарядов не сопровождается изменением их плотности.

Среди стационарных распределений особое место занимают распределения неподвижных, или *статических*, зарядов. Для статических распределений  $\mathbf{j} = 0$ .

3. Закон сохранения электрического заряда в терминах  $\rho$  и  $\mathbf{j}$  выражается *уравнением непрерывности*. Это уравнение имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial r} = 0. \quad (15.3)$$

Для доказательства проинтегрируем обе части (15.3) по произвольному объему  $V$ , ограниченному поверхностью  $S$ , после чего в первом слагаемом изменим порядок дифференцирования по времени и интегрирования, а во втором применим теорему Гаусса — Остроградского (В.25). В результате получим

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V \frac{\partial j}{\partial r} dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV + \oint_S j_n dS = 0.$$

Согласно определению  $\rho$  величина  $\int_V \rho dV$  равна полному заряду  $q$  в объеме  $V$ , а интеграл по поверхности  $\oint_S j_n dS$  согласно

(15.2) равен полному току  $I$  через поверхность  $S$ . Поэтому последнее равенство можно переписать в виде

$$-\frac{dq}{dt} = I,$$

явно выражающем закон сохранения заряда: в произвольном заданном объеме уменьшение заряда в единицу времени равно силе тока через поверхность, ограничивающую этот объем, т. е. заряду, ушедшему в единицу времени из объема.

В стационарном случае уравнение непрерывности имеет вид

$$\frac{\partial j}{\partial r} = 0. \quad (15.4)$$

4. В отличие от самого заряда, его плотность и плотность тока инвариантными не являются. При переходе из одной системы отсчета в другую  $\rho$  и  $\mathbf{j}$  изменяются. Рассмотрим, например, заданные распределения зарядов и токов из двух инерциальных систем отсчета  $K$  и  $K'$  с параллельной ориентацией одноименных координатных осей. Предположим, что  $K'$  движется относительно  $K$  в  $x$  направлении со скоростью  $V$ . Пусть плотности заряда и тока в системах  $K$  и  $K'$  равны, соответственно,  $\rho, \mathbf{j}$  и  $\rho', \mathbf{j}'$ . Оказывается, что

$$\begin{aligned} \rho' &= \frac{\rho - (V/c^2) j_x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \\ j'_x &= \frac{j_x - V\rho}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad j'_y = j_y, \quad j'_z = j_z, \end{aligned} \quad (15.5)$$

где  $c$  — скорость света в пустоте.

Легко видеть, что (15.5) подобны преобразованиям Лоренца (1.25) (см. § 1.4 тома I) и получаются заменой в последних времени на  $\rho$  и координат — на компоненты  $\mathbf{j}$ .

Вывод преобразований (15.5) громоздок. Поэтому мы ограничимся демонстрацией их естественности на примере статических зарядов в системе  $K$ . В этом случае  $\mathbf{j} = 0$ , так что преобразования (15.5) сводятся к равенствам

$$\begin{aligned} \rho' &= \frac{\rho}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \\ j'_x &= -V\rho', \quad j'_y = j'_z = 0. \end{aligned}$$

Согласно первому из этих преобразований в системе  $K'$  плотность возрастает, причем во столько раз, во сколько раз сокращаются продольные размеры тел (см. (1.22) тома I) и тем самым объемы последних. Если объем тела уменьшился, то плотность заряда должна соответственно возрасти. Второе из выписанных преобразований просто означает, что поскольку в системе  $K'$  заряды имеют скорость  $V' = -V$ , направленную по оси  $x$ , то согласно (15.1) в этой системе существует  $j'_x = V'\rho' = -V\rho'$ .

Отметим, что преобразования (15.5) вытекают из теории относительности. Ее привлечение необходимо в связи с тем, что заряженные частицы способны двигаться со скоростями, сравнимыми со скоростью света.

## § 15.2. Состояния электромагнитного поля

1. Взаимодействие электрических зарядов осуществляется на расстоянии. Для описания явлений такого рода применяется понятие силового поля (см. § 2.4 тома I). В терминах силового поля взаимодействие, например, двух частиц трактуется следую-

щим образом. Одна из частиц является источником поля, которое она создает в окружающем пространстве. Другая частица, попав в это поле, испытывает его действие. В нерелятивистской механике такой способ описания действия на расстоянии является только удобным формальным приемом. Система уравнений Ньютона для взаимодействующих частиц содержит только координаты, скорости и ускорения частиц, так что понятие силового поля можно и не вводить. Но с открытием предельной скорости передачи воздействий выяснилось, что поле — это не просто удобный прием описания взаимодействий на расстоянии, а физическая реальность. Поскольку взаимодействие передается с конечной скоростью, то должен существовать материальный объект, переносящий взаимодействие в пространстве с этой скоростью. Осуществляет этот перенос поле, выполняющее роль посредника во взаимодействии пространственно разделенных частиц и представляющее собой особый вид материи. Для частиц с электрическими зарядами таким посредником и является электромагнитное поле.

В истории развития физического знания существовало два взаимоисключающих представления о природе взаимодействия на расстоянии. Согласно одному из них (концепция дальнего действия) допускалась возможность взаимодействия через пустое пространство. Такой взгляд сложился сразу же после открытия Ньютоном законов механики. Успехи концепции дальнего действия были столь впечатляющими, что долгое время вопрос о ее справедливости практически не обсуждался. Сторонники такой точки зрения считали вопрос о происхождении действия на расстоянии второстепенным и отвечали на него примерно так: действие через пустое пространство является опытным фактом, установленным при изучении свойств сил. Так думал, например, Ш. Кулон, открывший в 1785 г. закон электрического взаимодействия зарядов.

Противоположная точка зрения исключала возможность передачи взаимодействия через пустоту. Осуществление взаимодействия допускалось исключительно путем близкого действия. Впервые по этому поводу высказался сам Ньютон. Ему принадлежат слова: «Непонятно, каким образом неодушевленная косная материя, без посредства чего-либо иного, что нематериально, могла бы действовать на другое тело без взаимного прикосновения». Однако справедливость концепции близкого действия можно было подтвердить лишь опытным путем. Гипотеза о близкодствующем характере электромагнитных взаимодействий была выдвинута М. Фарадеем в середине XIX столетия.

Вскоре после завершения этих работ Фарадея Д. К. Максвелл написал свои знаменитые уравнения, содержащие математическую трактовку фарадеевских идей близкого действия и позволившие сделать блестящее предсказание об электромагнитной природе света. Это предсказание было подтверждено экспериментально в 1888 г. Г. Герцем, установившим генерирование и распространение электромагнитных волн в соответствии с уравнениями Максвелла. опыты Герца явились решающим доказательством правильности концепции близкого действия. Но открытие того, что электромагнитное поле является самостоятельной формой материи, затянулось вплоть до начала XX столетия. Произошло это потому, что посредника в действии на расстоянии сначала отождествляли с некоторой средой (эфиром), которую наделяли механическими свойствами. Электромагнитное поле отождествлялось с возмущениями этой среды, т. е. трактовалось подобно звуковым колебаниям. В этом отношении показательны слова, принадлежащие создателю теории электромагнитных

явлений Д. К. Максвеллу: «Там, где математики видели центры напряжения сил дальнего действия, Фарадей видел промежуточный агент. Где они не видели ничего, кроме расстояния, удовлетворяясь тем, что находили закон распределения сил, действующих на электрические флюиды, Фарадей искал сущность реальных явлений, протекающих в среде».

Только А. Эйнштейну, удалось освободиться от механических предубеждений. Создав теорию относительности, А. Эйнштейн показал, что электромагнитное поле — это вид материи, переносящий действие одной частицы на другую.

Поскольку электромагнитные взаимодействия осуществляются через электромагнитные поля, то тем самым оказывается, что электрический заряд является константой связи электрически заряженных частиц с электромагнитным полем. Поэтому электромагнитные поля: а) возникают вокруг зарядов и токов, от которых и распространяются в окружающее пространство, б) действуют на заряды и токи. Эти процессы и изучаются в электродинамике. Для ее построения необходимо знать, каким образом задается состояние поля, каковы фундаментальные законы взаимодействия с полем зарядов и токов, а также каковы законы распространения поля в пространстве. В настоящем томе будет рассмотрена только классическая, т. е. некантовая, электродинамика.

Вопрос о количественном критерии, позволяющем разграничить классические и квантовые электромагнитные явления, по ряду причин не прост. Мы ограничимся указанием на то, что при переходе к квантовым масштабам квантовые свойства, как правило, проявляются у заряженных частиц значительно раньше, чем у электромагнитного поля. Поэтому критерий возможности некантового рассмотрения, например, для взаимодействия нерелятивистских заряженных частиц с электромагнитным полем тот же, что и приведенный на с. 21 тома I:  $mvr \gg \hbar$ , где  $m$  — масса частицы,  $v$  — ее средняя скорость,  $r$  — размер области, в которой происходит движение,  $\hbar$  — постоянная Планка ( $\hbar \approx \approx 10^{-34}$  Дж·с). Квантовые свойства электромагнитных процессов будут рассмотрены в следующем томе курса.

В классической электродинамике есть большой раздел, в котором изучаются взаимодействия электромагнитных полей с различными средами. Этот раздел называется макроскопической электродинамикой. Ее предмет составляют явления, которые своим происхождением обязаны действию электромагнитных полей на заряды вещества и протекающие в нем токи. В макроскопической электродинамике рассматриваются только величины, усредненные по макроскопически малым объемам.

2. Путем обобщения богатейшего экспериментального материала было установлено, что

*состояние электромагнитного поля полностью характеризует-ся двумя векторными функциями координат и времени. Эти век-*



торные функции называются электрическим полем и магнитным полем. Только четыре из шести компонент классических (неквантовых) полей независимы. Множество значений, которые независимые компоненты принимают во всех точках пространства в данный момент времени, задают состояние электромагнитного поля в этот момент.

Почему только четыре компоненты независимы, мы сможем объяснить в следующем параграфе. Пока будем относиться к этому как к факту, установленному опытным путем.

Обычно электрическое поле обозначают через  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ , а магнитное поле — через  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ . Эти величины называются и по-другому — напряженностью электрического поля и магнитной индукцией. В научной физической литературе эти названия встречаются редко. В настоящем курсе будут использоваться только первые термины.

Поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  проявляются в действии на электрические заряды. Действие их на точечный заряд определяется силой Лоренца, о которой мы уже говорили ранее, в § 2.3 тома I. Напомним вид этой силы. В единицах СИ сила Лоренца имеет вид

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q[\mathbf{v}\mathbf{B}], \quad (15.6)$$

где  $q$  — заряд частицы, а  $\mathbf{v}$  — скорость ее движения. В этой системе единицей поля  $\mathbf{E}$  является вольт на метр (В/м), а поле  $\mathbf{B}$  измеряется в теслах (Тл): 1 Тл = 1 Н/(А·м). В системе СГС

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c}[\mathbf{v}\mathbf{B}],$$

где  $c$  — скорость света в вакууме. В этой системе единицей поля  $\mathbf{E}$  является одна дина, отнесенная к единице электрического заряда в этой системе, а поле  $\mathbf{B}$  измеряется в гауссах (Гс). Связь между упомянутыми единицами следующая:

$$\frac{1 \text{ дин}}{1 \text{ ед. СГСЭ}} = \frac{3 \cdot 10^{-5} \text{ Н}}{10^{-9} \text{ Кл}} = 3 \cdot 10^4 \text{ В/м}; \quad 1 \text{ Гс} = 10^{-4} \text{ Тл}.$$

Выражение для силы Лоренца является фундаментальным законом физики электромагнитных явлений. Этот закон определяет, как электромагнитное поле действует на заряженные частицы.

По действию силы Лоренца на заряды можно измерять поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ . Поэтому (см. Введение тома I) выражение для силы Лоренца можно рассматривать и как определение электрического и магнитного полей. Процедура их измерения такова. Необходимо взять заряженную частицу с известным зарядом  $q$  и измерить силу, действующую на неподвижную частицу. Отношение этой силы к заряду  $q$  даст значение поля  $\mathbf{E}$ . Затем в тех же условиях следует измерить силу, действующую на ту же частицу,

когда она движется с известной скоростью  $\mathbf{v}$ . Вычитая из измеренного значения ранее найденную электрическую силу  $q\mathbf{E}$ , найдем значение магнитной силы  $q[\mathbf{v}\mathbf{B}]$  (в системе СГС  $\frac{q}{c}[\mathbf{v}\mathbf{B}]$ ).

Зная это значение, а также  $q$  и  $\mathbf{v}$ , легко вычислить составляющую  $\mathbf{B}$ , перпендикулярную скорости  $\mathbf{v}$ . Для вычисления составляющей  $\mathbf{B}$ , параллельной  $\mathbf{v}$ , можно провести измерение при другой скорости  $\mathbf{v}_1$  заряженной частицы, выбрав эту скорость так, чтобы  $\mathbf{v}_1$  была перпендикулярной  $\mathbf{v}$ .

Сформулируем закон действия силы Лоренца на распределение зарядов и токов. Такая локальная формулировка необходима для описания действия электромагнитного поля на распределение зарядов, заданное их плотностью и плотностью тока. Рассмотрим заряд, находящийся в физически бесконечно малом объеме  $dV$ . Этот заряд равен  $\rho dV$ , где  $\rho$  — среднее значение плотности заряда в этом объеме. Так как объем мал, то с достаточной точностью заряд  $\rho dV$  является точечным. Если он перемещается со скоростью  $\mathbf{v}$ , то действующая на него со стороны электромагнитного поля сила будет равна

$$d\mathbf{F} = \rho dV \mathbf{E} + \rho dV [\mathbf{v}\mathbf{B}] = \{\rho\mathbf{E} + [j\mathbf{B}]\} dV.$$

Здесь  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  — значения электрического и магнитного полей в той же самой точке, в которой плотность зарядов и плотность тока равны, соответственно,  $\rho$  и  $j$ . Значком  $d$  у силы отмечается то обстоятельство, что сила  $d\mathbf{F}$  приложена только к зарядам, сосредоточенным в объеме  $dV$ . Сила, действующая на все распределение зарядов, получается интегрированием  $d\mathbf{F}$  по всему пространству (там, где зарядов нет, интегрирование дает нулевой вклад):

$$\mathbf{F} = \int d\mathbf{F} = \int \{\rho\mathbf{E} + [j\mathbf{B}]\} dV.$$

Второе слагаемое в правой части этой формулы характеризует действие магнитного поля на токи и часто называется *силой Ампера*. Отметим, наконец, что величина

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{F}}{dV} = \rho\mathbf{E} + [j\mathbf{B}] \quad (15.7)$$

имеет смысл плотности силы электромагнитного действия на распределение зарядов.

Электромагнитное поле отличается от любой системы частиц тем, что

*электромагнитное поле является физической системой с бесконечно большим числом степеней свободы.*

Это свойство связано с определением состояния поля. Действительно, в области существования поля значения независи-

мых компонент  $E$  и  $B$  составляют бесчисленное множество величин, так как любая область пространства содержит бесконечно большое число точек.

Наконец, электромагнитные поля подчиняются принципу суперпозиции. Этот закон установлен опытным путем и утверждает, что

*при одновременном действии нескольких источников электромагнитного поля (имеется несколько заряженных электрических тел в свободном, т. е. не содержащем вещества, пространстве) образуется поле, равное сумме полей, создаваемых каждым источником.*

Так, если один источник создает электрическое поле  $E_1$  и магнитное поле  $B_1$ , а поля другого источника равны  $E_2$  и  $B_2$ , то при одновременном действии обоих источников в пространстве без вещества образуются поля  $E = E_1 + E_2$  и  $B = B_1 + B_2$ . Таким образом, принцип суперпозиции утверждает, что при определенных условиях (они оговорены выше) поля можно складывать. Поэтому принцип суперпозиции очень важен для расчета электромагнитных полей. Любое поле можно найти суммированием полей от всех зарядов и токов источника.

Принцип суперпозиции действует и в макроскопической электродинамике. Но там область его применимости ограничена не только квантовыми явлениями. Эти ограничения будут изложены в свое время.

3. Существует два способа наглядного представления состояния электромагнитного поля. Один из них заключается в том, что изображают некоторое количество стрелок, длина и направление которых характеризуют электрическое или магнитное поле в тех точках, откуда эти стрелки начинаются. Для примера на рис. 15.2 указанным способом изображено электрическое поле, которое создает точечный положительный заряд, находящийся в покое. Другой способ основан на применении представления о силовых линиях поля. Это геометрические линии, обладающие следующими свойствами. Во-первых, поле в каждой точке, через которую проходит силовая линия, направлено по касательной к линии. Этим с помощью силовых линий указывают направление поля. Во-вторых, число линий на единицу площади, расположенной поперек линий, принимается пропорциональным абсолютной величине поля. Таким приемом учитывают значение последней. С помощью силовых линий поле, представленное на рис. 15.2, изображается так, как это показано на рис. 15.3.

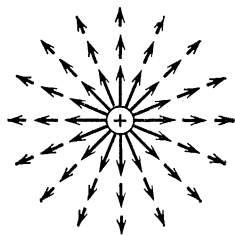


Рис. 15.2.

Способы наглядного представления состояния поля не лишены недостатков. Во-первых, они дают неполное представление о состоянии поля уже хотя бы потому, что все значения поля, так же как и все силовые линии, изобразить невозможно. Кроме того, при использовании представления поля силовыми линиями трудно учитывать принцип суперпозиции. Действительно, обратимся к рис. 15.4. На нем изображены силовые линии электрического поля, которое создают два покоящихся точечных положительных заряда. Легко видеть, что простым наложением двух

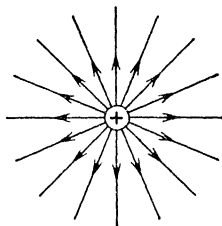


Рис. 15.3.

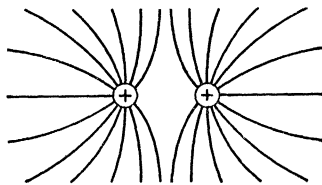


Рис. 15.4.

картин, каждая из которых имеет вид, изображенный на рис. 15.3, очень трудно получить то, что показано на рис. 15.4. Именно эти недостатки дали основание известному физико-теоретику нашего времени Р. Фейнману высказаться следующим образом: «Немало изобретательности было потрачено на то, чтобы помочь людям мысленно представить поведение полей, и самая правильная точка зрения — это самая отвлеченная: надо просто рассматривать поля как математические функции координат и времени». Мы разделяем этот взгляд и будем ему следовать в настоящем курсе (не забывая, конечно, о том, что эти функции описывают физические величины).

### § 15.3. Уравнения Максвелла

1. Решающий шаг в установлении законов воздействия зарядов и токов на электромагнитные поля и законов распространения полей был сделан Д. К. Максвеллом в 1860—1865 гг. Этот шаг был подготовлен работами многих исследователей, в первую очередь Ш. Кулона, А. Ампера, Г. Эрстеда, Ж. Био, Ф. Савара, П. Лапласа, М. Фарадея. Не следует удивляться тому, что открытие поля как вида материи произошло позднее, чем были сформулированы законы, которым оно подчиняется. Эти законы продиктовал опыт. Понимание же того, что они выражают свойства качественно нового объекта — электромагнитного поля, пришло лишь с пересмотром самых общих представлений о природе в целом, сложившихся к началу XX столетия.

А эти перемены во взглядах на природу произошли только после создания теории относительности.

Содержание законов, сформулированных Максвеллом, в применении к микроскопическим полям, заключается в следующем.

а) Поток электрического поля через любую замкнутую поверхность пропорционален заряду, который в данный момент времени находится в объеме, ограниченном этой поверхностью.

б) Циркуляция электрического поля по любому замкнутому контуру пропорциональна скорости приращения магнитного потока через любую поверхность, ограниченную данным контуром. При этом циркуляция электрического поля и скорость приращения магнитного потока имеют противоположные знаки.

в) Поток магнитного поля через любую замкнутую поверхность равен нулю.

г) Циркуляция магнитного поля по любому замкнутому контуру равна сумме двух слагаемых. Первое из них пропорционально силе электрического тока, который в данный момент времени протекает сквозь этот контур. Второе слагаемое пропорционально скорости изменения потока электрического поля через любую поверхность, ограниченную этим контуром.

Математически законы а) — г) выражаются микроскопическими уравнениями Максвелла в интегральной форме. Эти уравнения в системе СИ имеют вид

$$\begin{aligned} \oint_S (\mathbf{E} d\mathbf{S}) &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV, \\ \oint_L (\mathbf{E} d\mathbf{r}) &= -\frac{\partial}{\partial t} \int_S (\mathbf{B} d\mathbf{S}), \\ \oint_S (\mathbf{B} d\mathbf{S}) &= 0, \\ \oint_L (\mathbf{B} d\mathbf{r}) &= \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \int_S (\mathbf{j} d\mathbf{S}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_S (\mathbf{E} d\mathbf{S}). \end{aligned} \tag{15.8}$$

В этих уравнениях  $c$  — скорость света в вакууме,  $\epsilon_0$  — постоянный коэффициент, равный  $8,85 \cdot 10^{-12}$  Кл<sup>2</sup>/(Н·м<sup>2</sup>). Этот коэффициент называется *электрической постоянной* \*). Ориентации поверхностей и контуров согласованы в соответствии с п. 4 § 2 Введения. Поверхность  $S$  — произвольная замкнутая в первом и третьем уравнениях, а во втором и четвертом — вообще произвольна. В первом уравнении объем  $V$  ограничен

\*) Эта постоянная физического смысла не имеет. Ее появление связано с несогласованностью (или, как еще говорят, с некогерентностью) различных величин в системе СИ.

поверхностью  $S$ . Во втором и четвертом уравнениях контур  $L$  всегда замкнут и ограничивает поверхность  $S$ .

В системе СГС уравнения Максвелла содержат иные коэффициенты. В правой части первого уравнения вместо  $1/\epsilon_0$  стоит  $4\pi$ , в правой части второго уравнения появляется коэффициент  $1/c$ , в правой части четвертого уравнения первое слагаемое имеет коэффициент  $4\pi/c$ , а второе —  $1/c$ .

Уравнения Максвелла выражают следующие свойства электромагнитного поля.

Первые два уравнения говорят о том, что электрическое поле может возникать по двум причинам. Во-первых, его источниками являются электрические заряды, которые порождают поток электрического поля. Закон пропорциональности потока электрического поля через замкнутую поверхность заряду в объеме, ограниченном этой поверхностью, называется *теоремой Гаусса*. Во-вторых, электрическое поле образуется всегда, когда происходит изменение во времени магнитного поля. Впервые это явление

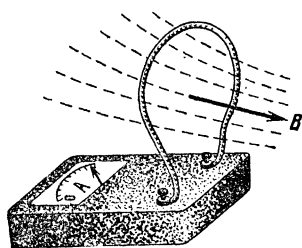


Рис. 15.5.

было обнаружено М. Фарадеем в 1831 г. и получило название *электромагнитной индукции*. Его можно продемонстрировать, например, таким образом. Предположим, что клеммы амперметра соединены проводом и тем самым образована замкнутая цепь (рис. 15.5). Если она оказывается в переменном магнитном поле, то стрелка амперметра отклоняется, что свидетельствует о протекании в цепи электрического тока. Своим происхождением он обязан действию электрического поля на свободные электроны внутри проводника. Это поле возникает из-за изменения магнитного потока, пронизывающего замкнутый контур цепи.

Вторые два уравнения утверждают, что магнитное поле является вихревым и образуется только при наличии или электрических токов, или изменяющегося во времени электрического поля, или того и другого одновременно. Никаких источников магнитного поля, подобных электрическим зарядам, которые уместно было бы назвать магнитными зарядами, не существует. В противном случае поток магнитного поля через замкнутую поверхность, вообще говоря, был бы отличен от нуля. Подобно электрическому полю, пронизывая замкнутую поверхность, магнитное поле создавало бы через нее магнитный поток, пропорциональный магнитному заряду, оказавшемуся внутри данной поверхности. Но это находится в противоречии с законом в).

Из второго и четвертого уравнений (15.8) следует, что электрические и магнитные поля нельзя рассматривать как независимые. Имеет смысл лишь их совокупность, описывающая единое электромагнитное поле. Позднее мы убедимся в том, что это обстоятельство является следствием принципа относительности Эйнштейна.

Отметим, что асимметрия сформулированных Максвеллом законов, выраженная в неравноправии электрического и магнитного полей, у некоторых физиков до сих пор вызывает чувство неудовлетворенности. Еще в 1931 г. П. Дирак, стремясь восстановить это равноправие, высказал гипотезу о возможности существования магнитных зарядов. Элементарную порцию магнитного заряда он предложил назвать монополю. С той поры и по сей день предпринимаются попытки обнаружить монополю экспериментально. Его ищут в продуктах реакций, в которые вступают различные микроскопические частицы. Эти опыты ставятся на крупнейших ускорителях. Монополю пытаются разыскать среди космических частиц, в метеоритах, в горных магнетитовых породах, в донных осадках Мирового океана, но пока безуспешно. Однако попытки не прекращаются. И дело тут не только в высоком авторитете одного из крупнейших физиков-теоретиков XX столетия П. Дирака. По значимости открытие монополя можно было бы приравнять великим открытиям физики, таким, например, как открытие электрона, ядерного строения атома, радиоактивности. Факт его существования заставил бы кардинально пересмотреть сложившиеся представления о природе материи, одним из краеугольных камней которых являются законы, сформулированные Максвеллом. Пока эти законы остаются незлыблемыми.

2. Микроскопические уравнения Максвелла можно переписать в дифференциальной форме, т. е. в виде системы дифференциальных уравнений. Переход к дифференциальной форме разбивается на два шага. На первом шаге каждое уравнение системы (15.8) приводится к такому виду, чтобы в его левой и правой частях содержались интегралы по одной и той же области. В первом и третьем уравнениях этот шаг производится с помощью теоремы Гаусса — Остроградского (В.25), а во втором и четвертом уравнениях — с помощью теоремы Стокса (В.21). Например, в первом уравнении (15.8) левая часть преобразуется согласно (В.25) к интегралу по объему:

$$\oint_S (\mathbf{E} d\mathbf{S}) = \int_V \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial r} dV,$$

так что это уравнение становится содержащим только объемные интегралы:

$$\int_V \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial r} dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV.$$

Во втором уравнении (15.8) левая часть с помощью (B.21) преобразуется к интегралу по поверхности:

$$\oint_L (\mathbf{E} d\mathbf{r}) = \int_S \left( \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{E} \right] d\mathbf{S} \right),$$

и в правой части меняется порядок интегрирования и дифференцирования:

$$- \frac{\partial}{\partial t} \int_S (\mathbf{B} d\mathbf{S}) = - \int_S \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S} \right).$$

В результате это уравнение становится содержащим только интегралы по поверхности:

$$\int_S \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{E} \right] d\mathbf{S} = - \int_S \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S} \right).$$

Третье и четвертое уравнения (15.8) преобразуются аналогично.

Для осуществления второго шага используется интуитивно очевидная математическая теорема: если равны интегралы от двух величин по одной и той же произвольной области, то равны и подынтегральные выражения. Отсюда прямо получаются искомые микроскопические уравнения Максвелла в дифференциальной форме (в системе СИ):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{r}} &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho, \\ \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{E} \right] &= - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{r}} &= 0, \\ \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{B} \right] &= \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{aligned} \tag{15.9}$$

Используя снова теорему Гаусса — Остроградского, нетрудно из дифференциальных уравнений (15.9) получить обратно интегральные уравнения (15.8). Это означает, что обе формы эквивалентны для непрерывных распределений зарядов и токов.

При наличии сингулярностей, таких, как границы разрыва или точечные заряды, интегральные уравнения (15.8) остаются справедливыми, а дифференциальные уравнения (15.9) можно вводить лишь на основе математической теории обобщенных функций, которая здесь рассматриваться не будет. При наличии сингулярных распределений токов и зарядов мы будем применять дифференциальные уравнения в областях, где сингулярностей нет, а в окрестности сингулярностей будем использовать интегральную форму (15.8).



В системе СГС микроскопические дифференциальные уравнения Максвелла имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{r}} &= 4\pi\rho, \\ \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{E} \right] &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{r}} &= 0, \\ \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{B} \right] &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.\end{aligned}$$

Обратим внимание на то, что в последнее уравнение Максвелла величина  $\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$  ( $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$  в системе СГС) входит равноправным образом с  $\mathbf{j}$  и имеет размерность плотности тока. Величина  $\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$  называется *плотностью тока смещения*. Как видно, ток смещения отличен от нуля только для переменных электрических полей. Если электрическое поле стационарно, то ток смещения отсутствует.

Главный смысл уравнений (15.9) заключается в том, что *уравнения Максвелла содержат уравнения движения электромагнитного поля.*

Это означает, что в каждом случае поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  могут быть найдены путем решения уравнений (15.9) (или их аналога в системе СГС). Каждое решение выделяется с помощью начальных и граничных условий. Начальные условия определяют поля в некоторый фиксированный момент времени, который обычно принимается за нулевой (отсюда и название «начальные условия»). Задания полей в один из моментов времени достаточно для определения постоянных интегрирования уравнений (15.9) по времени, так как в (15.9) входят только первые производные по времени. Граничные условия выражают свойства, связанные с наличием поверхностей раздела, т. е. таких поверхностей, по разные стороны которых свойства системы различны, а также с ограничениями области существования поля какими-либо поверхностями. Граничные условия задают поля в любой момент времени на поверхностях такого рода. Если область существования поля очень велика, то условия на удаленных внешних границах трансформируются в задание полей в бесконечно удаленных точках, или, как говорят, — на бесконечности.

Выше мы не оговорились, заявив, что уравнения Максвелла лишь содержат уравнения движения электромагнитного поля. Другими словами, не все уравнения Максвелла суть уравнения

движения поля. Действительно, только два из четырех уравнений (15.9) содержат производные по времени, т. е. определяют, как поле изменяется во времени. В первом уравнении и в третьем уравнении (15.9) таких производных нет. Тем самым эти уравнения являются только условиями, налагаемыми на  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{V}$ . Эти условия связывают компоненты полей при любых их изменениях во времени. А так как таких условий два, то оказывается, что из шести компонент полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{V}$  только четыре независимы. Вот в чем причина того, что состояние электромагнитного поля задается так, как об этом было сказано в предыдущем параграфе.

*Уравнения Максвелла (15.9) совместно с уравнениями движения для заряженных частиц под действием силы Лоренца (15.6) составляют фундаментальную систему микроскопических уравнений Максвелла — Лоренца. Эта система уравнений в принципе достаточна для описания всех электромагнитных явлений, в которых не проявляются квантовые закономерности.*

Для того чтобы система уравнений Максвелла — Лоренца имела единственное решение, т. е. давала однозначное предсказание хода рассматриваемого электромагнитного процесса, необходимо задание

а) начального состояния частиц и полей (т. е. координат и скоростей частиц, а также полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{V}$  в начальный момент времени  $t = 0$ );

б) граничных условий для полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{V}$ , фиксирующих их поведение на границе рассматриваемой области, которое определяется условиями задачи.

С фиксированными начальными и граничными условиями система микроскопических уравнений Максвелла — Лоренца имеет единственное решение, т. е. дает однозначное предсказание о поведении исследуемой физической системы. Конкретный вид возможных начальных и граничных условий зависит от свойств уравнений Максвелла.

3. Перечислим эти свойства.

а) *Уравнения Максвелла линейны.* Они содержат только первые производные полей по времени и пространственным координатам и первые степени плотности электрического заряда и тока. Свойство линейности уравнений Максвелла прямо связано с принципом суперпозиции. Действительно, пусть две системы электрических зарядов задаются, соответственно, величинами  $\rho_1$ ,  $\mathbf{j}_1$  и  $\rho_2$ ,  $\mathbf{j}_2$ . Допустим, что первая система в отсутствие второй создает поля  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{V}_1$ , а вторая в отсутствие первой —  $\mathbf{E}_2$  и  $\mathbf{V}_2$ . Тогда

$$\frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial \mathbf{r}} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_1, \quad \frac{\partial \mathbf{E}_2}{\partial \mathbf{r}} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_2 \quad \text{и т. д.}$$

Сложим теперь соответствующие уравнения. В результате получим

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{r}} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad \text{и т. д.},$$

где  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$ ,  $\rho = \rho_1 + \rho_2$ ,  $\mathbf{j} = \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2$ . Мы видим, что суммарные поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  образуются зарядами, распределение которых задается суммарными величинами  $\rho$  и  $\mathbf{j}$ .

б) *Уравнения Максвелла содержат закон сохранения электрического заряда.* Убедимся в этом. Для этого продифференцируем по времени первое уравнение (15.9) и умножим обе его части на  $\epsilon_0$ . Так как порядок дифференцирования по времени и по независимым от времени пространственным координатам несуществен, то

$$\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Возьмем теперь дивергенцию от обеих частей последнего из уравнений (15.9) и умножим обе его части на  $\epsilon_0 c^2$ . Согласно (В.8) получим

$$\epsilon_0 c^2 \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{B} \right] \right) = 0 = \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial \mathbf{r}} + \epsilon_0 \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right).$$

Исключая отсюда  $\epsilon_0 \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$  с помощью предыдущего равенства, получаем требуемый результат:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial \mathbf{r}} = 0.$$

в) *Из уравнений Максвелла следует, что каждое электромагнитное поле может быть охарактеризовано скалярным и векторным потенциалами.* Эти величины обозначаются, соответственно, через  $\phi$  и  $\mathbf{A}$ . Первый является скалярной, а второй — векторной функцией пространственных координат, а в случае переменных полей — еще и времени. Эти функции связаны с полями  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  равенствами

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= - \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \\ \mathbf{B} &= \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{A} \right], \end{aligned} \quad (15.10)$$

которые справедливы в системе СИ. В системе СГС изменяется только связь  $\mathbf{E}$  с  $\phi$  и  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{E} = - \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

Равенства (15.10) не только определяют  $\phi$  и  $\mathbf{A}$ . В этих равенствах содержится еще сильное утверждение о том, что задание

только четырех функций  $\varphi$ ,  $A_x$ ,  $A_y$ ,  $A_z$  полностью определяют шесть функций  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $E_z$ ,  $B_x$ ,  $B_y$ ,  $B_z$  при условии, что последние удовлетворяют уравнениям Максвелла.

Справедливость этого утверждения доказывается так. Из третьего уравнения Максвелла (15.9), согласно свойству а) п. 3 § 2 Введения, прямо следует существование векторного потенциала  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ , удовлетворяющего второму соотношению (15.10). Подставив это соотношение во второе уравнение системы (15.9) и поменяв порядок дифференцирования по времени и координатам, получим

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{E} \right] = - \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right]$$

или, что то же самое,

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \right] = 0.$$

Отсюда, согласно свойству б) п. 3 § 2 Введения, следует, что существует такая скалярная функция  $-\varphi^*$ , что

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = - \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}}.$$

А это соотношение эквивалентно первому равенству (15.10).

Потенциалы обладают важным свойством. В определенных пределах их можно варьировать, *не изменяя* при этом самих полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ . Именно, из скалярного потенциала можно вычесть производную по времени *произвольной* скалярной функции  $f(\mathbf{r}, t)$  и одновременно к векторному потенциалу прибавить градиент той же самой функции. Полученные в результате новые потенциалы будут описывать *то же самое* электромагнитное поле. О различных способах выбора потенциалов, оставляющих неизменными поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ , говорят как о различных *калибровках потенциалов*. Калибровка фиксируется выбором функции  $f(\mathbf{r}, t)$ . Неизменность, или инвариантность, полей по отношению к различным калибровкам называется *свойством градиентной* или *калибровочной инвариантности*. Это свойство позволяет выбрать потенциалы наиболее удобным образом, т. е. так, чтобы соотношения теории электромагнитного поля были проще.

Для доказательства калибровочной инвариантности электромагнитного поля вычислим  $\mathbf{E}'$  и  $\mathbf{B}'$  по потенциалам

$$\varphi' = - \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \mathbf{A}' = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}},$$

---

\*) Знак минус выбирается для удобства, которое станет понятным позднее,

где  $f$  — произвольная функция  $\mathbf{r}$  и  $t$ . Согласно (15.10) и (B.7)

$$\mathbf{E}' = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = 0,$$

$$\mathbf{B}' = \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \right] = 0.$$

Отсюда (и из линейности связи полей с потенциалами) прямо следует, что потенциалы  $\varphi - \frac{\partial f}{\partial t}$ ,  $\mathbf{A} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}$  определяют те же поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ , что и исходные потенциалы  $\varphi$  и  $\mathbf{A}$ .

Возможность калибровочных преобразований указывает на то, что, в отличие от полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ , потенциалы не являются полноправными физическими величинами. Из-за неоднозначности потенциалов нельзя, например, указать (хотя бы принципиальный) метод измерения  $\varphi$  и  $\mathbf{A}$ .

г) Подставим выражения (15.10) полей через потенциалы в уравнения Максвелла (15.9). Очевидно, что второе и третье уравнения при этом обратятся в тождества. Первое и четвертое из уравнений (15.9) станут теперь уравнениями движения для потенциалов:

$$\left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left\{ -\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right\} \right) = -\Delta \varphi - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{r}} \right) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho,$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{A} \right] \right] = -\Delta \mathbf{A} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{r}} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \mathbf{j} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}.$$

Здесь мы использовали тождества (B.9) и (B.11), а также перестановочность символов  $\partial/\partial \mathbf{r}$  и  $\partial/\partial t$ . Выберем теперь калибровку потенциалов так, чтобы удовлетворялось равенство

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{r}} = 0. \quad (15.11)$$

Такая калибровка называется *калибровкой Лоренца*. Подставив (15.11) в предыдущие уравнения, получим, что в этой калибровке уравнения для потенциалов приобретают форму

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho,$$

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0 c^2} \mathbf{j}. \quad (15.12)$$

Часто (15.12) записывают компактно в виде

$$\square \varphi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho,$$

$$\square \mathbf{A} = -\frac{1}{\epsilon_0 c^2} \mathbf{j}, \quad (15.13)$$

где символ  $\square$  обозначает  $\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ . Эта комбинация называется *оператором Д'Аламбера*.

В системе СГС вид уравнений для  $\varphi$  и  $\mathbf{A}$  следующий:

$$\square \varphi = -4\pi\rho,$$

$$\square \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}.$$

Подведем итог. Мы убедились в том, что при выборе калибровки Лоренца для потенциалов  $\varphi$  и  $\mathbf{A}$  получаются уравнения одинаковой математической структуры. А это означает, что и методы их решения едины. Такое единообразие удобно для решения многих задач электродинамики. Это свидетельствует о полезности подхода к описанию свойств электромагнитного поля с помощью потенциалов.

д) Из уравнений Максвелла следует важный вывод:

*Электромагнитное поле способно существовать в отсутствие электрических зарядов и токов. При этом изменение его состояния обязательно носит волновой характер. Поля такого рода называют электромагнитными волнами. В свободном пространстве они всегда распространяются со скоростью света в вакууме.*

Убедимся в этом. При отсутствии зарядов и токов  $\rho = 0$  и  $\mathbf{j} = 0$  и, следовательно, уравнения (15.13) имеют вид

$$\square \varphi = 0, \quad \square \mathbf{A} = 0.$$

Эти уравнения имеют ненулевые волновые решения типа

$$\varphi = \varphi_0 e^{-i\omega t + i(\mathbf{k}\mathbf{r})}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}_0 e^{-i\omega t + i(\mathbf{k}\mathbf{r})}.$$

Здесь  $\varphi_0$  — произвольный постоянный скаляр,  $\mathbf{A}_0$  и  $\mathbf{k}$  — произвольные постоянные векторы,  $\omega = c|\mathbf{k}|$ . Волновые решения для  $\varphi$  и  $\mathbf{A}$  определяют волновые поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ . Это следует из равенств (15.10) и из свойства экспоненциальной функции не изменять своего вида при дифференцировании. Равенство скоростей распространения в пустоте электромагнитных волн и света следует из закона дисперсии  $\omega = c|\mathbf{k}|$ .

Впервые существование электромагнитных волн было предсказано Д. К. Максвеллом. К этому выводу он пришел, анализируя свойства сформулированных им уравнений электромагнитного поля. Однако опытное подтверждение предсказание Д. К. Максвелла получило только в 1888 г., спустя девять лет после его смерти. Эти опыты, сыгравшие выдающуюся роль в истории развития знания о природе электромагнитных явлений, были осуществлены Г. Герцем.

Подробно свойства электромагнитных волн будут рассмотрены в гл. 22.

е) До сих пор молчаливо предполагалось, что описание электромагнитного поля осуществляется в какой-то одной инерциальной системе отсчета. Однако различные инерциальные системы физически эквивалентны друг другу (принцип относительности). Следовательно, уравнения Максвелла должны выполняться во всех инерциальных системах отсчета, что и подтверждается многочисленными опытными данными. Этот фундаментальный закон имеет своим следствием такой вывод: поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ , так же как и потенциалы  $\varphi$  и  $\mathbf{A}$ , не остаются неизменными при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую, а преобразуются по определенным правилам. Рассмотрим преобразование полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  при переходе из покоящейся системы отсчета в движущуюся. Такие переходы наиболее интересны в связи с тем, что в них проявляется взаимосвязь электрических и магнитных явлений.

В первую очередь отметим, что к электромагнитному полю можно применять только принцип относительности Эйнштейна, а не Галилея. Для этого достаточно вспомнить, что электромагнитные волны во всех системах отсчета распространяются с одной и той же скоростью  $c$ . Этот факт (это уже отмечалось в § 1.3 тома I) несовместим с принципом относительности Галилея.

Рассмотрим переход от неподвижной системы отсчета  $K$  к движущейся  $K'$ , который задается преобразованиями Лоренца (1.25) (см. § 1.4 тома I):

$$t' = \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z,$$

где  $V$  — скорость относительного движения систем отсчета. При таком переходе поля преобразуются так:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x, & B'_x &= B_x, \\ E'_y &= \frac{E_y - VB_z}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, & B'_y &= \frac{B_y + VE_z/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \\ E'_z &= \frac{E_z + VB_y}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, & B'_z &= \frac{B_z - VE_y/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \end{aligned} \quad (15.14)$$

Здесь компоненты полей, отмеченные штрихом, определены в системе  $K'$ . Компоненты без штриха относятся к системе  $K$ .

Вывод преобразований (15.14) громоздок. Поэтому ограничимся пояснением их естественности на простом примере. Пусть в системе  $K$  имеется бесконечно длинный, равномерно положительно заряженный цилиндр кругового сечения, изображенный на рис. 15.6 слева. Из соображений симметрии очевидно, что этот цилиндр будет отталкивать положительно заряженные ча-

стицы в направлениях, перпендикулярных оси цилиндра. Поэтому электрическое поле  $\mathbf{E}$ , которое создает цилиндр, будет направлено перпендикулярно оси цилиндра вдоль прямых, проходящих через эту ось (центральная часть рис. 15.6). Направим координатную ось  $x$  вдоль оси цилиндра. Тогда у поля  $\mathbf{E}$  не равными нулю будут компоненты  $E_y$  и  $E_z$ . Произведем преобразования (15.14). Из них видно, что в системе отсчета, движущейся со скоростью  $V$  вдоль оси  $x$ , появится магнитное поле с ненулевыми компонентами  $B'_y$  и  $B'_z$ , причем такими, что  $(\mathbf{B}'\mathbf{E}') = 0$ .

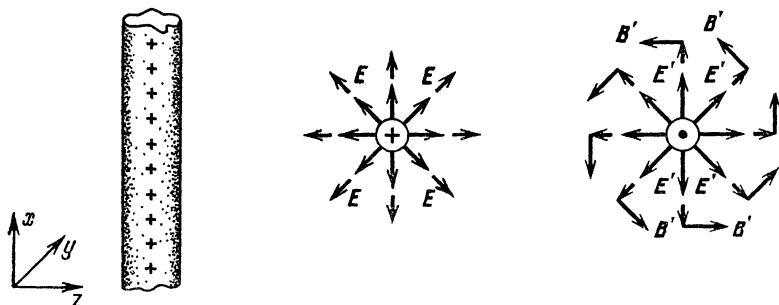


Рис. 15.6.

Это означает, что в каждой точке поле  $\mathbf{B}'$  будет направлено по касательной к окружности, проходящей через данную точку и имеющей центр на оси цилиндра (правая часть рис. 15.6). Физический смысл этого поля такой. Движущиеся (в системе  $K'$ ) заряды образуют электрический ток, а прямолинейный ток создает вокруг себя круговое магнитное поле. Именно это поле  $\mathbf{B}'$  мы и получаем с помощью преобразований (15.14). Преобразованное же электрическое поле  $\mathbf{E}'$  возрастает в  $1/\sqrt{1 - V^2/c^2}$  раз. Это возрастание объясняется тем, что согласно (15.5) в системе  $K'$  во столько же раз увеличивается плотность электрического заряда.

Обратим внимание на то, что преобразования (15.14) «перемешивают» электрическое поле с магнитным подобно тому, как преобразования Лоренца «перемешивают» пространственные координаты и время. Каждое из полей  $\mathbf{E}'$  и  $\mathbf{B}'$  выражается как через  $\mathbf{E}$ , так и через  $\mathbf{B}$ . Это свидетельствует о единой природе электрического и магнитного полей. Каждое из них по отдельности не имеет абсолютного смысла: об электрическом или магнитном поле можно говорить лишь с обязательным указанием системы отсчета, в которой эти поля рассматриваются.

Наконец, из (15.14) следует, что возникновение поля  $\mathbf{B}'$  является релятивистским эффектом. В нерелятивистском пределе, т. е. при  $V/c \rightarrow 0$ , поле  $\mathbf{B}'$  исчезает,



*Релятивистская природа магнетизма является универсальным физическим фактом, происхождение которого обусловлено отсутствием магнитных зарядов.*

Но, в отличие от многих других релятивистских явлений, магнетизм во многих случаях сравнительно легко обнаруживается\*). Причина этой сравнительной легкости обусловлена в основном тем, что магнитное поле может создаваться очень большим количеством движущихся зарядов. Поэтому заметной величиной оказывается магнитное поле проводника с током. Благодаря этому магнитные явления сыграли важную роль в истории развития физики. Изучение электромагнетизма было как раз тем путем, который привел к открытию принципа относительности Эйнштейна.

#### § 15.4. Импульс, энергия и момент импульса электромагнитного поля

1. Как всякий материальный объект, электромагнитное поле обладает импульсом, энергией и моментом импульса. Эти величины для поля сохраняются, если оно оказывается изолированным. Условие изолированности выполняется в тех случаях, когда в области существования поля нет электрических зарядов и токов. Сохранение импульса, энергии и момента импульса изолированного поля является следствием однородности пространства и времени и изотропности пространства (см. § 1.3 тома I). При взаимодействии электромагнитного поля с зарядами и токами сохраняются суммарные величины для поля и заряженных частиц. Так, сохраняется полная сумма импульсов электромагнитного поля и заряженных частиц.

Поскольку поле всегда занимает некоторую область пространства, то импульс, энергия и момент импульса характеризуются их удельными значениями. Эти значения определяются соответствующей физической величиной, отнесенной к единице объема в данном месте пространства. Удельные значения названных величин именуются, соответственно, *плотностью импульса*, *плотностью энергии* и *плотностью момента импульса поля*. В порядке перечисления они будут обозначаться через  $\mathbf{g}$ ,  $w$  и  $l$ . В общем случае каждая из этих величин является функцией времени  $t$  и точки пространства  $\mathbf{r}$ . Так,  $\mathbf{g}(\mathbf{r}, t)$  определяет в момент времени  $t$  импульс поля в единице объема, окружающего точку  $\mathbf{r}$ .

Плотности импульса, энергии и момента импульса для поля определяются стандартным образом. В каждом бесконечно малом объеме  $dV$  поле обладает импульсом, энергией и моментом

---

\*) Вспомним хотя бы о хорошо всем известных постоянных магнитах.

импульса, равными, соответственно,  $\mathbf{g}(\mathbf{r}, t)dV$ ,  $\omega(\mathbf{r}, t)dV$  и  $\mathbf{l}(\mathbf{r}, t)dV$ . Просуммировав эти значения, т. е. вычислив интегралы  $\int \mathbf{g}(\mathbf{r}, t)dV$ ,  $\int \omega(\mathbf{r}, t)dV$  и  $\int \mathbf{l}(\mathbf{r}, t)dV$ , мы найдем импульс, энергию и момент импульса поля в целом.

Для сокращения записи мы часто будем опускать аргументы у удельных значений  $\mathbf{g}$ ,  $\omega$  и  $\mathbf{l}$  (так же и у самих полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ ).

Без вывода укажем, что система микроскопических уравнений Максвелла — Лоренца согласована с изотропией пространства и с однородностью пространства и времени. Поэтому перечисленные выше законы сохранения, равно как и явный вид плотностей  $\mathbf{g}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\omega(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{l}(\mathbf{r}, t)$ , можно вывести прямо из уравнений Максвелла — Лоренца. Однако соответствующие выкладки громоздки и поэтому будут опущены.

2. Для плотности  $\mathbf{g}(\mathbf{r}, t)$  импульса электромагнитного поля получается выражение (система СИ)

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 [\mathbf{E}\mathbf{B}]. \quad (15.15)$$

(В системе СГС вместо  $\epsilon_0$  появляется коэффициент  $1/4\pi c$ .) Отсюда для полного импульса  $\mathbf{P}$  заряженных частиц и электромагнитного поля получается выражение (система СИ)

$$\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i + \int \epsilon_0 [\mathbf{E}\mathbf{B}] dV,$$

где суммирование производится по импульсам  $\mathbf{p}_i$  всех заряженных частиц, а интегрирование — по всему объему пространства. Сохранение  $\mathbf{P}$  прямо следует из уравнений Максвелла — Лоренца. Из (15.15) видно, что плотность импульса электромагнитного поля не равна нулю только в тех точках, в которых существуют оба поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ , причем не параллельные друг другу.

В рассмотренном в п. 3 § 15.3 примере заряженного цилиндра согласно (15.15) плотность импульса поля всюду равна нулю в системе отсчета  $K$  (проводник покоится) и направлена вдоль скорости движения зарядов в системе  $K'$  (проводник движется).

3. Для плотности  $\omega(\mathbf{r}, t)$  энергии электромагнитного поля получается выражение (система СИ)

$$\omega(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} (\epsilon_0 E^2 + \epsilon_0 c^2 B^2). \quad (15.16)$$

(В системе СГС коэффициенты перед  $E^2$  и  $B^2$  одинаковы и каждый равен  $1/8\pi$ .)

Из (15.16) видно, что плотность энергии электромагнитного поля складывается из чисто электрической и чисто магнитной

составляющих. Эта плотность не равна нулю и положительна везде, где не равно нулю хотя бы одно из полей  $\mathbf{E}$  или  $\mathbf{B}$ . Величину  $\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$  называют плотностью электрической энергии, а величину  $\frac{1}{2} \epsilon_0 c^2 B^2$  — плотностью магнитной энергии (система СИ).

Убыль полной энергии поля в единицу времени равна мощности, развиваемой полем при действии на заряды. В объеме  $dV$  эта мощность равна скалярному произведению силы, в данный момент времени приложенной со стороны поля к зарядам в объеме  $dV$ , на скорость  $\mathbf{v}$  движения этих зарядов. Согласно (15.7) для мощности получаем выражение

$$(\mathbf{f}\mathbf{v}) dV = \rho(\mathbf{E}\mathbf{v}) dV + (\mathbf{v}[j\mathbf{B}]) dV = (\rho\mathbf{v}\mathbf{E}) dV,$$

так как  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{v}$  коллинеарны. С помощью (15.1) находим

$$(\mathbf{f}\mathbf{v}) dV = (\mathbf{j}\mathbf{E}) dV.$$

Интегрируя по пространству, получим равенство, выражающее закон сохранения энергии для физической системы, состоящей из заряженных частиц и электромагнитного поля:

$$-\frac{d}{dt} \int w dV = -\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \int [\epsilon_0 E^2 + \epsilon_0 c^2 B^2] dV \right\} = \int (\mathbf{E}\mathbf{j}) dV. \quad (15.17)$$

Для того чтобы иметь возможность следить за перемещением энергии электромагнитного поля в пространстве, вводится *поток электромагнитной энергии*  $\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}, t)$ . Этот вектор направлен в сторону перемещения энергии и по абсолютному значению равен энергии, которая в единицу времени переносится полем через единичную площадку, ориентированную перпендикулярно потоку. Поток электромагнитной энергии называется *вектором Пойнтинга*. По определению в системе СИ он измеряется в Дж/(м<sup>2</sup>·с) = Вт/м<sup>2</sup> (в системе СГС — в эрг/(см<sup>2</sup>·с)).

Вектор Пойнтинга (в отличие от интегрального потока векторного поля через поверхность) является локальной величиной типа кинетических потоков, определенных в § 11.1 тома I. В системе СИ вектор Пойнтинга

$$\mathbf{\Pi} = \epsilon_0 c^2 [\mathbf{E}\mathbf{B}] \quad (15.18)$$

(в системе СГС вместо  $\epsilon_0 c^2$  стоит коэффициент  $c/4\pi$ ).

В областях пространства, в которых нет зарядов и токов (т. е. там, где  $\rho = 0$  и  $\mathbf{j} = 0$ ), плотность электромагнитной энергии  $w$  связана с ее потоком  $\mathbf{\Pi}$  уравнением непрерывности

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{\Pi}}{\partial \mathbf{r}} = 0. \quad (15.19)$$

Это уравнение является локальным выражением закона сохранения энергии для электромагнитного поля при отсутствии

зарядов. Оно выражает *теорему Пойнтинга*. Эта теорема вполне аналогична уравнению непрерывности (15.3).

Чтобы раскрыть физический смысл теоремы Пойнтинга, проинтегрируем (15.19) по объему  $V$ , ограниченному произвольной поверхностью  $S$ . При этом воспользуемся теоремой Гаусса — Остроградского (В.25). Тогда получим

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \omega dV = \oint_S (\mathbf{\Pi} d\mathbf{S}) = \oint_S \Pi_n dS.$$

Отсюда видно, что при отсутствии зарядов убыль энергии поля в объеме  $V$  в единицу времени равна интегральному потоку энергии через поверхность из этого объема.

Отметим, что закон сохранения энергии в форме (15.19) справедлив для незатухающих волн любой природы. Для акустических волн такое уравнение впервые было получено Н. А. Умовым.

Сравнивая (15.15) и (15.18), мы видим, что

$$\mathbf{\Pi} = c^2 \mathbf{g}. \quad (15.20)$$

Покажем, что точно такое же равенство имеет место для плотности потока энергии и плотности импульса в пучке свободных релятивистских частиц. Пусть скорость движения частиц равна  $\mathbf{v}$ . Допустим, что плотность частиц в пучке равна  $n$ . Тогда в единицу времени единичную площадку, оказавшуюся внутри пучка и перпендикулярную  $\mathbf{v}$ , будет пересекать  $n\mathbf{v}$  частиц. Если энергия одной частицы равна  $\mathcal{E}$ , то плотность потока энергии в пучке будет равна  $\mathbf{\Pi} = \mathcal{E}n\mathbf{v}$ . Воспользуемся теперь тем, что импульс релятивистской частицы  $\mathbf{p}$  связан с ее энергией  $\mathcal{E}$  равенством  $c^2\mathbf{p} = \mathcal{E}\mathbf{v}$  (см. (3.21) тома I). Тогда оказывается, что  $\mathbf{\Pi} = c^2n\mathbf{p}$ . Очевидно, что вектор  $n\mathbf{p}$  имеет смысл плотности импульса в пучке, так что мы пришли к соотношению (15.20).

Обнаруженное обстоятельство имеет следующее происхождение. Опыт показывает, что уравнения Максвелла допускают обобщение на квантовую область. А квантованное электромагнитное поле является системой ультрарелятивистских квантовых частиц — фотонов (скорость каждого фотона равна  $c$ ). Мы видим, что соотношение (15.20) согласуется с этим квантовым свойством электромагнитного поля.

Опытное обнаружение плотности импульса и связанной с ней плотности потока энергии электромагнитного поля впервые было осуществлено в 1900 г. П. Н. Лебедевым, измерившим давление света \*). Разъясним суть этого явления. Предположим, что свет падает нормально на поглощающую его единичную площадку.

\*) Напомним, что видимым светом являются электромагнитные волны с частотами в диапазоне от  $5 \cdot 10^{14}$  до  $5 \cdot 10^{15}$  Гц.

В единицу времени площадке будет передаваться импульс, равный импульсу световой волны в объеме прямого параллелепипеда, основанием которого является данная площадка, а высота численно равна скорости света  $c$  (предполагается, что свет распространяется в вакууме). Переданный площадке импульс равен  $gc = \Pi/c$ , где  $g$  и  $\Pi$  — соответственно плотность импульса и плотность потока энергии в световом пучке. На основании второго закона Ньютона эта величина определяет абсолютное значение силы, приложенной к площадке. А так как площадка единичная, то это значение является давлением  $\mathcal{P}$  света на площадку:

$$\mathcal{P} = gc = \frac{\Pi}{c}. \quad (15.21)$$

Отсюда следует, что, измерив  $\mathcal{P}$ , можно определить плотность импульса и плотность потока энергии в световом пучке.

Давление естественного света необычайно мало. Так, на Земле солнечный свет оказывает на очень хорошо поглощающую площадку давление всего лишь около  $5 \cdot 10^{-6}$  Па  $\approx \approx 3,7 \cdot 10^{-8}$  мм рт. ст. Оно почти на одиннадцать порядков меньше атмосферного давления у поверхности Земли. Обнаружение столь малого эффекта потребовало от П. Н. Лебедева незаурядной изобретательности и мастерства в постановке и проведении эксперимента.

Давление света не играет никакой существенной роли в явлениях, с которыми мы сталкиваемся в обыденной жизни. Но в противоположных по масштабам космических и микроскопических системах роль этого эффекта резко возрастает. Так, гравитационное притяжение внешних слоев вещества каждой звезды к ее центру уравнивается силой, значительный вклад в которую вносит давление света, идущего из глубины звезды наружу. В микромире давление света проявляется, например, в явлении световой отдачи. Ее испытывает возбужденный атом при излучении им света.

Плотность импульса светового пучка, получаемая делением светового давления на  $c$ , является чрезвычайно малой величиной. Так, давлению в  $5 \cdot 10^{-6}$  Па отвечает плотность импульса порядка  $1,7 \cdot 10^{-14}$  кг/(м<sup>2</sup>·с). Однако плотность потока световой энергии за пределами атмосферы (которая численно почти в  $10^{17}$  раз больше плотности потока импульса светового пучка) легко обнаруживается. Так, на Земле абсолютное значение вектора Пойнтинга солнечного света порядка  $1,5 \cdot 10^8$  Вт/м<sup>2</sup>. Поток энергии с такой плотностью проявляется, например, в разогревании освещаемых солнцем предметов.

4. Плотность момента импульса электромагнитного поля выражается через плотность импульса поля по правилу, уже

знакомому нам из механики, а именно:

$$l = [rg]. \quad (15.22)$$

Здесь  $r$  — радиус-вектор точки, в которой определяется значение  $l$ . В этой же точке берется и значение  $g$ .

Из (15.15) и (15.22) следует, что в системе СИ

$$l = \varepsilon_0 [r [EB]]. \quad (15.23)$$

(В системе СГС вместо  $\varepsilon_0$  появляется коэффициент  $1/4\pi c$ .)

Опишем опыт, результаты которого подтверждают существование электромагнитного момента импульса. Рассмотрим систему, изображенную на рис. 15.7. Она состоит из цилиндрического конденсатора, подвешенного в однородном магнитном поле  $B$ , параллельном оси конденсатора. Вокруг этой оси конденсатор может вращаться. Цилиндрическим конденсатором называют систему двух соосных металлических цилиндров, которые являются обкладками конденсатора. Между обкладками может быть помещен какой-либо диэлектрик. Если высота обкладок намного больше расстояния между ними, то, за исключением областей вблизи концов конденсатора, электрическое поле, возникающее в конденсаторе при его зарядке, будет иметь радиальное направление.

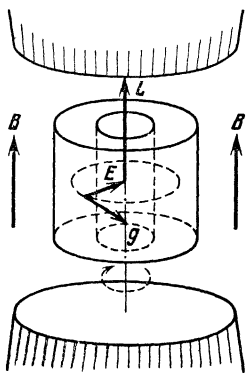


Рис. 15.7.

На рис. 15.7 ориентация поля  $E$  соответствует случаю, когда внешняя обкладка заряжена положительно, а внутренняя — отрицательно. Созданное электромагнитное поле предполагается постоянным во времени. Согласно (15.15) плотность импульса поля в каждой точке будет ориентирована по касательной к окружности, проходящей через данную точку и имеющей центр на оси конденсатора.

Мы видим, что, несмотря на постоянство поля, в нем все время по соосным concentрическим окружностям циркулирует плотность импульса. Однако полный импульс поля равен нулю — каждому значению  $g$  соответствует другое той же величины, но противоположного направления. Именно поэтому циркуляция плотности импульса не приводит к каким-либо наблюдаемым эффектам. Система в целом будет находиться в покое, но только до тех пор, пока конденсатор будет заряжен. При разрядке конденсатора он придет во вращение, и вот по какой причине. Циркулирующая плотность импульса создает момент импульса поля  $L$ . Он будет направлен по оси конденсатора (см. рис. 15.7). При разрядке конденсатора  $L$  обращается в нуль. Но

Закон сохранения момента импульса требует постоянства суммы  $L + L'$ , где  $L'$  — механический момент конденсатора. Теперь ясно, что разрядка конденсатора будет сопровождаться передачей момента  $L$  конденсатору, в результате чего последний начнет вращаться. Если момент инерции конденсатора равен  $I_0$ , то конденсатор будет вращаться с угловой скоростью  $\omega = L/I_0$ .

Рассмотренное явление показывает, что понятие момента импульса электромагнитного поля оказывается плодотворным даже для постоянных во времени полей. Еще большую роль играет эта величина в процессах с участием переменных полей. Однако в явлениях окружающей нас обыденной жизни момент импульса очень мал и практически ни в чем себя не проявляет. Именно в этом заключалась сложность его опытного обнаружения в обычных условиях. Лишь сравнительно недавно (в 50-х годах нашего столетия) удалось осуществить такое измерение. Обнаруженный эффект заключался в передаче момента импульса от света к кварцевой пластинке, через которую проходил свет. Этой передачей было обусловлено вращение плоскости поляризации света, которое непосредственно и наблюдалось.

Так же как и плотность импульса, плотность момента импульса играет важную роль в космических и микроскопических явлениях. Так, излучение света атомом может сопровождаться изменением момента импульса электронной оболочки. А это изменение по порядку величины оказывается сравнимым с полным моментом атома.

## ГЛАВА 16

### СТАЦИОНАРНЫЕ ПОЛЯ

#### § 16.1. Общие свойства

1. Рассмотрим стационарные распределения зарядов и токов. Соответствующие поля описываются уравнениями Максвелла, в которых ни одна из величин не зависит от времени, так что эти уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{r}} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \rho, & \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{E} \right] &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{r}} &= 0, & \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{B} \right] &= \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (16.1)$$

Особенностью системы (16.1) является ее распадение на две пары независимых друг от друга уравнений: первая из них содержит только электрическое поле и плотность заряда, а вторая — только магнитное поле и плотность тока. Следовательно, в стационарном случае электрические и магнитные поля можно рассматривать независимо. Отметим, что для статических распределений зарядов, т. е. при  $\mathbf{j} = 0$ , будет  $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{r}} = 0$  и  $\left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{B} \right] = 0$ . Согласно свойству г) п. 3 § 2 Введения и с учетом физического требования отсутствия магнитного поля на сколь угодно больших расстояниях получаем, что при  $\mathbf{j} = 0$  везде  $\mathbf{B} = 0$ . Другими словами, статические заряды образуют только электрическое поле. Источниками стационарных магнитных полей являются только постоянные токи.

Стационарные уравнения Максвелла для потенциалов получаются приравниванием нулю производных по времени в (15.12), что дает

$$\Delta \Phi = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho, \quad \Delta \mathbf{A} = -\frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \mathbf{j}. \quad (16.2)$$

Уравнения такого типа называются *уравнениями Пуассона*. Стационарные поля и потенциалы связаны так:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{r}}, \quad \mathbf{B} = \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{A} \right]. \quad (16.3)$$



Мы видим, что стационарное электрическое поле не зависит от векторного потенциала и определяется одним только скалярным потенциалом. В стационарном случае сужается и произвол в выборе  $\varphi$  и  $\mathbf{A}$ :  $\varphi$  задается только с точностью до аддитивной скалярной постоянной, а к  $\mathbf{A}$  допустимо прибавлять только постоянный (во времени) градиент  $\partial f/\partial \mathbf{r}$ .

Из первого равенства (16.3) согласно (В.19) следует, что

$$\int_L (\mathbf{E} d\mathbf{r}) = \varphi_1 - \varphi_2, \quad (16.4)$$

где  $\varphi_1 - \varphi_2$  — разность потенциалов в начале и конце контура интегрирования  $L$ .

Обратим внимание на одинаковость математической структуры каждого из четырех уравнений системы (16.2). Например, заменив во втором уравнении  $\mathbf{A}$  на  $\varphi$  и  $j/c^2$  на  $\rho$ , мы получим первое уравнение системы (16.2). Это имеет важное значение, которое заключается в том, что любая задача о стационарном магнитном поле математически эквивалентна трем соответствующим задачам электростатики. Поэтому вычислительные методы достаточно разрабатывать только для первого из уравнений (16.2).

Вся настоящая глава целиком посвящена полям стационарных распределений зарядов и токов. Поэтому в ней часто определение «стационарные» будет опускаться.

2. Общим свойством стационарных электрических полей является их потенциальность (см. б) п. 3 § 2 Введения). Это свойство следует из второго уравнения системы (16.1) или из эквивалентного ему первого уравнения (16.3). Потенциальную энергию одного заряда  $q$  можно найти так. Если в месте пребывания заряда потенциал внешнего поля равен  $\varphi_e$ , то приложенная к заряду электрическая сила равна

$$\mathbf{F} = -q \frac{\partial \varphi_e}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{\partial U_s}{\partial \mathbf{r}}.$$

Здесь

$$U_s = q\varphi_e \quad (16.5)$$

и, очевидно, имеет смысл потенциальной энергии заряда в электрическом поле (см. § 2.4 тома I). Если заряд  $q$  перемещается в поле, то оно производит над зарядом работу

$$\delta A = q(\varphi_{e1} - \varphi_{e2}), \quad (16.6)$$

где  $\varphi_{e1} - \varphi_{e2}$  — разность потенциалов в начальном и конечном положениях заряда. С (16.6) связана широко употребляемая, особенно в атомной и ядерной физике, внесистемная единица энергии, получившая название *электронвольт* (эВ). Один

электронвольт — это энергия, приобретаемая одним элементарным зарядом при прохождении им разности потенциалов в один вольт. Связь электронвольта с единицами энергии в системах СИ и СГС следующая:  $1 \text{ эВ} = 1,60207 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 1,60207 \cdot 10^{-12} \text{ эрг}$ .

Если в поле попадает не один заряд, а много, то их потенциальная энергия находится так. Пусть плотность распределения зарядов равна  $\rho$ . Тогда в физически бесконечно малом объеме  $dV$  заключен заряд  $\rho dV$ . При макроскопическом рассмотрении заряд  $\rho dV$  с достаточной точностью можно считать точечным. Если в месте его расположения потенциал внешнего поля равен  $\varphi_e$ , то потенциальная энергия взаимодействия заряда  $\rho dV$  с этим внешним полем будет равна  $\varphi_e \rho dV$ . Энергию же всего распределения зарядов получим суммированием энергий всех малых порций распределения. Это означает, что энергия взаимодействия всего распределения зарядов с внешним полем равна

$$U_s = \int \varphi_e \rho dV. \quad (16.7)$$

Здесь интегрирование распространяется на все пространство. Фактически подынтегральное выражение не равно нулю лишь в той области, в которой и  $\rho \neq 0$ , и  $\varphi_e \neq 0$ .

Подчеркнем, что формулы (16.5) и (16.7) определяют потенциальную энергию взаимодействия одного или многих зарядов с заданным внешним полем, в сфере действия которого оказываются заряды. В этих случаях величины  $\varphi_e$  и  $\rho$  друг с другом никак не связаны. Они задаются независимо.

Иной является задача определения энергии  $W_s$  электрического поля, порожденного данным распределением зарядов. Общую формулу для вычисления этой энергии мы уже знаем: это первое слагаемое в (15.16), проинтегрированное по всему пространству:

$$W_s = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 dV.$$

Можно доказать, что

$$W_s = \frac{1}{2} \int \varphi \rho dV, \quad (16.8)$$

где  $\varphi$  и  $\rho$  связаны друг с другом первым уравнением системы (16.2), а  $\mathbf{E} = -\text{grad} \varphi$ . Интегрирование в (16.8) совершается по всему пространству, а фактически по той его области, в которой  $E \neq 0$ .

$$\text{Так как } \mathbf{E} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}}, \text{ то } E^2 = (\mathbf{E}\mathbf{E}) = -\left(\mathbf{E} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}}\right) = -\frac{\partial (\mathbf{E}\varphi)}{\partial \mathbf{r}} + \varphi \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{r}}.$$

Интеграл по всему объему от  $\partial(\mathbf{E}\varphi)/\partial \mathbf{r}$  равен нулю. Действительно, по теореме Гаусса — Остроградского этот интеграл определяет поток  $\mathbf{E}\varphi$  через поверхность  $S_\infty$ , ограничивающую все трехмерное пространство. Каждый эле-

мент этой поверхности бесконечно удален, т. е. расположен там, где  $\mathbf{E} = 0$ . Поэтому 
$$\int_{S_\infty} \frac{\partial(\mathbf{E}\varphi)}{\partial \mathbf{r}} dV = \int_{S_\infty} ((\mathbf{E}\varphi) d\mathbf{S}) = 0.$$
 Учитывая теперь первое уравнение системы (16.1), получаем

$$W_\varphi = \frac{\epsilon_0}{2} \int \varphi \left( \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{r}} \right) dV = \frac{1}{2} \int \varphi \rho dV,$$

что и требовалось доказать.

Отметим, что при переходе к системе СГС  $U_\varphi$  и  $W_\varphi$  выражаются через  $\rho$  и  $\varphi$  так же, как в (16.7) и в (16.8).

3. В теории стационарных электрических полей центральной является задача о поле одиночного неподвижного точечного заряда. Центральная роль этой задачи определяется принципом суперпозиции. Действительно, любое распределение зарядов всегда можно представить состоящим из точечных. Следовательно, поле, создаваемое произвольным распределением зарядов, является суперпозицией полей, порождаемых некоторыми точечными зарядами.

Решим задачу об электрическом поле, источником которого является неподвижный точечный заряд  $q$ . Она формулируется так: найти решение первой пары уравнений системы (16.1) или, что то же, решение первого из уравнений (16.2) с плотностью электрического заряда  $\rho$ , везде равной нулю, за исключением места сосредоточения заряда.

Для сложных распределений стационарных зарядов и токов удобно решать уравнения (16.2) для потенциалов. Но для частных случаев, когда распределение зарядов или токов обладает достаточно высокой симметрией, часто решение проще получать из уравнений Максвелла (16.1), записанных в интегральной форме. Точечный заряд сферически симметричен. Поэтому для нахождения его электрического поля удобно исходить из интегральной формы первого уравнения (16.1), т. е. из теоремы Гаусса. Эта теорема выражается первым из уравнений (15.8):

$$\oint_S (\mathbf{E} d\mathbf{S}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV.$$

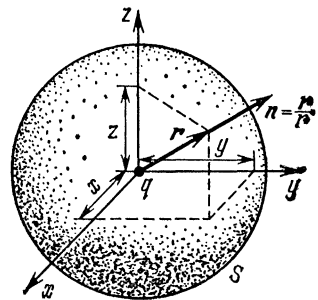


Рис. 16.1.

Поместим начало координат в точку нахождения заряда  $q$  (рис. 16.1). Выберем за поверхность  $S$  сферу радиуса  $r$  с центром в точке  $\mathbf{r} = 0$ . Тогда интеграл по объему  $V$  этой сферы от

$\rho$  дает заряд  $q$ . Для сферы каждый элемент  $dS$  направлен по радиусу, соединяющему этот элемент с началом координат. Воспользуемся теперь сферической симметрией распределения заряда. Из нее следует, что поле  $\mathbf{E}$  в каждой точке коллинеарно ее радиус-вектору  $\mathbf{r}$ . Поэтому  $(\mathbf{E} dS) = E_n dS$ , где величина  $E_n = \pm |\mathbf{E}|$  одинакова во всех точках сферы  $S$  (но разная для сфер разных радиусов:  $E_n = E_n(r)$ ). Поэтому  $E_n$  можно вынести за знак интеграла по поверхности сферы  $S$ . Следовательно, для нашего случая теорема Гаусса преобразуется к виду

$$E_n \oint dS = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Интеграл  $\oint dS$  равен площади сферы радиуса  $r$ :

$$\oint dS = 4\pi r^2.$$

Поэтому  $4\pi r^2 E_n = q/\epsilon_0$ , т. е.  $E_n = q/4\pi\epsilon_0 r^2$ . В результате находим

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (16.9)$$

Вычислим теперь потенциал  $\varphi$  поля  $\mathbf{E}$  из (16.9). Для этого применим интегральную формулу (B.19) к первому из соотношений (16.3):

$$-\int_L (\mathbf{E} d\mathbf{r}) = \int_L \left( \frac{\partial\varphi}{\partial r} d\mathbf{r} \right) = \varphi(r_2) - \varphi(r_1).$$

Выберем за контур интегрирования полупрямую, уходящую из точки  $r_1$  в бесконечность вдоль радиус-вектора  $\mathbf{r}$ . Тогда  $(\mathbf{E} d\mathbf{r}) = E_n dr$ . Учтем, что из-за сферической симметрии задачи  $E_n$  и  $\varphi$  зависят только от абсолютного значения  $r$  вектора  $\mathbf{r}$ . В результате получим

$$-\int_{r_1}^{\infty} E_n dr = \varphi(\infty) - \varphi(r_1) = -\varphi(r_1).$$

Потенциал  $\varphi(r)$  обычно калибруют так, что  $\varphi(\infty) = 0$ . Подставив для  $E_n(r)$  уже вычисленное значение и учтя, что  $\int_{r_1}^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{r_1}$ , получим для потенциала

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}. \quad (16.10)$$

После интегрирования мы заменили  $r_1$  на  $r$ , так как необходимость в индексе теперь отпадает,

Мы получили кулоновское поле (см. гл. 2 тома I). Оно действует на точечный заряд  $q'$ , помещенный в точку  $\mathbf{r}$ , с силой, которая определяется законом Кулона:

$$\mathbf{F} = q' \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Энергия заряда  $q'$  в поле заряда  $q$  равна

$$U_\varphi = q' \varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r}.$$

Обобщением (16.9) и (16.10) на случай положения заряда  $q_i$  в произвольной точке  $\mathbf{r}_i$  являются соотношения

$$\varphi_i = \varphi_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}, \quad (16.11)$$

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}.$$

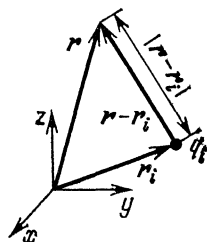


Рис. 16.2.

Радиус-вектор  $\mathbf{r}$  по-прежнему задает положение точки наблюдения (рис. 16.2).

Для статически распределенных  $N$  точечных зарядов получим

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \varphi_i(\mathbf{r}), \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \mathbf{E}_i(\mathbf{r}).$$

Эти формулы справедливы в силу принципа суперпозиции, примененного к полям, источниками которых являются заряды  $q_i$ , занимающие положения  $\mathbf{r}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ .

Для стационарного распределения зарядов, заданного плотностью  $\rho = \rho(\mathbf{r})$ , вместо сумм будут интегралы:

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \\ \mathbf{E} &= \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}') (\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \end{aligned} \quad (16.12)$$

В этих равенствах интегрируются, т. е. тоже складываются, потенциалы и поля от очень малых порций зарядов, на которые всегда можно разбить любое их распределение. Из-за малости каждую порцию можно считать точечным зарядом. Поэтому создаваемое ею поле будет описываться соотношениями (16.11), в которых  $q_i$  нужно заменить на  $\rho(\mathbf{r}') dV'$ , где  $\mathbf{r}'$  — радиус-вектор, определяющий положение данной порции зарядов. В точке наблюдения  $\mathbf{r}$  эта порция создаст поле  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\mathbf{r}') (\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$

с потенциалом  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ . Теперь видно, что интегралы этих выражений в (16.12), так же как и предшествующие им суммы, выражают принцип суперпозиции.

Обратим внимание на следующие обстоятельства. Во-первых, в (16.12)  $\phi$  является решением первого из уравнений Пуассона (16.2) (соответствующее этому решению поле также записано в (16.12)).

Второе обстоятельство имеет принципиальное значение и состоит вот в чем. До настоящего времени еще никому не удалось наблюдать явлений, в которых электрон проявил бы себя как частица, у которой есть какая-то внутренняя структура. Поэтому опыт заставляет нас пока рассматривать электрон как заряженную точку. Но вот что из этого получается. Рассмотрим энергию электрического поля покоящегося электрона. Эту энергию называют собственной. Согласно (15.16) и (16.9) плотность собственной энергии поля точечного заряда пропорциональна  $r^{-4}$ . Поэтому полная энергия этого поля оказывается бесконечно большой (интеграл  $\int r^{-4} dV$  расходится). Но это физически абсурдно и свидетельствует только о том, что, где-то на очень малых расстояниях, классические законы электромагнетизма утрачивают свою справедливость.

Отметим, наконец, что при переходе к системе СГС в (16.12), так же как и в (16.9)—(16.11), коэффициент  $1/4\pi\epsilon_0$  заменяется единицей.

4. Перейдем к стационарным магнитным полям. Как уже отмечалось ранее, любое магнитное поле является вихревым (это следует из третьего уравнения Максвелла (16.1)), чем качественно отличается от электрического поля. Тем не менее стационарный ток в магнитном поле обладает потенциальной энергией, так же как потенциальной энергией обладает заряд в стационарном электрическом поле.

Рассмотрим практически важный случай взаимодействия *линейного тока* с магнитным полем. Линейным называется ток в достаточно тонком проводе, свойства вещества которого одинаковы в поперечных току направлениях. Провод считается тонким, если линейный размер поперечного сечения провода ничтожно мал в сравнении с расстояниями, на которых поле заметно изменяется.

Линейный ток характеризуется *контуром тока*. Контуром тока является направленная линия, проходящая внутри провода, параллельная или антипараллельная току (в пределах этих двух возможностей выбор направления произволен). Для каждого линейного тока значения всех физических величин во всех точках любого перпендикулярного току сечения провода одина-

ковы. Поэтому простой вид имеет связь плотности линейного тока с его силой. Эта связь выражается равенством

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{I}{\Delta S} \mathbf{n}. \quad (16.13)$$

Здесь  $\Delta S$  — поперечное сечение провода, проходящее через точку  $\mathbf{r}$  контура тока;  $\mathbf{n}$  — единичный вектор, касательный к контуру тока в той же точке в положительном направлении контура;  $I$  — сила тока в сечении  $\Delta S$  (рис. 16.3). Равенство (16.13), являясь следствием одинаковости значений  $\mathbf{j}$  во всех точках сечения  $\Delta S$  и перпендикулярности вектора  $\mathbf{j}$  этому сечению. Из (16.13) видно, что направление вектора  $\mathbf{j}$  однозначно связано со знаком  $I$ : если ток течет вдоль  $\mathbf{n}$ , то  $I > 0$ , а в противном случае  $I < 0$ :

Для каждого элемента линейного тока в объеме  $dV = dl \Delta S$  (рис. 16.3) справедливо равенство

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) dV = \frac{I}{\Delta S} \mathbf{n} dl \Delta S = I d\mathbf{r}, \quad (16.14)$$

где  $d\mathbf{r}$  — вектор бесконечно малого смещения вдоль контура тока.

По определению разность значений потенциальной энергии физической системы в двух состояниях определяет работу, затраченную в процессе перевода системы из начального состояния в конечное. Но магнитная сила Лоренца работу не совершает, так как всегда ориентирована перпендикулярно скорости перемещения заряженных частиц. Возникает вопрос, почему же тогда в магнитном поле ток обладает потенциальной энергией.

Чтобы понять ее происхождение, рассмотрим силы, действующие в проводе на заряды, движение которых образует электрический ток. На рис. 16.4 показан участок провода и, в сильно увеличенном виде, один из электронов проводимости, движение которых создает электрический ток. Когда провод движется, то к скорости  $\mathbf{v}$  движения электрона прибавляется скорость  $\mathbf{v}'$  движения провода. Таким образом, электрон в движущемся проводе перемещается со скоростью  $\mathbf{v} + \mathbf{v}'$ . Равная нулю мощность  $P = ((\mathbf{v} + \mathbf{v}') \mathbf{F})$  силы  $\mathbf{F} = -q_0 [(\mathbf{v} + \mathbf{v}') \mathbf{B}]$ , действующей на электрон со стороны магнитного поля  $\mathbf{B}$  ( $q_0$  — элементарный заряд), сводится к двум слагаемым:

$$P = -q_0 [\mathbf{v} \mathbf{F}] - q_0 [\mathbf{v}' \mathbf{F}] = 0.$$

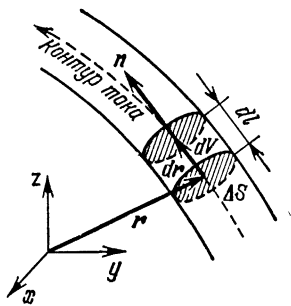


Рис. 16.3.

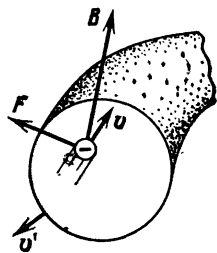


Рис. 16.4.

Первое из них — это мощность, которая создает работу магнитного поля над током. Результатом этой работы является торможение электронов проводимости в движущемся проводе. Второе слагаемое — это мощность, которая создает работу по перемещению провода в магнитном поле. Мы видим, что эти две работы отличаются только знаком. Это означает, что работа по перемещению провода происходит за счет торможения электронов проводимости. В стационарном случае это торможение компенсируется приложенной э. д. с., за счет которой в итоге и происходит накопление механической энергии проводом с током в магнитном поле.

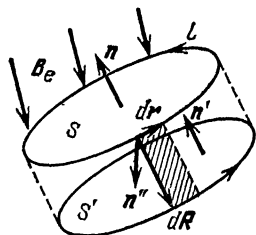


Рис. 16.5.

Найдем потенциальную энергию  $U_M$  взаимодействия стационарного тока  $I$  с внешним магнитным полем  $\mathbf{B}_e$ , не зависящим от этого тока. Обозначим через  $L$  контур этого тока. Положительное направление обхода контура указано на рис. 16.5. Изменим слегка положение провода с током. Пусть при этом каждый элемент  $dr$  контура  $L$  смещается на  $d\mathbf{R}$  и в результате образуется боковая поверхность  $\delta S$  тела цилиндрической формы с основаниями  $S$  и  $S'$ . Из них на рис. 16.5 видимым является основание  $S$ . Согласно (15.7) и (16.14) при перемещении провода магнитное поле  $\mathbf{B}_e$  над током  $I$  произведет работу

$$dA = \int (d\mathbf{R} [j\mathbf{B}_e]) dV = I \int (\mathbf{B}_e [d\mathbf{R} dr]).$$

Здесь было использовано, во-первых, свойство (B.1) перестановочности сомножителей в смешанном произведении векторов и, во-вторых, одинаковость силы тока во всех сечениях неразветвленного провода (факт, известный из школьного курса).

По определению векторного произведения абсолютное значение вектора  $[d\mathbf{R} dr]$  равно площади заштрихованного на рис. 16.5 параллелограмма. Этот параллелограмм является элементарным участком поверхности  $\delta S$ . Следовательно,

$$dA = I \int_{\delta S} (\mathbf{B}_e d\mathbf{S}),$$

где  $d\mathbf{S} = \mathbf{n}'' dS$  и  $\mathbf{n}''$  — внешняя нормаль к элементарному участку  $dS$ .

Согласно третьему уравнению Максвелла (15.8)

$$\int_{\delta S} (\mathbf{B}_e d\mathbf{S}) + \int_S (\mathbf{B}_e d\mathbf{S}) + \int_{S'} (\mathbf{B}_e d\mathbf{S}) = 0.$$



Выражая отсюда первое слагаемое, находим

$$dA = -I \int_S (\mathbf{B}_e d\mathbf{S}) - I \int_{S'} (\mathbf{B}_e d\mathbf{S}) = I \left\{ \int_{S'} B_{en'} dS - \int_S B_{en} dS \right\}. \quad (16.15)$$

Изменение знака во втором слагаемом последней суммы обусловлено ориентацией нормали, направленной внутрь объема, ограниченного поверхностью  $S + S' + \delta S$  (рис. 16.5). Из соотношения (16.15) следует, что работа  $dA$  определяется только разностью магнитных потоков через контур тока в конечном и исходном состояниях и совершенно не зависит от того, как был осуществлен переход из второго в первое. Следовательно, потенциальная энергия  $U_M$  тока  $I$  во внешнем магнитном поле равна

$$U_M = -I \int_S (\mathbf{B}_e d\mathbf{S}). \quad (16.16)$$

Этой формуле можно придать другой вид. По теореме Стокса (В.21), с учетом постоянства  $I$  и равенства (16.14), получаем

$$U_M = - \int_V (j\mathbf{A}_e) dV. \quad (16.17)$$

Здесь  $\mathbf{A}_e$  — векторный потенциал внешнего магнитного поля. В последнем выражении интегрирование распространено на все пространство, а фактически производится только там, где  $\mathbf{A}_e \neq 0$  и  $j \neq 0$ . Формула (16.17) справедлива во всех случаях, а не только для линейного тока в одиночном контуре.

Определим теперь собственную энергию  $W_M$  магнитного поля системы стационарных токов. Эта энергия равна интегралу по объему всего пространства от второго слагаемого в (15.16):

$$W_M = \frac{\varepsilon_0 c^2}{2} \int B^2 dV. \quad (16.18)$$

Можно доказать, что

$$W_M = \frac{1}{2} \int (j\mathbf{A}) dV, \quad (16.19)$$

где  $\mathbf{A}$  и  $j$  связаны друг с другом вторым уравнением системы (16.2), а  $\mathbf{B} = \left[ \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{A} \right]$ .

Согласно правилам действия оператора  $\partial/\partial r$  и соотношениям (16.1) и (16.3)

$$\left( \frac{\partial}{\partial r} [\mathbf{A}\mathbf{B}] \right) = B^2 - \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} (j\mathbf{A}),$$

Интеграл по всему пространству от  $\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} [\mathbf{A}\mathbf{B}]\right)$  по теореме Гаусса — Остроградского (В.25) равен интегральному потоку поля  $[\mathbf{A}\mathbf{B}]$  через бесконечно удаленную поверхность, т. е. равен нулю, что и доказывает справедливость формулы (16.19).

Для линейного тока  $I$  в одиночном контуре с помощью теоремы Стокса (В.21) и равенства (16.14) энергии  $W_m$  можно придать следующий вид:

$$W_m = \frac{1}{2} \oint_L I(\mathbf{A} d\mathbf{r}) = \frac{I}{2} \int_S (\mathbf{B} d\mathbf{S}), \quad (16.20)$$

где  $S$  — поверхность, ограничивающая контур тока  $L$ .

В системе СГС выражения для  $U_m$  и  $W_m$  отличаются от полученных выше числовым коэффициентом. В обоих случаях он равен  $1/c$ .

5. По заданным стационарным токам магнитное поле находится с помощью аналогии между  $\varphi$  и  $\mathbf{A}$ . Зная (16.12), можно утверждать, что решение второго уравнения Пуассона системы (16.2) имеет вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (16.21)$$

Вычисляя ротор этого векторного потенциала по формуле (В.12), получаем

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{[\mathbf{j}(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')]dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (16.22)$$

В системе СГС выражения для  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  отличаются от полученных только коэффициентами. Именно, вместо  $1/4\pi\epsilon_0 c^2$  получается  $1/c$ .

Соотношение (16.22) называется *законом Био — Савара — Лапласа*. Он является аналогом второй формулы (16.12) для определения электрического поля по заданной плотности стационарного распределения зарядов.

Здесь мы еще раз хотим подчеркнуть, что стационарное магнитное поле создает только постоянные электрические токи, как это следует из (16.21) и (16.22): при  $\mathbf{j} = 0$  и  $\mathbf{A}$ , и  $\mathbf{B}$  равны нулю. Отметим еще, что в (16.21) и (16.22) интегрирование выражает принцип суперпозиции. Но в данном случае он относится к  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  и говорит о том, что эти величины складываются из частей, каждая из которых своим происхождением обязана одному из элементов тока. Элементом тока называется величина  $\mathbf{j}(\mathbf{r})dV$ , где объем  $dV$  бесконечно мал и окружает точку  $\mathbf{r}$ . Если ток линейен, то согласно равенству (16.14)  $\mathbf{j}(\mathbf{r})dV = I d\mathbf{r}$ .

В случае линейных токов выражения (16.21) и (16.22) можно записать по-иному. Рассмотрим, например, магнитное поле

замкнутого линейного тока (рис. 16.6). Для определенности мы приняли, что контур состоит из четырех участков. Два из них образованы одинаковыми проводами. Их изображение не заштриховано. Два других участка — это два разных провода. Пунктирной линией, пролегающей внутри проводов, отмечен контур тока. Так как во всех сечениях проводов данного соединения  $I = \text{const}$ , то согласно (16.14)

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{I}{4\pi\epsilon_0 c^2} \oint_L \frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{I}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{[d\mathbf{r}'(\mathbf{r} - \mathbf{r}')]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \end{aligned} \quad (16.23)$$

где  $L$  — контур тока.

Если в соединении имеются разветвления, то появляются следующие изменения. Величины  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  представляются суммами

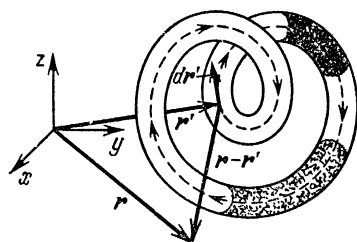


Рис. 16.6.

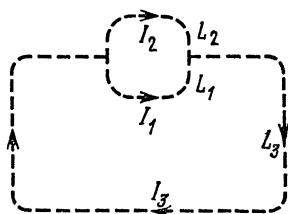


Рис. 16.7.

контурных интегралов, каждый из которых относится к одному из неразветвленных участков соединения проводов. В пределах каждого такого участка сила тока везде одинакова. Поэтому она выносится за знак соответствующего интеграла. Например, для соединения, которому отвечает система контуров тока, показанных на рис. 16.7 пунктирными линиями, магнитное поле  $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = I_1 \mathbf{b}_1(\mathbf{r}) + I_2 \mathbf{b}_2(\mathbf{r}) + I_3 \mathbf{b}_3(\mathbf{r})$ , где

$$b_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int_{L_i} \frac{[d\mathbf{r}'(\mathbf{r} - \mathbf{r}')]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad i = 1, 2, 3.$$

## § 16.2. Некоторые точные решения стационарных уравнений Максвелла

1. Мы установили, что решения стационарных уравнений Максвелла для произвольных заданных  $\rho$  и  $\mathbf{j}$  представимы в виде (16.12), (16.21), (16.22). Это означает, что в принципе задача определения полей по заданному стационарному распре-

лению зарядов (известны  $\rho$  и  $\mathbf{j}$ ) решена. Мы говорим «в принципе», потому что надо еще уметь вычислять интегралы в (16.12), (16.21) и (16.22). Как правило, такие расчеты громоздки и требуют применения ЭВМ. Как мы уже говорили, в некоторых случаях при наличии определенной симметрии в распределении зарядов и токов поля рассчитываются сравнительно просто. Несколькими такими задачами будут решены ниже.

Рассмотрим сначала электрические поля.

а) *Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости.* Пусть заряды равномерно и стационарно распределены по бесконечно тонкой плоскости. Выберем систему отсчета так, чтобы ее плоскость  $x, y$  оказалась совмещенной с плоскостью расположения зарядов (рис. 16.8).

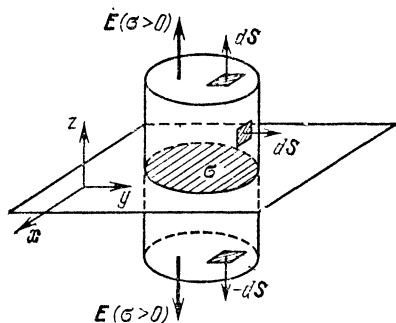


Рис. 16.8.

Поле данного распределения обладает следующей симметрией. Оно инвариантно относительно сдвигов пространства, параллельных плоскости  $x, y$ , и его зеркальных отражений в той же плоскости. При указанных преобразованиях возникает система, физически не отличимая от исходной. Из этих свойств симметрии следует, что потенциалы точек с

одним и тем же значением  $|z|$  будут одинаковы (рис. 16.8). Это означает, что  $\varphi = \varphi(|z|)$  и, следовательно, эквипотенциальной будет любая плоскость, перпендикулярная оси  $z$ . Поэтому поле будет ориентировано везде по оси  $z$ :  $E_x = E_y = 0$ . При этом в полупространствах  $z > 0$  и  $z < 0$  значения  $E_z$  будут отличаться только знаком:

$$E_z(z) = -E_z(-z).$$

Запишем теорему Гаусса (первое из уравнений (15.8)) для цилиндра, изображенного на рис. 16.8. Цилиндр таков, что его боковая поверхность перпендикулярна заряженной плоскости, площадь поперечного сечения равна единице, а высота равна  $2|z|$ . Заряженная плоскость рассекает цилиндр на две равные части. Каждый элемент боковой поверхности имеет нормаль, перпендикулярную оси  $z$ , а тем самым и полю  $\mathbf{E}$ . Поэтому на боковой поверхности цилиндра  $(\mathbf{E} d\mathbf{S}) = 0$ . Следовательно, интегральный поток поля  $\mathbf{E}$  будет ненулевым только через оба основания цилиндра. Для верхнего основания нормаль направлена по оси  $z$ , а для нижнего — против оси  $z$ . Поэтому, учтя

еще, что площадь каждого основания равна единице, получим (рис. 16.8)

$$\oint_S (\mathbf{E} d\mathbf{S}) = \int_{S_1} E_z(z) dS - \int_{S_2} E_z(z) dS = 2E_z(z) \quad \text{при } z > 0.$$

Интеграл  $\int \rho dV$  равен суммарному заряду  $\sigma$  сечения цилиндра заряженной плоскостью. Это сечение на рис. 16.8 заштриховано. Площадь этого сечения равна единице. Поэтому  $\sigma$  имеет смысл *поверхностной плотности заряда*, т. е. заряда на единицу поверхности. Теперь из теоремы Гаусса получим

$$E_z(z) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0}, & z > 0, \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}, & z < 0. \end{cases} \quad (16.24)$$

Напомним, что  $E_y = E_x = 0$ , так что  $\mathbf{E} = nE_n$ , где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор вдоль направления поля. В системе СГС множитель  $1/2\epsilon_0$  заменяется на  $2\pi$ . Мы видим, что поле  $\mathbf{E}$  над равномерно заряженной плоскостью одинаково во всех точках и направлено перпендикулярно плоскости. При переходе через заряженную плоскость поле  $\mathbf{E}$  меняет знак.

Специальный интерес представляет случай двух параллельных равномерно заряженных плоскостей, имеющих плотности заряда, равные по абсолютной величине и противоположные по знаку. Согласно принципу суперпозиции результирующее поле  $\mathbf{E}$  в каждой точке будет суммой полей, создаваемых каждой плоскостью. Из (16.24) следует, что поля, создаваемые разными плоскостями, по абсолютной величине всюду равны, а по направлению совпадают в промежутке между плоскостями и противоположны вне этого промежутка. Поэтому суммарное поле будет ненулевым только между плоскостями, где

$$|\mathbf{E}| = |\mathbf{E}_z| = \frac{|\sigma|}{\epsilon_0}. \quad (16.24a)$$

(Ось  $z$  по-прежнему считается перпендикулярной плоскостям.)

Потенциалы вне промежутка между плоскостями будут постоянными, но разными для разных полупространств. Разность потенциалов между положительно и отрицательно заряженными плоскостями будет равна

$$\Delta\varphi = \varphi_+ - \varphi_- = \left| \int_0^l E_z dz \right| = \int_0^l |E_z| dz = \frac{|\sigma|}{\epsilon_0} l, \quad (16.25)$$

где  $l$  — расстояние между плоскостями.

б) *Поле равномерно заряженного бесконечного цилиндра.* Пусть заряды равномерно и стационарно распределены по объему бесконечного кругового цилиндра радиуса  $R_0$ . Совместим координатную ось  $z$  с осью цилиндра (рис. 16.9). Такое распределение зарядов обладает следующей симметрией. Во-первых, оно не меняется при поворотах относительно оси  $z$ . Во-вторых, оно не меняется при смещениях вдоль оси  $z$ . Наконец, в-третьих, распределение зарядов не меняется при отражениях относительно плоскостей, как проходящих через ось цилиндра, так и перпендикулярных этой оси. Распределение полей и потенциалов

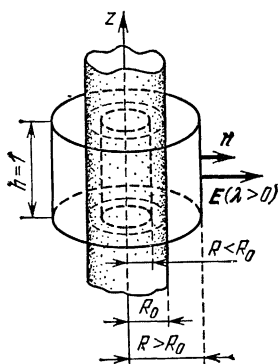


Рис. 16.9.

тоже не должно меняться при этих преобразованиях. Отсюда следует, что потенциал должен быть функцией только расстояния  $R$  от оси цилиндра:  $\varphi = \varphi(R)$ , а поле  $\mathbf{E}$  в каждой точке должно быть направлено вдоль перпендикуляра, опущенного из этой точки на ось (рис. 16.9). Абсолютная величина  $|\mathbf{E}|$  поля  $\mathbf{E}$  тоже должна зависеть только от  $R$ . Назовем *линейной плотностью заряда*  $\lambda$  заряд, приходящийся на единицу длины цилиндра. Очевидно, что  $\lambda$  связана с обычной плотностью  $\rho$  соотношением

$$\lambda = \pi R_0^2 \rho.$$

Применим теорему Гаусса к цилиндру с осью вдоль оси  $z$ , с высотой  $h = 1$  и радиусом  $R$  (рис. 16.9). При вычислении интеграла  $\int (\mathbf{E} d\mathbf{S}) = \oint E_n dS$  прежде всего учтем, что на торцах цилиндра  $E_n = 0$ , а на его боковой поверхности  $E_n = \text{const}$ , причем  $|E_n| = |\mathbf{E}|$ . Поэтому полный поток поля через поверхность цилиндра  $S$  равен

$$\oint_S E_n dS = 2\pi R E_n(R),$$

поскольку площадь боковой поверхности равна  $2\pi R$ . Объемный интеграл  $\int_V \rho dV$  вычисляется по-разному при  $R \geq R_0$  и при  $R \leq R_0$ . В первом случае интегрирование дает линейную плотность заряда:

$$\int_V \rho dV = \lambda, \quad R \geq R_0,$$

а во втором — лишь часть этой плотности, поскольку интегрирование охватывает не все поперечное сечение цилиндра, а

только его долю  $R^2/R_0^2$ :

$$\int_V \rho dV = \lambda \frac{R^2}{R_0^2}, \quad R \leq R_0.$$

Теперь по теореме Гаусса получаем

$$E_n(R) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}, & R \geq R_0, \\ \frac{\lambda R}{2\pi\epsilon_0 R_0^2}, & R \leq R_0. \end{cases} \quad (16.26)$$

Напомним, что компоненты поля, перпендикулярные  $E_n$ , везде равны нулю, так что (16.26) определяет поле  $\mathbf{E}$ . В частности, при  $R \geq R_0$

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda \mathbf{n}}{2\pi\epsilon_0 R}, \quad (16.27)$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор, направленный вдоль радиус-вектора  $\mathbf{R}$ , проведенного в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра (рис. 16.9).

Вычислим потенциал  $\varphi(R)$ . Для этого используем общую формулу (В.19), проинтегрировав с ее помощью поле  $\mathbf{E} = -\partial\varphi/\partial\mathbf{r}$  по контуру вдоль прямой, перпендикулярной оси цилиндра и проходящей через эту ось. Интегрируем от точки  $R_0$  (на границе цилиндра) до точки  $R$ :

$$\int_{R_0}^R E_n(R) dR = \varphi(R_0) - \varphi(R).$$

Отсюда с помощью (16.26) получаем

$$\varphi(R) = \begin{cases} \varphi(R_0) - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{R}{R_0}\right), & R \geq R_0, \\ \varphi(R_0) + \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(1 - \frac{R^2}{R_0^2}\right), & R \leq R_0. \end{cases} \quad (16.28)$$

Значение  $\varphi(R_0)$  потенциала в точке  $R_0$  можно выбирать произвольно. Отметим, что в этой задаче потенциал на бесконечности расходится, так что его нельзя положить равным нулю. Физически это означает, что для перемещения точечного заряда из конечной точки на бесконечно большое расстояние от цилиндра требуется бесконечно большая работа.

Реально, конечно, можно создать лишь равномерно заряженный цилиндр конечной длины  $l$ . В этом случае формулы (16.26), (16.28) приближенно описывают поля и потенциалы в точках, далеких от концов цилиндра, но расположенных от его оси на расстоянии  $R$ , значительно меньшем  $l$ , т. е. когда  $R/l \ll 1$ .

Отметим еще, что вне цилиндра, т. е. при  $R > R_0$ , полученные выше выражения для поля и потенциала остаются в силе, если распределение заряда является функцией от  $R$  (но, конечно, не от  $z$ ). В частности, если заряд равномерно распределен только по поверхности цилиндра с поверхностной плотностью  $\sigma$ , то  $\lambda = 2\pi R_0 \sigma$ . В этом случае внутри цилиндра, т. е. при  $R < R_0$ , поле отсутствует:  $\mathbf{E} = 0$ .

Для бесконечно тонкого заряженного провода всюду справедливо выражение для поля при  $R > R_0$ . Для потенциала бесконечно тонкого провода  $R_0 \rightarrow 0$ . Поэтому, чтобы не получить бесконечного выражения, следует выбрать потенциал

$$\varphi(R_0) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_1}{R_0},$$

где  $R_1$  — радиус, на котором  $\varphi(R_1) = 0$ . Тогда при  $R > R_0 \approx 0$  будет

$$\varphi(R) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R}{R_1}. \quad (16.29)$$

в) *Поле равномерно заряженного шара.* Пусть заряды равномерно и стационарно распределены по объему шара радиуса  $r_0$ . Полный заряд  $q$  шара равен

$$q = \frac{4\pi}{3} r_0^3 \rho,$$

если плотность заряда равна  $\rho$ . Задача обладает сферической симметрией. Поэтому потенциал зависит только от расстояния  $r$  от центра шара:  $\varphi = \varphi(r)$ , а поле  $\mathbf{E}$  направлено вдоль радиус-вектора  $\mathbf{r}$  точки наблюдения, если начало координат выбрано в центре шара (рис. 16.10).

Применим теорему Гаусса к шару радиуса  $r$ . Из сферической симметрии задачи следует, что в поверхностном интеграле  $\oint_S (\mathbf{E} d\mathbf{S}) = \oint_S E_n dS$  величина  $E_n$  постоянна на поверхности сферы  $S$ . Для сферы радиуса  $r$  имеем

$$\oint_S E_n dS = E_n \oint_S dS = 4\pi r^2 E_n.$$

Объемный интеграл  $\int \rho dV$  равен полному заряду  $q$  при  $r > r_0$  и его доли  $q(r/r_0)^3$  при  $r < r_0$ . Отсюда

$$E_n(r) = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & r \geq r_0, \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(\frac{r}{r_0}\right)^3, & r \leq r_0. \end{cases}$$

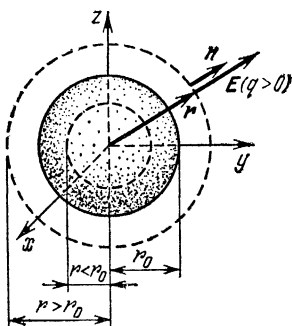


Рис. 16.10.



Поскольку поле направлено вдоль радиуса, то  $\mathbf{E} = nE_n$ , где  $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$  — единичный вектор вдоль  $\mathbf{r}$ . Поэтому

$$\mathbf{E}(r) = \begin{cases} \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 r^3}, & r \geq r_0, \\ \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 r_0^3}, & r \leq r_0. \end{cases} \quad (16.30)$$

Для потенциала, с помощью (В.19) в применении к интегралу

$$\int_l (\mathbf{E} d\mathbf{r}) = - \int_l \left( \frac{\partial\varphi}{\partial r} dr \right)$$

вдоль радиуса от бесконечности до  $r$ , получим, положив  $\varphi(\infty) = 0$ ,

$$\varphi(r) = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}, & r \geq r_0, \\ \frac{q}{8\pi\epsilon_0 r_0} \left( 3 - \frac{r^2}{r_0^2} \right), & r \leq r_0. \end{cases} \quad (16.31)$$

Из сравнения (16.30), (16.31) с (16.9) и с (16.10) видно, что вне шара поле и потенциал такие же, как и для точечного заряда. Это свойство сохраняется для любого сферически симметричного распределения заряда  $\rho(r)$  внутри шара. В частности, для равномерно заряженной сферической поверхности будет  $q = 4\pi R^2 \rho$ . Но внутри сферы  $\mathbf{E} = 0$ .

3. Найдем магнитные поля наиболее симметричных стационарных распределений токов.

а) *Магнитное поле бесконечно тонкого прямого тока* (рис. 16.11). Эта задача обладает цилиндрической симметрией. Ее можно решить тремя разными способами. Первый способ состоит

в том, чтобы использовать интегральные уравнения Максвелла с учетом симметрии задачи. Второй способ состоит в том, чтобы в решении (16.26) задачи о поле заряженного цилиндра выбрать цилиндр тонким (т. е. всюду считать  $R > R_0$ ) и произвести преобразования Лоренца (15.5) и (15.14) к системе отсчета  $K'$ , движущейся вдоль оси цилиндра.

Мы воспользуемся третьим способом, основанным на математической тождественности уравнений (16.2) для скалярного

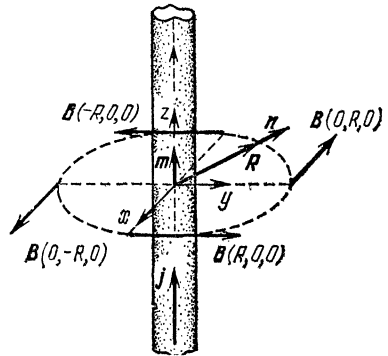


Рис. 16.11.

и векторного потенциалов. Направим ось  $z$  вдоль провода с током. Тогда  $j_x = j_y = 0$ , так что у векторного потенциала будет отличной от нуля только компонента  $A_z$ , удовлетворяющая последнему из уравнений (16.2),

$$\Delta A_z = -\frac{1}{\epsilon_0 c^2} j_z.$$

Но точно такому же уравнению удовлетворяет потенциал заряженного провода. Поэтому решение для  $A_z$  получается из (16.29) заменами  $\varphi \rightarrow A_z$ ,  $\frac{\lambda}{\pi R_0^2} \rightarrow \frac{j_z}{c^2} = \frac{I}{\pi R_0^2 c^2}$ . Отсюда  $A_z$  зависит только от  $R$ , причем

$$A_z(R) = -\frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \ln \frac{R}{R_1},$$

где  $R_1$  — расстояние от провода, на котором принято  $A_z(R_1) = 0$ . Поскольку  $A_x = A_y = 0$ , то векторный потенциал  $\mathbf{A}$  можно записать в форме

$$\mathbf{A} = -\frac{mI}{2\pi\epsilon_0 c^2} \ln \frac{R}{R_1},$$

где  $\mathbf{m}$  — единичный вектор в направлении тока, т. е. такой, что  $\mathbf{j} = m |j|$  (рис. 16.11).

Поле  $\mathbf{B}$  вычисляется согласно (16.3) с использованием (B.12):

$$\mathbf{B} = \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{A} \right] = -\frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left( \ln \frac{R}{R_1} \right) \mathbf{m} \right].$$

В данном случае второе слагаемое в правой части (B.12) равно нулю, поскольку единичный вектор  $\mathbf{m}$  одинаков во всех точках пространства, т. е. не зависит от координат. Градиент  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left( \ln \frac{R}{R_1} \right)$  можно вычислить громоздкими дифференцированиями. Но он уже фактически вычислен в (16.26), поскольку  $\mathbf{E} = -\partial\varphi/\partial\mathbf{r}$ , а  $\varphi$  из (16.29) содержит тот же логарифм. Поэтому  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left( \ln \frac{R}{R_1} \right) = \frac{\mathbf{n}}{R}$ , так что

$$\mathbf{B} = -\frac{I [nm]}{2\pi\epsilon_0 c^2 R}. \quad (16.32)$$

Напомним, что  $\mathbf{n}$  — единичный вектор, направленный вдоль радиус-вектора  $\mathbf{R}$  в плоскости, перпендикулярной току (рис. 16.11). Из (16.32) следует, что поле  $\mathbf{B}$  перпендикулярно току. По абсолютной величине магнитное поле одинаково во всех точках любой окружности, плоскость которой перпендикулярна проводу и центр которой лежит на его оси (рис. 16.11). Направления тока и магнитного поля связаны правилом буравчика; если буравчик

ввинчивается в направлении тока, то головка буравчика вращается в направлении, в котором поле  $\mathbf{B}$  обвивает ток.

Поле  $\mathbf{B}$  из (16.32) порождает магнитную силу Лоренца, действующую на заряды, движущиеся в области проводника с током. Остановимся подробнее на частном случае сил между проводниками с параллельными (или антипараллельными) токами (рис. 16.12). Обозначим через  $R$  расстояние между проводниками, а токи в них — через  $I_1, I_2$ . Диаметры проводов будем считать пренебрежимо малыми (по сравнению с  $R$ ). Определим силу  $d\mathbf{F}_{12}$ , с которой ток  $I_1$  действует на элемент  $dl_2$  длины провода с током  $I_2$ . Согласно (15.7), (16.14) для тонкого провода эта сила равна  $d\mathbf{F}_{12} = I_2 [dr_2 \mathbf{B}_1(R)]$ , где  $dr_2 = m dl_2$ , если для обоих токов за положительное принято направление вдоль оси  $z$ . Последнее означает, что токи параллельны при одинаковых знаках величин  $I_1, I_2$  и антипараллельны при противоположных. Подставив в выражение для  $d\mathbf{F}_{12}$  величину  $\mathbf{B}_1(R)$  из (16.32), получим

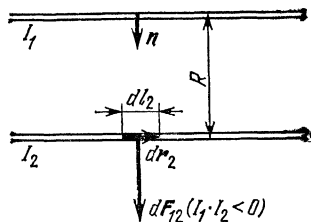


Рис. 16.12.

$$d\mathbf{F}_{12} = - \frac{I_1 I_2 [m [nm]]}{2\pi\epsilon_0 c^2 R} dl_2.$$

Согласно (B.2) двойное векторное произведение  $[m [nm]] = n$ , поскольку векторы  $m, n$  единичны и перпендикулярны друг другу. Это означает, что параллельные токи притягиваются, а антипараллельные отталкиваются. Для силы, действующей на участок длины  $l_2$  провода, получаем выражение

$$\mathbf{F}_{12} = - \frac{I_1 I_2 l_2}{2\pi\epsilon_0 c^2 R} n.$$

Последняя формула использована для определения одной из основных единиц системы СИ — ампера. «Ампер есть сила неизменяющегося тока, который, будучи поддерживаем в двух параллельных проводниках бесконечной длины и ничтожно малого кругового сечения, расположенных на расстоянии 1 метра один от другого в вакууме, вызвал бы между этими проводниками силу, равную  $2 \cdot 10^{-7}$  Н на метр длины» (ГОСТ 9867—61).

Положив  $I_1 = I_2 = 1$  А,  $|\mathbf{F}_{12}| = 1$  Н,  $R = 1$  м, получим  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  (А<sup>2</sup>·с<sup>2</sup>)/(кг·м<sup>3</sup>) (ср. с. 37). Именно здесь проявляется основное различие между системами СИ и СГС. В СГС величина  $4\pi\epsilon_0$  полагается безразмерной и равной единице, а единица силы тока является не основной, а производной. В системе СИ единица силы тока задается независимо и для согласования

этой единицы с остальными приходится вводить размерную константу  $\epsilon_0$ , не имеющую тем самым физического смысла.

б) *Магнитное поле в соленоиде бесконечной длины.* Соленоидом называется тонкий провод, свернутый в тугую спираль на цилиндрическом остове. При этом число витков настолько велико, что длина обмотки заметно превосходит ее толщину. Будем предполагать, что витков очень много и поэтому соленоид можно считать бесконечно протяженным. Реально это означает, что отношение радиуса одного витка к длине соленоида является очень малым числом. Часть соленоида показана в левой половине рис. 16.13.

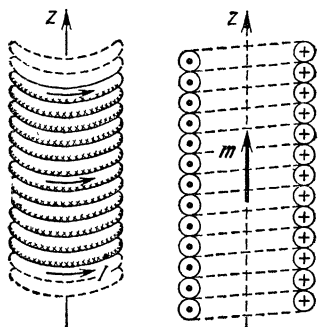


Рис. 16.13.

Первый обозначает, что в данном месте ток направлен на читателя. Второй показывает, что ток имеет противоположное направление.

Пусть сила тока в соленоиде равна  $I$ , а на единицу длины соленоида приходится  $N$  витков. Так как толщина провода мала и зазорами между витками можно пренебречь, то соленоид можно рассматривать как гладкую тонкую цилиндрическую поверхность, по которой циркулирует электрический ток.

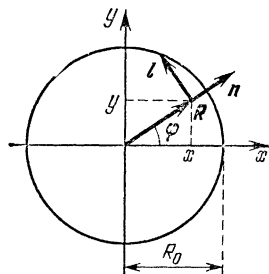


Рис. 16.14.

Перейдем к выбору системы координат. Ось  $z$  направим вдоль оси соленоида. Единичный вектор вдоль оси  $z$  обозначим через  $\mathbf{m} = \{0, 0, 1\}$  (рис. 16.13). В каждой точке плоскости  $x, y$  проведем из центра сечения соленоида радиус-вектор  $\mathbf{R}$ , расположенный в этой плоскости, т. е. имеющий координаты  $\{x, y, 0\}$  (рис. 16.14). В каждой точке зададим единичный вектор  $\mathbf{n}$  вдоль  $\mathbf{R}$  и единичный вектор  $\mathbf{l}$ , перпендикулярный  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{n}$  и ориентированный в направлении вращения против часовой стрелки. Направления векторов  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{n}$  зависят только от угла  $\varphi$  между  $\mathbf{R}$  и осью  $x$ , т. е. не зависят ни от  $z$ , ни от  $R$ . Любой вектор, заданный в точке, можно разложить по компонентам вдоль векторов  $\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{l}$ . Эти компоненты будут обозначаться, соответственно, индексами  $z, R$  и  $\varphi$ . В частности, магнитное поле  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  можно представить в виде

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = mB_z + nB_R + lB_\varphi.$$

Обозначим через  $R_0$  радиус цилиндра, на который навит соленоид (рис. 16.14). Поверхностная плотность тока в соленоиде имеет только компоненты  $J_z, J_\varphi$ :

$$\mathbf{J} = m\mathbf{J}_z + I\mathbf{J}_\varphi.$$

Абсолютное значение  $J$  равно заряду, который в единицу времени пересекает отрезок единичной длины на поверхности, ориентированный перпендикулярно току, при этом  $J_z = I/2\pi R_0$ ,  $J_\varphi = NI = I/d$ , где  $d$  — диаметр провода. Поскольку по условию  $d \ll R_0$ , то и  $J_z \ll J_\varphi$ , так что можно с хорошей точностью считать, что  $J_z = 0$ . В этом приближении задача обладает цилиндрической симметрией (т. е. симметрией как относительно поворотов вокруг оси  $z$ , так и смещения вдоль нее). Тогда  $B_z, B_R, B_\varphi$  могут зависеть только от расстояния  $R$  точки наблюдения от оси  $z$  (но не от  $z$  и  $\varphi$ ):  $B_z = B_z(R)$  и т. д. Граничное условие задачи состоит в том, что при  $R \rightarrow \infty$  все компоненты  $\mathbf{B}$  стремятся к нулю.

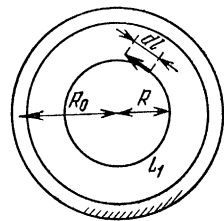


Рис. 16.15.

Перейдем к решению задачи. Каждая из компонент вектора  $\mathbf{B}$  находится с помощью одного из стационарных уравнений Максвелла в интегральной форме.

Для нахождения  $B_\varphi$  запишем четвертое уравнение (15.8) (без последнего слагаемого в правой части) для кругового контура  $L_1$  в плоскости  $x, y$  с радиусом  $R^*$  и с центром на оси  $z$  (рис. 16.15). На этом контуре  $B_\varphi = \text{const}$  и поэтому

$$\oint_{L_1} (\mathbf{B} d\mathbf{r}) = \oint_{L_1} B_\varphi dl = B_\varphi \oint_{L_1} dl = 2\pi R B_\varphi.$$

Поверхностный интеграл  $\int_S (\mathbf{j} d\mathbf{S})$ , которому пропорциональна найденная циркуляция магнитного поля, равен нулю, поскольку каждый элемент  $d\mathbf{S}$  поверхности, ограниченный контуром  $L_1$ , направлен по оси  $z$ . Поэтому  $B_\varphi = 0$ .

Для нахождения  $B_R$  запишем третье уравнение системы (15.8) для поверхности  $S$  кругового цилиндра радиуса  $R$ , единичной высоты, с осью вдоль  $z$  (рис. 16.16). На боковой поверхности цилиндра  $(\mathbf{B} d\mathbf{S}) = B_R dz dl$ , где  $dl$  — элемент окружности основания цилиндра и  $B_R = \text{const}$ . Каждому элементу  $d\mathbf{S} = \{0, 0, dS\}$  одного торца цилиндра отвечает противоположный ему элемент  $-d\mathbf{S} = \{0, 0, -dS\}$  другого торца (рис. 16.16).

\*) Радиус  $R$  может быть как меньше, так и больше  $R_0$ .

Но на этих торцах значения  $B_z = B_z(R)$  одинаковы. Поэтому в интеграле  $\oint_S (\mathbf{B} d\mathbf{S})$  вклады от интегрирования по торцам сокращаются и остается интеграл только по боковой поверхности цилиндра:

$$\oint_S (\mathbf{B} d\mathbf{S}) = \int B_R dz dl = 2\pi R B_R.$$

Согласно третьему уравнению (15.8) эта величина должна быть равна нулю. Отсюда следует, что  $B_R = 0$ . Таким образом, всюду магнитное поле направлено только по оси  $z$ .

Для нахождения  $B_z$  снова запишем стационарное четвертое уравнение (15.8), но теперь для прямоугольного контура  $L_2$  с

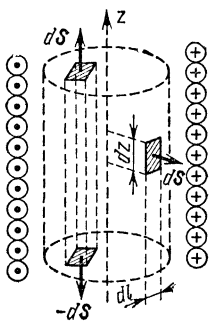


Рис. 16.16.

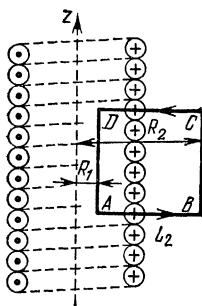


Рис. 16.17.

вершинами  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , расположенного в полуплоскости, ограниченной осью  $z$  и ориентированного против часовой стрелки (рис. 16.17). Стороны  $BC$  и  $AD$  параллельны оси  $z$  и имеют единичную длину, а стороны  $AB$  и  $DC$  перпендикулярны ей. Сторона  $AD$  находится на расстоянии  $R_1$  от оси  $z$ , а сторона  $BC$  — на расстоянии  $R_2 > R_1$ . В контурный интеграл  $\oint (\mathbf{B} dr)$

дает вклад только интегрирование по отрезкам  $AD$  и  $BC$ ; поскольку на  $AB$  и  $CD$  будет  $(\mathbf{B} dr) = B_R dr = 0$ . На  $AD$  и  $BC$  будет  $(\mathbf{B} dr) = B_z dz$ , причем на каждом отрезке компонента  $B_z$  постоянна. Поэтому величина поверхностного интеграла  $\int_S (\mathbf{j} d\mathbf{S})$ ,

где  $S$  — площадь прямоугольника  $ABCD$  (рис. 16.17), зависит от того, пересекается ли прямоугольник  $ABCD$  с соленоидом или нет. Если  $R_1 > R_0$  и  $R_2 > R_1$  или же если  $R_1 < R_2$  и  $R_2 < R_0$ , то такого пересечения нет. В этих случаях  $\oint (\mathbf{j} d\mathbf{S}) = 0$ . Если же

$R_1 < R_0 < R_2$ , то  $\int_S (\mathbf{j} d\mathbf{S}) = J_\varphi = IN$ , поскольку, по определению поверхностной плотности тока, через единицу длины сечения соленоида плоскостью течет полный ток, численно равный  $J_\varphi$ . В итоге получаем

$$B_z(R_1) - B_z(R_2) = \begin{cases} 0, & R_1, R_2 > R_0; \\ 0, & R_1, R_2 < R_0; \\ \frac{IN}{\epsilon_0 c^2}, & R_1 < R_0 < R_2. \end{cases}$$

Это означает, что компонента  $B_z(R)$  вне соленоида постоянна и тем самым равна нулю в силу граничного условия  $B_z(R) \rightarrow 0$  при  $R \rightarrow \infty$ . Внутри соленоида компонента  $B_z(R)$  тоже постоянна, но уже не нуль:  $B_z(R) = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} IN$  при  $R < R_0$ . Окончательный результат можно записать в векторной форме:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(R) &= \left\{ 0, 0, \frac{NI}{\epsilon_0 c^2} \right\}, & R < R_0; \\ \mathbf{B}(R) &= 0, & R > R_0. \end{aligned} \quad (16.33)$$

Таким образом, оказывается, что магнитное поле бесконечно протяженного соленоида вне его равно нулю, а внутри постоянно и параллельно его оси. Ориентация поля  $\mathbf{B}$  соленоида связана с направлением тока правилом буравчика: если головку буравчика вращать по току, то буравчик будет ввинчиваться в направлении магнитного поля.

Отметим, что магнитное поле тока в реальном соленоиде отличается от только что найденного за счет того, что в действительности любой скрученный провод всегда имеет конечную длину. Отличие в первую очередь выражается в выходе магнитного поля за пределы внутреннего объема соленоида. Магнитное поле выходит через торцы соленоида. Кроме того, небольшое круговое поле появляется вне соленоида за счет составляющей  $J_z$  поверхностной плотности тока (рис. 16.18). Но формулы (16.33) применимы как приближенные к реальным токнесущим цилиндрическим катушкам. Эти законы с определенной точностью описывают поле в центральных областях соленоидов конечной длины. При этом точность тем выше, чем больше продольный размер соленоида по отношению к попереч-

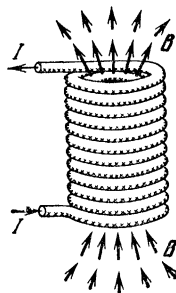


Рис. 16.18.

### § 16.3. Поля на далеких расстояниях

1. В ряде случаев возникает задача о нахождении полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  на расстояниях  $r$ , которые огромны по сравнению с размерами  $a$  источников этих полей, т. е. при  $r \gg a$ . Такие расстояния называются *далекими*. Роль задач такого типа обусловлена тем, что поле  $\mathbf{E}$  отдельного заряда, согласно (16.9), спадает на больших расстояниях пропорционально  $1/r^2$ , т. е. довольно медленно. Поэтому суммарное поле системы зарядов может проявляться на далеких расстояниях от этой системы.

Исследование полей на далеких расстояниях существенно облегчается тем, что, как оказывается, поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  даже очень сложной системы зарядов и токов вдали от системы имеют довольно простой вид и выражаются через небольшое число интегральных характеристик этой системы, к которым относится, например, ее полный заряд  $q$ . Целью настоящего параграфа является установление основных таких характеристик и вычисление соответствующих им полей.

2. Рассмотрим стационарное электрическое поле  $\mathbf{E}$  на далеких расстояниях. Выберем начало координат где-либо внутри системы зарядов, порождающих поле  $\mathbf{E}$ . Обозначим через  $\mathbf{r}$  радиус-вектор точки наблюдения, т. е. точки, в которой ищется поле  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ . Через  $\mathbf{r}'$  будем обозначать радиус-вектор точек, в которых находятся заряды. Тогда потенциал  $\varphi(\mathbf{r})$  и поле  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  выразятся общими формулами (16.12). По определению расстояние будет далеким, если  $r \gg r'$  для всех точек  $\mathbf{r}'$ , в которых плотность  $\rho(\mathbf{r}')$  заметно отлична от нуля (рис. 16.19). Таким образом, в (16.12) во всей области интегрирования

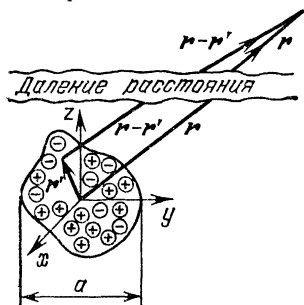


Рис. 16.19.

величина  $r'$  мала по сравнению с  $r$ . Поэтому можно разложить множитель  $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  в ряд по степеням  $r'$  (ряд Тейлора) и ограничиться в нем только первыми двумя слагаемыми:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \approx \frac{1}{r} + \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')}{r^3}. \quad (16.34)$$

Это разложение выводится так. Для любой (достаточно гладкой) функции  $f(\mathbf{r}')$  ряд Тейлора имеет вид

$$f(\mathbf{r}') \approx f(0) + \left( \mathbf{r}' \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}'} \Big|_{\mathbf{r}'=0} \right) + \dots$$

Для функции  $f(\mathbf{r}') = 1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ , очевидно,  $f(0) = 1/r$ . Градиент  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}'} = -\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$ , так что  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}'} \Big|_{\mathbf{r}'=0} = \frac{\mathbf{r}}{r^3}$ . Подставляя эти значения в ряд Тейлора, получаем (16.34).



В (16.34) мы пренебрегли слагаемыми следующих порядков малости по  $r'/r$ , т. е. в конечном счете по  $a/r$ .

Подставив (16.34) в общее выражение (16.12) для потенциала, получим

$$\varphi(\mathbf{r}) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int \rho(\mathbf{r}') dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left( \mathbf{r} \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') dV' \right).$$

Первый интеграл в правой части равен полному заряду  $q$  рассматриваемой системы:  $q = \int \rho(\mathbf{r}) dV$ . Вторым интеграл называется *электрическим дипольным моментом*, или, сокращенно, просто *дипольным моментом*, или, еще короче, *диполем* системы зарядов и обозначается через  $\mathbf{p}$ :

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) dV. \quad (16.35)$$

(Мы опустили штрих у переменной интегрирования, поскольку здесь нам не надо различать  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$ .) Формулой (16.35) определяется дипольный момент и в системе СГС.

Часто приходится рассматривать дискретные статические распределения зарядов. В этих случаях (16.35) сводится к сумме

$$\mathbf{p} = \sum_i q_i \mathbf{r}_i. \quad (16.36)$$

Каждый ее член содержит произведение одного из зарядов на радиус-вектор точки его расположения.

Отметим, что дипольный момент нестационарных распределений зарядов также определяется по правилу (16.35). Но в этих случаях дипольный момент изменяется во времени:  $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$ . Связано это с тем, что плотность нестационарно распределенных зарядов является функцией времени.

По определению (16.35) дипольный момент в системе СИ имеет размерность (Кл·м). В системе СГС он имеет размерность единицы заряда, умноженной на см. В молекулярной физике часто используется внесистемная единица — *дебай* (D):  $1 \text{ D} = = 3,33 \cdot 10^{-30}$  Кл·м, что составляет долю в  $10^{-18}$  единицы дипольного момента системы СГС. Эта единица введена в связи с тем, что дипольные моменты молекул либо равны нулю, либо имеют порядок одного дебая. Например, абсолютные значения дипольных моментов молекул  $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{HCl}$ ,  $\text{NH}_3$  равны, соответственно 1,84 D, 1,03 D, 1,43 D.

Вернемся к потенциалу стационарного поля. Его теперь можно переписать в виде

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{r}\mathbf{p})}{r^3}. \quad (16.37)$$

(В системе СГС исчезает коэффициент  $1/4\pi\epsilon_0$ .) Выражение (16.37) определяет потенциал в дипольном приближении.

Пусть источник поля не является в целом электронейтральным. Пример — ионизированный атом. В этом случае  $q \neq 0$  и в правой части (16.37) первый член значительно больше второго ( $r$  очень велико). Следовательно, последний член практически никакой роли не играет, так что его можно отбросить. Мы видим, что получается потенциал поля точечного заряда. Это показывает, что на достаточно больших расстояниях всякая ограниченная в пространстве система зарядов, не обладающая электронейтральностью, всегда будет выглядеть как заряженная точка.

Предположим теперь, что источник поля в целом электронейтрален. Пример — молекула HCl. Тогда  $q = 0$ , так что первое слагаемое в правой части (16.37) отсутствует. В этом случае ведущая роль принадлежит второму слагаемому. При  $q = 0$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{r}\mathbf{p})}{r^3}. \quad (16.38)$$

Такой потенциал убывает существенно быстрее кулоновского ( $1/r^2$  вместо  $1/r$ ). Он называется *потенциалом поля диполя*.

Дипольный момент электронейтральной системы зарядов обладает важным свойством: он не зависит от выбора начала координат. Действительно, рассмотрим две системы отсчета, сдвинутые одна относительно другой на вектор  $\mathbf{a}$ . Эти системы изображены на рис. 16.20. На нем замкнутым контуром схематически очерчена область расположения зарядов. Выделен один из бесконечно малых объемов  $dV$ , в котором находится заряд  $\rho dV$ . Найдем разность дипольных моментов, определенных в двух данных системах отсчета:

$$\mathbf{p}' - \mathbf{p} = \mathbf{a} \int \rho dV = \mathbf{a}q.$$

Мы видим, что при  $q = 0$  будет  $\mathbf{p}' = \mathbf{p}$ , что и требовалось доказать.

Поле электрического диполя

$$\mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left\{ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{r}\mathbf{p})}{r^3} \right\} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{3(\mathbf{r}\mathbf{p})\mathbf{r} - r^2\mathbf{p}}{r^5} \right\}.$$

(В системе СГС множитель  $1/4\pi\epsilon_0$  отсутствует.)

Для доказательства последней формулы достаточно вычислить одну из компонент поля и показать, что она находится в согласии с этой формулой. Одной компоненты достаточно потому, что  $x$ ,  $y$  и  $z$  входят в потенциал

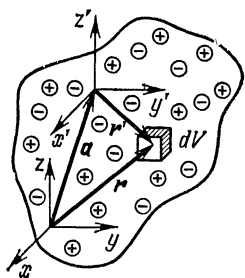


Рис. 16.20.

(16.38) равноправным образом. Вычислим, например,  $x$ -компоненту поля. Так как  $(\mathbf{r}\rho) = x\rho_x + y\rho_y + z\rho_z$ , то

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial x} \frac{(\mathbf{r}\rho)}{r^3} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{r}\rho) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\mathbf{r}\rho)}{r^4} \frac{\partial r}{\partial x} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{3(\mathbf{r}\rho) x - r^2 \rho_x}{r^5} \right\}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Бывает так, что электронейтральная в целом система не имеет и ненулевого дипольного момента. Примером являются четыре статических заряда, расположенных так, как это показано на рис. 16.21. Такого рода системы на далеких расстояниях тоже создают поле  $\mathbf{E}$ , но еще быстрее (чем  $1/r^2$ ) спадающее с расстоянием. Действительно, все, о чем шла речь выше, базировалось на приближении, в котором величина  $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  представлялась только первыми двумя членами ее разложения в ряд по степеням отношения  $r'/r$ . Если же и  $q = 0$ , и  $\mathbf{p} = 0$ , то нужно учитывать третий член разложения, а если он оказывается нулевым, то следующий и т. д. Разумеется, соответствующие поля с увеличением расстояния от источника убывают гораздо быстрее, чем поле точечного заряда и поле диполя.

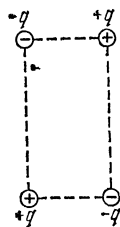


Рис. 16.21.

Поясним физический смысл дипольного момента. Пусть в некоторой в целом электронейтральной системе плотности отрицательно и положительно заряженного электричества равны, соответственно,  $\rho^{(-)}$  и  $\rho^{(+)}$ . Тогда электрический дипольный момент системы можно переписать в виде

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{r} \rho^{(+)}(\mathbf{r}) dV + \int \mathbf{r} (\rho^{(-)}(\mathbf{r})) dV = q(\mathbf{r}^{(+)} - \mathbf{r}^{(-)}) = q\mathbf{l},$$

где  $q$  — абсолютная величина суммарных зарядов одного знака, а  $\mathbf{r}^{(+)}$ ,  $\mathbf{r}^{(-)}$  — центры распределения, соответственно, положительных и отрицательных зарядов:

$$\mathbf{r}^{(+)} = \frac{1}{q} \int \mathbf{r} \rho^{(+)}(\mathbf{r}) dV, \quad \mathbf{r}^{(-)} = -\frac{1}{q} \int \mathbf{r} \rho^{(-)}(\mathbf{r}) dV,$$

$$\mathbf{l} = \mathbf{r}^{(+)} - \mathbf{r}^{(-)}.$$

(Если все частицы, несущие заряды одного знака, имеют одинаковые массы и заряды, то центры распределения зарядов совпадают с центрами инерции соответствующих систем частиц.) Мы видим, что  $\mathbf{p} \neq 0$  лишь тогда, когда центры распределения положительных и отрицательных зарядов не совпадают. Другими словами,  $\mathbf{p} \neq 0$ , когда носители разноименного электричества группируются в разных местах (рис. 16.22). Дипольный момент

как раз и является той величиной, которая характеризует такую асимметрию распределения зарядов. Если ее нет, то  $\mathbf{p} = 0$ .

3. Рассмотрим энергию взаимодействия электрических зарядов с внешним электрическим полем в том случае, когда поле слабо изменяется на расстояниях, сравнимых с характерным размером системы зарядов. Это условие выполняется, например, при взаимодействии атомов и молекул с полями, создаваемыми макроскопическими источниками. Такие поля заметно изменяются только на расстояниях, огромных по сравнению с атомными и молекулярными размерами.

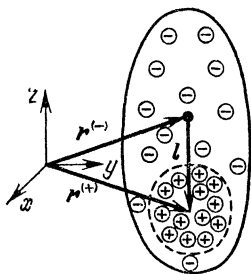


Рис. 16.22.

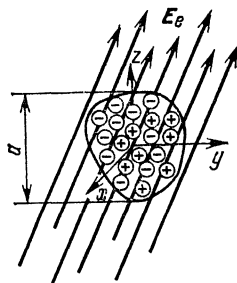


Рис. 16.23.

Пусть характерный размер системы зарядов, подвергающихся действию внешнего поля, по-прежнему равен  $a$ . Выберем систему отсчета так, чтобы ее начало совпало с центром распределения зарядов (рис. 16.23). По предположению, поле слабо меняется при смещении от начала координат на расстояния порядка  $a$ . Поэтому значение потенциала  $\varphi_e$  внешнего поля в любой точке  $\mathbf{r}$  системы зарядов ( $r \leq a$ ) можно выразить через потенциал в начале координат по правилу вычисления бесконечно малого приращения функции:

$$\varphi_e(\mathbf{r}) = \varphi_e(0) + \left( \mathbf{r} \frac{\partial \varphi_e}{\partial \mathbf{r}} \Big|_{\mathbf{r}=0} \right).$$

Но  $-\frac{\partial \varphi_e(0)}{\partial \mathbf{r}} \Big|_{\mathbf{r}=0} = \mathbf{E}_e(0)$  — значение внешнего поля в начале координат. Следовательно,  $\varphi_e(\mathbf{r}) = \varphi_e(0) - (\mathbf{E}_e(0)\mathbf{r})$ . Поэтому в принятом приближении энергия взаимодействия системы зарядов с внешним полем представима следующим образом:

$$U_3 = \int \rho \varphi_e dV = q\varphi_e(0) - (\mathbf{p}\mathbf{E}_e(0)). \quad (16.39)$$

Здесь  $\rho$  — плотность зарядов в системе,  $q$  — ее полный заряд, а  $\mathbf{p}$  — дипольный момент. В выражении (16.39) первый член отличен от нуля, когда заряд системы не равен нулю. Этот член

равен энергии взаимодействия с полем точечного заряда  $q$ . Если же система электронейтральна ( $q = 0$ ), то

$$U_s = -(\mathbf{p} \mathbf{E}_e(0)). \quad (16.40)$$

В этом случае энергия взаимодействия определяется одной характеристикой системы зарядов — ее дипольным моментом. Поэтому энергию (16.40) называют энергией диполя в электрическом поле. Она минимальна, когда  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{E}_e$  параллельны. Поэтому дипольный момент всегда стремится повернуться вдоль действующего на него поля.

Отметим, что в тех случаях, когда  $q = 0$  и  $\mathbf{p} = 0$ , все равно будет  $U_s \neq 0$ , так как выражение (16.39) является приближенным. В этих случаях становятся существенными следующие члены разложения потенциала  $\phi_e(\mathbf{r})$ , которые в (16.39) не учтены.

Соотношение (16.39) можно применять для вычисления энергии электрического взаимодействия двух или нескольких систем со стационарно распределенными зарядами, но при одном ограничении: расстояние между системами должно намного превосходить их собственные размеры. Например, в область применимости (16.39) входит задача о взаимодействии иона с нейтральным атомом или двух нейтральных атомов, если порядок расстояния между взаимодействующими частицами не менее  $10^{-7}$  м. Рассуждают при этом следующим образом. Одна из систем считается источником электрического поля, а другая — объектом его воздействия. Взаимная удаленность систем гарантирует медленность изменения поля, порожденного одной системой, на протяжении размеров другой. Рассмотрим энергию взаимодействия только двух систем. Пусть взаимное расположение их центров определяется радиус-вектором  $\mathbf{r}$  (рис. 16.24). Допустим, что первая система, внутри которой выбрано начало координат, электронейтральна. Электронейтральность системы 1 выражается равенством  $q_1 = 0$ . Пусть заряд второй системы равен  $q_2$ . Дипольные моменты систем обозначим, соответственно, через  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{p}_2$ . Потенциал  $\phi_1$  поля  $\mathbf{E}$  в центре системы 2 будет равен

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{r} \mathbf{p}_1)}{r^3},$$

а само поле будет равно

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\mathbf{r} \mathbf{p}_1) \mathbf{r} - r^2 \mathbf{p}_1}{r^5}.$$

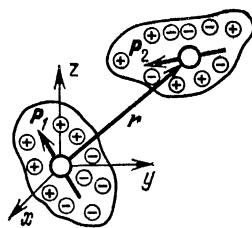


Рис. 16.24.

Если  $q_2 \neq 0$ , то хорошим приближением для энергии  $U_3^{(12)}$  электрического взаимодействия систем 1 и 2 согласно (16.39) будет

$$U_3^{(12)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2(\mathbf{r}p_1)}{r^3}.$$

Эта энергия пропорциональна  $1/r^2$ . Если же  $q_2 = 0$ , то

$$U_3^{(12)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{r^2(\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2) - 3(\mathbf{r}p_1)(\mathbf{r}p_2)}{r^5},$$

т. е. пропорциональна уже  $1/r^3$ .

4. Рассмотрим магнитные поля на далеких расстояниях. Для них критерий удаленности точки наблюдения тот же, что и для электрических полей. Упрощение также начинается с разложения (16.21) для  $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  в ряд по степеням малого отношения  $r'/r$ . Ограничимся и здесь первыми двумя членами. В этом приближении векторный потенциал (16.21) принимает такой вид:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') dV + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^3} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}')(\mathbf{r}'\mathbf{r}) dV. \quad (16.41)$$

Для вычисления первого интеграла забудем на время о том, что рассматриваются только стационарные распределения. Пусть распределение нестационарно. Вычислим скорость изменения во времени, например,  $x$ -компоненты его дипольного момента:

$$\frac{d p_x}{dt} = \frac{d}{dt} \int \rho(\mathbf{r}, t) x dV = \int \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} x dV.$$

Здесь интегрирование распространено на все пространство (а реально ограничивается той его областью, в которой  $\rho \neq 0$ ). Учитывая (15.3) и проводя простые преобразования, находим

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} x dV &= - \int \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \right) x dV = \\ &= - \int \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (j_x(\mathbf{r}, t) x) + \frac{\partial}{\partial y} (j_y(\mathbf{r}, t) x) + \frac{\partial}{\partial z} (j_z(\mathbf{r}, t) x) \right\} dV + \\ &\quad + \int j_x(\mathbf{r}, t) dV = - \int \frac{\partial (xj)}{\partial \mathbf{r}} dV + \int j_x dV. \end{aligned}$$

В окончательном выражении первый из интегралов с помощью теоремы Гаусса преобразуется в интеграл по бесконечно удаленной поверхности, «ограничивающей» все пространство. Каждый элемент такой поверхности находится там, где зарядов нет. Поэтому в каждой точке этой поверхности  $\mathbf{j} = 0$ . Следовательно, поверхностный интеграл равен нулю. Возвращаясь по цепочке этих рассуждений назад, мы видим, что первый интеграл в по-

следнем из записанных выше выражений равен нулю. Итак, оказывается, что

$$\frac{dp_x}{dt} = \int j_x dV.$$

Но  $j_x$ , как компонента вектора, равноправна с остальными. Поэтому из установленного равенства следует, что

$$\frac{dp}{dt} = \int \mathbf{j} dV. \quad (16.42)$$

Вернемся к стационарным распределениям. Для них  $dp/dt=0$  и тем самым

$$\int \mathbf{j} dV = 0. \quad (16.43)$$

Поэтому первый член в правой части (16.41) равен нулю. Смысл второго члена поясним на сравнительно простом частном случае, в котором магнитное поле создается линейным током, протекающим в замкнутом проводе. Контур этого тока обозначим через  $L$ , а силу тока в нем — через  $I$ . Тогда согласно (16.14) векторный потенциал можно записать в виде

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{I}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^3} \oint_L (\mathbf{r}\mathbf{r}') d\mathbf{r}'.$$

Последний интеграл преобразуем следующим образом. Применяя правило раскрытия двойного векторного произведения, находим, что

$$\begin{aligned} [[\mathbf{r}' d\mathbf{r}'] \mathbf{r}] &= (\mathbf{r}'\mathbf{r}) d\mathbf{r}' - (\mathbf{r} d\mathbf{r}') \mathbf{r}' = \\ &= 2(\mathbf{r}'\mathbf{r}) d\mathbf{r}' - (\mathbf{r} d\mathbf{r}') \mathbf{r}' - (\mathbf{r}'\mathbf{r}) d\mathbf{r}' = 2(\mathbf{r}'\mathbf{r}) d\mathbf{r}' - d\{(\mathbf{r}\mathbf{r}') \mathbf{r}'\}. \end{aligned}$$

При преобразовании двойного векторного произведения к последнему выражению мы учли тот факт, что переменной величиной является только  $\mathbf{r}'$ . Радиус-вектор  $\mathbf{r}$ , определяющий положение точки наблюдения, фиксирован. Теперь мы видим, что

$$(\mathbf{r}\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = \frac{1}{2} [[\mathbf{r}' d\mathbf{r}'] \mathbf{r}] + \frac{1}{2} d\{(\mathbf{r}\mathbf{r}') \mathbf{r}'\}.$$

Как известно, интеграл по замкнутому контуру от всякого полного дифференциала равен нулю. Поэтому  $\oint_L d\{(\mathbf{r}\mathbf{r}') \mathbf{r}'\} = 0$ . Мы

получили, что

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{[\mu\mathbf{r}]}{r^3}, \quad (16.44)$$

где

$$\mu = \frac{I}{2} \oint_L [\mathbf{r}' d\mathbf{r}']. \quad (16.45)$$

В соответствии с (16.14) равенству (16.45) можно придать вид

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2} \int [\mathbf{r}' \mathbf{j}(\mathbf{r}')] dV'. \quad (16.46)$$

Эта форма записи вектора  $\boldsymbol{\mu}$  является наиболее общей. Она справедлива и для распределения токов общего вида.

Из (16.45) и (16.46) следует, что  $\boldsymbol{\mu}$  не зависит от выбора начала координат и определяется только распределением плотности тока в создающей поле системе зарядов. Этот вектор — аналог электрического дипольного момента и называется *магнитным дипольным моментом* системы зарядов. Короче его называют просто *магнитным моментом*. Принятая терминология определяет и название приближения, которое, так же как и в электрическом случае, называется дипольным.

Соотношения (16.45) и (16.46) справедливы в системе СИ. В системе СГС появляется дополнительный коэффициент  $1/c$ . В векторном же потенциале исчезает множитель  $1/4\pi\epsilon_0 c$ .

Из (16.46) следует, что в системе СИ единицей магнитного момента является  $1 \text{ А} \cdot \text{м}^2 = 1 \text{ Дж/Тл}$ . В системе СГС он же измеряется в эрг/Гс. В физике микроскопических явлений (например, в атомной и ядерной физике) применяются внесистемные единицы — *магнетон Бора* и *ядерный магнетон*. Магнетон Бора  $\mu_B$  имеет значение

$$\mu_B = \frac{\hbar q_0}{2m_e} = 9,2731 \cdot 10^{-24} \frac{\text{Дж}}{\text{Тл}} = 9,2731 \cdot 10^{-21} \frac{\text{эрг}}{\text{Гс}}, \quad (16.47)$$

и ядерный магнетон  $\mu_{\text{я}}$  равен

$$\mu_{\text{я}} = 5,05038 \cdot 10^{-27} \frac{\text{Дж}}{\text{Тл}} = 5,05038 \cdot 10^{-24} \frac{\text{эрг}}{\text{Гс}} \approx \frac{\hbar q_0}{2m_p}. \quad (16.48)$$

Здесь  $q_0$  — величина элементарного заряда, а  $m_e$  и  $m_p$  — соответственно массы электрона и протона,  $\hbar$  — постоянная Планка.

Пояснения к этим величинам будут даны в гл. 20.

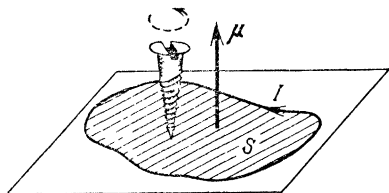


Рис. 16.25.

Наиболее просто магнитный момент выглядит в том случае, когда создающий его ток линейен, а контур тока является плоским, т. е. целиком помещающимся на некоторой плоскости. В этом случае направление  $\boldsymbol{\mu}$  показывает перемещение оси буравчика, ориентированного перпендикулярно площадке, ограниченной контуром тока, и вращаемого в направлении тока. Абсолютное значение такого момента равно

$$|\boldsymbol{\mu}| = |I|S. \quad (16.49)$$

В этом случае направление  $\boldsymbol{\mu}$  показывает перемещение оси буравчика, ориентированного перпендикулярно площадке, ограниченной контуром тока, и вращаемого в направлении тока. Абсолютное значение такого момента равно



Здесь  $|I|$  обозначает абсолютное значение силы тока, а  $S$  — площадь, которую контур тока ограничивает. Данное определение иллюстрирует рис. 16.25, на котором площадь  $S$  заштрихована.

Магнитный момент плоского контура тока вычисляется следующим образом. Выберем систему отсчета так, чтобы ее координатная плоскость  $x, y$  совместилась с плоскостью контура тока  $I$ , а начало отсчета оказалось внутри  $L$ . При этом ось  $z$  будет направлена на читателя (рис. 16.26). Так как векторы  $r'$  и  $dr'$  расположены в плоскости  $x, y$ , то каждый из векторов  $[r' dr']$  будет направлен по оси  $z$ . Это приводит к двум следствиям. Во-первых, сумма всех величин  $[r' dr']$ , т. е.  $\oint [r' dr']$ , является вектором, ориентированным вдоль оси  $z$ , что согласуется с правилом буравчика. Во-вторых,

$$\mu = \left| \frac{I}{c^2} \oint_L [r' dr'] \right| = |I| \oint_L \frac{1}{2} |[r' dr']|.$$

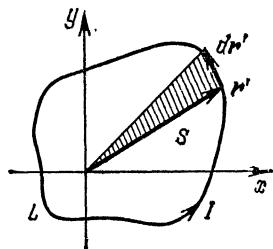


Рис. 16.26.

По определению векторного произведения величина  $\frac{1}{2} |[r' dr']|$  равна площади треугольника, построенного на векторах  $r'$  и  $dr'$  (на рис. 16.26 этот треугольник заштрихован). Интеграл  $\oint_L \frac{1}{2} |[r' dr']|$  равен сумме площадей всех бесконечно малых треугольников, на которые разбивается площадь  $S$ . Другими словами, этот интеграл равен  $S$ , что и приводит к (16.49).

Правило, определяющее магнитный момент в рассмотренном случае, указывает на независимость  $\mu$  от выбора системы отсчета.

В некоторых случаях магнитный момент системы зарядов оказывается нулевым. Например, система двух равных плоских токов, показанная на рис. 16.27, магнитным моментом не обладает. Каждый из токов магнитный момент создает. Но эти моменты противоположно направлены и при  $S_1 = S_2 = S$  одинаковы по абсолютному значению. Поэтому суммарный момент оказывается нулевым. В подобных случаях дипольное приближение является грубым и расчет  $A$  необходимо вести более точно.

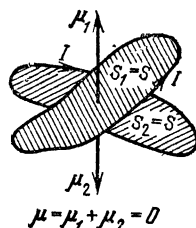


Рис. 16.27.

Вычисляя ротор  $A$  из (16.44), находим поле, создаваемое магнитным моментом:

$$B = [\nabla A] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{3(\mu r) r - \mu r^2}{r^5}.$$

(В системе СГС множитель  $1/4\pi\epsilon_0 c^2$  отсутствует.) Соответствующую

шие вычисления принципиально несложны, но громоздки и поэтому опускаются.

Обратим внимание на сходство (16.38) с (16.44) и формул, определяющих соответствующие поля. Оно не случайно и является следствием подобия уравнений системы (16.2). Однако в одной отношении имеется существенное различие в поведении электрических и магнитных полей на больших расстояниях. Оно состоит в отсутствии у векторного потенциала аналога первого члена в разложении для потенциала. Отсутствует он потому, что в природе нет магнитных зарядов.

5. Рассмотрим энергию взаимодействия токов с внешним магнитным полем, которое слабо меняется в пределах области, в которой протекают токи.

Наиболее просто поставленная задача решается в том случае, если ток линейен и его контур плоский. Обозначим этот контур через  $L$ . Он, конечно, замкнутый\*). Допустим, что на протяжении  $L$  внешнее поле  $\mathbf{B}_e$  изменяется столь слабо, что этим изменением можно пренебречь. Тогда соотношение (16.16) можно преобразовать следующим образом:

$$U_m = -I \int_S (\mathbf{B}_e d\mathbf{S}) = -I (\mathbf{B}_e \mathbf{n}) S = -IB_e S \cos \theta.$$

Здесь  $I$  — сила тока, на который действует внешнее поле  $\mathbf{B}_e$ ,  $\mathbf{n}$  — нормаль к площади  $S$ , которую контур  $L$  ограничивает,  $\theta$  — угол между  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{B}_e$ . Учитывая правило, определяющее магнитный момент плоского тока, находим

$$U_m = -B_e \mu \cos \theta = -(\mu \mathbf{B}_e). \quad (16.50)$$

Этот результат мы получили на примере линейного тока. Однако предположение о линейности не является необходимым. Оно лишь упрощает выкладки. Выражение (16.50) справедливо для любых токов, на протяжении которых магнитное поле изменяется слабо и магнитный момент которых равен  $\mu$ . Энергию  $U_m$  из (16.50) часто называют энергией взаимодействия магнитного момента с магнитным полем.

Из (16.50) следует, что в магнитном поле магнитный момент ведет себя подобно электрическому диполю в электрическом поле: момент всегда стремится повернуться вдоль поля. Только тогда энергия магнитного момента станет минимальной. Это свойство нашло широкое применение в технике. Например, оно позволило создать электромотор. Принцип его действия легко

---

\*) У постоянных токов не может быть ни начала, ни конца. В противном случае в начале и конце заряд будет увеличиваться или уменьшаться в зависимости от направления тока. Это значит, что распределение зарядов не будет стационарным.

понять из примера, изображенного на рис. 16.28. На нем показана проволочная рамка, которая может вращаться вокруг оси, отмеченной пунктиром. Если через такую рамку пропустить электрический ток и при этом поместить ее во вращающееся магнитное поле, то поле будет вращать рамку вслед за собой (рис. 16.28). Это и есть простейший электромотор. О способе создания вращающегося магнитного поля будет сказано в гл. 20.

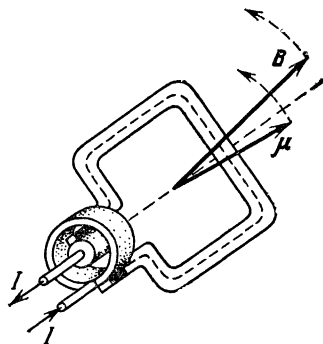


Рис. 16.28.

Выражение для магнитного поля на далеких расстояниях можно применить для вычисления энергии магнитного взаимодействия нескольких токнесущих систем при том же ограничительном условии, которое оговаривалось в аналогичной электрической задаче: расстояния между системами должны на много превосходить размеры каждой системы. Аналогия с электрическим взаимодействием здесь полная. Поэтому, опуская промежуточные пояснения, приведем выражение для энергии магнитного взаимодействия двух систем, обладающих магнитными моментами  $\mu_1$  и  $\mu_2$ . Если взаимное расположение этих магнитных моментов определяется радиус-вектором  $r$ , то

$$U_M^{(12)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{r^2 (\mu_1 \mu_2) - 3 (r \mu_1) (r \mu_2)}{r^5}.$$

## ГЛАВА 17

# СТАЦИОНАРНЫЕ ПОЛЯ И ПРОВОДНИКИ

### § 17.1. Электропроводность

1. До сих пор электрические токи считались заданными, а изучались создаваемые ими поля. В этом параграфе мы будем считать заданным внешнее электрическое поле и изучать механизм создания этим полем электрических токов в веществе.

Для этого нам понадобятся два главных опытных факта о поведении заряженных микрочастиц вещества во внешнем поле. Первый из этих фактов состоит в следующем:

*во многих веществах существуют свободные заряженные микрочастицы.*

Свободная частица отличается (от связанной) тем, что она может передвигаться на большое расстояние под действием сколь угодно малой силы. Для заряженной частицы это означает, что она должна придти в движение под действием сколь угодно слабого электрического поля. Именно это наблюдается, например, в металлах: электрический ток в металлическом проводе вызывается сколь угодно малым напряжением, приложенным к его концам. Это и свидетельствует о наличии в металле свободных заряженных частиц.

Дадим теперь основные определения. Вещества, содержащие свободные заряженные микрочастицы, называются *проводниками электричества* или просто *проводниками*. Свободные электрические микрочастицы в проводниках называются *носителями электрического тока* или, короче, *носителями*. Вещества, не содержащие свободных заряженных частиц, называются *диэлектриками*. (В электротехнике диэлектрики часто называются *изоляторами*.) Ниже, в п. 3, будет дано количественное уточнение этих определений. Подчеркнем, что носители свободны только внутри проводника, т. е., вообще говоря, не могут беспрепятственно уходить за его границу. Проводниками являются металлы, плазма и электролитические жидкости \*). В металлах носи-

---

\*) В этом параграфе детали механизма движения носителей в различных проводниках нам не понадобятся. Эти детали будут изложены в § 17.3 (электролитические жидкости), в гл. 18 (плазма) и в томе III (металлы).

телями являются электроны. В электролитических жидкостях носителями являются ионы. В плазме имеются носители обоих типов. Ионом называется атом, захвативший или потерявший один или несколько электронов. Атом, потерявший электрон, заряжен положительно и называется *однозарядным положительным ионом*. Атом, захвативший электрон, называется *однозарядным отрицательным ионом*. Аналогично вводятся определения *двухзарядных* и, вообще, *многозарядных* ионов. Из определения следует, что заряд каждого носителя либо равен, либо кратен элементарному заряду  $q_0 = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл.

Под действием внешнего электрического поля положительные носители движутся вдоль поля, а отрицательные — против поля. На макроскопическом уровне это приводит к возникновению плотности тока  $j(\mathbf{r})$ , направленной вдоль поля.

*Упорядоченное движение носителей зарядов, приводящее к переносу заряда, называется электрическим током в веществе. Электрический ток возникает под действием электрического поля. Свойство вещества проводить электрический ток называется электропроводностью.*

Второй опытный факт о поведении заряженных частиц вещества в электрическом поле состоит в том, что *прохождение электрического тока через вещество сопровождается выделением тепла.*

Это выделение тепла обусловлено превращением энергии упорядоченного движения носителей в тепловую энергию неупорядоченного движения всех макрочастиц вещества.

Установим основные закономерности этого процесса. В микроскопической картине каждый носитель участвует в хаотическом тепловом движении, так что его скорость часто и нерегулярно меняется при взаимодействии с микрочастицами вещества. Однако если положение носителя усреднить по физически бесконечно малому времени, намного меньшему характерных макроскопических времен, но намного превышающему средний промежуток времени элементарного акта микроскопического взаимодействия, то усредненная траектория носителя станет плавной. При наличии электрического поля  $E$  носитель в среднем будет двигаться по плавной траектории под действием двух сил. Первой будет сила со стороны электрического поля, равная  $qE$ , где  $q$  — заряд носителя. Вторая сила, которую мы обозначим через  $F$ , будет действовать на носитель со стороны среды, тормозя его движение. Таким образом, носитель будет разгоняться полем и тормозиться средой. При торможении носитель передает свою энергию среде, вызывая ее нагревание.

Перечислим теперь, что мы знаем о законе действия силы  $F$ . В общем случае (см. гл. 2 тома I) сила является функцией координат и скорости частицы. Но в однородном веществе

сила  $\mathbf{F}$  не может зависеть от координат частицы, потому что свойства вещества одинаковы во всем пространстве. В отношении зависимости от скорости  $\mathbf{v}$  можно утверждать, что сила  $\mathbf{F}$  всегда направлена против скорости, — иначе эта сила будет не только тормозить частицу, но и менять направление ее движения. Таким образом, мы получаем, что

$$\mathbf{F} = -\alpha(\mathbf{v})\mathbf{v}, \quad (17.1)$$

где функция  $\alpha(\mathbf{v}) > 0$  при всех  $\mathbf{v}$ . Для установления конкретной зависимости  $\alpha(\mathbf{v})$ , вообще говоря, нужен детальный количественный анализ взаимодействия носителя с частицами вещества. Здесь мы примем *первое основное допущение теории электропроводности*:

*коэффициент пропорциональности  $\alpha(\mathbf{v})$  в (17.1) не зависит от скорости, а является константой, характеризующей свойства носителя и вещества.*

Обозначим эту константу через  $m/\tau$ , где  $m$  — масса носителя, а  $\tau$  — новая константа, имеющая размерность времени и называемая *временем релаксации носителя*. Пределы применимости сделанного допущения будут оценены ниже.

Выражение для тормозящей силы теперь примет вид  $\mathbf{F} = -m\mathbf{v}/\tau$ . Соответственно, усредненное по времени уравнение движения для носителя запишется в форме

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{E} - \frac{m\mathbf{v}}{\tau}. \quad (17.2)$$

Наибольший интерес представляет решение этого уравнения, соответствующее стационарному режиму, т. е. такому, для которого  $d\mathbf{v}/dt = 0$ . Средняя скорость носителей в стационарном режиме называется *скоростью дрейфа* и обозначается через  $\mathbf{v}_d$ . Согласно (17.1)

$$\mathbf{v}_d = \frac{q\tau}{m} \mathbf{E}. \quad (17.3)$$

Коэффициент пропорциональности между скоростью дрейфа и внешним полем называется *подвижностью носителя* и обозначается через  $\mu$ :

$$\mu = \frac{q\tau}{m}.$$

Нетривиальность стационарного решения (17.3) состоит в том, что на носитель действует постоянная внешняя сила  $q\mathbf{E}$ , а он движется с постоянной скоростью (а не с постоянным ускорением). При скорости, равной скорости дрейфа, сила  $q\mathbf{E}$  уравновешивается силой сопротивления среды.

Теперь мы можем дать новую формулировку первого основного допущения теории электропроводности:

время релаксации носителей не зависит от их скорости дрейфа.

Выясним физический смысл времени релаксации  $\tau$ . Для этого рассмотрим уравнение (17.2) движения носителя при отсутствии внешнего поля:

$$m \frac{dv}{dt} = -\frac{mv}{\tau}.$$

Общим решением этого уравнения будет

$$v(t) = v_0 e^{-t/\tau},$$

где  $v_0$  — начальная скорость. Из этого решения видно, что  $\tau$  является характерным средним временем, за которое носитель теряет скорость своего упорядоченного движения. Например, для газов  $\tau$  имеет порядок времени свободного пробега.

Общее решение исходного уравнения (17.2), как можно непосредственно проверить, имеет вид

$$v(t) - v_d = (v_0 - v_d) e^{-t/\tau}.$$

Из этого решения виден смысл первого основного допущения; время установления равновесной скорости не зависит от внешнего поля, а зависит только от величины отклонения значения скорости от равновесного. Очевидно, что для этого необходимо, чтобы статистическое распределение как носителей, так и других частиц вещества по скоростям слабо зависело от скорости дрейфа, т. е. чтобы было

$$v_d \ll v_T, \quad (17.4)$$

где  $v_T$  — тепловая скорость микрочастиц вещества, равная  $\sqrt{3kT/m}$  для частицы массы  $m$  (см. (8.7) тома I). Здесь  $k$  — постоянная Больцмана,  $T$  — абсолютная температура. Неравенство (17.4) является условием применимости первого допущения теории электропроводности.

Перейдем теперь от движения отдельного носителя к плотности электрического тока. Для определенности примем, что в веществе имеются носители двух сортов: положительные с концентрацией \*)  $n_+$ , массами  $m_+$ , зарядами  $q_+$ , подвижностями  $\mu_+$  и скоростью дрейфа  $v_d^+$ , а также отрицательные с соответствующими величинами  $n_-$ ,  $m_-$ ,  $q_-$ ,  $\mu_-$ ,  $v_d^-$ . Плотность тока  $j$ , согласно определению (15.1), имеет значение

$$j = q_+ n_+ v_d^+ + q_- n_- v_d^-.$$

\*) Среднее число носителей в единице объема.

Согласно (17.3) и определению подвижности

$$v_{\pm}^+ = \mu_{\pm} E, \quad v_{\pm}^- = \mu_{\pm} E,$$

так что

$$j = \sigma E, \quad (17.5)$$

где

$$\sigma = q_+ \mu_+ n_+ + q_- \mu_- n_-. \quad (17.6)$$

Примем теперь второе основное допущение теории электропроводности:

*концентрация носителей каждого сорта не зависит от величины наложенного внешнего электрического поля.*

Из (17.6) видно, что при справедливости обоих допущений величина  $\sigma$  в (17.5) не зависит от величины наложенного поля. В этом случае (17.5) становится локальной формулировкой закона Ома:

*Плотность тока в веществе пропорциональна внешнему электрическому полю с положительным коэффициентом пропорциональности.*

При выполнении закона Ома соотношение (17.5) является также определением физической величины  $\sigma$ , называемой *удельной проводимостью вещества*. Микроскопический смысл удельной проводимости выражается соотношением (17.6). Обратная величина  $\sigma^{-1} = \rho$  называется *удельным электрическим сопротивлением среды*.

Получим из локальной формулировки (17.5) интегральную формулировку закона Ома, известную из школьного курса. Для этого применим (17.5) к линейному току в однородном прямом проводе с поперечным сечением  $S$ . Направим ось  $z$  вдоль провода и обозначим  $j_z$  через  $j$  и  $E_z$  через  $E$ . Ток в проводе  $I$  равен  $jS = \sigma SE$ , так что

$$E = \frac{1}{\sigma S} I.$$

Проинтегрировав обе части этого равенства по длине провода  $l$ , получим, учитывая постоянство величин  $\sigma$ ,  $S$ ,  $I$  вдоль провода,

$$\varphi(l) - \varphi(0) = \frac{l}{\sigma S} I. \quad (17.7)$$

Это и есть закон Ома в интегральной форме, поскольку падение напряжения  $U = \varphi(l) - \varphi(0)$ . Для сопротивления  $R$  получим

$$R = \frac{l}{\sigma S}. \quad (17.8)$$

Формулы (17.7) и (17.8) применимы не только к прямым, но и изогнутым проводам постоянного сечения.



Сопротивление в системе СИ измеряется в омах (Ом):  $1 \text{ Ом} = 1 \text{ В/А}$ . Отсюда следует, что удельное сопротивление  $\rho$  измеряется в единицах Ом·м, а удельная проводимость  $\sigma$  — в единицах (Ом·м) $^{-1}$ .

Выражающее закон Ома уравнение (17.5) принадлежит к материальным уравнениям макроскопической электродинамики. Материальные уравнения усредненно описывают влияние электрического и магнитного полей на вещество. Закон Ома (17.5) называется первым материальным уравнением.

В заключение этого пункта рассмотрим тепло, выделяющееся при прохождении тока через вещество. Из § 15.4 мы знаем, что в единичном объеме мощность работы электрического поля над током равна ( $jE$ ). В стационарном режиме эта мощность затрачивается на выделение тепла, поскольку скорость носителей не меняется. Применяв закон Ома, получим, что в единичном объеме за единицу времени выделяется тепловая энергия

$$(jE) = \sigma E^2. \quad (17.9)$$

Это соотношение называется *законом Джоуля — Ленца в локальной формулировке*. Выделяемое при прохождении тока тепло называется джоулевым.

2. Закон Ома применим в тех случаях, когда удельная проводимость  $\sigma$  в (17.5) не зависит от внешнего поля и определяется только свойствами среды. Из соотношения (17.6), связывающего макроскопическую величину  $\sigma$  с микроскопическими, видно, что для выполнения закона Ома необходимо, чтобы внешнее поле не влияло ни на время релаксации носителей  $\tau_{\pm}$ , ни на их концентрации  $n_{\pm}$ . Следующие обстоятельства делают величины  $\tau_{\pm}$  и  $n_{\pm}$  устойчивыми по отношению к влиянию внешнего поля. В твердых телах, в жидкостях и даже в не очень разреженных газах расстояния между соседними частицами микроскопически малы. Поэтому носитель эффективно тормозится на микроскопически малых расстояниях. Это не позволяет ему приобрести энергию порядка тепловой. По этой причине, во-первых, общее распределение носителей по скоростям оказывается мало отличающимся от равновесного (т. е.  $m v_d^2 / 2 \ll kT$ ). Из-за этого время релаксации, как статистическое свойство, очень слабо зависит от величины внешнего поля. Во-вторых, если носитель не успевает приобрести от поля достаточно высокую энергию (до ее передачи нейтральным частицам), то при столкновении с нейтральной частицей носитель не может ее ионизировать и тем самым увеличить концентрацию носителей. Из-за этих двух обстоятельств *закон Ома является чрезвычайно широкой*. Этот закон выполняется для большинства газов, жидкостей и твердых тел в больших диапазонах варьирования

значений внешнего поля, давления и температуры. Кроме того, закон Ома оказывается применимым не только к стационарным, но и к переменным токам, причем тоже в широком диапазоне частот.

Приведем некоторые оценки в отношении применимости закона Ома. Рассмотрим газ при нормальных условиях (т. е. при комнатной температуре  $T \approx 300$  К и при атмосферном давлении). В таком газе свободный пробег имеет порядок  $l \approx 10^{-7}$  м. Типичным носителем тока в газе является однозарядный (т. е. несущий один элементарный заряд  $q_0 = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл) положительный ион. Такой ион во внешнем поле  $E$  приобретает на протяжении свободного пробега дополнительную энергию порядка  $q_0 E l$ . Для этого чтобы усредненные свойства этого иона (в частности,  $\tau_+$ ) заметно отличались от тех же свойств в отсутствие поля, необходимо, чтобы энергия  $q_0 E l$  была сравнима или больше характерной тепловой энергии  $kT$  ( $k$  — постоянная Больцмана, равная  $1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К):  $q_0 E l \gtrsim kT$ . Другими словами, внешнее поле  $E$  должно стать порядка характерного поля  $E_0 = kT/q_0 l = 10^4$  В/м. Только при  $E \geq E_0$  время релаксации  $\tau_+$  начнет существенно зависеть от внешнего поля. Поля порядка  $E_0$  (и даже выше) достижимы в современных лабораториях, но считаются очень сильными. Для того чтобы энергия  $q_0 E l$  оказалась достаточной для ионизации нейтральной частицы при ее столкновении с ионом, необходимы поля, превышающие  $E_0$  на 2—3 порядка.

В отношении применимости закона Ома к переменным полям (и, соответственно, токам) характерной величиной является  $\omega \tau$ , где  $\omega$  — частота (круговая) поля. Если  $\omega \tau \ll 1$ , то за время релаксации поле не успевает сильно измениться. Поэтому процесс релаксации идет практически так же, как и в постоянном поле, так что закон Ома соблюдается. Если же величина  $\omega \tau \geq 1$ , то релаксация не успевает происходить за характерное время изменения поля. В этом случае закон Ома нарушается. Реакция носителей тока на наложенное внешнее поле с увеличением частоты вообще перестает зависеть от свойств среды. Поскольку времена релаксации обычно очень малы, то область частот, в которой применим закон Ома, как правило, велика. Так, в металлах переменные токи подчиняются закону Ома вплоть до частот порядка  $10^{13}$  Гц. Этот предел лишь на порядок ниже низкочастотной границы видимого света.

Закон Ома применим не только к проводникам, но и к диэлектрикам, в которых очень мала проводимость.

*Закон Ома не принадлежит к числу фундаментальных. Однако его исключительно обширная область применимости к явлениям, интенсивно используемым в науке и технике, делает этот закон одним из важнейших в физике в целом.*

Для многих целей необходимы системы, в которых закон Ома не выполнялся бы даже для слабых полей. В частности, элементы с резкими нарушениями закона Ома необходимы для электроники, одной из важнейших задач которой является преобразование одних сигналов в другие, качественно отличные от исходных. На основе же линейного закона Ома можно осуществлять только линейные преобразования сигналов, не меняющие их формы.

С точки зрения микроскопического механизма электрического тока ясно, что существуют две принципиальные возможности создания физических систем, в которых закон Ома не выполняется для слабых электрических полей.

Первый путь состоит в создании физических условий, при которых концентрация носителей резко зависит от величины и от направления поля. Эта возможность используется в полупроводниковых устройствах, которые будут рассмотрены в томе III.

Второй путь состоит в устранении (или хотя бы подавлении) процесса релаксации упорядоченного движения носителей. Эта возможность в чистом виде осуществляется в сверхпроводящих материалах, в которых электрическое сопротивление равно нулю, так что внешний кольцевой ток в таком материале, возникнув, существует неограниченно долго при отсутствии внешнего поля. Явление сверхпроводимости также будет рассмотрено в томе III.

Комбинация обеих возможностей используется, например, в электронных лампах. Простейшей из них является диод. Диод — это вакуумная двухэлектродная лампа, схематически изображенная на рис. 17.1. Носителями тока в этой лампе являются электроны, которые испускаются разогретым катодом по механизму термоэлектронной эмиссии. Если разность потенциалов анода и катода положительна, то диод пропускает через себя электрический ток. При отрицательной разности потенциалов ток в лампе прекращается, так как электроны отбрасываются полем от анода назад. В этом случае говорят, что диод заперт. Таким образом, диод обладает односторонней проводимостью, которая свидетельствует о том, что ни о какой линейной связи между полем и плотностью тока в диоде говорить не приходится. Именно благодаря этому свойству диод и используется для выпрямления переменных токов: он пропускает только ту часть тока, которая создается движением электронов от катода к

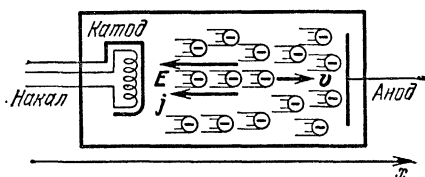


Рис. 17.1.

аноду.

Дополнительные нелинейные свойства диода обусловлены образованием в лампе так называемого пространственного заряда, который оказывает влияние на поле в лампе и на движение самих электронов. Физическая природа этой нелинейности в конечном итоге заключается в том, что электроны создают электрическое поле, влияющее на их собственное движение.

Проанализируем стационарную электропроводность в диоде детальнее. Для упрощения задачи предположим, что электроды диода являются плоскими, параллельными друг другу и что их размер намного превосходит разделяющее электроды расстояние. Тогда задачу о действии диода можно считать одномерной. В этом случае при выборе системы отсчета с осью  $x$ , ориентированной по нормали к электродам, а) все векторные величины задачи будут коллинеарными оси  $x$ , б) все величины будут функциями только одной координаты  $x$ . Ниже единственные отличные от нуля компоненты плотности тока, поля и скорости дрейфа электронов будут обозначаться через  $j$ ,  $E$ ,  $v_d$ . Если ось  $x$  выбрана так, как это показано на рис. 17.1, то  $j < 0$ ,  $E < 0$ , а  $v_d > 0$ .

Примем, что потенциал катода равен нулю:  $\varphi(0) = 0$ , а потенциал анода  $\varphi_0 > 0$ . Из одномерного стационарного уравнения непрерывности  $dj(x)/dx = 0$  находим, что  $j = \text{const}$ . Но  $j = \rho v_d$ , где  $\rho$  — плотность электронов ( $\rho < 0$ ). Поэтому плотность электронов на расстоянии  $x$  от катода связана со скоростью их дрейфа в том же месте равенством  $\rho(x) = j/v_d(x)$ . Следовательно, уравнение для потенциала поля в диоде приводится к виду

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(x) = \frac{|j|}{\epsilon_0 v_d(x)}.$$

Примем теперь во внимание следующее обстоятельство. Если разность потенциалов между катодом и анодом равна нулю ( $\varphi_0 = 0$ ), то скорости электронов, только что испущенных разогретым катодом, определяются его температурой. В реальных диодах эта температура соответствует примерно 0,1 эВ. Поэтому, если приложенный к аноду потенциал  $\varphi_0$  заметно превосходит 0,1 В, то можно считать, что сразу же после вылета электроны имеют нулевую скорость. Мы примем это условие, потому что в действительности оно выполняется очень часто. Поскольку мы теперь считаем, что  $v_d(0) = 0$ , то надо также потребовать выполнения равенства  $E(0) = -d\varphi(0)/dx = 0$ . В противном случае скорость дрейфа электронов непосредственно у катода будет отлична от нуля. Из закона сохранения энергии

$$\frac{m_e v_d^2(x)}{2} - q_0 \varphi(x) = \frac{m_e v_d^2(0)}{2} - q_0 \varphi(0) = 0$$

находим, что

$$v_d(x) = \left[ \frac{2q_0}{m_e} \varphi(x) \right]^{1/2}.$$

Здесь  $m_e$  — масса одного электрона, а  $-q_0$  — его заряд ( $q_0 > 0$ ). В результате получается такое уравнение:

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = \frac{|j|}{\epsilon_0} \left[ \frac{2q_0}{m_e} \varphi(x) \right]^{-1/2}.$$

Из вида этого уравнения следует, что если функция  $\varphi(x)$  степенная, то левая и правая части тоже будут степенными функциями. Поэтому ищем решение в виде

$$\varphi(x) = Ax^n,$$

где  $A$ ,  $n$  — константы. Подставив это выражение для  $\varphi(x)$  в уравнение, получим, что решением является функция

$$\varphi(x) = \left( \frac{9 |j| m_e}{8 q_0 \epsilon_0} \right)^{2/3} x^{4/3}.$$

Дифференцированием находим поле  $E = -d\varphi(x)/dx$ :

$$E(x) = -\frac{4}{3} \left( \frac{9 |j| m_e}{8 q_0 \epsilon_0} \right)^{2/3} x^{1/3}.$$

Мы видим, что зависимость между  $E$  и  $j$  существенно нелинейна, так что закон Ома не соблюдается даже для слабых полей.

3. Величина удельной проводимости варьируется в очень широких пределах в зависимости от рода вещества и его состояния. По величине проводимости все материалы подразделяются на три основных категории: *проводники*, *диэлектрики* и *полупроводники*. Проводниками называют вещества, хорошо проводящие электрический ток. Диэлектрики практически тока не проводят. Полупроводники занимают промежуточное положение. По рис. 17.2 можно составить представление о том, насколько вещества различаются по проводимости. На рис. 17.2 представлены зависимости удельной проводимости от температуры для чистой меди (проводник), чистого кремния (полупроводник) и стекла (диэлектрик). По порядку перечисления — верхняя, средняя и нижняя кривые. Мы видим, что при комнатной температуре проводимость меди почти на двадцать порядков превышает проводимость стекла и на пятнадцать порядков проводимость кремния!

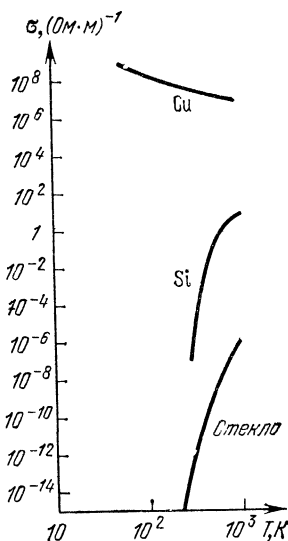


Рис. 17.2.

Наилучшими проводниками являются металлы и их сплавы. Для них  $\sigma > 10^6$   $(\text{Ом}\cdot\text{м})^{-1}$ . В металлах характерным свойством атомов является отрыв от каждого атома одного или нескольких электронов, происходящий при сближении многих атомов. При температуре ниже точки плавления оставшиеся после отрыва положительные ионы образуют кристаллическую структуру, в которой движутся оторвавшиеся электроны. Эти электроны называются свободными или электронами проводимости. Они и являются основными носителями тока в металлах.

Удивительным свойством ионной решетки металлов является ее высокая прозрачность для электронов проводимости, почему

металлы и оказываются хорошими проводниками. О прозрачности ионной решетки можно судить по таким данным. Измеренная на опыте проводимость натрия равна  $6,3 \cdot 10^7$  (Ом·м)<sup>-1</sup>. В одном кубическом метре этого металла в среднем содержится  $2,5 \cdot 10^{28}$  электронов проводимости. В сравнении с электронами число других носителей тока ничтожно мало. Полностью пренебрегая ими, из определения подвижности и из (17.6) получаем такую оценку ( $q_- = q_0 = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл,  $m_- = m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$  кг) для времени релаксации:

$$\tau_- = \frac{6,3 \cdot 10^7 \text{ (Ом} \cdot \text{м)}^{-1} \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}}{(1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл})^2 \cdot 2,5 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}} \approx 3 \cdot 10^{-14} \text{ с.}$$

В микроскопическом масштабе времени эта длительность необычайно велика. Действительно, при комнатной температуре тепловая скорость электрона равна примерно  $10^5$  м/с. Двигаясь с такой скоростью, за время  $\tau \approx 3 \cdot 10^{-14}$  с электрон проводимости проходит путь около 30 А. На этом расстоянии укладывается примерно 10 ионов решетки. Итак, в натрии движение каждого свободного электрона разупорядочивается только после 10 встреч с ионами кристаллического остова. Классическими законами объяснить это совершенно невозможно. В решетке металлов ионы практически соприкасаются друг с другом и, следовательно, по классическим законам должны очень сильно мешать движению электронов проводимости. На самом деле из квантовых законов получается, что движению электронов проводимости в металле мешают только тепловые колебания ионов решетки, а также нарушения ее правильности (дефекты).

Отметим, что в макроскопическом масштабе время релаксации электронов проводимости металлов очень незначительно. Поэтому для металлов закон Ома выполняется в весьма широком диапазоне переменных токов. Так, колебания тока в натрии подчиняются закону Ома вплоть до частот порядка  $\nu = 1/\tau_- \approx 3 \cdot 10^{13}$  Гц.

Проводимость полупроводников варьируется в пределах  $10^{-8}$  (Ом·м)<sup>-1</sup> <  $\sigma$  <  $10^6$  (Ом·м)<sup>-1</sup>. Электропроводность этих материалов также имеет электронную природу, но у нее есть свои особенности, качественно (а не только количественно — по величине проводимости), отличающие их от проводников. Об этом мы также подробно расскажем в последнем томе курса.

Перенос зарядов может осуществляться не только электронами. Если он обеспечивается ионами или ионами и электронами совместно, то говорят, соответственно, об *ионной* и о *смешанной проводимости*. Вещества, обладающие высокой ионной проводимостью, называются *электролитами* или *ионными проводниками*. К их числу относятся, например, расплавы солей,

которые в твердом состоянии являются ионными кристаллами (в узлах решетки находятся положительные и отрицательные ионы). Очень часто термин «электролит» применяется в узком смысле только к веществам, которые в растворенном состоянии состоят из ионов.

Проводимость ионных проводников заметно ниже металлических. Так, при комнатной температуре 20-процентный раствор поваренной соли в воде имеет проводимость  $19,5 \text{ (Ом}\cdot\text{м)}^{-1}$ . Сравнительно низкая проводимость растворов электролитов объясняется малой подвижностью ионов, обладающих несравненно большей, чем электроны, массой.

В отличие от металлов и полупроводников, прохождение электрического тока через раствор электролита сопровождается химическими превращениями.

Вот как это происходит, например, в водном растворе серной кислоты. Каждая молекула воды имеет электрический дипольный момент. В растворе молекула  $\text{H}_2\text{SO}_4$  (серная кислота) оказывает ориентирующее действие на дипольные моменты молекул воды. В левой части рис. 17.3 показано,

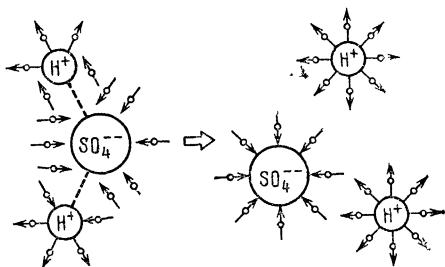
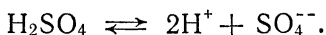


Рис. 17.3.

каким образом ведут себя молекулярные диполи воды вблизи молекулы  $\text{H}_2\text{SO}_4$ . Каждая стрелка с кружком в центре изображает дипольный момент одной молекулы воды. Создаваемое ориентированными дипольными моментами молекул воды электрическое поле оказывается столь большим, что разрывает молекулу  $\text{H}_2\text{SO}_4$  на ионы: два однозарядных иона водорода  $\text{H}^+$  и двузарядный отрицательный ион  $\text{SO}_4^{2-}$ , возникающие в результате реакции:



Говорят, что молекула  $\text{H}_2\text{SO}_4$  диссоциирует на ионы  $\text{H}^+$  и  $\text{SO}_4^{2-}$ . *Диссоциацией* вообще называется распад молекулы на ионы. Участвуя в тепловом движении, ионы  $\text{H}^+$  и  $\text{SO}_4^{2-}$  могут сталкиваться друг с другом. При этом они могут снова объединяться в молекулу  $\text{H}_2\text{SO}_4$ . Этот процесс является обратным диссоциации и называется *рекомбинацией*. Протекание в водном растворе серной кислоты процессов диссоциации и рекомбинации в записанном выше выражении отмечено двумя стрелками, направленными противоположно друг другу. При равновесии число диссоциирующих и вновь возникающих молекул  $\text{H}_2\text{SO}_4$  в среднем одинаково за любой промежуток времени.

При не слишком высоких температурах возникшие при диссоциации ионы окружены «прилипшими» к ним молекулами воды (см. правую часть рис. 17.3). В водных растворах возникновение таких групп называется *гидратацией*, а каждая группа — *гидратом*. Если растворитель не вода, то аналогичное явление называется *сольватацией*, а образующиеся группы — *сольватами*. С повышением температуры устойчивость сольватов (гидратов) снижается. Их размеры уменьшаются. При достаточно высоких температурах сольватные (гидратные) оболочки ионов исчезают вовсе.

Допустим теперь, что в растворе серной кислоты создано электрическое поле. Пусть это сделано путем введения в раствор

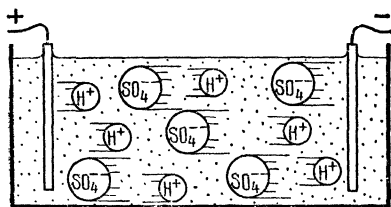
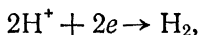


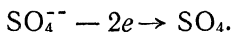
Рис. 17.4.

двух электродов, находящихся под разными потенциалами. В этих условиях ионы  $H^+$  водорода начинают дрейфовать к электроду с меньшим потенциалом, т. е. к катоду, а ионы  $SO_4^{2-}$  — в обратную сторону, т. е. к аноду (рис. 17.4). Поэтому положительные ионы типа  $H^+$  называются *катионами*,

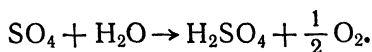
а отрицательные ионы типа  $SO_4^{2-}$  — *анионами*. Их упорядоченное движение и создает электрический ток. Особенностью его протекания являются сопутствующие ему химические превращения, происходящие на катоде и аноде. Эти превращения следующие. На катоде



а на аноде



Здесь  $e$  обозначает электрон. В первом случае ионы  $H^+$  нейтрализуются, забирая электроны с катода. Во втором случае нейтрализация иона  $SO_4^{2-}$  осуществляется путем передачи им электронов аноду. Молекулярный водород выделяется вблизи катода в виде газовых пузырьков. Комплекс  $SO_4$  химически очень активен. Он вступает в химические реакции либо с растворителем, либо с веществом анода. Например, если электроды сделаны из платины или никеля, то  $SO_4$  реагирует только с растворителем, т. е. с водой. При этом выделяется кислород:



Образующиеся в такой реакции молекулы  $H_2SO_4$  поступают в раствор, а молекулярный кислород выделяется в виде газовых пузырьков на аноде.



Разобранный выше пример выявляет общие черты электропроводности в растворах электролитов. Нейтрализующиеся ионы либо выделяются на электродах, либо вступают в химические реакции с растворенным веществом или с растворителем. Эти реакции называются вторичными. Их продукты либо выделяются на электродах, либо переходят в раствор электролита. В результате электрический ток вызывает химическое разложение раствора электролита. Это явление называется *электролизом*. Химические превращения, происходящие в системах с электрическим током, изучаются в *электрохимии*.

Законы электролиза были установлены в 1834 г. М. Фарадеем и названы его именем. Они были открыты опытным путем. В наше время микроскопическая природа электролиза хорошо известна. Поэтому законы Фарадея представляются самоочевидными. Первый закон Фарадея гласит:

*Количество выделившегося при электролизе вещества пропорционально заряду, прошедшему через электролит.*

Если количество вещества измеряется массой, то константа пропорциональности называется *электрохимическим эквивалентом*. Второй закон Фарадея утверждает, что

*электрохимический эквивалент каждого вещества пропорционален отношению его молярной массы к валентности.*

Введем такие обозначения:  $K$  — электрохимический эквивалент,  $M$  — молярная масса, а  $Z$  — валентность вещества. Тогда выражением второго закона Фарадея является равенство

$$K = \frac{1}{F} \frac{M}{Z}.$$

В нем  $1/F$  — коэффициент пропорциональности. Постоянная  $F$  называется *числом Фарадея*.

Оба закона Фарадея выражаются формулой

$$m = \frac{1}{F} \frac{M}{Z} q,$$

в которой  $m$  — масса вещества, выделившегося при прохождении заряда  $q$ . При  $q$ , численно равном  $F$ , имеется числовое совпадение  $m$  с  $M/Z$ . Последнюю величину принято именовать *химическим эквивалентом*. Мы видим, что для выделения на электроде массы вещества, численно равной химическому эквиваленту, через раствор электролита необходимо пропустить один и тот же заряд, численно равный  $F$ . Опытным путем установлено, что

$$F = 96,485 \cdot 10^6 \text{ Кл/моль.}$$

Открытие М. Фарадеем законов электролиза сыграло важную роль в установлении атомизма электричества. Это можно пояснить такими соображениями. Масса вещества, численно равная его химическому эквиваленту, содержит  $N_A/Z$  частиц, где  $N_A$  — число Авогадро (см. (8.1) тома I). Следовательно,  $N_A/Z$  ионов переносят заряд, численно равный  $F$ . Поэтому на долю каждого иона приходится заряд  $FZ/N_A$ . Мы видим, что он кратен заряду  $F/N_A$ . Подстановкой сюда значений  $F$  и  $N_A$  легко убедиться в том, что  $F/N_A$  численно совпадает с элементарным зарядом (см. с. 26 этого тома). Это подтверждает правильность изложенного механизма электролиза,

Проводимость диэлектриков ничтожно мала:  $\sigma < 10^{-8} \text{ (Ом}\cdot\text{м)}^{-1}$  \*). В газообразных диэлектриках электропроводность носит смешанный характер. В них носителями тока являются и электроны, и ионы. Они обычно образуются в газах под действием внешних ионизирующих излучений. Так, в земной атмосфере ионизацию атмосферных газов вызывают космические лучи, электромагнитное излучение, радиоактивные загрязнения и др. При нормальных условиях проводимость воздуха колеблется в пределах  $10^{-15}$ — $10^{-17} \text{ (Ом}\cdot\text{м)}^{-1}$ .

Электропроводность газов имеет свойство, называемое *насыщением тока*. Насыщение тока проявляется в том, что ток перестает зависеть от величины приложенного поля, начиная с некоторого его значения. Это свойство представляет собой одно из нарушений закона Ома.

Механизм явления насыщения тока состоит в следующем. Под действием ионизирующих источников концентрация носителей растет с конечной скоростью. Если величина приложенного поля такова, что все образующиеся в единицу времени свободные заряды за тот же промежуток времени отводятся полем из газа, то с дальнейшим возрастанием поля ток в газе уже расти не может. Это и есть режим насыщения. В нормальных условиях он реализуется при полях порядка  $10$ — $10^2 \text{ В/м}$ . При этом возникают токи ничтожной плотности, колеблющейся в пределах от  $10^{-13}$  до  $10^{-16} \text{ А/м}^2$ .

Электропроводность в режиме насыщения может существовать при возрастании поля только до определенного предела. Если поле достигает достаточно больших значений, то наступает *ударная ионизация*. Суть этого явления состоит в том, что ускоренные полем уже имеющиеся носители тока начинают создавать новые носители. Это происходит в результате столкновений электронов с электронейтральными молекулами газа (электронный удар), ионов с веществом сосуда, в котором газ находится, а также в результате взаимодействия электромагнитного излучения, которое всегда сопутствует ударной ионизации, со стенками и с молекулами газа. Отличительной чертой всех этих процессов является их лавинообразный характер: возникающие новые носители тока тут же увлекаются полем и в свою очередь принимают участие в создании новых носителей тока.

---

\*) Следует иметь в виду, что указанные выше пределы изменения проводимости проводников, полупроводников и диэлектриков в значительной степени условны, поскольку под действием внешних факторов многие материалы существенно изменяют свою проводимость. Так, проводимость полупроводников очень чувствительна к действию света. Мы объясним это явление в последнем томе курса. Проводимость металлов, наоборот, совсем нечувствительна к световому воздействию.

В результате ударной ионизации резко возрастает ток. Образуется газовый разряд, так что газ превращается в проводник — *плазму*. По способу образования ее называют газоразрядной. Точное определение плазмы будет дано в § 18.1. Пока мы ограничимся такой формулировкой: плазма — это ионизированный газ с достаточно высокой концентрацией заряженных частиц.

Отметим, что плазма может быть получена не только путем газового разряда. Ионизацию вызывают и высокоэнергичные тепловые столкновения. Их много, если температура газа достаточно высока — порядка  $10^5$  К и выше (см. § 8.4 тома I). Образование электронов и ионов в достаточно разогретом газе называется *термоионизацией*. Такая плазма называется «низкотемпературной» \*).

Вернемся к газовому разряду. Так как при ударной ионизации число носителей тока возрастает с увеличением поля, то в этих условиях газ не подчиняется закону Ома. Действие этого закона восстанавливается только после исчерпания резервов роста количества носителей тока, т. е. при достижении степени ионизации (степень ионизации — это доля ионизированных частиц от всего их числа) порядка единицы. Другими словами, закон Ома снова становится справедливым после того, как газ превратится в полностью ионизованную плазму.

При ударной ионизации нарастание тока происходит сначала в условиях *несамостоятельного разряда*. Такой разряд для своего поддержания требует непрерывного действия внешнего ионизатора. Дело в том, что помимо процессов ионизации идут и обратные им процессы рекомбинации, в результате которых происходит рекомбинация заряженных частиц в электронейтральные комплексы. Например, при определенных условиях \*\*) положительно заряженный ион, повстречав должное число электронов, может образовать нейтральный атом. Очевидно, что если в единицу времени в каждом единичном объеме газа число рекомбинирующих зарядов в среднем превышает число вновь образующихся в результате ударной ионизации, то разряд возможен только при наличии внешнего ионизирующего фактора, компенсирующего убыль зарядов. При возрастании поля в конце концов наступает пробой газа, и самостоятельный разряд переходит в *самостоятельный*. Поддержание такого разряда уже не требует внешних ионизирующих источников: разряд поддерживается самим полем. Ударная ионизация становится столь интенсивной, что процессы рекомбинации не успевают поддерживать постоянно концентрацию носителей. Величина поля, при

---

\*) Высокотемпературной считается термоядерная плазма,

\*\*\*) См. § 18.1.

которой происходит пробой газа, зависит от ряда причин: от химической природы газа и его состояния, формы и взаимного расположения введенных в газ электродов. Например, если электроды имеют шарообразную форму, то в воздухе при нормальных условиях пробой происходит при разности потенциалов на электродах порядка  $10^5$  В, при радиусе электродов 5 см каждый и расстоянии между центрами электродов порядка 20 см (зазор около 10 см). Если же радиус уменьшить до 2,5 см и расстояние между центрами электродов сократить до 11 см (зазор около 1 см), то пробой воздуха происходит уже при разности потенциалов, близкой к  $3,5 \cdot 10^4$  В.

В жидких диэлектриках электропроводность имеет ионный характер и, кроме того, может быть обусловлена присутствием макроскопических взвешенных частиц. Такие частицы принято называть *коллоидными*. Характерным свойством коллоидных частиц является то, что на их поверхности всегда есть заряды. Поэтому такие частицы также являются своеобразными носителями тока. Жидкость, содержащая коллоидные частицы, всегда имеет повышенную проводимость. С повышением температуры проводимость жидкостей возрастает. Происходит это в результате увеличения подвижности носителей тока вследствие усиления теплового движения. Электрическая прочность жидких диэлектриков обычно больше, чем газов. Механизм пробоя сильно зависит от степени загрязнения жидкости различными примесями. Электропроводность приводит к локальному разогреву жидкости вблизи различных включений. В результате происходит вскипание жидкости, образование газовых каналов и их электрический пробой. Пробой обычных технических диэлектрических жидкостей происходит при полях порядка  $10^7$  В/м. Если жидкость подвергается тщательной очистке, то электрическая прочность жидкого диэлектрика повышается приблизительно на порядок. Механизм пробоя очищенных жидких диэлектриков изучен пока недостаточно. В настоящее время считается, что так же, как и в газах, пробой наступает вследствие ударной ионизации.

Электропроводность твердых диэлектриков при повышенных и высоких температурах (выше комнатной, но ниже точки плавления) имеет ионный характер: в качестве носителей тока чаще всего выступают легкие ионы щелочных металлов. Эти ионы либо входят в кристаллическую решетку, либо содержатся в ее междоузлиях. Ионная электропроводность твердых диэлектриков обусловлена либо перескоками ионов из узлов решетки в близлежащие вакансии, либо движением междоузельных ионов (см. § 13.2 тома I). С увеличением температуры ионная проводимость твердых тел резко возрастает, поскольку увеличивается вероятность вырывания ионов из мест их пребывания. При низ-

ких температурах, при которых подвижность ионов практически падает до нуля, в создании тока участвуют только электроны. Их, конечно, очень немного, так что обусловленная ими проводимость имеет ничтожную величину.

В аморфных средах проводимость преимущественно носит ионный характер. Так, в стеклах она обеспечивается ионами натрия и калия. В смолах и полимерах подвижными, как правило, оказываются ионы различных примесей.

Пробой твердых диэлектриков происходит следующим образом. В сильных электрических полях, близких по своему значению к  $10^8$  В/м, ток через твердый диэлектрик не подчиняется закону Ома. Оказывается, что ток экспоненциально возрастает с увеличением разности потенциалов приложенных к диэлектрику электродов. Поэтому с увеличением поля резко усиливается разогрев вещества током. Так как проводимость твердых диэлектриков увеличивается с ростом температуры, то разогрев приводит к дальнейшему росту тока, что в свою очередь усиливает разогрев. Ток снова возрастает, опять увеличивается тепловыделение, и все это будет неуклонно развиваться, если тепловыделение будет превышать теплоотвод. Такое лавинообразное возрастание тока приводит к *термическому пробую*, при котором диэлектрик разрушается. Возможен и *электрический пробой*. Он происходит в результате резкого возрастания числа носителей тока под действием поля до нарушения теплового равновесия вещества диэлектрика. В достаточно сильных полях возможны процессы, сопровождающиеся переходом подвижных зарядов из вещества электродов в диэлектрик, а также ударная ионизация электронами.

4. Установим условия, необходимые для поддержания тока в проводнике. Пусть по металлическому проводнику  $AB$  (рис. 17.5) идет линейный ток по направлению от сечения  $A$  к сечению  $B$ . Тогда для поддержания стационарной картины нужно отводить положительные заряды от сечения  $B$  и подводить их к сечению  $A$ . Для того чтобы заряд нигде не накапливался, проводник  $AB$  должен быть включен в замкнутую цепь. Кроме того, в цепь должен быть включен *источник тока*

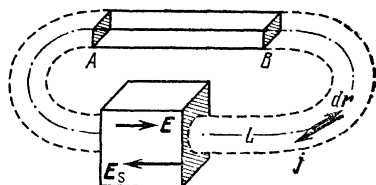


Рис. 17.5.

*Источником тока является устройство, которое поддерживает движение носителей и передает им энергию, компенсируя потери энергии, обусловленные выделением в цепи джоулева тепла*

На рис. 17.5 дополнение проводника  $AB$  до замкнутой цепи указано пунктиром, контур тока  $L$  — штрихпунктирной линией, а источник тока изображен в виде куба.

Источник тока обладает важным свойством, наличие которого можно установить, вычислив циркуляцию электрического поля  $\mathbf{E}$  по контуру  $L$ . В стационарном случае согласно второму уравнению Максвелла (15.8) будет

$$\oint_L (\mathbf{E} \, d\mathbf{r}) = 0.$$

В проводнике согласно закону Ома (17.5) поле  $\mathbf{E}$  не меняет своей ориентации относительно контура  $L$ , оставаясь направленным по касательной к контуру. Поэтому вклад в написанный выше интеграл от участков  $L$ , проходящих внутри проводников, всегда отличен от нуля. Пусть он отрицателен (это означает, что вне источника тока поле  $\mathbf{E}$ , как и плотность тока  $\mathbf{j}$ , и элемент контура  $d\mathbf{r}$  имеют противоположное направление (рис. 17.5)). Этот вклад может быть компенсирован только интегралом по участку  $L$ , проходящему внутри источника тока. Интеграл по этому участку, очевидно, должен быть положительным. Но это означает, что

*внутри источника тока электрический ток течет против электрического поля.*

Отсюда следует, что на носитель заряда в источнике тока действует дополнительная сила  $\mathbf{F}_s$ , имеющая неэлектростатическое происхождение. Любые силы неэлектростатического происхождения, действующие на носители в проводниках, называются *сторонними силами*. Если стороннюю силу разделить на заряд  $q$  носителя, то получится вектор, обозначаемый через  $\mathbf{E}_s$  и называемый *полем сторонней силы*:

$$\mathbf{E}_s = \frac{\mathbf{F}_s}{q}.$$

Типичные виды сторонних сил будут описаны в следующем параграфе.

Сформулируем теперь установленное выше свойство источника тока.

*В любом источнике тока существует поле сторонней силы, которое при включении источника в цепь создает ток, направленный против электрического поля в источнике.*

На рис. 17.5 изображены оба поля. Очевидно, что должно быть  $E_s > E$ , иначе носители не пройдут через источник.

Обобщим теперь закон Ома на случай наличия сторонних сил. Уравнение движения носителя в присутствии сторонней

силы приобретает вид (ср. (17.2))

$$m \frac{dv}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{E}_s) - \frac{mv}{\tau}.$$

Повторяя рассуждения, проведенные при выводе (17.5), получим

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_s). \quad (17.10)$$

Это соотношение при  $\sigma$ , не зависящем от  $\mathbf{E}$ , выражает *обобщенный закон Ома*, справедливый при наличии сторонних сил.

## § 17.2. Электрические поля и однородные металлические проводники в равновесных состояниях

1. Главная особенность всех систем, состоящих из вещества и электрического поля, заключается в следующем. Наложенное внешнее поле меняет распределение зарядов внутри вещества. Эти перераспределенные заряды создают дополнительное поле, которое также действует на заряды. Это означает, что даже при решении стационарных задач ни поля, ни распределения зарядов нельзя считать заданными. Заданными можно считать, например, полные заряды изолированных проводников, а возникающие стационарные распределения полей и зарядов надо определять, решая задачу о взаимодействии полей с зарядами.

В этом и следующем параграфах будут рассмотрены задачи о системах, состоящих из твердых металлических проводников и электрического поля. Твердость проводника означает, что он не деформируется силами, создаваемыми электрическими телами. Металлический характер проводника означает, что носителями являются электроны, имеющие высокую концентрацию и обладающие большой подвижностью. Нас будет интересовать в основном макроскопическая картина, т. е. поля и плотности, усредненные по физически бесконечно малому объему.

Мы уже знаем, что носители тока являются свободными частицами внутри проводника, но не могут пересекать его границу. Из опытных фактов следует, что последнее свойство не является абсолютным: если сообщить носителю достаточно высокую энергию, то он может вылететь из проводника. Например, если достаточно сильно нагреть поверхность металла, то из нее начинают вылетать электроны. Физической величиной, определяющей, насколько прочно носители удерживаются внутри проводника, является *работа выхода*.

*Работой выхода* любой микрочастицы из вещества называется минимальная энергия, необходимая для удаления этой частицы из вещества. Величина работы выхода зависит от рода

вещества, от его термодинамического состояния, от состояния поверхности, а также от вида частицы.

Здесь нас будет интересовать только работа выхода электрона из металлического проводника, которая для краткости будет называться просто работой выхода.

Величина работы выхода не превышает нескольких эВ. Так, для железа она имеет значение около 5 эВ. Влияние состояния поверхности проявляется в том, что работа выхода зависит от способа обработки поверхности и от степени ее загрязненности. Например, нанесенный на поверхность вольфрама слой окисла щелочноземельного металла снижает работу выхода примерно в два-три раза. Простейшая трактовка работы выхода состоит

в том, что по отношению к электрону проводимости в занятом металлом объеме существует потенциальная яма (см. § 3.3 тома I) с плоским дном и почти вертикальными стенками. В левой части рис. 17.6 изображена такая яма  $U(x)$  в одномерном случае (плоская и достаточно большая металлическая пластинка

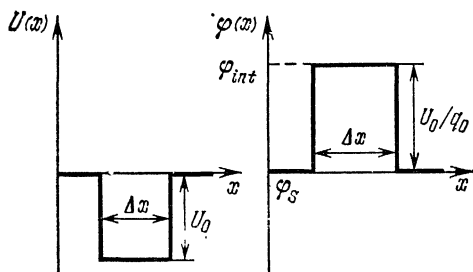


Рис. 17.6.

толщины  $\Delta x$ ; координатная ось  $x$  перпендикулярна плоскости пластинки). Глубина  $U_0$  ямы равна работе выхода. Постоянство  $U(x)$  в промежутке  $\Delta x$  означает, что здесь на носитель силы не действует:  $F = -dU(x)/dx = 0$ . Реально стенки ямы, конечно, не строго вертикальны, а спадают от нуля до  $-U_0$  на протяжении нескольких межатомных расстояний. Если принять, что электрон удерживается в металле чисто электрическими силами, то при переходе через поверхность металла электрический потенциал  $\varphi$  должен испытывать скачок, равный  $A/q_0$ , где  $q_0$  — абсолютная величина заряда электрона, а

$$A = q_0(\varphi_{\text{int}} - \varphi_s). \quad (17.11)$$

В (17.11)  $\varphi_{\text{int}}$  — значение потенциала около внутренней стороны поверхности металла, а  $\varphi_s$  — около наружной (правая часть рис. 17.6).

Сильная зависимость работы выхода от свойств поверхности объясняется тем, что на этой поверхности образуется двойной слой поверхностных зарядов. Непосредственно над поверхностью имеется тонкий слой электронов, а на самой поверхности образуется обедненный электронами тонкий слой положительно



заряженных ионов (рис. 17.7). Поскольку зазор между слоями очень мал, то каждый физически бесконечно малый элемент двойного слоя можно рассматривать как две параллельные заряженные плоскости (см. § 16.2). Поэтому электрическое поле будет существовать только внутри слоя и создавать скачок потенциалов (см. рис. 17.6). Именно этот двойной слой и является чувствительным к состоянию поверхности проводника. Двойной слой имеет толщину в несколько межатомных расстояний, т. е. значительно меньшую линейных размеров в области усреднения по физически бесконечно малому объему. Поэтому в микроскопической картине плотность заряда двойного слоя обращается в нуль, а остается только скачок потенциала.

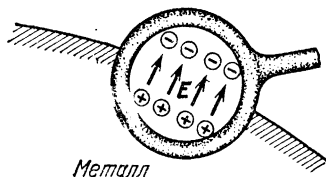


Рис. 17.7.

2. Рассмотрим электрические поля равновесных распределений зарядов на изолированных (не контактирующих друг с другом) однородных металлических проводниках, помещенных в вакуум. Равновесность распределений означает, что везде  $j = 0$ . Следовательно, предметом рассмотрения являются статические электрические поля в системах, содержащих однородные металлические проводники, разделенные пустым пространством. Кроме того, будем считать возможным существование постоянного (во времени) внешнего электрического поля (его источником являются заряды, расположенные вне проводников системы).

Как правило, в системах такого рода электрические поля на поверхности проводников недостаточны для вырывания электронов из металла (о возможном исключении см. конец этого пункта). Поэтому полный заряд каждого проводника можно считать заданным. Существование в проводнике свободных зарядов приводит к следующим свойствам статических полей и потенциалов в системе проводников.

а) *Электрическое поле  $E_{\text{int}}$  во всех точках внутри проводника равно нулю:*

$$E_{\text{int}} = 0. \quad (17.12)$$

Действительно, внутри однородного проводника  $E_s = 0$ , так что справедлив закон Ома (17.5). Поэтому, если в любой точке внутри проводников  $j = 0$ , то там же

$$E_{\text{int}} = 0.$$

б) *Потенциал  $\varphi_s$  на наружной поверхности проводника одинаков во всех точках поверхности:*

$$\varphi_s = \text{const.} \quad (17.13)$$

Поверхность, все точки которой имеют одинаковый потенциал, называется *эквипотенциальной*. Поэтому данное свойство можно сформулировать так:

*наружная поверхность любого однородного проводника, состоящая которого является равновесным, обязательно эквипотенциальна.*

В противном случае вдоль поверхности будет существовать ненулевая компонента  $E_t$  поля  $E$  (рис. 17.8), которая приведет в движение электроны проводимости. Возникнет поверхностный ток, что в статическом случае невозможно.

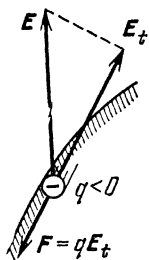


Рис. 17.8.

в) Потенциал  $\varphi_{\text{int}}$  внутри проводника одинаков во всех его точках. Это прямо следует из (17.12) и (16.3). При этом  $\varphi_{\text{int}}$  связан с потенциалом  $\varphi_s$  на наружной поверхности проводника соотношением (17.11).

г) Плотность заряда  $\rho_{\text{int}}$  внутри проводника всюду равна нулю:

$$\rho_{\text{int}} = 0. \quad (17.14)$$

Это свойство является следствием (17.12) и первого уравнения Максвелла (16.1). Согласно (17.14) статические заряды на однородном проводнике распределяются только на его поверхности с некоторой поверхностной плотностью  $\sigma$ .

д) Электрическое поле на внешней поверхности проводника направлено по нормали к поверхности:

$$E = nE_n. \quad (17.15)$$

Величина этого поля пропорциональна поверхностной плотности заряда:

$$E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (17.16)$$

Отсутствие тангенциальной составляющей у поля на поверхности проводника было установлено выше. Для получения (17.16) применим первое уравнение Максвелла (15.8) к бесконечно малому цилиндру, пересекающему поверхность проводника. Основания цилиндра параллельны поверхности проводника, а образующие — перпендикулярны ей (рис. 17.9). Пусть площадь основания цилиндра равна  $dS$ . Так как поле  $E$  параллельно боковой поверхности цилиндра и равно нулю внутри проводника, то  $\int (E dS) = E_n dS$ . Объемный интеграл равен  $\int \rho dV = \sigma dS$ , так что первое уравнение Максвелла (15.8) действительно дает (17.16).

Из свойств (17.12), (17.14) вытекает важное следствие. Для его получения допустим, что внутри проводника образована полость. Согласно (17.14) существование такой полости не повлияет на конфигурацию зарядов и тем самым на электрические поля. Следовательно, внутри полости поле будет отсутствовать. Допустим теперь, что проводник с полостью еще и заземлен.

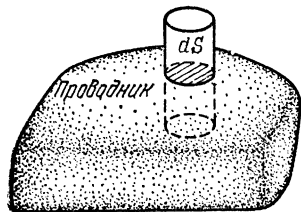


Рис. 17.9.

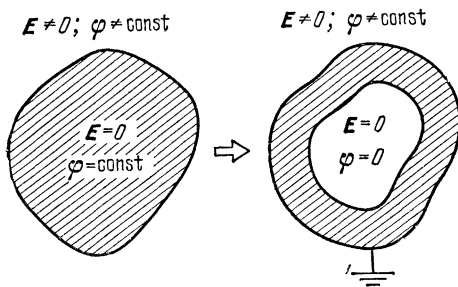


Рис. 17.10.

Тогда потенциал будет нулевым во всех точках полости (рис. 17.10). Тем самым полость будет местом, полностью изолированным от влияния электрических полей, возникающих вне проводника. Изолирование предмета от влияния внешних электрических полей называется *электрической защитой*. Из нашего рассмотрения следует, что защитой является окружение предмета металлической оболочкой. Можно показать (и опыт это подтверждает), что достаточную защиту дает оболочка из металлической сетки с достаточно мелкими ячейками. Кроме того, защита из металлической сетки оказывается эффективной при наличии не только постоянных, но и переменных электрических полей.

Другое важное следствие вытекает из свойств в) и д). Оно состоит в том, что *поверхностная плотность зарядов возрастает на выступах и уменьшается на впадинах поверхности проводника*.

Для пояснения этого свойства рассмотрим одиночный проводник неправильной формы, изображенный на рис. 17.11. Допустим, что внешнее поле отсутствует, а сам проводник положительно заряжен. На очень больших расстояниях от проводника создаваемое им поле (см. § 16.3, п. 2) будет почти таким же, как поле точечного заряда. Следовательно, вдали от проводника эквипотенциальные поверхности будут близки к кон-

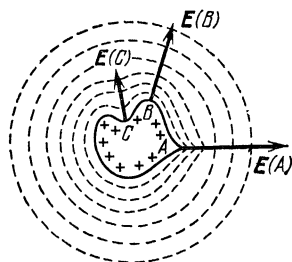


Рис. 17.11.

центрическим сферам. Непосредственно около проводника, согласно свойству в), эквипотенциальной является поверхность проводника. Поэтому, как видно из рис. 17.11, эквипотенциальные поверхности будут сгущены около выступов проводника и разрежены около впадин в нем. Только в этом случае форма эквипотенциальной поверхности будет плавно превращаться из формы, повторяющей поверхность проводника, в сферу по мере удаления от проводника. Но там, где эквипотенциальные поверхности расположены гуще, быстрее изменяется потенциал, а следовательно, больше электрическое поле. Отсюда следует, что на поверхности проводника поле (и согласно (17.16) плотность  $\sigma$ ) на выступах больше, чем на впадинах (рис. 17.11).

Особенно велики электрические поля на металлических остриях. Поле у острия отрицательно заряженного проводника может даже оказаться достаточным для уравнивания работы выхода. В этом случае с острия будут стекать электроны.

Если острие находится не в вакууме, а в атмосфере, то возникает другой, более эффективный механизм стекания заряда, действующий при любом знаке заряда проводника. Электрическое поле вблизи острия сильно неоднородно. В таком неоднородном поле молекулы воздуха деформируются, приобретают дипольные электрические моменты и после этого притягиваются к острию. Коснувшись острия, молекула ионизируется, отбирая часть заряда у проводника и тем самым заряжаясь одноименно с ним. После этого возникший заряженный ион энергично отталкивается проводником. Эти отлетающие ионы увлекают нейтральные молекулы. В результате от острия идет электрический ветер, способный, например, задуть горящую свечу.

При более сильных полях ионизация воздуха вблизи острия может стать настолько сильной, что произойдет электрический пробой газа.

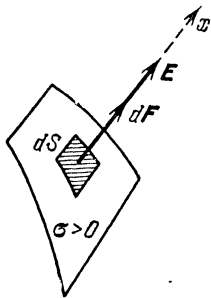


Рис. 17.12.

3. Рассмотрим силу, с которой поле действует на проводник. Выделим на поверхности проводника малый элемент  $dS$  (рис. 17.12). Для определенности будем считать, что в месте расположения  $dS$  поверхностная плотность зарядов  $\sigma > 0$ . Тогда вблизи  $dS$  поле  $E$

будет направлено так, как показано на рис. 17.12. Такое же направление будет иметь и сила, приложенная к положительным зарядам, сосредоточенным на элементе  $dS$ . Следовательно, в этом месте к проводнику будет приложено растягивающее усилие (при  $\sigma < 0$  усилие будет сжимающим). Теперь воспользуемся выражением для электрической силы Лоренца. Но если мы применим его без учета одной тон-

кости (о которой мы сейчас расскажем), то получим результат, завышенный вдвое. Вот эта тонкость. Скачок поля от нуля внутри проводника до некоторого значения на наружной поверхности проводника есть всего лишь очень крутое возрастание поля в поверхностном слое микроскопической толщины. Это возрастание изображено на рис. 17.13, на котором ширина слоя обозначена через  $l$ . Ось  $x$  ориентирована перпендикулярно  $dS$  (рис. 17.12). Поэтому действующую силу определяет среднее значение поля в поверхностном слое, равное  $\bar{E} = E/2$ . Это и приводит к тому, что абсолютное значение силы, действующей на проводник в месте расположения элемента  $dS$ , оказывается равным не  $\sigma dS E$ , а  $\sigma dS E/2$ . Учитывая теперь (17.16), находим, что в единицах СИ

$$dF = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} dS. \quad (17.17)$$

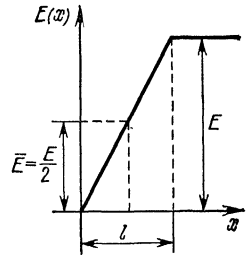


Рис. 17.13.

(В системе СГС  $\epsilon_0$  заменяется на  $1/4\pi$ .) Сравнивая (15.16) и (17.17), мы видим, что плотность энергии электрического поля в непосредственной близости от проводника равна давлению, оказываемому полем на проводник.

Найдем энергию  $W_s$  электрического поля зарядов, находящихся на одном проводнике. Проще всего эта энергия находится с помощью (16.8). Применяя эту формулу, нужно учитывать, что в нашем случае, во-первых, интегрирование распространяется лишь на поверхность проводника (только там есть заряды и, следовательно, только там отлична от нуля их плотность), а во-вторых, поверхность проводника эквипотенциальна. В результате получаем

$$W_s = \frac{1}{2} \int \rho \phi dV = \frac{1}{2} \oint \sigma \phi dS = \frac{1}{2} \phi \oint \sigma dS = \frac{1}{2} q\phi, \quad (17.18)$$

где  $q$  — заряд проводника, а  $\phi$  — его потенциал.

Для системы из нескольких проводников получается

$$W_s = \frac{1}{2} \sum_i q_i \phi_i. \quad (17.18a)$$

Здесь суммирование проводится по проводникам системы. Формулы (17.18) и (17.18a) имеют один и тот же вид как в системе СИ, так и в системе СГС.

4. Сформулируем общую постановку задачи о расчете электрических полей в системе изолированных однородных провод-

ников, состояние которых является равновесным. Поскольку в этом случае поле  $E$  является потенциальным, то достаточно определить потенциал  $\varphi$ . Согласно (16.2) в пространстве вне проводников  $\varphi$  удовлетворяет уравнению  $\Delta\varphi = 0$ , которое называется *уравнением Лапласа*. На бесконечности требуют убывания потенциала до нуля. Внутри каждого проводника потенциал постоянен и не представляет интереса, если не возникает вопрос о возможности вырывания электронов из проводника. Остается сформулировать условия на границах проводников. Эти условия должны быть достаточными, для того чтобы решение было единственным, и не переопределенными, чтобы решение существовало. Одно общее граничное условие уже приведено в (17.15) — на внешней поверхности поле должно быть направлено параллельно нормали к ней в данной точке. Дополнительно можно задать заряд  $q_i$  каждого из проводников. Это условие по существу тоже граничное, поскольку заряды сосредоточены на поверхностях проводников. Наконец, можно еще задать внешнее поле  $E_e$ .

С фиксированием этих условий уравнение Лапласа всегда имеет решение, причем единственное. Приведем физический довод в пользу единственности решения такой задачи. Пусть имеется два решения  $\varphi'$  и  $\varphi''$ , удовлетворяющие всем граничным условиям. Тогда в силу линейности задачи разность  $\varphi' - \varphi'' = \varphi$  тоже будет решением, но уже соответствующим нулевым зарядам проводников и нулевому внешнему полю. В этом случае, очевидно, должно быть всюду (вне проводников)  $\varphi = 0$ , т. е.

$\varphi' = \varphi''$ , что и означает единственность решения поставленной задачи.

Вместо зарядов проводников можно задать их потенциалы  $\varphi_i$ . В этом случае задача также будет иметь одно и только одно решение.

Заметим, что в соответствии со сказанным в

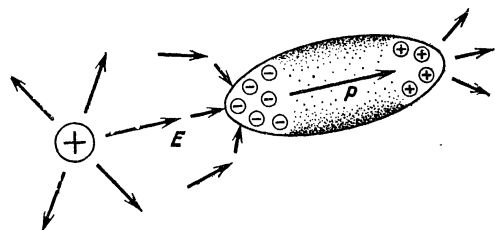


Рис. 17.14.

начале этого параграфа поверхностная плотность заряда  $\sigma$  на каждом проводнике не может быть задана, а определяется при решении задачи.

Для иллюстрации рассмотрим качественно поведение нейтрального (в целом) проводника во внешнем электрическом поле  $E$  (рис. 17.14). Под действием поля заряды на поверхности проводника начнут двигаться и перераспределяться так, что у проводника появится ненулевой электрический дипольный момент, называемый индуцированным. Если внешнее поле неоднородно,

родно, то проводник будет втягиваться в область более сильного поля.

5. Трудности решения задачи о нахождении электрических полей в системе статических заряженных проводников значительно упрощаются благодаря следующему общему свойству таких систем:

*Заряд каждого проводника линейно зависит от потенциалов всех проводников системы. Коэффициенты этих линейных зависимостей называются емкостными коэффициентами. Емкостные коэффициенты определяются только формой, размерами и взаимным расположением проводников.*

Аналитически это свойство выражается так:

$$q_i = \sum_{j=1}^N C_{ij} \varphi_j. \quad (17.19)$$

Здесь  $q_i$  — заряд  $i$ -го проводника,  $\varphi_j$  — потенциал (наружный)  $j$ -го проводника,  $C_{ij}$  — емкостные коэффициенты,  $N$  — число проводников. Индекс  $i$  (как и  $j$ ) пробегает значения  $1, 2, \dots, N$ , так что соотношение (17.19) содержит  $N$  равенств. Емкостные коэффициенты обладают такими свойствами: а)  $C_{ij} = C_{ji}$  (симметричность); б)  $C_{ii} > 0$  при всех  $i$ ;  $C_{ij} < 0$  при всех  $i \neq j$ . В (17.19), как всегда, принято, что  $\varphi_i(\infty) = 0$ .

Продemonстрируем справедливость всех высказанных утверждений на простых примерах.

Рассмотрим уединенный заряженный проводник. Из линейности уравнения Лапласа  $\Delta\varphi = 0$  следует, что если потенциал  $\varphi(\mathbf{r})$  есть решение этого уравнения с граничным условием  $E_n = \sigma/\epsilon_0$  на поверхности проводника, имеющего заряд  $q$ , то потенциал  $\varphi'(\mathbf{r}) = a\varphi(\mathbf{r})$ , где  $a$  — любое число, тоже будет решением, но уже с граничным условием  $E'_n = \sigma'/\epsilon_0 = a\sigma/\epsilon_0$ , которому отвечает суммарный заряд проводника, равный  $aq$ . Это означает, что потенциал  $\varphi(\mathbf{r})$ , в том числе и интересующий нас потенциал  $\varphi_s$  на поверхности проводника, пропорционален  $q$ :

$$\varphi_s = Cq, \quad (17.20)$$

где  $C$  — коэффициент пропорциональности. Подставив (17.20) в (17.18), получим выражение для энергии проводника в виде

$$W_s = \frac{1}{2} Cq^2.$$

Из положительности энергии следует положительность коэффициента  $C$ . В обозначениях формулы (17.19)  $C = C_{11}$ . Коэффициент  $C$  называется емкостью уединенного проводника.

Единицей емкости в системе СИ является фарада (Ф);  $1 \text{ Ф} = 1 \text{ Кл/В}$ . В системе СГС емкость измеряется в сантимет-

рах. Количественно емкость (в СГС) имеет порядок линейных размеров тела. Нетрудно подсчитать, что для шара радиуса  $R$  в СГС будет  $C = R$  (в СИ  $C = 4\pi\epsilon_0 R$ ). Одной фараде в СГС соответствует емкость  $9 \cdot 10^{11}$  см. На практике всегда приходится иметь дело с емкостями намного меньше фарады. Поэтому употребительны дольные единицы — микрофарада (мкф) и пикофарада (пФ):  $1 \text{ мкФ} = 10^{-6} \text{ Ф}$ ,  $1 \text{ пФ} = 10^{-12} \text{ Ф}$ .

Перейдем к системе из двух проводников. И здесь воспользуемся линейностью и однородностью уравнения Лапласа. Из этих свойств следует, что решение  $\varphi(\mathbf{r})$  с потенциалами  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  на границах, соответственно, первого и второго проводников можно представить в виде суммы  $\varphi(\mathbf{r}) = \varphi'(\mathbf{r}) + \varphi''(\mathbf{r})$ , где потенциалы  $\varphi'$ ,  $\varphi''$  вне проводников тоже удовлетворяют уравнению Лапласа и на границах имеют такое поведение: на границе первого проводника  $\varphi'(S_1) = \varphi_1$ , на границе второго проводника  $\varphi'(S_2) = 0$ . Потенциал  $\varphi''(\mathbf{r})$ , наоборот, равен нулю на границе первого проводника и равен  $\varphi_2$  на границе

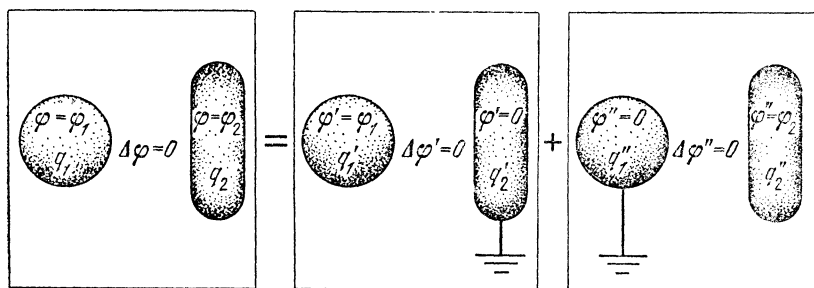


Рис. 17.15.

второго. На рис. 17.15 изображены задачи для потенциалов  $\varphi$ ,  $\varphi'$  и  $\varphi''$ . Проводники, у которых потенциал нулевой, изображены заземленными. При заданных потенциалах заряды уже не произвольны, а однозначно определяются условиями задачи.

Проведем теперь в задаче о потенциале  $\varphi'(\mathbf{r})$  те же рассуждения, что и в задаче об уединенном проводнике. В результате получим, что заряды  $q'_1$  и  $q'_2$ , соответственно, первого и второго проводников должны быть пропорциональными потенциалу  $\varphi_1$ :

$$q'_1 = C_{11}\varphi_1, \quad q'_2 = C_{21}\varphi_1.$$

Аналогично, в задаче о потенциале  $\varphi''$  получим, что соответствующие заряды  $q''_1$ ,  $q''_2$  пропорциональны  $\varphi_2$ :

$$q''_1 = C_{12}\varphi_2, \quad q''_2 = C_{22}\varphi_2.$$

Для задачи о потенциале  $\varphi$ , опять же в силу принципа суперпозиции, будет  $q_1 = q'_1 + q''_1$ ,  $q_2 = q'_2 + q''_2$ , т. е.

$$\begin{aligned} q_1 &= C_{11}\varphi_1 + C_{12}\varphi_2, \\ q_2 &= C_{21}\varphi_1 + C_{22}\varphi_2. \end{aligned} \tag{17.20a}$$



Мы получили формулы (17.19) для частного случая двух проводников ( $N = 2$ ). Свойство симметрии  $C_{12} = C_{21}$  приемем без доказательства. Для энергии двух проводников согласно (17.18а) получим

$$W_3 = \frac{1}{2} C_{11} \Phi_1^2 + \frac{1}{2} C_{22} \Phi_2^2 + C_{12} \Phi_1 \Phi_2.$$

Емкостные коэффициенты  $C_{11}$  и  $C_{22}$  положительны в силу того, что  $W_3 > 0$  как при  $\Phi_1 = 0, \Phi_2 \neq 0$ , так и при  $\Phi_1 \neq 0, \Phi_2 = 0$ . Отрицательность  $C_{12}$  доказывается так. Допустим, что первый проводник заземлен ( $\Phi_1 = 0$ ). Заряд  $q_1$  на этом проводнике будет индуцирован зарядами второго проводника. Следовательно, знак  $q_1$  будет противоположен знаку  $\Phi_2$ , что согласно (17.20а) возможно только при  $C_{12} < 0$ .

Система из двух проводников, размеры которых много меньше расстояния между ними, называется *конденсатором*. Проводники называются обкладками конденсатора.

Зарядим первую обкладку зарядом  $q > 0$ , а вторую — противоположным зарядом  $-q < 0$ . Тогда между обкладками возникнет разность потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2 > 0$ . Из рассуждений, аналогичных проведенным при рассмотрении изолированного проводника (т. е. из линейности уравнения Лапласа и граничных условий), следует, что величины  $q$  и  $\varphi_1 - \varphi_2$  пропорциональны друг другу:

$$q = C (\varphi_1 - \varphi_2). \quad (17.21)$$

Коэффициент  $C$  в (17.21) называется *емкостью конденсатора*. С помощью (17.18а) вычисляется энергия конденсатора:

$$W_3 = \frac{1}{2} C (\varphi_1 - \varphi_2)^2 = \frac{q^2}{2C}.$$

Из этого выражения видно, что всегда  $C > 0$ .

Положив  $q_1 = -q_2 = q$  в формулах для емкостных коэффициентов системы из двух проводников, прямыми выкладки можно выразить емкость конденсатора через емкостные коэффициенты:

$$C = \frac{C_{11} C_{22} - C_{12}^2}{C_{11} + 2C_{12} + C_{22}}.$$

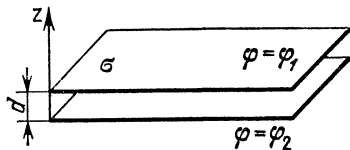


Рис. 17.16.

Система из двух близких параллельных металлических пластин называется *плоским конденсатором*. Близость пластин означает, что расстояние  $d$  между ними значительно меньше линейных размеров пластин, т. е.  $d \ll \sqrt{S}$ , где  $S$  — площадь одной поверхности пластины (рис. 17.16). Вычислим емкость плоского конденсатора. С относительной точностью  $d/\sqrt{S}$  можно воспользоваться формулой (16.24) для бесконечной заряженной плоскости, т. е. считать, что каждая пластина создает поле, равное

$\sigma/2\varepsilon_0$  по абсолютной величине, если через  $\sigma$  обозначена поверхностная плотность заряда положительно заряженной пластины. Суммарное электрическое поле обеих пластин (в пренебрежении краевыми эффектами) равно по абсолютной величине  $\sigma/\varepsilon_0$  (см. (16.24a)) в промежутке между пластинами и нулю — в остальном пространстве. Разность потенциалов между пластинами согласно (16.25) составляет  $\varphi_1 - \varphi_2 = \sigma d/\varepsilon_0$ .

Полный заряд положительной пластины по определению поверхностной плотности заряда равен  $\sigma S$ . Отсюда для емкости плоского конденсатора получаем

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}. \quad (17.22)$$

Конденсаторы являются устройствами, в которых можно собирать («конденсировать») большие заряды при умеренной разности потенциалов на обкладках. Проще всего это обнаруживается на примере плоского конденсатора, емкость которого вычисляется не в системе СИ, а в системе СГС. В системе СГС в (17.22) исчезает множитель  $\varepsilon_0$ , а вместо него появляется коэффициент  $1/4\pi$ . Теперь легко видеть, что при  $S \gg d^2$  емкость может на порядки превышать геометрические размеры конденсатора. В этом случае из (17.21) следует, что заряд  $q$  может быть большим даже при незначительной разности потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2$ .

Еще большие значения емкости можно получать, помещая слой диэлектрика между обкладками конденсатора (см. ниже § 19.4).

### § 17.3. Стационарные токи, электродвижущая сила, эффекты Холла и Мейснера

1. Предметом настоящего параграфа являются стационарные токи в электрических цепях. Эти цепи состоят из замкнутых соединений проводов \*). Как правило, протекающие в них токи можно считать линейными. В дальнейшем вплоть до последнего пункта параграфа только такие токи и будут рассматриваться.

Существенным свойством системы, в которой протекают токи, является неравновесность состояния вещества проводников. Об этом уже говорилось в § 17.1. Напомним, что об этой неравновесности свидетельствует выделение джоулева тепла, происходящее вследствие необратимого превращения энергии упорядоченного движения носителей тока в энергию теплового движения частиц вещества проводников. Поэтому для поддержания тока необходим приток энергии в проводящую цепь от каких-то внеш-

\*) См. сноску на с. 90, а также п. 4 § 17.1.

них источников. В присутствии таких сторонних источников следует пользоваться обобщенным законом Ома (17.10).

Уточним терминологию. Ток, направленный к какому-либо узлу соединения проводников, будет называться входящим (в этот узел). Ток противоположной направленности — выходящим.

Теперь перейдем к формулировке основных законов, которым подчиняются стационарные токи. Они называются *правилами Кирхгофа*. Первое правило Кирхгофа гласит:

*в каждом узле разветвления цепи сумма сил входящих токов равна сумме сил токов выходящих:*

$$\sum_k I_k = 0. \quad (17.23)$$

Иначе в узлах будет происходить либо увеличение, либо уменьшение заряда. Условие же стационарности такие случаи исключает. В сумме (17.23) каждое слагаемое является алгебраической величиной; знаки входящих и выходящих токов противоположны.

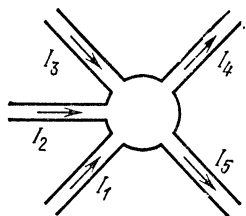


Рис. 17.17.

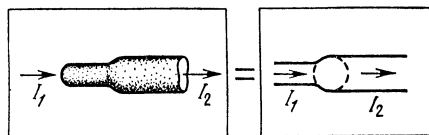


Рис. 17.18.

В качестве примера укажем, что для узла, изображенного на рис. 17.17, первое правило Кирхгофа выражается соотношением

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 = 0.$$

Частным случаем первого правила Кирхгофа является следующее положение:

*в каждом неразветвленном участке цепи сила тока одинакова во всех сечениях.*

Действительно, неразветвленный проводник можно рассматривать как участок, в состав которого входит узел только с одним входом и одним выходом (рис. 17.18). Применяя к этому узлу первое правило Кирхгофа, получаем  $I_1 = I_2$ , что и требовалось доказать.

При получении второго правила Кирхгофа сделаем два предположения, которые упрощают вычисления. Во-первых, проводимость  $\sigma$  везде будем считать одинаковой. Во-вторых, сечения

всех проводов также примем одним и тем же, обозначаемым через  $S$ .

Теперь выберем один из неразветвленных участков цепи, уже не предполагая, что в нем нигде не действуют сторонние силы. Часть провода этого участка показана на рис. 17.19. На рисунке штриховкой выделено одно из поперечных сечений провода, а пунктиром отмечен контур тока  $l$ . Согласно (16.13) для линейного тока в проводе с поперечным сечением  $S$  обобщенный закон Ома можно записать в виде

$$\frac{I}{S} \mathbf{n} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{E}_s),$$

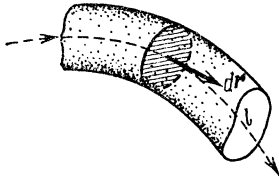


Рис. 17.19.

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор, касательный к контуру тока в данной точке. Разделив полученное равенство на  $\sigma$  и умножив затем на вектор  $d\mathbf{r} = \mathbf{n} dl$  бесконечно малого смещения вдоль  $l$  (рис. 17.19), получим

$$I \frac{dl}{\sigma S} = (\mathbf{E} d\mathbf{r}) + (\mathbf{E}_s d\mathbf{r}).$$

Интегрируя это соотношение вдоль контура  $l$ , проходящего внутри выбранного участка цепи, получаем

$$IR = U + \mathcal{E}. \quad (17.24)$$

Здесь

$$R = \int_0^l \frac{dl}{\sigma S} = \frac{l}{\sigma S}$$

— сопротивление участка ( $l$  — его длина),

$$U = \int_l (\mathbf{E} d\mathbf{r})$$

— разность потенциалов на его концах (см. (17.7) и (17.8)), а величина

$$\mathcal{E} = \int_l (\mathbf{E}_s d\mathbf{r}). \quad (17.25)$$

Определенная равенством (17.25) величина  $\mathcal{E}$  называется *электродвижущей силой* (э. д. с.) участка цепи. Соотношение (17.24) называется *обобщенным законом Ома в интегральной форме*: для участка цепи с полем сторонних сил произведение силы тока на сопротивление равно сумме разности потенциалов и э. д. с. на этом участке.

Рассмотрим теперь произвольную разветвленную цепь, отдельные элементы которой могут иметь свои э. д. с. Выделим внутри этой цепи произвольный замкнутый контур  $L$  и вычислим циркуляцию поля  $\mathbf{E}$  вдоль этого контура, воспользовавшись при этом для каждого неразветвленного участка контура соотношениями (17.24) и (17.25). В результате получим

$$\oint_L (\mathbf{E} \, d\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^N I_k R_k - \oint_L (\mathbf{E}_s \, d\mathbf{r}). \quad (17.26)$$

Здесь  $N$  — число участков  $L$ , внутри каждого из которых нет разветвлений. Через  $I_k$  и  $R_k$  обозначены, соответственно, сила тока и сопротивление участка  $k$ . Согласно второму уравнению Максвелла (15.8) в стационарном случае левая часть равенства (17.26) обращается в нуль. Величина

$$\mathcal{E} = \oint_L (\mathbf{E}_s \, d\mathbf{r}) \quad (17.27)$$

называется полной э. д. с., включенной в рассматриваемый замкнутый контур. С учетом сделанных замечаний соотношение (17.26) можно переписать в виде

$$\sum_{k=1}^N I_k R_k = \mathcal{E}. \quad (17.28)$$

Это равенство выражает второе правило Кирхгофа:

*сумма произведений токов на сопротивления вдоль любого замкнутого контура равна полной э. д. с., включенной в этот контур.*

Правила Кирхгофа лежат в основе расчетов цепей постоянного тока. Эти расчеты выполняются по следующей схеме. Для каждого узла выписывается первое правило Кирхгофа (17.23), а для каждого независимого замкнутого контура выписывается второе правило Кирхгофа (17.28). Полученная совокупность равенств рассматривается как система уравнений относительно неизвестных величин. Типичной (но не единственной) является ситуация, когда заданы э. д. с. и сопротивления, а токи являются неизвестными. Дадим определение независимого контура. Контур является независимым, если его нельзя представить как сумму, составленную из каких-либо остальных выбранных контуров. Например, для цепи, изображенной на рис. 17.20, за независимые можно выбрать контуры 1 и 2. Тогда контур 3

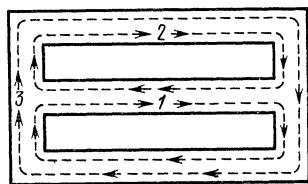


Рис. 17.20.

уже не будет независимым, поскольку он равен сумме контуров 1 и 2.

Вычислим джоулево тепло, выделяющееся в неразветвленном однородном участке цепи. Допустим, что э. д. с. в проводнике отсутствует. В единице объема проводника в единицу времени согласно (15.17) и условию линейности тока выделяется энергия  $(j\mathbf{E}) = I(n\mathbf{E})/S$ . Умножая это равенство на  $dV = dl S$ , после интегрирования по контуру тока  $l$  в неразветвленном участке цепи находим, что в данном участке в единицу времени выделяется энергия

$$\int (j\mathbf{E}) dV = \int_l I(n\mathbf{E}) dl = I \int (\mathbf{E} dr) = IU = I^2 R. \quad (17.29)$$

Это соотношение выражает закон Джоуля — Ленца для неразветвленного участка цепи без э. д. с.

При наличии э. д. с. величина  $\int (j\mathbf{E}) dV$  уже не равна выделяющемуся джоулеву теплу, что видно из того, что она может быть отрицательной. Проводя аналогичные выкладки с учетом поля  $\mathbf{E}_s$  сторонней силы, вместо (17.29) получим

$$\int (j\mathbf{E}) dV = I^2 R - I\mathcal{E}.$$

2. Рассмотрим типичные явления, приводящие к возникновению э. д. с., т. е. пригодные для создания источников постоянного тока. Основным физическим конструктивным узлом таких источников служит контакт двух разнородных проводников. Наличие такого контакта приводит к возникновению поля  $\mathbf{E}_s$  сторонних сил, но само по себе еще недостаточно для возникновения стационарной э. д. с. в замкнутой цепи. Для возникновения э. д. с. необходимо выполнение одного из дополнительных условий. В их число входят такие: а) температуры контактов в цепи должны быть неодинаковы; б) в контактирующих проводниках должны быть носители различных типов.

Начнем с рассмотрения простейшего случая контакта двух разнородных проводников с носителями одного и того же типа. Температура во всей системе проводников будет считаться одной и той же. Для определенности примем, что проводниками являются металлы, а, следовательно, носителями — электроны. Пусть до установления контакта каждый проводник был изолирован и не заряжен. Тогда потенциалы  $(\varphi_s)_1$  и  $(\varphi_s)_2$  наружных поверхностей проводников будут нулевыми. Но поскольку проводники сделаны из разных металлов, то для электрона работы выходов  $A_1, A_2$  из них различны. Тем самым согласно (17.11) внутренние потенциалы  $(\varphi_{\text{int}})_1, (\varphi_{\text{int}})_2$  будут отличаться на  $(A_1 - A_2)/q_0$ , где  $q_0$  — абсолютная величина заряда электрона.

При соприкосновении этих двух металлов заряд начнет перетекать через контакт от проводника с более высоким внутренним потенциалом к другому проводнику. Это перетекание будет продолжаться до тех пор, пока не будет достигнуто равенство внутренних потенциалов:

$$(\varphi_{\text{int}})_1 = (\varphi_{\text{int}})_2.$$

При этом наступит состояние равновесия, в котором внешние потенциалы проводников будут уже различными. Возникшая при контакте разность внешних потенциалов  $\mathcal{E}_{12}$  называется *контактной разностью потенциалов*. Согласно (17.11)

$$\mathcal{E}_{12} = \frac{1}{q_0} (A_1 - A_2). \quad (17.30)$$

Проследим за распределением зарядов и полей в контактирующих проводниках. После перетекания заряда с одного проводника на другой поверхности обоих проводников заряжаются. При этом их полные заряды равны по абсолютной величине и противоположны по знаку. Заряды, скопившиеся на поверхности соприкосновения, образуют двойной слой. Поле  $\mathbf{E}$  внутри этого двойного слоя показано на рис. 17.21 сквозь символическую лупу. Это поле и создает разность потенциалов, выравнивающую внутренние потенциалы проводников. Поверхностные заряды вне области контакта создают электрическое поле  $\mathbf{E}$  вне проводников. Его эквипотенциальные поверхности изображены на рис. 17.21 пунктирными линиями.

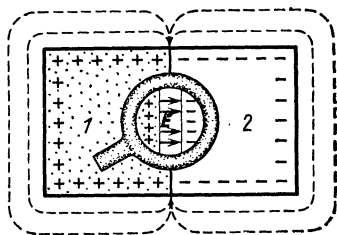


Рис. 17.21.

Контактная разность потенциалов устанавливается довольно быстро, примерно за  $10^{-6}$  с. После этого наступает состояние равновесия. По величине контактной разности потенциалов металлы располагаются в *ряд Вольты*: Al, Zn, Sn, Cd, Pb, Bi, Hg, Fe, Cu, Ag, Au, Pt, Pd. При контакте положительный потенциал приобретает тот металл, который в ряде Вольты стоит ближе к началу. Так, алюминий заряжается положительно при контакте с цинком.

Контактная разность потенциалов устанавливается довольно быстро, примерно за  $10^{-6}$  с. После этого наступает состояние равновесия. По величине контактной разности потенциалов металлы располагаются в *ряд Вольты*: Al, Zn, Sn, Cd, Pb, Bi, Hg, Fe, Cu, Ag, Au, Pt, Pd. При контакте положительный потенциал приобретает тот металл, который в ряде Вольты стоит ближе к началу. Так, алюминий заряжается положительно при контакте с цинком.

3. Если все проводники металлические и температуры всех проводников одинаковы, то их соединение в любую замкнутую цепь не возбуждает в ней постоянного тока, поскольку алгебраическая сумма всех контактных разностей потенциалов в неразветвленной замкнутой цепи равна нулю согласно (17.30). Действительно, в сумму каждая работа выхода войдет дважды, причем один раз со знаком плюс, а другой — со знаком минус,

Например, для изображенной на рис. 17.22 замкнутой цепи из трех элементов, пользуясь (17.30), получим

$$\mathcal{E}_{12} + \mathcal{E}_{23} + \mathcal{E}_{31} = 0.$$

Перейдем к свойствам неравномерно нагретых проводников. Согласно опытным фактам, работа выхода электрона из металла зависит от температуры, причем по-разному для разных металлов.

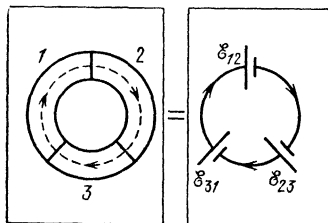


Рис. 17.22.

Отсюда следует, что любая контактная разность потенциалов зависит от температуры. Поэтому, если в замкнутой цепи из разных металлических проводников контакты поддерживаются при разных температурах, то полная э. д. с. контура уже не будет равной нулю. Так, если в цепи, изображенной на рис. 17.22,

контакты (1, 2) и (2, 3) имеют температуру  $T$ , а контакт (3, 1) имеет иную температуру  $T'$ , то полная э. д. с. контура будет равна

$$\mathcal{E}' = \frac{1}{q_0} \{A_1(T') - A_1(T)\} + \frac{1}{q_0} \{A_3(T) - A_3(T')\} \neq 0.$$

Если различающиеся температуры контактов поддерживаются извне, то э. д. с. контура будет постоянной во времени, так что в контуре будет циркулировать постоянный ток.

*Э. д. с., возникающая в замкнутой цепи за счет различия температур контактов, называется термо-э. д. с. Возникновение термо-э. д. с. называется эффектом Зеебека.*

Замкнутая цепь, состоящая из разнородных проводников или полупроводников, называется *термоэлементом*. Термоэлемент из двух проводников называется *термопарой*. По величине термо-э. д. с. невелики. Например, в термопаре свинец — висмут при разности температур контактов 20 градусов термо-э. д. с. равна 0,2 мВ. Для других пар металлов, как правило, значения э. д. с. еще меньше. Тем не менее в термопарах удается получать токи порядка 1 А при достаточно малом сопротивлении цепи.

Сторонние силы, создающие термо-э. д. с., имеют кинетическое происхождение. Несколько упрощенная качественная картина такова. Поскольку электроны внутри металла свободны, то они образуют своеобразный газ. Давление этого газа должно быть одинаковым по всей длине проводника. Если разные сечения проводника имеют разные температуры, то для уравнивания давлений должны перераспределиться концентрации электронов, что и должно привести к возникновению тока. Каково бы ни было уравнение состояния электронного газа, поле



сторонних сил, стремящихся перераспределить концентрации электронов, в первом приближении должно быть пропорциональным градиенту температуры, т. е. для одномерного проводника — производной  $dT/dx$  (предполагается, что температура изменяется только в  $x$ -направлении):

$$E_s = -\alpha(T) \frac{dT}{dx}.$$

Коэффициент  $\alpha$  зависит от температуры и от состава проводника. Поскольку  $E_s dx = -\alpha dT$ , то э. д. с.  $\mathcal{E}_1$  одного проводника оказывается равной

$$\mathcal{E}_1 = - \int_{T_1}^{T_2} \alpha dT,$$

где  $T_1, T_2$  — температуры концов проводника.

Отсюда для э. д. с.  $\mathcal{E}_{12}$  термопары получаем

$$\mathcal{E}_{12} = \int_{T_1}^{T_2} (\alpha_2 - \alpha_1) dT,$$

где  $\alpha_1, \alpha_2$  — коэффициенты  $\alpha$  для разных проводников. Можно сказать, что термо-э. д. с. возникает за счет того, что уравнения состояния для электронного газа — разные для разных металлов.

Эффект Зеебека относится к группе *термоэлектрических явлений*. В эту группу входит также *эффект Пельтье*.

*Эффектом Пельтье называется выделение или поглощение тепла в области контакта двух разнородных проводников при прохождении электрического тока через контакт.*

Количественно эффект Пельтье выражается соотношением

$$Q_{\Pi} = \Pi_{12} j,$$

где  $Q_{\Pi}$  — количество тепла, выделяющееся в единицу времени на единице площади контакта,  $j$  — плотность тока через контакт,  $\Pi_{12}$  — коэффициент, называемый *коэффициентом Пельтье* и зависящий от материалов контакта и от температуры. Как видно, выделение тепла при эффекте Пельтье линейно зависит от тока. В частности, при обращении направления тока меняется знак эффекта, т. е. контакт, нагреваемый при токе одного направления, будет охлаждаться при токе противоположного направления. Напомним, что выделение джоулева тепла квадратично по току и поэтому всегда положительно. Из линейности одного эффекта и квадратичности другого также следует, что при достаточно слабом токе тепло Пельтье будет превышать

джоулево по абсолютной величине. Это дает возможность использовать эффект Пельтье для охлаждения.

Эффекты Зеебека и Пельтье обратны друг другу. Действительно, если в термопаре поддерживается разность температур контактов, т. е. один контакт непрерывно охлаждается, а другой непрерывно подогревается, то возникают термо-э. д. с. и, соответственно, ток в цепи термопары. Если же при одинаковых температурах контактов в цепи термопары создать ток каким-либо внешним источником, то один контакт начнет нагреваться, а другой — охлаждаться.

Отсюда видно, что оба явления имеют общее происхождение. Эффект Пельтье, так же как и эффект Зеебека, обусловлен различием уравнения состояния электронного газа в разных проводниках. При прохождении этого газа через контакт поток частиц остается прежним (из-за неизменности электрического тока вдоль цепи), но меняется поток тепла из-за изменения теплоемкости электронного газа. В результате на контакте непрерывно выделяется или поглощается несбалансированное тепло. Без вывода укажем, что коэффициент Пельтье связан с коэффициентами  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ , определяющими эффект Зеебека, соотношением  $\Pi = T(\alpha_1 - \alpha_2)$ .

Термоэлементы широко используются в физике и в технике. Так, термопары применяются для измерения температур. Один контакт поддерживается при определенной температуре, а другой помещается в среду, за температурой которой надо следить. Температура этой среды определяется по току в цепи термопары. Точность измерения достигает сотых долей градуса в большом диапазоне — от низких температур до температур, близких к точке плавления одного из проводников термопары. На основе эффекта Зеебека конструируются также источники тока. Эффект Пельтье используется в холодильных установках.

Термоэлектрические элементы удобны для применений отсутствием движущихся частей, высокой надежностью, простотой обслуживания. Их недостатками являются малость эффекта и низкий к. п. д.

4. Перейдем ко второму методу создания источников тока за счет контактных разностей потенциалов — к введению в цепь контактов между проводниками с разными типами носителей. Для определенности будем рассматривать контакт металла с электролитом. Различие типов носителей в контактирующих проводниках проявляется в двух отношениях. Во-первых, поскольку носители одного проводника не могут присутствовать в другом, то ток через контакт может идти только путем порождения или поглощения носителей на поверхности контакта. Во-вторых, работы выхода для носителей разного сорта различны для одного и того же проводника. Здесь нам понадобится обобщить понятие работы выхода на ионы металла, которые в самом металле не являются носителями тока. Назовем работой выхода иона из

металла минимальную энергию, необходимую для вырывания этого иона с поверхности металла.

Теперь перейдем к рассмотрению простейшей ситуации разомкнутой цепи с одним контактом. Погрузим незаряженный металлический электрод в незаряженный раствор электролита. Для иона металла работы выхода из электролита и с поверхности металла различны. Поэтому в первый момент после погружения состояние ионов металла на поверхности не будет равновесным. Если работа  $A_m$  выхода из металла меньше работы  $A_p$  выхода из раствора электролита, то ионы начнут отрываться от поверхности металла и переходить в раствор. Например, при погружении цинковой пластины в раствор серной кислоты (левая

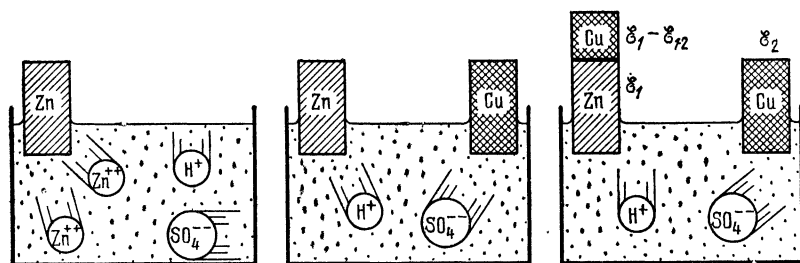


Рис. 17.23.

часть рис. 17.23) часть ионов цинка  $Zn^{++}$  (два плюса указывают, что ион двукратно заряжен) переходит в раствор. Это свидетельствует о том, что для цинка  $A_m > A_p$ . Если же, наоборот,  $A_p > A_m$ , то ионы из раствора электролита начинают осаждаться на поверхности электрода. Такое неравенство имеет место для медного купороса  $CuSO_4$ . Этот раствор содержит ионы  $Cu^{++}$  и  $SO_4^{--}$ . При возникновении контакта ионы  $Cu^{++}$  начинают осаждаться на поверхности электрода.

Может оказаться, что при  $A_p > A_m$  в растворе электролита отсутствуют ионы металла электрода. В таких случаях все равно около внешней поверхности электрода возникает поле, притягивающее положительные ионы раствора электролита. Эти ионы либо осаждаются на электроде, либо нейтрализуются электронами проводимости электрода и уходят из раствора. Последняя из описанных ситуаций имеет место, например, для медного электрода, опущенного в раствор серной кислоты. В растворе электролита положительными являются ионы водорода  $H^+$ . Они притягиваются поверхностью электрода, нейтрализуются и образуют пузырьки газообразного водорода.

Во всех трех рассмотренных случаях (цинк в серной кислоте, медь в медном купоросе, медь в серной кислоте) электрические

явления одинаковы и те же, что и при контакте двух металлов. Поверхности обоих проводников заряжаются, суммарный заряд одного проводника равен по абсолютной величине и противоположен по знаку суммарному заряду другого проводника. Процесс перераспределения зарядов заканчивается тем, что между внешними поверхностями проводников устанавливается контактная разность потенциалов  $\mathcal{E}_1$ , создающая потенциальную энергию  $q\mathcal{E}_1$ , уравнивающую разность работ выхода иона металла из электрода и из электролита. Величина контактной разности потенциалов  $\mathcal{E}_1$  зависит главным образом от материала проводников и от концентрации ионов металла электрода в электролите. Знак этой разности может быть любым, абсолютная величина варьируется в пределах от долей вольта до нескольких вольт.

Опустим теперь в один и тот же раствор электролита два электрода, например цинковый и медный электроды в раствор серной кислоты (средняя часть рис. 17.23). Иначе говоря, создадим разомкнутую цепь металл — раствор электролита — другой металл. Тогда между первым и вторым металлами установится разность потенциалов  $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2$ , где  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$  — контактные разности потенциалов соответственно первого и второго металлов с раствором электролита.

Добавим теперь к нашей разомкнутой цепи еще один металлический проводник — присоединим к одному из металлов (вне электролита) проводник из другого металла. Например, создадим разомкнутую цепь медь — цинк — раствор электролита — медь (правая часть рис. 17.23). На контакте медь — цинк возникнет контактная разность потенциалов  $\mathcal{E}_{12}$  (см. п. 2). В целом разность потенциалов  $\mathcal{E}$  на концах разомкнутой цепи примет значение

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{12} + \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2.$$

*Несмотря на то, что оба конца разомкнутой цепи сделаны из одного и того же материала, разность потенциалов  $\mathcal{E}$  между ними не равна нулю за счет того, что контактная разность потенциалов  $\mathcal{E}_{12}$  выражается через работы выхода электронов, а разности потенциалов  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$  выражаются через работы выхода ионов. Если полученную цепь замкнуть, то по ней пойдет ток. Этот ток будет поддерживаться растворением цинка (т. е. переходом ионов  $\text{Zn}^{++}$  с поверхности металла в электролит) и восстановлением водорода на медном электроде (т. е. нейтрализацией ионов  $\text{H}^+$  электронами проводимости меди). Оба эти процесса экзотермичны. При их протекании выделяется энергия, необходимая для поддержания тока в цепи.*

Источники тока, в которых э. д. с. создается за счет различия работ выхода разных носителей, называются *химическими источ-*

*никами тока.* В цепи химического источника тока обязательно имеются проводники с носителями разных типов. На контактах таких проводников происходят экзотермические химические реакции, являющиеся источниками энергии. Химический источник тока, в котором э. д. с. создается контактами металл — раствор электролита — другой металл, называется *гальваническим элементом*. Описанный выше гальванический элемент с цепью цинк — раствор серной кислоты — медь называется элементом Вольты. Его э. д. с. равна 1,1 В. Этот элемент А. Вольта создал в 1800 г.

Элемент Вольты является исторически первым химическим источником тока. Он прост по конструкции, но очень нестабилен в работе. В этом легко убедиться, включив в цепь с элементом Вольты амперметр. Показания амперметра будут меняться буквально на глазах. Причиной нестабильности является накопление водородных пузырьков на медном электроде. Эти пузырьки снижают проводимость поверхности электрода и, кроме того, искажают электрические поля у самой поверхности электрода на расстояниях порядка межатомных. Эти два эффекта и нарушают стабильность работы элемента Вольты.

В настоящее время существует большое число различных гальванических элементов. Каждый из них создает э. д. с. порядка одного — нескольких вольт. Главной трудностью конструирования таких элементов является задача обеспечения стабильности электрических свойств электролитов и особенно контактов электрод — электролит в условиях непрерывно протекающих химических реакций.

К химическим источникам тока относятся также *аккумуляторы* и *топливные элементы*. Гальванические элементы являются источниками одноразового действия. При их использовании запасенная в них химическая энергия необратимо расходуется на поддержание тока.

Аккумуляторы отличаются от гальванических элементов своей обратимостью и поэтому могут использоваться многократно. В них запас химической энергии восстанавливается при пропускании электрического тока противоположного направления от какого-либо внешнего источника. Аккумулятором является, например, элемент, впервые сконструированный Планте в 1895 г. Этот источник тока состоит из раствора серной кислоты с погруженными в него двумя одинаковыми свинцовыми пластинами. Так как электроды одинаковы, то в начальном состоянии никакой э. д. с. у такого устройства нет. Пропускание через него электрического тока меняет положение: на электродах выделяются продукты электролиза, вступающие в химическую реакцию с веществом электродов. При этом на разных электродах идут разные превращения. Мы не будем их рассматривать. Нам важно только то, что эти превращения делают электроды различными по химическому составу. В результате возникает э. д. с.,

равная приблизительно 2 В. При подключении заряженного аккумулятора к внешней нагрузке запасенная в нем химическая энергия расходуется на поддержание тока. При ее исчерпании она снова может быть восстановлена пропусканьем через аккумулятор тока от внешнего источника.

Основными составными частями топливного элемента являются два электрода, соединенные в цепь через электролит. Принципиальное отличие топливного элемента от гальванического состоит в том, что создающие ток химические реакции в топливном элементе непрерывно поддерживаются. Исходные реагенты подводятся к поверхностям электродов, а продукты реакции выводятся из установки. В качестве окислителей (т. е. источника отрицательных ионов) используются кислород, хлор и др., а в качестве топлива (т. е. источника положительных ионов) используются водород, металлы и др.

5. Рассмотрим влияние магнитного поля на ток. Одним из важнейших проявлений взаимодействия тока с магнитным полем является *эффект Холла*. Суть этого явления можно понять на таком примере. Допустим, что проводящий образец прямоугольной формы помещается во внешнее магнитное поле. Взаимная ориентация проводника и поля показана на рис. 17.24. При наличии в проводнике тока плотности  $j = \{0, j, 0\}$  со стороны магнитного поля  $B = \{B, 0, 0\}$  на носители тока, заключенные в единице объема среды  $*$ ), будет действовать сила  $F = [jB] = \{0, 0, -jB\}$ . Она будет отклонять носители тока в  $z$ -направлении. Поэтому число носителей тока на одной из граней проводящей среды увеличивается, а на другой грани уменьшается (обе эти грани перпендикулярны оси  $z$ ). В результате эти грани зарядятся и создадут электрическое поле, ориентированное вдоль оси  $z$ . Оно называется *полем Холла*. Величина поля Холла определяется из условия равновесия: электрическая сила между перераспределенными носителями тока, стремящаяся ликвидировать это перераспределение, должна быть равна магнитной силе, вызывающей перераспределение. Поле Холла можно измерить. Оно зависит от рода носителей тока и их плотности. Поэтому эффект Холла является эффективным средством исследования природы носителей тока. Этим и обусловлена важность эффекта.

Конкретизируем сказанное. Будем считать проводящую среду металлом. Тогда носители тока — электроны проводимости. Пусть  $n_e$  — их концентрация,  $v_d$  — абсолютная величина скорости дрейфа. Тогда  $j = q_0 n_e v_d$ , где  $q_0$  — абсолютная величина элементарного заряда.

\*) При постоянном токе их число в среднем остается неизменным.

Мы видим, что  $F_z = -jB < 0$ . Следовательно, верхняя грань проводника приобретет положительный заряд, а нижняя — отрицательный. Холловское поле  $E^{(x)}$  будет направлено в сторону отрицательных значений  $z$ :  $E^{(x)} = \{0; 0; -E^{(x)}\}$  (рис. 17.24). Из условия компенсации электрической и магнитной сил, действующих на каждый электрон проводимости вдоль оси  $z$ , находим, что  $E^{(x)} = v_d B = jB/n_e q_0$  (в системе СГС  $E^{(x)} = jB/n_e q_0 c$ ). Коэффициент пропорциональности между  $E^{(x)}$  и произведением  $jB$  называется *постоянной Холла*. Обычно ее обозначают через  $R$ . В примере, который мы только что рассмотрели,  $R = 1/n_e q_0$  (в системе СГС  $R = 1/n_e q_0 c$ ). Величины

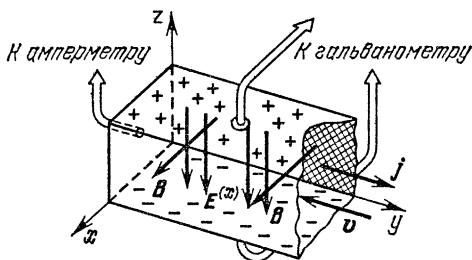


Рис. 17.24.

$E^{(x)}$ ,  $j$  и  $B$  измеряются экспериментально. По этим данным находится постоянная Холла. Она, как мы убедились, зависит от концентрации носителей тока, от их природы и, следовательно, несет информацию о свойствах носителей тока. В настоящее время эффект Холла особенно широко применяется для изучения носителей тока в полупроводниках, поскольку в них, как мы узнаем в томе III, возможны носители обоих знаков заряда, несмотря на отсутствие ионной проводимости. В технических приложениях эффект Холла используется для оценки качества металлов и полупроводников, измерительной и вычислительной техники, элементов автоматики и радиоэлектроники.

Необычным является поведение в магнитном поле сверхпроводников. Оказывается, что они пропускают внутрь себя магнитное поле на глубину не более чем  $10^{-7}$  м. Поэтому в макроскопической электродинамике считается, что магнитное поле в сверхпроводник не проникает вовсе. Это явление называется *эффектом Мейснера* \*).

Качественно происхождение эффекта Мейснера можно пояснить так. Пусть сначала вокруг сверхпроводника никакого магнитного поля не было. При включении магнитное поле нарастает от нуля до некоторого значения. Предположим, что на этапе нарастания магнитное поле проникает внутрь сверхпроводника. Согласно закону электромагнитной индукции перемен-

\*) В полной мере это явление проявляется только в чистых металлах и соединениях, в которых состав атомов точно соответствует требованиям валентности (такой состав называется стехиометрическим). В других случаях эффект Мейснера проявляется лишь частично: проникая в сверхпроводящий материал, поле только ослабляется.

ное магнитное поле создает электрическое поле. Такое поле в проводящей среде вызывает ток, который называется индукционным. Здесь нам придется вспомнить из школьного курса свойство индукционных токов всегда порождать такое магнитное поле, которое обязательно препятствует любым изменениям внешнего поля (к этому вопросу мы еще вернемся в гл. 21). В сверхпроводнике даже очень слабое электрическое поле способно вызвать сильный ток, порождающий свое собственное магнитное поле сколь угодно большой величины. В таких условиях гасящие свойства индукционного тока проявляются в полной мере: проникающее в сверхпроводник внешнее магнитное поле полностью подавляется индуцированным. Это означает, что граница сверхпроводника является для магнитного поля непреодолимым барьером.

В предыдущем параграфе мы установили, что плотность энергии электрического поля имеет размерность давления. Кроме того, оказалось, что в стационарных условиях, в которых электрические поля в проводниках отсутствуют, плотность энергии электрического поля снаружи у самой поверхности проводника действительно равна давлению поля на проводник. Теперь вспомним, что плотность энергии магнитного поля входит в формулу для плотности энергии электромагнитного поля (15.16) на равных правах с плотностью энергии электрического поля. Следовательно, и плотность энергии магнитного поля также измеряется в единицах давления. Как мы видели, магнитное поле в сверхпроводник не проникает. Из этих соображений следует, что плотность энергии магнитного поля у наружной поверхности проводника равна давлению поля на сверхпроводник.



### § 18.1. Плазменные колебания и дебаевский радиус

1. Живя на Земле, мы привыкли к телам в твердом, жидком и газообразном состояниях. Однако из астрофизических данных следует, что подавляющая часть вещества Вселенной является четвертым состоянием вещества — плазмой.

*Плазмой называется ионизированный газ с достаточно высокой концентрацией заряженных частиц, обладающий свойством квазинейтральности.*

Отношения числа ионизированных атомов к их полному числу в том же объеме называется *степенью ионизации плазмы*. Степень ионизации обычно обозначается через  $\alpha$ . Квазинейтральность плазмы означает, что в достаточно большом объеме плазмы количество положительных и отрицательных зарядов практически одинаково. Количественный критерий достаточно высокой концентрации заряженных частиц (для того чтобы газ стал плазмой) будет сформулирован в следующем пункте. Пока отметим, что плазмой может быть состояние, в котором степень ионизации  $\alpha \sim 10^{-3}$ .

Плазма доминирует во Вселенной по той причине, что в плазменном состоянии находятся звезды и межзвездная среда, т. е. объекты, в которых сосредоточена почти вся масса вещества Вселенной. Доля же планет в общей массе ничтожно мала\*).

Объясним теперь, почему звезды и межзвездная среда состоят из плазмы. В звездах молекулы ионизируются при тепловых столкновениях. Действительно, температура внутри типичной звезды — Солнца составляет  $1,5 \cdot 10^7$  К, что соответствует средним кинетическим энергиям молекул порядка  $kT = 1,3 \cdot 10^3$  эВ. Это намного превышает энергию, необходимую для ионизации

---

\*) Относительная малость общей массы планет не означает относительной малости их числа. Сейчас известны данные, указывающие на существование планетных систем даже у ближайших к Солнцу звезд. Например, двадцатипятилетние наблюдения Ван де Кампа за движением одной из таких звезд — «летающей звезды Барнарда» (отстоит от Солнца на расстоянии около  $1,7 \cdot 10^{13}$  км и обладает массой почти в шесть раз меньше солнечной) привели исследователя к выводу о присутствии вблизи звезды холодного (невидимого с Земли) спутника, масса которого, по оценкам, сравнима с массой Юпитера.

любой молекулы (или атома), поскольку энергии ионизаций имеют порядок  $1 - 10$  эВ. Поэтому в звездах практически все вещество состоит из атомарных ионов и электронов.

Межзвездный газ превращается в плазму из-за его сильной разреженности. Напомним (см. табл. 4 тома I), что плотность межзвездного вещества заключена в пределах от  $10^{-20}$  до  $10^{-26}$  кг/м<sup>3</sup>. При таких плотностях столкновения происходят крайне редко, так что полное тепловое равновесие в этой среде не устанавливается. Ионизация происходит практически при любом столкновении двух молекул (или атомов) достаточно высокой энергии. Обратный же процесс рекомбинации при столкновении иона с электроном возможен лишь с вылетом кванта электромагнитного поля — фотона, который уносит избыточную кинетическую энергию сталкивающихся частиц. Действительно, в системе центра инерции обе сталкивающиеся частицы имеют положительные кинетические энергии. Поэтому результатом столкновения не может быть рекомбинированный атом, кинетическая энергия которого должна быть нулевой.

В более плотных газах рекомбинация идет при одновременном столкновении трех частиц. Тогда третья частица может унести избыток энергии. Но такие тройные столкновения в межзвездной среде практически не происходят. Таким образом, в межзвездной среде рекомбинация с излучением фотонов не уравнивает ионизацию. Поэтому межзвездная среда оказывается ионизированной до плазменного состояния сравнительно слабыми потоками частиц достаточно высоких энергий.

Естественно образовавшаяся плазма существует в непосредственной близости от земной поверхности. Так, *ионосфера* — внешний слой земной атмосферы — состоит из сильно ионизированного газа. Он оказывает огромное влияние на осуществление радиопередач (см. § 21.2 гл. 21). За ионосферой расположена *магнитосфера*, в которой были открыты радиационные пояса. Их два — внутренний и внешний\*). Они заполнены заряженными частицами, которые удерживаются магнитным полем Земли. Механизм этого явления будет объяснен в конце параграфа.

Схематически радиационные пояса изображены на рис. 18.1. Внутренний пояс окружает Землю в экваториальных широтах. Его ближайшая к поверхности планеты граница располагается на высотах от 600 до 1600 км. В составе этого пояса обнаружены протоны с энергиями от  $(1-2) \cdot 10^7$  до  $(7-8) \cdot 10^8$  эВ и электроны с энергиями от  $10^4$  до  $10^6$  эВ. Форма и состав внутреннего радиационного пояса относительно стабильны. Внешний пояс, наоборот, очень неустойчив. Его состояние сильно зависит от геомагнитной активности. В составе внешнего пояса обнаружены электроны с энергиями от  $10^4$  до  $10^6$  эВ. Протоны с энергиями, превышающими  $3 \cdot 10^7$  эВ, в нем отсутствуют.

Различие свойств внутреннего и внешнего поясов объясняется их происхождением. Считается, что первый черпает заряды за счет распада нейтронов, вылетающих из атмосферы Земли при бомбардировке ее космическими частицами. Эти процессы идут непрерывно с постоянной скоростью и обуславливают высокую стабильность состояния внутреннего пояса. Среднее время пребывания в нем заряженных частиц составляет примерно  $10^9$  с. Утечка частиц из внутреннего радиационного пояса главным образом происходит в результате их столкновений с частицами атмосферы. Нестабильность внешнего пояса обусловлена недостаточной интенсивностью потока космических частиц,

\*) Внутренний радиационный пояс был открыт при полете американского спутника «Эксплорер-1», внешний — при полете третьего советского спутника.

выбивающих электроны при столкновениях. Среднее время пребывания частиц во внешнем поясе на два-три порядка меньше, чем во внутреннем поясе. По современным представлениям, состав внешнего пояса пополняется также корпускулярным излучением Солнца. Основным при этом является захват магнитным полем Земли электронной части этого излучения. Частицы уходят из внешнего пояса в результате потерь ими энергии при столкновениях, а

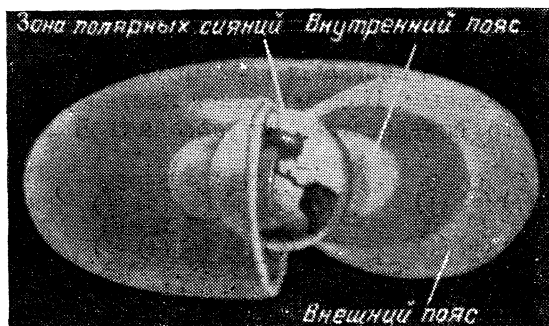


Рис. 18.1.

также взаимодействия с магнитным полем Земли. Резкий сброс частиц из внешнего пояса порождает интенсивные полярные сияния под основаниями пояса (см. рис. 18.1).

Первоначально плазма интересовала исследователей только как особый проводник электрического тока и как источник света (газоразрядные лампы). В настоящее время положение существенно изменилось в связи с пониманием роли, которую плазма играет во Вселенной, и перспектив ее различных применений, в том числе для создания принципиально новых источников энергии (управляемый термоядерный синтез, преобразование тепловой энергии непосредственно в электрическую в магнито-гидродинамическом (МГД) генераторе).

2. Получим количественный критерий отличия плазмы от газа. Качественно отличие слабо ионизированного газа от плазмы проявляется в поведении местных нарушений нейтральности среды, возникающих за счет тепловых флуктуаций. В газе такие нарушения после возникновения развиваются беспорядочно и могут, например, заполнить объем, сравнимый с объемом газа в целом. В плазме же флуктуационное нарушение нейтральности всегда жестко локализовано в достаточно малом объеме.

Для количественного рассмотрения примем такое исходное допущение. Будем учитывать только движение электронов, пренебрегая движением ионов. Это допущение оправдано тем, что ион даже самого легкого элемента — водорода в  $2 \cdot 10^3$  раз тяжелее электрона при той же абсолютной величине заряда. Нашей непосредственной задачей является установление характерных

времен зарядовой декомпенсации зарядов и характерных размеров областей такой декомпенсации.

Допустим, что область с нарушенной электронейтральностью образуется так, как это схематически показано на рис. 18.2. Именно, слой электронов небольшой толщины  $\Delta x$  смещается вправо относительно такого же слоя ионов на расстояние  $\xi \ll \Delta x$ . При этом образуется система типа плоского конденсатора. Его обкладками являются два слоя одной и той же толщины  $\xi$ . Левый слой обогащен положительным зарядом, а правый — отрицательным. Поверхностная плотность зарядов на обкладках такого конденсатора по абсолютной величине будет

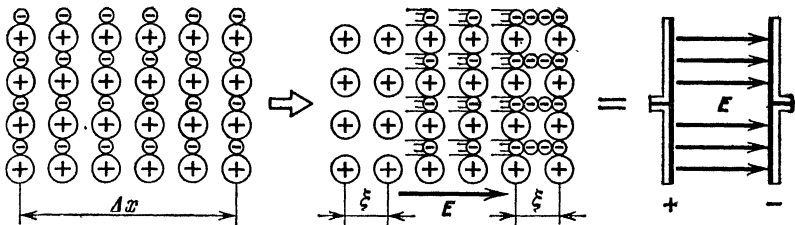


Рис. 18.2.

равна  $q_0 n \xi$ . Здесь  $q_0$  — величина элементарного заряда, а  $n$  — концентрация электронов (равная в плазме концентрации ионов). Согласно формуле (16.24а) между обкладками «плазменного» конденсатора, которые и являются областями с нарушенной электронейтральностью, возникает поле величины  $E = \frac{1}{\epsilon_0} q_0 n \xi$ . Пусть площадь обкладок равна  $\Delta S$ . Тогда внутри конденсатора будет  $n \Delta x \Delta S$  электронов. На них будет действовать электрическая сила  $F = -q_0 n \Delta x \Delta S E = -q_0^2 n^2 \Delta x \Delta S \xi / \epsilon_0$ . Масса всех этих электронов равна  $m_e n \Delta x \Delta S$ , где  $m_e$  — масса одного электрона. Ускорение, с которым движутся электроны в «плазменном» конденсаторе, равно  $d^2 \xi / dt^2$ . Поэтому согласно второму закону Ньютона для электронов отрицательной обкладки

$$m_e n \Delta x \Delta S \frac{d^2 \xi}{dt^2} = - \frac{q_0^2 n^2}{\epsilon_0} \Delta x \Delta S \xi,$$

или

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + \omega_{\text{пл}}^2 \xi = 0,$$

где

$$\omega_{\text{пл}} = \left( \frac{n q_0^2}{m_e \epsilon_0} \right)^{1/2}, \quad (18.1)$$

(В системе СГС вместо множителя  $1/\epsilon_0$  в скобках стоит коэффициент  $4\pi$ .) Мы получили уравнение колебательного движения, происходящего с частотой, выраженной соотношением (18.1). Эти колебания называются *плазменными*. Частота  $\omega_{\text{пл}}$  называется *плазменной частотой*. Ее называют также *лэнгмюровской*.

Сформулируем полученный физический результат: *при нарушении электронейтральности в какой-либо области плазмы в ней возникают гармонические колебания плотности заряда с частотой  $\omega_{\text{пл}}$* . Без доказательства добавим, что учет столкновений ионов и электронов (друг с другом и с нейтральными молекулами) приводит к затуханию плазменных колебаний. Подчеркнем, что плазменные колебания не имеют волнового характера — *нарушения электронейтральности не распространяются по плазме*. Очевидно, что нарушения электронейтральности можно наблюдать только в течение промежутков времени  $t_{\text{пл}} \sim \omega_{\text{пл}}^{-1}$ . Это время является для плазмы характерным. Для видов плазмы, исследуемых в лабораторных условиях,  $10^{-13}$  с  $\ll t_{\text{пл}} \ll 10^{-3}$  с (см. ниже диаграмму на рис. 18.3). На временах, превышающих  $t_{\text{пл}}$ , нарушения электронейтральности не проявляются. Плазменные колебания усредняют эти нарушения до нуля.

Определим теперь характерный линейный размер областей зарядовой декомпенсации. По порядку величины он равен амплитуде плазменных колебаний, возникающих за счет тепловых флуктуаций. Обозначим искомый размер через  $\delta$ . Энергия плазменных колебаний одного электрона будет величиной порядка  $m_e \omega_{\text{пл}}^2 \delta^2$  (см. § 7.1 тома I). В равновесном состоянии эта энергия в среднем равна тепловой энергии, приходящейся на одну степень свободы, т. е.  $kT$ , где  $k$  — постоянная Больцмана, а  $T$  — температура плазмы. Отсюда для оценки  $\delta$  получаем условие

$$m_e \omega_{\text{пл}}^2 \delta^2 = kT,$$

из которого следует, что

$$\delta = \left( \frac{kT}{m_e \omega_{\text{пл}}^2} \right)^{1/2} = \left( \frac{\epsilon_0 kT}{nq_0^2} \right)^{1/2}. \quad (18.2)$$

(В системе СГС в скобках вместо множителя  $\epsilon_0$  появляется коэффициент  $1/4\pi$ .) Эта величина называется радиусом или, что то же, *длиной Дебая — Хюккеля*, а сокращенно — *просто дебаевским радиусом* \*). Только в тех областях, размеры которых не

\*) Впервые эта величина была введена П. Дебаем и Е. Хюккелем в 1923 г. при исследовании растворов сильных электролитов и только потом была перенесена в физику плазмы. Растворы сильных электролитов (степень диссоциации близка к единице) родственны плазме высоким содержанием подвижных зарядов.

превышают  $\delta$ , можно наблюдать флуктуационные нарушения электронейтральности.

Теперь мы можем дать определение плазмы, в котором устанавливается количественный смысл ее квазинейтральности.

Плазма — это ионизированный газ, для которого дебаевский радиус мал в сравнении с линейными размерами области, занимаемой газом.

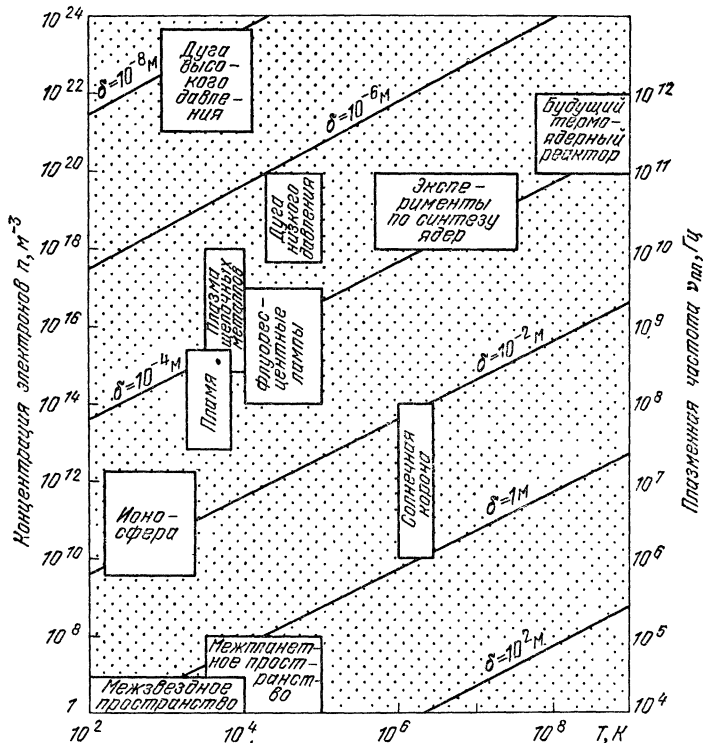


Рис. 18.3.

Именно так впервые была определена плазма И. Лэнгмюром, основоположником учения об этом состоянии вещества.

Ограничение на объем газа снизу является условием, невыполнение которого делает плазменные колебания невозможными, т. е. нарушает действие механизма выравнивания плотностей разноименных зарядов. Исчезает согласованность в движении электронов. Электронейтральность ионизированного газа в различных его частях нарушается непредсказуемым образом, так что само это понятие в применении к такому газу теряет ясное содержание.

Представление об основных характеристиках наиболее важных видов плазмы дает диаграмма, изображенная на рис. 18.3. По ее вертикальной правой оси откладывается обычная частота  $\nu_{\text{пл}} = \omega_{\text{пл}}/2\pi$ . Мы обращаем внимание на то, что дебаевский радиус распространенных видов плазмы на несколько порядков превосходит характерный микроскопический размер в  $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ м}$ . Это значит, что в плазме несущественны квантовые эффекты. Поэтому

*плазма — объект классической, т. е. неквантовой, физики.*

Покажем теперь, что

*дебаевский радиус характеризует расстояние, на котором плазма экранирует себя от локального избытка заряда.*

Пусть в плазму внесен пробный положительный заряд  $q$ . Расположенные по соседству электроны будут им притягиваться, а ионы, наоборот, отталкиваться. В результате вокруг заряда возникает отрицательно заряженное сферически симметричное облако (рис. 18.4). Оно будет экранировать действие заряда  $q$  на расположенную вокруг плазму. Экранировка возникает в результате суперпозиции поля заряда  $q$  и поля отрицательно заряженного облака. Ясно, что на некотором удалении от заряда  $q$  поле, образованное такой суперпозицией, будет исчезающе малым. Это расстояние и определяет радиус отрицательно заряженного облака.

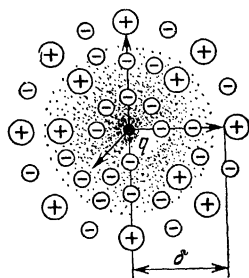


Рис. 18.4.

Оценим радиус этого облака, т. е. размер той области, в пределах которой сказывается действие заряда  $q$ . Пусть заряд  $q$  закреплен. Выберем систему отсчета с началом в месте нахождения этого заряда (рис. 18.4). Пусть плазма находится в равновесном состоянии. Тогда потенциал поля, возникающего в плазме при внесении в нее заряда  $q$ , должен удовлетворять уравнению Пуассона (16.2), в котором плотность  $\rho$  электрических зарядов должна определяться с помощью распределения Больцмана (9.2) (см. § 9.2 тома I). Согласно этому распределению плотности электронов и ионов в том месте, где потенциал равен  $\phi$ , будут равны, соответственно,  $-z_0 n_0 e^{(q_0 \phi / kT)}$  и  $q_0 n_0 e^{-(q_0 \phi / kT)}$ .

Допустим, что заряд  $q$  настолько мал, что  $q_0 \phi \ll kT$ . Это условие даже для высоких температур ( $T > 10^4 \text{ К}$ ) выполняется вне малой (по сравнению с  $\delta$ ) области вокруг внесенного заряда. Поэтому больцмановские экспоненты можно в хорошем приближении заменить двумя первыми членами их разложения в степенной ряд. Тогда для плотности заряда получим

$$\rho = q_0 n \{ e^{-(q_0 \phi / kT)} - e^{q_0 \phi / kT} \} \approx - \frac{2q_0^2 n \phi}{kT}.$$

Соответственно уравнение Пуассона (16.2) запишется с учетом (18.2) в виде

$$\Delta\varphi + \frac{2}{\delta^2}\varphi = 0.$$

Используем теперь характерный для физики прием перехода к безразмерным величинам. Перейдем от векторной переменной  $\mathbf{r}$  к новой безразмерной переменной  $\xi = \mathbf{r}/\delta$ . При этом, очевидно, будет  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = \frac{1}{\delta} \frac{\partial}{\partial \xi}$ , так что уравнение для  $\varphi$  примет вид

$$\Delta_{\xi}\varphi + 2\varphi = 0,$$

где  $\Delta_{\xi} = \left(\frac{\partial}{\partial \xi_x} \frac{\partial}{\partial \xi_x} + \frac{\partial}{\partial \xi_y} \frac{\partial}{\partial \xi_y} + \frac{\partial}{\partial \xi_z} \frac{\partial}{\partial \xi_z}\right)$ . Теперь уравнение не содержит размерных параметров. Оно также не содержит чисел, заметно (на порядок и более) отличных от единицы. Поэтому на физическом уровне строгости можно ожидать, что если это уравнение имеет решение, спадающее на бесконечности, то размер области, в которой решение отлично от нуля, будет порядка единицы. А это означает, что линейный размер области, в которой отлично от нуля решение  $\varphi(\mathbf{r})$ , будет порядка дебаевского радиуса  $\delta$ . На расстояниях, значительно превышающих  $\delta$ , заряд будет практически полностью экранирован. Отметим, что, как можно проверить, исследуемое уравнение Пуассона действительно имеет точное решение (при  $\mathbf{r} \neq 0$ )

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-\left(\frac{r\sqrt{2}}{\delta}\right)}, \quad (18.3)$$

очень быстро спадающее при  $r > \delta$  и ведущее себя как  $q/4\pi\epsilon_0 r$  в окрестности начала координат, где экранирование еще не проявляется, так что потенциал при  $r \ll \delta$  должен быть таким же, как и для заряда в отсутствие плазмы.

Подчеркнем, что плазма экранирует не только поле помещенного в нее заряда, но и внешнее электрическое поле. Расстояние, на которое внешнее поле проникает в плазму, тоже имеет порядок дебаевского радиуса.

Обратим внимание на следующее обстоятельство. До сих пор мы говорили о единой температуре плазмы. Такая единая температура действительно существует, если плазма находится в состоянии полного теплового равновесия, в котором средние значения кинетических энергий одного иона и одного электрона одинаковы. Это условие часто нарушается. Например, при получении плазмы путем создания газового разряда энергия от источника питания передается в основном электронам, как наибо-



лее подвижным частицам. Ионы набирают энергию во вторичных процессах столкновений с электронами. Необходимое для выравнивания число столкновений должно быть не менее нескольких тысяч на каждый ион. Но это выравнивание возможно только при следующих условиях: а) передача энергии электронам от внешних источников прекращается; б) энергия не передается от плазмы к другим телам (обычно эта передача осуществляется путем теплообмена). Эти условия на практике часто не соблюдаются. Тогда средние значения кинетической энергии для электронов и ионов оказываются различными. Это означает, что температура  $T_e$  электронов одна, а ионов  $T_i$  — другая, причем  $T_e > T_i$ . С увеличением плотности плазмы возрастает роль электрон-ионных столкновений, которые выравнивают температуры  $T_e$  и  $T_i$ . В некоторых, гораздо более редких случаях  $T_i > T_e$ . Например, это наблюдается в условиях разряда большой мощности, приводящего к распространению в плазме ударной волны. В дальнейшем мы будем рассматривать только равновесную плазму, для которой  $T_e = T_i = T$ .

3. Из диаграммы рис. 18.3 видно, что для основных видов плазмы

$$N = n\delta^3 \gg 1. \quad (18.4)$$

Например, для наиболее плотной части земной ионосферы  $n \approx 10^{12} \text{ м}^{-3}$ ,  $\delta \approx 10^{-3} \text{ м}$  и  $n\delta^3 \approx 10^3$ . Соотношение (18.4) показывает, что в областях зарядовой декомпенсации находится очень много частиц. Это означает, что

*в плазме одновременно взаимодействует громадное число частиц. Этим плазма резко отличается от обычных газов, в которых частицы взаимодействуют друг с другом в основном только при парных столкновениях.*

Этим свойством плазма обязана дальнодействию кулоновских сил, вовлекающих во взаимодействие множество частиц.

Следующее важное свойство плазмы состоит в том, что *в плазме средняя потенциальная энергия взаимодействия частиц ничтожна в сравнении с их кинетической энергией. Поэтому тепловое движение в плазме и идеальном газе обладает большим сходством. Благодаря этому термодинамические свойства плазмы с хорошей точностью описываются уравнением состояния идеального газа.*

Убедимся в том, что плазма действительно обладает этим свойством. Для этого оценим среднее значение потенциальной энергии плазменной частицы, для определенности электрона и иона. Электрон имеет заряд  $-q_0$ . Вокруг этого заряда создается экранирующее облако радиуса порядка  $\delta$  с суммарным зарядом  $+q_0$ . Поэтому средняя потенциальная энергия  $U_e$  электрона по порядку величины равна потенциальной энергии взаимодействия

зарядов  $+q_0$  и  $-q_0$  на расстоянии  $\delta$ :

$$\bar{U}_э \approx -\frac{q_0^2}{4\pi\epsilon_0\delta}. \quad (18.5)$$

Оценим теперь отношение  $-\bar{U}_э$  к средней кинетической энергии одной частицы плазмы. Если плазма имеет температуру  $T$ , то средняя кинетическая энергия частицы по порядку величины равна  $kT$ . Воспользовавшись (18.2), получим

$$-\frac{\bar{U}_э}{kT} \approx \frac{q_0^2}{\epsilon_0 kT\delta} = \frac{1}{\delta^3 n}.$$

Согласно (18.4) отсюда следует, что в распространенных видах плазмы  $|\bar{U}_э/kT| \ll 1$ . Такая же оценка справедлива и для ионов.

Поскольку взаимодействие заряженных частиц плазмы мало, то импульс каждой из них меняется со временем очень медленно. А это означает, что их траектории являются плавными линиями, которые искривляются очень незначительно (рис. 18.5)\*. Этим плазма резко отличается от обычных газов, состоящих из электронейтральных молекул. В таких газах уже одно столкновение может круто изменить направления движения соударяющихся молекул. Поэтому молекулы газа движутся по траекториям в виде ломаных линий (рис. 18.5).

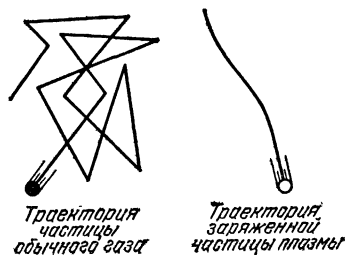


Рис. 18.5.

В плазме такие резкие столкновения электронов и ионов случаются крайне редко из-за дальнего действующего характера кулоновских сил. Молекула в газе пролетает длину свободного пробега, испытывая затем резкое столкновение с одной из молекул газа. Заряженная частица плазмы непрерывно подвержена действию кулоновских сил многих соседей, но «лобовые» столкновения для этой частицы очень редки. Свободный пробег электрона или иона между двумя «лобовыми» столкновениями намного больше дебаевского радиуса. Поэтому столкновениями частиц в плазме в хорошем приближении можно пренебрегать. Потенциальные энергии частиц плазмы быстро возрастают при нарушении электронейтральности. Это возрастание и приводит к возникновению плазменных колебаний, рассмотренных в п. 2.

Резюмируем основные свойства плазмы:

\*) Эти искривления происходят, конечно, случайным образом.

Плазма представляет собой идеальный газ, состоящий из двух противоположно заряженных компонент — электронной и ионной. Эти компоненты могут свободно двигаться относительно друг друга, но только так, чтобы соблюдалось условие квазинейтральности.

Плазменные колебания — это упорядоченное движение плазменных зарядов, подобное звуку в веществе. Это движение дополняет тепловое (хаотическое) движение, участвуя в котором каждая заряженная частица плазмы перемещается по плавно изгибающейся линии.

## § 18.2. Проводимость плазмы. Плазма в магнитном поле

1. Рассмотрим проводимость плазмы. В плазме наиболее подвижными носителями являются электроны, поэтому проводимость плазмы в основном электронами и определяется. Тем самым согласно механизму проводимости (см. § 17.1) нашей задачей является рассмотрение  $\tau_e$  — времени релаксации плазменных электронов. Оно определяется как среднее время, за которое движение электрона теряет свою упорядоченность. Это происходит, когда траектория электрона поворачивается на угол, близкий к  $\pi/2$ . Расчет  $\tau_e$  очень громоздок для нашего курса. Опуская этот расчет, приведем его результат:

$$\tau_e = \frac{4\pi e_0^2 m_e^{1/2}}{n_e q_0^4} \frac{(kT)^{3/2}}{\ln(4\pi N)}.$$

Поэтому с точностью до численных коэффициентов, близких к единице, проводимость плазмы равна

$$\sigma = \frac{n_e q_0^2}{m_e} \tau_e = \frac{4\pi e_0^2}{m_e^{1/2} q_0^2} \frac{(kT)^{3/2}}{\ln(4\pi N)}. \quad (18.6)$$

Учтя этот коэффициент, подставив в (18.6) численные значения констант, получим простую формулу для оценки проводимости плазмы:

$$\sigma \approx 10^{-3} T^{3/2} (\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1}. \quad (18.7)$$

Проводимость плазмы обладает следующими свойствами. Она очень слабо (логарифмически) зависит от концентрации носителей тока. Согласно (18.4), (18.6)  $\sigma \sim (\ln n)^{-1}$ . Проводимость слабо ионизированных газов ведет себя совсем иначе. Она растет прямо пропорционально  $n$ . Это различие объясняется тем, что в газе при возрастании плотности растет число столкновений носителя с другими частицами, а в плазме столкновения практически не играют роли. Плазма резко отличается от слабо ионизированных газов и температурной зависимостью проводи-

мости. Проводимость плазмы быстро, пропорционально  $T^{3/2}$  растет с температурой (слабую логарифмическую зависимость от  $T$  здесь можно в расчет не принимать). Проводимость же слабо ионизированных газов падает с температурой по закону  $T^{-1/2}$ . Объясняется это тем, что время релаксации заряда в обычном газе обратно пропорционально тепловой скорости, которая, как известно, пропорциональна  $T^{1/2}$ . Оба резких отличия обусловлены существенно разными механизмами взаимодействия частиц в плазме и в обычных газах. В плазме главную роль играют электрон-ионные столкновения, а в слабо ионизированных газах — соударения электронов с электронейтральными атомами и молекулами.

Быстрое возрастание проводимости плазмы с увеличением температуры приводит к тому, что достаточно разогретая плазма становится очень хорошим проводником. Например, согласно (18.7) при температурах порядка  $10^8$  К, достигаемых в установках для термоядерных реакций, проводимость плазмы имеет значения порядка  $10^9$  (Ом·м) $^{-1}$ , что на порядок превышает проводимость лучших металлических проводников \*).

2. Рассмотрим поведение плазмы в магнитном поле. Ограничимся приближением, в котором плазму можно рассматривать как систему независимых частиц в магнитном поле. Такое рассмотрение правомерно, если взаимодействие частиц с магнитным полем намного сильнее их взаимодействия друг с другом. Это условие означает, что плазма или очень разрежена (малые  $n$ ), или достаточно сильно разогрета (большие  $T$ ). Действительно, с уменьшением  $n$  и увеличением  $T$  возрастает дебаевский радиус  $\delta$ . Согласно (18.5) это приводит к уменьшению энергии взаимодействия частиц плазмы друг с другом.

Итак, в избранном приближении мы можем опираться на законы движения одиночного заряда в магнитном поле (см. § 4.1 тома I). В большинстве наблюдаемых видов плазмы движение зарядов является нерелятивистским. Поэтому ограничимся законами нерелятивистской динамики заряда в магнитном поле. Напомним ее. Каждый заряд движется по винтовой линии, закручивающейся вокруг магнитного поля, с циклотронной частотой  $\omega_e = q_0 B / m_e$  для электронов и  $\omega_i = q_0 B / m_i$  для ионов. Здесь  $B$  — абсолютное значение магнитного поля там, где находится заряд. Радиусы винтовых линий для электронов и ионов равны, соответственно,  $R_e = m_e v_e / q_0 B$  и  $R_i = m_i v_i / q_0 B$ , где  $v_e$  и  $v_i$  — скорости, соответственно, электронов и ионов. Винтообразное движение плазменных частиц будет продолжаться до тех пор, пока на их пути не возникнет препятствие. Им может оказаться какая-то другая частица плазмы или инородное тело, например

\*) Но не сверхпроводников, у которых сопротивление совсем отсутствует.

стенка камеры, в которой находится плазма. Всякое столкновение с препятствием разрушает упорядоченное движение плазмы. В условиях, которые мы рассматриваем, столкновения частиц друг с другом редки, а магнитное поле достаточно велико. В сильных магнитных полях мал циклотронный радиус. Следовательно, малым является радиус цилиндрической поверхности, на которую навиваются винтовая линия, по которой движется каждый заряд плазмы. Поэтому ничтожной является и вероятность столкновений зарядов плазмы с инородными телами. Это означает, что упорядоченное движение зарядов плазмы по винтовым линиям будет разрушаться очень медленно. Плазма будет перемещаться вдоль магнитного поля, которое будет удерживать радиус плазменного шнура (т. е. того цилиндра из плазмы, вдоль которого создан электрический ток). Такое движение плазмы наблюдается, например, у поверхности Солнца. Оно называется солнечным протуберанцем. Каждый протуберанец — это выброс солнечной плазмы, направляемой магнитным полем, существующим в районе выброса (рис. 18.6).

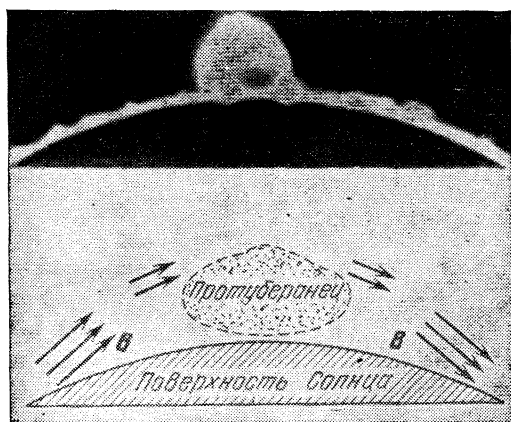


Рис. 18.6.

Способность магнитного поля удерживать плазму от растекания широко используется при конструировании установок, предназначенных для осуществления термоядерного синтеза в высокотемпературной водородной плазме (ее температура должна быть не менее  $10^8$  К). Поддержание столь высокой температуры невозможно, если плазма будет соприкасаться со стенками камеры, в которую помещена. Контакт со стенками быстро охлаждает плазму, приводя одновременно к разрушению материала камеры. Принципиальную возможность избежать этого дает

магнитное поле, оказывающее на плазму стабилизирующее действие.

Существуют несколько вариантов использования магнитного поля. В одних случаях плазму помещают в камеру тороидального вида. Если при этом используется только действие внешних магнитных полей, то соответствующие установки называются *стеллараторами*. В установках типа «Токамак» (токамагнитная камера) стабилизация достигается с помощью магнитного поля, которое является суперпозицией внешнего поля и поля, созданного самой плазмой. Последнее приводит так называемому «пинч-эффекту» (в переводе с английского на русский слово «pinch» означает «сжимать»). Суть этого явления иллюстрирует рис. 18.7. На нем изображен поток плазмы. Он создает обвивающее плазму магнитное поле. На рис. 18.7 показана сила  $F$ , действующая на плазму со стороны ее собственного магнитного поля  $B$ . Видно, что эта сила плазму сжимает.

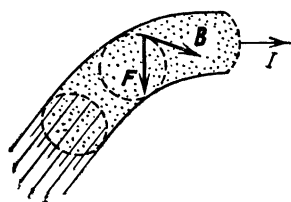


Рис. 18.7.

В стеллараторах и токамагнитных камерах плазма помещается в объем тороидального вида и образует замкнутое кольцо (рис. 18.8). Такая конфи-

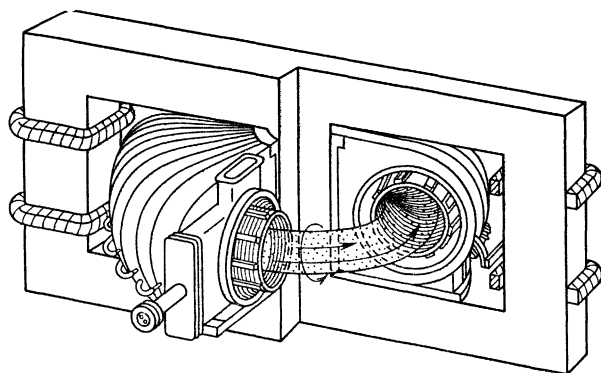


Рис. 18.8.

гурация не единственна. В машинах с магнитными зеркалами или магнитными пробками используется иной принцип удержания плазмы. Он заклю-

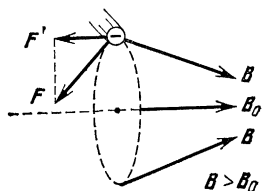


Рис. 18.9.

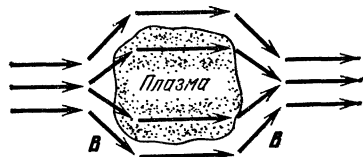


Рис. 18.10.

чается в следующем. Рассмотрим электрон, который, двигаясь по винтовой траектории, попал в область неоднородности магнитного поля (рис. 18.9). Пусть к этой области электрон подошел слева. На рис. 18.9 выделена пунк-

тиром составляющая винтового движения электрона, которая является вращением по окружности. Окружность показана в перспективе так, что левая часть изображенного контура является дальней к читателю половиной окружности. На электрон будет действовать магнитная сила Лоренца  $F$ , у которой будет составляющая  $F'$ , направленная противоположно возрастанию магнитного поля. Эта сила и приводит к отражению электрона от области с повышенным значением поля. Мы видим, что неоднородные магнитные поля могут выполнять роль своеобразных зеркал для заряженных частиц. Это явление и используется в машинах с магнитными зеркалами. В них плазма собирается в виде сгустка (рис. 18.10). Своеобразной естественной машиной с магнитным зеркалом является Земля, которая своим магнитным полем удерживает радиационные пояса (рис. 18.11).

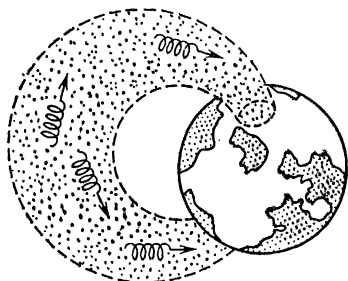


Рис. 18.11.

3. Для более плотной плазмы механизм ее взаимодействия с магнитными полями более сложен. В

плазме возникают индукционные токи, которые сами создают магнитные поля, добавляющиеся к внешнему полю. Еще более сложная картина получается при наличии в плазме сильных токов, создаваемых внешними электрическими полями. Эти токи тоже порождают магнитные поля, вызывающие обратное влияние на токи. Эти сложные взаимодействия плазмы с электромагнитными полями рассматриваются в *магнитной гидродинамике* и в *кинетической теории плазмы*. В магнитной гидродинамике плазма трактуется как двухкомпонентный разноименно заряженный газ, подчиненный условию квазинейтральности. В наиболее точной кинетической теории рассматриваются функции распределения электронов и ионов по координатам и по скоростям.

Центральной в физике плазмы является проблема устойчивости плазменных конфигураций. Общая постановка задачи об устойчивости плазмы такова. Пусть плазма сконцентрирована в ограниченном объеме в пустоте с помощью магнитного поля и находится в равновесном состоянии. Будет ли это состояние сохраняться в течение длительного времени или же случайные флуктуации вызовут нарастающие во времени возмущения, которые приведут к растеканию плазмы? Главное общее правило в отношении устойчивости таково: система, в общем, тем устойчивее, чем меньше у нее степеней свободы \*). У плазмы по сравнению с газом, состоящим из молекул, имеется дополнительное и макроскопически большое число степеней свободы движения электронной компоненты относительно ионной. Из-за этого плазма является крайне неустойчивым объектом.

\*) Именно поэтому, чтобы не упасть, идя при гололеде, надо держать все тело в напряжении, т. е. ликвидировать лишние степени свободы.

Все неустойчивости плазмы подразделяют на две группы. Одну из них составляют *гидромагнитные неустойчивости*, связанные с перемещением в пространстве отдельных макроскопических участков плазмы. К другой группе относятся *кинетические неустойчивости*, которые обусловлены различным поведением отдельных групп частиц. Наиболее опасны гидромагнитные неустойчивости. Гидромагнитная неустойчивость наблюдается, например, в плазменном шнуре. Как параллельные и одинаково направленные токи (см. § 16.2), отдельные нити плазменного шнура притягиваются друг к другу. При достаточно мощном токе силы этого притяжения вполне достаточны для того, чтобы шнур не растекался в стороны и тем самым не соприкасался бы со стенками камеры (левая часть рис. 18.12). Однако

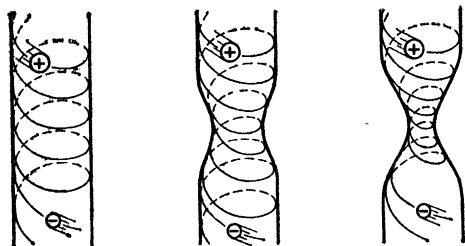


Рис. 18.12.

этого шнура неустойчив по отношению к возникновению в шнуре перетяжек (средняя часть рис. 18.12). Действительно, пусть случайно возникла малая перетяжка. Сила притяжения параллельных токов возрастает при уменьшении расстояния между ними. Поэтому в области перетяжки возникнут дополнительные силы, стремящиеся еще более уменьшить ее диаметр. В результате перетяжка быстро развивается (правая часть рис. 18.12), что приводит к разрушению шнура; после чего плазма беспорядочно рассеивается по всему объему камеры.

Общая причина гидромагнитных видов неустойчивости состоит в том, что плазма стремится уйти в сторону ослабления магнитного поля. Поэтому если граница плазмы оказывается там, где поле убывает от границы наружу, то состояние плазмы может оказаться неустойчивым.

Доказано, что в машинах с магнитными зеркалами можно создать магнитное поле, обеспечивающее гидромагнитную устойчивость плазмы во всех участках ее границы (в частности, устойчивы радиационные пояса Земли). Напротив, в областях тороидального вида создать магнитное поле, которое везде возрастало бы внутрь объема, в принципе невозможно. В этих случаях и возникает вопрос об устойчивости плазмы. Ответ на него зависит от давления плазмы. Если оно велико настолько, что оказывается сравнимым с плотностью магнитной энергии, то на поверхности всегда возникают локальные возмущения, разрушающие границу плазмы. При гораздо меньших давлениях, которые имеют место в современных установках типа «Токамак», локальные возмущения и на границе, и в объеме автоматически стабилизируются. В этих условиях удается получать плазму устойчивой конфигурации.



Примером кинетической неустойчивости является *токово-конвективная*, или *штопорная*, неустойчивость. Она развивается в плазме при наличии тока, параллельного магнитному полю. Если в плазме с продольным током возникает флуктуация температуры, то вследствие температурной зависимости проводимости плазмы такая флуктуация изменяет электрическое поле в плазме. При некоторых условиях это может вызвать движение плазмы, перпендикулярное магнитному полю. При наличии градиента температуры такое движение может усилить первоначальные тепловые флуктуации за счет перемещения более горячих слоев плазмы на место более холодных, в результате чего и развивается штопорная неустойчивость. С увеличением температуры этот вид неустойчивости исчезает, так как вместе с температурой растет проводимость плазмы. По-видимому, влияние этой неустойчивости ограничивается областью электронной температуры не выше  $10^6$  К.

## ГЛАВА 19

# ДИЭЛЕКТРИКИ В СТАЦИОНАРНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЯХ

### § 19.1. Поляризованность и связанные заряды поляризации

1. В настоящей главе будут рассмотрены свойства диэлектриков в стационарных электрических полях и влияние диэлектриков на эти поля в условиях, при которых проводимостью диэлектриков можно пренебречь (что не всегда правомерно)\*). В этих условиях диэлектрик является веществом, в котором все заряды связаны в микроскопические нейтральные комплексы. В газах и диэлектрических жидкостях этими комплексами являются атомы и молекулы. В диэлектрических кристаллах микроскопическими нейтральными комплексами являются совокупности либо ионов (например,  $\text{Na}^+$  и  $\text{Cl}^-$  в кристалле поваренной соли), либо ионов и электронов (алмаз), входящих в элементарную ячейку (т. е. минимальную совокупность частиц, периодическим повторением которой можно составить весь кристалл (см. § 13.1 тома I)). Связанные в комплексе заряды не могут удаляться друг от друга на макроскопические расстояния. Эти расстояния всегда микроскопические, порядка  $10^{-10}$  м.

Главным макроскопическим электрическим свойством диэлектриков является их *поляризация*.

*Поляризацией называется явление, заключающееся в возникновении в каждом объеме диэлектрика макроскопического электрического дипольного момента.*

Этот дипольный момент, отнесенный к единице объема, называется *поляризованностью* (\*\*). Поляризованность будет обозна-

---

\*) Так, заряженный металлический шар, окруженный со всех сторон диэлектрической средой (например, находящийся в замкнутом откачанном сосуде на подставке, сделанной из диэлектрического материала), постепенно разряжается. На это уходит довольно большое время: дни и даже месяцы. Скорость разряда зависит от вещества системы, ее термодинамического состояния и от окружающих полей. Нельзя также исключать из рассмотрения носители тока в условиях, при которых диэлектрик близок к пробое.

\*\*\*) Старое название — вектор поляризации.

чатся через  $\mathbf{P}$ . Она является функцией радиус-вектора точки, в окрестности которой расположен данный единичный объем. В нестационарных случаях (которые будут рассмотрены позднее) поляризованность зависит явно еще и от времени, так что в общем случае  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ .

Как всякое макроскопическое явление, поляризация имеет свою микроскопическую природу. В диэлектриках либо уже имеются, либо каким-то образом возникают (например, под действием внешнего электрического поля, раздвигающего в разные стороны положительные и отрицательные заряды) микроскопические дипольные моменты  $\mathbf{p}$ . Усредненное по физически бесконечно малому объему значение суммарного дипольного момента на единицу объема диэлектрика и равно поляризованности в месте расположения этого объема. Из определения следует, что поляризованность имеет размерность дипольного момента, отнесенную к размерности объема. Таким образом, в системе СИ поляризованность измеряется в Кл/м<sup>2</sup>, а в системе СГС — отношением единицы заряды к см<sup>2</sup>.

Микроскопическую природу поляризации схематически иллюстрирует рис. 19.1. На нем изображено сечение одного из единичных объемов поляризованной кристаллической структуры.

2. Поляризация не может изменить суммарного заряда вещества. Она влияет только на распределение электричества в веществе, т. е. сказывается лишь на плотности электрических зарядов.

Вот как это происходит. Обратимся к рис. 19.2. В его левой части показан один из участков неполяризованного вещества. Предполагается, что вещество состоит из сферически симметричных атомов, которые не обладают дипольными моментами. Эти атомы

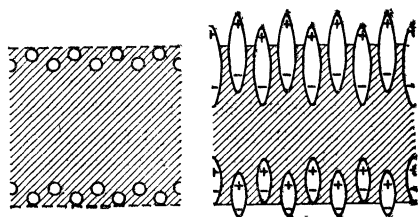


Рис. 19.2.

схематически изображены кружками. В правой части рис. 19.2 показан тот же участок, но уже поляризованного вещества. Поляризация возникла в результате растяжения атомов, при котором ядро каждого атома несколько сместилось относительно центра распределения его электронов. Деформированные атомы (для наглядности преувеличено) изображены овалами,

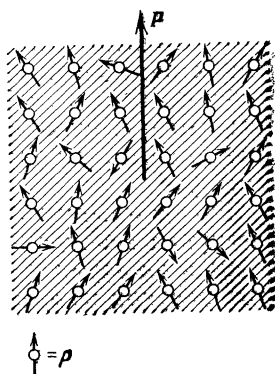


Рис. 19.1.

в которых значками  $+$  и  $-$  отмечены положения ядер и центров распределения электронов.

Предположим, что в верхней части выделенного участка атомы деформированы сильнее, чем в нижней. Пусть при этом из объема участка выходят вверх ядра двух поверхностных рядов, а внизу — центры распределения электронов только одного поверхностного ряда. В результате такого деформирования суммарный заряд в выделенном объеме вещества уже не будет нулевым. Он будет отрицательным. Мы видим, что поляризация может приводить к возникновению объемной плотности электрических зарядов в диэлектрическом веществе. Заряд, приходящийся на единицу объема диэлектрика и возникающий в результате поляризации его вещества, называется *объемной плотностью зарядов поляризации*. Эта величина будет обозначаться через  $\rho_{\text{п}}$ .

Кроме объемной плотности при поляризации на границе диэлектрика возникают поверхностные заряды. Механизм образования этих зарядов также виден из правого рис. 19.2. Но теперь этот рисунок нужно рассматривать как изображение одного из участков всего диэлектрика. *Поверхностная плотность зарядов поляризации* будет обозначаться через  $\sigma_{\text{п}}$ . Объемная и поверхностная плотности зарядов поляризации, так же как и поляризованность, являются величинами макроскопическими.

Примем теперь *первое основное допущение* о структуре диэлектриков:

*В диэлектриках силы притяжения между соседними микроскопическими диполями значительно слабее сил, связывающих разноименные заряды внутри диполя.*

Из этого допущения следует, что при разделении (разрезании, разрыве и т. д.) диэлектрика на части каждый микроскопический диполь на границе раздела не разрывается, а целиком остается на одной из образующихся при разделении поверхностей.

Выразим первое основное допущение в математической форме. Суммарный заряд каждого микроскопического диполя равен нулю. Поэтому из принятой нами неразрушаемости микроскопических диполей вытекает, что любым образом вырезанный из диэлектрика образец имеет нулевой суммарный заряд:

$$\int_V \rho_{\text{п}} dV + \oint_S \sigma_{\text{п}} dS = 0. \quad (19.1)$$

Здесь  $V$  — объем образца, а  $S$  — его поверхность. Справедливость (19.1) подтверждается как теоретическими оценками, так и опытными фактами. В частности, при дроблении диэлектрики не становятся заряженными.

Поясним смысл (19.1) на простейшем примере диэлектрического куба. Этот куб можно представлять себе как совокупность двух противоположно заряженных кубов (левая часть рис. 19.3), совмещенных друг с другом. При таком совмещении в диэлектрике  $\rho_n = 0$ ,  $\sigma_n = 0$ , так что (19.1) выполняется тривиально. При однородной поляризации один куб сдвигается относительно другого (средняя часть рис. 19.3), так что на двух противоположных плоскостях появляются разноименные поверхностные плотности  $\sigma_n$ . В этом случае  $\rho_n = 0$ ,  $\sigma_n \neq 0$ , но (19.1) соблюдается, поскольку  $\oint_S \sigma_n dS = 0$ . Наконец, в правой части рис. 19.3

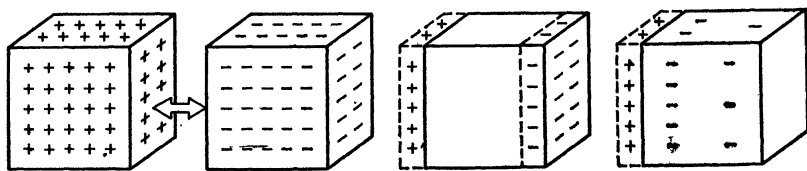


Рис. 19.3.

изображена ситуация, когда куб положительных зарядов равномерно растягивается при неизменном кубе отрицательных зарядов. В этом случае появляются поверхностные положительные заряды и отрицательные объемные, поскольку у куба положительных зарядов возрастает объем и, следовательно, падает объемная плотность зарядов. В этом случае соотношение (19.1) соблюдается нетривиальным образом в том смысле, что оба интеграла в (19.1) по отдельности нулю не равны, а нулю равна только их сумма.

Из первого основного допущения о структуре диэлектриков получаются следующие связи между величинами  $\mathbf{P}$ ,  $\rho_n$  и  $\sigma_n$ :

$$\sigma_n = P_n, \quad (19.2)$$

$$\rho_n = -\frac{\partial P}{\partial r}. \quad (19.3)$$

В (19.2) через  $P_n$  обозначена нормальная компонента ( $\mathbf{P}_n$ ) поляризованности на поверхности диэлектрика в точке, в которой внешняя нормаль к поверхности равна  $\mathbf{n}$ .

Докажем формулы (19.2), (19.3). Для этого рассмотрим рис. 19.4. На этом рисунке изображен поперечный разрез физически бесконечно малого объема у поверхности поляризованного диэлектрика. Малость объема означает, что можно поляризованность  $\mathbf{P}$  всюду считать постоянной, а поверхность диэлектрика плоской. У поверхности диэлектрика вырезан наклонный цилиндр, образующие которого параллельны  $\mathbf{P}$ , а основания параллельны друг другу, причем одно из них лежит на поверхности, а другое — внутри диэлектрика,

Через  $l$  обозначен вектор, равный длине образующей и направленный параллельно ей изнутри к поверхности. Будем считать цилиндр тонким, таким, что  $l \ll S$ , где  $S$  — площадь основания цилиндра. В этом случае можно пренебречь объемным зарядом  $\rho_n V$  внутри цилиндра. Здесь  $V$  — объем цилиндра, равный  $S(ln)$ . Действительно, при достаточно малом  $l$  поверхностный заряд  $\sigma_n S$  наружного основания будет сколь угодно превышать  $\rho_n V$ . Так как образующие цилиндра параллельны  $\mathbf{P}$ , то на боковой поверхности цилиндра зарядов нет (их перераспределение происходит в направлении  $\mathbf{P}$ ). Поэтому из (19.1) следует, что если поверхностная плотность заряда диэлектрика равна  $\sigma_n$ , то заряды наружного и внутреннего оснований цилиндра равны, соответственно,  $\sigma_n S$  и  $-\sigma_n S$ .

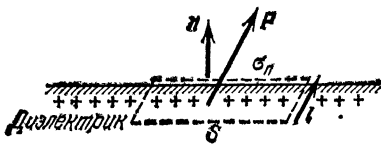


Рис. 19.4.

Вычислим двумя способами дипольный момент цилиндра. По определению поляризованности он равен  $PV$ , а по определению самого дипольного момента он равен  $S\sigma l$ , так что

$$S\sigma l = PV.$$

Умножив обе части этого равенства на  $n$  (рис. 19.4) и учитывая, что  $V = S(ln)$ , получим (19.2).

Подставим теперь  $\sigma_n$  из (19.2) в (19.1) уже для произвольного диэлектрического образца. Согласно (B.25)

$$\oint_S \sigma_n dS = \oint_S P_n dS = \int_V \frac{\partial P}{\partial r} dV.$$

Поэтому (19.1) можно переписать в виде

$$\int_V \rho_n dV = - \int_V \frac{\partial P}{\partial r} dV.$$

Из произвольности объема  $V$  следует равенство подынтегральных выражений, т. е. (19.3).

Так как дипольный электрический момент определяется одинаково в системах СИ и СГС, то соотношения (19.2), (19.3), так же как и (19.1), имеют одинаковый вид в обеих системах.

## § 19.2. Виды поляризации газов

1. Микроскопический механизм поляризации различных диэлектрических веществ неодинаков. Рассмотрим сначала газы. Молекулы газа могут как обладать, так и не обладать собственным электрическим дипольным моментом. Собственного дипольного момента нет, например, у всех атомов. Молекулы же паров воды устроены иначе. Каждая молекула воды имеет собственный дипольный момент. Молекулы с отличным от нуля дипольным моментом называются *полярными*. Дипольный момент полярных молекул обычно имеет порядок  $10^{-30}$  Кл·м  $\approx 1$  D. Так, дипольный момент молекулы воды равен 1,84 D. Молекулы, не

обладающие собственным дипольным моментом, называются *неполярными*.

Газы, состоящие из неполярных и полярных молекул, поляризуются электрическим полем по-разному. Изложим сначала поляризацию неполярного газа. Попадая в электрическое поле, каждая неполярная молекула (одноатомная или многоатомная) деформируется. Ее ядра смещаются в направлении действия электрического поля, а ее электронная оболочка вытягивается в противоположную сторону. В результате каждая молекула приобретает дипольный момент. Он называется *индуцированным* или *наведенным*, а обусловленная этим явлением поляризация газа — *электронной*. Это название отражает микроскопический механизм возникновения поляризации, обусловленный смещением электронных оболочек относительно атомных ядер.

Обычно деформации неполярных частиц малы. Малость здесь означает, что создаваемое индуцированной поляризованностью электрическое поле намного меньше внешнего поля. Связано это с тем, что поля, в которые газы обычно попадают, оказываются намного слабее внутриатомных. Убедимся в этом на примере гелия. Для грубой оценки можно принять, что атом ионизируется при растяжении его вдвое и что электрическая сила, производящая это растяжение, постоянна. Для гелия энергия одноэлектронной ионизации равна примерно 25 эВ. Размер атома гелия по порядку величины равен  $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ м}$ . При одноэлектронной ионизации электрическое поле производит работу порядка  $q_0 E l$ , где  $E$  — абсолютное значение ионизирующего поля. Положив  $q_0 E l = 25 \text{ эВ}$ , находим, что атом гелия может сильно деформироваться только в полях, величина которых не менее  $10^{11} \text{ В/м}$ . Это гигантские поля. Например, чтобы поле в  $10^{11} \text{ В/м}$  получить в конденсаторе с зазором между обкладками в 1 см, к конденсатору необходимо приложить огромное напряжение —  $10^9 \text{ В}$ .

Как известно (см. § 2.3 тома I), свойством малых деформаций является их пропорциональность вызывающим деформации силам. Малые деформации атомов и молекул также подчиняются этому правилу. Оно выражается в том, что индуцированный в каждой такой частице электрический дипольный момент  $p$  оказывается линейно зависящим от приложенного поля. В системе СИ это записывается так:

$$p = \epsilon_0 \alpha^{(\text{эл})} E. \quad (19.4)$$

(В системе СГС коэффициент  $\epsilon_0$  не вводится.) Величина  $\alpha^{(\text{эл})}$  не зависит от поля, так что ее значение полностью определяется внутренними свойствами неполярной частицы. Эта величина называется *электронной поляризуемостью* атома или молекулы

(на электронное происхождение указывает индекс «эл» в обозначении).

Из (19.4) следует, что поляризуемость имеет размерность объема. Типичные значения  $\alpha^{(эл)}$  для некоторых атомов приведены в табл. 17. Пользуясь этой таблицей, найдем, например,

Таблица 17

Элемент	H	He	Be	C	Ne	K
$\alpha^{эл}, 10^{-30} \text{ м}^3$	0,66	0,21	9,3	1,5	0,4	34

чему равен индуцированный дипольный момент у атома гелия в поле  $E = 10^4 \text{ В/м}$ . Согласно (19.4)

$$p_{\text{He}} = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2/\text{Н} \cdot \text{м}^3 \cdot 0,21 \cdot 10^{-30} \text{ м}^3 \cdot 10^4 \text{ В/м} \approx \\ \approx 2 \cdot 10^{-38} \text{ Кл} \cdot \text{м} \approx 10^{-8} \text{ D.}$$

Мы получили значение, намного меньшее 1 D. Это не случайность, а проявление общей закономерности:

*Дипольные моменты, возникающие у неполярных частиц в результате их электронной поляризации, обычно ничтожны в сравнении с типичными собственными дипольными моментами полярных частиц.*

Согласно табл. 17  $\alpha_{\text{C}}^{(эл)} + 4\alpha_{\text{H}}^{(эл)} = 4,1 \cdot 10^{-30} \text{ м}^3$ . А опытным путем установлено, что поляризуемость молекулы метана  $\text{CH}_4$  отличается от полученной величины и составляет только  $2,7 \cdot 10^{-30} \text{ м}^3$ . Это свидетельствует о том, что соединение атомов в молекулу сопровождается перестройкой электронной структуры вещества. Измерение атомных и молекулярных поляризуемостей является одним из способов изучения механизма этой перестройки.

Если концентрация газа равна  $n^*$ , то его электронная поляризация макроскопически проявляется в возникновении у газа поляризованности

$$P = np = n\epsilon_0\alpha^{(эл)}E \quad (19.5)$$

(в системе СГС множитель  $\epsilon_0$  отсутствует). Линейность микро-скопической зависимости  $p$  от  $E$  в (19.4) приводит к линейной макроскопической зависимости  $P$  от  $E$  в (19.5).

2. Рассмотрим теперь газ, состоящий из полярных молекул. Обозначим собственный дипольный момент одной молекулы газа снова через  $p$ . Влиянием электронной поляризуемости здесь

\*) Среднее число атомов (или молекул) в единице объема.



интересоваться не будем. Таким образом, примем, что дипольный момент молекулы газа может меняться только по направлению. Поляризация газа является результатом ориентации моментов внешним полем. Поэтому такая поляризация называется *ориентационной*. Если газ находится в равновесном состоянии при температуре  $T$ , то для ориентационной поляризованности получается выражение

$$P = \frac{np^2}{3kT} E. \quad (19.6)$$

Здесь  $n$  — концентрация газа, а  $k$  — постоянная Больцмана. Формула (19.6) применима при  $pE \ll kT$ . Мы видим, что в этом случае ориентационная поляризованность линейно зависит от внешнего поля.

Вывод формулы (19.6) громоздок. Поэтому ограничимся пояснением ее естественности. Механизм ориентационной поляризации таков. Без внешнего поля поляризованность отсутствует, потому что микроскопические диполи  $p$  ориентированы хаотично из-за тепловых столкновений. При наложении внешнего поля  $E$  устанавливается динамическое равновесие между ориентирующим действием поля и разориентирующим действием тепловых столкновений. Безразмерным параметром, определяющим отношение этих двух конкурирующих воздействий, является отношение  $pE/kT$  — энергии  $pE$  взаимодействия полностью ориентированного микроскопического диполя  $p$  вдоль поля (см. (16.40)) к средней энергии  $kT$  теплового движения одной молекулы. Запишем теперь правую часть (19.6) в виде

$$\frac{1}{3} n \left( \frac{pE}{kT} \right) p.$$

Тогда становится ясным смысл (19.6): поляризованность пропорциональна концентрации газа, параметру  $pE/kT$  и дипольному моменту одной молекулы. Именно такую зависимость и естественно ожидать. Поляризованность растет с уменьшением температуры, т. е. с уменьшением разупорядочивающего действия теплового движения.

При значениях  $pE/kT$  порядка единицы и больше формулу (19.6) следует заменить на более точную. В этой более точной формуле в предельном случае  $pE \gg kT$  получается просто

$$P = np,$$

т. е. все микроскопические диполи ориентируются строго по полю.

Сравнив (19.6) с (19.5), можно получить выражение для ориентационной поляризуемости  $\alpha^{(op)}$ :

$$\alpha^{(op)} = \frac{p^2}{3\epsilon_0 kT}, \quad (19.7)$$

справедливое при условии  $pE \ll kT$  (в системе СГС в знаменателе  $\epsilon_0$  отсутствует). Согласно (19.7) (в отличие от электронной) ориентационная поляризуемость зависит от температуры, изменяясь обратно пропорционально ей. Такая зависимость называется *законом Кюри*.

Если учесть и электронную поляризуемость  $\alpha^{(эл)}$ , то для полной поляризуемости  $\alpha$  получим

$$\alpha = \alpha^{(эл)} + \frac{p^2}{3\epsilon_0 kT}.$$

Отсюда видно, как можно определить экспериментально обе поляризуемости. Для этого надо провести измерения  $\alpha$  при двух различных температурах.

Измерение ориентационных поляризуемостей интересно в том числе и тем, что оно дает количественные значения электрических дипольных моментов молекул. Чтобы составить представления о значениях  $\alpha^{(оп)}$ , вычислим  $\alpha^{(оп)}$ , например, для водяного пара, нагретого до комнатной температуры. В этом случае  $kT \approx 4 \cdot 10^{-19}$  Дж. Так как  $p_{\text{H}_2\text{O}} = 6 \cdot 10^{-30}$  Кл·м, то

$$\alpha_{\text{H}_2\text{O}}^{(оп)} \approx \frac{36 \cdot 10^{-60} \text{ Кл}^2 \cdot \text{м}^2}{12 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} \cdot 9 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2 / (\text{Н} \cdot \text{м}^2)} \approx 0,33 \cdot 10^{-30} \text{ м}^3.$$

Мы видим, что при комнатной температуре  $\alpha_{\text{H}_2\text{O}}^{(оп)}$  имеет значение, сравнимое с типичными значениями  $\alpha^{(эл)}$ . Отсюда следует, что ориентирующее действие внешнего поля при комнатных температурах очень слабо влияет на хаотическое распределение дипольных моментов по направлениям.

### § 19.3. Поляризация плотных сред

1. К плотным средам относятся жидкости и твердые тела. Они поляризуются заметно сильнее, чем газы. На это имеется две причины. Во-первых, с возрастанием плотности вещества увеличивается концентрация микроскопических диполей, дающих вклад в поляризованность. Во-вторых, при плотном расположении частицы сильно влияют друг на друга. Поэтому на каждую частицу внешнее поле воздействует не только непосредственно, но и через изменение внутренних полей, создаваемых окружением частицы.

Внутри плотного диэлектрика макроскопическое электрическое поле  $E$  будет суммой наложенного внешнего поля  $E_e$  и поля, создаваемого диполями диэлектрика. Но на микроскопический диполь в плотной среде может действовать *локальное электрическое поле*  $E_{\text{лок}}$ , заметно отличающееся от среднего. Для расчета локального поля надо точно просуммировать поля микро-

частиц, близких к рассматриваемому диполю. Для этого мысленно окружим диполь сферой. Радиус сферы выберем малым, но таким, чтобы в нее попали все те соседние частицы, поля которых следует вычислять точно. Поля частиц вне сферы можно по-прежнему брать усредненными. Тогда для получения поля  $E_{\text{лок}}$  из поля  $E$  надо вычесть усредненное поле  $E'$ , создаваемое вырезанным шаром, и прибавить точное микроскопическое поле  $E_{\text{микро}}$  зарядов внутри сферы:

$$E_{\text{лок}} = E - E' + E_{\text{микро}}. \quad (19.8)$$

Вычислим поле  $E'$  равномерно поляризованного шара с поляризованностью  $P$ . Неполяризованный шар состоит из двух совмещенных шаров, один из которых равномерно заряжен с плотностью заряда  $\rho$ , а другой — с плотностью  $-\rho$ . Поляризация

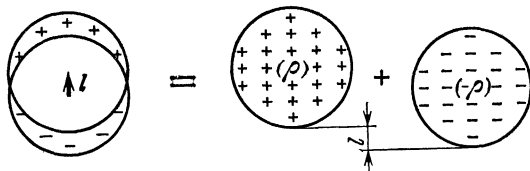


Рис. 19.5.

состоит в том, что центр отрицательно заряженного шара смещается на малый вектор  $l$  относительно центра положительно заряженного шара (рис. 19.5). Поляризованность пары смещенных шаров равна

$$P = \rho l.$$

Выберем начало координат в центре положительно заряженного шара. Тогда согласно (16.30) поле  $E_+$  этого шара в точке  $r$  внутри шара равно

$$E_+(r) = \frac{1}{3\epsilon_0} \rho r.$$

В той же точке поле  $E_-$  отрицательно заряженного шара равно

$$E_-(r_1) = -\frac{1}{3\epsilon_0} \rho r_1,$$

где  $r_1 = r + l$ . Искомое поле  $E'$  поляризованного шара является суперпозицией полей  $E_+$  и  $E_-$ :

$$E' = E_+(r) + E_-(r_1) = -\frac{1}{3\epsilon_0} \rho l = -\frac{P}{3\epsilon_0}.$$

Подставив это выражение в (19.8), получаем

$$E_{\text{лок}} = E + \frac{P}{3\epsilon_0} + E_{\text{микро}}. \quad (19.9)$$

Примем допущение о линейной связи индуцированного микроскопического электрического дипольного момента  $p$  с вызывающим его возникновение полем  $E_{\text{лок}}$ :

$$p = \epsilon_0 \alpha E_{\text{лок}}. \quad (19.10)$$

(В системе СГС множитель  $\epsilon_0$  опускается.) Коэффициент  $\alpha$  и здесь называется поляризуемостью. Линейная зависимость (19.10) (как и (19.4)) соблюдается в большинстве сред при не слишком сильных полях. Соотношения (19.9) и (19.10) полностью описывают макроскопическое поведение плотных диэлектрических сред в электрическом поле через микроскопические характеристики сред  $E_{\text{микро}}$  и  $\alpha$ . Дальнейшая конкретизация требует вычисления этих величин на основе учета конкретных свойств плотного диэлектрика.

Для неполярных жидкостей, а также для многих кристаллов (в частности, с кубической структурой) микроскопическое поле  $E_{\text{микро}} = 0$ . В этом случае, учтя, что по определению  $P = nr$ , где  $n$  — концентрация микроскопических диполей, из (19.9) и (19.10) получим

$$P = n\epsilon_0 \alpha \left( E + \frac{P}{3\epsilon_0} \right).$$

Решая это уравнение относительно  $P$ , находим поляризованность

$$P = \frac{\epsilon_0 n \alpha}{1 - n\alpha/3} E. \quad (19.11)$$

Соотношение (19.11) называется *формулой Клаузиуса — Моссотти*. Мы видим, что согласно этой формуле поляризованность линейно зависит от поля. Однако, в отличие от газов, поляризованность плотных диэлектриков не пропорциональна  $n\alpha$ . В этом и выражается взаимное влияние частиц плотной среды друг на друга, которое в газе существенной роли не играет. Для газообразного кислорода, находящегося при нормальных условиях,  $n\alpha/3 \approx 10^{-4} \ll 1$ . В этом случае знаменатель в формуле Клаузиуса — Моссотти ничтожно отличается от единицы. Для жидкостей  $n\alpha/3$  является величиной заметной. Например, для жидкого кислорода  $n\alpha/3 = 0,14$ , а для четыреххлористого углерода  $n\alpha/3 = 0,32$ . В этих случаях  $1 - n\alpha/3 < 1$ , что уже сказывается в увеличении  $P$  по сравнению с тем значением, которое получается без учета знаменателя в (19.11). Для упомянутых жидкостей это увеличение хорошо согласуется с опытными данными. Но для некоторых жидкостей  $n\alpha/3 > 1$  (например, для воды  $n\alpha/3 = 4,4$ ). В этих случаях формула Клаузиуса — Моссотти предсказывает ориентацию вектора поляризации, противоположную полю. Это означает, что формула Клаузиуса — Мос-

сотти имеет ограниченную область применимости. Хорошее согласие (19.11) с опытными данными наблюдается только для жидкостей, состоящих из неполярных частиц.

2. Приведем специфические свойства электрической поляризации твердых диэлектриков. В отличие от газов и жидкостей, в некоторых кристаллах наблюдается *ионная поляризация*. Этот тип поляризации возникает при смещении в разных направлениях положительных и отрицательных ионов кристаллической структуры, что приводит к возникновению поляризованности. Например, таков механизм поляризации поваренной соли. Чередующиеся в ее структуре в шахматном порядке ионы  $\text{Na}^+$  и  $\text{Cl}^-$  сдвигаются электрическим полем в разные стороны. В результате каждая элементарная ячейка кристалла  $\text{NaCl}$  становится диполем, так что кристалл поляризуется. Расчет такой поляризации возможен, если известна жесткость ионной структуры. Ионные поляризуемости не зависят от температуры и обычно (там, где они существуют) превышают электронные.

У поляризации твердых тел есть своя специфика, связанная с анизотропией. В анизотропной твердой среде поле и поляризованность могут не совпадать по направлению.

Специфическим свойством твердого состояния является его способность сохранять в некоторых случаях поляризацию без приложения внешнего поля. Вещества, обладающие таким свойством, называются *электретами*. Электреты являются электрическими аналогами постоянных магнитов. Существуют два способа получения электретов — *термический* и *фотоэлектрический*. Суть термического способа заключается в следующем. Пусть вещество состоит из полярных частиц, вращательная подвижность которых сильно зависит от температуры. Таким веществом является, например, воск. При достаточно высокой температуре вещество помещают в электрическое поле, которое его поляризует ориентационным образом. Затем, не выключая поля, температуру понижают настолько, что диполи практически теряют способность вращаться. После этого поле выключают. Выстроенность диполей при этом не разрушается \*). Поляризация замораживается.

При использовании фотоэлектрического способа диэлектрический образец помещают в сильное электрическое поле. В образце заряды разных знаков под действием поля раздвигаются. Затем образец подвергают облучению видимым светом или ультрафиолетовым излучением. При этом заряды получают дополнительную энергию, так что удерживающие их связи разрываются. Под действием поля выбитые заряды начинают дрей-

---

\*) Точнее, она разрушается с очень малой скоростью. Вещество деполяризуется часы, дни и даже годы.

фовать к границам образца. В результате образец поляризуется (рис. 19.6). После снятия поля поляризация сохраняется долгое время, так как подвижность зарядов в диэлектрике чрезвычайно низка.

Главная трудность практического применения электретов обусловлена следующим. Согласно (19.2) электрет обладает поверхностным зарядом. Поэтому каждый заряженный участок

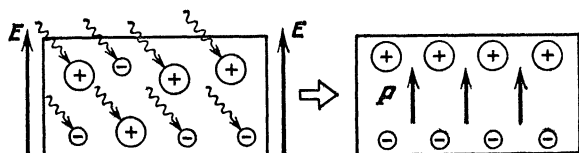


Рис. 19.6.

поверхности электрета притягивает извне случайные сторонние заряды, противоположные по знаку тем, которые сосредоточены на данном участке поверхности. Такие сторонние заряды нейтрализуют поверхность электрета, так что он деполаризуется. В этом заключается причина, из-за которой трудно наблюдать стационарное поле электрета. Но

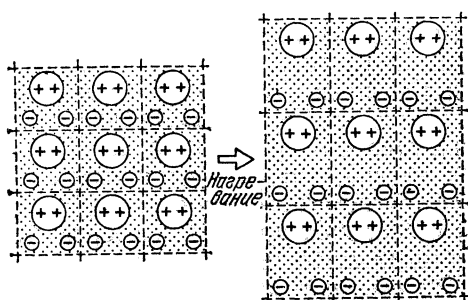


Рис. 19.7.

если поляризация электрета меняется и притом настолько быстро, что сторонние заряды не успевают нейтрализовать заряд поляризации, то в этих условиях электрет не успевает нейтрализоваться.

Изменение поляризованности электрета можно получить его нагреванием. Это явление называется *пироэлектричеством*. Оно обус-

ловлено влиянием теплового расширения на дипольные моменты. Это иллюстрирует рис. 19.7. На нем схематически изображен кристаллический электрет. Каждая его элементарная ячейка имеет дипольный момент. Выстроенность этих моментов создает поляризацию. Кристалл при нагревании расширяется. Как следствие этого, возрастает каждый единичный дипольный момент, а следовательно, и поляризация кристалла в целом.

В некоторых кристаллах проявляются *пьезоэлектрические эффекты*, т. е. обратимая связь между поляризацией диэлектрика и его упругими механическими деформациями. Деформируемый пьезоэлектрик поляризуется, и, наоборот, поляризация вы-

зывает его деформацию. Это явление называется *электрострикцией*. Пьезоэлектриком является, например, кварц. Вообще, пьезоэлектрический эффект характерен для кристаллов, построенных из ионов, и наблюдается только при выполнении двух условий. Во-первых, решетки, образованные положительными и отрицательными ионами, имеют разную жесткость. Во-вторых, элементарная ячейка кристалла не имеет центра симметрии. Поясним, как возникает пьезоэффект, на следующем примере.

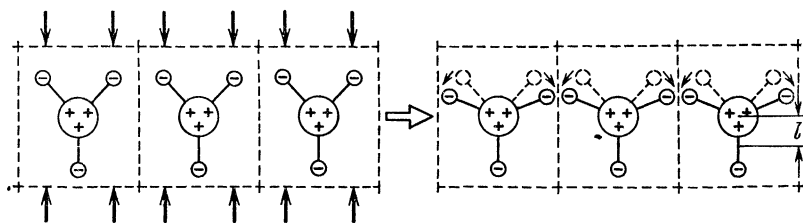


Рис. 19.8.

Рассмотрим регулярную структуру, построенную из гипотетических «равносторонних треугольных» молекул. Участок этой структуры показан в левой части рис. 19.8. Пусть в центре каждой молекулы находится положительный ион и недеформированная молекула дипольного момента не имеет. Предположим, что молекулы обладают ничтожной объемной сжимаемостью, но сравнительно легко изменяют свою форму. Тогда под действием вертикально (на рисунке) сжимающей силы в каждой молекуле расстояние между положительным ионом и нижним отрицательным ионом практически не изменится. Оба же верхних иона сместятся вниз, не меняя при этом расстояния до центрального иона (правая часть рис. 19.8). Это приведет к сдвигу в каждой молекуле центра распределения отрицательных зарядов вниз на некоторое расстояние  $l$ . Положительные же заряды останутся на месте. В результате у каждой молекулы появится электрический дипольный момент величины  $3ql$ , где  $q$  — абсолютное значение заряда отрицательного иона.

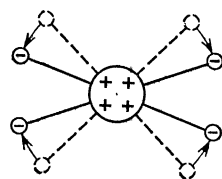


Рис. 19.9.

Поясним необходимость отсутствия центра симметрии для существования пьезоэффекта. Покажем, что при наличии центра симметрии дипольный момент при деформировании не возникает. Это иллюстрирует рис. 19.9. На нем изображена молекула, имеющая центр симметрии. Как видно, при сжатии в вертикальном направлении дипольный момент не появляется: верхние и

нижние отрицательные ионы смещаются навстречу друг другу, так что центр распределения этих частиц остается на месте.

Явление пьезоэлектричества широко используется. Например, оно применяется для преобразования электрических колебаний в механические и наоборот (микрофоны, звукозаписывающие и др.).

3. Некоторые твердые диэлектрики обладают *спонтанной*, т. е. самопроизвольной, поляризацией в небольших (но макроскопических) объемах вещества, линейные размеры которых не превышают  $10^{-6}$  м. Такие твердые вещества называются *сегнетоэлектриками*.

Впервые сегнетоэлектричество наблюдалось у сегнетовой соли  $\text{KNaC}_4\text{H}_4\text{O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ , давшей название самому явлению. В настоящее время обнаружено довольно много веществ, относящихся к классу сегнетоэлектриков. Таким веществом является, например, титанат бария —  $\text{BaTiO}_3$ . Сегнетоэлектрики являются электрическими аналогами ферромагнитных материалов. Поэтому нередко сегнетоэлектрики называют *ферроэлектриками*. Детальные исследования электрических свойств сегнетовой соли были проведены в тридцатых годах нашего столетия И. В. Курчатовым.

Если размеры сегнетоэлектрического кристалла велики по сравнению с указанным выше характерным размером, то такой кристалл имеет *домённую структуру*.

*Домёном называется участок кристалла, спонтанно поляризованный в одном направлении.*

Крупный сегнетоэлектрический кристалл состоит из большого количества доменов. Это видно на рис. 19.10, на котором приведена фотография одного из участков монокристалла титаната бария. Образования клинообразного пластинчатого вида — это и есть домены.

Во внешних электрических полях сегнетоэлектрики ведут себя следующим образом. Во-первых, они поляризуются в  $10^4$ — $10^5$  раз сильнее обычных диэлектриков. Во-вторых, поляризация сегнетоэлектрика в данный момент зависит не только от величины внешнего поля, но и от истории процесса поляризации. Это выражается, например, в том, что при циклическом изменении поля сегнетоэлектрик поляризуется по-разному на взаимно обратных участках цикла. Это явление называется *диэлектрическим гистерезисом* \*). Оно означает, что для сегнетоэлектриков зависимость  $P = P(E)$  неоднозначна. При циклическом изменении поля эта зависимость имеет вид, изображенный на рис. 19.11. После включения поля и его первоначального нарастания поля-

---

\*) Гистерезис — слово греческое, в переводе на русский означает «запаздывание».



ризованность сегнетоэлектрика ведет себя согласно кривой  $OA$ . При достижении достаточно больших значений поля (для лучших образцов  $BaTiO_3$  около  $10^4$ — $10^5$  В/м) поляризованность перестает изменяться. Наступает так называемое *диэлектрическое*

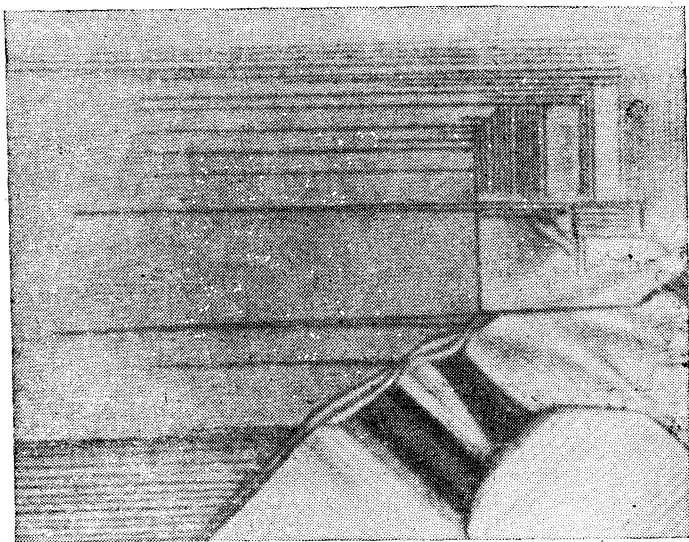


Рис. 19.10.

*насыщение*. На рис. 19.11 насыщение изображается прямой, параллельной оси абсцисс и начинающейся от точки  $A$ . При изменении поля в обратном направлении, при выходе из режима насыщения, поляризованность изменяется по закону, который изображен кривой  $ABC$ . Характерной особенностью этой стадии является отличие от нуля поляризованности при обращении поля в нуль. Эта поляризованность называется *остаточной*. На рис. 19.11 ей отвечает отрезок  $OB$ .

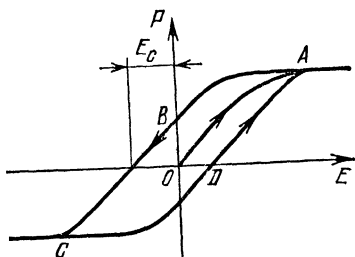


Рис. 19.11.

Для титаната бария остаточная поляризованность достигает значений порядка  $0,3$  Кл/м<sup>2</sup>. Только под действием поля  $E_c$  (рис. 19.11), направленного противоположно первоначальному полю, поляризованность исчезает. Абсолютное значение  $E_c$  называется *электрической коэрцитивной силой*. При дальнейшем изменении поля опять наступает

насыщение (начиная с точки  $C$ ). Замыкание цикла происходит уже согласно кривой  $CDA$ . Таким образом, получается петлеобразная кривая. Она называется *петлей гистерезиса*. По ширине петли диэлектрического гистерезиса судят о качестве сегнетоэлектрика. Чем шире петля, тем выше качество сегнетоэлектрика \*). Сегнетоэлектрики с широкой петлей гистерезиса называются *жесткими*, а с узкой — *мягкими*. Эта терминология отражает следующее. Если петля имеет большую ширину, то велика коэрцитивная сила. А это означает, что для деполяризации сегнетоэлектрика с широкой петлей гистерезиса нужно приложить достаточно большое поле. Такой сегнетоэлектрик подобен жесткой конструкции, которая разрушается только под действием достаточно больших сил. Термин «мягкий сегнетоэлектрик» дополнительных разъяснений теперь не требует.

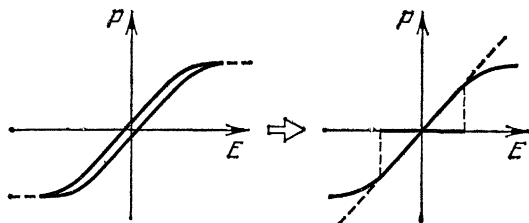


Рис. 19.12.

Мягкие сегнетоэлектрики отличаются от жестких тем, что для них при определенных условиях зависимость  $P = P(E)$  может считаться однозначной и даже линейной. Вот эти условия. Во-первых, петля гистерезиса должна быть пренебрежимо узкой. Во-вторых, поляризация должна быть далека от насыщения. При выполнении этих условий зависимость поляризованности от поля с хорошей точностью изображается прямой линией. Эта линия показана на рис. 19.12 справа. На оси абсцисс жирным отрезком выделена область полей, при которых зависимость поляризованности от поля линейна.

Сегнетоэлектрические свойства проявляются только в определенном интервале температур. Существует предельная температура, выше которой эти свойства исчезают. Эта критическая температура называется *точкой Кюри*. Для всех известных сегнетоэлектриков точки Кюри не превышают  $400\text{--}500^\circ\text{C}$ . Например, для титаната бария точка Кюри равна  $118^\circ\text{C}$ . Существуют сегнетоэлектрики с несколькими точками Кюри. Объясняется это наличием ряда кристаллических модификаций сегнетоэлектрического кристалла.

\*) Именно это имелось в виду выше, когда говорилось о лучших образцах титаната бария.

Микроскопическая природа сегнетоэлектрических свойств до конца не выяснена. Установлено, что: а) эти свойства обусловлены взаимодействиями входящих в кристалл ионов; б) необходимым (но не достаточным) условием существования сегнетоэлектричества является отсутствие в кристалле центров симметрии. Поэтому всякий сегнетоэлектрик одновременно является и пьезоэлектриком, но не наоборот. Так, например, пьезоэлектрик кварц сегнетоэлектрическими свойствами не обладает.

Качественно сегнетоэлектрический эффект объясняется тем, что локальные поля и поляризованность усиливают друг друга. В обычных кристаллах возникающие при этом электрические силы уравниваются силами упругости. В сегнетоэлектриках при определенных температурах такое равновесие нарушается, так что поляризованность резко возрастает.

Поясним качественно зависимость сегнетоэлектрических свойств от температуры. Примем справедливость формулы (19.11) Клаузиуса — Моссотти для сегнетоэлектрика выше точки Кюри, которую мы обозначим через  $T_c$ . Этот закон приводит к неограниченному возрастанию поляризованности при стремлении  $n\alpha/3$  к единице. Такое резкое возрастание поляризованности и свидетельствует о приближении кристалла к сегнетоэлектрическому состоянию. Заметим теперь, что  $n\alpha$  зависит от температуры, так как при тепловом расширении изменяется  $n$ . Отсюда следует, что точкой Кюри является значение температуры, при котором  $n\alpha/3 = 1$ . Вблизи точки Кюри зависимость  $n\alpha/3$  от температуры с хорошей точностью представима линейным законом

$$\frac{n\alpha}{3} = 1 - \beta(T - T_c).$$

Здесь  $\beta = \text{const} > 0$ . Положительность этой постоянной обусловлена тем, что при нагревании плотность должна уменьшаться. Мы видим, что закон (19.11) примет форму

$$P = \epsilon_0 \frac{3}{\beta(T - T_c)} E. \quad (19.12)$$

В числителе опущен член, содержащий величину  $T - T_c$ , так как она мала вблизи точки Кюри. Полученная температурная зависимость поляризованности  $P$  называется *законом Кюри — Вейсса*. Подчеркнем, что закон Кюри — Вейсса справедлив только выше точки Кюри, т. е. при  $T > T_c$ . При приближении  $T$  к  $T_c$  поляризованность неограниченно возрастает. Ниже точки Кюри появляется спонтанная поляризованность, так что физические зависимости качественно меняются.

Объясним механизм появления доменов. Рассмотрим процесс роста отдельного домена. Домен выделен штриховкой в левой

части рис. 19.13. В правой части рисунка показано поле домена  $E_d$  и один из микроскопических диполей  $p$ , расположенный по соседству с доменом. С ростом домена поле  $E_d$  усиливается и интенсивнее стремится повернуть диполь  $p$  вниз. Мы видим, что с ростом домена возрастают силы, разрушающие выстроенность диполей на границе домена. При достижении доменом определенных размеров эти силы прекращают его дальнейший рост. Начинает расти новый домен с другим направлением поляризации.

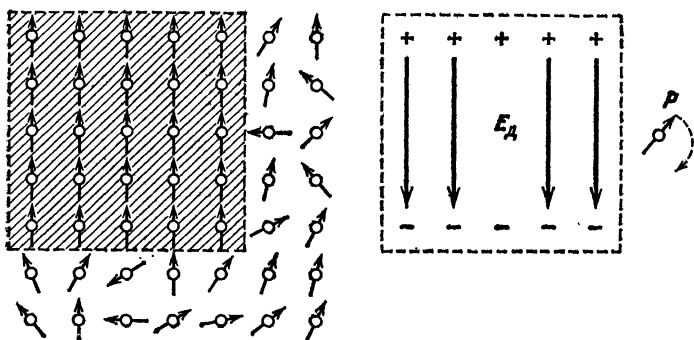


Рис. 19.13.

При наложении внешнего поля: а) ориентированные вдоль поля домены частично поглощают ориентированные иначе; б) происходит некоторая переориентация доменов по направлению вдоль поля. Оба этих процесса увеличивают суммарную поляризованность. При циклическом изменении поля перестраивается доменная структура диэлектрика. Вот почему поляризация этих сред зависит от их истории и наблюдается диэлектрический гистерезис: состояние сегнетоэлектрика зависит не только от внешнего поля и температуры, но и от конфигурации его доменов.

#### § 19.4. Свойства стационарных электрических полей в диэлектриках

1. Сформулируем уравнения Максвелла для макроскопического стационарного электрического поля в диэлектрической среде. Основной идеей вывода этих уравнений является отделение зарядов поляризации от остальных и выражение плотности зарядов поляризации через полевые макроскопические величины. Введем на короткое время развернутое обозначение  $\rho_{\text{микро}}$  для полной плотности микроскопических зарядов и  $\rho_{\text{макро}}$  для

макроспической плотности свободных зарядов (не связанных с диэлектриком). Плотность  $\rho_{\text{макро}}$  определяется соотношением

$$\rho_{\text{макро}} = \bar{\rho}_{\text{микро}} - \rho_{\text{п}}. \quad (19.13)$$

Черта означает усреднение по физически бесконечно малому объему. Она не поставлена над  $\rho_{\text{п}}$ , поскольку эта величина всегда предполагается усредненной (т. е. по определению  $\bar{\rho}_{\text{п}} = \rho_{\text{п}}$ ).

Введем теперь новое макроскопическое поле  $\mathbf{D}$ , определив его равенством

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (19.14)$$

где поле  $\mathbf{E}$  (как и  $\mathbf{P}$ ) является усредненной, т. е. макроскопической, величиной. Часто поле  $\mathbf{D}$  называется *электрической индукцией*. Используются также термины *вектор электрической индукции* и *электрическое смещение*. В этой книге эти термины употребляться не будут. В системе СГС в определении поля  $\mathbf{D}$  отсутствует  $\epsilon_0$  перед  $\mathbf{E}$  и имеется множитель  $4\pi$  перед  $\mathbf{P}$ . Как видно, размерность поля  $\mathbf{D}$  совпадает с размерностью поляризованности.

Вычислим дивергенцию  $\mathbf{D}$ :

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial r} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial r} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial r}.$$

Согласно усредненному первому уравнению Максвелла (16.1)  $\epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial r = \bar{\rho}_{\text{микро}}$ , а согласно (19.3)  $\partial \mathbf{P} / \partial r = -\rho_{\text{п}}$ . Поэтому с учетом (19.13) находим

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial r} = \rho_{\text{макро}}. \quad (19.15)$$

Второе уравнение Максвелла (16.1) при усреднении не меняется, поскольку оно не содержит плотности зарядов:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{E} \right] = 0. \quad (19.15a)$$

Тем самым в диэлектрике стационарное поле остается потенциальным, т. е. представимым в виде  $\mathbf{E} = -\partial \phi / \partial r$ , где  $\phi$  — потенциал поля.

Для вывода уравнений (19.15) и (19.15a) нам понадобилось только первое основное допущение (19.1) о структуре диэлектриков. Поэтому область применимости этих уравнений та же, что и соотношения (19.1), т. е. охватывает все известные диэлектрики, включая и сегнетоэлектрики.

Поскольку мы ввели дополнительное поле  $\mathbf{D}$ , то система одних уравнений Максвелла (19.15) и (19.15a) уже не является полной. Для полноты необходимо добавить соотношение, связывающее поля  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$ . Это соотношение называется *вторым материальным уравнением*. Согласно (19.14) для его определения

достаточно связать  $\mathbf{P}$  с  $\mathbf{E}$ . Для этого необходимы дополнительные допущения о структуре диэлектриков. Примем *второе основное допущение о структуре диэлектриков*:

*Поляризованность в каждой точке диэлектрика пропорциональна макроскопическому электрическому полю в этой точке.*

В системе СИ это допущение выражается соотношением

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E} \quad (19.16)$$

(в системе СГС множитель  $\varepsilon_0$  не вводится). В (19.16) коэффициент пропорциональности  $\chi$  зависит от свойств диэлектрика. При соблюдении второго допущения соотношение (19.16) является определением  $\chi$  как макроскопической величины, характеризующей электрические свойства диэлектрика. Величина  $\chi$  называется *диэлектрической восприимчивостью среды*. Эта величина безразмерна.

Макроскопическая величина  $\chi$  тесно связана с уже известной нам микроскопической характеристикой диэлектрика — поляризуемостью. Так, для газов в не слишком сильных полях (см., например, (19.4))  $\chi = n\alpha$ . Для плотных сред связь  $\chi$  с  $\alpha$  более сложная. Для сред, к которым применима формула Клаузиуса — Моссотти, согласно (19.11)

$$\chi = \frac{n\alpha}{1 - n\alpha/3}.$$

Очень мягкие сегнетоэлектрики с пренебрежимо узкой петлей гистерезиса и вдали от насыщения также могут быть охарактеризованы диэлектрической восприимчивостью.

Наряду с диэлектрической восприимчивостью используется еще одна безразмерная физическая величина, называемая *диэлектрической проницаемостью*. Диэлектрическая проницаемость обозначается через  $\varepsilon$  и определяется соотношением

$$\varepsilon = 1 + \chi. \quad (19.17)$$

Введение величины  $\varepsilon$  дополнительного физического смысла не имеет (поскольку она однозначно выражается через  $\chi$ ), но приводит к упрощению некоторых формул. В таблицах обычно приводятся значения  $\varepsilon$ .

Теперь подставим (19.16) и (19.17) в (19.14). В результате получается соотношение

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}, \quad (19.18)$$

выражающее второе материальное уравнение, справедливое в пределах применимости второго основного допущения (19.16) о структуре диэлектриков. (В системе СГС коэффициент  $\varepsilon_0$  в (19.18) отсутствует.)

Область применимости второго допущения существенно уже области применимости первого. Прежде всего, второе допущение совершенно неприменимо к жестким сегнетоэлектрикам (§ 19.3), у которых вообще отсутствует однозначная связь  $\mathbf{P}$  с  $\mathbf{E}$  и тем самым  $\mathbf{D}$  с  $\mathbf{E}$ . Во-вторых, постулируемая вторым допущением линейность связи  $\mathbf{P}$  с  $\mathbf{E}$  нарушается в достаточно сильных полях. В некоторых случаях, например для полярного диэлектрика при низкой температуре, достаточно сильным для проявления нелинейных эффектов может оказаться электрическое поле умеренной величины.

Однако в целом область применимости второго допущения практически очень обширна, поскольку на практике часто приходится иметь дело с не очень сильными полями и с диэлектриками, для которых нарушения линейности при таких полях не проявляются. Согласно же формулам (19.5)—(19.7), (19.11) свойство линейности, на котором основано второе допущение, при несильных полях справедливо для всех видов поляризации, кроме жесткого сегнетоэлектрического.

Начиная с очередного пункта, мы будем рассматривать только макроскопические уравнения Максвелла. Поэтому для упрощения записи  $\rho_{\text{макро}}$  будем обозначать просто через  $\rho$ . Эта величина в макроскопической электродинамике играет ту же роль, какую в микроскопической электродинамике играет микроскопическая плотность зарядов.

2. Если принять материальное уравнение (19.18), то уравнения Максвелла (19.15) и (19.15а) можно переписать так, что в них будет входить только электрическое поле:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\epsilon \mathbf{E}) &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho, \\ \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{E} \right] &= 0. \end{aligned} \quad (19.19)$$

Эти уравнения линейны, так что для поля выполняется принцип суперпозиции.

В неоднородном диэлектрике диэлектрическая проницаемость  $\epsilon = \epsilon(\mathbf{r})$  зависит от координат, поэтому ее нельзя просто выносить за символ дифференцирования.

Перейдем теперь к геометрически простейшему случаю однородного диэлектрика, заполняющего все пространство. Тогда величина  $\epsilon$  становится константой, которую можно выносить за символ дифференцирования. Поэтому, умножив второе уравнение (19.19) на  $\epsilon$ , мы получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\epsilon \mathbf{E}) &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho, \\ \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \epsilon \mathbf{E} \right] &= 0. \end{aligned}$$

Эта система отличается от первых двух уравнений системы (16.1) только тем, что вместо поля  $\mathbf{E}$  теперь фигурирует произведение  $\epsilon\mathbf{E}$ . Это означает, что  $\epsilon\mathbf{E}$  не отличается от поля в пустом пространстве. Следовательно, в диэлектрике поле  $\mathbf{E}$  будет в  $\epsilon$  раз меньше поля в вакууме. Например, поле точечного заряда  $q$  в однородном диэлектрике с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  равно (заряд помещен в начало координат)

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{q\mathbf{r}}{r^3}.$$

Потенциал этого поля равен

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{q}{r}.$$

Эффектом уменьшения поля под влиянием диэлектрика широко пользуются в различных целях. В частности, вводя между обкладками конденсатора диэлектрик, увеличивают емкость конденсатора в  $\epsilon$  раз, где  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость диэлектрика \*).

3. Часто среда состоит из диэлектриков разного состава, разделенных границами. На этих границах величина  $\epsilon$  меняется скачком. Кроме того, на границах могут быть заряды (поляризационные и свободные). В этих случаях по описанию поля подходят следующим образом. Уравнения поля решаются в каждом однородном диэлектрике отдельно. При этом пустое пространство рассматривается как диэлектрик с единичной диэлектрической проницаемостью. На границах решения «сшиваются» с помощью граничных условий. Эти условия имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} D_n^{(1)} - D_n^{(2)} &= \sigma, \\ E_t^{(1)} - E_t^{(2)} &= 0. \end{aligned} \tag{19.20}$$

Эти равенства выполняются в каждой точке поверхности раздела двух диэлектриков. Здесь  $D_n^{(1)}$  и  $E_t^{(1)}$  — значения нормальной и касательной (последнюю часто называют тангенциальной) составляющих полей  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$  в данной точке поверхности раздела со стороны того диэлектрика, в сторону которого направлена нормаль  $\mathbf{n}$  к границе раздела. Величины, отмеченные индексом 2, — это те же составляющие полей  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$  со стороны другого диэлектрика. Через  $\sigma$  обозначена поверхностная плот-

---

\*) Напоминаем, что емкость конденсатора обратно пропорциональна разности потенциалов обкладок, которая при введении диэлектрика с проницаемостью  $\epsilon$  уменьшается в  $\epsilon$  раз.



ность свободных \*) зарядов в рассматриваемой точке границы. Первое из равенств (19.20) показывает, что при переходе через поверхность раздела двух диэлектриков нормальная компонента поля  $D$  терпит разрыв, если в точке перехода есть свободные заряды, и непрерывна, если их там нет.

В том случае, когда справедливо материальное уравнение (19.18), граничные условия (19.20) в системе СИ приобретают вид

$$\begin{aligned} \epsilon_1 E_n^{(1)} - \epsilon_2 E_n^{(2)} &= \frac{1}{\epsilon_0} \sigma, \\ E_t^{(1)} - E_t^{(2)} &= 0. \end{aligned} \quad (19.21)$$

(В системе СГС в первом равенстве отсутствует постоянная  $\epsilon_0$ .) Здесь  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  — диэлектрические проницаемости соприкасающихся сред. Мы видим, что даже при отсутствии свободных зарядов нормальная компонента электрического поля терпит разрыв на границе раздела. Тангенциальная же составляющая электрического поля всегда непрерывна.

Получим граничные условия (19.20). Рассмотрим участок границы раздела двух диэлектриков. Этот участок изображен в левой половине рис. 19.14.

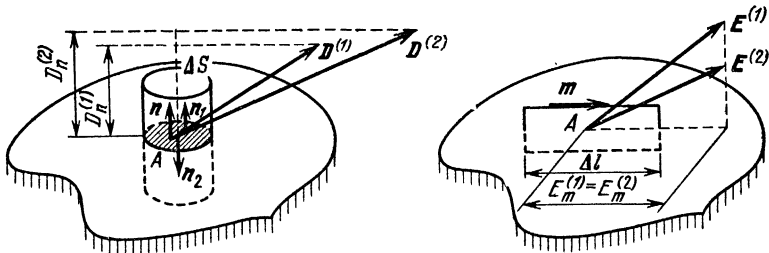


Рис. 19.14.

Вообразим теперь малый цилиндр, который пересекает границу раздела в окрестности произвольной точки  $A$ . Малость цилиндра означает, что пересекаемый им участок поверхности раздела можно считать плоским. Интегрируя уравнение (19.15) по объему  $V$  цилиндра и применяя теорему Гаусса (В.25), находим, что

$$\int_V \left( \frac{\partial D}{\partial r} \right) dV = \oint_S (D dS) = \int_V \rho dV.$$

Появившийся здесь поток поля  $D$  через поверхность  $S$  цилиндра можно разделить на три части: две из них — это потоки через торцы цилиндра, третья — поток через его боковую поверхность. Устремим теперь высоту цилиндра к нулю таким образом, чтобы торцы цилиндра «осели» с разных сторон на границу раздела. Этим мы сведем к нулю поток через боковую поверхность,

\*) Не поляризационных!

Интеграл же от плотности заряда по объему  $V$  устремится к сумме свободных поверхностных зарядов, сосредоточенных на участке границы внутри цилиндра. Эта сумма равна  $\sigma \Delta S$ , где  $\Delta S$  — площадь поперечного сечения цилиндра. Потoki через торцы, «прижатые» с разных сторон к границе раздела, равны  $D_n^{(1)} \Delta S$  и  $D_n^{(2)} \Delta S$  соответственно. Здесь  $D^{(1)}$  — значение поля  $D$  в точке  $A$  со стороны одного диэлектрика, в который направлена нормаль  $n_1$ , а  $D^{(2)}$  — та же величина для другого диэлектрика. Так как  $n_1 = -n_2 = n$  (левая часть рис. 19.14), то теорема Гаусса для цилиндра примет вид  $(D_n^{(1)} - D_n^{(2)}) \Delta S = \sigma \Delta S$ . После сокращения на  $\Delta S$  получается первое граничное условие (19.20).

Проведем теперь в окрестности точки  $A$  границы раздела диэлектриков пересекающий ее малый контур прямоугольной формы, расположенный в плоскости, содержащей нормаль к точке  $A$ . На правом рис. 19.14 часть этого контура, расположенная сверху от границы раздела, показана сплошной линией. Нижняя часть контура отмечена пунктирной линией. Из уравнения (19.15а) следует, что циркуляция поля  $E$  по любому замкнутому контуру равна нулю (следствие теоремы Стокса (B.21)). Применим этот результат к рассматриваемому контуру. Циркуляция по нему является суммой четырех контурных интегралов, которые берутся по сторонам контура. Устремим вертикальные стороны контура к нулю, сжимая их в точки, лежащие на поверхности раздела. Этим будут сведены к нулю контурные интегралы по вертикальным сторонам. Две же другие стороны прижмутся к границе раздела. Обозначим длину каждой из этих сторон через  $\Delta l$ , а единичный вектор, задающий направление обхода верхней стороны, — через  $m$ . Вектор  $m$  перпендикулярен нормали  $n$  к поверхности, т. е. лежит в ее касательной плоскости. Тогда сумма оставшихся интегралов будет равна  $(E_m^{(1)} - E_m^{(2)}) \Delta l$ . Здесь  $E_m^{(1)}$  и  $E_m^{(2)}$  — проекции электрических полей в точке  $A$  на вектор  $m$ . Мы видим, что  $(E_m^{(1)} - E_m^{(2)}) \Delta l = 0$ . Сокращая на  $\Delta l$ , получаем  $E_m^{(1)} = E_m^{(2)}$ . Заметим, что контур можно поворачивать на любой угол вокруг нормали  $n$ . Это означает, что за  $m$  можно выбрать любой единичный вектор в плоскости, касательной к границе раздела в точке  $A$ . Выбрав вектор  $m$  в плоскости векторов  $E^{(1)}$  и  $E^{(2)}$ , получим второе условие (19.20).

Внутри проводника  $E = 0$  и  $P = 0$ , так что и  $D = 0$ . Поэтому на границе проводника с диэлектриком

$$\begin{aligned} D_n &= \sigma, \\ E_t &= 0, \end{aligned} \quad (19.22)$$

где  $\sigma$  — поверхностная плотность зарядов на проводнике, а  $E_t$  — тангенциальная составляющая поля  $E$  на границе диэлектрик — проводник. Нормаль  $n$  ориентирована из проводника в диэлектрик.

Макроскопические уравнения Максвелла (19.15) и (19.15а) совместно с граничными условиями (19.20) — (19.22) дают полное решение задачи об исключении поляризационных зарядов, т. е. плотностей  $\rho_n$  и  $\sigma_n$ , из макроскопической электродинамики. В макроскопической электродинамике электрических явлений существуют только поля  $E$  и  $D$  и плотности свободных зарядов  $\rho$  и  $\sigma$ .

4. Так как электрическое поле проникает в диэлектрик, то оно влияет на состояние вещества диэлектрика. Этим диэлек-

трические среды существенно отличаются от проводящих, внутрь которых внешние стационарные электрические поля не проникают. Поэтому полная энергия любой системы, состоящей из поля и проводников (в пренебрежении контактными явлениями) просто складывается из внутренней энергии вещества проводников и энергии поля. Последняя не зависит от термодинамического состояния проводников (например, от их температуры). В диэлектриках энергетические соотношения более сложны и требуют отдельного рассмотрения.

Прежде всего определим работу, производимую над теплоизолированным диэлектриком при бесконечно малом приращении в нем поля. Ниже все малые приращения будут обозначаться добавлением буквы  $\delta$ .

Обычно поля, в которые попадают диэлектрики, создаются какими-то заряженными телами. Для простоты примем, что проводник один. Пусть он погружен в диэлектрическую среду, несет заряд  $q$  и обладает потенциалом  $\varphi_0$ . Если изменить заряд проводника, то изменится и окружающее его поле. Пусть этот заряд увеличился на малую величину  $\delta q$ . Для этого нужно совершить работу

$$\delta A = \varphi_0 \delta q.$$

Она затрачивается на перенос порции заряда  $\delta q$  отсюда, где  $\varphi = 0$ , на поверхность проводника.

Выразим работу  $\delta A$  через величины, характеризующие поле. Для этого в соответствии с теоремой Гаусса — Остроградского (В.25) запишем уравнение Максвелла (19.15) в применении к поверхности проводника. Тогда для заряда  $q$  получим

$$q = \int_V \rho \, dV = \int_V \frac{\partial D}{\partial r} \, dV = \oint_S (\mathbf{D} \, d\mathbf{S}),$$

где  $V$  — объем проводника. Соответственно

$$\delta q = \oint_S (\delta \mathbf{D} \, d\mathbf{S}).$$

Так как на поверхности проводника потенциал поля везде одинаков (напомним, что он равен  $\varphi_0$ ), то

$$\delta A = \oint_S \varphi_0 (\delta \mathbf{D} \, d\mathbf{S}) = \oint_S (\varphi_0 \delta \mathbf{D} \, d\mathbf{S}).$$

Теперь снова применим теорему Гаусса — Остроградского, но уже считая, что  $S$  является границей диэлектрика вне проводника. Тогда нормаль к  $S$  изменяет направление на обратное и

ориентируется внутрь объема  $V$ . Поэтому у последнего интеграла изменяется знак:

$$\delta A = - \int_S (\varphi_0 \delta \mathbf{D} d\mathbf{S}) = - \int_V \frac{\partial (\varphi \delta \mathbf{D})}{\partial r} dV,$$

где интегрирование по объему распространяется только на диэлектрик. Соответственно  $\varphi$  — это потенциал поля в диэлектрике. Вне проводника всюду  $\partial \mathbf{D} / \partial r = 0$ , так что и  $\partial (\delta \mathbf{D}) / \partial r = 0$ . Поэтому согласно (В.13)  $\frac{\partial}{\partial r} (\varphi \delta \mathbf{D}) = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} \delta \mathbf{D} \right) + \varphi \frac{\partial \delta \mathbf{D}}{\partial r} = = -(\mathbf{E} \delta \mathbf{D})$ . В итоге оказывается, что при приращении поля в присутствии диэлектрической среды совершается работа

$$\delta A = \int_V (\mathbf{E} \delta \mathbf{D}) dV. \quad (19.23)$$

Из (19.14) следует, что эта работа представима следующим образом (система СИ):

$$\delta A = \varepsilon_0 \int_V (\mathbf{E} \delta \mathbf{E}) dV + \int_V (\mathbf{E} \delta \mathbf{P}) dV. \quad (19.24)$$

Первое слагаемое в правой части (19.24) является работой, затрачиваемой на изменение поля. Второе слагаемое — это работа, затрачиваемая на поляризацию среды. С ней связана сила, действующая на диэлектрик со стороны поля. Найдем эту силу, приняв, что выполняется материальное уравнение (19.18).

Пусть поляризованность среды увеличилась на  $\delta \mathbf{P}$ . Для этого в каждом единичном объеме диэлектрика нужно затратить работу  $(\mathbf{E} \delta \mathbf{P})$ . С помощью (19.16) эту работу можно записать в виде (система СИ)  $(\mathbf{E} \varepsilon_0 \chi \delta \mathbf{E}) = \delta \left( \varepsilon_0 \frac{\chi E^2}{2} \right)$ . Отсюда следует, что величина  $-\varepsilon_0 \frac{\chi E^2}{2}$  является отнесенной к единичному объему потенциальной энергией диэлектрика. Следовательно, со стороны поля на единичный объем диэлектрика действует сила

$$\mathbf{F} = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left( -\varepsilon_0 \frac{\chi E^2}{2} \right) = \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\chi E^2). \quad (19.25)$$

В однородном диэлектрике ( $\chi$  не зависит от  $\mathbf{r}$ )

$$\mathbf{F} = \frac{\varepsilon_0 \chi}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (E^2).$$

Мы видим, что на однородный диэлектрик действует сила только со стороны неоднородного поля ( $E^2 \neq \text{const}$ ). Главным свойством этой силы является ее направленность в сторону усиления поля. Вот почему диэлектрики притягиваются заряженными

телами (вспомним о наэлектризованной расческе, подбирающей клочки бумаги).

Вычислим энергию, затрачиваемую на создание электрического поля в однородном диэлектрике. Примем и здесь материальное уравнение (19.18). Тогда в единице объема диэлектрика малое приращение, обусловленное малым приращением поля, будет равно

$$(\mathbf{E} \delta \mathbf{D}) = \varepsilon_0 \varepsilon (\mathbf{E} \delta \mathbf{E}) = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{2} \delta (\mathbf{E} \mathbf{E}) = \frac{1}{2} \delta (\mathbf{E} \mathbf{D}).$$

Интегрируя окончательное выражение (напоминаем, что  $\delta$  обозначает малое приращение) от нулевого значения поля до заданной величины  $\mathbf{E}$ , находим, что плотность энергии поля в диэлектрике равна

$$w_s = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \mathbf{D}). \quad (19.26)$$

Энергия всего поля находится интегрированием (19.26) по всему пространству. Там, где диэлектрика нет, выражение (19.26) совпадает с плотностью электрического поля в (15.16).

## СТАЦИОНАРНЫЕ МАГНИТНЫЕ ПОЛЯ В ВЕЩЕСТВЕ

## § 20.1. Намагниченность и токи намагничивания

1. Все вещества обладают магнитными свойствами, т. е. тем или иным способом реагируют на внешнее магнитное поле и могут создавать собственные магнитные поля. Главным из этих свойств является *намагничивание*.

*Намагничиванием называется явление возникновения в веществе объемного макроскопического магнитного момента.*

Магнитный момент вещества, отнесенный к единице объема, называется *намагниченностью*. Намагниченность будет обозначаться через  $M$ . Она является функцией точки. В нестационарных случаях намагниченность явно зависит еще и от времени. Таким образом, в общем случае  $M = M(r, t)$ .

Согласно определению в системе СИ намагниченность измеряется в А/м, а в системе СГС — единицей заряда, деленной на сантиметр, и на секунду.

В дальнейшем любое физическое тело, рассматриваемое с точки зрения его магнитных свойств, будет называться *магнетиком*. Подчеркнем, что (в отличие от диэлектриков) магнетики могут иметь любую структуру, в частности, быть проводниками.

Как всякое макроскопическое явление, намагничивание имеет свою микроскопическую природу. Существуют различные микроскопические механизмы намагничивания (они будут рассмотрены ниже). В каждом из них намагниченность создается магнитными моментами микроскопических частиц вещества. Существуют три типа таких микроскопических моментов. Эти микроскопические магнитные моменты называются соответственно: а) электронными орбитальными, б) электронными спиновыми и в) ядерными. Словом «спиновый» подчеркивается, что соответствующий магнитный момент ориентирован параллельно спину, т. е. собственному моменту импульса частиц (см. § 3.4 тома I).

Абсолютная величина электронного орбитального момента зависит от состояния электрона в атоме. Во всех случаях она либо равна нулю, либо имеет порядок величины *магнетона Бора*

$\mu_B$ , определяемого соотношением (16.47):

$$\mu_B = \frac{q_0 \hbar}{2m_e},$$

где  $\hbar$  — постоянная Планка,  $m_e$  — масса электрона. Магнетон Бора приближенно равен  $10^{-23}$  Дж/Тл. Спиновый магнитный момент электрона равен  $0,5\mu_B$ . Ядерный магнитный момент зависит от вида ядра. Во всех случаях он либо нуль, либо на три-четыре порядка меньше  $\mu_B$ . Поэтому в макроскопические явления заметный вклад дают лишь электронные магнитные моменты.

В атомах и молекулах магнитные моменты отдельных электронов полностью или почти полностью скомпенсированы. Результирующий магнитный момент атома или молекулы либо нуль, либо порядка  $\mu_B$ .

Макроскопическая намагниченность  $M$  получается усреднением суммы микроскопических магнитных моментов всех атомов и молекул в данном единичном объеме вещества.

Перейдем к вопросу о природе магнитных моментов. Согласно микроскопическим уравнениям Максвелла (16.1) стационарные магнитные поля могут порождаться только электрическими токами. Поэтому происхождение всех микроскопических магнитных моментов связывают с незатухающими и неразрушаемыми кольцевыми токами, циркулирующими внутри микрочастиц вещества. Впервые это положение как гипотеза было выдвинуто А. Ампером в 1820 г., задолго до того, как Д. К. Максвеллом были сформулированы фундаментальные уравнения электромагнитного поля.

*Токи, создающие магнитные моменты и не дающие вклад в макроскопическую токи проводимости, называются токами намагничивания.*

В настоящее время гипотеза Ампера подтверждена в отношении электронных орбитальных моментов и частично — в отношении ядерных. В отношении же спиновых электронных моментов и частично в отношении ядерных вопрос остается открытым. Для наших целей этот вопрос не имеет значения, поскольку различие между магнитным кольцевым током и магнитным диполем другой природы будет сказываться только внутри частицы, обладающей магнитным моментом. Поэтому мы примем гипотезу Ампера, т. е. будем считать, что все микроскопические магнитные моменты порождаются токами намагничивания.

При макроскопическом усреднении интенсивные быстро меняющиеся микроскопические токи намагничивания дают относительно слабые объемные токи намагничивания с плотностью  $\mathbf{j}_m$  и поверхностные токи намагничивания с поверхностной плотностью  $\mathbf{J}_m$  (определение поверхностной плотности тока было

дано в § 16.2). Поверхностные токи намагничивания возникают на поверхности магнетика. Возникновение поверхностных и объемных токов намагничивания иллюстрирует рис. 20.1. На нем изображено сечение магнетика, перпендикулярное намагниченности  $M$ . На рисунке схематически показаны микроскопические кольцевые токи, контуры которых для наглядности выбраны квадратными. Через  $j_M$  обозначена объемная плотность микроскопических токов намагничивания. На рисунке показаны случаи однородной намагниченности (верхняя часть рисунка) и

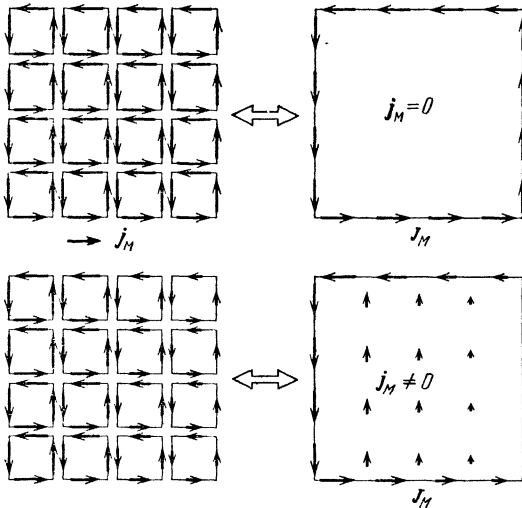


Рис. 20.1.

неоднородной намагниченности (нижняя часть). В первом случае существуют только поверхностные макроскопические токи намагничивания (микроскопические токи по соприкасающимся сторонам квадратов компенсируют друг друга). Во втором случае добавляются еще и объемные токи (компенсации нет). Результаты макроскопического усреднения показаны в правой стороне рисунка. В первом случае объемная плотность токов намагничивания  $j_M = 0$ , но поверхностная плотность  $J_M \neq 0$  и везде на поверхности одинакова по абсолютной величине. Во втором случае  $j_M \neq 0$  и  $J_M \neq 0$ , причем поверхностная плотность имеет разные значения в разных точках поверхности магнетика.

Усреднение микроскопических магнитных моментов дает намагниченность  $M$ . Нашей ближайшей задачей является установление связей между величинами  $j_M$ ,  $J_M$  и  $M$ . Для установления этих связей нам понадобится *первое основное допущение физики магнетиков*:



При разделении магнетика на части токи намагничивания не разрываются, т. е. не переходят в токи проводимости. Не происходит и обратный переход токов проводимости в токи намагничивания.

На микроскопическом уровне этим допущением принимается, что микроскопические кольцевые токи не разрушаются и не создаются. Отсюда понятны пределы применимости гипотезы: она справедлива, если не происходит процессов типа ионизации, рекомбинации и химических реакций, в которых разрушаются или создаются микрочастицы с ненулевыми собственными магнитными моментами.

Дадим математическую формулировку *первого основного допущения* физики магнетиков. Эта формулировка состоит в том, что

*полный электрический ток намагничивания через произвольную поверхность, разрезающую магнетик, равен нулю.*

Этот полный ток складывается из объемного и поверхностного, так что нулю равна сумма:

$$\int_S (\mathbf{j}_M d\mathbf{S}) + \oint_L (\mathbf{J}_M \mathbf{m}) dl = 0. \quad (20.1)$$

Здесь  $S$  — площадь сечения магнетика поверхностью,  $L$  — контур, образованный пересечением разрезающей поверхности с поверхностью магнетика,  $\mathbf{m}$  — единичный вектор, касательный к поверхности магнетика и перпендикулярный касательной к контуру  $L$ ,  $\mathbf{n}$  — единичный вектор внешней нормали к поверхности магнетика (рис. 20.2). На рисунке вектор  $\mathbf{n}$  отмечен кружком с точкой. Из определения поверхностной плотности тока следует, что контурный интеграл в (20.1) действительно равен полному поверхностному току намагничивания, пересекающему контур  $L$ . Положительной считается ориентация тока из первого (на рисунке нижнего) куска магнетика во второй.

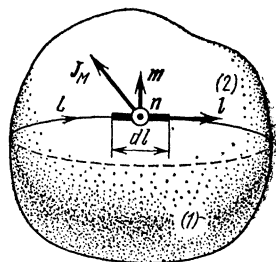


Рис. 20.2.

2. Из (20.1) непосредственно выводятся следующие общие соотношения:

$$\mathbf{J}_M = [\mathbf{M}\mathbf{n}], \quad (20.2)$$

$$\mathbf{j}_M = \left[ \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{M} \right]. \quad (20.3)$$

Для получения (20.2) рассмотрим малый участок поперечного разреза магнетика вблизи его поверхности (рис. 20.3). Участок настолько мал, что в его окрестности поверхность магнетика с высокой точностью можно счи-

татъ плоской. Вырежем мысленно из магнетика малый сплюснутый параллелепипед, одна из узких граней которого (на рисунке верхняя) лежит на поверхности магнетика и ориентирована вдоль поверхностного тока плотности  $J_m$ . Грань с наибольшей (но тоже малой) площадью  $\Delta S$  ориентирована перпендикулярно намагниченности  $M$ , которую можно считать одинаковой во всех точках параллелепипеда из-за малости последнего. Ребро  $a$  перпендикулярно  $J_m$ , т. е. верхняя грань параллелепипеда является прямоугольником. Такой выбор ориентации возможен, поскольку магнитный момент замкнутого плоского тока перпендикулярен плоскости, в которой течет ток (см. § 16.3). Ребро  $a$  является наименьшим из всех ребер вырезанного параллелепипеда.

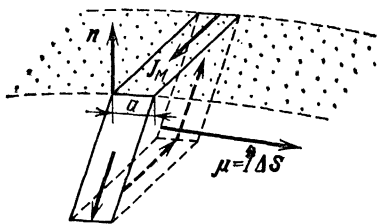


Рис. 20.3.

Магнитный момент  $\mu$  параллелепипеда можно подсчитать двумя способами. По определению намагниченности  $\mu = M \Delta V$ , где  $\Delta V$  — объем параллелепипеда. Согласно определению магнитного момента тока в плоском контуре  $\mu = I \Delta S$ , где  $I$  — замкнутый ток в контуре, охватывающем площадку  $\Delta S$ .

Для нашего сплюснутого параллелепипеда замкнутый ток течет по его узким граням. По определению поверхностного тока  $I = a J_m$ . Из сравнения двух выражений для  $\mu$  получаем

$$J_m \Delta S = \frac{1}{a} M \Delta V.$$

Вычислим теперь  $J_m$ . Этот вектор перпендикулярен как  $n$  (потому что  $J_m$  лежит в плоскости, касательной к поверхности магнетика), так и  $\Delta S$  (потому что он лежит в плоскости  $\Delta S$ ). Поэтому  $J_m$  параллелен векторному произведению  $[\Delta S n]$  и, следовательно,

$$J_m = \frac{[\Delta S n]}{|[\Delta S n]|} J_m.$$

Подставим в правую часть полученного выражения значение  $J_m \Delta S$  из предшествующей формулы. В результате получим

$$J_m = [Mn] \frac{\Delta V}{|[\Delta S n]| a}.$$

Для получения (20.2) нам осталось доказать, что величина  $|[\Delta S n]| a$  равна объему  $\Delta V$  параллелепипеда. Доказательство основано на том, что векторы  $n$ ,  $\Delta S$  и отрезок  $a$  все перпендикулярны  $J_m$ , т. е. лежат в одной плоскости. Кроме того, вектор  $n$  перпендикулярен отрезку  $a$ . Поэтому входящий в  $|[\Delta S n]|$  синус угла между  $n$  и  $\Delta S$  по абсолютной величине равен абсолютной величине косинуса угла между  $\Delta S$  и отрезком  $a$ . Отсюда и следует искомое равенство  $|[\Delta S n]| a = \Delta V$ .

Перейдем к доказательству (20.3). Для этого подставим в контурный интеграл из (20.1) значение  $J_m$  из (20.2):

$$\oint_L (J_m m) dl = \oint_L ([Mn] m) dl.$$

Воспользуемся теперь формулой (B.1) для тройного произведения векторов:

$$([Mn] m) = (M [nm]).$$

Возвратимся к рис. 20.2, на котором показан единичный вектор  $l$ , направленный по касательной к контуру  $L$  и ориентированный вдоль положительного

направления обхода контура  $L$ . По построению векторы  $m$ ,  $n$ ,  $l$  все единичны и перпендикулярны друг другу, так что каждый из них либо равен, либо противоположен векторному произведению двух других. В нашем случае (рис. 20.2)

$$[nm] = -l.$$

По определению векторного элемента длины контура  $dr = l dl$ . С учетом проведенных преобразований получим

$$\oint_L (J_m m) dl = - \oint_L (M dr).$$

Подставим это равенство в (20.1) и применим теорему Стокса (B.21) к контурному интегралу. В результате (20.1) сведется к равенству

$$\int_S \left( j_m - \left[ \frac{\partial}{\partial r} M \right] \right) dS = 0.$$

Из произвольности поверхности  $S$  следует, что в этом равенстве равно нулю подынтегральное выражение, т. е. выполняется (20.3).

Из (20.3) в соответствии с (B.8) следует, что

$$\frac{\partial j_m}{\partial r} = 0. \quad (20.4)$$

Согласно уравнению непрерывности (15.3) это означает, что  $\partial \rho_m / \partial t = 0$ , так что плотность  $\rho_m$  зарядов намагничивания можно считать нулевой во всем пространстве.

## § 20.2. Диамагнетизм и парамагнетизм

1. Основной задачей макроскопической физики магнитных явлений является получение (теоретическое или опытное) зависимости намагниченности магнетика  $M$  от величины усредненного магнитного поля  $B$  и от других физических величин, в частности от температуры. Для решения этой задачи необходимо сначала понять микроскопический механизм намагничивания, а затем усреднением по физически бесконечно малому объему получить макроскопические закономерности.

Главная трудность понимания микроскопических магнитных явлений заключается в их существенно квантовом характере. В изложении будут приводиться качественные классические оценки с привлечением некоторых квантовых закономерностей, сообщаемых без доказательства.

Фундаментальное значение для объяснения микроскопического механизма магнитных явлений имеет закон, устанавливающий связь между магнитным и механическим моментами изолированной микрочастицы (атом, молекула, ион). Этот закон выводится в квантовой механике и имеет следующий вид:

$$\mu = -g \left( \frac{q_0}{2m_e} \right) I. \quad (20.5)$$

Здесь  $\mu$  — магнитный момент частицы, у которой полный механический момент равен  $I$ . Момент  $I$  является векторной суммой спиновых и орбитальных механических моментов атомных электронов. В (20.5)  $q_0$  и  $m_e$  — это, соответственно, элементарный заряд и масса одного электрона. Множитель  $g$  характеризует состояние частицы и называется *фактором Ланде*. Для чисто орбитального момента  $g = 1$ , а для чисто спинового момента  $g = 2$ . Для сложной системы, обладающей и орбитальным, и спиновым моментом, эта величина либо равна нулю, либо имеет значение порядка единицы. Предсказание величины  $g$  для различных атомных состояний — одна из задач, решаемых в квантовой механике. Отметим, что магнетон Бора (16.47) получается, если в (20.5) положить механический момент равным  $z$ -компоненте спина электрона, т. е.  $\hbar/2$ , и, соответственно,  $g = 2$ .

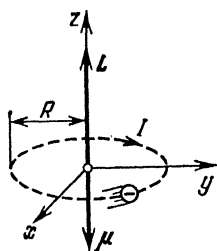


Рис. 20.4.

Хотя строгий вывод (20.5) возможен только в квантовой механике, все же оказывается, что (20.5), правда, только для орбитального движения, можно получить в рамках классических представлений. Для этого рассмотрим электрон, обращающийся по окружности радиуса  $R$  (классическая модель одноэлектронного атома). Выберем систему отсчета так, чтобы ее начало совпало с центром окружности, а ось  $z$  была ориентирована перпендикулярно плоскости окружности (рис. 20.4). В такой системе отсчета электрон будет обладать моментом импульса

$$I = L = \{0, 0, L\} = \{0, 0, m_e \omega R^2\},$$

где  $\omega$  — угловая скорость обращения электрона \*). Движение электрона создает электрический ток силы

$$I = -q_0 v,$$

где  $v = \omega/2\pi$  — частота обращения электрона. На рис. 20.4 показано, как протекает этот ток.

Для получения последнего равенства представим себе площадку, пересекающую орбиту электрона и ориентированную перпендикулярно орбите. Очевидно, что в единицу времени через эту площадку будет перенесено количество электричества, равное указанной выше величине. Комбинируя последние две формулы, выразим ток  $I$  через момент:

$$I = -\frac{q_0}{2\pi} \frac{L}{m_e R^2}.$$

\*) Напомним, что в атомах электроны движутся с нерелятивистскими скоростями.

Согласно (16.49) этот ток создает магнитный момент  $\mu$ , равный

$$\mu = -\frac{q_0}{2m_e} L$$

и ориентированный противоположно механическому моменту  $L$ . Этот результат совпадает с (20.5), если положить  $I = L$  и  $g = 1$ .

2. Один из механизмов намагничивания является универсальным, т. е. действует во всех веществах без исключения, и проявляется в форме *диамагнетизма*.

*Диамагнетизмом называется явление возникновения в магнетике, помещенном во внешнее магнитное поле, намагниченности, ориентированной противоположно полю.*

В чистом виде это явление наблюдается в диамагнетиках. Диамагнетики состоят из таких частиц (атомы, ионы, молекулы), в каждой из которых в отсутствие внешнего магнитного поля все спиновые и орбитальные магнитные моменты точно сбалансированы, т. е. их сумма равна нулю. Такими частицами являются атомы инертных газов, многих металлов (например, висмута, цинка, золота, меди и др.), ионы  $\text{Na}^+$  и  $\text{Cl}^-$ , молекулы многих органических соединений (например, бензола, нафталина).

В общих чертах механизм диамагнетизма таков. Включение внешнего магнитного поля (или внесение вещества в уже созданное поле) приводит к нарастанию магнитного поля в объеме вещества. Поэтому в веществе, в соответствии со вторым уравнением Максвелла (15.9), возникает индукционное электрическое поле. Оно воздействует на электроны, входящие в состав атомов, молекул или ионов вещества. В результате движение электронов изменяется. Это изменение приводит к возникновению дополнительных магнитных моментов, которые в диамагнетиках и расстраивают существовавший ранее баланс магнитных моментов. Поэтому каждая диамагнитная частица и тем самым вещество в целом намагничиваются. Индукционная природа описанного явления и есть причина его универсальности.

Из школьного курса известно характерное свойство индукционных токов препятствовать всяким изменениям магнитного поля \*) — правило Ленца. При диамагнитном намагничивании это свойство проявляется в отталкивании диамагнетика от внешнего магнитного поля. Это следует из (16.50): при увеличении угла между магнитным моментом и полем энергия их взаимодействия возрастает, что и проявляется в действии силы отталкивания между противоположно ориентированными полем и моментом. Возникновение индуцированных магнитных моментов,

\*) Это свойство будет подробно изложено в следующей главе.

ориентированных против внешнего поля, и является причиной диамагнитного намагничивания.

Рассмотрим количественную сторону вопроса. Для этого примем простейшую классическую модель электрона в атоме. В этой модели считается, что электрон вращается по круговой орбите, радиус которой обозначим через  $R$ . Конечно, эта классическая модель очень грубо отображает существование квантового состояния электрона в атоме. Однако оказывается, что сделанная на основе этой модели оценка диамагнитного эффекта совпадает с результатами квантовомеханических расчетов. Так же как и ранее, примем, что координатная плоскость  $x, y$  совмещена с плоскостью орбиты электрона, а начало координат расположено в центре орбиты (рис. 20.4). Допустим, что включается однородное магнитное поле  $\mathbf{B} = \{0, 0, B\}$ . В течение промежутка времени включения магнитное поле нарастает от нуля до значения  $B$ . Вследствие этого нарастания на орбите электрона возникнет индуцированное электрическое поле. Обозначим среднее значение составляющей этого поля, касательной к орбите, через  $\bar{E}_t(L)$ . Буквой  $L$  отмечен контур орбиты. По определению средней величины

$$\bar{E}_t(L) = \frac{1}{2\pi R} \oint_L (\mathbf{E} dr).$$

Здесь через  $\mathbf{E}$  обозначено индуцированное электрическое поле. Теперь воспользуемся законом электромагнитной индукции, т. е. вторым уравнением Максвелла (15.8) в интегральной форме. Выпишем это уравнение для кругового контура  $L$  и поверхности  $S$  круга, ограниченного этим контуром. Учитывая однородность магнитного поля, получаем

$$\oint_L (\mathbf{E} dr) = - \frac{d}{dt} \int_S B dS = - \frac{d}{dt} (B\pi R^2).$$

Принимая во внимание определение  $\bar{E}_t(L)$ , находим

$$\bar{E}_t(L) = - \frac{R}{2} \frac{dB}{dt}.$$

Приложенный к электрону со стороны поля момент силы  $\mathbf{N}$  направлен по оси  $z$ :  $N_z = N$  и

$$N = - q_0 \bar{E}_t(L) R = \frac{q_0 R^2}{2} \frac{dB}{dt}.$$

Момент силы изменяет момент импульса электрона. Это происходит согласно закону (3.31) из § 2.4 тома I. Применяя этот закон, приходим к уравнению

$$\frac{dL}{dt} = N = \frac{q_0 R^2}{2} \frac{dB}{dt}.$$

Интегрируя его по промежутку времени, в течение которого поле нарастает, получаем

$$L = \frac{q_0 R^2}{2} B.$$

Это и есть тот дополнительный механический момент, который приобретает электрон под действием магнитного поля. Теперь остается воспользоваться (20.5). Так как мы рассматриваем только орбитальное движение, то в (20.5) следует положить  $g = 1$ . В результате получим, что под влиянием поля электрон приобретает дополнительный магнитный момент

$$\mu = -\frac{q_0}{2m_e} L = -\frac{q_0^2 R^2}{4m_e} B.$$

У этой формулы есть один существенный недостаток: в нее входит радиус орбиты электрона. Как мы уже подчеркивали ранее (см., например, § 1.2 тома I), электроны в атомах на самом деле по траекториям не движутся. Квантовые законы движения оказываются такими, что по ним можно рассчитать только вероятность пребывания электрона в том или ином месте. Для учета этого обстоятельства от  $R^2$  следует перейти к среднему значению этой величины  $\overline{R^2} = \overline{x^2 + y^2} = \overline{x^2} + \overline{y^2}$ . В сферически симметричных атомах  $\overline{x^2} = \overline{y^2} = \overline{z^2} = (\overline{x^2 + y^2 + z^2})/3 = \overline{r^2}/3$ , где  $r$  — расстояние электрона до ядра атома. Следовательно,  $\overline{R^2} = 2\overline{r^2}/3$ . Поэтому с учетом квантовых свойств выражение для  $\mu$  оказывается таким:

$$\mu = -\frac{q_0^2 \overline{r^2}}{6m_e} B. \quad (20.6)$$

Если вещество одноатомное, причем в одном атоме имеется  $Z$  электронов ( $Z$  — порядковый номер химического элемента), а концентрация атомов равна  $n$ , то суммарный индуцированный магнитный момент равен

$$M^{(2)} = n\mu = -\left(\frac{nq_0^2}{6m_e} \sum_{i=1}^Z \overline{r_i^2}\right) B. \quad (20.7)$$

Реально этот закон применим к веществам, в которых взаимодействие атомов не влияет на их намагниченность. Такими веществами являются газы, состоящие из не очень больших молекул. Описание диамагнетизма конденсированных сред (жидкости, твердые тела) является более сложной задачей, поскольку в этом случае требуется учет взаимодействий микрочастиц вещества друг с другом.

О главных особенностях диамагнетизма закон (20.7) дает представление, несмотря на ограниченную область его применимости. Во-первых, как ожидалось, диамагнитная намагниченность ориентирована против поля и зависит от него линейно. Абсолютное ее значение весьма невелико.

Для подтверждения произведем оценку намагниченности газообразного гелия ( $Z = 2$ ), находящегося при нормальных условиях в магнитном поле  $B = 1 \text{ Тл} = 10^4 \text{ Гс}$ . Поля, величина которых имеет такой порядок, типичны для лабораторных условий. При нормальных условиях концентрация гелия  $n \approx 10^{25} \text{ м}^{-3}$ . Среднее значение квадрата расстояния каждого электрона до ядра по порядку величины совпадает с квадратом линейного размера атома, т. е. с  $10^{-20} \text{ м}^2$ . Подставляя эти данные, а также  $m_e \approx 10^{-30} \text{ кг}$  и  $q_0 = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$  в (20.7), находим, что  $M^{(2)} \approx 10^{-3} \text{ А/м}$ . Кубический метр вещества с такой намагниченностью в поле величины 1 Тл обладает энергией, равной работе, совершаемой при поднятии у поверхности Земли одного грамма на высоту всего лишь в 10 см.

Во-вторых, диамагнитная намагниченность не зависит от температуры вещества. Ниже мы увидим, что это свойство является характерным, отличающим диамагнетизм от всех прочих видов магнетизма.

3. Другой механизм намагничивания является ориентационным и проявляется в форме *парамагнетизма*.

*Парамагнетизмом называется явление возникновения в магнетике, помещенном во внешнее магнитное поле, намагниченности, ориентированной вдоль поля.*

Ориентационный механизм не универсален. Он действует только в тех веществах, частицы которых имеют собственные магнитные моменты. Выстраивание внешним магнитным полем этих магнитных моментов вдоль поля и приводит к парамагнетизму. Вещества, в которых это явление наблюдается, называются *парамагнетиками*. Парамагнетиками являются кислород, окись азота, алюминий, платина, редкоземельные элементы, щелочные и щелочноземельные металлы, водные растворы солей, содержащих ионы переходных элементов, и ряд других веществ.

В парамагнетике в отсутствие внешнего магнитного поля тепловое движение разрушает выстроенность микроскопических магнитных моментов. Поэтому без внешнего поля парамагнетик всегда размагничен. Наложение поля меняет ситуацию: магнитные моменты стремятся сориентироваться вдоль поля, преодолевая разупорядочивающее действие теплового движения. В результате устанавливается состояние, в котором намагниченность вещества отлична от нуля, причем ее значение зависит как от действующего поля, так и от температуры.



Рассмотрим эту зависимость на следующем примере. Пусть парамагнетиком является газ, состоящий из атомов и находящийся в равновесном состоянии. Предположим, что каждый атом устроен так, что его магнитный момент равен спиновому магнитному моменту одного электрона. Такая картина наблюдается, например, в атоме натрия.

Направим ось  $z$  системы координат вдоль внешнего магнитного поля  $\mathbf{B}$ . Тогда энергия  $U_m = -(\mu\mathbf{B})$  взаимодействия с полем магнитного момента  $\mu$  каждого атома (см. (16.50)) будет равна

$$U_m = -\mu_z B.$$

Так как по предположению момент  $\mu$  имеет чисто спиновое происхождение, то согласно (20.5)  $\mu_z = -\frac{q_0}{m_e} s_z$ , где через  $s_z$  обозначена  $z$ -компонента спина электрона. Здесь нам придется принять на веру квантовое свойство спина, состоящее в том, что  $s_z$  может принимать только два значения:  $\pm\hbar/2$  (где  $\hbar$  — постоянная Планка). Поэтому во внешнем магнитном поле каждый атом может находиться лишь в двух, различающихся по энергии, состояниях. В одном из них энергия взаимодействия с магнитным полем  $U_1 = \mu_B B$ , а в другом  $U_2 = -\mu_B B$  (где  $\mu_B$  — магнетон Бора). Значения  $\mu_{z1}$  и  $\mu_{z2}$  компоненты  $\mu_z$  в этих состояниях равны, соответственно,  $-\mu_B$  и  $\mu_B$ . Согласно распределению Больцмана вероятности  $W_1$  и  $W_2$  пребывания атома в указанных состояниях пропорциональны, соответственно,  $e^{-U_1/kT} = e^{-x}$  и  $e^{-U_2/kT} = e^x$ , где  $x = \mu_B B/kT$ , а  $T$  — температура газа. Приравняв сумму этих вероятностей единице, находим нормированные значения  $W_1$  и  $W_2$ :

$$W_{1,2} = \frac{e^{\mp x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Поскольку внешнее поле влияет только на  $z$ -компоненту  $\mu$ , оно сохраняет нулевыми средние значения  $x$ - и  $y$ -компоненты  $\mu$ :

$$\bar{\mu}_x = \bar{\mu}_y = 0.$$

Для вычисления среднего значения  $z$ -компоненты  $\mu$  используем формулу теории вероятностей (см. § 8.2 тома I) для вычисления средних значений дискретно изменяющихся величин. В применении к компоненте  $\mu_z$  это правило имеет вид  $\bar{\mu}_z = \mu_{z1}W_1 + \mu_{z2}W_2$ . Подставив в эту формулу найденные выше значения  $W_1$  и  $W_2$ , получим

$$\mu_z = \mu_B \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \mu_B \operatorname{th} x.$$

Пусть концентрация газа равна  $n$ . Тогда его намагниченность будет иметь значение  $M^{(n)} = \{0; 0; M^{(n)}\}$ , где

$$M^{(n)} = n\mu_B \operatorname{th} \frac{\mu_B B}{kT}. \quad (20.8)$$

График  $M^{(n)}(T)$  представлен на рис. 20.5. Мы видим, что в двух случаях: либо когда внешнее магнитное поле становится очень большим, либо когда температура стремится к нулю —  $M^{(n)}$  стремится к своему наибольшему значению  $n\mu_B$ . При достижении этого значения наступает *магнитное насыщение* парамагнетика. В состоянии насыщения намагниченность уже не зависит ни от внешнего поля, ни от температуры. Это явление объясняется просто. Как в сильных магнитных полях, так и при отсутствии теплового разупорядочивания все микроскопические магнитные моменты вещества

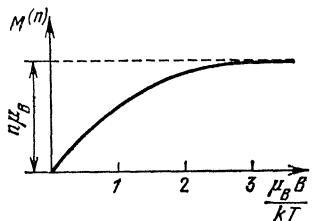


Рис. 20.5.

выстраиваются в направлении вдоль поля. Очевидно, что после достижения такого состояния намагниченность увеличиваться не может.

При комнатной температуре и полях, по порядку величины не превышающих  $1 \text{ Тл} = 10^4 \text{ Гс}$ , отношение  $x = \mu_B B / kT \ll 1$ . В таких условиях с высокой точностью  $\operatorname{th} x = x$  и

$$M^{(n)} = \frac{n\mu_B^2}{kT} B. \quad (20.9)$$

Мы видим, что при указанных ограничениях, а они выполняются очень часто, намагниченность парамагнетика оказывается пропорциональной полю. Коэффициент пропорциональности, во-первых, положителен и, во-вторых, обратно пропорционален температуре. Первое означает, что, в отличие от диамагнетиков, парамагнетики намагничиваются вдоль поля и, соответственно, полем не отталкиваются, а, наоборот, притягиваются. Второе — это *закон Кюри* для магнетиков. Он устанавливает, каким образом парамагнитная намагниченность изменяется в зависимости от температуры (разумеется, при  $\mu_B B / kT \ll 1$ ). По абсолютному значению парамагнитная намагниченность превосходит диамагнитную, но все же является весьма малой, потому что практически всегда намагниченность парамагнетика далека от насыщения. Так, намагниченность парамагнитного газа, находящегося при нормальных условиях в поле  $B \approx 1 \text{ Тл}$  ( $x = \mu_B B / kT \approx 10^{-3}$ ), имеет порядок  $10^{-1} \text{ А/м}$ . При насыщении намагниченность имеет порядок  $10^2 \text{ А/м}$ .

В заключение отметим, что намагниченность металлических парамагнетиков не подчиняется закону Кюри. В них парамагнитный эффект существует, но практически не зависит от температуры. Парамагнетизм такого рода называется *аномальным*. Механизм этого явления существенно квантовый.

### § 20.3. Ферромагнетизм

1. Особую группу магнитных материалов образуют *ферромагнетики*.

*Ферромагнетиками* являются *кристаллические тела, обладающие спонтанной намагниченностью в небольших, но макроскопических объемах, линейные размеры которых не превышают  $10^{-6}$  м.*

Ферромагнетики являются магнитным подобием сегнетоэлектриков. К ферромагнетикам относятся, например, кристаллы железа, никеля, кобальта. Ферромагнитные материалы намагничиваются чрезвычайно сильно — в  $10^{10}$ — $10^{11}$  раз сильнее, чем диамагнитные и парамагнитные вещества.

Обычные классические магнитные силы не могут привести к состояниям со спонтанной намагниченностью. Во-первых, они для этого недостаточно велики. Во-вторых, их ориентирующее действие совсем не такое, какое требуется. Иллюстрацией этому является рис. 20.6. На нем показано, в каких направлениях находящийся в центре магнит ориентирует окружающие магнетики (микроскопические магнитные моменты), если между ними действуют только магнитные силы. Буквы *N* и *S* отмечают северный (North) и южный (South) полюсы. Как видно, суммарный магнитный момент окружающих магнетиков оказывается нулевым. Это и означает, что чисто магнитное взаимодействие не может быть причиной образования спонтанной выстроенности магнитных моментов.

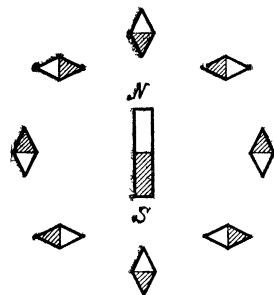


Рис. 20.6.

Долгие годы природа ферромагнетизма оставалась загадочной. Картина прояснилась только после установления квантовых свойств взаимодействия электронов. Без объяснения укажем, что квантовое рассмотрение дает картину, качественно согласующуюся с классической моделью ферромагнетизма, предложенной П. Вейссом в 1907 г. Мы ограничимся изложением *модели Вейсса*. Исходное допущение этой модели следующее: *с появлением намагниченности в ферромагнитной среде возникает макроскопическое поле  $B'$ , пропорциональное*

намагниченности. В системе СИ это записывают так:

$$\mathbf{B}' = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \lambda \mathbf{M}. \quad (20.10)$$

Множитель  $1/\epsilon_0 c^2$  вводится с той целью, чтобы коэффициент  $\lambda$  оказался безразмерным. Этот коэффициент является характерной для каждого ферромагнетика постоянной величиной. Поле  $\mathbf{B}'$  называют *внутренним* или, что то же, *молекулярным полем Вейсса*. Роль этого поля проста: поле  $\mathbf{B}'$  своим ориентирующим действием удерживает вещество в намагниченном состоянии даже в отсутствие внешнего поля (ниже мы увидим, что это происходит только в определенном диапазоне температур). Таким образом, путем введения поля  $\mathbf{B}'$  П. Вейсс учел действие еще неизвестных ему сил\*), приводящих к возникновению ферромагнитных состояний, и сумел получить правильное описание многих ферромагнитных явлений. Важнейшим из них является температурная зависимость намагниченности ферромагнетиков.

При получении зависимости  $\mathbf{M}(T)$  учитывается, что на каждый микроскопический магнитный момент действуют: а) внешнее поле, б) молекулярное поле Вейсса, в) тепловое движение. Схема расчета такая же, как и для парамагнетиков, с тем единственным отличием, что теперь надо рассматривать не просто внешнее поле  $\mathbf{B}$ , а сумму  $\mathbf{B} + \mathbf{B}' = \mathbf{B} + \lambda \mathbf{M}/\epsilon_0 c^2$ . Поэтому вместо (20.8) для ферромагнетиков получается такое соотношение:

$$M = n\mu_B \operatorname{th} \frac{\mu_B (B + \lambda M/\epsilon_0 c^2)}{kT}. \quad (20.11)$$

Соотношение (20.11) является трансцендентным уравнением относительно  $M$ , которое не решается в элементарных функциях. Но и без решения из него можно выяснить характер температурной зависимости  $M(T)$ . Делается это так. В отсутствие внешнего поля, т. е. при  $\mathbf{B} = 0$ , (20.11) переходит в уравнение

$$M = n\mu_B \operatorname{th} \frac{\mu_B \lambda M}{\epsilon_0 c^2 kT} = f(M). \quad (20.12)$$

При любой температуре у этого уравнения есть тривиальное решение  $M = 0$ . Но оно не всегда единственное, в чем легко убедиться графически. На рис. 20.7 изображены графики левой и правой частей уравнения (20.12). Точки пересечения прямой  $y_1 = M$  и кривой  $y_2 = f(M)$  и являются корнями уравнения (20.12). Мы видим, что, вообще говоря, существуют два корня: помимо  $M = 0$  есть и корень  $M = M_s$ . Так как внешнее поле отсутствует, то наличие второго корня означает появление спонтанной намагниченности.

\*) Физически смысл поля  $\mathbf{B}'$  был выяснен только в квантовой теории. Отметим, что оно не имеет магнитной природы.

Заметим теперь, что кривая идет более полого при высоких температурах и более круто при низких. Это видно из рис. 20.8. На нем нанесены кривые  $y_2 = f(M)$  при четырех разных температурах  $T_1 < T_2 < T_C < T_3$ . Буквенный индекс, выделяющий третью по счету температуру, мы объясним чуть ниже. При понижении температуры величина  $M_s$  приближается к пределу насыщения  $n\mu_B$ . С ростом же температуры  $M_s$  убывает. При достаточно высоких температурах (например, при  $T = T_3$ ) спонтанной намагниченности нет, поскольку кривые  $y_1$  и  $f(M)$  при

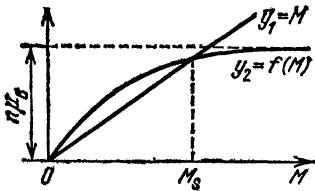


Рис. 20.7.

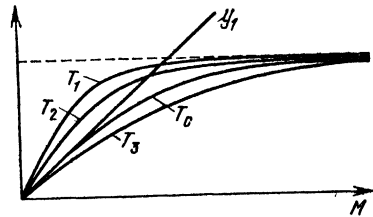


Рис. 20.8.

$T = T_3$  нигде не пересекаются, кроме как в начале координат. Отсутствие спонтанной намагниченности при высоких температурах означает, что существует определенная критическая температура, при превышении которой спонтанная намагниченность исчезает. Эту температуру мы и обозначили выше через  $T_C$ . При  $T = T_C$  прямая  $y_1$  только касается кривой  $y_2$  в начале координат. Это означает, что при  $T = T_C$

$$\left. \frac{df(M)}{dM} \right|_{M=0} = \frac{dM}{dM} = 1.$$

Поскольку при малых значениях аргумента  $\text{th } x \approx x$ , то

$$\left. \frac{df(M)}{dM} \right|_{M=0} = \frac{n\mu_B^2 \lambda}{\epsilon_0 c^2 k T_C} = 1.$$

Таким образом, оказывается, что

$$T_C = \frac{n\mu_B^2 \lambda}{\epsilon_0 c^2 k}. \quad (20.13)$$

Эта температура называется *точкой Кюри* ферромагнетика. Например, для железа  $T_C = 1043$  К. Выше точки Кюри зависимость намагниченности от температуры следующая. При  $T > T_C$  спонтанной намагниченности нет. Если же есть внешнее поле и оно невелико, так что

$$\frac{\mu_B (B + \lambda M / \epsilon_0 c^2)}{kT} \ll 1,$$

то при  $T > T_c$  в (20.11) можно произвести замену  $\text{th } x \approx x$ , после которой видно, что зависимость намагниченности от внешнего поля линейна и имеет вид

$$M = \frac{n\mu_B^2}{k(T - T_c)} B. \quad (20.14)$$

Это равенство выражает закон Кюри — Вейсса в магнетизме.

Модель Вейсса хорошо воспроизводит основные свойства ферромагнетиков. Она предсказывает возникновение ферромагнитного состояния при  $T < T_c$  и его разрушение при  $T > T_c$ . Однако, как и всякая модель, теория Вейсса имеет довольно ограниченную область применимости. Так, модель Вейсса не дает ответа, например, на такие вопросы: а) какие вещества могут находиться в ферромагнитных состояниях? б) чему равна температура Кюри для каждого из этих веществ? в) почему спонтанно намагниченными могут быть образцы только достаточно малых размеров? Объяснение этим фактам дает квантовая теория ферромагнетизма.

2. Так же как и сегнетоэлектрики, ферромагнетики больших размеров состоят из отдельных доменов. Магнитный домен —

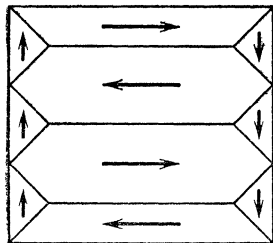


Рис. 20.9.

это участок вещества, макроскопический магнитный момент которого отличен от нуля. Размеры, форма и ориентация магнитных доменов зависят от многих факторов: температуры, вещественного состава, размеров и формы образца, дефектов его кристаллической структуры, напряженного состояния и пр. В хорошо очищенных монокристаллах наблюдались упорядоченные конфигурации доменов. Одна из таких конфигураций показана на рис. 20.9. Стрелками изображены магнитные моменты доменов.

Обычно домены имеют неправильную форму и ориентированы друг по отношению к другу хаотично. В этих случаях суммарный магнитный момент всех доменов равен нулю. Положение меняется во внешнем поле. Образец в целом намагничивается. Намагничивание растет с увеличением поля. Происходит это двумя способами. Во-первых, домены, ориентированные вдоль поля, увеличиваются, «поглощая» домены иной ориентации. Во-вторых, магнитные моменты доменов поворачиваются, ориентируясь вдоль поля. Первый механизм преобладает в слабых, а второй — в сильных полях.

Доменное строение ферромагнетиков проявляется в магнитном гистерезисе. При циклическом намагничивании его характе-

ризует петля гистерезиса. Ее изображают на графике, по оси абсцисс которого откладывают значения разности  $\epsilon_0 c^2 \mathbf{B} - \mathbf{M}$ . Разность  $\epsilon_0 c^2 \mathbf{B} - \mathbf{M}$  называется полем  $\mathbf{H}$ . Оно измеряется в А/м. По оси ординат откладываются значения либо намагниченности  $\mathbf{M}$ , либо поля  $\mathbf{B}$ . Форма петли магнитного гистерезиса подобна сегнетоэлектрической, и в зависимости от того, узкой или широкой является петля, ферромагнетик называется *мягким* или *жестким*. Чем они физически различаются, мы поясним чуть ниже, а сейчас для примера приведем петлю гистерезиса для мягкого железа (рис. 20.10).

Обратим внимание на резкое различие масштабов по осям графика, показанного на рис. 20.10. Это различие обусловлено огромной величиной намагниченности и наблюдается у всех ферромагнетиков. В силу этого обстоятельства разность  $\epsilon_0 c^2 \mathbf{B} - \mathbf{M}$  оказывается ничтожной в сравнении с  $\epsilon_0 c^2 \mathbf{B}$ .

Существование магнитного гистерезиса означает существенно неоднозначную зависимость намагниченности от магнитного поля. Из рис. 20.11 также видно, что при достаточно больших значениях  $\mathbf{H}$  намагниченность  $\mathbf{M}$  становится постоянной, т. е. не зависящей от  $\mathbf{H}$ . Это явление называется *насыщением*. Из-за наличия гистерезиса ферромагнитное состояние не может быть охарактеризовано магнитной восприимчивостью. И все же в некоторых случаях эту характеристику материала рассматривают на тех же основаниях, на каких иногда говорят о диэлектрической восприимчивости сегнетоэлектриков. Напомним, какие условия при этом должны быть соблюдены. Во-первых, петля гистерезиса должна быть достаточно узкой, т. е. ферромагнетик должен быть мягким. Во-вторых, ферромагнетик должен использоваться в состояниях вдали от магнитного насыщения. Некоторые из ферромагнитных материалов, широко используемых в технике, в условиях применения удовлетворяют этим требованиям. Таким материалом является, например, трансформаторное железо (сплав железа с небольшим количеством кремния).

Очевидно, что вдали от насыщения намагниченность мягких ферромагнетиков существенно зависит от внешнего поля (поэто-

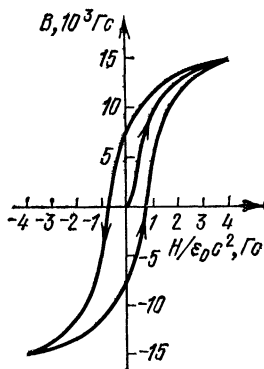


Рис. 20.10.

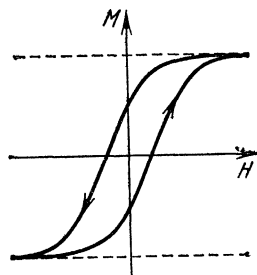


Рис. 20.11.

му-то о них и говорят, как о мягких материалах). Приблизительно эту зависимость можно считать линейной. Именно благодаря этому свойству мягкие ферромагнетики широко используются там, где необходимо осуществить частое перемагничивание при минимальных энергетических потерях (например, в трансформаторах \*)).

Для жестких ферромагнетиков (широкая петля гистерезиса) магнитная восприимчивость никакого смысла не имеет. Чем шире петля, тем больше так называемая *остаточная намагниченность* (так называется намагниченность, которая сохраняется при выключении свободных токов, а с ними и поля  $H$ ). Все

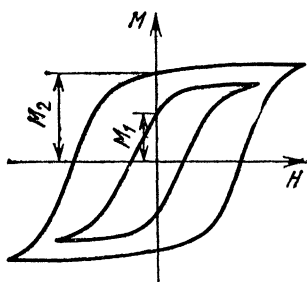


Рис. 20.12.

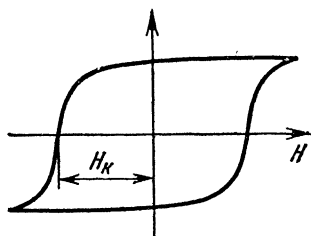


Рис. 20.13.

это можно увидеть на рис. 20.12, где через  $M_1$  и  $M_2$  обозначены, соответственно, остаточные намагниченности мягкого и жесткого ферромагнетиков. С уширением петли увеличивается область, в которой намагниченность практически не зависит от внешних полей. Вот почему такой материал называют жестким.

Жесткие ферромагнетики являются подходящими материалами для изготовления постоянных магнитов. Они делаются так. Жесткий ферромагнетик, первоначально не обладающий намагниченностью, помещают во внешнее магнитное поле, которое спустя некоторое время выключают. Поле намагничивает материал, и намагниченность сохраняется в виде остаточной после выключения поля. Для размагничивания материала необходимо еще раз приложить магнитное поле, но направленное обратно первоначальному. На рис. 20.13 это поле обозначено через  $H_k$ . Оно называется *магнитной коэрцитивной силой*. Эта величина характеризует ширину петли гистерезиса. Одним из материалов с очень широкими петлями гистерезиса является, например, сплав

\*) При перемагничивании ферромагнетика потери энергии обусловлены перестройкой его доменной структуры.



Алнико-5 (51% Fe, 8% Al, 14% Ni, 24% Co, 3% Cu). У этого сплава домены малоподвижны, так что их параллельного выстраивания добиваются специальной механической обработкой. В осях  $B$  и  $H$  петля гистерезиса сплава Алнико-5 имеет вид, показанный на рис. 20.14. Эта петля почти в 500 раз шире петли гистерезиса мягкого железа. Коэрцитивная сила Алнико-5 приблизительно равна  $52 \cdot 10^3$  А/м. Магнитное поле, отвечающее остаточной намагниченности, имеет значение, близкое к  $12\,500$  Гс  $= 1,25$  Тл.

3. Спонтанная выстроенность микроскопических магнитных моментов наблюдается не только у ферромагнетиков. Существуют родственные им типы магнитных структур, из которых мы кратко опишем только *антиферромагнетики* и *ферримагнетики* (обратите внимание на пятую букву последнего слова). В антиферромагнетиках соседние микроскопические магнитные моменты антипараллельны друг другу. Поэтому расположение микроскопических магнитных моментов является упорядоченным, но при этом суммарная намагниченность равна нулю. Схематически такая структура изображена на рис. 20.15. Макроскопически антиферромагнетик похож на слабый парамагнетик: внешнее поле несколько «расшатывает» прочную антиферромагнитную структуру, в результате чего антиферромагнетик намагничивается. Специфической является температурная зависимость намагниченности антиферромагнетика. Напомним, что по закону Кюри намагниченность парамагнетика падает с ростом температуры и неограниченно растет при приближении температуры к абсолютному нулю. (Реально, конечно, закон Кюри перестает быть применимым при приближении к магнитному насыщению.) В отличие от этого, намагниченность антиферромагнетика при низких температурах мала из-за жесткости его магнитной структуры. При повышении температуры намагниченность сначала возрастает за счет того, что тепловое движение «раскачивает» микроскопические магнитные моменты, ослабляя антиферромагнитную структуру. Затем при некоторой, характерной для каждого конкретного антиферромагнетика температуре упорядоченная магнитная структура разрушается. Эта температура называется *точкой Нееля*. Выше точки Нееля намагниченность убывает с ростом температуры по

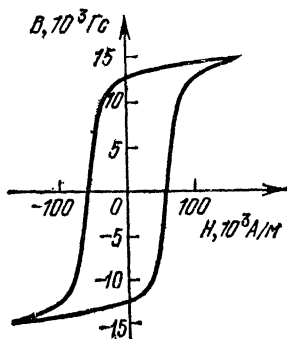


Рис. 20.14.



Рис. 20.15.

закону

$$\mathbf{M} = \frac{\text{const}}{T + T_N} \mathbf{B}. \quad (20.15)$$

Здесь  $T_N$  — температура Нееля.

Этот закон легко получить прямо из (20.14). Дело в том, что антиферромагнитное состояние также можно описать с помощью поля Вейсса. Но только теперь это поле должно быть ориентировано противоположно намагниченности. Поэтому в (20.10)  $\lambda$  нужно заменить на  $-\lambda$ . На рис. 20.7 кривая  $y_2$  уходит под ось абсцисс и поэтому имеет с прямой  $y_1$  только одну общую точку — начало координат. Это означает, что, несмотря на ориентирующее действие внутреннего поля Вейсса, спонтанной намагниченности все-таки не возникает. Именно это и имеет место в антиферромагнитных материалах. При замене  $\lambda$  на  $-\lambda$  изменяется и знак перед критической температурой, которой теперь является точка Нееля.

Типичным примером антиферромагнетика является окись марганца  $\text{MnO}$ . Для этого антиферромагнетика  $T_N = 122 \text{ K}$ .

В ферримагнетиках соседние микроскопические магнитные моменты также ориентированы противоположно друг другу, но различны по абсолютной величине. Упорядоченная микроскопическая структура ферримагнетика схематически изображена на рис. 20.16. Из этого рисунка видно, что у ферримагнетика микроскопическая структура напоминает антиферромагнитную, а макроскопические свойства должны быть близки к ферромагнитным, так как у ферримагнетика имеется спонтанная намагниченность. Вместе с тем ферримагнетики не подчиняются закону Кюри — Вейсса. Типичным примером ферримагнетика является магнетит  $\text{Fe}_3\text{O}_4$ , магнитные подрешетки которого составлены из двух- и трехвалентных ионов железа, имеющих различные магнитные моменты. Важным для практики свойством ферримагнетиков является то, что все они диэлектрики или полупроводники, в то время как все ферромагнетики — металлы. Очень ценными для радиотехники оказались полупроводниковые ферримагнитные материалы — *ферриты*. Из мягких ферритов изготавливают, например, сердечники катушек, дросселей, трансформаторов, магнитных антенн и других магнитопроводов.

Рис. 20.16.

4. Важным свойством рассмотренных в этом параграфе магнитных структур является *магнитострикция*. Магнитострикцией называется деформирование магнетика при его намагничивании. В ферро- и ферримагнетиках (железе, никеле, кобальте, ряде сплавов, ферритах) магнитострикция достигает значительных величин. Например, при намагничивании относительное удлинение образцов этой группы магнетиков находится в пределах от  $10^{-5}$  до  $10^{-3}$ . В антиферромагнетиках относительное удлине-

ние заметно меньше. В полях порядка  $1 \text{ Тл} = 10^4 \text{ Гс}$  оно не превышает  $10^{-6}$ .

Магнитострикция всегда связана с микроскопической анизотропией материала и поэтому в принципе должна проявляться в диа- и парамагнетиках соответствующего строения. Но, как показывает опыт, для этих материалов она пренебрежимо мала.

Микроскопическая анизотропия выражается, в частности, в том, что в материале имеются направления легкого и затрудненного намагничивания: в одних направлениях выстраивание микроскопических магнитных моментов происходит сравнительно легко, а в других — нет. Именно поэтому при намагничивании по разным направлениям частицы вещества располагаются различным образом. В этом и заключается главная причина всех магнитострикционных эффектов.

Явление магнитострикции лежит в основе работы магнитострикционных датчиков различных типов. Эти датчики применяются в электрических схемах для измерения в них неэлектрических величин, а также в системах автоматического контроля и регулирования с магнитострикционным принципом действия. К числу таких датчиков относятся, например, магнитоупругие динамометры и манометры, тензометрическая аппаратура (применяется для измерения напряжений в твердых телах), электроакустические преобразователи (позволяют преобразовывать электрические колебания в механические и наоборот), магнитострикционные стабилизаторы (обеспечивают стабильность частоты механических и электрических колебаний).

#### § 20.4. Свойства стационарных магнитных полей в веществе

1. В этом параграфе будут сформулированы уравнения Максвелла для макроскопического стационарного магнитного поля в магнетиках. Основной идеей вывода этих уравнений является отделение токов намагничивания от остальных и выражение плотности токов намагничивания через полевые макроскопические величины. Введем на короткое время развернутое обозначение  $\vec{j}_{\text{микро}}$  для плотности микроскопических токов и  $\vec{j}_{\text{макро}}$  для макроскопической плотности тока. Последнюю определим соотношением

$$\vec{j}_{\text{макро}} = \vec{j}_{\text{микро}} - \vec{j}_M. \quad (20.16)$$

Мы не поставили черту усреднения над  $\vec{j}_M$ , так как эта величина является макроскопической (т. е. по определению  $\vec{j}_M = \vec{j}_m$ ). Нам понадобится еще новая размерная константа  $\mu_0$ , которая удовлетворяет равенству

$$\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1. \quad (20.17)$$

Константа  $\mu_0$  называется *магнитной постоянной*. Она (как и  $\epsilon_0$ ) не имеет физического смысла. Ее появление вызвано несогласованностью основных единиц в системе СИ. Поэтому в системе СГС соотношение типа (20.17) отсутствует. Величина  $\mu_0$  равна

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Н} \cdot \text{с}^2}{\text{Кл}^2}.$$

Введем теперь макроскопическое поле  $\mathbf{H}$ , определив его равенством

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}. \quad (20.18)$$

Поле  $\mathbf{H}$  часто называют *напряженностью магнитного поля*. В настоящей книге этот термин использоваться не будет. Как видно, размерность поля  $\mathbf{H}$  совпадает с размерностью намагниченности.

По историческим причинам поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  получили сходные названия, соответственно, напряженности электрического поля и напряженности магнитного поля, а поля  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$  — тоже сходные названия, соответственно, электрической индукции и магнитной индукции. Это сходство названий дополняется внешним (только внешним! — см. ниже) сходством  $\mathbf{E}$  с  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{D}$  с  $\mathbf{B}$  в материальных уравнениях (19.18) и приведенном ниже (20.22). Второе получается из первого формальной заменой  $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}$ ,  $\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{B}$ ,  $\epsilon \rightarrow \mu$ ,  $\epsilon_0 \rightarrow \mu_0$ . Мы хотим подчеркнуть и даже предостеречь, что это внешнее сходство терминов и формул является дезориентирующим. Основными характеристиками электрического и магнитного полей являются, соответственно, поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ . Именно они глубоко родственны друг другу, поскольку именно ими определяется действие электромагнитного поля на покоящиеся и движущиеся заряды. Другую пару родственных полей образуют  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{H}$ . Каждое из них представляет собой сумму двух разнородных величин (см. (19.14) и (20.18)), и оба они введены для учета связанных источников электромагнитного поля в веществе. Именно поэтому мы используем для полей терминологию, отражающую роль обсуждаемых полей и получившую распространение в современной физической литературе, особенно в оригинальных работах:  $\mathbf{E}$  — электрическое поле,  $\mathbf{B}$  — магнитное поле,  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{H}$  — просто «поле  $\mathbf{D}$ » и «поле  $\mathbf{H}$ ».

Макроскопические уравнения Максвелла для стационарных магнитных явлений получают усреднением второй пары уравнений (16.1) по физически бесконечно малому объему. В силу линейности вид этих уравнений не изменится при переходе к усредненным величинам. Поэтому для макроскопического поля  $\mathbf{B}$  имеем

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{r}} = 0. \quad (20.19)$$

С учетом (20.16) получаем

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{B} \right] = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \bar{\mathbf{j}}_{\text{микро}} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} (\mathbf{j}_{\text{макро}} + \mathbf{j}_{\text{м}}).$$

Заменив  $1/\epsilon_0 c^2$  согласно (20.17) на  $\mu_0$ ,  $j_m$  согласно (20.3) на  $\left[\frac{\partial}{\partial r} \mathbf{M}\right]$  и пользуясь определением (20.18) поля  $\mathbf{H}$ , преобразуем последнее уравнение к виду

$$\left[\frac{\partial}{\partial r} \mathbf{H}\right] = j_{\text{макро}}. \quad (20.19a)$$

Из (20.19) на основании (В.7) следует, что макроскопическое поле  $\mathbf{B}$  обычным образом выражается через векторный потенциал:

$$\mathbf{B} = \left[\frac{\partial}{\partial r} \mathbf{A}\right].$$

При выводе (20.19) и (20.19a) было использовано только первое основное допущение физики магнетиков. Поэтому область применимости этих уравнений совпадает с областью применимости принятого допущения, т. е. охватывает практически все магнитные явления, включая и ферромагнитные.

Система макроскопических уравнений Максвелла (20.19) и (20.19a) не является замкнутой, поскольку в нее входят два поля  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$ . Для получения замкнутой системы необходимо дополнительное уравнение, связывающее поля  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$ . Это соотношение называется *третьим материальным уравнением*. Согласно (20.18) для его определения достаточно связать  $\mathbf{M}$  с  $\mathbf{H}$ . Для этого необходимо дополнительное допущение о структуре магнетиков. Примем *второе основное допущение о структуре магнетиков*:

*Намагниченность вещества в каждой точке магнетика пропорциональна макроскопическому полю  $\mathbf{H}$  в этой точке.*

В системе СИ и в системе СГС это записывают одинаково и следующим образом:

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}. \quad (20.20)$$

В (20.20) коэффициент пропорциональности  $\chi_m$  зависит от свойств магнетика. При соблюдении второго допущения соотношение (20.20) является определением  $\chi_m$  как макроскопической величины, характеризующей магнитное свойство магнетика. Величина  $\chi_m$  называется *магнитной восприимчивостью среды*. Эта величина безразмерна.

Область применимости второго основного допущения является несколько более узкой, чем первого. Так, второе допущение не соблюдается для жестких ферромагнетиков и для парамагнетиков в сильных внешних магнитных полях при низких температурах. Однако в большинстве практических ситуаций второе допущение о магнетиках справедливо. Согласно (20.6) оно всегда справедливо для диамагнетиков, а согласно (20.9) оно справедливо для парамагнетиков при  $\mu_B B/kT \ll 1$ . Кроме

того, это допущение выполняется для мягких ферромагнетиков вдали от насыщения.

Наряду с  $\chi_m$  вводится еще одна безразмерная магнитная характеристика вещества, называемая *магнитной проницаемостью*. Магнитная проницаемость обозначается через  $\mu$  и определяется соотношением

$$\mu = 1 + \chi_m. \quad (20.21)$$

Из этого определения видно, что  $\mu$  однозначно выражается через  $\chi_m$ , т. е. не несет новой информации. Ее использование упрощает вид некоторых формул. В таблицах приводятся значения либо  $\chi_m$ , либо  $\mu$ .

Подставив (20.21) и (20.20) в (20.18), мы получим третье материальное уравнение Максвелла:

$$\mathbf{B} = \mu\mu_0\mathbf{H}. \quad (20.22)$$

Подчеркнем, что в неоднородных средах величины  $\chi_m$ ,  $\mu$  являются функциями точки. В таких случаях при подстановке (20.22) в уравнение Максвелла (20.19) величину  $\mu = \mu(\mathbf{r})$  нельзя просто выносить налево за символ дифференцирования  $\partial/\partial\mathbf{r}$ .

Система макроскопических уравнений (20.19), (20.19а) совместно с материальным уравнением (20.22) уже является полной. Число уравнений в ней соответствует числу неизвестных функций.

По данным, приведенным в предыдущих параграфах, нетрудно выписать формулы для  $\chi_m$  и  $\mu$  в тех случаях, которые были рассмотрены в указанных параграфах. Остановимся только на характерных значениях магнитной восприимчивости различных типов линейных магнетиков.

Магнитная восприимчивость диамагнетиков  $\chi_m^{(n)} < 0$  и не зависит от температуры;  $|\chi_m^{(n)}|$  принимает очень малые значения — в пределах диапазона от  $10^{-5}$  до  $10^{-6}$ . Например, для гелия —  $\chi_m^{(\text{He})} \approx 10,9 \cdot 10^{-6}$ . Эту цифру можно получить, исходя из (20.7) и (20.20). Редко встречаются значения  $|\chi_m^{(n)}| \approx 10^{-4}$ . Отрицательность  $\chi_m^{(n)}$  выражает свойство диамагнетиков отталкиваться от внешнего магнитного поля.

Для парамагнетиков  $\chi_m^{(n)} > 0$ . Значения  $\chi_m^{(n)}$  заметно убывают с ростом температуры (закон Кюри) и группируются в диапазоне от  $10^{-3}$  до  $10^{-2}$ . Положительность  $\chi_m^{(n)}$  связана со свойством парамагнетиков притягиваться к внешнему магнитному полю.

Мягкие ферромагнетики имеют очень большие положительные значения  $\chi_m^{(\Phi)}$  — порядка  $10^3$  и даже  $10^4$ . Такие значения наблюдаются, например, у обычных сортов железа. Существуют

специальные сплавы типа «супермалоя» (сплав железа и никеля с добавками молибдена, хрома, меди и ряда других элементов), магнитная проницаемость которых по порядку величины достигает  $10^6$ .

Ввиду малости  $\chi_M^{(d)}$  и  $\chi_M^{(n)}$  в диа- и парамагнетиках поля  $\mathbf{B}$  и  $\mu_0 \mathbf{H}$  практически не отличаются друг от друга. Это позволяет вести расчет магнитных полей в этих средах, не считаясь с их намагничиванием, т. е. на основе уравнений поля в пустоте. Такое приближение, конечно, теряет всякий смысл, если рассматривается явление, для которого существенно взаимодействие ферромагнетика с полем. Пренебрежение намагниченностью ферромагнетиков в стационарных полях всегда абсурдно.

2. Начиная с этого пункта, мы будем иметь дело только со свободными макроскопическими токами. Поэтому плотность этого тока  $\mathbf{j}_{\text{макро}}$  будет обозначаться просто через  $\mathbf{j}$ .

К числу сравнительно простых относятся задачи о магнитных полях в однородных и изотропных линейных магнетиках, заполняющих всю область существования магнитного поля. Однородность означает, что величина  $\mu$  не зависит от пространственных координат, т. е. является постоянной. Тогда порядок следования  $\mu$  и оператора  $\partial/\partial r$  несуществен. Это и облегчает решение соответствующих задач. В самом деле, умножим уравнение (20.19а) на  $\mu$ , осуществим перестановку  $\mu$  и  $\partial/\partial r$ , после чего воспользуемся (20.22). В результате получится уравнение

$$\left[ \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{B} \right] = \mu \mu_0 \mathbf{j}.$$

Совместно с первым равенством (20.19) оно образует систему, подобную той, которую составляют два последних соотношения (16.1). Коэффициент подобия как раз оказывается равным  $\mu$ . Следовательно, если определена конфигурация магнитного поля в пустом пространстве, то при заполнении пространства однородным и изотропным магнетиком с магнитной проницаемостью  $\mu$  это поле просто возрастает в  $\mu$  раз. Этим явлением пользуются для получения сильных магнитных полей. Например, в катушки с током вставляют ферромагнитные сердечники. Так, если внутрь длинного соленоида, в обмотке которого течет ток  $I$ , поместить материал с магнитной проницаемостью  $\mu$ , то поле и в соленоиде возрастает до величины

$$B = \frac{\mu n}{\epsilon_0 c^2} I = \mu \mu_0 n I.$$

3. Неоднородные магнитные среды часто состоят из отдельных однородных магнетиков, разделенных границами. В этих случаях внутри каждого магнетика используется система урав-

нений Максвелла (20.19), (20.19а), которая с учетом материального уравнения (20.22) принимает вид

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial r} = 0, \quad \left[ \frac{\partial}{\partial r} \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \right] = \mathbf{j}.$$

В ней  $\mu$  — магнитная проницаемость вещества данного магнетика, а  $\mathbf{j}$  — плотность протекающих в нем свободных токов. Граничные условия связывают поля с разных сторон границ, разделяющих различные магнетики. Эти граничные условия устанавливаются методами, подобными тем, которые были применены для вывода граничных условий в задачах об электрических полях в диэлектриках с границами. Но только теперь нужно исходить из уравнений Максвелла (20.19) и (20.19а). Здесь мы приведем только окончательный вид граничных условий для магнитных задач: в каждой точке границы раздела двух магнетиков 1 и 2

$$B_n^{(1)} = B_n^{(2)}, \quad H_t^{(1)} - H_t^{(2)} = \mathbf{J}. \quad (20.23)$$

Как и ранее, нижним индексом  $n$  отмечены нормальные составляющие поля  $\mathbf{B}$  к границе раздела. Нижний индекс  $t$  обозначает тангенциальные составляющие поля  $\mathbf{H}$ . Верхние индексы 1 и 2 отмечают значение указанных составляющих с разных сторон от границы. Через  $\mathbf{J}$  обозначена поверхностная плотность свободных токов в данной точке границы, протекающих перпендикулярно тангенциальному направлению. Из (20.23) следует, что тангенциальная составляющая поля  $\mathbf{H}$  имеет на границе раздела разрыв только при наличии на границе свободных токов.

Соотношения (20.23) можно переписать так:

$$B_n^{(1)} = B_n^{(2)}, \quad \frac{B_t^{(1)}}{\mu_1} - \frac{B_t^{(2)}}{\mu_2} = \mu_0 \mathbf{J}. \quad (20.24)$$

4. Магнитное поле, проникая внутрь магнетика, изменяет его состояние. Это, в частности, проявляется в том, что полная энергия системы, состоящей из вещества и магнитного поля, не равна сумме внутренней энергии вещества и энергии поля. В этом также обнаруживается сходство с системами, в состав которых входят диэлектрическое вещество и электрическое поле. Однако механизм влияния магнитного поля на магнетик — иной природы, потому что (в противоположность электрическому полю) магнитное поле не производит работы над зарядом (магнитная составляющая силы Лоренца (15.6) всегда перпендикулярна перемещению заряда). Поэтому для получения полной энергии магнетика во внешнем магнитном поле применим такой искусственный прием. Во-первых, будем рассматривать не только сам магнетик и внешнее поле, но и внешние свободные токи  $\mathbf{j}$ , создающие внешнее поле  $\mathbf{B}$ . Во-вторых, сначала вычис-



лим не саму энергию магнетика в поле, а приращение этой энергии за малый промежуток времени  $\delta t$  при медленном (как говорят, адиабатическом) нарастании внешнего поля.

Согласно второму уравнению Максвелла (15.9) (которое не содержит токов и зарядов и поэтому не меняется при переходе к усредненным величинам)

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{E} \right] = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

при изменении во времени магнитного поля возникает индукционное электрическое поле  $\mathbf{E}$ . Это поле уже способно производить работу, т. е. передавать энергию. За промежуток  $\delta t$  согласно (15.17) индукционное поле  $\mathbf{E}$  произведет над внешними свободными токами работу

$$\delta t \int (\mathbf{jE}) dV.$$

Интегрирование производится по всему пространству, но подынтегральное выражение не равно нулю лишь вдали от магнетика, там, где расположены внешние токи  $\mathbf{j}$ . Эта работа равна энергии, переданной от поля  $\mathbf{E}$  носителям токов  $\mathbf{j}$ . Поэтому та же величина со знаком минус равна приращению  $\delta W_m$  энергии электромагнитного поля за счет передачи ему энергии от внешних токов:

$$\delta W_m = - \delta t \int (\mathbf{jE}) dV.$$

Это выражение приводится к виду

$$\delta W_m = \int (\mathbf{H} \delta \mathbf{B}) dV, \quad (20.25)$$

где  $\delta \mathbf{B}$  — приращение поля за время  $\delta t$ .

Действительно, при медленном нарастании внешнего поля можно воспользоваться (20.19a). Тогда

$$\delta W_m = - \delta t \int \left( \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{H} \right] \mathbf{E} \right) dV.$$

Для преобразования этого интеграла найдем дивергенцию  $\left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} [\mathbf{EH}] \right)$ . Согласно правилам действия оператора  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$

$$\left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} [\mathbf{EH}] \right) = \left( \mathbf{H} \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{E} \right] \right) - \left( \mathbf{E} \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{H} \right] \right).$$

Интегрируя полученное равенство по всему пространству, применяя к интегралу от левой части полученного равенства теорему Гаусса — Остроградского (B.25) и учитывая обращение в нуль полей на бесконечности, находим

$$0 = \int \left( \mathbf{H} \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{E} \right] \right) dV - \int \left( \mathbf{E} \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{H} \right] \right) dV.$$

Отсюда и из второго уравнения Максвелла (15.9) видно, что

$$\delta W_m = -\delta t \int \left( \mathbf{H} \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{E} \right] \right) dV = \delta t \int \left( \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dV = \int (\mathbf{H} \delta \mathbf{B}) dV,$$

что и требовалось доказать.

Из (20.25) следует, что приращение энергии

$$\delta W_m = \mu_0 \int (\mathbf{H} \delta \mathbf{H}) dV + \mu_0 \int (\mathbf{H} \delta \mathbf{M}) dV.$$

Первое слагаемое в правой части полученного равенства определяет работу, затрачиваемую на включение свободных токов. Второе слагаемое — это работа по намагничиванию магнетика. С последней величиной связана сила, действующая на магнетик со стороны магнитного поля. Она находится таким же образом, каким была определена сила, действующая со стороны электрического поля на диэлектрик. Если намагничивание не приводит к заметным нарушениям однородности среды, то со стороны поля на каждый единичный объем среды действует сила (ср. (19.25))

$$\mathbf{F} = \frac{\mu_0 \chi_m}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (H^2).$$

Очевидно, что  $\mathbf{F} \neq 0$  только в неоднородном магнитном поле. Однако, в отличие от электрического случая, она может быть направлена как в сторону возрастания поля, так и в противоположном направлении. Это важное отличие обусловлено тем, что магнитная восприимчивость не является знакоопределенной величиной. Для диамагнетиков  $\chi_m < 0$ , так что в этом случае сила направлена в сторону убывания поля. Это и означает, что диамагнетик выталкивается внешним полем. Во всех остальных случаях магнетик втягивается в поле.

Рассмотрим, наконец, какая энергия затрачивается на создание магнитного поля в веществе. Для ее вычисления примем материальное уравнение (20.22). Тогда в единице объема среды малое приращение магнитной энергии, обусловленное малым приращением поля, будет равно

$$(\mathbf{H} \delta \mathbf{B}) = \frac{1}{2} \delta (\mathbf{B} \mathbf{H}).$$

Интегрируя последнее выражение (напоминаем, что  $\delta$  обозначает малое приращение) от нулевого значения поля до определенной заданной его величины, находим, что плотность магнитной энергии поля равна

$$w_m = \frac{1}{2} (\mathbf{B} \mathbf{H}). \quad (20.26)$$

Ясно, что (20.26) имеет смысл плотности энергии магнитного поля в магнетике. Полная энергия поля находится интегрированием (20.26) по всему пространству\*):

$$W_m = \frac{1}{2} \int (\mathbf{B}\mathbf{H}) dV.$$

5. До сих пор мы предполагали, что свободные токи отделены от магнетика. Без доказательства укажем, что общая формула (20.26) применима и тогда, когда свободные токи могут течь и в самих магнетиках. В этом случае полную энергию  $W_m$  удобно представить в форме

$$W_m = \frac{1}{2} \int (j\mathbf{A}) dV, \quad (20.27)$$

где  $\mathbf{A}$  — векторный потенциал магнитного поля:  $\mathbf{B} = \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{A} \right]$ . Для получения этого выражения достаточно заменить в предшествующем интеграле  $\mathbf{j}$  на  $\left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{H} \right]$  (согласно (20.19а)) и сделать вычисления, аналогичные тем, которые проведены на с. 65—66.

В линейных магнетиках энергия системы непересекающихся замкнутых проводов с линейными токами является квадратичной функцией этих токов:

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \mathcal{L}_{ij} I_i I_j. \quad (20.28)$$

Здесь  $I_i$  — силы тока в  $i$ -м контуре,  $\mathcal{L}_{ij}$  — константы, зависящие только от геометрической формы проводников  $i, j$ , от их взаимного расположения и от магнитной проницаемости  $\mu$  среды. Величины  $\mathcal{L}_{ii}$  и  $\mathcal{L}_{ij}$  (при  $i \neq j$ ) называются, соответственно, *индуктивностью*  $i$ -го проводника и *взаимной индуктивностью*  $i$ -го и  $j$ -го проводников. Из (20.28) следует, что в системе СИ коэффициенты  $\mathcal{L}_{ij}$  имеют размерность Дж/А<sup>2</sup> = В·с<sup>2</sup>/Кл. Соответствующая единица называется *генри* (Гн) (в системе СГС перед суммой в (20.28) стоит коэффициент  $1/c^2$ , а  $\mathcal{L}_{ij}$  имеет размерность длины; соответственно в системе СГС индуктивности измеряются в см, 1 Гн = 10<sup>9</sup> см индуктивности в СГС).

Убедимся в справедливости (20.28) на примере системы  $N$  линейных непересекающихся токов. Контур тока  $I_i$  будет обозначаться через  $L_i$ . В линейной среде\*\*) ток  $I_j$  создает магнит-

\*) Там, где магнетика нет, будет  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ , так что (20.26) примет известный вид плотности энергии магнитного поля в пустом пространстве (см. (15.16)).

\*\*) Нужно различать линейность среды ( $\mathbf{B}$  пропорционально  $\mathbf{H}$ ) и линейность тока (тонкий провод).

ное поле  $\mathbf{B}_j$ . Рассмотрим поток  $\Phi_{ij}$  этого поля через контур  $L_i$ , ограничивающий поверхность  $S_i$ :

$$\Phi_{ij} = \int_{S_i} (\mathbf{B}_j d\mathbf{S}).$$

Из принципа суперпозиции следует пропорциональность потока  $\Phi_{ij}$  току  $I_j$ :

$$\Phi_{ij} = \mathcal{L}_{ij} I_j. \quad (20.29)$$

Очевидно, что в (20.29) индексы  $i$  и  $j$  могут быть как одинаковыми, так и разными.

Теперь преобразуем выражение для энергии  $W_m$  из (20.27). Прежде всего, из того, что токи  $I_i$  не пересекаются, следует, что

$$W_m = \sum_{i=1}^N W_i,$$

где

$$W_i = \frac{1}{2} \int (j_i \mathbf{A}) dV.$$

Для линейного тока согласно (16.14)  $j_i dV = I_i dr$ , где  $dr$  — вектор бесконечно малого смещения вдоль контура  $L_i$ . Так как сила тока  $I_i$  постоянна, то

$$W_i = \frac{I_i}{2} \oint_{L_i} (\mathbf{A} dr).$$

Согласно определению векторного потенциала и теореме Стокса (В.21)

$$\oint_{L_i} (\mathbf{A} dr) = \int_{S_i} \left( \left[ \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{A} \right] d\mathbf{S} \right) = \int_{S_i} (\mathbf{B} d\mathbf{S}).$$

По принципу суперпозиции полный поток  $\Phi_i$  сквозь контур  $L_i$  равен сумме потоков, создаваемых каждым током:

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^N \Phi_{ij}.$$

Поэтому

$$W_i = \frac{1}{2} I_i \sum_{j=1}^N \Phi_{ij}.$$

Подставляя в последнюю формулу  $\Phi_{ij}$  из (20.29) и переходя к сумме  $\sum_{i=1}^N W_i = W_m$ , получаем (20.28).

Без доказательства приведем явное выражение для коэффициента  $\mathcal{L}_{ij}$ :

$$\mathcal{L}_{ij} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \oint_{L_i} \oint_{L_j} \frac{dr dr'}{|r-r'|},$$

где  $dr$  и  $dr'$  — векторы бесконечно малых смещений, соответственно, вдоль контуров  $L_i$  и  $L_j$ . Из приведенного выражения видно, что

$$\mathcal{L}_{ij} = \mathcal{L}_{ji}.$$

Следствием того, что энергия  $W_m$  из выражения (20.28) неотрицательна при любых значениях токов, получаются следующие ограничения на коэффициенты:

$$\mathcal{L}_{ii} > 0, \quad \mathcal{L}_{ii}\mathcal{L}_{ij} \geq \mathcal{L}_{ij}^2.$$

Физический смысл коэффициентов  $\mathcal{L}_{ij}$  ясен из (20.28) и (20.29). Величина индуктивности  $\mathcal{L}_{ii}$  указывает, с какой интенсивностью магнитное поле тока  $I_i$  воздействует на сам этот ток. При  $i \neq j$  взаимная индуктивность  $\mathcal{L}_{ij}$  указывает, насколько интенсивно взаимодействуют токи  $I_i$  и  $I_j$  друг с другом.

В заключение рассчитаем индуктивность  $\mathcal{L}$  соленоида (см. § 16.2). Соленоиды широко применяются в электротехнических и радиотехнических устройствах. Будем исходить из выражения (20.26) для плотности  $w_m$  энергии магнитного поля. Если внутри соленоида находится линейный однородный магнетик с магнитной проницаемостью  $\mu$ , то  $H = B/\mu_0\mu$ . Допустим, что катушка настолько длинна, что хорошим приближением для поля  $\mathbf{B}$ , которое создает ток в катушке, является умноженная на  $\mu$  правая часть выражения (16.33). Так как в этом приближении поле однородно и сосредоточено внутри катушки, то его полная энергия будет равна

$$W_m = \frac{1}{2} (\mathbf{B}\mathbf{H}) lS = \frac{\mu\mu_0 N^2 lS}{2} I^2.$$

Здесь  $l$  — длина катушки, а  $S$  — ее поперечное сечение,  $N$  — число витков провода, приходящееся на единицу длины катушки,  $I$  — сила тока в катушке. Очевидно, что  $N = N_0/l$ , где  $N_0$  — полное число витков провода. Поэтому найденное выражение для энергии поля можно записать и так:

$$W_m = \frac{1}{2} \frac{\mu_0\mu N_0^2 S}{l} I^2.$$

Согласно (20.28) это выражение должно быть равно  $\mathcal{L}I^2/2$ . Из сравнения получаем выражение для искомой индуктивности (система СИ):

$$\mathcal{L} = \frac{\mu_0\mu N_0^2 S}{l}. \quad (20.30)$$

## ГЛАВА 21

# КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАРЯДОВ И ТОКОВ

### § 21.1. Нестационарные уравнения Максвелла в среде. Условие квазистационарности

1. Начиная с этой главы, мы приступаем к изложению нестационарных электромагнитных явлений. Нашей ближайшей целью является получение системы макроскопических уравнений Максвелла для общего случая зависящих от времени полей, зарядов и токов. Первые основные допущения (19.1) и (20.1) физики, соответственно, электрических и магнитных явлений применимы и для подавляющего большинства макроскопических электромагнитных процессов. Следующие из этих допущений связи — (19.2), (19.3), (20.2), (21.3) — плотностей зарядов поляризации с поляризованностью и плотностей токов намагничивания с намагниченностью также остаются в силе.

Новым существенно нестационарным явлением оказываются *токи поляризации*, возникающие при изменении поляризованности  $\mathbf{P}(r, t)$  во времени. Плотность этих токов обозначим через  $j_p$ . Очевидно, что величина  $j_p$  должна выражаться через  $\mathbf{P}$ . Для установления этой связи первое основное допущение физики диэлектриков надо дополнить условием того, чтобы равенство нулю суммарного поляризационного заряда сохранялось во времени. Для этого, кроме (19.1), надо еще потребовать, чтобы при произвольном разрезании диэлектрика на две части интегральный поток заряда через поверхность раздела равнялся нулю. Диэлектрик с линией поверхности разреза в моменты  $t$  и  $t + dt$  схематически изображен на рис. 21.1. На каждой стороне поверхности разреза имеются поверхностные поляризационные заряды с плотностями\*)  $\sigma_p'(t)$  и  $-\sigma_p(t)$ . За промежуток времени  $dt$  поляризационный ток перенесет через поверх-

---

\*) Плотность равна  $\sigma_p(t)$  на поверхности, внутренней по отношению к выбранной нормали.

ность  $S$  заряд  $dq_n = dt \int_S (\mathbf{j}_n d\mathbf{S})$ . Кроме того, за счет прираще-  
ния поверхностной плотности  $\sigma_n$  через поверхность разреза в  
том же направлении (внешней нормали) перейдет заряд

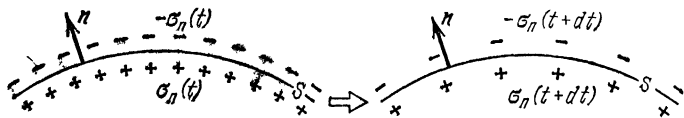


Рис. 21.1.

$dq_\sigma = -dt \int_S \frac{\partial \sigma_n}{\partial t} dS$ . Согласно нашему допущению суммарный  
интегральный поток заряда равен нулю:

$$dq_n + dq_\sigma = 0.$$

Отсюда, после сокращения на  $dt$ , получим математическую фор-  
мулировку дополнения к первому основному допущению физики  
диэлектриков:

$$\int_S (\mathbf{j}_n d\mathbf{S}) - \int_S \frac{\partial \sigma_n}{\partial t} dS = 0. \quad (21.1)$$

Согласно (19.2)  $\sigma_n = P_n$ , так что  $\frac{\partial \sigma_n}{\partial t} dS = \frac{\partial P_n}{\partial t} dS = \left( \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} d\mathbf{S} \right)$ .  
Поэтому (21.1) преобразуется к виду

$$\int_S \left( (\mathbf{j}_n - \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}) d\mathbf{S} \right) = 0.$$

Из произвольности поверхности разреза  $S$  следует равенство  
нулю подынтегрального выражения, т. е.

$$\mathbf{j}_n = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \quad (21.2)$$

Равенство (21.2) является искомым выражением  $\mathbf{j}_n$  через  $\mathbf{P}$ . Оно  
совместно с (19.2) и (19.3) дает полную систему соотношений,  
позволяющую исключить заряды и токи поляризации из макро-  
скопических уравнений электромагнитного поля.

При переходе от стационарных макроскопических уравнений  
Максвелла к нестационарным нетривиально меняется только  
четвертое уравнение (15.9), которое для усредненных величин  
приобретает вид

$$\left[ \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{H} \right] = \mathbf{j} + \mathbf{i}_n + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Здесь мы учли, что теперь

$$\bar{j}_{\text{микро}} = j + j_M + j_p, \quad (21.3)$$

и уже включили  $j_M$  в  $\left[\frac{\partial}{\partial r} H\right]$ . Остается заменить  $j_p$  на  $\partial P/\partial t$  и перейти от  $E$  к  $D$ , пользуясь (19.14). В результате четвертое уравнение Максвелла выразится через оба вспомогательных поля  $H$  и  $D$ :

$$\left[\frac{\partial}{\partial r} H\right] = j + \frac{\partial D}{\partial t}.$$

Теперь мы можем выписать систему нестационарных макроскопических уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial r} &= \rho, & \left[\frac{\partial}{\partial r} E\right] &= -\frac{\partial B}{\partial t}, \\ \frac{\partial B}{\partial r} &= 0, & \left[\frac{\partial}{\partial r} H\right] &= j + \frac{\partial D}{\partial t}. \end{aligned} \quad (21.4)$$

Эта система базируется только на основных допущениях о зарядах и токах поляризации и о токах намагничивания. Эти уравнения еще не образуют замкнутой системы (в (21.4) неизвестных больше, чем уравнений). Замкнутая система образуется только после добавления к (21.4) материальных уравнений  $D = D(E)$ ,  $B = B(H)$  и  $j = j(E)$ . Вид этих уравнений зависит от принимаемой модели вещества. Так, в том случае, когда магнитные свойства линейны и когда токи протекают по металлическим проводам, окруженным линейной изотропной диэлектрической средой, материальные уравнения имеют знакомый вид (17.5), (19.18), (20.22):

$$j = \sigma E, \quad D = \epsilon_0 \epsilon E, \quad B = \mu_0 \mu H. \quad (21.5)$$

Здесь  $\sigma$  — это проводимость провода, несущего ток плотности  $j$ , а  $\epsilon$  и  $\mu$  — соответственно диэлектрическая и магнитная проницаемость окружающей провода среды. Напомним, что в металлах закон Ома выполняется для очень широкого класса переменных полей. Забегая вперед, отметим, что величины  $\epsilon$  и  $\mu$ , вообще говоря, не являются зависящими только от свойств среды. Например, для осциллирующих полей как  $\epsilon$ , так и  $\mu$  зависят еще от частоты поля. Природа этого явления будет рассмотрена в последней главе этого тома.

Выше подразумевалось, что используются единицы системы СИ. В системе СГС нестационарные макроскопические уравнения Максвелла имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial r} &= 4\pi\rho, & \left[\frac{\partial}{\partial r} E\right] &= -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}, \\ \frac{\partial B}{\partial r} &= 0, & \left[\frac{\partial}{\partial r} H\right] &= \frac{4\pi}{c} j + \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t}, \end{aligned}$$



а в материальных уравнениях (21.5) отсутствуют множители  $\epsilon_0$  и  $\mu_0$ .

2. Весь последующий материал настоящей главы посвящен физике квазистационарных электромагнитных явлений. Эти явления обусловлены квазистационарными токами.

*Переменный ток квазистационарен, если в каждый момент времени его магнитное поле с достаточно высокой точностью совпадает с магнитным полем постоянного тока того же значения, что и данное мгновенное значение переменного тока. Распределения зарядов, приводящие к таким токам, а также возникающие при этом поля называются квазистационарными.*

Квазистационарные токи и поля существуют по двум причинам. Во-первых, среди нестационарных токов есть такие, которые, подобно стационарным, протекают в замкнутых цепях и в каждом сечении любого неразветвленного участка цепи имеют одну и ту же силу. Во-вторых, область, в которой исследуется влияние полей, оказывается настолько ограниченной по размерам, что электромагнитные возмущения (волны) преодолевают ее практически мгновенно. Разъясним значение и точный смысл последнего условия. Строго говоря, в любой точке пространства и в каждый момент времени переменное поле соответствует не тому распределению зарядов, которое имеет место в данный момент времени, а тому, которое было несколько ранее. Это запаздывающее рассогласование обусловлено фундаментальным свойством природы — ограниченностью скорости передачи любых материальных воздействий. Так, в пустом пространстве электромагнитные возмущения (волны) распространяются со скоростью  $c$ . По этой причине полю, возникшему на расстоянии от зарядов, нужно некоторое время, чтобы достичь каждого из них. С этим, однако, можно не считаться, если за время распространения поля распределение зарядов изменяется пренебрежимо мало. Тогда и будет выполняться то, что оговорено в определении квазистационарного тока. При этом существенно, что, во-первых, совпадение мгновенных значений переменного поля и соответствующего постоянного касается только магнитного поля. В этом мы вскоре убедимся непосредственно. Во-вторых, квазистационарным поле может быть лишь в ограниченной области: на достаточно больших расстояниях запаздывание непременно скажется.

Сформулируем количественно условие квазистационарности для тока, который изменяется по гармоническому закону (такие токи очень широко применяются). Допустим, что частота колебаний тока равна  $\omega^*$ ). Характерным масштабом времени

---

\*) Это циклическая частота. Напомним, что численно она в  $2\pi$  раз больше обычной частоты. Последняя обозначается через  $\nu$ .

для такого тока является период его колебаний  $T = 2\pi/\omega$ . Пусть линейный размер области, в которой исследуется поле тока, равен  $L$ . Тогда время, за которое поле распространяется на это расстояние, имеет длительность порядка  $L/c$ . Следовательно, ток будет квазистационарным, если

$$\frac{L}{cT} = \frac{L\omega}{2\pi c} \ll 1, \quad (21.6)$$

По-другому это же условие может быть записано так:

$$L/\lambda \ll 1, \quad (21.6a)$$

где  $\lambda = cT$  — длина электромагнитной волны частоты  $\omega = 2\pi/T$  в пустом пространстве. Проведем конкретные оценки. Промышленный ток имеет частоту  $\nu = \omega/2\pi = 50$  Гц. Для него условие квазистационарности (21.6) выполняется в системах с линейным размером до сотен километров. Для систем, линейные размеры которых порядка 1 м, квазистационарными оказываются токи с частотами вплоть до значений  $10^7$  Гц.

3. Реально условие квазистационарности выполняется только в макроскопических системах. Поэтому в теории квазистационарных явлений исходят из уравнений (21.4), упрощенных за счет условия квазистационарности. Упрощение заключается в отбрасывании в правой части последнего из уравнений плотности *макроскопического тока смещения*, равной производной  $\partial D/\partial t$ . Правомерность пренебрежения этой величиной прямо следует из определения квазистационарных полей: вид уравнений, которым должно удовлетворять квазистационарное магнитное поле, не должен отличаться от вида стационарных уравнений.

В средах с очень малой проводимостью (например, в полупроводниках) отбрасывание тока смещения требует соблюдения еще одного условия. Чтобы выяснить его характер, рассмотрим линейную однородную среду, которая не является хорошим проводником. В этом случае может оказаться, что имеет смысл одновременное введение и проводимости  $\sigma$ , и диэлектрической проницаемости  $\epsilon$ . Гармоническая зависимость от времени для линейных систем описывается функцией  $e^{-i\omega t}$  (см. § 7.1 тома I). Поэтому  $\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}) = -i\omega \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}$ . По закону Ома  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ . Теперь видно, что ток проводимости будет существенно преобладать над током смещения при условии

$$\frac{\omega \epsilon_0 \epsilon}{\sigma} \ll 1.$$

Например, кристаллический селен (Se) является полупроводником, проводимость которого в зависимости от содержания примесей колеблется в пределах от  $10^{-4}$   $(\text{Ом}\cdot\text{м})^{-1}$  до  $10^2$   $(\text{Ом}\cdot\text{м})^{-1}$ . Пусть она имеет порядок  $10^{-3}$   $(\text{Ом}\cdot\text{м})^{-1}$ . Диэлектрическая проницаемость селена близка к 6. Согласно полученному выше условию оказывается, что, безотносительно к каким-либо пространственным размерам, поле в данном материале можно считать квазистационарным лишь при условии, что частота изменения поля ничтожна по сравнению с величиной порядка  $10^{-5}$  Гц. Фактически это означает, что в селене квазистационарным является только постоянное поле.

Условие квазистационарности позволяет упростить только последнее уравнение системы (21.4). Это приводит к тому, что квазистационарное электрическое поле качественно отличается от любого стационарного. Это различие между электрическими и магнитными полями обусловлено явлением электромагнитной индукции, из-за которого  $\left[ \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{E} \right] = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \neq 0$ . Поэтому

*квазистационарное электрическое поле не является потенциальным, оно всегда вихревое.*

Действие таких вихревых электрических полей проявляется, например, в возникновении токов Фуко. Эти токи возникают в массивных проводниках, помещенных в переменные магнитные поля. Переменное магнитное поле порождает индукционным образом электрическое поле, которое и вызывает дрейф свободных зарядов проводника. Таков механизм образования токов Фуко.

Рассмотрим свойства токов Фуко подробнее. Для этого выясним, что происходит внутри проводника, оказавшегося в переменном магнитном поле. Пусть проводник имеет проводимость  $\sigma$  и магнитную проницаемость  $\mu$ . Внутри проводника

$$\left[ \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{H} \right] = \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}.$$

Перейдем от равенства величин к равенству их роторов, используя при этом уравнения (21.4), (21.5) и (B.11). В результате получим уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{1}{\sigma \mu_0} \Delta \mathbf{H}. \quad (21.7)$$

Из этого уравнения следует, что, проникая в проводящую среду, магнитное поле обязательно затухает. Для доказательства обратим внимание на то, что каждая компонента уравнения (21.7) по структуре идентична уравнению теплопроводности. При этом роль коэффициента температуропроводности играет комбинация  $1/\sigma\mu_0$  (см. § 11.2 тома I). Поэтому в аналогичных по характеру условиях решения (21.7) будут подобны решениям уравнения теплопроводности. Тепловым аналогом рассматриваемой теперь задачи является следующая ситуация: имеется некоторый объем вещества, на границах которого под воздействием каких-то внешних источников температура осциллирует. Ясно, что эти температурные осцилляции будут передаваться внутрь объема. Но вещество стремится к достижению равновесного состояния. Это будет проявляться в том, что по мере удаления от источников, принудительно вызывающих изменения температуры, влияние этих источников будет ослабевать. Другими словами, с проникновением в объем вещества колебания температуры будут затухать (вспомним, что, несмотря на колебания температуры

воздуха у поверхности Земли, температура уже на глубине в несколько метров практически не зависит от этих колебаний).

Итак, мы убедились в том, что затухание магнитного поля действительно должно происходить. Оценим теперь, чему по порядку величины равна глубина проникновения поля в проводник. Обозначим глубину проникновения через  $\delta$ . Ясно, что по порядку величины  $\Delta H = H/\delta^2$  и  $\frac{1}{\sigma\mu\omega} \Delta H = \frac{1}{\sigma\mu\omega\delta^2} H$ . Для поля, которое осциллирует с частотой  $\omega$ , производная  $\partial H/\partial t = -i\omega H$ . Приравнявая абсолютные значения последних двух величин и вспоминая, что  $\mu_0 = 1/\epsilon_0 c^2$ , находим, что по порядку величины

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{\sigma\mu_0\omega}} = c \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\sigma\omega}}.$$

Во всех представляющих практический интерес случаях в полученном выражении можно положить  $\mu = 1$ , так что окончательно оказывается, что оценку глубины проникновения дает выражение

$$\delta = c \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\sigma\omega}}. \quad (21.8)$$

Поясним, почему  $\delta$  практически не зависит от магнитных свойств проводника. Для диа- или парамагнетиков  $\mu$  просто мало отличается от единицы. Сильно отличающиеся от единицы значения  $\mu$  наблюдаются только у ферромагнетиков. Однако намагниченность ферромагнетиков очень инерционна: в переменном поле она не успевает изменяться синхронно с полем. Такое рассогласование приводит к тому, что, в отличие от стационарного случая, в переменном поле намагниченность ферромагнетика в среднем оказывается незначительной, так что соответствующие этой намагниченности значения  $\mu$  не очень сильно отличаются от единицы.

Оценим, чему равно  $\delta$  для переменных полей промышленной частоты 50 Гц и обычных проводников. Рассмотрим, например, медь. При обычной температуре медь имеет проводимость около  $2 \cdot 10^8$  (Ом·м)<sup>-1</sup>. Подставляя эти данные в (21.8), находим, что  $\delta$  оказывается порядка нескольких миллиметров. Из этой оценки следует, что переменные поля промышленной частоты пронизывают практически все сечения обычных проводов, радиус которых порядка нескольких миллиметров.

Согласно (21.8) с повышением частоты глубина проникновения  $\delta$  уменьшается. Если значение  $\delta$  становится ничтожным в сравнении с толщиной проводника, то это означает, что поле не проходит дальше тонкого поверхностного слоя проводника. Наоборот, при достаточно низких частотах значение  $\delta$  может быть сравнимым или даже значительно превосходящим размеры про-

водника. Мы видим, что индуцированное в проводнике электрическое поле  $\mathbf{E} = \sigma^{-1} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H} \right]$  может действовать в одних случаях только у его поверхности, а в других случаях — во всем объеме проводника. Токи Фуко в первом случае будут сконцентрированы вблизи поверхности, а во втором будут циркулировать практически во всем объеме проводника. Концентрация индукционных токов Фуко в тонком поверхностном слое проводника называется *скин-эффектом* \*). Из-за скин-эффекта в цепях, предназначенных для передачи квазистационарных токов высоких частот, применяются проводники трубчатой формы. При этом большое значение имеет состояние поверхности проводников: отсутствие или наличие поверхностных повреждений (трещины, коррозия и пр.) существенно влияет на сопротивление. Поэтому часто поверхность таких проводников покрывают тонким слоем серебра. Скин-эффект приводит к тому, что при прохождении токов высокой частоты джоулево тепло выделяется только на поверхности проводников. Этим явлением пользуются, например, для проведения высокочастотной поверхностной закалки металлов, необходимой при изготовлении различных деталей машин, испытывающих ударные нагрузки.

4. Токи Фуко обладают еще одним общим свойством. Это свойство выражается *правилом Ленца*:

*Любой ток Фуко протекает таким образом, что его собственное магнитное поле всегда стремится скомпенсировать изменение того магнитного поля, которое данный ток Фуко порождает.*

Правило Ленца вытекает из второго уравнения системы (21.4). Продемонстрируем это на следующем примере. Рассмотрим одиночный замкнутый проводник настолько тонкий, что переменное магнитное поле, в котором оказывается проводник, можно считать одинаковым по сечению проводника. Тогда можно говорить о контуре индукционного тока. Обозначим этот контур через  $L$ , а действующее в проводнике индукционное поле — через  $\mathbf{E}$ . Циркуляция  $\mathbf{E}$  по контуру  $L$  определяет действующую в проводнике э. д. с. Она называется э. д. с. индукции и, как любая э. д. с., будет обозначаться через  $\mathcal{E}$ . Применяя теорему Стокса (В.21) ко второму уравнению системы (21.4), находим

$$\mathcal{E} = \oint_L (\mathbf{E} d\mathbf{r}) = - \frac{d\Phi}{dt}, \quad (21.9)$$

где

$$\Phi = \int_S (\mathbf{B} d\mathbf{S})$$

\*) Этот термин происходит от английского слова «skin», что в буквальном переводе означает «кожа», а в свободной трактовке — «поверхность».

— поток магнитного поля  $B$  через контур  $L$ , а  $S$  — поверхность, ограниченная контуром  $L$ . Мы видим, что знаки у  $\mathcal{E}$  и  $d\Phi/dt$  всегда противоположны. А это означает, что с возрастанием магнитного потока э. д. с. индукции убывает и наоборот. Следовательно, в суперпозиции, например, нарастающего исходного

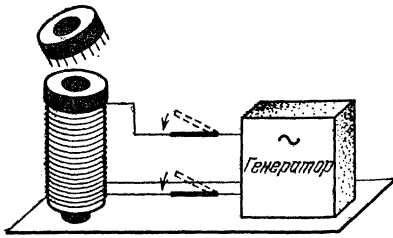


Рис. 21.2.

магнитного поля и магнитного поля, порожденного током Фуко, последнее будет убывать, стремясь удержать суперпозицию неизменной. Это и есть тот эффект, который выражается правилом Ленца.

Правило Ленца ярко проявляется, например, в таком опыте. Представим себе вертикально поставленную катушку, которую можно подсоединить к генератору переменного тока. Положим на верхний конец катушки легкое металлическое кольцо, сделанное, например, из алюминия (рис. 21.2). Если теперь переключатель замкнуть, то кольцо от катушки отскочит вверх. Происходит это потому, что индуцированный в кольце ток Фуко создает такое магнитное поле, которое стремится скомпенсировать изменение магнитного поля катушки. Другими словами это можно выразить так: если, например, северный полюс магнитного поля катушки оказывается наверху, то северный полюс магнитного поля тока в кольце оказывается под кольцом. Поэтому кольцо и катушка отталкиваются друг от друга, как два постоянных магнита, приложенных один к другому одноименными полюсами.

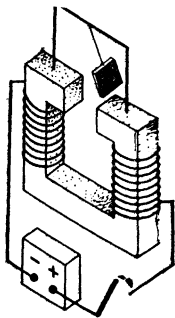


Рис. 21.3.

Отметим, наконец, что сила и расположение токов Фуко существенно зависят от формы проводника. Объясняется это тем, что от формы проводника зависит поток магнитного поля, а следовательно, и э. д. с. индукции. Опытным путем в этом можно убедиться, например, следующим образом. Рассмотрим, что произойдет, если на качающийся маятник, на конце которого находится сплошная металлическая пластинка, начнет действовать магнитное поле. Это можно осуществить так, как показано на рис. 21.3. Когда магнит включается, то движение маятника тормозится; как только металлическая пластинка попадает в зазор электромагнита, в ней возникает ток Фуко (при вхождении пластинки в зазор магнитный поток через пластинку нарастает, создавая в ней э. д. с. индукции). Магнитное поле этого тока

стремится помешать изменению магнитного потока, пронизывающего пластинку. В результате пластинка замедляет свое движение, так как именно этим движением в конечном счете и вызывается изменение магнитного потока. Если в пластинке прорезать щели, то торможение уменьшится. Происходит это потому, что в каждой части пластинки между двумя соседними щелями токи будут возбуждаться меньшими магнитными потоками. А чем меньше ток, тем слабее будет торможение.

## § 21.2. Генератор переменного тока и мотор индукционного действия

1. Электрический ток часто называется переменным, если он изменяется во времени только по гармоническому закону, т. е. имеет определенную частоту  $\omega$ . Другие зависящие от времени токи называются нестационарными. Такое разделение (которое мы теперь примем) обусловлено исключительно важным промышленным значением токов определенных частот.

Устройство, вырабатывающее переменный ток, называется *генератором переменного тока*. В генераторе переменного тока энергия макроскопического механического движения превращается в энергию переменного тока. Работа генератора переменного тока основана на явлении электромагнитной индукции. В этом отношении физический принцип работы различных типов генераторов один и тот же. Конструкции существующих генераторов содержат намотанные на катушки провода, предназначенные для возбуждения в них э. д. с. индукции переменным магнитным потоком. Это возбуждение э. д. с. получают двумя способами: либо в неподвижном магнитном поле вращаются катушки, либо, наоборот, катушки неподвижны, а вращается магнитное поле. Мы рассмотрим второй случай, который схематически иллюстрирован на рис. 21.4. На нем изображена только одна катушка, концы которой соединены с клеммами  $a$  и  $b$  генератора. В дальнейшем будем считать, что магнитное поле является однородным и вращается равномерно с угловой скоростью  $\omega$ .

В реальных условиях обычно с хорошей точностью выполняются следующие соотношения. Во-первых, провод, из которого сделана катушка, имеет столь малую толщину, что создаваемое в генераторе переменное магнитное поле проникает в вещество провода без затухания. Это гарантирует линейность

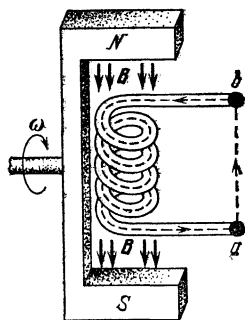


Рис. 21.4.

вырабатываемых генератором токов. Во-вторых, в сравнении с сопротивлениями внешних нагрузок, к которым генератор подключается, его собственное сопротивление оказывается ничтожно малым. Поэтому им можно пренебречь. Но тогда можно считать, что в проводе катушки и в отводах от нее нигде нет электрического поля. Это следует из закона Ома  $E = \frac{1}{\sigma} j$  (при  $\sigma \rightarrow \infty$  поле  $E \rightarrow 0$ ).

Уточним смысл условия  $\sigma \rightarrow \infty$ . Оно означает, что  $\sigma$  должно быть велико, но притом все же существенно меньше тех значений, при которых магнитное поле не проникает внутрь провода. В противном случае в проводе не возникнет э. д. с. индукции. Согласно (21.8) отмеченное ограничение выражается соотношением  $\delta^2 = \epsilon_0 c^2 / \sigma \omega \gg \Delta S$ , где  $\Delta S$  — площадь поперечного сечения провода генератора. Если длина этого провода равна  $l$ , то внутреннее сопротивление генератора  $r = l / \sigma \Delta S$ . Пусть  $R$  — сопротивление внешней нагрузки. Малость внутреннего сопротивления генератора по сравнению с сопротивлением нагрузки означает, что  $l / \sigma \Delta S \ll R$ . Итак, одновременно должны выполняться неравенства

$$\frac{\epsilon_0 c^2}{\omega} \gg \sigma \Delta S \gg \frac{l}{R}.$$

Убедимся на примере, что это возможно. Пусть катушка генератора сделана из медного провода, длина и поперечное сечение которого равны, соответственно, 1 м и  $10^{-6}$  м<sup>2</sup> (1 мм<sup>2</sup>). Для меди  $\sigma \approx 10^8$  (Ом·м)<sup>-1</sup>, и внутреннее сопротивление генератора  $r$  оказывается величиной порядка  $10^{-2}$  Ом. Допустим, что внешнее сопротивление  $R \approx 10^4$  Ом (таким сопротивлением обладает, например, последовательное соединение приблизительно из 150 ламп накаливания мощностью 25 Вт каждая, рассчитанных на напряжение около 120 В). Пусть поле вращается с промышленной частотой 50 Гц. Тогда числовые данные будут такими:  $\omega = 2\pi \cdot 50 = 31,4$  и  $c^2 \epsilon_0 / \omega \approx 10^4$ ,  $l/R \approx 10^{-4}$ , а  $\sigma \Delta S = 10^2$ . Мы видим, что в этом случае оба приведенных выше неравенства выполнены.

Наконец, снаружи генератора, в том числе и там, где расположены его клеммы, магнитное поле намного слабее, чем поле внутри генератора. Поэтому вполне законно приближение, в котором вне генератора можно пренебречь магнитным полем, а следовательно, и вихревым электрическим полем.

Приняв, что все оговоренные выше условия выполнены, найдем э. д. с., которую вырабатывает генератор. Для этого вычислим циркуляцию электрического поля по контуру  $L$ , который на рис. 21.4 отмечен пунктиром. Начальной будем считать точку  $b$  (возможность перехода к рассмотрению только одной замкнутой линии обусловлена линейностью провода, из которого сделана катушка). Так как везде внутри провода электрическое поле отсутствует, то

$$\oint_L (\mathbf{E} dr) = \int_a^b (\mathbf{E} dr). \quad (21.10)$$



По определению правая часть равенства (21.10) и есть искомая э. д. с.  $\mathcal{E}$ . Поступая так же, как и при получении (21.9), находим, что

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt},$$

где  $\Phi$  — магнитный поток, пронизывающий контур интегрирования. Мы видим, что  $\mathcal{E}$  имеет индукционное происхождение. Пусть абсолютное значение магнитного поля равно  $B$ . Допустим, что магнитное поле пронизывает только катушку. Тогда, если поперечное сечение катушки равно  $S$  и катушка имеет  $N$  витков, то магнитный поток

$$\Phi = NBS \cos \theta,$$

где  $\theta$  — угол между осью катушки и направлением магнитного поля. К моменту времени  $t$  этот угол будет иметь значение  $\omega t$ . В начальный момент времени  $\theta = 0$ . Тогда для э. д. с. получим

$$\mathcal{E} = NBS\omega \sin \omega t. \quad (21.11)$$

Рассмотрим теперь интеграл в правой части (21.10). Так как в области, в которой расположен участок  $ab$  контура  $L$  (рис. 21.4), магнитного поля нет, то в ней  $\left[ \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{E} \right] = 0$ . Поэтому в этой области электрическое поле будет потенциальным. Следовательно,

$$\int_a^b (\mathbf{E} dr) = \varphi_a - \varphi_b.$$

Однако теперь, в отличие от стационарного случая, разность потенциалов  $\varphi_a$  и  $\varphi_b$  на клеммах генератора будет переменной во времени. Согласно (21.10) и (21.11)

$$\varphi_a - \varphi_b = \mathcal{E} = NBS\omega \sin \omega t. \quad (21.12)$$

Последнее соотношение имеет такой смысл: э. д. с. индукции подводит к клеммам генератора заряды. В каждый момент времени количество подведенных зарядов определяется условием (21.12). Клеммы генератора сначала заряжены электростатически до разности потенциалов  $NBS\omega$ , а затем количество зарядов начинает осциллировать, изменяя разность потенциалов на клеммах генератора.

Рассмотрим теперь, что произойдет, если генератор замкнут на внешнюю нагрузку с сопротивлением  $R$ . Ясно, что после замыкания в нагрузке возникнет переменный ток, а вокруг этого тока — переменное магнитное поле. Если индуктивность внешней нагрузки пренебрежимо мала, то это поле можно не учи-

тывать. Тогда говорят, что генератор замкнут на одно сопротивление  $R$ , и изображают это схемой, показанной на рис. 21.5. (Пунктиром отмечен ранее упоминавшийся контур  $L$  (см. рис. 21.4).)

Так как с подключением к генератору сопротивления  $R$  переменных магнитных полей вокруг сопротивления не возникает, то сохраняет смысл разность потенциалов  $\varphi_a - \varphi_b$  или, что то же самое, напряжение  $U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b$  на сопротивлении. Применяя теперь закон Ома для участка цепи, находим, что возникающий ток равен

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

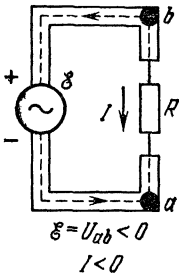


Рис. 21.5.

Мы видим, что согласно (21.11) ток в сопротивлении  $R$  переменный.

2. Вырабатываемая генератором э. д. с. определяет мощность, потребляемую внешней нагрузкой. Мощность, которая развивается силой  $\mathbf{F}$ , действующей на заряд, движущийся со скоростью дрейфа  $\mathbf{v}_d$ , равна  $(\mathbf{F} \mathbf{v}_d)$ . Пусть на единицу длины провода приходится в среднем  $\lambda$  зарядов. Тогда в элементе провода бесконечно малой длины  $dl$  будет развиваться мощность  $(\mathbf{F} \mathbf{v}_d) \lambda dl$ . Но скорость  $\mathbf{v}_d$  всегда направлена вдоль провода. Поэтому  $\mathbf{v}_d dl = v_d dr$ , где  $dr$  — вектор бесконечно малого смещения вдоль провода. Мощность, выделяемая во всей цепи, образованной замыканием генератора на нагрузку, будет равна интегралу

$$\oint \lambda v_d (\mathbf{F} dr),$$

который вычисляется по контуру замкнутой цепи. Если  $q$  — заряд одного носителя тока, то

$$\lambda v_d (\mathbf{F} dr) = q \lambda v_d (\mathbf{E} dr) = I (\mathbf{E} dr),$$

где  $I$  — сила тока в цепи, а  $\mathbf{E}$  — действующее в ней электрическое поле. По определению интеграл от этого поля по контуру цепи есть действующая в ней э. д. с., а мощность, которую развивает генератор, равна  $\mathcal{E} I$ .

3. Скажем несколько слов об устройстве реальных генераторов. Вращающаяся часть конструкции генератора называется *ротором*, а неподвижная — *статором*. Обычно э. д. с. возбуждается не в одной, а нескольких катушках, повернутых друг относительно друга. Чаще всего таких катушек три, их оси лежат в одной плоскости, параллельной магнитному полю, и составляют друг с другом углы в  $120^\circ$ . Очевидно, что индуцированные

в таких катушках э. д. с. будут сдвинуты по фазе друг относительно друга на  $120^\circ$ . Соединением каждой катушки со своей нагрузкой получают систему трех осциллирующих токов, также сдвинутых по фазе друг относительно друга на  $120^\circ$ . Эта система называется *трехфазным током*, а соответствующий генератор — *генератором трехфазного тока*. Впервые он был создан М. О. Доливо-Добровольским в 1890 г. Часто каждая составляющая трехфазного тока сокращенно называется просто одной фазой.

Отметим, что ведется разработка нового типа индукционного генератора, названного *магнитогидродинамическим* или, сокращенно, *МГД генератором*. В МГД генераторе роль проводочных катушек, в которых возбуждается э. д. с. индукции, должен выполнять поток плазмы. Перспективность МГД генератора обосновывается прогнозом его высокого к. п. д. на больших мощностях. Этот прогноз основывается на быстром увеличении проводимости плазмы с ростом ее температуры (см. § 18.2). По наиболее оптимистическим оценкам, этот к. п. д. может достигать 70%.

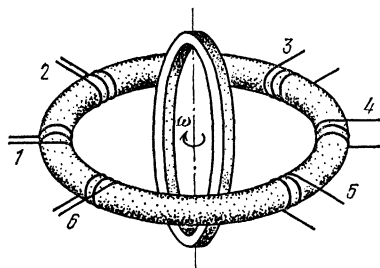


Рис. 21.6

Многофазные токи хороши тем, что они позволяют получить вращающиеся магнитные поля. Вот как это делается, например, с помощью трехфазного поля. Представим себе кольцо, на которое намотано шесть катушек так, как это показано на рис. 21.6. Если пропускать ток через катушки 1 и 4, то получится магнитное поле, направленное, как изображено на рис. 21.7, а. Переключение тока на катушки 2 и 5 приведет к тому, что магнитное поле повернется и окажется ориентированным так, как это показано на рис. 21.7, б. Продолжая переключения, мы получим последовательность магнитных полей, отмеченных в остальных частях рисунка. При переключениях ориентация магнитного поля будет изменяться скачком. Однако если диаметрально противоположные катушки просто подключить к разным фазам трехфазного тока, то вращение магнитного поля станет плавным. Оно просто повторит то вращение, с помощью которого был получен трехфазный ток.

Вращающиеся магнитные поля применяются в электромоторах индукционного действия. Поясним схематически, как они работают. Предположим, что внутрь кольца с шестью обмотками, по которым протекает трехфазный ток, вставлено другое металлическое кольцо так, как это показано на рис. 21.6. Вра-

шающееся магнитное поле будет создавать переменный магнитный поток через кольцо. Поэтому в кольце возбудится э. д. с. индукции и возникнет ток Фуко. На ток в кольце будет действовать сила магнитного поля. Как мы знаем, эта сила будет поворачивать кольцо так, чтобы магнитный момент возбужденного

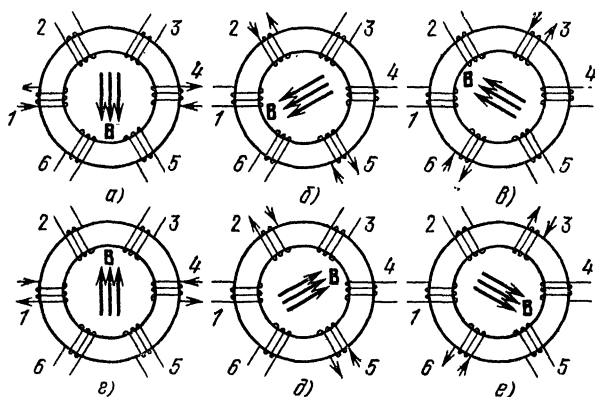


Рис. 21.7.

в кольце тока совпадал по направлению с магнитным полем. Так создается механический вращающий момент, действие которого и используется во всех индукционных электрических моторах.

### § 21.3. Импеданс

1. Цепи квазистационарных токов могут содержать разнообразные устройства: генераторы, катушки проводов, конденсаторы, проводники (сопротивления которых значительно превосходят сопротивления подводящих проводов), полупроводниковые диоды и триоды и пр. Эти устройства называются *элементами цепи*.

Рассмотрим цепи квазистационарных токов, приняв следующие допущения, которые во многих практически важных случаях выполняются с достаточно высокой точностью.

а) Цепи состоят из *сосредоточенных элементов* и соединительных проводов. Простейшим сосредоточенным элементом называется такой, в котором, во-первых, не могут возбуждаться замкнутые токи и, во-вторых, для которого вихревое электрическое поле ( $[\frac{\partial}{\partial r} \mathbf{E}] \neq 0$ ) быстро спадает вне элемента (или же равно нулю). Для определенности будем считать, что вихревое электрическое поле отсутствует на выходах каждого элемента.

Соединение конечного числа простейших сосредоточенных элементов также является сосредоточенным элементом. В электротехнике сосредоточенные элементы называются многополюсниками (элемент с двумя выходами — двухполюсником и т. д.). Примером сосредоточенного элемента является прямой провод с большим сопротивлением. Примером несосредоточенного элемента является массивный проводник в переменном магнитном поле. Внутри такого проводника возникает сложное распределение токов Фуко.

б) Ни в каком элементе цепи и ни в каком ее узле не может накапливаться электрический заряд.

в) Сопротивления и индуктивности соединительных проводов пренебрежимо малы.

Покажем, что при выполнении этих условий остаются справедливыми оба правила Кирхгофа (17.23) и (17.28). Первое правило Кирхгофа для квазистационарных токов следует из закона сохранения заряда и из допущения о том, что заряд не может накапливаться ни в одном узле. Вывод второго правила Кирхгофа осложняется тем, что при наличии переменных полей согласно второму уравнению Максвелла (21.4)  $\left[\frac{\partial}{\partial r} \mathbf{E}\right] \neq 0$ , т. е. поле  $\mathbf{E}$  не является потенциальным. В общем случае это обстоятельство приводит к тому, что контурный интеграл  $\int_a^b (\mathbf{E} d\mathbf{r})$  от точки  $a$  до точки  $b$  не равен разности потенциалов  $\varphi_a - \varphi_b$ , а зависит от формы контура, соединяющего точки  $a$  и  $b$ \*). Однако для цепи из сосредоточенных элементов равенство

$$\int_a^b (\mathbf{E} d\mathbf{r}) = \varphi_a - \varphi_b \quad (21.13)$$

соблюдается для геометрических контуров, соединяющих выходы сосредоточенных элементов и проходящих вне вихревых электрических полей. По определению сосредоточенного элемента такие контуры всегда существуют, причем интеграл (21.13) не зависит от формы такого контура. Эта независимость следует из того, что вне сосредоточенных элементов  $\left[\frac{\partial}{\partial r} \mathbf{E}\right] = 0$ , т. е. вне этих элементов поле  $\mathbf{E}$  можно считать потенциальным.

Докажем теперь второе правило Кирхгофа для квазистационарных токов. Рассмотрим произвольную разветвленную цепь из сосредоточенных элементов. Выделим в ней один из замкнутых контуров тока. На рис. 21.8 изображены только его краевые

\*) Подчеркнем, что согласно (15.10) потенциал  $\varphi$  всегда существует.

участки. Прямоугольниками показаны сосредоточенные элементы, а волнистыми линиями отмечены провода, связывающие выделенный контур с током с остальными участками цепи. Пусть  $L$  — замкнутый геометрический контур, расположенный там, где нет вихревых электрических полей\*), но обязательно проходящий через узлы рассматриваемого контура с током. На рис. 21.8

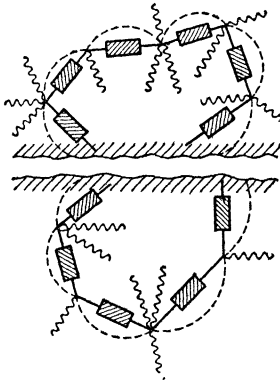


Рис. 21.8.

участки  $L$  изображены пунктирными линиями. Всяду на контуре  $L$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{E} \right] = 0, \text{ так что}$$

$$\oint_L (\mathbf{E} dr) = 0.$$

Очевидно, что интеграл в левой части этого равенства может быть представлен суммой интегралов типа (21.13), каждый из которых берется по одному из участков  $L$ , соединяющему два соседних узла контура с током. Согласно (21.13) каждый член этой суммы равен разности потенциалов соответствующих узлов. Таким образом оказывается, что вдоль цепи сумма

разностей потенциалов соседних узлов или, что то же, напряжений на участках цепи равна нулю. Если сосредоточенный элемент не имеет э. д. с., то разность потенциалов  $U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b$  на его выходах является падением напряжения на этом элементе. Если же сосредоточенный элемент имеет э. д. с.  $\mathcal{E}$ , то падением напряжения на нем является величина  $\varphi_a - \varphi_b + \mathcal{E}$ . С учетом этого равенство нулю суммы разностей потенциалов на всех элементах любого замкнутого контура с током приобретает вид второго правила Кирхгофа.

2. В дальнейшем будут рассмотрены только линейные переменные токи. Соответственно будет использоваться форма комплексного представления колебаний. Например, ток, осциллирующий с частотой  $\omega$ , имеющий амплитуду  $I_0$  и нулевую начальную фазу, будет записываться в виде  $I = I_0 e^{-i\omega t}$ .

Во многих случаях напряжения на сосредоточенных элементах линейно зависят от протекающих через эти элементы токов. Такие элементы называются *линейными*.

*Коэффициент пропорциональности между комплексным напряжением и комплексным током в линейном элементе цепи называется ее импедансом. В общем случае импеданс является комплексным и зависит от частоты.*

\*) Строго говоря, требуется еще, чтобы существовала поверхность, ограниченная контуром  $L$  и не пересекающая вихревых электрических полей.

Комплексность импеданса означает, что фаза напряжения не совпадает с фазой тока. Модуль импеданса связывает амплитудные значения напряжения и тока, а аргумент равен разности фаз между током и напряжением. В самом деле, пусть, например, начальная фаза тока равна нулю:  $I = I_0 e^{-i\omega t}$ , а начальная фаза напряжения равна  $\varphi$ , так что  $U = U_0 e^{-i(\omega t + \varphi)}$ . Здесь  $I_0$  и  $U_0$  — это, соответственно, амплитудные значения тока и напряжения. Обозначим импеданс через  $Z$ . По определению

$$U = ZI, \quad (21.14)$$

так что

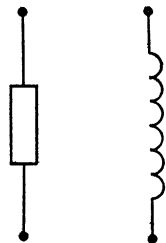
$$|Z| = U_0/I_0, \quad Z = |Z| e^{-i\varphi}.$$

Отсюда видно, что  $Z$  — действительно комплексная величина с указанным выше смыслом. Импеданс называют еще и *комплексным сопротивлением*. Очевидно, что импеданс измеряется в единицах сопротивления.

Получим импедансы простейших сосредоточенных элементов.

а) Широко распространенным элементом является *резистор*, часто называемый также *сопротивлением*. Этот элемент изображается символически так, как показано на рис. 21.9 (см. также рис. 21.5). Поскольку ток в сопротивлении подчиняется закону Ома, то импеданс сопротивления  $R$  равен

$$Z_R = R. \quad (21.15) \quad \text{Рис. 21.9.} \quad \text{Рис. 21.10.}$$



Этот импеданс не обладает мнимой частью и не зависит от частоты. Поэтому в сопротивлении разность фаз между током и напряжением равна нулю.

б) Другим широко распространенным элементом является свитый в катушку провод, такой, что основное влияние на ток через эту катушку оказывает создаваемое самим этим током магнитное поле. В этих случаях пренебрегают сопротивлением провода катушки. Элементы такого рода называют *катушками индуктивности* или просто *индуктивностями* \*). Ее символическое изображение приведено на рис. 21.10.

Вот что происходит в индуктивности, когда через нее идет переменный ток. Этот ток создает магнитное поле. Изменяясь, поток этого поля возбуждает в индуктивности э. д. с. индукции. Ее называют *э. д. с. самоиндукции*, чем подчеркивают ее происхождение, не связанное со сторонними магнитными потоками,

\*) Сейчас у физиков появилась тенденция называть и элементы, и физические величины, характеризующие эти элементы, одним и тем же термином.

а обусловленное магнитным потоком, возникающим от тока в самой индуктивности. Соответственно возбуждение такого рода э. д. с. принято называть *явлением самоиндукции*.

Обратимся к рис. 21.11. На нем схематически изображена индуктивность. Пунктирной линией показан замкнутый контур  $L$ . Часть этого контура проходит внутри провода, а часть — снаружи. При этом последняя соединяет зажимы  $a$  и  $b$ , к которым подходят концы индуктивности. Предполагается, что эта часть контура  $L$  проходит там, где нет вихревых электрических полей, т. е. находится в области потенциальности электрического поля. Обход контура  $L$  совершается так, что внутри провода приходится двигаться в направлении тока. Индуктивность провода обозначим через  $\mathcal{L}$ , возникающую в нем э. д. с. самоиндукции — через  $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ . Напомним (см. предыдущий параграф), что

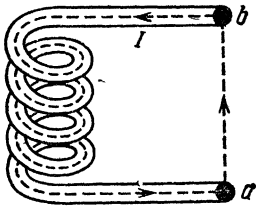


Рис. 21.11.

внутри провода, у которого нет сопротивления, согласно (17.5) электрического поля быть не может. Поэтому

$$\mathcal{E}_{\mathcal{L}} = \oint_L (\mathbf{E} d\mathbf{r}) = \int_a^b (\mathbf{E} d\mathbf{r}) = -U_{ba}.$$

(вне провода)

Через  $U_{ba}$  обозначено напряжение на индуктивности, равное разности потенциалов  $\varphi_b - \varphi_a$  в точках  $b$  и  $a$ . Переход к этим величинам оказывается возможным благодаря допущению об отсутствии вихревого электрического поля вне катушки.

С другой стороны, согласно (21.9)

$$\mathcal{E}_{\mathcal{L}} = - \frac{d\Phi}{dt},$$

где  $\Phi$  — магнитный поток, который пронизывает контур и порожден током в индуктивности. Так как магнитное поле квазистационарного тока в каждый момент времени выражается через ток, так же как и поле стационарного тока, то согласно (20.29)

$$\mathcal{E}_{\mathcal{L}} = - \frac{d}{dt} (\mathcal{L}I). \quad (21.16)$$

Следовательно, если катушка не деформируется и в ней нет ферромагнетика ( $\mathcal{L} = \text{const}$ ), то

$$\mathcal{E}_{\mathcal{L}} = -U_{ba} = -\mathcal{L} \frac{dI}{dt}.$$

Отметим, что (21.16) согласуется с правилом Ленца: величины  $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$  и  $dI/dt$  всегда противоположны по знаку. А это означает,



что э. д. с. самоиндукции всегда препятствует изменению тока, который создает эту э. д. с.

Подставляя в (21.16) значение тока  $I = I_0 e^{-i\omega t}$ , находим

$$U_{ba} = -i\omega \mathcal{L} I = \omega \mathcal{L} I e^{-i \frac{\pi}{2}}.$$

По определению (21.14) отсюда следует, что импеданс индуктивности равен

$$Z_{\mathcal{L}} = -i\omega \mathcal{L} = \omega \mathcal{L} e^{-i \frac{\pi}{2}}. \quad (21.17)$$

Мы видим, что он является чисто мнимой величиной и линейно зависит от частоты. Поэтому в области очень низких частот индуктивность импедансом практически не обладает. Из (21.17) следует, что в индуктивности разность фаз между напряжением и током равна  $\pi/2$ .

Часто бывает так, что катушку пронизывают дополнительные магнитные потоки, возникающие от сторонних источников. Так бывает, например, тогда, когда рядом с одной катушкой оказывается другая, в которой также течет ток. Остановимся на этом случае. Он показан на схеме, изображенной на рис. 21.12. На этой схеме через  $I_1$  и  $I_2$  обозначены токи в катушках, соответственно, 1 и 2. Рассчитаем напряжение на катушке 1. Рассуждая так же, как и в предыдущем параграфе, получим, что искомое напряжение будет равно  $d\Phi_1/dt$ , где  $\Phi_1$  — магнитный поток, который пронизывает первую катушку. Однако теперь

$$\Phi_1 = \mathcal{L}_1 I_1 + \mathcal{L}_{12} I_2, \quad (21.18)$$

где  $\mathcal{L}_1$  — индуктивность катушки 1, а  $\mathcal{L}_{12}$  — взаимная индуктивность системы из двух катушек. Равенство (21.18) следует из (20.29) и условия квазистационарности. Дифференцируя обе части (21.18) по времени, получаем, что напряжение на катушке 1 будет равно

$$U_1 = \mathcal{L}_1 \frac{dI_1}{dt} + \mathcal{L}_{12} \frac{dI_2}{dt}. \quad (21.19)$$

В правой части (21.19) второе слагаемое называется э. д. с. *взаимной индукции*, а ее возникновение называется *явлением взаимной индукции*.

Очевидно, что для напряжения на катушке 2 получится однотипное с (21.19) выражение:

$$U_2 = \mathcal{L}_2 \frac{dI_2}{dt} + \mathcal{L}_{21} \frac{dI_1}{dt}. \quad (21.20)$$

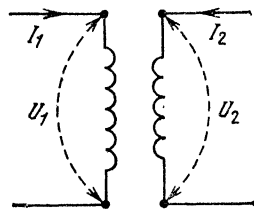


Рис. 21.12.

Так как  $\mathcal{L}_{12} = \mathcal{L}_{21}$ , то в дальнейшем удобно ввести единое обозначение  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{12} = \mathcal{L}_{21}$ .

Допустим теперь, что катушка 1 подсоединена к э. д. с.  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{-i\omega t}$ , а концы катушки 2 остаются разомкнутыми. Тогда во второй катушке тока не будет. В катушке же 1 ток будет переменным, с частотой  $\omega$ , так что  $I_1 = I_{01} e^{-i\omega t}$ . Учитывая, что  $\mathcal{E} = U_1$ , из (21.19), (21.20) получаем

$$\mathcal{E} = -i\omega \mathcal{L} I_1, \quad U_2 = -i\omega \mathcal{L} I_1,$$

откуда следует, что

$$\frac{U_2}{\mathcal{E}} = \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L}_1}.$$

Мы видим, что, подбирая  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{L}_1$ , можно повышать или понижать напряжение в катушке 2 по сравнению с э. д. с., включенной в цепь катушки 1.

На этом явлении, существующем только благодаря взаимной индукции, основано действие трансформаторов — устройств, предназначенных для повышения или понижения переменного напряжения. Простейший трансформатор имеет две катушки проводов. Катушка, к которой подводится э. д. с., называется первичной обмоткой, а катушка, в которой генерируется преобразованное напряжение, — вторичной обмоткой трансформатора. Как правило, эти обмотки помещаются на одном ферромагнитном каркасе, чем, во-первых, добиваются увеличения индуктивностей проводов и коэффициента взаимной индукции, а во-вторых, придают трансформатору необходимую, механическую жесткость. Отметим, что трансформатор, который мы рассмотрели выше, является идеальным в том смысле, что провода считались не имеющими сопротивления.

в) Помимо сопротивлений и индуктивностей в цепях переменных токов очень часто встречаются конденсаторы. Включение конденсатора в цепь постоянного тока приводит к ее разрыву. В нестационарном случае этого не происходит, и вот почему. Если изменяется заряд на одной обкладке конденсатора, то между обкладками обязательно будет изменяться электрическое поле, а следовательно, и заряд на другой обкладке. Так через электрическое поле между обкладками замыкается цепь переменного тока. Замыкает ее ток смещения с плотностью  $\partial \mathbf{D} / \partial t$ , который существует только в нестационарных условиях.

Будем считать конденсатор идеальным, т. е. не обладающим ни сопротивлением, ни индуктивностью. При этом будем считать обкладки настолько близкими друг к другу, что в заряженном конденсаторе электрическое поле практически полностью сосредоточено между ними. Поэтому в каждый момент времени заряды на обкладках одинаковы по абсолютной величине и противоположны по знаку (электрическое поле начинается на за-

рядах одной обкладки и кончается на зарядах другой). Это означает, что в конденсаторе мгновенная картина переменного электрического поля неотличима от статической, которая возникает в том случае, когда заряд на обкладках равен наблюдаемому мгновенному значению переменного заряда. Каждый из конденсаторов, обладающий перечисленными свойствами, является сосредоточенным элементом, получившим название *емкости* \*). На схемах емкость обозначается так, как показано на рис. 21.13.

Обратимся к рис. 21.14. На нем емкость изображена в форме плоского конденсатора. Точки *a* и *b* отмечают те места, в которых емкость включается в цепь. Рассмотрим замкнутый контур *L*, который на рис. 21.14 изображен пунктиром. Часть контура *L* проходит внутри подводящих проводов и между обкладками, а часть — снаружи конденсатора. Ориентацию вдоль *L* выберем такой же, как и ориентацию тока.

По предположению электрическое поле вне конденсатора потенциально. Внутри же подводящих проводов оно равно нулю, потому что там нет сопротивления. По этим двум причинам получаем

$$\oint_L (\mathbf{E} d\mathbf{r}) = \int_c^d (\mathbf{E} d\mathbf{r}) + \int_a^b (\mathbf{E} d\mathbf{r}) = 0.$$

(внутри конденсатора)                      (вне конденсатора)

$$\int_c^d (\mathbf{E} d\mathbf{r}) = U_{cd}, \quad \int_a^b (\mathbf{E} d\mathbf{r}) = -U_{ba}.$$

(внутри конденсатора)                      (вне конденсатора)

Здесь  $U_{cd}$  — разность потенциалов верхней и нижней обкладок, а  $U_{ba}$  — напряжение на емкости. Если заряд на одной обкладке равен  $q$ , то  $U_{cd} = q/C$ , где  $C$  — емкость конденсатора. Теперь мы видим, что  $U_{ba} = U_{cd} = q/C$ . Продифференцируем это равенство по времени и учтем, что сила тока  $I = dq/dt$ . Тогда мы

$$\frac{dU_{ba}}{dt} = \frac{I}{C}.$$

Подставляя сюда  $I = I_0 e^{-i\omega t}$  и интегрируя по времени, находим придем к соотношению

$$U_{ba} = \frac{I}{\omega C} e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

\*) См. примечание на с. 231.

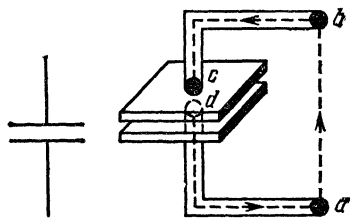


Рис. 21.13.

Рис. 21.14.

Это означает, что импеданс емкости равен

$$Z_C = \frac{i}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{i \frac{\pi}{2}}. \quad (21.21)$$

Подобно импедансу индуктивности, он оказывается величиной чисто мнимой. Однако его зависимость от частоты совершенно другая. Импеданс емкости обратно пропорционален частоте. Поэтому он практически равен нулю в области высоких частот. В емкости разность фаз между напряжением и током равна  $-\pi/2$ .

Отметим, наконец, что, в отличие от рассмотренных сосредоточенных элементов, генератор, описанный в предыдущем параграфе, импедансом не обладает. Действительно, напряжение на клеммах этого генератора или, что то же, вырабатываемая генератором э. д. с. задается только изменением внешнего магнитного потока через катушку статора, причем на это напряжение совершенно не влияет протекающий через генератор ток.

г) У всех элементов, рассмотренных до сих пор, импеданс казался либо вещественным, либо чисто мнимым. В определении же этой величины было сказано, что в общем случае она является комплексной. Комплексные значения имеют импедансы элементов, содержащих как сопротивления, так и индуктивности или емкости. Приведем пример. Пусть сосредоточенный элемент

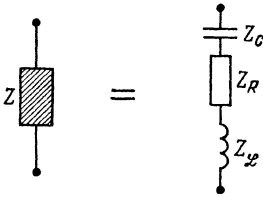


Рис. 21.15.

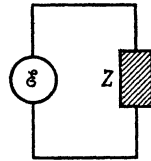


Рис. 21.16.

составлен из сопротивления, емкости и индуктивности, соединенных последовательно (рис. 21.15). Так как правила Кирхгофа справедливы, то импедансы составных элементов можно вычислять так же, как сопротивления комбинаций элементов. Следовательно, импеданс последовательного соединения сопротивления  $R$ , индуктивности  $\mathcal{L}$  и емкости  $C$  равен их сумме:

$$Z = R - i \left( \omega \mathcal{L} - \frac{1}{\omega C} \right). \quad (21.22)$$

Мы видим, что у этого импеданса есть и вещественная, и мнимая части.

3. Вычислим мощность, выделяемую в цепи переменного тока. Для этого рассмотрим цепь, показанную на рис. 21.16.

Прямоугольником отмечен сосредоточенный элемент с импедансом  $Z = Z(\omega)$ . Строение этого элемента мы не фиксируем. Оно может быть сложным и представлять собой произвольное соединение сопротивлений, индуктивностей и емкостей. Энергетические затраты, идущие на поддержание в цепи переменного тока, характеризуются средней мощностью, расходуемой в цепи. Для переменного тока усреднение достаточно провести по одному периоду колебаний. Обозначим среднюю мощность через  $\bar{P}$ . Если развиваемая э. д. с. равна  $\mathcal{E}$ , то мгновенная мощность равна  $\mathcal{E}I$ , где  $I$  — сила тока в данный момент времени. По определению средней величины

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{E}I dt.$$

(Через  $T$  обозначен период колебаний:  $T = 2\pi/\omega$ ). Для расчета  $\bar{P}$  комплексное представление  $\mathcal{E}$  и  $I$  не годится, потому что действительная часть произведения комплексных чисел не равна произведению действительных частей сомножителей. Поэтому для вычисления мощности необходимо использовать действительные части комплексных выражений для  $\mathcal{E}$  и  $I$ :

$$\mathcal{E} = |Z(\omega)| I_0 \cos(\omega t + \varphi), \quad I = I_0 \cos \omega t.$$

Подставляя эти значения в выражение для  $\bar{P}$ , после несложного интегрирования получаем

$$\bar{P} = \frac{1}{2} |Z(\omega)| I_0^2 \cos \varphi. \quad (21.23)$$

Интегрирование сводится к вычислению средних значений

$$\overline{\cos^2 \omega t} = \frac{1}{2} \overline{(1 + \cos 2\omega t)}, \quad \overline{\sin \omega t \cos \omega t} = \frac{1}{2} \overline{\sin 2\omega t}.$$

Но среднее значение гармонической функции по ее периоду равно нулю, так что  $\overline{\cos 2\omega t} = \overline{\sin 2\omega t} = 0$ . Это и дает результат (21.23).

Из (21.23) видно, что даже при больших амплитудных значениях тока  $I_0$  и напряжения  $U_0 = I_0 |Z|$  передаваемая мощность может быть ничтожной из-за малости  $\cos \varphi$ . Поэтому поддержание близкого к единице значения  $\cos \varphi$  является одной из важнейших технических задач, возникающих при конструировании и эксплуатации линий электропередачи. Подставив в (21.23)  $|Z(\omega)| \cos \varphi = \operatorname{Re} Z(\omega)$ , выражение для  $\bar{P}$  можно переписать в форме

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} Z(\omega) I_0^2. \quad (21.24)$$

Отсюда видно, что энергия, необходимая для поддержания переменного тока, определяется только вещественной частью импеданса цепи. По этой причине действительная часть импеданса называется *активной составляющей сопротивления* цепи переменного тока или просто *активным сопротивлением*. Мнимая часть импеданса называется *реактивным сопротивлением*. Последнее определяет только фазовый сдвиг между током и напряжением (при  $\text{Im } Z \neq 0$  фаза импеданса  $\varphi \neq 0$ ). Согласно этой терминологии обычное сопротивление всегда является активным. Наоборот, индуктивность и емкость имеют только реактивные составляющие.

#### § 21.4. Электрические колебания

1. Вернемся к последовательному соединению индуктивности, емкости и сопротивления (рис. 21.15). Это соединение называется *колебательным контуром*, потому что, как будет показано ниже, в таком контуре возможны собственные электрические колебания. При определенных условиях в этой цепи наблюдается электрический резонанс собственных колебаний с колебаниями внешнего источника осциллирующего напряжения.

Убедимся в справедливости сказанного. Пусть последовательное соединение  $R$ ,  $\mathcal{L}$  и  $C$  подключается к э. д. с.  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{-i\Omega t}$  с частотой  $\Omega$ . Согласно (21.21) действие этой э. д. с. вызовет в последовательном соединении индуктивности  $\mathcal{L}$ , емкости  $C$  и сопротивления  $R$  осциллирующий ток

$$I = \frac{\mathcal{E}}{|Z|} e^{i\varphi}, \quad (21.25)$$

где

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (\Omega\mathcal{L} - 1/\Omega C)^2}, \quad (21.26)$$

$$\text{tg } \varphi = \frac{1}{R} \left( \Omega\mathcal{L} - \frac{1}{\Omega C} \right). \quad (21.27)$$

Из (21.25) и (21.26) следует, что амплитуда тока зависит от частоты  $\Omega$  следующим образом:

$$I_0(\Omega) = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + (\Omega\mathcal{L} - 1/\Omega C)^2}}. \quad (21.28)$$

При  $R \ll \Omega\mathcal{L}$  и  $R \ll (\Omega C)^{-1}$  амплитуда  $I_0(\Omega)$  имеет резко выраженный максимум (рис. 21.17). Максимальное значение амплитуды тока равно  $\mathcal{E}_0/R$  и достигается на частоте

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{L}C}}. \quad (21.29)$$

Зависит от частоты  $\Omega$  и фаза  $\varphi$ . Зависимость  $\varphi(\Omega)$  представлена на рис. 21.18. Мы столкнулись с одним из резонансных

явлений, имеющих электрическую природу. Это явление заключается в возрастании амплитуды колебаний электрического тока при приближении частоты  $\Omega$  э. д. с. к значению (21.29), которое определяет резонансную частоту для тока. При этой частоте фаза  $\varphi = 0$ , что вполне естественно: амплитуда колебаний тока будет максимальной тогда, когда действующая э. д. с. синфазна с током.

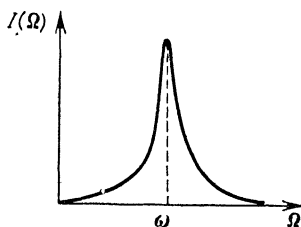


Рис. 21.17.

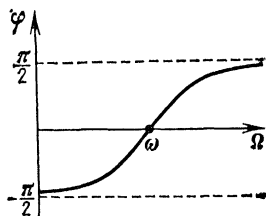


Рис. 21.18.

Электрический резонанс имеет широкое применение. Например, развитие радиотехники было бы невозможно без использования колебательных контуров. Каждый из них служит для выделения колебаний заданной частоты. Для этого контур настраивается на эту частоту. Делается это путем изменения либо емкости  $C$ , либо индуктивности  $\mathcal{L}$ . Настроенный на определенную резонансную частоту контур реагирует избирательно на подаваемый на него сигнал переменного напряжения. Вот что это означает. Каждое переменное напряжение всегда является суперпозицией каких-то гармонически осциллирующих напряжений. На эту суперпозицию контур отзывается возбуждением в нем переменных токов, но с частотами, только достаточно близкими к резонансной. Именно в этом заключается принцип настройки радиоприемника на определенную частоту.

2. Перейдем к анализу неустановившихся процессов в цепях с сосредоточенными элементами. Примером может служить процесс затухания тока в контуре рис. 21.16 при выключении внешней э. д. с. с сохранением замкнутости цепи. Ограничим анализ цепью рис. 21.16 с элементом  $Z$  из рис. 21.15. Второе правило Кирхгофа в применении к контуру этой цепи дает

$$\frac{d\Phi}{dt} + RI + \frac{q}{C} = \mathcal{E},$$

где  $\Phi$  — магнитный поток поля  $\mathbf{B}$  в катушке индуктивности. Для квазистационарных (не обязательно гармонических) токов соблюдается соотношение  $\Phi = \mathcal{L}I$ , так что мы можем положить

$$\frac{d\Phi}{dt} = \mathcal{L} \frac{dI}{dt},$$

если считать катушку недеформируемой и не имеющей ферромагнитного сердечника. Заряд  $q$  на обкладке конденсатора, в которую втекает ток  $I$ , связан с  $I$  соотношением

$$I = \frac{dq}{dt},$$

выражающим закон сохранения заряда. Подставив выражения для  $d\Phi/dt$  и  $I$  в выписанное выше второе правило Кирхгофа, получим дифференциальное уравнение для зависимости от времени заряда  $q(t)$  обкладки конденсатора:

$$\mathcal{L} \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \mathcal{E}(t). \quad (21.30)$$

При заданной зависимости э. д. с.  $\mathcal{E}(t)$  от времени это уравнение содержит полную информацию о возможных электрических процессах в изучаемой цепи, поскольку если уравнение решено, то зависимость тока от времени определяется предпоследним равенством.

С математической точки зрения уравнение (21.30) является обыкновенным линейным дифференциальным уравнением второго порядка. Для разветвленной цепи получается система уравнений такого типа. При наличии в цепи несосредоточенных элементов получаются более сложные уравнения в частных (а не в обыкновенных) производных. Из линейности уравнения (21.30) следует, что как неизвестную функцию  $q(t)$ , так и э. д. с.  $\mathcal{E}(t)$  можно выбрать комплексными. При этом, если действительная часть комплексной функции  $\mathcal{E}(t)$  равна действующей э. д. с., то и действительная часть решения  $q(t)$  будет определять заряд обкладки конденсатора. Ниже мы без новых оговорок будем пользоваться комплексной формой  $q(t)$ ,  $\mathcal{E}(t)$  и  $I(t)$ . В § 7.1 тома I было подчеркнуто, что колебательные процессы любой природы имеют общие закономерности и теоретически исследуются общими методами. Эта общность следует из того, что колебательные процессы разной природы описываются однотипными дифференциальными уравнениями.

Будем считать э. д. с.  $\mathcal{E}(t)$  нашей цепи гармонически зависящей от времени функцией:  $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 e^{-i\Omega t}$ . Тогда уравнение (21.30) с точностью до обозначений совпадает с уравнением (7.24) (в действительной форме (7.23)) из § 7.2 тома I для вынужденных колебаний затухающего осциллятора \*):

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + 2\gamma \frac{d\psi}{dt} + \omega^2\psi = r_0 e^{-i\Omega t}, \quad (21.31)$$

где  $\gamma$  — коэффициент затухания,  $\omega$  — собственная частота незатухающего осциллятора (т. е. частота решения (21.31) при

\*) Здесь по сравнению с томом I частота обозначена по-другому:  $\Omega \rightarrow -\Omega$ .



$\gamma = 0$  и  $r_0 = 0$ ). Следовательно, уравнение (21.30) описывает вынужденные электрические колебания, а цепь, изображенная на рис. 21.16, с импедансом, показанным на рис. 21.15, представляет собой электрический колебательный контур с внешней вынуждающей э. д. с. Мы видим, что (21.30) переходит в (21.31), если положить

$$q = \psi; \quad \mathcal{E}_0 = r_0, \quad (21.32)$$

$$\gamma = \frac{R}{2\mathcal{L}}, \quad (21.33)$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{L}C}}. \quad (21.34)$$

На этом анализ процессов в цепи, изображенной на рис. 21.15, 21.16, можно закончить, поскольку он уже проделан в § 7.2 тома I для колебаний такого типа любой природы. Поэтому дальше надо прочесть этот параграф первого тома, используя формулы (21.32), (21.33), (21.34) для перевода с языка колебаний вообще на язык электрических колебаний.

Для того чтобы получить информацию не о заряде  $q$ , а о более важной величине — силе тока, согласно соотношению  $I = dq/dt$  достаточно продифференцировать обе части (21.30) по времени, что дает

$$\mathcal{L} \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = -i\Omega \mathcal{E}. \quad (21.30a)$$

Как видно из сравнения этого уравнения с уравнением (7.24) тома I, для него остаются в силе переводные формулы (21.33), (21.34).

Приведем для справок важнейшие результаты § 7.2 тома I в переводе на язык электрических колебаний.

а) При  $\mathcal{E} = 0$  и  $R = 0$  колебания являются свободными, незатухающими, с собственной частотой  $\omega$  из (21.34): сила тока  $I(t) = I_0 e^{-i\omega t}$ . Определяющее частоту  $\omega$  свободных колебаний соотношение (21.34) называется *формулой Томсона*.

б) При  $\mathcal{E} = 0$  и  $CR^2 \ll \mathcal{L}$  величина

$$Q = \frac{\omega}{2\gamma} = \sqrt{\frac{\mathcal{L}}{CR^2}} \quad (21.35)$$

называется *добротностью контура*. Добротность определяет относительные потери энергии в колебательном контуре за один период:

$$Q = \frac{2\pi W_3}{W},$$

где  $W_3$  — энергия колебательного контура,  $W$  — энергия, теряемая за период колебаний. При наличии внешней гармонической

э. д. с. в контуре устанавливаются вынужденные колебания с частотой  $\Omega$  э. д. с. Эти колебания имеют резонансные свойства согласно (21.28), а также формуле (7.26) тома I. Без доказательства укажем, что резонансный пик тем острее, чем больше добротность контура  $Q$ . Физически это следует из того, что при  $Q \gg 1$  колебания близки к незатухающим.

В качестве примера рассмотрим контур с резонансной частотой  $10^7$  Гц. Эта частота принадлежит коротковолновому участку радиодиапазона. Резонанс на этой частоте может быть получен в колебательном контуре с  $C = 5 \cdot 10^{-8}$  Ф и  $\mathcal{L} = 0,2 \cdot 10^{-8}$  Гн. Сопротивление проводов в таком контуре обычно не превышает  $10^{-3}$  Ом. В этом случае  $CR^2/\mathcal{L} \approx 0,5 \cdot 10^{-2} \ll 1$ . Поэтому расчет добротности контура можно произвести по формуле (21.35). Получим  $Q \approx 2 \cdot 10^2$ . Такая добротность типична для контуров, применяемых в радиотехнических устройствах.

Покажем, что вместо того, чтобы говорить о колебаниях заряда, тока или напряжения, можно говорить о колебаниях электромагнитного поля. Когда конденсатор заряжается или разряжается, то в нем изменяется электрическое поле. С увеличением или уменьшением тока возрастает или ослабевает магнитное поле  $\mathbf{B}$  индуктивности. Колебания тока и заряда на конденсаторе отличаются по фазе на  $\pi/2$  (если  $q = q_0 e^{-i\omega t}$ , то  $I = dq/dt = \omega q_0 e^{-i(\omega t + \pi/2)}$ ). Следовательно, таким же будет и соотношение фаз электрического и магнитного полей. Поэтому можно утверждать, что в идеальном контуре с запаздыванием по фазе на  $\pi/2$  энергия электрического поля периодически превращается в энергию магнитного поля и наоборот. По сравнению с механическим осциллятором энергия магнитного поля играет роль кинетической, а энергия электрического поля — потенциальной энергии.

3. Формула Томсона указывает, каким образом можно получать электромагнитные колебания разных частот: для этого нужно варьировать  $\mathcal{L}$  или  $C$ . Но в этом отношении реальные возможности одиночного контура всегда ограничены. Действительно, согласно (21.34) электромагнитные колебания высоких частот можно получить в контурах, например, с малыми индуктивностями. Но уменьшать индуктивность одной катушки можно, лишь сокращая длину ее провода. При этом когда-то мы дойдем до последнего витка. В этом случае обкладки конденсатора окажутся соединенными маленьким куском провода. Можно затем уменьшать емкость, но до каких-то пределов. В настоящее время размеры сосредоточенных элементов удалось довести до величин порядка  $10^{-2}$  м. Контур, содержащий такие элементы, можно рассматривать в квазистационарном приближении для частот, малых в сравнении с  $c/L = 8 \cdot 10^8$  м/с  $\cdot 10^2$  м $^{-1} \approx 10^{10}$  Гц (см. (21.6)). Поэтому выводы, сделанные выше

о свойствах такого контура, справедливы только при указанном ограничении по частоте. Колебательный контур с линейными размерами около  $10^{-2}$  м уже не может служить средством возбуждения колебаний с частотами порядка и выше  $10^9$  Гц (длина волны  $\lambda \lesssim 10$  см). Для получения столь высоких частот используется следующий подход к решению этого вопроса. Вспомним, что квазистационарные токи подчиняются правилам Кирхгофа. Это означает, что с импедансами можно обращаться так же, как и с обычными сопротивлениями. Например, если соединить параллельно две индуктивности  $\mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_2$ , то в результате получится элемент с импедансом

$$\frac{(-i\omega\mathcal{L}_1)(-i\omega\mathcal{L}_2)}{(-i\omega\mathcal{L}_1) + (-i\omega\mathcal{L}_2)} = -i\omega \frac{\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2}{\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2}.$$

Отсюда видно, что параллельное соединение двух катушек обладает индуктивностью

$$\frac{\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2}{\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2}.$$

Если, например, катушки одинаковы, то параллельное соединение будет обладать индуктивностью вдвое меньшей, чем индуктивность каждой катушки. Следовательно, уменьшать индуктивность можно путем составления параллельных соединений проводов.

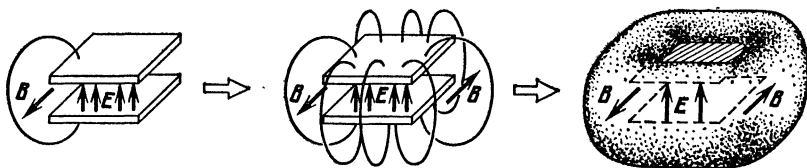


Рис. 21.19.

Вернемся теперь к контуру, в котором катушка сокращена до куска провода, соединяющего обкладки конденсатора. Подключая параллельно к этому проводу точно такие же провода, мы будем продолжать снижать индуктивность. При этом просвет между обкладками конденсатора будет постепенно закрываться и наконец закроется совсем, когда витков станет так много, что они будут примыкать друг к другу вплотную. Тогда возникнет замкнутая полость (рис. 21.19). Только внутри нее и будут происходить колебания электрического и магнитного полей. При этом магнитное поле будет сосредоточено в периферийной части полости, а электрическое поле — в ее центральной части.

Чтобы повысить частоту дальше, нужно еще более сократить в размерах периферийную часть полости (вспомним, что она

возникла из индуктивности контура). Это можно сделать, придав полости простую прямоугольную форму (рис. 21.20). При этом магнитное поле будет «вдавлено» внутрь конденсатора. Пространственное разделение электрического и магнитного полей исчезнет. Поэтому теперь можно говорить только о колебаниях электромагнитного поля, а не электрического и магнитного полей по отдельности. Ограниченная проводниками замкнутая полость, внутри которой происходят колебания электромагнитного поля, называется *электромагнитным резонатором*. Его форма может быть произвольной. Выше она получилась прямоугольной просто потому, что такую форму имели обкладки конденсатора в исходном колебательном контуре.

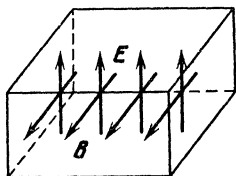


Рис. 21.20.

Любой резонатор составлен из бесконечного числа простейших сосредоточенных элементов и поэтому не является сосредоточенным элементом. Резонатор имеет бесконечное число степеней свободы электромагнитных колебаний. В нем можно возбуждать колебания многих частот. При этом допустимые частоты образуют дискретный набор значений, который для резонатора каждого типа (тип определяется размерами и формой полости) является фиксированным. Это важное обстоятельство станет понятным, если мы вспомним о существовании электромагнитных волн, среди которых есть и стоячие. Они-то и образуются в замкнутых полостях, условия на границах которых не изменяются со временем (см. § 7.4 тома I).

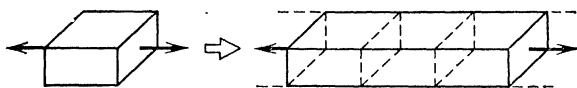


Рис. 21.21.

А в стоячей волне колебания могут происходить только со строго определенными частотами. Для разрешенных колебаний резонатора часто используется специальный термин: каждое из них называется *модой*.

Предположим теперь, что электромагнитный резонатор деформируется таким образом, что какие-то два диаметрально противоположных участка его поверхности удаляются один от другого, так что в результате полость превращается в трубу (рис. 21.21). В связи с этим колебания поля получают возможность распространяться вдоль трубы. Другими словами, с помощью металлической трубы можно образовать канал передачи

электромагнитных колебаний, т. е. направить определенным образом распространение электромагнитных волн. Поэтому используемые для таких целей металлические трубы называются *волноводами*. Каждый волновод может обеспечить передачу электромагнитной энергии волн только строго определенного типа (подобно тому как в каждом резонаторе могут существовать только строго определенные моды). Благодаря своей способности направлять энергию электромагнитных колебаний в нужную сторону волноводы широко используются. Например, они входят в состав каждой радиолокационной станции. На таких станциях с помощью волноводов подводят энергию электромагнитных колебаний к излучающей антенне.

## ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

## § 22.1. Электромагнитные волны в свободном пространстве

1. В § 15.3 было установлено, что одним из важнейших следствий из уравнений Максвелла (15.9) является возможность существования электромагнитного поля в форме электромагнитных волн как самостоятельного вида материи при отсутствии зарядов и токов. Там же волновое уравнение было получено для потенциалов  $\varphi$  и  $\mathbf{A}$ . Получим это уравнение для полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ . При отсутствии зарядов и токов электромагнитное поле называется *свободным*. Согласно этому определению уравнения Максвелла для свободного поля имеют вид (система СИ)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{r}} = 0, \quad \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{E} \right] &= - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{r}} = 0, \quad \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{B} \right] &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (22.1)$$

Взяв ротор от обеих частей второго из этих уравнений и воспользовавшись (В.11), а также первым и четвертым уравнениями (22.1), получим уравнение для электрического поля:

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (22.2)$$

Проводя те же выкладки с четвертым уравнением (22.1), мы получим такое же уравнение для магнитного поля:

$$\Delta \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (22.3)$$

Каждая компонента (22.2) и (22.3) при соответствующем согласовании обозначений совпадает с волновым уравнением (7.40) из тома I. Поэтому к (22.2), (22.3) применимы все выводы § 7.3 тома I. Кроме того, у электромагнитных волн есть специфические свойства, обусловленные тем, что уравнения Максвелла (22.1) содержат информацию, утраченную при переходе к (22.2) или (22.3).

Перечислим основные свойства электромагнитных волн в свободном пространстве.

а) Любая электромагнитная волна в свободном пространстве распространяется со скоростью света  $c \approx 3 \cdot 10^8$  м/с. Это свойство уже установлено в § 15.3. Из этого свойства, в частности, следует, что, в отличие от других видов материи, свободное электромагнитное поле не может находиться в состоянии покоя\*).

б) Любой электромагнитный волновой процесс может быть представлен в виде суперпозиции плоских монохроматических электромагнитных волн. Волной указанного типа является решение (22.2) вида

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t + i(\mathbf{k}\mathbf{r})}, \quad (22.4)$$

где постоянные величины  $\omega$  и  $\mathbf{k}$  связаны соотношением

$$|\mathbf{k}| = \frac{\omega}{c}, \quad (22.5)$$

а в остальном произвольны. Соотношение (22.5) является законом дисперсии электромагнитных волн в свободном пространстве. Напомним, что  $|\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$ , где  $\lambda$  — длина волны. Произвольна и векторная амплитуда  $\mathbf{E}_0$ . То, что поле (22.4) является решением (22.2) при соблюдении (22.5), проверяется непосредственно. Отметим, что при дифференцировании выражений типа (22.4) полезно знать легко проверяемые соотношения

$$\frac{\partial a(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -i\omega a, \quad \frac{\partial a(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} = i\mathbf{k}a, \quad (22.6)$$

где  $a(\mathbf{r}, t)$  — величина произвольной природы, зависящая от  $\mathbf{r}$  и  $t$  по закону  $a(\mathbf{r}, t) = a_0 e^{-i\omega t + i(\mathbf{k}\mathbf{r})}$ . Величина  $a(\mathbf{r}, t)$  может быть как скаляром, так и компонентой вектора.

Еще одна техническая деталь состоит в том, что во всех линейных соотношениях можно применять комплексную форму записи электромагнитного волнового процесса. Свойство б) теперь следует из линейности уравнений Максвелла и из того, что  $\mathbf{E}$  из (22.4) с соблюдением (22.5) является решением волнового уравнения для поля  $\mathbf{E}$ . С учетом свойства б) ниже в этом пункте будут рассматриваться только плоские волны типа (22.4).

в) В электромагнитной волне обязательно присутствуют оба поля — электрическое  $\mathbf{E}$  и магнитное  $\mathbf{B}$ . Это свойство следует из уравнений Максвелла (22.1). При распространении волны (22.4) электрическое поле безостановочно изменяется во време-

\* ) Возможно, что аналогичным свойством обладают еще трудноуловимые частицы — нейтрино, которые, видимо, тоже могут существовать, только двигаясь со скоростью света.

ни. Согласно четвертому уравнению Максвелла (22.1) это приводит к безостановочному порождению поля  $\mathbf{B}$ , которое тоже подчиняется уравнению волнового типа (22.3) и тем самым тоже имеет решение в виде плоской волны

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{-i\omega t + i(\mathbf{k}r)} \quad (22.7)$$

с тем же законом дисперсии (22.5). В свойстве в) наиболее ярко проявляется единство электромагнитных явлений: электромагнитное поле как самостоятельный вид материи существует только как комбинация обоих полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ .

г) *Электромагнитные волны поперечны.* Поперечность означает, что в волне колебания векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  происходят перпендикулярно волновому вектору  $\mathbf{k}$  распространения волны, т. е.

$$(\mathbf{kE}) = (\mathbf{kB}) = 0 \quad (22.8)$$

(см. общее определение поперечности волн в § 7.3 тома I). Свойство поперечности (22.8) прямо следует из первого и третьего уравнений (22.1) в применении к плоским волнам (22.4), (22.7), если воспользоваться второй из формул (22.6).

Введем единичный вектор  $\mathbf{n}$ , направленный вдоль  $\mathbf{k}$ , т. е. вдоль распространения волны:

$$\mathbf{k} = n|\mathbf{k}|. \quad (22.9)$$

Тогда, подставив выражения (22.4), (22.7) для плоских волн во второе и четвертое уравнения Максвелла, получим связь между  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  в плоской волне:

$$[\mathbf{nE}] = c\mathbf{B}, \quad c[\mathbf{Bn}] = \mathbf{E}. \quad (22.10)$$

Отсюда, в частности, видно, что векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  перпендикулярны не только  $\mathbf{n}$  (поперечность), но и друг другу, т. е.  $(\mathbf{BE}) = 0$ .

Свойство поперечности резко отличает электромагнитные волны от акустических. Действительно (см. § 14.1 тома I), в газах и жидкостях звуковые волны всегда продольны — частицы колеблются вдоль распространения волны. В твердых телах возможны и поперечные звуковые волны, но и продольные волны обязательно должны существовать. Исторически установление поперечности световых волн сыграло важную роль в ниспровержении механистической концепции световых волн как колебаний эфира — гипотетической среды, заполняющей все пространство.

д) *Электромагнитная волна обладает свойством поляризации* \*). Поляризация заключается в том, что в каждой точке пространства в фиксированный момент времени свойства электромагнитной волны различны в разных направлениях плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны (т. е. волновому вектору  $\mathbf{k}$ ). Объясняется это просто тем, что

\*) Не путать с поляризацией диэлектриков.



поля  $E$  и  $B$  определенным образом ориентированы в этой плоскости.

Существование поляризации можно продемонстрировать с помощью простейшей телевизионной антенны (рис. 22.1). Эта антенна представляет собой принимающий горизонтальный провод, ориентированный перпендикулярно направлению на передающую станцию. (Последнее возможно благодаря попереочности электромагнитных волн.)

Горизонтальность проводника антенны необходима именно потому, что электромагнитные волны с телестанции поляризованы так, что у них вектор  $E$  колеблется в горизонтальной плоскости. В этом можно убедиться, ориентируя антенну вертикально и соединив ее с телевизором, экранированным от наводок кабелем (рис. 22.1). Сигнал в телевизоре резко ослабнет. В Англии, наоборот, наилучший прием идет при вертикальной ориентации антенны, потому что там используется вертикальная поляризация волн телевещания.

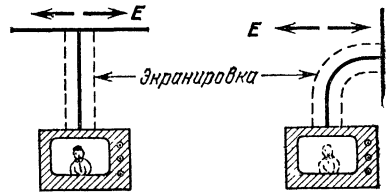


Рис. 22.1.

е) При переходе от одной системы отсчета к другой, движущейся относительно первой, частота и волновой вектор электромагнитной волны в общем случае изменяются. Получим формулы преобразования частоты и волнового вектора при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Рассмотрим две системы отсчета  $K$  и  $K'$ , у которых оси  $x$  и  $x'$  совпадают, другие соответственные оси параллельны; система  $K'$  движется относительно  $K$  в  $x$ -направлении с постоянной скоростью  $V$ . Пусть в системе  $K$  частота и волновой вектор равны  $\omega$  и  $\mathbf{k}$ , а в системе  $K'$ , соответственно,  $\omega'$  и  $\mathbf{k}'$ . Фаза волны в системе  $K'$  будет равна  $\omega't' - (\mathbf{k}'\mathbf{r}') = \omega't' - k'_x x' - k'_y y' - k'_z z'$  ( $t'$  и  $x', y', z'$  — время и пространственные координаты системы  $K'$ ). Совершим переход в систему отсчета  $K$  с помощью преобразований Лоренца \*) (см. (1.25) тома I; преобразования Лоренца приведены также в конце § 15.3). В результате для фазы получим выражение

$$\frac{\omega' + k'_x V}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} t - \frac{k'_x + \omega' V/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} x - k'_y y - k'_z z.$$

Здесь  $t, x, y, z$  — время и пространственные координаты системы  $K$ . Отсюда следует, что в системе  $K$  величины  $\omega$  и  $\mathbf{k}$  связаны с величинами  $\omega'$  и  $\mathbf{k}'$  соотношениями

$$\omega = \frac{\omega' + k'_x V}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad (22.11)$$

$$k_x = \frac{k'_x + \omega' V/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad k_y = k'_y, \quad k_z = k'_z.$$

\*) Электромагнитная волна является ультрарелятивистским объектом.

Пусть в системах  $K$  и  $K'$  углы между направлениями распространения волны и относительного движения систем равны, соответственно,  $\alpha$  и  $\alpha'$ . Тогда  $k_x = k \cos \alpha = (\omega/c) \cos \alpha$  и  $k'_x = k' \cos \alpha' = (\omega'/c) \cos \alpha'$ . Отсюда следует, что первому равенству (22.11) можно придать такой вид:

$$\omega = \omega' \frac{1 + (V/c) \cos \alpha'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (22.12)$$

С помощью же (22.12) легко обнаруживается, что второе соотношение позволяет связать углы  $\alpha$  и  $\alpha'$  следующим образом:

$$\cos \alpha = \frac{\cos \alpha' + V/c}{1 + (V/c) \cos \alpha'}. \quad (22.13)$$

Формула (22.12) описывает *электромагнитный эффект Доплера* — явление изменения частоты электромагнитной волны при переходе из одной системы отсчета в другую, движущуюся относительно первой. В нерелятивистском пределе в первом порядке по  $V/c$

$$\omega = \omega' \left( 1 + \frac{V}{c} \cos \alpha \right). \quad (22.14)$$

Если  $\alpha' = 0$  (из (22.13) видно, что тогда и  $\alpha = 0$ ), то направления распространения волны и относительного движения систем отсчета совпадают. В этом случае эффект Доплера называется *продольным*. При  $\alpha' = \pi/2$  эффект Доплера называется *поперечным*. Из (22.14) следует, что в нерелятивистском пределе поперечный эффект в первом порядке по  $V/c$  отсутствует.

Формула (22.13) указывает на то, что если  $\alpha \neq 0$ , то при переходе из одной системы отсчета в другую, вообще говоря, изменяется направление распространения волны. Такое явление называется *абберацией*. Абберация приводит, например, к изменению видимых положений звезд вследствие вращения Земли (суточная абберация света), обращения Земли вокруг Солнца (годовая абберация) и перемещения Солнечной системы (вековая абберация). Эти изменения происходят потому, что из-за названных движений по отношению к земному наблюдателю постоянно изменяются как направление световых лучей, идущих от каждой звезды, так и видимая скорость перемещения звезды.

В современной науке значение электромагнитного эффекта Доплера велико. Например, только благодаря этому эффекту удается измерять скорости движения удаленных объектов. Делается это следующим образом. Рассматривается спектр излучения объекта, например какой-нибудь удаленной галактики. Предположим, что в спектре обнаруживаются линии излучения

какого-то химического элемента \*). Они сравниваются с линиями излучения того же элемента, но находящегося на Земле. Если сравниваемые линии оказываются сдвинутыми друг относительно друга, то это означает, что наблюдается электромагнитный эффект Допплера, а, следовательно, галактика относительно земного наблюдателя перемещается. Величина сдвига позволяет определить абсолютное значение скорости этого движения. Если наблюдаемые линии оказываются сдвинутыми в сторону низких частот, но это говорит об удалении галактики. Соответствующий сдвиг называется *красным смещением* \*\*). Сдвиг в противоположную сторону называется *фиолетовым смещением* и вызывается приближением галактики.

Анализируя обширный материал по спектрам излучения галактик, Е. Хаббл в 1929 г. установил, что, за редкими исключениями, в этих спектрах наблюдается красное смещение. Оказалось также, что величина каждого смещения пропорциональна расстоянию до галактики. Это означает, что галактики удаляются от нас тем стремительнее, чем дальше от нас находятся (на каждые  $10^{18}$  км скорость возрастает примерно на 1,7 км/с). В последнее время зафиксированы скорости удаления порядка 200 000 км/с! Из этих фактов следует, что вещество Вселенной разлетается подобно продуктам взрыва. Если  $l$  — расстояние до излучателя, то моменты излучения и регистрации разделены интервалом времени  $l/c$ . Следовательно, закон, открытый Хабблом, свидетельствует о том, что разлет вещества Вселенной в далеком прошлом происходил интенсивнее. Эта черта свойственна всем взрывным процессам.

На основании закона Хаббла была выдвинута взрывная гипотеза образования наблюдаемого состояния Вселенной. Согласно этой гипотезе вся материя Вселенной когда-то была сконцентрирована в образовании гигантски высокой плотности, разогретом до чрезвычайно высоких температур. Около 10—12 миллиардов лет тому назад это образование взорвалось и начался разлет вещества, который мы наблюдаем и сейчас. О масштабах температур и плотностей в далеком прошлом можно составить представление по таким цифрам. Через 0,01 с после взрыва плотность составляла  $4,5 \cdot 10^{20}$  кг/м<sup>3</sup> (в настоящее время плотность имеет порядок  $10^{-39}$  кг/м<sup>3</sup>), а температура была равна приблизительно  $10^{11}$  К \*\*\*).

Вряд ли эти вопросы сейчас обсуждались бы, если электромагнитный эффект Допплера был бы неизвестен. Отметим, что тот же эффект позволил дать простое объяснение и тому, почему небосвод нас не ослепляет. В свое время это было интригующей загадкой, и вот почему. Представим себе во Вселенной сферический слой, в центре которого находится Солнечная система. Число звезд, попавших в слой, будет пропорционально поверхности слоя, т. е. квадрату его радиуса \*\*\*\*). Вспомним из школьного курса, что освещенность, создаваемая точечным источником, убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от источника до освещаемого предмета. Следовательно, освещенность Земли от звезд выделенного слоя будет пропорцио-

\*) Напоминаем известный из школьного курса факт: атом каждого химического элемента излучает электромагнитные волны только строго определенных частот.

\*\*\*) Потому что в спектре видимого света низкочастотный участок занимает красный свет.

\*\*\*\*) Эти оценки получены теоретически на основе теории гравитации Эйнштейна.

\*\*\*\*\*) Толщина слоя предполагается пренебрежимо малой в сравнении с его радиусом.

нальна их числу. А оно растет по мере увеличения размеров слоя. Отсюда следует, что освещенность Земли должна быть пропорциональна числу всех светящихся объектов Вселенной, т. е. должна быть практически неограниченной. Ничего подобного на самом деле не наблюдается. Объясняется это так. Чем дальше от нас звезда, тем быстрее она удаляется от нас согласно закону Хаббла. Соответственно сдвигается в сторону более низких частот доходящее до нас излучение звезд. Для достаточно удаленных звезд сдвиг оказывается настолько большим, что излученный звездный свет приходит к нам в виде таких электромагнитных волн, которые глазом уже не воспринимаются. Поэтому визуально наблюдается только ограниченное число объектов. Самые дальние из них находятся от нас на расстоянии порядка  $10^{26}$  м.

ж) В электромагнитной волне плотность потока энергии  $\Pi$  связана с плотностью энергии  $w$  равенством

$$\Pi = ncw, \quad (22.15)$$

в котором (система СИ)

$$w = \epsilon_0 E^2, \quad (22.16)$$

$n$  — единичный вектор, указывающий направление распространения волны, а вектор  $\mathbf{E}$  взят в действительной форме. (В системе СГС в (22.16)  $\epsilon_0$  заменяется на коэффициент  $1/4\pi$ .) Переход к действительной форме необходим в связи с тем, что  $w$  зависит от поля не линейно, а квадратично.

В справедливости (22.15) и (22.16) можно убедиться подстановкой (22.10) в (15.16) и (15.18). При этом нужно воспользоваться (B.2) и (22.8).

Смысл равенства (22.15) прозрачен. Оно указывает на два факта. Во-первых, энергия переносится только в направлении распространения волны. Во-вторых, в единицу времени через каждую единичную площадку, перпендикулярную распространению волны, проходит энергия, которой обладает волновое поле в объеме прямого параллелепипеда, построенного на данной площадке и имеющего высоту, численно равную  $c$ . Эта энергия, равная

$$I = |\Pi| = cw,$$

называется *интенсивностью* волны.

2. Наличие поляризации приводит к тому, что две плоских электромагнитных волны с одинаковыми  $\omega$  и  $\mathbf{k}$  (т. е. частотой и направлением распространения) могут отличаться друг от друга состояниями поляризации. Подсчитаем число линейно независимых состояний поляризации у плоской волны с заданными  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ . Прежде всего, заметим, что при заданном  $\mathbf{E}$  вектор  $\mathbf{B}$  однозначно определен через (22.10). Далее, вектор  $\mathbf{E}$  имеет две линейно независимые компоненты, поскольку он перпендикулярен  $\mathbf{n}$ . Если направить ось  $z$  по  $\mathbf{n}$  (т. е. выбрать  $\mathbf{n} = \{0; 0; 1\}$ ), то  $E_z = 0$ , так что вектор  $\mathbf{E}$  имеет две компоненты  $E_x$  и  $E_y$ .

Задание этих двух компонент полностью фиксирует вектор  $\mathbf{E}$ , а тем самым и  $\mathbf{B}$ . Поэтому

*электромагнитная волна с заданными  $\omega$  и  $\mathbf{n}$  имеет два линейно независимых состояния поляризации. Волна общего вида может быть представлена как линейная суперпозиция двух фиксированных по-разному поляризованных волн.*

В выбранной нами системе координат в одной из поляризованных волн электрическое поле  $\mathbf{E}_1$  имеет компоненты

$$E_{1y} = E_{1z} = 0, \quad E_{1x} = E_0 e^{-i\omega t + i(\mathbf{kr})},$$

а в другой электрическое поле  $\mathbf{E}_2$  имеет компоненты

$$E_{2x} = E_{2z} = 0, \quad E_{2y} = E_0 e^{-i\omega t + i(\mathbf{kr})}.$$

Здесь  $E_0$  — любое фиксированное значение поля, которое для определенности будем считать действительным. Каждая из этих волн называется *плоско поляризованной*. Плоскость, в которой колеблется вектор  $\mathbf{E}$ , называется *плоскостью поляризации*. Так, в первой из приведенных выше волн плоскость поляризации определяется осями  $x$  и  $z$ . Не всякая монохроматическая электромагнитная волна является плоско поляризованной. Волна общего вида получается, если взять ее электрическое поле в виде суперпозиции  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{E} = a\mathbf{E}_1 + ib\mathbf{E}_2,$$

с произвольными действительными коэффициентами  $a$ ,  $b$ . Действительная часть  $\text{Re } \mathbf{E}$  этой волны (т. е. реальное электрическое поле) имеет вид

$$\text{Re } E_x = E_0 a \cos(\omega t - (\mathbf{kr})),$$

$$\text{Re } E_y = E_0 b \sin(\omega t - (\mathbf{kr})),$$

$$\text{Re } E_z = 0.$$

При  $b = 0$  поле обращается в нуль там, где  $\omega t - (\mathbf{kr}) = (N + 1/2)\pi$ ,  $N$  — любое целое число. Но при  $a = b$  получим  $(\text{Re } \mathbf{E})^2 = (E_0 a)^2$ , т. е. абсолютная величина поля  $\mathbf{E}$  одинакова во всех точках пространства. При убывании  $x$ -компоненты растет  $y$ -компонента, и наоборот. Если рассматривать поле  $\mathbf{E}$  при фиксированном  $t$ , то при перемещении вдоль волны вектор  $\mathbf{E}$  (как и вектор  $\mathbf{B}$ ) равномерно вращается вокруг оси  $z$ . Такая же картина равномерного вращения вектора  $\mathbf{E}$  получится, если следить за изменением во времени вектора в фиксированной точке, например в точке  $\mathbf{r} = 0$ . Если абсолютное значение поля  $\mathbf{E}$  (или поля  $\mathbf{B}$ , что согласно (22.10) безразлично) плоской монохроматической волны одинаково во всех точках, то поляризация волны называется *круговой*. Существуют две различные круговые поляризации — *правая* и *левая*. Поляризация называется пра-

вой, если при перемещении вдоль волнового вектора поле  $\mathbf{E}$  вращается по часовой стрелке, если смотреть с конца вектора  $\mathbf{k}$ . Поляризация называется левой при противоположном вращении поля  $\mathbf{E}$ .

При ненулевых  $a \neq b$  абсолютная величина поля  $\mathbf{E}$  меняется в пределах от  $|aE_0|$  до  $|bE_0|$ . В этом случае конец вектора, например  $\mathbf{E}(0, t)$ , движется по эллипсу. Поэтому соответствующая поляризация называется *эллиптической*. Плоская и круговая поляризации являются предельными случаями эллиптической.

Наглядное представление о различных типах поляризации дают малые колебания груза, подвешенного на легкой гибкой нити (рис. 22.2). Если груз отвести в сторону и отпустить, то он будет колебаться в одной плоскости (аналог плоской поляризации). Если же отведенный в сторону груз не просто отпустить, а еще и толкнуть в горизонтальном направлении вбок, то он начнет двигаться по эллипсу или по окружности (аналог эллиптической или круговой поляризации).

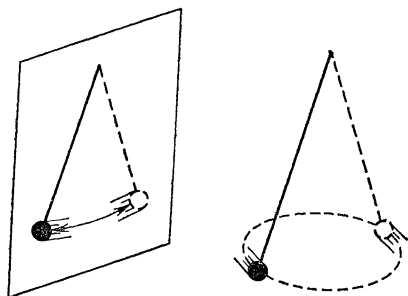


Рис. 22.2.

3. В плоской монохроматической волне частота и волновой вектор точно фиксированы, колебания продолжаются бесконечно долго, происходят в неограниченном объеме и имеют всегда и всюду одинаковую амплитуду. В реальных волнах все эти идеализированные свойства отсутствуют. Реальная волна имеет некоторый разброс  $\Delta\omega$  по частотам и существует в течение некоторого конечного промежутка времени  $\Delta t$ . Точно так же компоненты волнового вектора  $\mathbf{k}$  реальной волны имеют разбросы значений, соответственно,  $\Delta k_x, \Delta k_y, \Delta k_z$ , а волна существует в конечном объеме, например в прямоугольном параллелепипеде\*) со сторонами  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ .

Для многих научных и технических применений важен вопрос о том, до каких пределов можно сужать перечисленные выше величины. Например, при конструировании простейшего радиопередатчика, излучающего сигналы азбуки Морзе, важно знать, насколько узкой может быть полоса (т. е.  $\Delta\omega$ ) этого передатчика при длительности  $\Delta t$  короткого сигнала (т. е. точки). Желательно, чтобы обе эти величины были возможно меньше. Чем меньше  $\Delta\omega$ , тем больше разных передатчиков могут рабо-

\*) Отметим, что вне этого параллелепипеда (как и вне интервала времени  $\Delta t$ ) амплитуда не должна быть точно нулем. Достаточно, чтобы она была малой и быстро спадающей.

тать, не мешая друг другу, в заданном интервале частот. А чем меньше  $\Delta t$ , тем больше будет количество информации, передаваемое за единицу времени.

В математике доказаны следующие неравенства, устанавливающие пределы возможного уменьшения величин  $\Delta\omega$ ,  $\Delta t$ ,  $\Delta k_x$ , ...,  $\Delta z$ :

$$\Delta\omega \Delta t \gtrsim 1, \quad \Delta k_x \Delta x \gtrsim 1, \quad \Delta k_y \Delta y \gtrsim 1, \quad \Delta k_z \Delta z \gtrsim 1. \quad (22.17)$$

Эти неравенства называются *соотношениями неопределенностей*. Неопределенностью называется каждая из величин  $\Delta\omega$ ,  $\Delta k_x$ ,  $\Delta k_y$ ,  $\Delta k_z$ . Так,  $\Delta\omega$  — это неопределенность задания частоты, а  $\Delta k_x$  — неопределенность в значении  $x$ -компоненты волнового вектора.

*Соотношения неопределенностей справедливы для волн любой природы, а первое соотношение справедливо также для колебаний любой природы.*

Длина волны  $\lambda$  связана с волновым числом  $k = |\mathbf{k}|$  соотношением  $k = 2\pi/\lambda$ . Поэтому по правилам вычисления погрешностей измерения  $\Delta k = 2\pi \Delta\lambda/\lambda^2$ . Направив ось  $x$  вдоль волнового вектора  $\mathbf{k}$ , находим соотношение неопределенностей для длины волны:

$$\Delta\lambda \Delta x \gtrsim \frac{\lambda^2}{2\pi}.$$

Соотношения неопределенностей во многих случаях дают возможность производить простые эффективные оценки, а также качественно предсказывать ход различных процессов. Например, если в упомянутом выше радиопередатчике длительность передачи одной точки азбуки Морзе равна 0,1 с, то ширина  $\Delta\nu = \Delta\omega/2\pi$  частотной полосы будет  $\Delta\nu \gtrsim \frac{1}{2\pi \Delta t} \approx 2$  Гц. Этот разброс частот ничтожен по сравнению с разбросом, обусловленным другими причинами (тепловые шумы и пр.).

Произведем теперь аналогичную оценку для телевизионного передатчика. По телевидению в секунду передается 25 кадров, каждый из которых состоит примерно из  $5 \cdot 10^5$  последовательно передаваемых точек (625 строк, по  $4/3 \cdot 625$  элементов в строке). Отсюда следует, что на передачу каждой точки затрачивается время  $\Delta t = (25 \cdot 5 \cdot 10^5)^{-1} \text{ с} = 8 \cdot 10^{-8} \text{ с}$ . В этом случае мы уже получим  $\Delta\nu = 2 \cdot 10^6$  Гц. Поэтому несущая частота должна быть не менее 30—50 МГц, т. е. находиться в УКВ диапазоне. При этом частотный интервал между двумя каналами передачи должен превышать 2 МГц.

В качестве примера применения соотношений неопределенностей «волновой вектор — координата» рассмотрим прохождение света через узкое отверстие ширины  $d$  в непрозрачном экра-

не (рис. 22.3). Пусть перед отверстием световая волна распространялась точно вдоль оси  $x$ , выбранной перпендикулярно плоскости экрана, так что  $\mathbf{k} = \{k, 0, 0\}$ . Сразу же после отверстия поперечный размер луча станет равным  $d$  и согласно (22.17) у волнового вектора появится компонента  $k_z$  порядка  $d^{-1}$ . Поэтому после отверстия пучок света из параллельного станет расходящимся, с углом раствора  $\theta$  таким, что  $\operatorname{tg} \theta = |k_z|/k = \lambda/2\pi d$ . Мы видим, что расхождение луча ничтожно при  $\lambda \ll d$ , но при

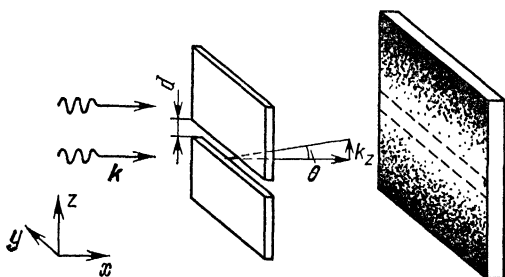


Рис. 22.3.

$\lambda \approx d$  лучи от отверстия будут идти практически во все стороны. Этот результат иллюстрирует пределы применимости геометрической оптики.

Напомним (см. § 7.3 тома I), что если амплитуда изменяется очень слабо на расстояниях порядка длины волны, то волна может быть охарактеризована волновыми

поверхностями. Тогда распространение волны происходит по лучам. Луч — это линия, в каждой своей точке перпендикулярная волновой поверхности, которая пересекается с линией в данной точке. Последние три соотношения (22.17) определяют геометрические свойства лучей. Оказывается, что

*если волна распространяется в однородной области и длина волны пренебрежимо мала в сравнении с характерными размерами области, то лучи прямолинейны. В этом случае распространение волны происходит по законам геометрической оптики.*

Здесь природа волнового процесса не упомянута, потому что данное свойство волн является следствием соотношений неопределенностей, справедливых для волн любой природы. Термин «геометрическая оптика» связан с тем, что первоначально распространение света изучалось в условиях, в которых размеры световых пучков намного превосходили характерную для видимого света длину волны  $\lambda \approx 5 \cdot 10^{-7}$  м.

Не всегда длина волны оказывается бесконечно малой или даже просто малой. Например, это имеет место при распространении радиоволны с длиной  $\lambda = 0,3$  м в волноводе с поперечным размером порядка 0,2 м. В подобных случаях законы геометрической оптики не выполняются.

*Отклонение распространения волн вблизи препятствий от законов геометрической оптики называется дифракцией.*

Если эти отклонения малы (мала, но не пренебрежимо мала длина волны, так что еще не теряет смысла понятие луча), то



дифракция проявляется в искривлении лучей вблизи различных препятствий. Дифракционные явления такого рода будут подробно рассмотрены в следующей главе. Здесь мы затронем только один из вопросов дифракции, а именно установим предел резкости оптических изображений. Пучок света, все лучи которого согласно законам геометрической оптики должны были бы пересечься в одной точке, в действительности дает изображение в виде пятна. В этом проявляется дифракция света. Она происходит потому, что размеры любой оптической системы конечны. Поэтому отношение длины волны света к характерным размерам оптической системы строго нулю не равно (хотя может быть весьма малым). Размер пятна оценивается с помощью упомянутого выше равенства  $\operatorname{tg} \theta = \lambda/2\pi d$ , где под  $d$  теперь следует понимать размер пятна, а под  $\theta$  — угол раствора пучка лучей, которые согласно законам геометрической оптики должны были бы пересечься в одной точке. Обычно угол  $\theta$  мал, так что  $\operatorname{tg} \theta \approx \theta$ . Поэтому оценку размера пятна можно получить по формуле

$$d \approx \frac{\lambda}{\theta}. \quad (22.18)$$

Эта формула применима не только к изображению, но и к светящемуся предмету. В частности, при наблюдении излучаемого точкой пучка света с длиной волны  $\lambda$  эту точку нельзя отличить от тела размером  $\lambda/\theta$ .

Существуют две формы записи не вполне монохроматических колебаний любой физической величины  $a(t)$  \*). Во-первых, согласно математической теореме Фурье величину  $a(t)$  можно представить в виде суперпозиции гармонических колебаний:

$$a(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} a_{\omega} d\omega. \quad (22.19)$$

Величина  $a(t)$  будет описывать колебания, близкие к гармоническим, если  $a_{\omega}$  — функция частоты  $\omega$ , имеющая отчетливый максимум в окрестности определенного значения частоты  $\omega_0$  и быстро спадающая при увеличении  $|\omega - \omega_0|$  (рис. 22.4). В этой форме записи величина  $\Delta\omega$  характеризует ширину пика функ-

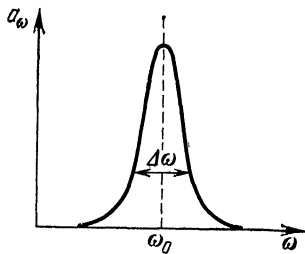


Рис. 22.4.

\*) Для определенности полезно представлять  $a(t)$  как конкретную величину, например считать  $a(t)$  зарядом обкладки конденсатора колебательного контура или, скажем, отклонением шарика на пружинке от положения равновесия.

ции  $a_\omega$ . В разложении (22.19) отчетливо виден частотный состав  $a(t)$ .

Во-вторых, величину  $a(t)$  можно выразить через амплитуду  $a_0(t)$  и фазу  $\psi(t)$ :

$$a(t) = a_0(t) e^{-i\psi(t)}, \quad (22.20)$$

где  $a_0(t)$  и  $\psi(t)$  — действительные функции. В форме (22.20) отчетливо виден процесс развития колебаний во времени. Если обе функции  $a_0(t)$  и  $\psi(t)$  медленно меняются во времени, а  $|\psi(t)| \gg 1$ , то функцию  $\psi(t)$  в экспоненте из (22.20) в окрестности каждого момента времени  $t_0$  можно аппроксимировать ее первыми членами разложения в ряд Тейлора:

$$\psi(t) = \psi(t_0) + (t - t_0) \left. \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|_{t=t_0}.$$

Производная  $\omega(t_0) = \left. \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|_{t=t_0}$  называется мгновенной частотой в момент времени  $t_0$ . Если записанное для  $\psi(t)$  приближение хорошо выполняется, а функция  $\omega(t_0)$

медленно (не обязательно регулярно) меняется с изменением  $t_0$ , оставаясь близкой к фиксированному значению  $\omega_0$ , то говорят, что (22.20) описывает *модулированное колебание с несущей частотой  $\omega_0$* . При этом функции  $a(t_0)$ ,  $\omega(t_0)$  и  $\psi(t_0)$  описывают, соответственно, *амплитудную, частотную и фазовую модуляции*. Эти типы модуляций изображены на рис. 22.5. Модулированные волны играют ключевую роль в радиовещании, где  $\omega_0$  является несущей частотой электромагнитных волн, а, скажем, амплитуда  $a_0(t)$  колеблется с частотами звукового диапазона.

Уже упоминавшаяся теорема Фурье позволяет получить обратное (22.19) соотношение, в котором частотная функция  $a_\omega$  выражается через  $a(t)$ :

$$a_\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} a(t) dt. \quad (22.21)$$

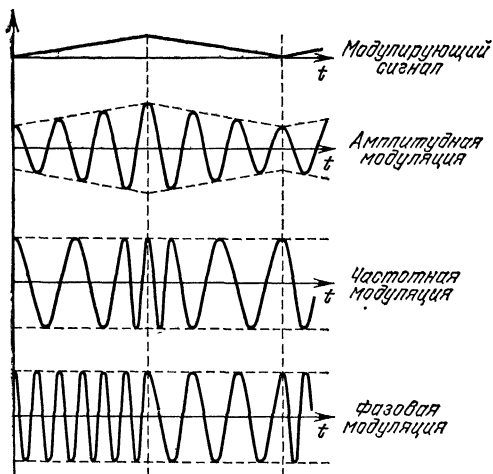


Рис. 22.5.

Для примера получим функцию  $a_\omega$  для затухающего колебания (рис. 22.6), для которого \*)

$$a(t) = a_0 e^{-\frac{\gamma}{2}|t| - i\omega_0 t}. \quad (22.22)$$

Подставив это выражение в (22.21), несложным интегрированием найдем

$$a_\omega = \frac{a_0 \gamma}{2\pi [(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2/4]}. \quad (22.23)$$

Мы видим, что полученная функция  $a_\omega$  имеет максимум при  $\omega = \omega_0$  и ширину пика  $\Delta\omega$  порядка  $\gamma/2$ . Колебание же

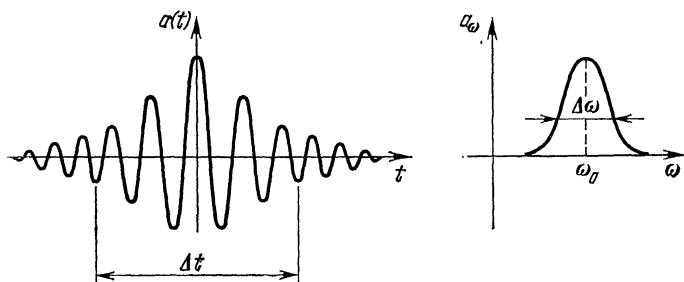


Рис. 22.6.

существует с амплитудой, не малой по сравнению с начальной в течение времени  $\Delta t$  порядка  $2/\gamma$ , что согласуется с соотношением неопределенностей (22.17).

Проведенный анализ соотношения неопределенностей «время — частота» с соответствующим переобозначением терминов применим и к соотношениям неопределенностей «координата — волновой вектор», поскольку математическая природа обоих соотношений одна и та же. Естественность соотношений неопределенностей «координата — волновой вектор» видна из следующего примера. Рассмотрим рис. 22.7. На нем показано моментальное положение пространственно-ограниченного волнового процесса. Область, в которой возбуждены колебания, заштрихована. В каждой точке колебания будут продолжаться в течение времени  $\Delta t$ , по порядку величины равного  $\Delta x/v_{гр}$ , где  $\Delta x$  — размер волны в  $x$ -направлении, а  $v_{гр}$  —  $x$ -компонента групповой скорости (прохождение

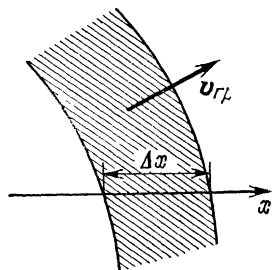


Рис. 22.7.

\*) Для симметрии мы приняли, что функция  $a(t)$  экспоненциально затухает от момента  $t = 0$  в обоих направлениях времени.

волны регистрируется по переносу ее энергии, который происходит с групповой скоростью (см. § 7.4 тома I)). Так как  $k = k(\omega)$ , то интервалу частот  $\Delta\omega$  отвечает интервал значений  $x$ -компоненты волнового вектора

$$\Delta k_x = \frac{dk_x}{d\omega} \Delta\omega = \frac{\Delta\omega}{d\omega/dk_x} = \frac{\Delta\omega}{v_{гр}}.$$

Выражая отсюда  $v_{гр}$ , находим

$$\Delta t \approx \frac{\Delta x}{v_{гр}} = \frac{\Delta x \Delta k_x}{\Delta\omega}.$$

Мы видим, что  $\Delta k_x \Delta x \approx \Delta\omega \Delta t \gtrsim 1$ .

## § 22.2. Излучение электромагнитных волн, их генераторы и способы наблюдения

1. Все электромагнитные поля создаются зарядами и токами.

*В свободном пространстве только ускоренно движущиеся заряды излучают электромагнитное поле.*

Действительно, неподвижный заряд создает только кулоновское поле. Электромагнитных волн в этом случае нет. Согласно принципу относительности их не может быть и в том случае, когда заряд движется равномерно и прямолинейно.

Опишем качественно картину излучения. Рассмотрим простейшую ситуацию, в которой источником излучения является заряженная частица, совершающая колебания. Колебания заряда приводят к колебаниям поля  $\mathbf{E}$  в ближайшей окрестности заряда. Однако изменения электромагнитного поля распространяются в свободном пространстве со скоростью  $c$ . Поэтому на расстоянии  $r$  от заряда изменения поля отстают от колебаний заряда на время  $r/c$ . Следовательно, изменения поля как функции  $r$  будут волнообразными, с длиной волны  $\lambda = 2\pi c/\omega$ . Согласно четвертому уравнению Максвелла (22.1) изменение электрического поля во времени будет порождать магнитное поле  $\mathbf{B}(t)$ , которое в свою очередь будет порождать поле  $\mathbf{E}(t)$  в силу второго уравнения (22.1). Изменения полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ , распространяющиеся в пространстве, и образуют электромагнитную волну, излученную осциллирующим зарядом.

Электрические заряды могут осциллировать с любыми частотами, а уравнения Максвелла для свободных полей имеют решения типа (22.4) и (22.7) тоже с любыми частотами. Поэтому

*частотный спектр электромагнитных волн неограничен.*

Этим электромагнитные волны отличаются, например, от звуковых.

Рассмотрим шкалу электромагнитных волн. Эта шкала показана на рис. 22.8. Как видно, области с различными названиями частично перекрываются. Это перекрытие объясняется тем, что каждая область шкалы электромагнитных волн связана с определенным типом излучателей. Радио- и микроволны \*) (радиодиапазон частот), с которыми чаще всего приходится иметь дело в технике, излучаются переменными токами, протекающими в обычных проводах. Бывают, однако, и исключительные

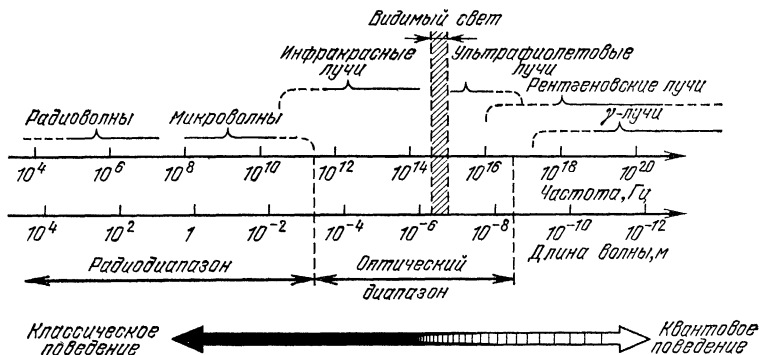


Рис. 22.8.

случаи, когда волны радиочастот создаются микроскопическими системами зарядов, например электронами атомов и молекул. Так, электрон в атоме водорода способен излучать электромагнитную волну с длиной  $\lambda = 0,21$  м. Такой длине отвечает частота  $1,43 \cdot 10^{11}$  Гц, которая принадлежит микроволновому участку радиодиапазона \*\*). Наоборот, начиная с оптического диапазона частот, доминирующую роль начинают играть микроскопические генераторы. К оптическому диапазону принадлежат инфракрасное (ИК) излучение, видимый свет, ультрафиолетовое (УФ) излучение и мягкое рентгеновское излучение (мягким называют рентгеновское излучение низкой частоты). Наиболее распространенными источниками этих видов излучения являются атомы и молекулы. ИК излучение возникает при ускоренном квантовом движении зарядов в молекулах. Это ускоренное

\*) Другое название — сверхчастотные (СВЧ) волны.

\*\*) В несвязанном состоянии атомы водорода находятся в основном в межзвездном газе (на Земле таких атомов очень мало). Каждый из них излучает очень редко: в среднем один раз за 11 миллионов лет. Тем не менее космическое излучение с длиной волны 0,21 м имеет вполне наблюдаемую интенсивность, так как в мировом пространстве рассеяно достаточно много атомарного водорода. Поскольку межзвездные атомы имеют разные скорости вдоль луча зрения, то из-за эффекта Доплера излучение распределено в некоторой полосе частот около  $1,43 \cdot 10^{11}$  Гц. По распределению интенсивности излучения в этой полосе изучают движение межзвездного газа.

движение происходит при вращении молекулы и колебаниях ее атомов. Видимый свет и ультрафиолетовые лучи создаются колебаниями электронов в атомах и ионах. Такую же природу имеет и *характеристическое* рентгеновское излучение. Так оно называется потому, что каждый вид атомов излучает только на своих строго определенных частотах.

Потоки электронов могут порождать рентгеновское излучение. Оно возникает при торможении электронов веществом. Частотный спектр этого излучения непрерывен, а само оно называется *тормозным*.

Наконец,  $\gamma$ -лучи испускаются атомными ядрами при ядерных превращениях и ядерных реакциях. Эти лучи возникают также при некоторых взаимодействиях элементарных частиц. Поведение рентгеновских лучей и  $\gamma$ -лучей квантовое. Эти лучи будут рассмотрены в последнем томе курса.

2. Рассмотрим, как распространяются различные электромагнитные излучения в чаще всего встречающихся условиях.

На распространение радиоволн над земной поверхностью и под ней (в отсутствие специальных направляющих систем типа волноводов) оказывают влияние электродинамические свойства земной коры и атмосферы, а также кривизна земной поверхности и неровности рельефа. Влияние коры связано с тем, что под воздействием волны в коре возбуждаются электрические токи, на что расходуется часть энергии волны. Из-за этих потерь радиоизлучение ослабляется, причем особенно сильно вблизи радиопередатчика. Роль атмосферы определяется наличием в ее верхних слоях плазмы (ионосферы) и веществ, способных поглощать некоторые радиоволны. Наиболее существенна роль ионосферы, которая для всех радиоволн, начиная от сверхдлинных (длина волны  $\lambda \approx 10^4$  м) и до коротких (длина волны  $\lambda \approx 10$  м), является отражающей средой, образующей вокруг Земли своеобразное сферическое зеркало. Оно не пропускает все



Рис. 22.9.

излученные земными радиопередатчиками волны, у которых  $\lambda > 10-15$  м. Такие волны, попеременно отражаясь от ионосферы и поверхности Земли, способны покрывать огромные расстояния и тем самым обеспечивать радиосвязь между удаленными, даже диаметрально противоположными точками земной поверхности (рис. 22.9). Состав атмосферы сказывается в поглощении и рассеянии волн сантиметрового и миллиметрового диапазонов ( $\lambda \approx 10^{-2} - 1$  см). Эти явления главным образом обусловлены присутствием в атмосфере кислорода и паров воды.

Кривизна земной поверхности и неровности рельефа ответственны за дифракционные явления. Благодаря дифракции радиоволны заворачивают за горизонт и могут огибать различные препятствия. Однако заметным образом дифрагируют только длинные волны (у которых  $\lambda \gtrsim 10^3$  м). Более короткие волны распространяются практически прямолинейно и огибают земной шар только благодаря отражениям от ионосферы. Рис. 22.10

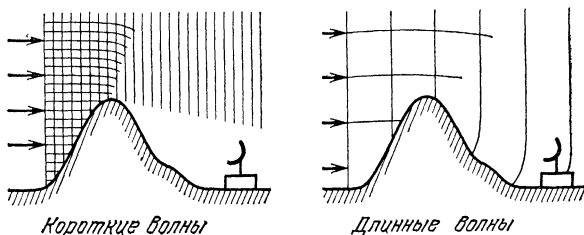


Рис. 22.10.

иллюстрирует различие в поведении длинных и коротких волн, встретивших на своем пути препятствие в виде горной цепи. На рисунке вертикальными линиями изображены волновые поверхности падающей волны. Горизонтальными — волновые поверхности отраженной волны. Как видно, гора отбрасывает «радиотень» в случае коротких волн. А волны, длина которых сравнима с размерами горы, хорошо ее огибают и на горном склоне, противоположном радиостанции, ослабляются незначительно.

Прозрачность ионосферы для волн, длина которых меньше 10 м, позволила обнаружить радиоизлучение, приходящее от внеземных источников. Начиная с сороковых годов нашего столетия бурно развивается радиоастрономия, в задачу которой входит изучение небесных тел по их радиоизлучению.

Выяснилось, что во Вселенной есть удивительные объекты, излучающие в радиодиапазоне огромное количество энергии. К их числу относятся радиогалактики. У некоторых из них поток радиоизлучения в несколько раз превышает поток оптического излучения. Одной из замечательных радиогалактик является объект, получивший название Лебедь А. Невооруженным глазом он вообще не виден. А поток его радиоизлучения сравним с солнечным, хотя Лебедь А находится от нас приблизительно в  $4 \cdot 10^{13}$  раз дальше, чем Солнце! В 1963 г. М. Шмидтом были открыты интенсивные источники радиоизлучения, обладающие очень малыми угловыми размерами (доли секунды). Первоначально их считали особыми звездами нашей Галактики и потому назвали квазизвездными системами или *квазарами*. В дальнейшем выяснилось, что эти объекты внегалактического происхождения. Их природа пока до конца не раскрыта. 1967 г. был ознаменован еще одним замечательным радиоастрономическим открытием. Были обнаружены объекты, излучающие строго периодические импульсы радиоволн. Эти объекты были названы *пульсарами*. Сейчас считается, что пульсары представляют собой быстро вращающиеся нейтронные звезды. Плотность вещества пульсара сравнима с плотностью вещества внутри атомного ядра.

Успехи радиоастрономии неразрывно связаны с созданием более совершенных радиотелескопов: увеличиваются размеры их антенн, и повышается чувствительность их приемников. Один из современных радиотелескопов-рефлекторов — РАТАН-600 создан в СССР. Его антенна представляет собой кольцо диаметром 600 м. Ширина кольца 7,5 м. РАТАН-600 работает в диапазоне длин волн 0,8—30 см. Столь короткие волны имеют важное преимущество: их распространение можно рассматривать на основе законов геометрической оптики, если антенна имеет размеры, намного превосходящие длину волны. Это условие для РАТАН-600 выполняется (для волн большей длины этого добиться намного сложнее, поскольку нужны антенны еще более грандиозных размеров). При таких соотношениях длин волн и размеров антенн последние выполняют те же функции, что и собирающие зеркала для света. Выполнение законов геометрической оптики позволяет с высокой точностью устанавливать направление регистрируемого радиоизлучения.

Для электромагнитных излучений оптического диапазона ионосфера прозрачна. Поэтому мы видим свет Солнца, звезд и других небесных тел. В системах привычных для нас размеров или более протяженных оптическое излучение всегда распространяется по законам геометрической оптики. Дифракция света начинает проявляться, когда размеры областей распространения становятся порядка или меньше  $10^{-3}$  м (дифрагируют инфракрасные лучи),  $10^{-6}$  м (дифрагируют видимый свет и ультрафиолетовое излучение). Свет не «замечает» атомистичности строения окружающих нас предметов, поскольку длины волн оптического диапазона превосходят (и обычно очень много) размеры атомов. Это означает, что для световых волн обычные вещества являются сплошными средами. Микроскопическую структуру вещества начинают «чувствовать» только рентгеновские и  $\gamma$ -лучи. Их длина волны может быть не только сравнима с атомными размерами, но и меньше. Поэтому эти лучи могут дифрагировать на кристаллической решетке.

3. Перечислим основные методы регистрации электромагнитных волн разных диапазонов.

*В основе всех способов регистрации лежит преобразование энергии электромагнитного излучения в другие виды.*

В радиодиапазоне это делается с помощью антенн. Каждая антенна — это провод или система проводов. Электромагнитная волна раскачивает их электроны проводимости, создавая таким образом переменный ток. В этом случае энергия излучения превращается в энергию электрического тока. Обычно антенну облучают одновременно волны многих частот. Выделение сигнала, пришедшего только с волнами определенной частоты, осуществляется с помощью настраиваемых электрических колебательных



контуров (радиоволны) или резонаторов (микроволны). Связь с контуром осуществляется на основе взаимной индукции, а с резонатором — с помощью волновода (рис. 22.11).

Начиная с инфракрасного излучения, для регистрации электромагнитных волн применяются разнообразные приемники. Они подразделяются на тепловые, фотоэлектрические, химические, люминесцентные, ионизационные.

а) Тепловых регистраторов разработано довольно много. В каждом из них поглощенная энергия излучения вызывает нагревание приемного элемента. К числу таких регистраторов принадлежат, например, радиометры, оптико-акустические приемники, термоэлементы, болометры.

Действие радиометра основано на эффекте отталкивания двух пластин, нагретых до разных температур и помещенных в разреженный газ (одна

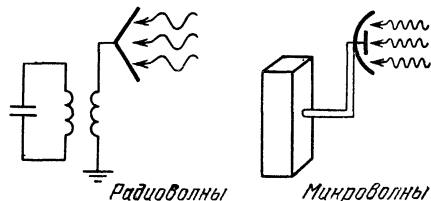


Рис. 22.11.

из пластин нагревается излучением). Отталкивание возникает по следующей причине. Молекулы газа, ударяющиеся о горячую пластину, отскакивают от нее с более высокой кинетической энергией, чем молекулы, взаимодействующие с холодной пластиной. Холодная пластина со стороны, обращенной к горячей, бомбардируется в среднем более энергичными молекулами, чем противостоящая ей сторона другой пластины. Благодаря разнице в импульсах, передаваемых разным сторонам каждой пластины, и возникает эффект отталкивания пластин. Радиометры применяются в астрофизике и в спектроскопии для исследования инфракрасного излучения. Они являются приборами неселективного действия. Это означает, что они не позволяют выделять и отдельно регистрировать частотные составляющие излучения.

Оптико-акустический приемник действует так. Регистрируемое излучение периодически прерывается вращающимся диском с отверстиями. Прошедшие через эти отверстия порции излучения попадают в замкнутую полость, заполненную не поглощающим излучение газом. В полости находится зачерненная пленка, которая в момент прохода излучения нагревается им, а в паузе охлаждается. То же самое происходит и с окружающим газом. Поэтому его давление пульсирует. Колебания давления с помощью микрофона преобразуются в электрический сигнал, который, после усиления, измеряется. Таким способом не удается выделить отдельные частотные составляющие излучения. Есть, однако, оптико-акустические приемники селективного действия. В них поглощающим элементом является сам газ, в

котором возбуждаются колебательно-вращательные степени свободы молекул. Передать им энергию могут волны только строго определенных частот. Этим и обусловлена селективность. Когда поток излучения прерывается, то при столкновениях молекул энергия возбуждения внутренних степеней свободы молекул превращается в энергию их поступательного движения. В результате повышается давление газа. Все остальное происходит так же, как в приборе неселективного действия. Разница лишь в одном: селективный прибор отвечает пульсациями давления только на излучения строго определенных частот. Оптико-акустические селективные приемники широко используются в инфракрасных спектрометрах.

В термоэлементах используется явление возникновения термо-э. д. с. в термопаре (см. § 17.3).

Болометр измеряет энергию излучения по изменению электросопротивления термочувствительного элемента. Эти элементы обычно изготавливаются в виде очень тонких слоев (порядка  $10^{-7}$ — $10^{-6}$  м) различных металлов, поверхность которых покрывается слоем черни, имеющей большой коэффициент поглощения в широкой области частот. Изменение сопротивления приводит к изменению силы тока через включенный в электрическую цепь термочувствительный элемент.

Как термоэлементы, так и болометры не являются селективными регистраторами.

Действие большой группы регистраторов основано на способности излучений, начиная с инфракрасного участка электромагнитного спектра, производить микроскопические воздействия (выбивание электронов, перестройка молекул, их диссоциация, ионизация атомов).

б) В основе действия всех фотоэлектрических регистраторов лежит *фотоэффект*. Он бывает *внешним* и *внутренним*. Внешний фотоэффект — это выбивание светом электронов с поверхности вещества. Внутренний фотоэффект выражается в изменении концентрации носителей тока в полупроводниках и диэлектриках, обусловленном действием света (в металлах внутренний фотоэффект практически неощутим). В отличие от тепловых, фотоэлектрические приемники до некоторой степени селективны. Их действие зависит от частоты излучения, а также от природы облучаемого вещества. У каждого из этих приемников есть длинноволновая граница их чувствительности. На излучение с длиной волны, которая больше граничной, фотоэлектрический приемник не реагирует. Законы фотоэффекта подробно будут рассмотрены в последнем томе курса. Области чувствительности всех современных фотоприемников в совокупности перекрывают весь оптический диапазон. Опишем некоторые из широко применяемых фотоэлементов,

Фотоэлемент с внешним фотоэффектом — это вакуумная или газонаполненная лампа с фотокатодом. Падающий на фотокатод свет выбивает из него электроны. Приложенное к аноду положительное напряжение формирует из выбитых электронов фототок. Он и регистрируется в цепи, в которую включен фотоэлемент (рис. 22.12).

Фотоэлектронный умножитель (ФЭУ) — разновидность фотоэлемента с внешним фотоэффектом, состоящий из фотокатода

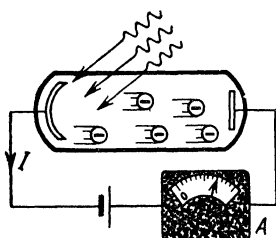


Рис. 22.12.

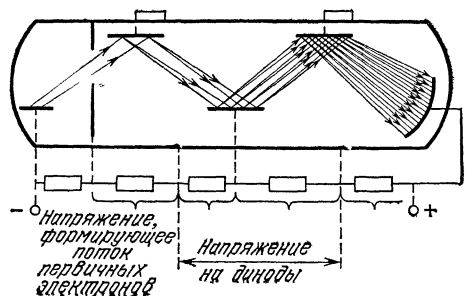


Рис. 22.13.

и системы динодов — электродов, усиливающих поток падающих на них фотоэлектронов за счет явления вторичной электронной эмиссии (рис. 22.13). Благодаря многократному усилению первоначального сигнала ФЭУ является эффективным инструментом для обнаружения и исследования излучений малой интенсивности.

Фотоэлемент с запирающим слоем является полупроводниковым прибором. Его действие основано на следующем явлении. Контакт некоторых полупроводников обладает односторонней проводимостью: ток может идти через контакт только в одном направлении. Поглощая энергию света, электроны начинают совершать односторонние переходы. В результате приведенные в контакт полупроводники приобретают разные потенциалы. Включение такого заряженного элемента в цепь вызовет в последней электрический ток, который и регистрируется. Фотоэлементы с запирающим слоем обладают следующими важными преимуществами. Во-первых, они не нуждаются во внешних источниках напряжения. Иными словами, они являются прямыми преобразователями лучистой энергии в электрическую. Именно поэтому они используются в качестве элементов солнечных батарей. Эти источники применяются, например, для питания бортовой аппаратуры спутников и космических ко-

раблей. Во-вторых, чувствительность элементов с запирающим слоем заметно выше, чем чувствительность элементов с внешним фотоэффектом. Фотоэлементы с запирающим слоем применяются в видимой и в инфракрасной области электромагнитного спектра.

в) В химических приемниках под действием излучений протекают химические реакции: диссоциация молекулярных систем; перегруппировка молекул (состав молекулы остается неизменным, но происходит перемещение отдельных атомов или их групп); присоединение (возбужденная излучением молекула

присоединяет к себе подобную или другую молекулу); перенос заряда внутри- или межмолекулярный; сенсбилизация (иницирование химической реакции путем переноса энергии молекулы, поглотившей энергию излучения, к молекуле, дающей начало реакции).

Химические превращения лежат в основе фотографии. В науке и технике фотография применяется для самых разнообразных целей. Так, с ее помощью можно изучать быстро протекающие процессы, фиксируя их либо на киноплёнке, либо делая моменталь-



Рис. 22.14.

ные снимки. С другой стороны, фотография позволяет получать изображения очень слабых источников излучения, действующих в течение длительного времени. Изображение получается путем длительной экспозиции. Этот метод наблюдения широко применяется в астрономии. Именно таким образом была получена фотография радиогалактики Лебедь А (рис. 22.14). Фотография широко применяется для регистрации невидимых излучений — инфракрасных лучей (длины волн не более  $1,2 \cdot 10^3$  нм), ультрафиолетового, рентгеновского и  $\gamma$ -излучений.

В основе зрения также лежат фотохимические процессы. Достигая сетчатки глаза, свет поглощается светочувствительными веществами (родопсин, или зрительный пурпур, в палочках и

идопсин в колбочках \*). Продукты разложения вызывают раздражение зрительного нерва. По нему проходят электрические импульсы, которые попадают в мозг и вызывают ощущение света. Зрительный нерв имеет разветвления по всей поверхности сетчатки. Поэтому характер раздражения зависит от мест, в которых произошло фотохимическое разложение. Благодаря этому мы и обладаем способностью визуально различать предметы, т. е. видеть.

г) Действие люминесцентных приемников основано на явлении *люминесценции*. Люминесценция — это собственное, неравновесное излучение тел. Собственный характер излучения отличает люминесценцию от отраженного и рассеянного света. Неравновесностью люминесценция отличается от теплового излучения, которое порождается частицами тела, например молекулами, возбужденными тепловым движением. Для возникновения люминесценции требуется источник энергии, отличной от равновесной внутренней энергии данного тела. В частности, энергия может сообщаться телу благодаря облучению видимым светом, ультрафиолетовым, рентгеновским и  $\gamma$ -излучениями \*\*). Возникающая в этих случаях люминесценция и позволяет осуществлять регистрацию этих излучений. Особенностью люминесценции является сдвиг ее спектра относительно спектра возбуждающего излучения в сторону низких частот. Поэтому люминесцентный приемник может визуализировать невидимое электромагнитное излучение. Например, люминесцентное свечение может возникнуть (и часто возникает) под действием ультрафиолетовых лучей. Люминесценция может продолжаться значительное время после прекращения возбуждения, вплоть до нескольких часов. Длительное люминесцентное свечение принято называть *фосфоресценцией*. Фосфоресцирует, например, порошок сернистого цинка, который светится под действием рентгеновских лучей. Фосфоресцирующие материалы являются хорошими регистраторами короткоживущих излучений \*\*\*).

---

\*) Сетчатка — слой задней поверхности глаза. Она имеет в центре желтое пятно, которое обеспечивает наивысшую остроту зрения. На периферических частях сетчатки размещены удлинённые образования — палочки. Ближе к желтому пятну находятся другие образования — колбочки. Они названы так по своему внешнему виду. Более чувствительны к свету палочки. Менее чувствительны колбочки. Но последние реагируют не только на свет, но и воспринимают различие цветов. При слабом освещении главную роль играют палочки (сумеречное зрение). При ярком освещении зрительный пурпур в палочках быстро выцветает. Работают только колбочки.

\*\*) Это — не единственные источники возбуждения. Люминесценция может возникать при облучении потоками различных частиц (электроны, протоны, нейтроны, ионы и др.), при воздействии пламени и химических реакциях, в газовом разряде.

\*\*\*) Фосфоресценция имеет и другие применения. Так, фосфоресцирующие порошки используются при изготовлении ламп дневного света. Свечение, ко-

д) Действие ионизационных регистраторов основано на способности УФ излучения, рентгеновского и  $\gamma$ -лучей ионизировать атомы и молекулы. Возникшие в результате ионизации ионы и электроны регистрируются, например, в камере Вильсона или пузырьковой камере (см. § 12.3 тома I). Наблюдаются, соответственно, капельки или пузырьки, образующиеся вокруг ионов.

### § 22.3. Механизм электромагнитного излучения

1. Большинство естественных и искусственных источников электромагнитного излучения удовлетворяют условию

$$d \ll \lambda, \quad (22.24)$$

где  $d$  — линейный размер области, в которой генерируется излучение (т. е. области, в которой имеются ускоренно движущиеся заряды), а  $\lambda$  — длина волны излучения. Это же условие может быть представлено в виде

$$v \ll c, \quad (22.24a)$$

где  $v$  — средняя величина скорости зарядов. Действительно, если  $T$  — период излучения, то  $\lambda = cT$ , а  $d$  имеет порядок  $vT$ , что и приводит к эквивалентности неравенств (22.24) и (22.24a). Электроны в атомах имеют скорости, не превышающие  $0,01 c$ . Электроны проводимости в антеннах движутся со скоростями, также не превышающими  $0,01 c$  \*). Мы видим, что в этих практически важных случаях условие (22.24a) выполняется.

Источник электромагнитного монохроматического излучения, удовлетворяющий условию (22.24), называется *диполем Герца*, если он обладает электрическим дипольным моментом  $p(t)$ , гармонически зависящим от времени:

$$p(t) = p_0 e^{-i\omega t}. \quad (22.25)$$

Детали распределения зарядов и токов в диполе Герца не играют роли, поскольку характеристики излучения от этих де-

---

торое возникает в газосветных лампах в результате электрического разряда, обычно содержит много ультрафиолетовых лучей, оказывающих вредное воздействие на глаз. Внутренние покрытия из специальных фосфоресцирующих материалов преобразуют ультрафиолетовое излучение в видимый свет, делая лампы безвредными и более экономичными по сравнению с лампами накаливания. В последних в энергию видимого света превращается примерно в три раза меньше электрической энергии. Кроме того, подбирая состав фосфоресцирующих веществ, можно улучшать спектральный состав излучаемого света, приближая его к естественному дневному освещению.

\*) Антенны направленного действия в коротковолновом и микроволновом радиодиапазонах могут иметь размеры порядка и даже больше  $\lambda$ . Но их можно рассматривать как систему из многих источников обсуждаемого нами типа (см. ниже § 23.3).

талей не зависят. Для наглядности можно, например, считать, что диполь состоит из покоящегося отрицательного заряда  $-q$  и положительного заряда  $+q$ , гармонически колеблющегося вдоль направления  $\mathbf{p}$  с амплитудой  $d = |\mathbf{p}_0|/q$  и частотой  $\omega$ .

Область расстояний до диполя Герца, больших по сравнению с длиной волны,

$$r \gg \lambda, \quad (22.26)$$

называется *волновой зоной*. В волновой зоне поле имеет более простую структуру, чем на расстояниях порядка  $\lambda$  и меньше. Это упрощение возникает по двум причинам. Во-первых, на больших расстояниях волна в окрестности каждой точки с высокой точностью близка к плоской, так что мы можем применять соотношения из § 22.1, п. 1, в частности формулы (22.10) с  $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ , где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, соединяющий точку наблюдения с диполем Герца. Во-вторых, в волновой зоне практически остаются только оторвавшиеся от диполя, свободно распространяющиеся поля, в то время как поля, колеблющиеся вместе с диполем (не дающие потока энергии наружу), сосредоточены в области расстояний  $r \leq \lambda$ .

Представление об удаленности волновой зоны для некоторых широко распространенных случаев излучения дают следующие цифры. Приемник, расположенный на расстоянии 3 км от радиостанции, ведущей передачу на частоте  $10^7$  Гц (длина волны  $\lambda = 30$  м), находится в волновой зоне. Всякая оптическая система, удаленная от излучающих видимый свет ( $\lambda \approx 10^{-6}$  м) атомов на расстояние всего лишь в 0,1 мм, также находится в волновой зоне.

Решения уравнений Максвелла для полей диполя Герца в волновой зоне имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} [[\ddot{\mathbf{p}}(t') \mathbf{n}] \mathbf{n}], \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3 r} [\ddot{\mathbf{p}}(t') \mathbf{n}], \end{aligned} \quad (22.27)$$

где  $t' = t - r/c$ , а точки над  $\mathbf{p}$  означают дифференцирование по времени:  $\ddot{\mathbf{p}} = d^2\mathbf{p}/dt^2$ .

Поясним естественность выражений (22.27). Линейная зависимость  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  от  $\mathbf{p}$  следует из линейности уравнений Максвелла. Пропорциональность полей второй производной  $d^2\mathbf{p}/dt^2$  следует из того, что излучают только ускоренные заряды, а не покоящиеся или движущиеся равномерно. Векторная структура  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  согласуется с (22.10). Наконец, пропорциональность каждого поля величине  $1/r$  приводит к тому, что вектор Пойнтинга (15.18) пропорционален  $1/r^2$ , так что полный поток энергии излучения через сферу любого радиуса  $r$  с центром в месте нахо-

ждения диполя Герца не зависит от величины  $r$ . Это согласуется с законом сохранения энергии: полная энергия, прошедшая за любое время через сферу радиуса  $r_1$ , за тот же промежуток времени пройдет и через сферу радиуса  $r_2 > r_1$ .

Очень медленное (как  $1/r$ ) спадание с расстоянием полей излучения диполя Герца является причиной того, что электромагнитное излучение способно распространяться на огромные расстояния. Именно из-за этого медленного спадания мы видим глазом свет от звезд, хотя ни одна из них не находится к нам ближе чем на  $3 \cdot 10^{16}$  м.

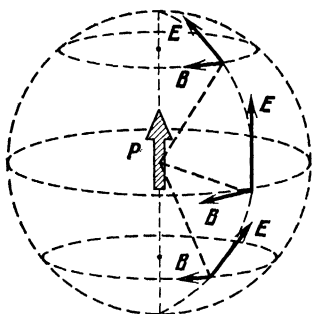


Рис. 22.15.

О характере полей (22.27) можно судить по рис. 22.15. На нем показаны поля  $E$  и  $B$  в трех различных равноудаленных от излучателя (дипольный момент  $p$ ) точках, расположенных на разных направлениях. Как видно  $E$ ,  $B$  и  $p$  образуют тройку взаимно перпендикулярных векторов. При этом излучение максимально в экваториальной плоскости (она выбрана перпендикулярной  $p$ ), уменьшается с возрастанием широты и совсем отсутствует в направлениях на полюсы (вдоль дипольного момента).

2. Выведем выражения (22.27). Мы знаем, что векторный потенциал  $A(r)$ , создаваемый плотностью стационарных токов  $j(r)$ , равен (см. (16.21))

$$A(r) = \frac{1}{-4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{j(r') dV'}{|r - r'|}.$$

При переходе к потенциалу  $A(r, t)$ , создаваемому диполем Герца в волновой зоне, только что написанное выражение для  $A$  изменится следующим образом. Во-первых, потенциал будет зависеть от времени:  $A = A(r, t)$ . Во-вторых, в силу условий (22.24), (22.26) плотность тока  $j$  отлична от нуля только при  $r' \ll \lambda$ , а  $r \gg \lambda$ . Поэтому всегда  $r' \ll r$ , так что в знаменателе под интегралом можно положить  $|r - r'| = r$ . В-третьих, ток тоже будет зависеть от времени, но от запаздывающего на время  $r/c$  распространения сигнала от диполя до точки  $r$ :  $j = j(r, t')$ , где  $t' = t - r/c$ . В результате для  $A(r, t)$  получаем

$$A(r, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \int j(r', t') dV'.$$

Но согласно (16.42)

$$\int j(r', t') dV' = \dot{p}(t'),$$

так что

$$A(r, t) = \frac{\dot{p}(t)}{4\pi\epsilon_0 c^2 r}.$$

Для получения магнитной компоненты поля излучения нужно вычислить ротор найденного векторного потенциала. При этом надо учесть, что этот



векторный потенциал зависит только от абсолютной величины радиус-вектора  $r$  точки наблюдения. Поэтому при вычислении  $\left[\frac{\partial}{\partial r} \mathbf{A}\right]$  мы можем применить правило дифференцирования сложной функции, но, конечно, с сохранением векторного умножения:

$$\left[\frac{\partial}{\partial r} \mathbf{A}\right] = \left[\frac{\partial r}{\partial r} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial r}\right].$$

Из равенства  $\frac{\partial}{\partial r}(r^2) = 2r = 2r \frac{\partial r}{\partial r}$  для первого сомножителя получаем

$$\frac{\partial r}{\partial r} = \frac{r}{r} = \mathbf{n}.$$

Применяя правила дифференцирования произведения и дифференцирования сложной функции  $\frac{d\mathbf{p}}{dr} = \frac{d\mathbf{p}}{dt'} \frac{dt'}{dr}$  и сохраняя только член, который наиболее медленно убывает с возрастанием  $r$ , находим

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\mathbf{p}(t')}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \dot{\mathbf{p}}(t') + \frac{1}{rc} \ddot{\mathbf{p}}(t') \approx \frac{1}{rc} \ddot{\mathbf{p}}.$$

Подставляя оба вычисленных сомножителя в выражение  $\mathbf{B} = \left[\frac{\partial}{\partial r} \mathbf{A}\right]$  для магнитного поля, получаем вторую из формул (22.27). Первая из этих формул теперь следует из (22.10).

3. Вычислим интенсивность излучения диполя Герца. По определению (15.18) поток энергии электромагнитного излучения равен вектору Пойнтинга  $\mathbf{\Pi} = \epsilon_0 c^2 [\mathbf{E}\mathbf{B}]$ . Для приложений более важным, чем сам вектор Пойнтинга, является поток  $dI/d\Omega$  энергии излучения, отнесенный к единице телесного угла в заданном направлении. Величина  $dI/d\Omega$  характеризует угловое распределение энергии излучения. Поток  $dI$ , приходящийся на телесный угол  $d\Omega$ , называется *дифференциальной интенсивностью излучения* в телесном угле  $d\Omega$ . Для сферы радиуса  $r$  элемент сферы  $dS$  с нормалью  $\mathbf{n}$ , вырезанный телесным углом  $d\Omega$ , равен  $dS = nr^2 d\Omega$ . Поэтому  $dI = (\mathbf{\Pi} dS) = (\mathbf{\Pi} \mathbf{n}) r^2 d\Omega$  или, что то же самое,  $dI/d\Omega = (\mathbf{\Pi} \mathbf{n}) r^2$ . Подставляя в  $\mathbf{\Pi}$  поля излучения (22.27) (считается, что центр сферы совмещен с диполем Герца (рис. 22.16)) и раскрыв все векторные произведения, получим

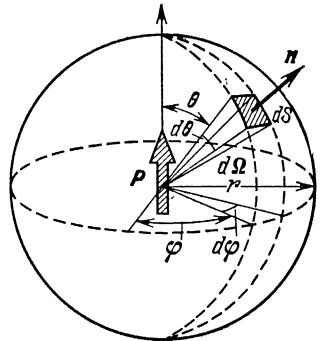


Рис. 22.16.

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{\ddot{\mathbf{p}}^2(t') \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3}. \quad (22.28)$$

Здесь  $\theta$  — угол между ориентацией диполя Герца и  $\mathbf{n}$  (рис. 22.16). Вектор  $\mathbf{p}(t')$  должен быть в действительной форме:  $\mathbf{p}(t') =$

$= p_0 \cos \omega t'$ , так как этот вектор входит в формулу (22.28) в квадрате. Очевидно, что  $\ddot{\mathbf{p}}(t') = -\omega^2 \mathbf{p}(t')$ , так что  $\ddot{\mathbf{p}}^2(t') = \omega^4 p_0^2 \cos^2 \omega t'$  и интенсивность излучения

$$dI = \frac{\omega^4 p_0^2 \sin^3 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} d\theta d\varphi \cos^2(\omega t').$$

Здесь мы расписали  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ . Усредним теперь интенсивность излучения  $dI$  по времени одного периода колебаний. В этом случае  $\cos^2(\omega t') = 1/2$ , так что

$$\overline{dI} = \frac{\omega^4 p_0^2 \sin^3 \theta}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} d\theta d\varphi. \quad (22.29)$$

Интегрируя (22.29) по углам (по  $\varphi$  от 0 до  $2\pi$ ; по  $\theta$  от 0 до  $\pi$ ), получаем полную среднюю интенсивность излучения диполя Герца:

$$\overline{I} = \frac{\omega^4 p_0^2}{12\pi \epsilon_0 c^3}. \quad (22.30)$$

Интегральная величина  $\overline{I}$  равна расходу энергии в диполе Герца в единицу времени на излучение. Дифференциальная величина  $d\overline{I}$  определяет мощность электромагнитного сигнала на входе приемного устройства, расположенного в пределах телесного угла  $d\Omega$ . Как видно из (22.29), эта мощность резко растет с ростом частоты (пропорционально  $\omega^4$ ). Именно поэтому высокочастотные генераторы гораздо эффективнее низкочастотных \*).

Отметим, наконец, что в системе СГС в (22.28)—(22.30) коэффициенты иные: в (22.28) и (22.29) вместо  $1/16\pi^2 \epsilon_0$  появляется множитель  $1/4\pi$ , а в (22.30) коэффициент  $1/12\pi \epsilon_0$  заменяется на множитель  $1/3$ .

\*) Однако на заре развития радиосвязи более важной представлялась способность длинных волн дифрагировать и таким образом, обходя различные препятствия, достигать удаленных приемников. Эти соображения потеряли значение после обнаружения отражения коротких (но не короче 10 м) радиоволн от ионосферы.

## ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

## § 23.1. Когерентность

1. В этом параграфе мы будем рассматривать как сами колеблющиеся величины (например, поле  $\mathbf{E}$  в электромагнитной волне, рассматриваемой в фиксированной точке пространства), так и их квадраты (главной будет интенсивность, которая согласно (22.16) пропорциональна квадрату поля  $\mathbf{E}$ ). Поэтому во всем параграфе будет использоваться только действительная запись колеблющейся величины, чтобы каждый раз не проделывать операцию взятия действительной части при возведении в квадрат. Предметом этого параграфа является свойство *когерентности*.

*Когерентность является общим свойством для линейных колебаний и волн любой природы.*

Поэтому, чтобы не загромождать изложение деталями, сначала мы изложим сущность когерентности на простейшем примере колебаний физической величины  $a(t)$  без конкретизации ее физического содержания.

Все методы регистрации колебаний в физических системах со многими степенями свободы (например, акустических колебаний) основаны на измерении энергии колебаний. Каждое измерение производится не мгновенно, а занимает конечное время  $\Delta t$ . Это время определяется возможностями измерительной аппаратуры и обычно намного превосходит период колебаний  $T$ :

$$\Delta t \gg T. \quad (23.1)$$

Энергия колебаний пропорциональна квадрату колеблющейся величины  $a(t)$  (см., например, (7.14) тома I). Поэтому экспериментально измеряется среднее значение за время  $\Delta t$  величины  $a^2(t)$ . Это среднее значение будет называться *измеряемой интенсивностью* колебания и обозначаться через  $\bar{I}$ :

$$\bar{I} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} a^2(t') dt'. \quad (23.2)$$

Рассмотрим гармоническое колебание с частотой  $\omega$ , амплитудой  $a_0$  и начальной фазой  $\alpha$  (для сокращения  $\alpha$  будет называться просто фазой):

$$a(t) = a_0 \cos(\omega t + \alpha). \quad (23.3)$$

Для такого колебания при условии  $\Delta t \gg T = 2\pi/\omega$  измеряемая интенсивность

$$\bar{I} = \frac{a_0^2}{2}, \quad (23.4)$$

так как среднее значение  $\overline{\cos^2(\omega t + \alpha)}$  по времени, намного превышающему период колебания  $T = 2\pi/\omega$ , равно  $1/2$ .

Пусть теперь колебание, записанное в виде (23.3), является суммой двух гармонических колебаний  $a_1(t) + a_2(t)$  той же частоты с амплитудами  $a_{10}$ ,  $a_{20}$  и фазами  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ :

$$a(t) = a_{10} \cos(\omega t + \alpha_1) + a_{20} \cos(\omega t + \alpha_2).$$

Для измеряемой интенсивности  $\bar{I}$  такого суммарного колебания, после несложных тригонометрических преобразований и усреднения по времени  $\Delta t \gg T$ , получим

$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_{12}, \quad (23.5)$$

где  $\bar{I}_1$ ,  $\bar{I}_2$  — измеряемые интенсивности складываемых колебаний, а

$$\bar{I}_{12} = a_{10}a_{20} \cos(\alpha_1 - \alpha_2) = 2\sqrt{\bar{I}_1\bar{I}_2} \cos(\alpha_1 - \alpha_2). \quad (23.6)$$

Слагаемое  $\bar{I}_{12}$  согласно (23.5) является причиной отличия измеряемой интенсивности суммарного колебания от суммы измеряемых интенсивностей  $\bar{I}_1 + \bar{I}_2$  складываемых колебаний. Согласно (23.6) величина  $\bar{I}_{12}$  зависит от разности фаз  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  и может иметь любой знак. Это означает, что

*при суперпозиции двух гармонических колебаний одинаковой частоты измеряемая интенсивность результирующего колебания может оказаться как больше, так и меньше суммы измеряемых интенсивностей исходных колебаний.*

Из (23.6) видно, что измеряемая интенсивность  $\bar{I}$  суммарного колебания максимальна при разности фаз  $\alpha_1 - \alpha_2 = 2n\pi$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) и равна  $(\sqrt{\bar{I}_1} + \sqrt{\bar{I}_2})^2$ . При разности фаз  $\alpha_1 - \alpha_2 = 2\pi(n + 1/2)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) измеряемая интенсивность  $\bar{I}$  минимальна и равна  $(\sqrt{\bar{I}_1} - \sqrt{\bar{I}_2})^2$ .

*Сложение колебаний или волн, при котором измеряемая интенсивность суммарного колебания или суммарной волны не равна сумме измеряемых интенсивностей складываемых колебаний или складываемых волн, называется интерференцией.*

Интерференция называется *конструктивной*, если в (23.5)  $I_{12} > 0$ , т. е. если  $I > I_1 + I_2$ , и *деструктивной* при  $I_{12} < 0$ , т. е. если  $I < I_1 + I_2$ .

2. Реальные колебания никогда не являются строго гармоническими, а реальные волны никогда не являются строго плоскими и строго монохроматическими. Для не вполне гармонических колебаний  $I_1$  и  $I_2$  мало меняются, если за время усреднения  $\Delta t$  гармоничность колебаний нарушается не сильно. Иначе ведет себя величина  $I_{12}$  в суммарной измеряемой интенсивности. При условии (23.1) даже небольшие (случайные или систематические) отклонения от гармоничности могут привести к уничтожению интерференции, т. е. к обращению величины  $I_{12}$  в нуль. Причина этого явления будет объяснена ниже. Пока ограничимся указанием на то, что при условии (23.1) измеряемая интерференционная интенсивность  $I_{12}$  для реальных колебаний (и волн) может заметно отличаться от нуля только при соблюдении определенных условий.

*Способность реальных колебаний или волн интерферировать называется их когерентностью. Две волны или несколько волн являются когерентными, если при их суперпозиции наблюдается интерференция.*

Обратим внимание на то, что в определении когерентных волн отмечено *не существование, а наблюдение интерференции*. Это означает, что наличие или отсутствие когерентности зависит не только от характеристик самих волн (или колебаний), но и от промежутка времени  $\Delta t$  регистрации интенсивности. Одна и та же пара волн (или колебаний) может быть когерентной при одном времени  $\Delta t$  и некогерентной при другом.

Приведем простейший пример, иллюстрирующий сделанное замечание. Рассмотрим суперпозицию двух низкочастотных акустических одинаково направленных монохроматических волн в воде с равными амплитудами и с частотами  $\omega$  и  $\omega + \Delta\omega$ , очень близкими друг к другу:  $\Delta\omega \ll \omega$ . Пусть измеряемая интенсивность колебания регистрируется в точке  $r = 0$ . За каждый период  $T = 2\pi/\omega$  разность фаз этих двух волн будет возрастать на  $T \Delta\omega$ . Тем самым эта разность фаз будет изменяться на  $\pi$  через каждые  $\pi/T \Delta\omega = \omega/2\Delta\omega$  периодов (рис. 23.1). За это же число периодов величина  $a(t)$  будет попеременно меняться от нуля до максимального значения и обратно. Это уже известное из § 7.4 тома I явление биений колебаний. Из приведенного рассмотрения следует, что частота биений равна  $\Delta\omega$ . Если время измерения  $\Delta t_1$  интенсивности колебания меньше периода биений  $T_6 = 2\pi/\Delta\omega$ , но больше периода колебаний  $T$  ( $T_6 \gg \Delta t_1 \gg T$ ), то измеряемая интенсивность  $I$  будет содержать интерференционный член. В этом случае волны когерентны. Если же время измерения  $\Delta t_2$  интенсивности колебания намного больше

периода биений ( $\Delta t_2 \gg T_6$ ), то все интерференционные эффекты усреднятся, так что измеряемая интенсивность будет постоянной (см. рис. 23.1) и равной сумме измеряемых интенсивностей складываемых волн.

Для акустических волн частоты имеют порядки от десятков до тысяч Гц, так что частоты биений могут иметь значения от одного до сотни Гц. Соответственно периоды биений  $T_6$  (от 1 до

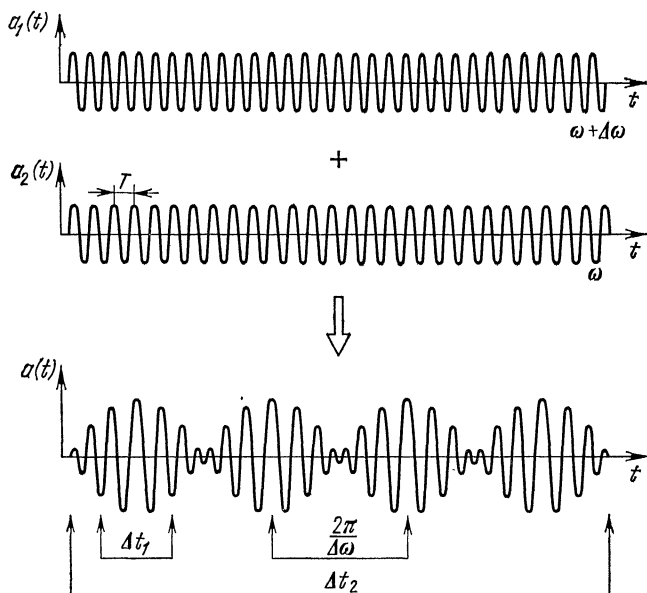


Рис. 23.1.

$10^{-2}$  с) достаточно велики, чтобы свободно измерять интенсивность за времена, значительно меньшие  $T_6$ . Поэтому звуковые волны нетрудно генерировать когерентными. Ниже мы увидим, что в отношении электромагнитных волн ситуация существенно иная из-за их более высоких частот.

3. Проведем анализ условий существования когерентности, ограничиваясь простейшим случаем колебаний физической величины  $a(t)$ . Эта величина может описываться как волновой процесс (в фиксированной точке), так и колебательный. Ниже мы будем говорить только о волнах, потому что вопросы когерентности чаще всего возникают в отношении электромагнитных волн.

Назовем реальную волну почти монохроматической, если она близка к монохроматической с некоторой частотой  $\omega_0$ . Бли-

зость означает, что функция  $a_\omega$  в разложении Фурье (22.19) \*) величины  $a(\omega)$  имеет резкий максимум при  $\omega = \omega_0$  и быстро спадает по обе стороны от этого максимума. Типичная кривая  $a_\omega$  такого типа изображена на рис. 23.2. Частота  $\omega_0$  является несущей. Ширина  $\gamma$  пика  $(a_\omega)_{\max}$  на половине его высоты называется *шириной частотного распределения*. В оптике эту величину называют *шириной спектральной линии* или просто *шириной линии*. Величина  $\gamma$  обычно принимается за количественное определение неопределенности  $\Delta\omega$  частоты волнового процесса \*\*).

Рассмотрим теперь суперпозицию

$$a(t) = a_1(t) + a_2(t)$$

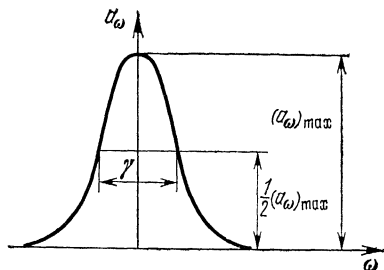


Рис. 23.2.

двух почти монохроматических волн с одной и той же несущей частотой  $\omega_0$ , с фазами  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  и с ширинами линий  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Для определенности выберем обозначения так, чтобы было  $\gamma_1 \geq \gamma_2$ . Поскольку  $\gamma_1 = \Delta\omega_1$ , а  $\gamma_2 = \Delta\omega_2$ , то первая волна является суперпозицией волн с частотами в области  $\omega_0 \pm \gamma_1/2$ , а вторая — суперпозицией волн с частотами в области  $\omega_0 \pm \gamma_2/2$ . Поэтому в суммарной волне начнутся биения с частотами от нуля до  $\gamma_2$  (см. пример в конце предыдущего пункта). Средний период  $T_0$  этих биений имеет порядок  $2\pi/\gamma_2$ . Поэтому через промежутки времени порядка  $\tau_{\text{ког}} = 2\pi/\gamma_2$  когерентность волн  $a_1(t)$  и  $a_2(t)$  практически исчезнет. Каждая из монохроматических волн, составляющих  $a_1(t)$  и  $a_2(t)$ , будет иметь свою фазу, так что средняя разность фаз по всем парам монохроматических волн обратится в нуль. Поэтому интенсивность  $I(t) = \overline{a^2(t)}$ , измеряемая за время  $\Delta t \ll \tau_{\text{ког}}$ , будет содержать интерференционное слагаемое  $I_{12}(t)$ , отличное от нуля, так что две волны  $a_1(t)$  и  $a_2(t)$  будут когерентными. Если же время измерения  $\Delta t > \tau_{\text{ког}}$ , то  $I_{12}(t) = 0$  и волны будут некогерентными. Характерный промежуток  $\tau_{\text{ког}}$  называется *временем когерентности*. Дадим его определение.

*Временем когерентности двух или нескольких волн называется максимальный промежуток времени, при усреднении по которому еще наблюдается эффект интерференции.*

\*) Это разложение существует и для действительной функции  $a(t)$ , поскольку она является частным случаем комплексной. При действительной функции  $a(t)$  величина  $a_\omega$  комплексна, но такова, что  $a_\omega^* = a_{-\omega}$ .

\*\*) Существуют и другие количественные определения  $\Delta\omega$ , приводящие к значениям, совпадающим по порядку величины с только что приведенным.

Согласно приведенной выше оценке

$$\tau_{\text{кор}} = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{1}{\Delta\nu}, \quad (23.7)$$

где  $\Delta\omega$  — ширина общей части частотных распределений волн, образующих суперпозицию.

Теорема Фурье, выражаемая преобразованиями (22.19) и (22.21), дает возможность рассмотрения любого свойства суперпозиции колебаний на двух эквивалентных языках — частотном (через  $a_\omega$ ) и временном (через  $a(t)$ ). Ввиду важности и трудности понятия когерентности повторим теперь анализ механизма разрушения когерентности во временной картине. Колебания  $a_1(t)$  и  $a_2(t)$  можно записать в форме

$$\begin{aligned} a_1(t) &= a_{10}(t) \cos(\omega_0 t + \alpha_1), \\ a_2(t) &= a_{20}(t) \cos(\omega_0 t + \alpha_2). \end{aligned}$$

Поскольку оба колебания почти монохроматичны, то функции  $a_{10}(t)$ ,  $a_{20}(t)$  плавно зависят от времени, т. е. каждая из них почти постоянна на протяжении одного периода  $T = 2\pi/\omega_0$ . Но на протяжении времени, значительно превышающем  $T$ , функции  $a_{10}(t)$  и  $a_{20}(t)$  могут существенно измениться, например обратиться в нуль или даже изменить знак. Интерференционное слагаемое в измеряемой интенсивности для суммы рассматриваемых волн имеет вид

$$\overline{I_{12}(t)} = 2\overline{a_{10}(t) a_{20}(t) \cos(\alpha_1 - \alpha_2)}.$$

Для всех реальных излучателей волн существует такое минимальное время  $\tau_{\text{кор}}$ , что при усреднении по промежутку  $\Delta t > \tau_{\text{кор}}$  будет

$$\overline{a_{10}(t) a_{20}(t)} = 0,$$

так что  $\overline{I_{12}(t)} = 0$ . Время существования ненулевой величины  $\overline{I_{12}(t)}$  и является временем когерентности. Как мы увидим ниже, обращение в нуль среднего значения  $\overline{a_{10}(t) a_{20}(t)}$  происходит в силу одной из двух причин. Во-первых, согласно первому соотношению неопределенностей частота — время (см. (22.17)) функции  $a_{10}(t)$  и  $a_{20}(t)$  могут заметно отличаться от нуля только в течение промежутков времени порядка, соответственно,  $\tau_1 = 1/\gamma_1$  и  $\tau_2 = 1/\gamma_2$ . Если эти промежутки времени не пересекаются, то  $\overline{a_{10}(t) a_{20}(t)} = 0$  еще до усреднения. Во-вторых, каждая из величин  $a_{10}(t)$  и  $a_{20}(t)$  может испытывать случайные плавные изменения, называемые *шумовыми*. В этом случае время когерентности имеет порядок среднего периода нерегулярных шумовых колебаний. В любом случае две волны когерентны



при

$$\Delta t \ll \tau_{\text{ког}}, \quad (23.8)$$

некогерентны при

$$\Delta t \gg \tau_{\text{ког}} \quad (23.9)$$

и частично когерентны при

$$\Delta t \approx \tau_{\text{ког}}, \quad (23.10)$$

где  $\Delta t$  — время усреднения.

*Интерференцию когерентных волн можно рассчитывать, считая их монохроматическими. Для некогерентных волн интерференционные эффекты отсутствуют. Для частично когерентных волн интерференционные эффекты существуют, но являются более слабыми, чем для монохроматических волн.*

Наряду с временем когерентности вводится еще понятие *длины когерентности*.

*Длиной когерентности называется расстояние, при прохождении которого две или несколько волн утрачивают когерентность.*

Из этого определения следует, что, например, для электромагнитных волн в вакууме длина когерентности

$$l_{\text{ког}} = c\tau_{\text{ког}}. \quad (23.11)$$

4. До сих пор рассматривалась когерентность волн, которые отличаются от плоских монохроматических только разбросом по частотам. Каждая из этих волн всюду имеет точно фиксированное направление  $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$  волнового вектора  $\mathbf{k}$  и строго фиксированную поляризацию. Первое означает, что поперечные размеры волны бесконечны: в каждый момент времени значение, например, вектора  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  электромагнитной волны одинаково во всех точках плоскости, перпендикулярной  $\mathbf{n}$ . В реальных волнах волновой вектор  $\mathbf{k}$  не имеет строго определенного направления прежде всего потому, что волны всегда имеют конечные поперечные размеры. Поэтому в силу соотношений неопределенностей размер — волновой вектор (22.17) для волны поперечного размера  $r$  поперечные компоненты  $k_{\perp}$  ее волнового вектора будут иметь разброс  $\Delta k_{\perp} \approx 1/r$  вокруг нулевого значения. Другой причиной разброса направлений волнового вектора может оказаться конечность углового размера  $\theta$  источника излучения. Если этот размер невелик, т. е.  $\theta \ll 1$ , то, очевидно,

$$\theta \approx \frac{\Delta k_{\perp}}{k}. \quad (23.12)$$

*Максимальное поперечное направлению распространения волны расстояние, на котором возможно проявление интерференции, называется радиусом когерентности.*

Радиус когерентности будет обозначаться через  $r_{\text{ког}}$ . Величина  $r_{\text{ког}}^2 l_{\text{ког}}$  называется *объемом когерентности*. В полной аналогии с (23.7) по порядку величины

$$r_{\text{ког}} = \frac{2\pi}{\Delta k_{\perp}}. \quad (23.13)$$

Интерференция волн с конечными поперечными размерами (т. е. с не строго фиксированными направлениями распространения) возможна только при соблюдении условия

$$r \ll r_{\text{ког}} = \frac{2\pi}{\Delta k_{\perp}}, \quad (23.14)$$

где  $r$  — поперечное расстояние между складываемыми волнами.

Когерентность, определяемая временем когерентности, называется *временной когерентностью*. Когерентность, определяемая радиусом когерентности, называется *пространственной когерентностью*.

В качестве примера оценим минимально возможный радиус когерентности для солнечных лучей. Согласно (23.12) и (23.13), если величина  $r_{\text{ког}}$  определяется только угловым размером источника, то, учтя, что  $k = 2\pi/\lambda$ , получим  $r_{\text{ког}} = \lambda/\theta$ . В этом случае критерий (23.14) принимает вид

$$r \ll \lambda/\theta. \quad (23.14a)$$

На Земле угловой размер Солнца примерно равен  $10^{-2}$  радиана. Средняя длина волны солнечного света имеет порядок  $5 \cdot 10^{-7}$  м. Отсюда следует, что по порядку величины  $r_{\text{ког}} = 0,05$  мм. Столь малый радиус когерентности затрудняет наблюдение интерференции солнечных лучей, особенно если учесть, что разрешающая способность человеческого глаза на расстоянии наилучшего зрения (250 мм) составляет лишь 0,1 мм.

Тем не менее исторически первое наблюдение интерференции было проведено с солнечным светом Т. Юнгом в 1807 г. Для увеличения  $r_{\text{ког}}$  Юнг пропустил солнечный свет в темную комнату через отверстие, сделанное острой иглой. Этим он на несколько порядков уменьшил угловой размер источника света и тем самым резко увеличил радиус когерентности.

В заключение этого пункта отметим, что для интерференции необходимо и совпадение поляризаций интерферирующих лучей. Исторически экспериментальное доказательство отсутствия интерференции двух лучей с перпендикулярными плоскостями поляризации (и когерентных в остальных отношениях) послужило решающим аргументом в пользу существования свойства поперечности световых волн (Д. Араго и О. Френель, 1819 г.).

5. Рассмотрим когерентные свойства различных источников электромагнитных волн. Начнем с искусственных источников.

В искусственных излучателях почти монохроматических волн возникновение ширины  $\Delta\omega$  обусловлено различного рода шумами. Их вызывают тепловые флуктуации каких-либо величин, случайные помехи и др. Эти шумы можно уменьшить до очень низкого уровня во всем радиодиапазоне и оптическом диапазоне вплоть до близкого ультрафиолетового излучения. Так, в радиодиапазоне создаются антенны, для излучения которых отношение  $\Delta\omega/\omega$  имеет порядок  $10^{-12}$  и даже меньше, так что два передатчика практически всегда когерентны, если сигнал на них подается от общего источника. При этом модуляция сигнала при радиовещании не нарушает когерентность, поскольку функции  $a_{10}(t)$  и  $a_{20}(t)$  в выражении для  $I_{12}$  одинаковы или пропорциональны друг другу. Любая крупная передающая антенна составлена из большого количества когерентных диполей Герца. Длины когерентности радиоволн тоже могут быть очень велики. Например, на длине волны  $\lambda = 3$  м достижимо отношение  $\Delta\omega/\omega \approx 10^{-10}$ , так что  $l_{\text{ког}} \approx 10^{10}$  м. Возможны генераторы радиоволн с длиной когерентности, превышающей размеры Солнечной системы. Ослабление когерентности радиоволн среднего и короткого диапазонов может происходить лишь тогда, когда в место приема приходит несколько сигналов, прошедших разные пути с многократными отражениями от ионосферы и от земной поверхности. Это явление действительно наблюдается при приеме от удаленных станций и называется *замиранием радиосигналов*. При замирании мощность звука в приемнике изменяется случайным образом.

В микроволновом диапазоне источниками почти монохроматических волн служат *мазеры*, в диапазонах от инфракрасного до близкого ультрафиолетового — *лазеры*. Подробнее о свойствах этих генераторов будет сказано в следующем параграфе. Сейчас лишь отметим, что для мазеров и лазеров времена и длины когерентности тоже очень велики. Так, длины когерентности порядка километров типичны для стандартных лазеров непрерывного действия. Предел увеличения реальной длины когерентности обусловлен не возможностями лазерной техники, а турбулентными неоднородностями атмосферы, искажающими фазы интерферирующих лучей.

Для дальнего ультрафиолетового и более высокочастотных диапазонов искусственные источники почти монохроматических волн не созданы.

Естественным источником электромагнитного излучения является любое нагретое тело. При повышении температуры мощность излучения растет, его распределение по частотам сдвигается в сторону высоких частот. Так, раскаленное железо интенсивно испускает видимый свет.

Еще в середине прошлого столетия было установлено, что спектральный (т. е. частотный) состав излучения нагретых тел является не непрерывным, а дискретным\*). При этом атомы одноатомных газов каждого сорта испускают свет только на определенных узких участках частот. Эти участки называются спектральными линиями. Каждая линия характеризуется ее положением  $\omega$  и шириной  $\Delta\omega$ . Спектральный состав излучения молекул газов тоже состоит из отдельных линий. Но этих линий у излучения молекул значительно больше, чем у излучения атомов. Еще сложнее спектры жидкостей и твердых тел. Типичные ширины спектральных линий атомов имеют порядки  $10^8$  Гц (в пересчете на  $\Delta\nu = \Delta\omega/2\pi$ ). Это на много порядков меньше самих частот, но на много порядков больше ширины спектральных линий того же диапазона частот, генерируемых лазерами.

С микроскопической точки зрения источниками излучения нагретых тел являются возбужденные атомы и молекулы. Возбужденный атом испускает порцию излучения обычно в оптическом диапазоне частот или близких к нему участках электромагнитного спектра. Эта порция называется *цугом*. Колебания в цуге ширины  $\gamma$  близки к описываемым формулой (22.22), которая в действительной форме имеет вид

$$a(t) = a_0 e^{-\frac{\gamma}{2}|t|} \cos \omega_0 t$$

и описывает затухающие колебания, изображенные на рис. 22.6. В соответствии с теоремой Фурье частотное распределение для такого цуга выражается формулой (22.23):

$$a_\omega = \frac{a_0 \gamma}{2\pi [(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2/4]}.$$

Длительность цуга имеет порядок  $10^{-8}$  с. Эта длительность и равна времени когерентности излучения возбужденных атомов  $\tau_{\text{ког}} \approx 10^{-8}$  с. Соответственно для атома длина когерентности  $l_{\text{ког}} \approx 3$  м. Нередок разброс на порядок в обе стороны. Малость времени когерентности приводит к тому, что наблюдать интерференцию разных нелазерных источников света невозможно. Интерферировать могут только волны одного и того же цуга. Поэтому

*для нелазерного света интерференцию получают только для волн одного и того же источника.*

В противоположность этому, интерференция световых лучей от двух разных лазеров возможна и наблюдалась экспериментально.

---

\*) Объяснение дискретности частотного спектра излучения атомов и молекул возможно только на основе квантовых представлений и будет дано в томе III.

Процесс излучения света атомами и молекулами существенно квантовый. Он будет рассмотрен в следующем томе. Если считать электрон вращающимся вокруг ядра по классической круговой траектории, то этот электрон будет иметь центростремительное ускорение и поэтому будет излучать, как всякий ускоренно движущийся заряд. Излучение можно оценить по формуле (22.30). Оно получается настолько мощным, что электрон за время порядка  $10^{-10}$  с должен упасть на ядро из-за потерь энергии на излучение. Только двигаясь по квантовым законам, электрон может находиться на расстояниях порядка  $10^{-10}$  м от ядра, не падая на него.

6. Сформулируем условия интерференции световых волн, испускаемых возбужденными атомами и молекулами. Как уже говорилось, интерферировать могут только волны, испущенные одним и тем же источником, но пришедшие в место наблюдения разными путями. Пусть плоская волна распространяется вдоль оси  $x$  и в точке  $x = 0$  создает колебания типа

$$a(t) = a_0(t) \cos \omega t,$$

где  $a_0(t)$  — плавная функция, обращающаяся в нуль при  $|t| > \tau_{\text{ког}}$ , т. е. в нашем случае при времени, превышающем длительность пуга. В пустоте волна распространяется со скоростью  $c$ . Поэтому в точке  $x$  функция  $a(t)$  превратится в  $a(t - x/c)$ :

$$a\left(t - \frac{x}{c}\right) = a_0\left(t - \frac{x}{c}\right) \cos(\omega t - kx),$$

где  $k = \omega/c$ . Если две волны были получены из одной ее разделением \*) и потом соединены так, что до точки наблюдения одна волна прошла путь  $x_1$ , а другая —  $x_2$ , то усредненное интерференционное слагаемое в наблюдаемой интенсивности будет равно

$$\bar{I}_{12} = \overline{a_0\left(t - \frac{x_1}{c}\right) a_0\left(t - \frac{x_2}{c}\right)} \cos k(x_1 - x_2).$$

Разность  $l = x_1 - x_2$  длин путей, по которым две волны от одного источника пришли в одну и ту же точку, называется *разностью хода волн*. Величину  $\bar{I}_{12}$  можно переписать так:

$$\bar{I}_{12} = \overline{a_0(t') a_0\left(t' + \frac{l}{c}\right)} \cos kl, \quad (23.15)$$

где  $t' = (t - x/c)$  — время, отсчитываемое от момента  $x/c$ . Из (23.15) следуют такие выводы. Если разность хода  $l$  имеет порядок длины волны или даже нескольких длин волн, то плавные

\*) Методы такого разделения будут описаны в § 23.3.

функции  $a_0(t')$  и  $a_0(t' + l/c)$  практически одинаковы, так что при усреднении по времени  $\Delta t'$  будет

$$\overline{a_0(t') a_0\left(t' + \frac{l}{c}\right)} \cos kl = \overline{a_0^2(t')} \cos kl.$$

Это означает, что при  $l \ll l_{\text{ког}}$  эффект интерференции будет таким же, как и для монохроматических волн. Если же  $l > l_{\text{ког}}$ , т. е. в нашем случае если разность хода больше длины цуга, то будет

$$a_0(t') a_0\left(t' + \frac{l}{c}\right) = 0$$

*даже до усреднения.* Это означает, что при  $l > l_{\text{ког}}$  интерференции не будет. Поскольку для света атомных спектральных линий  $l_{\text{ког}}$  имеет порядок метра, то мы приходим к выводу, что *интерференцию двух или несколько световых лучей от одного источника наблюдать можно, но лишь на путях, не превышающих метровых.*

## § 23.2. Оптические и микроволновые квантовые генераторы

1. В настоящее время созданы генераторы электромагнитного излучения принципиально нового типа — *лазеры* (оптический диапазон частот) и *мазеры* (микроволновый участок радиодиапазона) \*). Другое их название — *квантовые генераторы*. Квантовые генераторы создают направленное когерентное излучение (с высокой степенью монохроматичности, строго определенной фазой и плоской поляризацией), интенсивность которого может быть очень высокой. Область физики, в которой изучаются явления, происходящие в квантовых генераторах, называется *квантовой электроникой*. В ее развитие внесли выдающийся вклад Н. Г. Басов, А. М. Прохоров, Т. Мейман, Ч. Таунс, Р. В. Хохлов. Первый квантовый генератор (мазер на пучке молекул аммиака, дающий излучение на длине волны, близкой к 1,27 см) одновременно и независимо был разработан в 1954 г. в СССР Н. Г. Басовым и А. М. Прохоровым и в США Ч. Таунсом, Дж. Гордоном и Х. Цейгером.

Принцип действия квантовых генераторов основан на явлении усиления монохроматического электромагнитного излучения во многих прозрачных средах (газах, жидкостях, твердых телах

\*) Слово «лазер» (laser) составлено из первых букв слов английского словосочетания «light amplification by stimulated emission of radiation», которое в переводе означает «усиление света с помощью вынужденного излучения». Мазер — это термин, составленный таким же образом, что и лазер, только первым словом соответствующей английской фразы является не «light» (свет), а «microwave» (микроволна).

и плазме), находящихся в так называемых *состояниях с инверсной заселенностью*. Объяснение физических свойств таких состояний требует привлечения понятий квантовой физики и будет дано в следующем томе курса. Здесь мы ограничимся перечислением свойств состояний с инверсной заселенностью. а) Состояния с инверсной заселенностью являются термодинамически сильно неравновесными. Поэтому для их поддержания необходимо постоянное воздействие на вещество. Такое воздействие называется *накачкой*. Вещество, которое подвергается такому воздействию, называется *рабочим*. б) В каждом конкретном состоянии с инверсной заселенностью усиливаются волны на одной или на нескольких частотах. в) Усиление волны происходит когерентно, т. е. с сохранением ее частоты, волнового вектора, фазы и поляризации.

Генератор не может действовать без обратной связи. Обратная связь в квантовом генераторе заключается в том, что часть усиленного излучения остается в рабочем веществе генератора и подвергается повторному когерентному усилению. В мазерах устройствами обратной связи являются электромагнитные резонаторы, размеры которых близки к длине волны излучения. В результате отражения электромагнитного поля от стенок резонатора оно в течение некоторого времени задерживается в резонаторе (возникают стоячие электромагнитные волны), что и осуществляет обратную связь в мазере. В лазерах используются оптические резонаторы. Каждый оптический резонатор — это система зеркал, удерживающая свет в определенном объеме. Размеры оптических резонаторов варьируются в широких пределах, но они всегда на много порядков больше длины волны излучения. Поэтому в оптических резонаторах свет распространяется по законам геометрической оптики. В связи с этим вовсе не обязательно, чтобы оптический резонатор был замкнутой полостью. Обычно он является открытым. В простейшем случае это система двух плоских и параллельных друг другу зеркал (в реальных системах одно из зеркал слегка вогнутое). Свет, распространяющийся перпендикулярно зеркалам, за счет отражений многократно проходит вперед и назад, оставаясь в рабочем веществе лазера. Одно из зеркал делается полупрозрачным, что необходимо для вывода части излучения наружу. Эта часть и является излучением лазера (рис. 23.3).

С расщеплением волны на выходящую наружу и на остающуюся в рабочем веществе квантового генератора связано условие, налагаемое на величину усиления. Необходимо, чтобы усиление света на одном проходе было достаточно большим, чтобы скомпенсировать излучение, вышедшее за одно отражение из лазера. Это усиление не может быть меньше некоторого значения, которое называется *пороговым*. Очевидно, что чем меньше

коэффициент отражения полупрозрачного зеркала, тем большим пороговым усилением должно обладать рабочее вещество.

2. Лазерное излучение обладает свойствами, которых нет ни у одного из излучений оптического диапазона электромагнитного спектра, получаемых с помощью обычных (не лазерных) источников. Главные особенности лазерного излучения заключаются в его высокой монохроматичности, направленности,

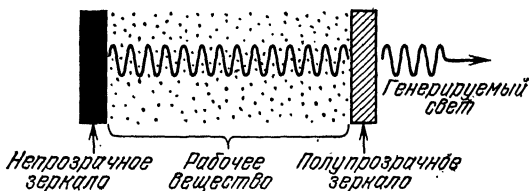


Рис. 23.3.

когерентности. Получены лазерные пучки света, угол расходимости которых составляет всего лишь  $10\text{--}20''$ . Самые же совершенные прожекторы дают пучки света с углом в  $1$  и  $2^\circ$ . Время когерентности лазерного излучения достигает секунд. Это в  $10^8$  раз больше времени когерентности излучения обычного источника! Пространственная когерентность у выходного отверстия лазера сохраняется по всему сечению луча. С помощью лазера удастся получить свет, объем когерентности которого в  $10^{17}$  раз превышает объем когерентности световых волн той же интенсивности, полученных от самых монохроматических нелазерных источников света. Лазеры позволяют создавать излучения, интенсивности которых достигают огромных значений. Так, лазер может излучать непрерывно с каждого квадратного сантиметра выходного окна  $100$  Вт. Чтобы таким же образом излучало нагретое тело, его температура должна быть порядка  $10^{12}$  градусов. В связи с этим понятие тугоплавкости вещества по отношению к лазерному лучу теряет смысл. При достаточной интенсивности лазерный луч плавит и обращает в пар любое вещество.

Приведем примеры некоторых лазеров. На рис. 23.4 дана фотография одного из распространенных лазеров, в котором рабочим веществом является газ Ne с небольшой примесью He. Гелий-неоновый лазер излучает непрерывно на длине волны  $6328$  Å (красный свет). Выходная мощность его излучения невелика. Она варьируется в пределах от  $10^{-2}$  до  $10^{-1}$  Вт. Зато стабильность частоты излучения очень высока: ее значение порядка  $10^{-10}$ . Гелий-неоновые лазеры широко используются в различных оптических измерительных приборах, а также в качестве элемента настройки для мощных лазеров.



Другой лазер, дающий мощный и непрерывный поток излучения (до 500 Вт), показан на рис. 23.5. В этом лазере рабочим веществом является углекислый газ  $\text{CO}_2$  с примесями азота  $\text{N}_2$  и гелия He. Лазер на  $\text{CO}_2$  излучает непрерывно на длине волны  $1,06 \cdot 10^{-5}$  м (инфракрасное излучение). Лазеры на углекислом

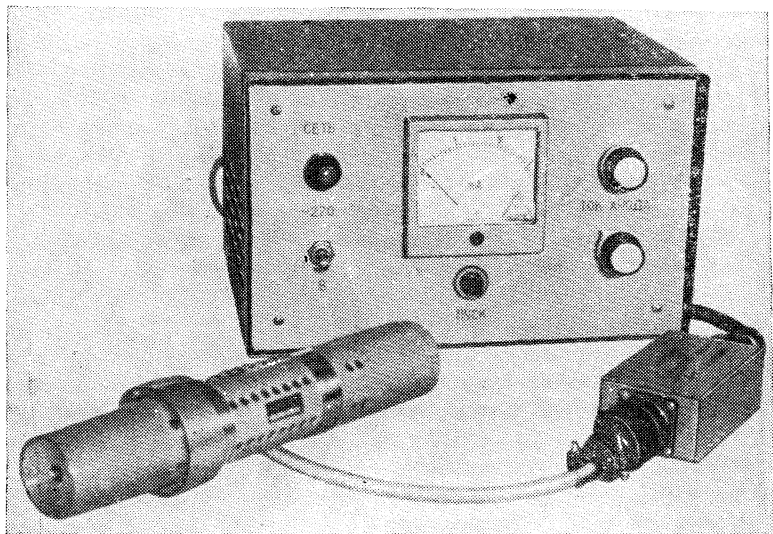


Рис. 23.4.

газе, работающие в импульсном режиме, могут развивать мощность до  $10^5$  Вт в одном импульсе. Мощные лазеры на  $\text{CO}_2$  можно с успехом применять для резки и сварки металлов, для световой локации (см. ниже), а также в качестве мощных источников инфракрасного излучения.

С созданием лазеров открылись совершенно новые возможности применения световых волн в науке и технике. Вот некоторые перспективы применения лазерного излучения.

В настоящее время радиопередачи ведутся на волнах в диапазоне частот от  $10^5$  до  $10^7$  Гц. Для трансляции же телевизионных программ несущая частота не может быть меньше  $10^8$  Гц. Это связано с тем, что для передачи речи и музыки достаточен относительно небольшой частотный интервал: от 1 до  $2 \cdot 10^4$  Гц. Для передачи же видеосигнала необходим гораздо больший интервал — шириной порядка  $10^6$  Гц. Такому частотному интервалу просто негде разместиться, если несущая частота недостаточно высока (см. § 22.1). Частота световых волн в миллионы раз превосходит те частоты, которые сейчас используются в

телевидении. Поэтому использование лазерного излучения для связи позволит на несколько порядков увеличить число каналов: луч когерентного света может нести одновременно многие тысячи телепрограмм, не говоря уже о радиопередачах и телефонных разговорах. О преимуществах светового канала связи по сравнению с радиоканалом можно судить по следующей цифре: с помощью радиоволн, используемых в телевидении в настоящее время, можно передавать одновременно не более

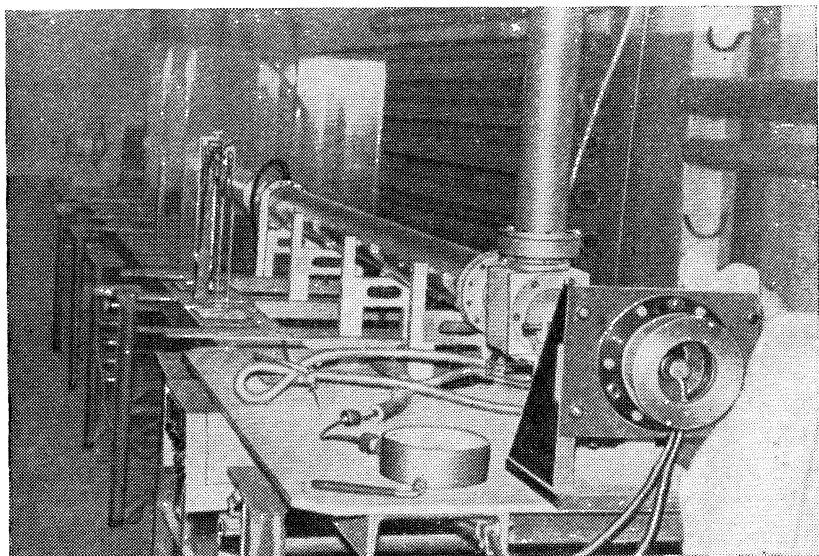


Рис. 23.5.

30 программ. Применение лазеров для связи затруднено тем, что еще не разработаны достаточно эффективные способы модуляции света, а также искажениями формы световых сигналов при прохождении их через атмосферу с турбулентным движением воздуха.

Световая связь и световая локация (определение местоположения различных объектов с помощью света) обладают еще одним важным преимуществом. Чем больше частота (меньше длина волны), тем более точной может быть направленность излучения. Это следует из соотношений неопределенностей размер — волновой вектор. Если  $d$  — поперечный размер излучения в непосредственной близости от источника излучения, то согласно (22.17) величина поперечной компоненты волнового вектора  $k_{\perp}$  будет иметь порядок  $k_{\perp} \approx 1/d$ . Но  $k_{\perp}/k = \operatorname{tg} \theta$ , где

$\theta$  — угол расходимости излучения. Поэтому  $\operatorname{tg} \theta \approx 1/kd = \lambda/2\pi d$ . Отсюда видно, что чем меньше  $\lambda$ , тем меньше расходимость. Поэтому с ростом расстояния от излучателя «растекание» энергии по поперечному сечению излучения в радиодиапазоне происходит несравненно быстрее, чем в оптическом. Это означает, что с помощью света можно резко увеличить концентрацию

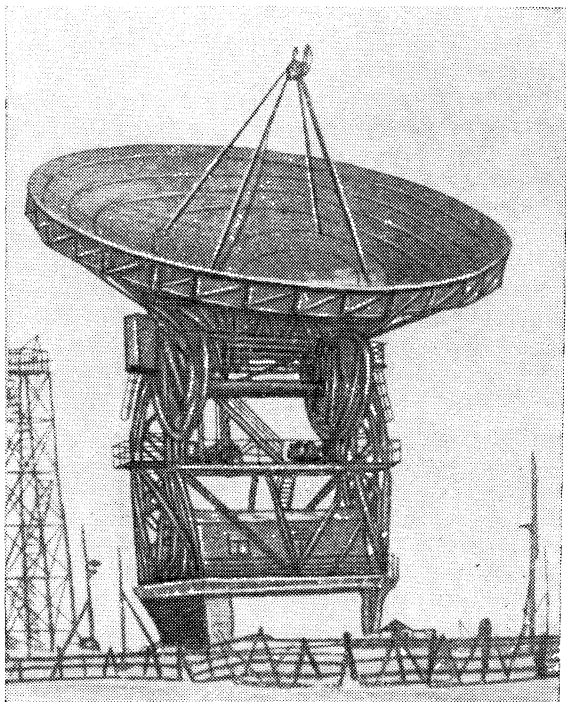


Рис. 23 6

энергии излучения в заданном направлении. Приведем пример. Антенна радиотелескопа Физического института Академии наук СССР (г. Серпухов) имеет вид зеркальной чаши диаметром 22 м (рис. 23.6). Пусть в фокусе зеркала установлен излучатель радиоволн с длиной волны  $\lambda = 1$  м. Зеркало превращает излучение в направленный пучок (рис. 23.7). Но идеальной параллельности его лучей добиться нельзя. Как только что было установлено, угол расходимости  $\theta$  по порядку величины можно оценить из приближенного равенства

$$\operatorname{tg} \theta \approx \frac{\lambda}{d},$$

где  $d$  — диаметр зеркала. Подставляя сюда  $\lambda = 1$  м и  $d = 22$  м, находим  $\theta \approx (1/22)$  рад  $= 2,6^\circ$ . Поэтому диаметр «радиопятна» на облучаемой планете  $D = d + 2L \operatorname{tg} \theta$ , где  $L$  — расстояние до планеты. Например, для Луны  $L \approx 300\,000$  км. В этом случае  $D \approx 30\,000$  км, что намного превосходит диаметр Луны. Следовательно, на Луну попадает только очень малая доля излучаемой с Земли электромагнитной энергии. Поэтому отраженный

от Луны радиосигнал имеет ничтожную интенсивность. Это ограничивает точность и возможности радиолокации Луны.

Для световой волны с  $\lambda = 10^{-6}$  м зеркало с диаметром 0,1 м дает угол расходимости  $\theta \approx 10^{-5}$  рад. Поэтому на такой длине волны освещенное на Луне пятно будет иметь диаметр всего лишь в 3 км. При этом энергетические потери будут относительно малы, а отраженный сигнал во много раз более интенсивен. Впервые локация Луны с помощью лазерного излучения была осуществлена в 1962 г. Лазерное

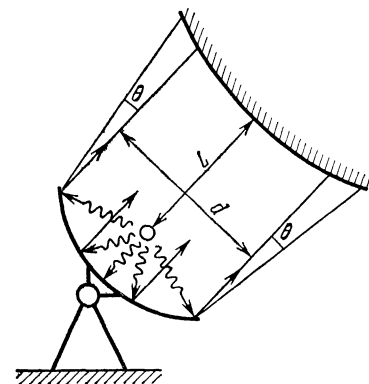


Рис. 23.7.

картографирование Луны с поверхности Земли может быть осуществлено с прецизионной точностью (около 1,5 м).

Монохроматичность и направленность лазерного излучения позволяет существенно повысить точность измерений и дальность действия геодезических приборов. До появления лазеров в геодезии применялись светодальномеры с обычными источниками света. Немонохроматичность и изменение спектра сигнала, обусловленное, например, различными атмосферными явлениями, приводят к погрешности в измерении скорости света в атмосфере, а тем самым и к ошибке в определяемом расстоянии. Угловая расходимость обычного светового пучка ограничивает дальность действия светодальномеров. В лазерных же дальномерах благодаря очень малой расходимости луча (до  $10^{-20}$  рад) дальность действия существенно повышается. Например, расстояние до 20 км можно измерять с точностью до  $10^{-6}$ — $10^{-7}$  в любое время суток.

Свойство очень узкой направленности пучка лазерного излучения позволяет применять его для космической связи. По оценкам, с помощью существующих лазеров можно осуществить связь на расстояниях до  $10^{16}$  м.

Очень важными являются вопросы фокусировки электромагнитных волн. Высокая монохроматичность и направленность ла-

зерного излучения позволяют фокусировать его в пятно очень малой величины, приближающееся к длине волны излучения. Поэтому можно достигать высокой концентрации энергии на малой площади. В технике это открывает возможности использования электромагнитной энергии для решения таких вопросов, как резка металлов и обработка различных материалов. В биологии и медицине сфокусированным лазерным излучением можно облучать отдельные клетки, проводить очень тонкие и сложные операции (например, в глазу, не нарушая его цельности). Сфокусированный лазерный луч является чрезвычайно острым и стерильным скальпелем. Обнадеживающие результаты получены при исследовании способности лазерного излучения воздействовать на злокачественные опухоли; соединять небольшие кровеносные сосуды, снабжающие кровью сердце и мозг, без остановки потока крови; прекращать кровотечение; выжигать раны.

Мощные оптические потоки из лазеров при взаимодействии с веществом приводят к различным новым физическим эффектам. Вот некоторые из них.

Световой поток плотности  $10^{10}$ — $10^{12}$  Вт/м<sup>2</sup> (такая плотность вполне достижима для непрерывно излучающих лазеров), падая на непрозрачную твердую мишень, вызывает интенсивное испарение вещества. Температура оказывается заметно больше критического значения для фазового перехода твердое тело — газ. Образующиеся пары расширяются со скоростью, сравнимой со скоростью звука в них. В результате мишени сообщается импульс отдачи. По массе и скорости истечения паров, а также импульсу отдачи можно определить некоторые важные характеристики вещества, например энергию испарения на один атом или критическую точку вещества (см. § 12.2 тома I). Испарение, вызванное лазерным облучением, имеет важное значение для разработки технологии обработки металлов при помощи лазеров.

Под действием лазерного потока плотности порядка  $10^{15}$  Вт/м<sup>2</sup> (такие потоки создают лазеры, излучающие импульсами) первоначально прозрачный газ становится непрозрачным\*). В результате свет начинает интенсивно поглощаться, что приводит к нагреванию газа и его ионизации. Происходит пробой газа. В фокусе лазерного пучка образуется сгусток плазмы — искра. Эта искра растет в направлении к лазеру, что может происходить в результате возникновения ударной волны в момент образования искры. Распространяясь навстречу лучу, ударная волна также ионизирует газ, облегчая условия для пробоя. Поэтому

---

\*) Механизм этого явления мы обсудим в последнем параграфе следующей главы.

искра асимметрична. Новые порции газа, сжатые и разогреты ударной волной, также становятся непрозрачными для излучения, которое поглощается в них и тем самым поддерживает движение волны. В других направлениях волна быстро затухает. Процессы, сопровождающие образование световой искры, происходят в результате мгновенного выделения энергии в очень малой области. Это явление называется точечным взрывом. Точечный взрыв — это гидродинамическая модель ядерного взрыва.

Предпринимаются попытки осуществить разогрев плазмы лазерным лучом до температур порядка  $10^8$  К, при которых уже может возникнуть термоядерная реакция.

В § 24.4 будут описаны лазеры с плавно перестраиваемой частотой излучения. Такие лазеры широко используются в спектроскопических исследованиях.

Здесь отмечены далеко не все возможности применения когерентного оптического излучения. О некоторых из них мы еще будем говорить ниже. Но уже по тому, что было сказано, можно без преувеличения утверждать, что появление квантовых генераторов произвело подлинную революцию в оптике и в ее научно-технических приложениях.

### § 23.3. Интерференционные явления

1. Явление интерференции волн состоит в том, что в волновой зоне интенсивность излучения системы из двух или нескольких излучателей, действующих на одной и той же несущей частоте, в определенных направлениях не равна сумме интенсивностей отдельных излучателей. При этом интегральный поток энергии остается равным сумме мощностей излучателей, так что интенсивность при интерференции перераспределяется по разным направлениям.

Исследование интерференционных явлений проводится довольно просто, если выполнены критерии (23.8), (23.14), соответственно, временной и пространственной когерентности. На практике обычно интерференция наблюдается и используется именно в таких условиях. Мы тоже ограничимся интерференцией когерентных электромагнитных волн. В этом случае волну в области регистрации излучения можно считать монохроматической и плоской. Поэтому интенсивность интерференции можно рассчитывать по формулам (23.5), (23.6) для двух излучателей и по аналогичным формулам — для нескольких излучателей. Из (23.6) видно, что результат интерференции двух волн зависит от одного параметра — разности фаз  $\alpha_1 - \alpha_2$  между складываемыми волнами. Эту разность фаз вычисляют через разность хода волн  $l$ . В пустоте путь  $l$  волна проходит за время  $l/c$ . За

это время фаза сдвигается на  $\omega l/c$ . Поэтому, обозначив  $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ , получим

$$\alpha = \omega l/c. \quad (23.16)$$

Таким образом, расчет интерференционной картины сводится к проверке выполнения условий когерентности, вычислению разностей хода и по ним — разностей фаз. После этого интенсивность вычисляется по формулам типа (23.5), (23.6). Именно так будет рассмотрена интерференция радиоволн в следующем пункте. При осуществлении интерференции и расчете интенсивности волн оптического диапазона возникают дополнительные обстоятельства, которые будут изложены в п. 3.

2. Рассмотрим интерференцию излучений двух параллельных диполей Герца, в которых колебания возбуждаются от одного генератора с частотой  $\omega$  и с одинаковыми амплитудами. Пусть излучатели и приемники находятся в одной плоскости, причем дипольные моменты излучателей перпендикулярны этой плоскости (рис. 23.8). Обозначим через  $r$  расстояние от системы диполей до приемника и через  $\delta$  расстояние между диполями. Условия когерентности будут выполнены, если

$$\gamma/\omega \ll 1, \quad r\lambda \gg \delta^2. \quad (23.17)$$

Последнее неравенство следует из (23.14а), поскольку угловой размер излучателя  $\theta \approx \delta/r$ , так что  $r_{\text{ког}} = \lambda r/\delta$ , а для пространственной когерентности необходимо, чтобы  $\delta \ll r_{\text{ког}}$ . Помимо этого должны выполняться неравенства  $\delta \ll r$  и  $\lambda \ll r$ , выражающие условие нахождения точки наблюдения в волновой зоне обоих диполей Герца. Из первого из этих неравенств следует, что амплитуды волн от разных диполей (см. (22.27)) с высокой точностью равны друг другу.

Для телевизионного передатчика с типичной длиной волны  $\lambda = 6$  м условия (23.17) выполнены уже на расстоянии сотен метров от передающей антенны. Согласно (22.29) интенсивность излучения каждого передатчика в экваториальной плоскости ( $\theta = \pi/2$ ) в волновой зоне одинакова по всем направлениям, т. е. во всех точках круга радиуса  $r$ . Направим ось  $z$  вдоль диполя, а ось  $x$  — перпендикулярно линии, соединяющей диполи (рис. 23.9, где ось  $z$  направлена на читателя). Везде в плоскости

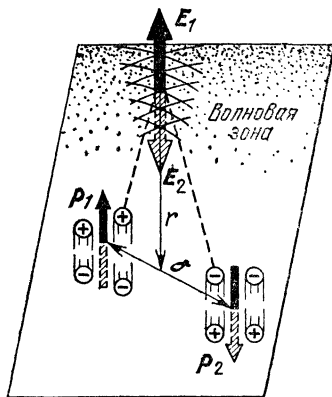


Рис. 23.8.

$x, y$  вектор  $E(r, t)$  излучения ориентирован вдоль оси  $z$ . Обозначим его единственную ненулевую компоненту через  $E = E_z$ .

Для каждого одиночного излучателя согласно (22.15), (22.16) интенсивности  $I_1, I_2$  имеют вид

$$\bar{I}_1 = \bar{I}_2 = \bar{I}_0 = \frac{\epsilon_0 c E_0^2}{2},$$

где  $E_0$  — амплитуда колебаний электрического поля в месте нахождения приемника для волны, излученной только одним диполем. Если фазы колебаний диполей совпадают, то при когерентном излучении обоих диполей согласно (23.5) и (23.6)

$$\bar{I} = 2\bar{I}_0(1 + \cos \alpha), \quad (23.18)$$

где сдвиг фаз  $\alpha$  между волнами определяется через разность хода  $l$  согласно (23.16). Из рис. 23.9 видно, что  $l = \delta \sin \varphi$ , так что  $\alpha = \omega \delta \sin \varphi / c$ . Выразив  $\omega / c = k$  через длину волны  $\lambda$  и воспользовавшись тригонометрическим тождеством  $1 + \cos \alpha = 2 \cos^2(\alpha/2)$ , получим для интенсивности излучения двух синфазных диполей в плоскости  $x, y$  на расстоянии  $r$  и под углом  $\varphi$  окончательную формулу

$$\bar{I} = 4\bar{I}_0 \cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda} \delta \sin \varphi\right).$$

Отсюда видно, что в результате интерференции интенсивность излучения приобрела направленность, т. е. оказалась зависящей от угла  $\varphi$ . Если выбрать  $\delta = \lambda/2$ , то при росте  $\varphi$  от нуля до  $\pi/2$  интенсивность будет убывать от значения  $\bar{I} = 4\bar{I}_0$  при  $\varphi = 0$  до нуля при  $\varphi = \pi/2$ , а затем снова будет возрастать. График этой интенсивности как функции угла  $\varphi$  изображен на рис. 23.10 сплошной линией. Мы видим, что в результате интерференции исчезло излучение вдоль оси  $y$ , а в направлении оси  $x$  интенсивность излучения возросла вдвое по сравнению с суммой интенсивностей излучений отдельных диполей.

Интересно отметить, что излучение можно переориентировать, не поворачивая излучатели. Достаточно сдвинуть, например, на  $\pi$  фазу колебаний второго диполя. Тогда в формуле (23.18) угол  $\alpha$  заменится на  $\alpha + \pi$ , так что (при  $\delta = \lambda/2$ ) в выражении для интенсивности функция  $\cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda} \delta \sin \varphi\right)$  заменится

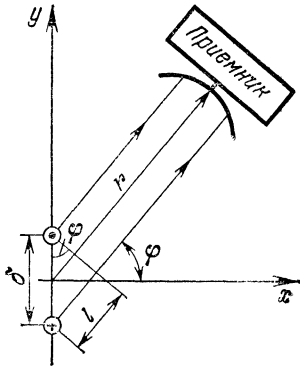


Рис. 23.9.



на  $\cos^2\left(\frac{\pi \sin \varphi + \pi}{2}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \sin \varphi\right)$ . Теперь излучение станет максимальным вдоль оси  $y$  и исчезнет в  $x$ -направлении. Зависимость интенсивности этого излучения от угла  $\varphi$  на рис. 23.10 показана пунктирной линией.

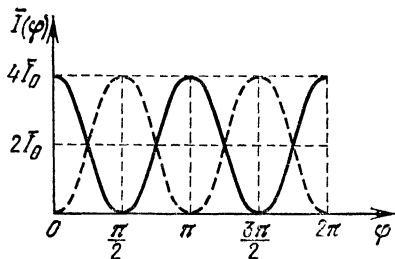


Рис. 23.10.

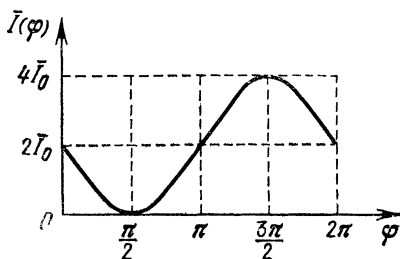


Рис. 23.11.

В обоих рассмотренных случаях угловое распределение излучения обладало зеркальной симметрией. Если же выбрать  $\delta = \lambda/4$ , а фазу второго излучателя сдвинуть на  $\pi/2$  относительно фазы первого, то получится

$$\bar{I}(\varphi) = 4\bar{I}_0 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} \sin \varphi + \frac{\pi}{4}\right).$$

График этой функции изображен на рис. 23.11. Из него видно, что теперь интенсивность максимальна против оси  $y$ , а вдоль оси  $x$  отсутствует. В этом случае излучение направлено преимущественно в сторону отрицательных значений  $y$ . Но разброс по направлениям велик. Покажем, что этот разброс можно уменьшить, увеличив число излучателей.

Рассмотрим интерференцию излучений  $N$  когерентных излучателей. Пусть все излучатели размещены на одной прямой вдоль оси  $y$  и следуют друг за другом через одинаковые промежутки длины  $\delta$  (рис. 23.12). Остальные условия те же, как и в случае двух излучателей. Только теперь в условиях когерентности (23.17) надо заменить  $\delta$  на  $(N-1)\delta$ . Тогда в волновой зоне в направлении под углом  $\varphi$  к оси  $x$  разность хода между волнами первого (верхнего на рис. 23.12) и  $n$ -го излучателя будет равна  $(n-1)l$ , где  $l = \delta \sin \varphi$ . Поэтому если электрическое поле в волне, созданной первым излучателем, в месте

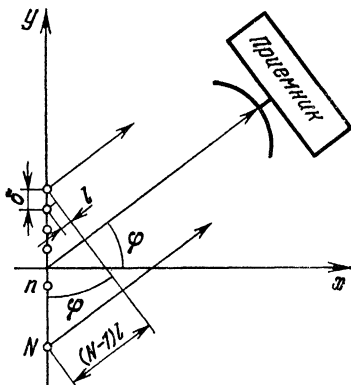


Рис. 23.12.

нахождения приемника равно  $E_1(\mathbf{r}, t)$ , то суммарное электрическое поле  $E(\mathbf{r}, t)$  в направлении под углом  $\varphi$  в плоскости  $x, y$  будет равно

$$E(\mathbf{r}, t) = E_1(\mathbf{r}, t) \sum_{n=0}^{N-1} g^n,$$

где  $g = e^{ik\delta \sin \varphi}$  ( $k = 2\pi/\lambda$  — волновое число). Применяя известную формулу

$$\sum_{n=0}^{N-1} g^n = \frac{g^{N-1} - 1}{g - 1}.$$

для вычисления суммы членов геометрической прогрессии, после несложных преобразований находим

$$\sum_{n=1}^{N-1} g^n = g \frac{N-1}{2} \left( \frac{g^{N/2} - g^{-N/2}}{g^{1/2} - g^{-1/2}} \right) = e^{\frac{ik(N-1)l}{2}} \psi(\varphi),$$

где

$$\psi(\varphi) = \frac{\sin \frac{kN\delta \sin \varphi}{2}}{\sin \frac{k\delta \sin \varphi}{2}}. \quad (23.19)$$

Ниже мы увидим, что функция  $\psi(\varphi)$  встречается при описании ряда оптических явлений. В итоге для суммарного поля  $E(\mathbf{r}, t)$  получаем выражение

$$E(\mathbf{r}, t) = E_1(\mathbf{r}, t) \psi(\varphi).$$

Переходя теперь к усредненной интенсивности излучения, получаем \*)

$$\bar{I}(\varphi) = \bar{I}_0 \psi^2(\varphi). \quad (23.20)$$

Здесь  $\bar{I}_0$  — интенсивность излучения одного источника.

У интенсивности (23.20) есть следующее свойство: если  $\delta < \lambda$ , то у функции  $\bar{I}(\varphi)$  есть резко выделяющийся максимум в направлении оси  $x$ . Действительно, при  $\delta < \lambda$  функция  $\sin\left(\frac{k\delta \sin \varphi}{2}\right)$  обращается в нуль только при  $\varphi = 0$  и при  $\varphi = \pi$ . В этих точках и достигается максимум интенсивности, который резко превалирует над остальными. Применяя дважды известную предельную форму  $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$  при  $x \rightarrow 0$ , для максимальной интенсивности получаем

$$\bar{I}_{\max} = \bar{I}(0) = \bar{I}(\pi) = N^2 \bar{I}_0. \quad (23.21)$$

\*) При вычислении интенсивности нужно от  $e^{-i(\omega t - kr)}$  перейти к  $\cos(\omega t - kr)$ .

Таким образом, в результате эффекта интерференции излучений от  $N$  источников в направлении, перпендикулярном линии расположения источников (т.е. в направлении оси  $x$ ), интенсивность излучения возрастает в  $N^2$  раз по сравнению с интенсивностью излучения только одного источника. Чтобы можно было составить представление о перераспределении интенсивности за счет интерференции, на рис. 23.13 приведена зависимость  $I(\varphi)$  для  $N = 10$  (при  $\delta < \lambda$ ).

Варьируя расположение, фазы и интенсивности многих диполей Герца, можно получать самые разные распределения излучения по направлениям: узконаправленные, веерные и др.

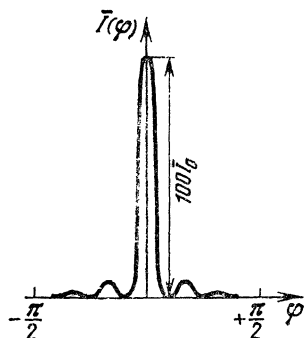


Рис. 23.13.

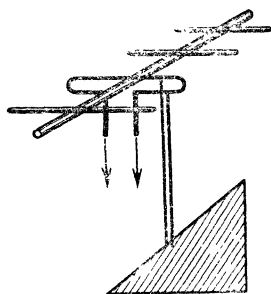


Рис. 23.14

Именно поэтому многие радио- и телевизионные антенны делаются в виде сетки проводов или имеют лестничный вид, как, например, антенны телеприемников (рис. 23.14).

До сих пор рассматривались только излучающие системы. Но вопросы о направленности действия решаются одинаково для всех антенн, как для передающих, так и для принимающих. Дело в том, что выполняется закон, называемый *принципом обратимости*. Согласно этому принципу для любых антенных устройств их чувствительность в разных направлениях совпадает с относительной интенсивностью для тех же направлений, если заменить приемник передатчиком \*).

Принцип обратимости является следствием фундаментального свойства, которое заключается в инвариантности уравнений Максвелла относительно преобразований  $t \rightarrow -t$ ,  $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$  и  $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{B}$ . При  $t \rightarrow -t$  будет  $\rho \rightarrow \rho$ , а  $\mathbf{j} \rightarrow -\mathbf{j}$ . Преобразование  $t \rightarrow -t$  обращает течение времени. Преобразования же  $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$  и  $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{B}$  сохраняют энергию поля, но изменяют на противополож-

\*) Приемные и передающие антенны резко отличаются друг от друга в отношении мощностных характеристик. На передающую антенну подается большая мощность, а принимающая должна регистрировать очень слабые сигналы.

ное направление каждой из следующих величин: импульса, момента импульса и потока энергии поля. Это и означает, что излучение и прием электромагнитных волн имеют одинаковые пространственные диаграммы направленности.

Многие антенны, работающие в коротковолновом участке радиодиапазона, имеют металлические отражатели (см. рис. 23.6). Эти отражатели формируют направленное излучение так же, как это делают со светом зеркала в автомобильных фарах. И в этом случае направленное излучение является результатом интерференции, в которой участвуют как отраженные волны, так и волны, непосредственно ушедшие из излучателя.

3. Интерференция волн оптического диапазона принципиально ничем не отличается от интерференции радиоволн. Но методы осуществления интерференции в оптическом диапазоне другие по двум причинам. Во-первых, в оптике по причинам, изложенным в § 23.4, используется только интерференция волн от одного и того же источника \*). Во-вторых, из-за малости длин волн распространение интерферирующих пучков во многих случаях удовлетворяет условиям применимости законов геометрической оптики, т. е. в пустоте пучки ведут себя как прямолинейные лучи. Суперпозиция световых лучей и называется интерференцией в оптике. Интерференционные эффекты, при рассмотрении которых необходимо учитывать волновые свойства света, в оптике относят к дифракции (см. § 23.4).

Приведем принципиальную схему осуществления интерференции в оптике. В настоящее время в оптике, как правило, используются лазерные источники, у которых времена и радиусы когерентности огромны. Поэтому условия когерентности практически всегда выполняются. Разделение лазерного луча на части тоже несложно. Его можно осуществлять либо с помощью полупрозрачного зеркала, на которое луч падает наклонно (половина света отражается в сторону, половина проходит прямо), либо просто отклонив зеркалом половину луча по его сечению — радиус когерентности лазерного света равен поперечному размеру светового пучка. Разделенные лучи с помощью зеркал и призм направляют по требуемым путям, после чего соединяют. Разность хода рассчитывается по законам геометрической оптики. Суммарный луч падает на регистрирующий экран. На экране возникают характерные интерференционные полосы. Эти полосы возникают за счет того, что разность хода меняется при переходе от одной полосы на экране к другой. Многочисленные конкретные способы осуществления интерференции в основном различаются только количеством интерферирующих лучей и их траекториями.

---

\*) Интерференция световых волн от двух разных лазеров экспериментально осуществлена, но пока практически не используется.

В приведенной схеме осталось объяснить механизм возникновения интерференционных полос. Продемонстрируем, как получают эти полосы в простейшем интерференционном устройстве, называемом *зеркалами Френеля* (рис. 23.15). Когерентный параллельный пучок света падает на два плоских зеркала *I* и *II*, двугранный угол  $\varphi$  между которыми близок к  $\pi$  (на рисунке для

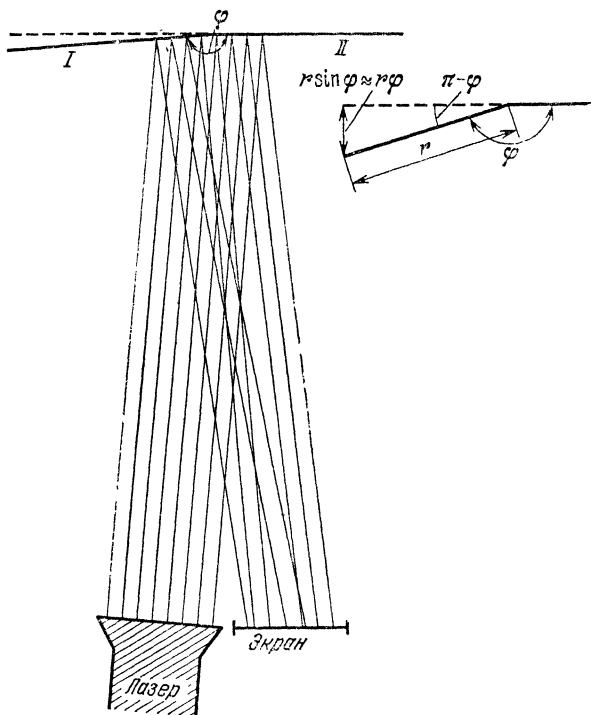


Рис. 23.15.

наглядности разность  $\pi - \varphi$  утрирована). Каждое зеркало отражает по половине падающего пучка. Регистрирующий экран расположен так, что оба отраженных пучка на нем смешиваются. Пусть экран ориентирован перпендикулярно пучку, отраженному зеркалом *II*. Тогда все лучи, отраженные зеркалом *II*, будут приходить на экран с одной и той же разностью хода. У лучей же, отраженных от зеркала *I*, разность хода будет нарастать при переходе от левых лучей к правым. При значениях разности хода между лучами от разных зеркал  $l = 2n\lambda$ , где  $n$  — целое число, интерференция будет конструктивной и на экране будет светлая полоса. При  $l = 2\pi(n + 1/2)\lambda$  будет деструктивная

интерференция, которой соответствует темная полоса. Рассчитаем расстояние между полосами в приближении малости угла  $\alpha = \pi - \varphi$ . В этом приближении разность хода  $l$  равна тому добавочному пути, который прошел бы луч, если бы вместо зеркала  $I$  было продолжение зеркала  $II$  (рис. 23.15 справа). Обозначив через  $r$  расстояние от линии внутреннего угла до крайней точки падения луча на зеркало  $I$ , из правого рис. 23.15 получим, что  $l = 2r \sin \varphi \approx 2r\varphi$ . При увеличении  $r$  на  $\Delta r$  разность хода увеличивается на  $\Delta l = 2\Delta r \varphi$ . Одна полоса переходит в другую при  $\Delta l = \lambda$ , т. е. при

$$\Delta r = \lambda/2\varphi. \quad (23.22)$$

Для красного света с  $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$  м при  $\varphi = 10^{-3}$  рад расстояние между полосами будет 0,25 мм, т. е. вполне доступным визуальному наблюдению.

Согласно (23.22) расстояние между полосами пропорционально длине волны света. Зависимость расположения полос от длины волны является общим свойством всех интерференционных устройств. Из-за этого свойства интерференционные полосы от монохроматических источников света всегда окрашены.

Интерференция оптических волн широко используется для различных прецизионных измерений. Измерительные приборы, в которых используется интерференция волн, называются *интерферометрами*. Конструкции и назначения интерферометров очень разнообразны, но принцип действия всегда один и тот же: если в одном из интерферирующих лучей разность хода меняется на величину, близкую к длине волны, то картина интерференционных полос заметно меняется. Назначение интерферометра определяется тем, за счет какого эффекта изменяется разность хода. Приведем несколько типичных примеров. Если разность хода меняется за счет движения зеркала, то интерферометр служит для измерения малых подвижек. Если на пути одного из лучей имеется кювета, заполненная прозрачной жидкостью, то интерферометр служит для точного измерения скорости света в этой жидкости (т. е. для измерения показателя преломления, см. § 24.2). На основе зависимости расположения полос от длины волны (см. (23.22)) конструируются интерферометры для точных измерений длин световых волн, ширин спектральных линий и т. д.

Интерференционные измерительные методы широко применяются в самых разных областях науки и техники.

Приведенная выше система зеркал Френеля является примером простейшего интерферометра. Но именно из-за простоты качество этого интерферометра низкое. Как пример высококачественного устройства опишем интерферометр Майкельсона, с помощью которого в 1887 г. А. Майкельсон и Э. Морли установили отсутствие влияния движения Земли на скорость рас-

пространения светового сигнала. Интерферометр Майкельсона состоит из двух зеркал  $M_1$  и  $M_2$  и полупрозрачной разделительной пластинки  $P_1$  с посеребренной задней по отношению к источнику света  $S$  стороной (рис. 23.16). Свет, падая на  $P_1$ , разделяется на два пучка 1 и 2. После отражения от зеркала  $M_1$  и частичного отражения от  $P_1$  пучок 1 идет в направлении  $AO$  вместе с пучком 2, отразившимся от  $M_2$  и частично прошедшим через  $P_1$ . При этом луч 2 после разделения на отражающем слое дважды проходит через пластинку  $P_1$ . Это вносит дополнительную разность хода. Для ее компенсации за пластинкой устанавливают еще одну пластинку  $P_2$  (рис. 23.16), изготовленную из того же материала и той же толщины, что и пластинка  $P_1$ .

Наблюдаемая интерференционная картина соответствует интерференции в воздушном зазоре, образованном  $M_2$  и мнимым изображением  $M'_1$  зеркала  $M_1$  в плоскости пластинки  $P_1$ . Таким образом, интерферометр Майкельсона оказывается эквивалентным воздушной «пленке» толщины  $AC - AB$ . Интерферируют волны, которые можно считать отраженными от передней и задней поверхностей этой пленки. Интерференция регистрируется в приемнике  $O$  (рис. 23.16).

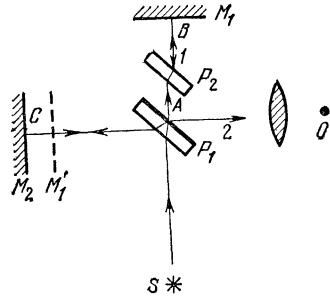


Рис. 23.16.

Используя свой интерферометр, А. Майкельсон и Э. Морли установили, что, как бы ни были плечи  $AB$  и  $BC$  ориентированы по отношению к скорости движения Земли, интерференционная картина оказывается одной и той же. А это означало, что движение Земли не оказывает влияния на скорость света. В противном случае из-за различия в скоростях света в различных направлениях возникла бы дополнительная разность хода интерферирующих лучей, зависящая от ориентации интерферометра в пространстве. Следовательно, при поворотах интерферометра интерференционная картина должна была бы изменяться, чего на самом деле не наблюдалось.

В современных условиях интерферометр Майкельсона используется как спектроскоп, т. е. прибор, определяющий спектральный состав исследуемого излучения.

**4.** Скорость распространения электромагнитных волн в веществе всегда меньше скорости света  $c$ . Например, в обычном стекле скорость света с длиной волны  $\lambda = 5893 \text{ \AA}$  равна  $c/1,52$ . Это замедление электромагнитных волн в веществе есть также результат интерференции. Волна, проникшая в объем стекла, начинает раскачивать заряды в частицах, из которых состоит стекло. Эти заряды сами становятся источниками излучения, причем когерентными, потому что они раскачиваются одной и той же вынуждающей силой проникшего в стекло поля. В результате в стекле происходит наложение множества когерентных волн. Они интерферируют. Результатом интерференции и является волновой процесс с частотой исходной волны, но с меньшей скоростью распространения.

Уменьшение скорости распространения электромагнитных волн в веществе по сравнению со скоростью света в свободном пространстве обусловлено только что описанным микроскопическим механизмом. Но это явление имеет и макроскопическое

описание. Оно содержится в макроскопических уравнениях Максвелла (21.4). В макроскопическом описании замедленные электромагнитные волны трактуются как свободные, т. е. способные распространяться при отсутствии свободных зарядов ( $\rho = 0$ ) и токов ( $\mathbf{j} = 0$ ). Влияние вещества на поле задается материальными уравнениями. Ниже вещество будет считаться однородной, изотропной и линейной средой с нулевой проводимостью (в любой другой среде  $\mathbf{j} \neq 0$ ). Таким образом, задание материальных уравнений сводится к установлению значений  $\epsilon$  и  $\mu$ . Эти значения берутся из опыта. В рамках принятых допущений в уравнения (21.4), не содержащие  $\rho$  и  $\mathbf{j}$ , нужно подставить  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}$  и  $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$ , после чего  $\epsilon$ ,  $\epsilon_0$ ,  $\mu_0$  и  $\mu$  вынести за символы дифференцирования. В результате получатся такие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{r}} = 0, \quad \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{E} \right] &= - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{r}} = 0, \quad \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{B} \right] &= \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (23.23)$$

При получении последнего уравнения мы использовали равенство (20.17). Система уравнений (23.23) отличается от (21.21) только тем, что в последнем уравнении стоит  $\epsilon \mu / c^2$  вместо  $1/c^2$ . Введем величину  $v$ , которая имеет размерность скорости:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}. \quad (23.24)$$

Повторив теперь для системы (23.23) вывод, аналогичный выводу уравнения (22.22) из системы (22.21), получим уравнение для поля  $\mathbf{E}$  в веществе:

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

Как видно, для поля  $\mathbf{E}$  получилось волновое уравнение, в котором перед второй производной по времени стоит не  $1/c^2$ , а  $1/v^2$ . Для магнитного поля получается точно такое же уравнение. Тем самым мы показали, что макроскопические уравнения Максвелла действительно содержат эффект изменения скорости распространения электромагнитных волн связанными зарядами и токами вещества. Эта скорость в линейной, изотропной и однородной среде определяется соотношением (23.24). Величина

$$n = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} \quad (23.25)$$

называется *показателем преломления* среды. Согласно (23.24)  $n = c/v$ , так что показатель преломления равен отношению фазовых скоростей света в пустоте и в веществе.



Интерференция световых волн часто возникает при их отражении. Механизм отражения света и замедления его веществом один и тот же. Отраженная волна представляет собой часть вторичного излучения, вышедшую за пределы вещества. Поэтому отраженная волна имеет ту же частоту, что и падающая. Предположим, что свет падает на тонкую и прозрачную для света пленку. Тогда возникнет две отраженных волны — одна от передней, а другая от задней стенки пленки. Если толщина пленки заметно меньше длины когерентности света, то эти отраженные волны будут интерферировать, усиливая или ослабляя друг друга в зависимости от разности их фаз. Например, фазовые соотношения могут оказаться такими, что отражение будет приводить к усилению красного света и ослаблению синего. Тогда мы увидим пленку окрашенной в красные тона. Если изменить толщину пленки, то ее окраска может тоже измениться. Теперь уже будут усиливать друг друга волны другой, «не красной» частоты. Пленка будет выглядеть, например, зеленой или синей. При изменении угла зрения цвет пленки обязательно изменится, так как время прохождения света через пленку зависит от направления его распространения. Чем ближе это направление к нормальному по отношению к поверхности пленки, тем это время меньше. Оно возрастает при отклонении от нормального направления. Вот в чем причина сложной и переменчивой окраски тонких пленок различных жидких нефтепродуктов (например, пятен бензина или керосина на воде), мыльных пузырей и подобных им образований. Многослойные тонкие диэлектрики широко используются в оптических системах в качестве полупрозрачных зеркал, коэффициенты отражения которых сильно и нужным образом зависят от длины волны света.

#### § 23.4. Дифракция электромагнитных волн

1. В § 22.1 указывалось, что дифракция заключается в отклонении распространения волн от законов геометрической оптики, которое наблюдается вблизи препятствий. Так, при прохождении около края непрозрачного экрана волна проникает в область геометрической тени. Это проникновение следует из соотношений неопределенностей. Целью настоящего параграфа является детальное изложение дифракционных явлений, наблюдаемых в тех случаях, когда длина волны  $\lambda$  мала по сравнению с характерным поперечным (по отношению к направлению распространения волн) размером  $\delta$  области, в которой возбуждается волновой процесс, но когда пренебрежимо малой длину волны считать уже нельзя. В этих случаях еще не теряют смысла такие понятия, как луч, волновая поверхность и волновой

фронт, но уже нарушается прямолинейность лучей в однородных средах. В этом и проявляется дифракция волн тогда, когда  $\lambda/\delta < 1^*$ ) (но не на несколько порядков!). Другое ограничение заключается в том, что наблюдение дифракции производится только в волновой зоне.

С термином «дифракция» связана исторически сложившаяся неоднозначность. Нередко под дифракцией понимается только то, что в § 22.1 было охарактеризовано лишь как ее частный случай. Так, для электромагнитных волн расчеты процессов их дифракции в исчерпывающем смысле этого понятия <sup>\*\*)</sup> требуют решения уравнений Максвелла с соответствующими в каждом конкретном случае граничными и начальными условиями (эти задачи, как правило, трудны и громоздки). И только если отношение  $\lambda/\delta$  мало, то достаточную информацию можно получить сравнительно простым путем, опираясь на принцип Гюйгенса — Френеля. Этот принцип справедлив для волн любой природы. Для электромагнитных волн он выводится из уравнений Максвелла при некоторых модельных допущениях о поведении поля на границе препятствия. Общая формулировка принципа Гюйгенса — Френеля такова:

*Если волну мысленно перерезать некоторой замкнутой поверхностью, то распространение волны за пределы этой поверхности, т. е. наружу по отношению к излучающему волну источнику, можно рассчитать, приняв, что каждый элемент поверхности когерентно (с другими элементами) излучает и что амплитуда его излучения пропорциональна амплитуде наблюдаемых колебаний, происходящих в месте расположения элемента.*

Интерференция когерентных волн, распространяющихся от вводимых таким образом фиктивных источников излучения, и дает дифракционную картину. В этом заключается связь дифракции с интерференцией, уже отмеченная в § 7.4 тома I. Обычно поверхность с фиктивными источниками когерентного излучения выбирается совпадающей по форме с волновой. При таком выборе все источники действуют синфазно. Удобство такого выбора очевидно.

Убедимся в справедливости принципа Гюйгенса — Френеля на следующем примере. Допустим, что тонкий непрозрачный плоский экран со щелью освещается монохроматическим светом. Щель можно закрывать заслонкой, обозначенной буквой А. Части экрана, расположенные выше и ниже заслонки, обозначим,

---

\*) В противном случае будут справедливы законы геометрической оптики.

\*\*) Например, в литературе по распространению радиоволн под дифракцией понимается всякий процесс распространения электромагнитного излучения при наличии препятствий. В частности, нередко говорят и пишут о дифракции радиоволн вокруг Земли,

соответственно, через  $B$  и  $C$  (рис. 23.17). Рассмотрим сначала, что будет в том случае, когда щель закрыта заслонкой. Ответ очевиден: экран поглощает все излучение, так что света за экраном не будет. Но согласно принципу суперпозиции тот же эффект можно получить (хотя бы принципиально) и другим способом, заменив весь экран (с заслонкой) прозрачным источником, испускающим излучение, когерентное проходящему и точно его гасящее. Другими словами, в любой точке за плоскостью экрана будет

$$E = E_0 + E_A + E_B + E_C = 0,$$

где поля с буквенными индексами создаются зарядами в частях экрана  $B$  и  $C$  и заслонке  $A$ , а  $E_0$  — электрическое поле падающей волны.

Теперь уберем заслонку. Тогда электрическое поле справа за экраном станет равным

$$E = E_0 + E_B + E_C,$$

где  $E_B$  и  $E_C$  — те же поля, что и выше. Поэтому

$$E = E_0 + E_B + E_C = (E_0 + E_B + E_C + E_A) - E_A = -E_A.$$

Мы видим, что электрическое поле справа от экрана со щелью с точностью до знака совпадает с полем, которое создает только заслонка. А так как интенсивность зависит от квадрата поля, то свет, прошедший через щель, будет обладать той же интенсивностью, что и свет, излучаемый когерентными источниками, размещенными только на заслонке или, что то же, в той части плоскости экрана, которую занимает щель. Очевидно, что вклад в  $E_A$  от каждого элемента заслонки будет пропорционален амплитуде колебаний зарядов, находящихся на этом элементе. А эта амплитуда линейно зависит от величины вынуждающей силы, т. е. от величины реального электромагнитного поля в месте расположения данного элемента. Именно это и выражается принципом Гюйгенса — Френеля (в данном примере световой пучок за экраном пересекается поверхностью, частью которой является правая сторона заслонки).

Продемонстрируем использование принципа Гюйгенса — Френеля, рассмотрев качественно с его помощью дифракцию монохроматического света на экране с круглым отверстием. Предположим, что источник света находится напротив отверстия на большом расстоянии от него. В этом случае плоскость отверстия будет практически совпадать с одной из волновых поверхностей световой волны. Пусть прошедший через отверстие

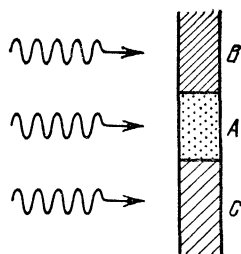


Рис. 23.17

свет падает на регистрирующий экран  $AB$ , находящийся на расстоянии  $r \gg \lambda$  от отверстия ( $\lambda$  — длина световой волны (рис. 23.18)). Рассмотрим формирование поля в точке  $C$  экрана, приняв за поверхность фиктивных источников волн поверхность отверстия  $DE$ . Построим мысленно концентрические сферы с центром в точке  $C$  и с радиусами  $r$ ,  $r + \lambda/2$ ,  $r + 2\lambda/2$ , ... ,  $r + n\lambda/2$  и т. д. Первая сфера коснется плоскости в точке  $F$ .

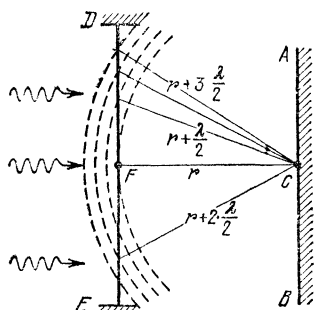


Рис. 23.18.

Следующие сферы пересекутся с этой плоскостью по концентрическим окружностям с общим центром в  $C$ . Кольца между соседними окружностями называются *зонами Френеля*. Примем зоны Френеля за источники, когерентно излучающие в сторону регистрирующего экрана  $AB$ . Амплитуда света в точке  $C$  будет суммой амплитуд от отдельных зон. По построению фазы когерентных волн, приходящих в  $C$  от соседних зон, будут отличаться на  $\lambda$ . Поэтому волны, пришедшие из

двух смежных зон, гасят друг друга, а волны, пришедшие из зон с номерами одинаковой четности, усиливают друг друга. Как показывает расчет, суммарная амплитуда от всех зон близка к половине амплитуды волны, излучаемой только первой зоной Френеля, если отверстие в экране достаточно велико.

Яркой иллюстрацией правильности принципа Гюйгенса — Френеля является следующий опыт: если все четные (или все нечетные) зоны закрыть непрозрачными кольцевыми экранами, то амплитуда колебаний в точке  $C$  резко возрастает. Такие зонные экраны называют *линзами Френеля* и находят применение в оптике, радиотехнике (для микроволн) и даже в ультразвуковой акустике.

2. Дифракционная картина заметно проще на очень больших расстояниях, когда расстояние  $r$  от точки наблюдения до области, в которой происходит дифракция, столь велико, что в точке наблюдения волновой процесс является плоским. Это означает, что в точке наблюдения радиус когерентности волн, суперпозиция которых согласно принципу Гюйгенса — Френеля создает дифракцию, можно считать неограниченно большим. Реально это приводит к тому, что  $r_{\text{ког}} \gg \delta$ , где  $\delta$  — размер области, в которой происходит дифракция. Из этого условия следует ограничение на  $r$ , по виду не отличающееся от второго неравенства (23.17):  $r\lambda \gg \delta^2$ .

Наблюдаемое с больших расстояний (в указанном выше смысле) распределение интенсивности называется *дифракцион-*

ной картиной Фраунгофера. Дифракция Фраунгофера называется еще *дифракцией в параллельных лучах*. Если условие  $r\lambda \gg \delta^2$  не выполняется, то наблюдается *дифракционная картина Френеля*. Она сложнее картины Фраунгофера. Но эти различия только количественные, а не принципиальные. Поэтому ниже мы остановимся только на более простой картине Фраунгофера.

Рассмотрим практически важный пример дифракции Фраунгофера на *дифракционной решетке*. Дифракционной решеткой называется непрозрачный экран с большим количеством тонких, параллельных, периодически расположенных щелей. Одна из разновидностей дифракционных решеток представляет собой стеклянную пластинку с нацарапанными на ней штрихами. Число штрихов на 1 мм часто достигает нескольких сотен. При освещении такой пластинки монохроматическим светом промежутки между штрихами действуют как источники вторичных когерентных световых волн. За решеткой эти волны создают дифракционную картину.

Рассмотрим простейшую дифракционную решетку. Она представляет собой плоский экран, в котором через равные расстояния проделаны параллельные друг другу щели одинаковой и той же ширины. Для простоты примем, что ширина одной щели в несколько раз меньше расстояния между щелями. Расстояние между щелями обозначим через  $b$  (рис. 23.19).

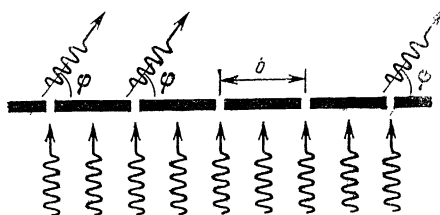


Рис. 23.19.

Вид дифракционной картины, возникающей при прохождении света с длиной волны  $\lambda$  через дифракционную решетку, приближенно определяется так. Поле от каждой щели имеет определенную амплитуду и фазу. Будем считать каждую щель узким дипольным излучателем. Тогда искомая дифракционная картина совпадает с интерференционной картиной от точечных источников, число которых равно числу щелей. При этом каждый источник мысленно должен быть помещен в центр одной из щелей решетки. Эту интерференционную картину определяет интенсивность (23.20) с функцией  $\psi(\varphi)$  из (23.19). Только теперь  $\delta$  нужно заменить на  $b$ , а под  $N$  следует понимать число щелей в решетке. Переходя в (23.20) от волнового числа  $k$  к длине волны  $\lambda = 2\pi/k$ , находим интересующую нас интенсивность:

$$\bar{I}(\varphi) = \bar{I}_0 \frac{\sin^2 \frac{N\pi b \sin \varphi}{\lambda}}{\sin^2 \frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda}}. \quad (23.26)$$

Здесь  $I_0$  — интенсивность света, прошедшего только через одну щель в направлении первичной световой волны.

Функция  $I(\varphi)$  имеет вид, изображенный на рис. 23.13, и принимает значение  $N^2 I_0$  \*) в направлениях, для которых

$$b \sin \varphi = \pm m\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (23.27)$$

Под этими углами световые волны, идущие от разных щелей, усиливают друг друга, что и приводит к резкому возрастанию интенсивности. Эти пики интенсивности называются *главными максимумами*. Число  $m$  называется *порядком* главного максимума. Из (23.27) следует, что максимум нулевого порядка наблюдается под углом  $\varphi = 0$  и является единственным. Каждый максимум ненулевого порядка наблюдается дважды в направлениях, ориентированных по разные стороны и симметрично относительно направления, которое задается углом  $\varphi = 0$ . Поэтому нулевой максимум принято называть *центральным*. Из (23.27) следует, что число главных максимумов всегда ограничено. Действительно, по абсолютному значению  $\sin \varphi$  не превосходит единицы. Следовательно,

$$m \leq b/\lambda. \quad (23.28)$$

Видно, что число главных максимумов возрастает с увеличением периода дифракционной решетки и с уменьшением длины волны.

Если учесть конечность ширины каждой щели, то функция  $I(\varphi)$  станет более сложной. У нее появятся более слабые, но и более многочисленные вторичные максимумы. На промежутке между соседними главными максимумами приходится  $N - 2$  вторичных. Интенсивность каждого вторичного максимума не превышает  $4,5 \cdot 10^{-2}$  интенсивности ближайшего главного максимума. Характерные особенности распределения света за дифракционной решеткой иллюстрируются на рис. 23.20. На нем приведен график интенсивности, рассчитанный, с учетом конечности ширин щелей, для  $N = 4$  и отношения расстояния  $b$  между щелями к ширине  $a$  одной щели, равного 3. Угловая ширина главного максимума оказывается тем меньше, чем больше длина дифракционной решетки и ниже порядок максимума.

Обратим внимание на следующее важное свойство перераспределения интенсивности света за дифракционной решеткой. За одним только исключением — положением центрального максимума, — дифракционная картина зависит от длины волны света. Поэтому дифракционная решетка является *спектральным*

\*) Напоминаем, что на рис. 23.13 изображена интенсивность  $I(\varphi)$  для сравнительно малого  $N = 10$ . В дифракционной решетке  $N$  значительно больше.

прибором, т. е. устройством, которое пространственно разделяет световые волны разных частот. Например, если на решетку направить белый свет, то все дифракционные максимумы, кроме центрального, разложатся в спектр. При этом фиолетовый край каждого спектра (высокие частоты) будет обращен к центру дифракционной картины, а красный край (низкие частоты) окажется на ее периферии.

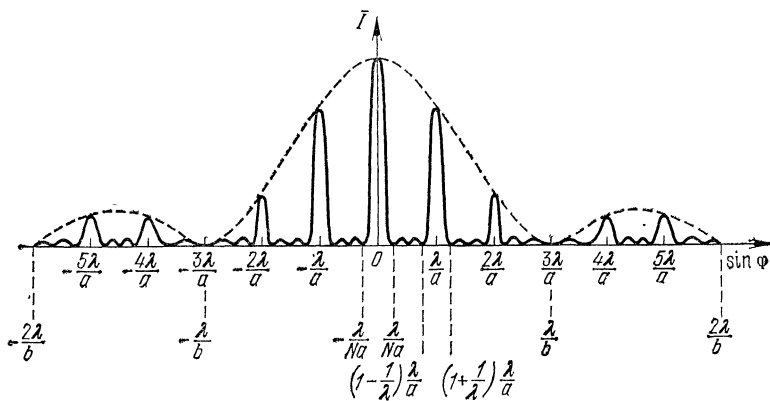


Рис. 23.20.

Основными характеристиками спектрального прибора являются его *дисперсия* и *разрешающая способность*. Дисперсия определяет разделение спектральных линий, отличающихся по длине волны на единицу (например, на 1 Å). Когда это разделение линий измеряют в угловых единицах, то говорят об *угловой дисперсии*. Угловая дисперсия

$$D = \left| \frac{d\varphi}{d\lambda} \right|, \quad (23.29)$$

где  $d\varphi$  — угол между направлениями распространения волн, отличающихся по длине волны на  $d\lambda$ . Найдем угловую дисперсию дифракционной решетки. Из (23.27) следует, что с точностью до знака  $b \cos \varphi d\varphi = m d\lambda$ . Поэтому

$$D = \left| \frac{d\varphi}{d\lambda} \right| = \frac{m}{b \cos \varphi}.$$

В пределах небольших углов  $\cos \varphi \approx 1$ , и тогда с достаточно высокой точностью

$$D = m/b. \quad (23.30)$$

Таким образом, оказывается, что угловая дисперсия дифракционной решетки тем больше, чем меньше период решетки и чем выше порядок  $m$  получаемого с ее помощью спектра.

Разрешающая способность безразмерна и равна

$$R = \lambda/\delta\lambda, \quad (23.31)$$

где  $\delta\lambda$  — абсолютное значение минимальной разности длин волн двух спектральных линий, при которой эти линии регистрируются раздельно. Помешать этому может конечность ширины спектральных максимумов. Как это получается, видно из левой части рис. 23.21: две линии перекрываются настолько, что воспринимаются как одна. В правой части того же рисунка показана

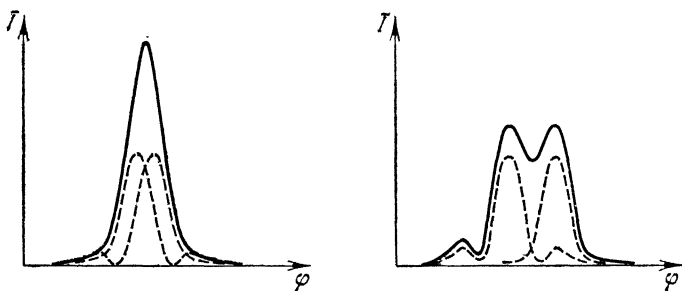


Рис. 23.21.

ситуация, когда линии разрешаются: они раздвинуты настолько, что у интенсивности различаются два горба и впадина между ними. Есть правило, которым определяется, когда начинает вырисовываться двойной горб. Оно называется *критерием Рэлея*. Согласно этому критерию линии начинают разрешаться с того момента, когда при их раздвижении максимум одной совмещается с первым минимумом другой. Разрешающая способность дифракционной решетки прямо пропорциональна порядку наблюдаемого главного максимума и числу щелей:

$$R = \lambda/\delta\lambda = mN. \quad (23.32)$$

## § 23.5. Голография

1. С интерференцией связано одно из крупнейших открытий XX столетия — создание метода получения объемных изображений. Этот метод был предложен Д. Габором в 1947 г. и называется *голографией*. Термин происходит от греческих слов «голос» — полный и «графо» — пишу и означает: «полная запись». Идеи Габора долгое время оставались нереализованными. И только с появлением лазеров ситуация коренным образом изменилась. Первое голографическое изображение со всеми эффектами объемности было получено в 1963 г. Э. Лейтом и Дж. Упатниексом.



Обычная фотография — это плоское изображение объекта. Никакого ощущения объемности при разглядывании фотоснимка не возникает. Особенно отчетливо это становится заметным, когда он рассматривается под большим углом. В этом случае продольные и поперечные масштабы резко искажаются. Обычная фотография не позволяет создать ощущения объемности, потому что фотографическое изображение сохраняет информацию только об интенсивности света, идущего от разных участков фотографируемого объекта. Фазы световых волн никак не фиксируются. Другими словами, фотография позволяет записать и восстановить только двумерное распределение яркости, но не полную световую волну, исходящую от предмета.

*Голография принципиально отличается от обычной фотографии тем, что фиксирует не только интенсивности, но и фазы световых волн, идущих от объекта.*

В связи с этим в голографии совершенно необязательно использование оптических систем, предназначенных для формирования изображений (например, линз и фокусирующих зеркал \*)).

Фотопластинка с запечатленной на ней структурой световых волн называется *голограммой*, а процесс ее получения — *голографированием*.

В настоящее время разработано несколько методов голографирования. Все они основаны на одном и том же принципе. Поэтому изложим один способ, предложенный Э. Лейтом и Дж. Упатниексом в 1963 г. Свет лазера разделяется на два пучка (рис. 23.22). Один пучок образуется в результате рассеяния света объектом, который голографируется. Этот пучок называется *предметным*. Другой пучок, который называется *опорным*, создается с помощью обычного плоского зеркала и на объект не попадает. В том месте, где происходит наложение предметного и опорного пучков, помещается обычная фотопластинка. Так как источником света является лазер, то предметный и опорный пучки являются когерентными. Поэтому они интерферируют. Фотопластинка и фиксирует эту интерференционную картину. Таким образом, голограмма — это фотография интерференции предметного и опорного пучков. Именно поэтому в

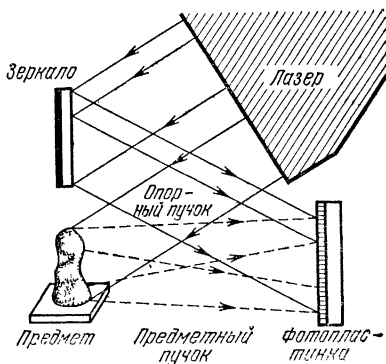


Рис. 23.22.

\*) Они применяются только для вспомогательных целей.

голограмме изменениями контраста интерференционных полос и расстояний между ними кодируется вся информация об амплитудах и фазах прошедшего света. При обычном освещении невооруженный глаз не может отличить голограмму от обычного испорченного негатива (левая часть рис. 23.23). Только под

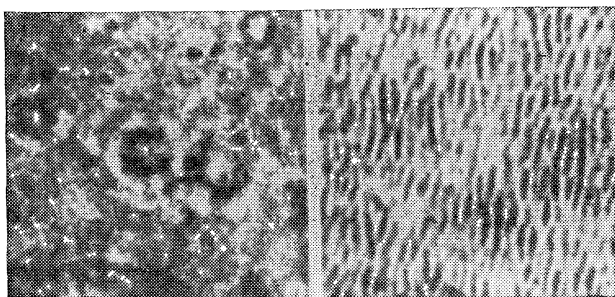


Рис. 23.23.

микроскопом обнаруживается узор из темных и светлых интерференционных пятен (правая часть рис. 23.23). Этот узор тем причудливее, чем сложнее объект, который голографируется.

Посмотрим теперь на рис. 23.24. На нем показано, как восстанавливается изображение. На этой стадии голограмма выполняет роль дифракционной решетки. Она помещается туда же, где находилась при экспонировании фотопластины, и освещается одним только опорным пучком. Для этого ту часть лазерного излучения, которое при голографировании рассеивалось объектом съемки, перекрывают с

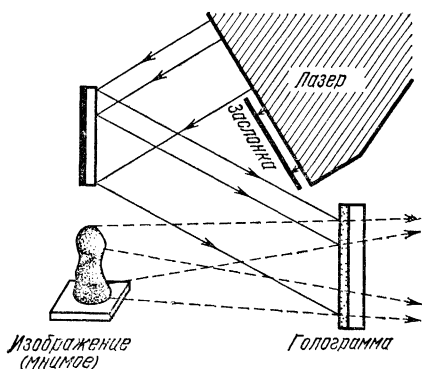


Рис. 23.24.

помощью непрозрачной заслонки. Дифракция опорного пучка на голограмме приводит к возникновению световых волн, в точности совпадающих с теми, которые объект рассеивал при голографировании\*). Поэтому на голограмме под углом к освещающему пучку наблюдатель видит исходный объемный объект. При этом все выгля-

\*) Ни одним из существующих приборов невозможно отличить восстановленные волны от тех, которые исходили от предмета.

дит так, словно перед наблюдателем не голограмма, а окно, открывающее вид на реальный объект, которого на самом деле теперь уже нет. Если, например, наблюдатель переменит угол зрения, то он увидит изменение во взаимном расположении предметов (это явление называется параллаксом) точно такое же, как если бы он смотрел на сами предметы. Если при голографировании близкие предметы скрывали за собой более далекие, то, смещая взгляд относительно голограммы, наблюдатель сможет заглянуть за «мешающие» предметы и увидеть то, что было скрыто. Одним словом, изображение, которое получается с помощью голограммы, ничем не отличается от той реальной картины, которая голографировалась.

Рассмотрим на простом примере, как световая волна «записывается» и затем восстанавливается. Пусть на фотопластинку под углом  $\varphi$  друг к другу падают два когерентных параллельных пучка световых волн (рис. 23.25). Пусть пучок 1 является опорным, а пучок 2 — предметным (объект расположен бесконечно далеко). Для простоты предположим, что опорный пучок

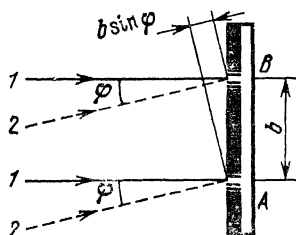


Рис. 23.25.

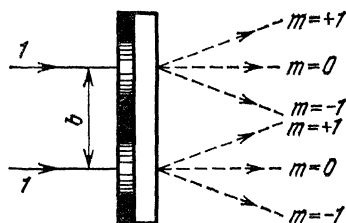


Рис. 23.26.

падает на пластинку нормально. Интерференционная картина, которую запечатлеет фотопластинка, будет иметь вид прозрачных и зачернённых полос с плавным переходом от одних к другим. Наиболее прозрачными будут те места, где волны 1 и 2 приходят в противофазе (фотоэмульсия не засвечивается). Там же, куда эти волны приходят с разностью фаз, кратной  $2\pi$ , будут самые темные участки голограммы.

Пусть на рис. 23.25 точки A и B отмечают расположение наиболее прозрачных соседних участков голограммы. Тогда  $b \sin \varphi = \lambda$ . Осветим теперь голограмму одним лишь опорным пучком (рис. 23.26). Справа от голограммы возникнет дифракционная картина с максимумами интенсивности света в направлениях, которые определяются углами  $\varphi$ , удовлетворяющими условиям

$$b \sin \varphi = m\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \dots \quad (23.33)$$

Мы уже отмечали, что на голограмме нет скачкообразных переходов от непрозрачных мест к прозрачным. В связи с этим

оказывается, что интенсивность всех дифракционных максимумов, порядка выше первого, практически равна нулю. Поэтому в (23.33) число  $m$  принимает только три значения:  $m = 0, \pm 1$ . В случае  $m = 0$  мы имеем волну, продолжающую опорный пучок. Максимум интенсивности, отвечающий  $m = +1$ , наблюдается в том же направлении, какое имел предметный пучок 2 при голографировании (рис. 23.25). Это излучение и есть восстановленная предметная волна 2. Чтобы выяснить, что же дает дифракционный максимум, для которого  $m = +1$ , допустим, что предметный пучок не является идеально параллельным, а чуть-чуть расходится (это означает, что объект находится на больших, но все же конечных расстояниях от фотопластинки). Тогда дифракционный максимум с  $m = +1$  будет отвечать расходящейся световой волне. Она будет создавать мнимое изображение объекта, которое будет находиться в месте расположения самого объекта (именно это изображение и показано на рис. 23.24). Максимум же с  $m = -1$  связан со сходящейся волной. Эта волна сходится к месту, которое является зеркальным, относительно плоскости голограммы, изображением положения объекта. В этом месте образуется действительное изображение объекта. Если там поместить, например, фотоаппарат, то это изображение можно сфотографировать.

2. Перечислим главные свойства голограмм. Во-первых, голограмму можно разбить на несколько частей, и каждая из них при просвечивании даст ту же картину, что и целая голограмма. Ухудшается только четкость изображения и ощущение объемности. Объясняется это тем, что при голографировании каждая точка фотопластинки подвергается действию световых волн, которые рассеиваются всеми участками объекта, и свет, рассеянный каждым из этих участков, освещает всю пластинку. Поэтому изображение «записывается» на каждом участке голограммы. С этим связана и независимость контрастности восстановленного изображения от контрастных свойств фотоэмульсии.

Во-вторых, восстанавливается всегда позитивное изображение. Если контактным способом с голограммы снять копию, то она будет обращенной по отношению к исходной голограмме (прозрачные участки становятся зачерненными, и наоборот). Однако через копию мы увидим то же самое изображение. Причина в том, что на голограмме изображение зашифровано изменениями контраста интерференционных полос и расстояний между ними. Ни то, ни другое при обращении не изменяется.

В-третьих, на одной и той же фотопластинке можно последовательно «записать» несколько изображений так, что они не будут мешать друг другу при восстановлении. Для этого достаточно, осуществляя ряд съемок, последовательно изменять направленность опорного пучка. В каждом случае будет полу-

чатся своя интерференционная картина. При просвечивании полученной таким образом «многозначной» голограммы каждое изображение будет наблюдаться под своим углом зрения.

Перечислим теперь необходимые условия голографии. Имн являются неподвижность и высокая контрастность интерференционной картины в области пересечения опорного и предметного пучков во время экспозиции. Так как длина волны видимого света очень мала ( $\lambda \approx 6 \cdot 10^{-7}$  м), то выполнить эти условия нелегко. Нужно обеспечить, во-первых, механическую жесткость всех элементов голографической установки, а во-вторых, высокую степень когерентности света. В долазерные времена основные трудности были сопряжены именно с последним требованием. Их пытались преодолеть, используя источники света очень малых размеров (и, конечно, излучающих на одной несущей частоте). Приведем яркий пример. Голограмма предмета, который затеняет площадь  $3 \times 3$  см<sup>2</sup>, с помощью обычного источника света, удаленного от предмета на расстояние всего лишь в 30 см, может быть получена только при условии, что объем источника света по порядку величины не превышает  $10^{-11}$  см<sup>3</sup>. Интенсивность такого источника с неизбежностью оказывается ничтожной. А это означает, что время экспозиции должно быть огромным, составляя месяцы и превосходя даже год для предметов с большими размерами. Именно поэтому Д. Габору, который работал с обычными источниками света, удалось получить голограммы только простейших микроскопических объектов при длительности экспозиции в несколько часов. И именно поэтому голография стала бурно развиваться после появления когерентных источников света — лазеров. Сочетание высокой интенсивности лазерного излучения с его острой направленностью и монохроматичностью сделало лазер незаменимым элементом любой голографической установки.

3. Перспективы применения голографии обширны. Перечислим некоторые из них. Голография уже используется для получения объемного изображения предметов. При этом предметы могут двигаться с достаточно большими скоростями (в этом случае применяются импульсные лазеры, которые в течение очень короткого промежутка времени создают свет достаточно большой интенсивности). Например, голографическая техника позволяет запечатлеть распределение в пространстве капель тумана и мелких частичек выхлопных газов двигателей ракет, мелкие организмы, населяющие толщу воды, и планктон. При этом даже очень быстро летящие частички застывают как неподвижные.

Снимая голограммы в определенной временной последовательности и затем в той же последовательности их рассматривая, мы увидим объемные предметы в движении. Это —

голографическое кино, пока еще не получившее распространения. Не вызывает сомнения реализация в будущем и голографического телевидения. Уже удалось осуществить медленную передачу одной голограммы. Главная трудность голографического телевидения заключается в следующем. Для получения высококачественного изображения в голографии нужны светочувствительные материалы с разрешающей способностью не менее  $10^{-4}$  м. Это на два порядка меньше минимальных деталей, которые можно передать по обычному телевизионному каналу, и, кроме того, меньше диаметра электронного луча на экране передающих и принимающих телетрубок. В связи с этим осуществить качественную передачу голографического изображения по обычной схеме телевидения можно будет только после того, когда в несколько сотен раз будет расширена полоса пропускания телевизионного канала и уменьшен диаметр электронного пучка в передающих и принимающих трубках.

Голография расширяет возможности микроскопических исследований. В голографическом микроскопе получают голограмму с помощью расходящегося лазерного луча. Расходимость опорного и предметного пучков приводит к увеличению масштаба регистрируемой интерференционной картины. При восстановлении изображения голограмму также освещают расходящимся пучком. Это еще более увеличивает изображение. Сверх того, оно может быть дополнительно увеличено, если на стадии восстановления изображения использовать свет с длиной волны больше той, какой обладало излучение, использованное при экспозиции. Это следует из (23.27): чем больше  $\lambda$ , тем больше  $\phi$ , а следовательно, тем крупнее будет выглядеть изображение. Например, если удастся получить голограмму с помощью рентгеновского «освещения» ( $\lambda \leq 10^{-8}$  м), то применяя на стадии восстановления видимый свет с длиной волны  $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$  м, можно добиться увеличения в  $10^6$  раз (это полное увеличение с учетом расходимости используемых пучков). Пока такой микроскоп еще не создан, так как не решена задача получения достаточно интенсивных когерентных рентгеновских лучей.

Оптическая голография — не единственная. Голограммы можно получать, используя и звуковые волны. В этом случае говорят об *акустической голографии*. Прочитываются акустические голограммы с помощью все тех же лазерных пучков. Разъясним это на примере голографического звуковидения. Одна из его схем показана на рис. 23.27. В жидкости находится предмет  $\Pi$  и два когерентных источника звука  $I_1$  и  $I_2$  (они подключены к одному и тому же звуковому генератору). Один из этих источников, например  $I_2$ , создает в воде опорный звуковой сигнал. Источник  $I_1$  облучает предмет своим звуком. На по-

верхности воды образуется интерференционная рябь. Это и есть акустическая голограмма. Освещая ее пучком света от лазера, можно восстановить объемное изображение предмета (при этом жидкость может быть совершенно непрозрачной).

Голография позволяет очень быстро (в десятки тысяч раз быстрее, чем это делают современные электронно-вычислительные машины) распознавать образы. Делается это так. Лазерным лучом сначала просвечивают кадр, на котором запечатлен набор всевозможных образов, включая искомый (буквы, цифры, силуэты различных объектов), а затем — голограмму-эталон исходного образа. Она должна быть получена предварительно при освещении тем же лазерным пучком. На присутствие искомого образа указывает возникновение на выходном кадре светящейся точки, которая и отмечает место расположения образа.

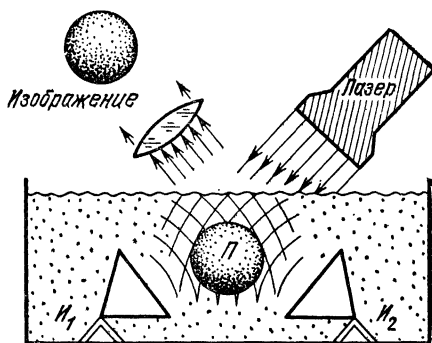


Рис. 23.27.

Уже сейчас голография достаточно широко применяется в технике. Примером может служить интерферометрический метод контроля изделий. Его суть состоит в следующем. Деталь, которую нужно изготовить с очень высокой точностью, освещают лазерным пучком. Рассеянный деталью свет пропускают сквозь голограмму шаблона. Отступления от шаблона проявляются в возникновении интерференционных полос, по которым можно судить о степени отличия детали от шаблона. Шаблон можно и не изготавливать, если голограмму рассчитать и приготовить искусственно.

Голографические методы применяются для обнаружения ничтожно малых деформаций и вибраций объектов, к которым ничем, кроме как светом, прикоснуться нельзя. Такими объектами являются, например, живые клетки. Голография позволяет «слышать» сквозь пустое пространство, в котором звук не распространяется. Переносится он лазерным лучом. Голографическая техника успешно используется при исследовании аэродинамических процессов (например, при продувании моделей самолетов в аэродинамических трубах) и в ряде других областей.

## ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН С ВЕЩЕСТВОМ

### § 24.1. Механизм взаимодействия

1. Электромагнитные волны могут распространяться не только в пустом пространстве, но и в различных средах. Взаимодействие вещества среды с излучением приводит к новым явлениям. Вопрос об этом взаимодействии естественно распадается на два: а) что происходит с веществом при прохождении излучения? б) что происходит с излучением при прохождении через вещество? В этом параграфе будут установлены основные, т. е. наиболее типичные и универсальные, явления обоих типов.

Основной механизм взаимодействия таков. Переменное поле электромагнитной волны периодически ускоряет многочисленные микроскопические заряды вещества. Ускоренные полем заряды теряют полученный избыток энергии двумя путями. Во-первых, они передают энергию другим степеням свободы среды. Во-вторых, как всякие ускоренные заряды, они излучают новые волны. С макроскопической точки зрения в первом случае происходит *поглощение излучения*, а во втором — *распространение излучения в среде* путем непрерывного поглощения и переизлучения электромагнитных волн зарядами вещества.

В этой главе мы ограничимся рассмотрением взаимодействия монохроматических волн с однородными и изотропными средами с относительно простыми электрическими свойствами: неполярными диэлектриками, полярными диэлектриками и электронными проводниками, т. е. металлами. Поведение таких веществ в стационарных полях было рассмотрено в главах 19 и 17. Изложенные там представления естественно обобщаются на случай взаимодействия с электромагнитными волнами. Это обобщение таково.

Электрическое поле волны периодически воздействует на электронные оболочки неполярных частиц, на разноименные ионы в ионных структурах (например,  $\text{Na}^+$  и  $\text{Cl}^-$  в кристаллах поваренной соли), на ориентацию диполей полярных частиц.



Эти процессы приводят, соответственно, к электронной, ионной и ориентационной поляризации диэлектриков электромагнитной волной.

Эти процессы наблюдаются и в металлах, так как отчасти каждый металл является диэлектриком. В металле, кроме электронов проводимости, имеется огромное число связанных зарядов. Ими являются ионы, образующие кристаллическую структуру металла. Но главным для металлов является взаимодействие с электромагнитной волной электронов проводимости. Под действием электрического поля волны электроны проводимости совершают упорядоченные колебания, которые затормаживаются омическим сопротивлением.

В электромагнитной волне существует не только электрическое поле  $\mathbf{E}$ , но и магнитное поле  $\mathbf{B}$ , действующее на токи и магнитные моменты. Однако во многих случаях электрические взаимодействия оказываются значительно сильнее магнитных, так что действием магнитного поля электромагнитной волны на вещество в хорошем приближении можно пренебречь. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим, например, действие волны на электрон. Из (22.10) следует, что в волне магнитное поле

$$B = \frac{1}{c} E$$
 (система СИ). Поэтому отношение абсолютных значений сил, создаваемых, соответственно, магнитным и электрическим полем, будет порядка  $q_0 v B / q_0 E = v/c$ , где  $(-q_0)$  — заряд электрона, а  $v$  — абсолютная величина его скорости. Электроны в атомах и электроны проводимости в металлах имеют скорости, соответствующие  $v/c \leq 10^{-2}$ . Отсюда следует, что магнитные силы составляют не более 1% от электрических, т. е. пренебрежимо малы. Для ионов отношение  $v/c$  на несколько порядков меньше, чем для электронов.

Без вычислений укажем, что энергия взаимодействия поля  $\mathbf{B}$  с магнитным моментом электрона тоже на два порядка меньше энергии взаимодействия поля  $\mathbf{E}$  с зарядом электрона. Исключения составляют ферромагнитные и близкие к ним структуры, а также резонансные взаимодействия магнитных моментов с магнитным полем, которые являются существенно квантовыми и поэтому будут рассмотрены в следующем томе. В этой главе магнитные свойства вещества во внимание приниматься не будут. Поэтому везде в дальнейшем магнитная проницаемость вещества  $\mu$  будет считаться равной единице.

2. Взаимодействие электромагнитного излучения с веществом качественно различается для волн больших и малых амплитуд (интенсивностей). Проследим физическую природу этих различий на практически важном примере взаимодействий световых волн с неполярными диэлектриками. Для этого нужно знать, что происходит с электронами атомов (или моле-

кул) в электрическом поле световой волны. Последовательно это объясняется только в квантовой механике. Можно, однако, как мы уже не раз делали раньше, построить классическую модель, в которой влияние квантовых законов приближенно учтено исходными допущениями. Эта модель такова. С электрическим

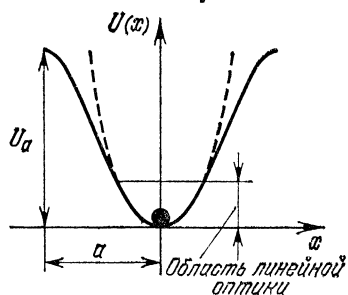


Рис. 24.1.

полем волны в основном взаимодействуют только электроны, наименее прочно связанные в атомах (или молекулах) и называемые обычно внешними\*). Считается, что при отсутствии волны каждый внешний электрон занимает равновесное положение на дне потенциальной ямы  $U(x)$  (рис. 24.1). Эта яма имеет протяженность  $a \approx 10^{-10}$  м (характерный линейный размер атома). Типичное значение глубины ямы  $U_a \approx 5$  эВ  $\approx$

$\approx 10^{-18}$  Дж. Абсолютное значение электрического поля в такой яме

$$E_a \approx \frac{U_a}{q_0 a} \approx \frac{10^{-18} \text{ Дж}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \cdot 10^{-10} \text{ м}} \approx 10^{11} \text{ В/м}, \quad (24.1)$$

где  $q_0$  — элементарный заряд. В сравнении с полем  $E_a$  и устанавливается, является ли амплитуда волны малой или большой. Так, амплитуда световой волны является малой, если

$$E_0 \ll E_a, \quad (24.2)$$

где  $E_0$  — абсолютная величина амплитудного значения электрического поля волны. При выполнении (24.2) потенциальную яму для электрона в хорошем приближении можно аппроксимировать параболой (на рис. 24.1 парабола изображена пунктиром). Соответственно электрон, возбужденный волной малой амплитуды, будет совершать гармонические колебания около своего положения равновесия. При этом возникает переменный электрический дипольный момент  $p(t) = -q_0 r(t)$ , где  $r(t)$  — отклонение электрона от положения равновесия. Среднее значение суммы всех электронных дипольных моментов по единичному объему диэлектрика определяет его поляризованность. Согласно § 7.2 тома I смещение частицы, совершающей вынужденные колебания в параболической яме, пропорционально вынуждающей силе. В нашем случае вынуждающей является сила электрического поля волны. Если же в данном единичном объеме

\*) Еще говорят, что они составляют внешние оболочки атомов (или молекул).

все электронные дипольные моменты линейно зависят от электрического поля  $E(t)$  волны в данном месте, то полю  $E(t)$  будет пропорциональна поляризованность

$$P(t) = \epsilon_0 \chi \dot{E}(t). \quad (24.3)$$

В (24.3) коэффициент  $\chi$  не зависит от поля  $E$ , но может изменяться при изменении частоты волны  $\omega$ . Эта зависимость будет подробно рассмотрена в § 24.2.

Запись линейной зависимости между  $P(t)$  и  $E(t)$  в виде (24.3) используется в системе СИ (в системе СГС  $\epsilon_0$  опускается). Соотношение (24.3) является обобщением стационарной формулы (19.2) на случай поляризации диэлектрика в поле волны малой амплитуды. Коэффициент  $\chi$  по-прежнему называется диэлектрической восприимчивостью.

*Процессы прохождения световых волн через диэлектрик, происходящие с соблюдением условия (24.2) и тем самым (24.3), относятся к линейной оптике. Процессы, возникающие только при нарушении (24.2), составляют предмет нелинейной оптики.*

Подчеркнем, что в условии (24.2) подразумевается пренебрежимая малость  $E_0$  по сравнению с  $E_a$ . Так, при типичном значении  $E_a = 10^{11}$  В/м пренебрежимо малыми являются поля всех нелазерных источников света, для которых  $E_a$  не превышает  $10\text{--}10^3$  В/м. Но уже поля  $10^9\text{--}10^{10}$  В/м пренебрежимо малыми считать нельзя. Поля такой величины свободно генерируются во многих лазерах.

Отметим, что, в отличие от световых, все радиоволны, излучаемые существующими источниками радиоизлучения, удовлетворяют условию (24.2).

Сходный с (24.2) критерий имеется и в том случае, когда диэлектрик поляризуется волной по ионному механизму. Что же касается ориентационной поляризации, то в оптическом диапазоне частот она отсутствует. Объясняется это инерционностью жестких диполей полярных частиц, из-за которой эти диполи не успевают поворачиваться вслед за полем, изменяющимся с оптической частотой. Наконец, оценка малости амплитуды волнового поля в металлах может быть осуществлена только на основе квантовых представлений, которые будут введены в следующем томе.

Основные свойства линейной оптики следуют из (24.3) и заключаются в том, что выполняется *принцип суперпозиции*:

*характер оптических явлений не зависит от интенсивности света; при прохождении волны через среду частота волны не изменяется.*

Все эти свойства нарушаются в нелинейной оптике. В §§ 24.2, 24.3 будут рассмотрены линейные эффекты. Нелинейной оптике посвящен § 24.4.

В заключение этого пункта отметим, что амплитуда поля световой волны может превышать значение, отвечающее статическому напряжению пробоя, без разрушения материала (в хороших изоляторах, таких, как фарфор, поваренная соль и др., пробой происходит в статических полях, величина которых порядка  $10^8$  В/м). Объясняется это тем, что для развития даже наиболее быстрого процесса электрического пробоя требуется время порядка  $10^{-7}$  с, тогда как оптическая волна создает напряжение одного знака только в течение одного полупериода, т. е. времени, примерно равного  $10^{-15}$  с.

3. На примере прохождения света малой амплитуды через диэлектрик (линейная оптика) дадим качественный ответ на два основных вопроса, поставленных в начале параграфа.

В диэлектрике падающая световая волна передает свою энергию колебаниям связанных электронов и ионов. Осциллирующие электроны и ионы являются переменными диполями, т. е. излучателями новых волн. Макроскопически этот процесс непрерывного поглощения и переизлучения электромагнитной энергии зарядами диэлектрика представляет собой распространение волны в диэлектрике. Часть энергии возбужденных диполей передается тепловому движению частиц вещества. В результате этой двухстадийной передачи энергии от волны тепловому движению происходит поглощение волны диэлектриком. Таким образом, в линейном приближении световая волна: а) распространяется; б) затухает. Сам диэлектрик при этом только нагревается.

Подчеркнем, что

*волна, попавшая из вакуума в диэлектрик, не меняет своей частоты.*

Действительно, колебания диполей диэлектрика под действием волны являются вынужденными и поэтому происходят на частоте внешней силы, т. е. на частоте волны (см. § 7.2 тома I). Согласно же (22.8) излучение диполя, в свою очередь, имеет частоту, равную частоте его колебаний. Неизменность частоты (наряду с независимостью от интенсивности) является важнейшим свойством линейной оптики.

Отметим, что другие характеристики волны, в частности длина волны и скорость ее распространения, при попадании в среду меняются. Может измениться и поляризация волны.

Без аргументации укажем, что в линейном приближении и для проводников ответы на вопросы из п. 1 в целом те же, что и для диэлектриков. В этих средах волны также распространяются (с той же частотой) и поглощаются, а среда нагревается. Соответствующие разъяснения с количественным анализом будут даны в § 24.3. Там будут рассмотрены явления, возник-

кающие при падении электромагнитной волны на границу двух сред.

4. Кроме перечисленных выше основных явлений существует (даже в линейной области) большое количество других эффектов, возникающих при прохождении электромагнитного излучения через вещество. В качестве примеров можно привести фотолуминесценцию — испускание света других частот под действием излучения, внутренний фотоэффект — появление у диэлектрика проводимости под действием света, фотохимические реакции и др. У всех этих процессов при всем их разнообразии есть два общих свойства. Во-первых, каждый процесс не универсален, а происходит только в определенной группе сред. Во-вторых, механизм этих процессов является существенно квантовым. Из-за последнего свойства процессы этих типов будут рассмотрены в следующем томе.

## § 24.2. Дисперсия, поглощение, рассеяние электромагнитных волн. Двойное лучепреломление

1. В линейном приближении взаимодействие электромагнитных волн с веществом описывается небольшим числом параметров. Например, однородный и изотропный диэлектрик описывается одной величиной — либо диэлектрической восприимчивостью  $\chi$ , либо диэлектрической проницаемостью  $\epsilon = 1 + \chi$ . Дадим качественное объяснение тому, почему эти величины оказываются зависящими от частоты волны  $\omega$ . Предварительно отметим, что благодаря этому свойству в веществе наблюдается дисперсия электромагнитных волн. Напомним (см. § 7.3 тома I), что дисперсией называется зависимость фазовой скорости распространения волны от ее частоты. Согласно (23.25) скорость электромагнитных волн в веществе зависит от  $\epsilon$ . Поэтому если  $\epsilon = \epsilon(\omega)$ , то распространение в веществе электромагнитных волн с разными частотами оказывается различным.

Зависимость  $\epsilon(\omega)$  возникает по следующим причинам. Как мы уже убедились выше, в поле электромагнитной волны малой амплитуды как связанные в атомах и молекулах внешние электроны, так и ионы в ионных структурах совершают вынужденные колебания. Амплитуда таких колебаний резонансным образом зависит от частоты вынуждающей силы, которую создает электрическое поле волны. Следовательно, пока частота волны будет намного меньше любой из собственных частот электронных и ионных осцилляторов вещества, то эти осцилляторы будут совершать колебания синфазно с полем (см. рис. 7.10 тома I). При таких частотах электронная и ионная поляризованности среды будут точно следовать за изменениями электрического поля волны. Поэтому зависимость электронной и ионной

поляризованностей от поля будет такая же, как и в стационарном случае. Но как только частота волны окажется близкой к одной из собственных частот некоторых электронных или ионных осцилляторов, то амплитуды их колебаний резко возрастут. Электромагнитная волна окажется в резонансе с этими осцилляторами. Соответственно резко увеличится поляризация вещества. Если же частота волны окажется выше любых собственных частот, то вынужденные колебания связанных зарядов вещества прекратятся вовсе (см. рис. 7.8 тома I). Электронной и ионной поляризации вещества не будет. Причиной их исчезновения является инерционность связанных зарядов, из-за которой они не успевают раскачиваться вслед за быстропеременным полем. Итак, мы видим, что поляризованность вещества оказывается зависящей от частоты волны. Согласно же (24.3) это означает, что диэлектрическая восприимчивость  $\chi$ , а следовательно, и диэлектрическая проницаемость  $\epsilon = 1 + \chi$  являются функциями частоты.

Зависимость  $\epsilon(\omega)$  имеет место и при ориентационном механизме поляризации. В поле электромагнитной волны диполи полярных частиц только изменяют свою ориентацию, практически оставаясь неизменными по величине. Поэтому при ориентационной поляризации не происходит резонансного взаимодействия поля с веществом. Но эффект прекращения поляризации при достаточно высоких частотах остается. Он также обусловлен инерционностью полярных частиц. Обладая определенными моментами инерции, полярные частицы не успевают ориентироваться вслед за электрическим полем волны, если ее частота достаточно высока. Эффект пропадания ориентационной поляризации также приводит к зависимости  $\epsilon(\omega)$ .

Представление о том, какой вид имеет зависимость  $\epsilon(\omega) = 1 + \chi(\omega)$ , можно получить из рис. 24.2. На этом рисунке выделены вклады от каждого из упомянутых выше видов поляризации\*). Как видно, зависимость  $\epsilon(\omega)$  не является монотонной. Всплески и провалы на кривой  $\epsilon(\omega)$  обусловлены резонансными явлениями. Лишь при достаточно низких частотах (формально при  $\omega \rightarrow 0$ ) все составляющие  $\epsilon(\omega)$  имеют те значения, которые измеряются в стационарных полях.

В проводниках также наблюдается дисперсия. Отчасти она обусловлена тем, что всякий проводник в какой-то мере является и диэлектриком (см. § 24.1). Но главный эффект в проводниках — это взаимодействие поля с носителями тока. Передавая

---

\*) Начиная с частот порядка  $10^{18}$  Гц, проявляются квантовые свойства электромагнитных волн. Квантованная волна является потоком фотонов. Соответственно взаимодействие таких волн приобретает характер столкновений фотонов с частицами вещества. Эти процессы будут рассмотрены в последнем томе курса.

энергию упорядоченным колебаниям носителей тока, электромагнитная волна затухает по мере проникновения в проводник. Ниже мы непосредственно убедимся в том, что затухание имеет прямое отношение к дисперсии. Затухание наблюдается только в том случае, если частота волны не превосходит некоторого критического значения. Выше этого предела проводник становится прозрачным для электромагнитных волн. Например, металлический Na прозрачен для ультрафиолетовых лучей, частота которых выше  $10^{15}$  Гц. «Просветление» проводника — тоже инерционный эффект, но теперь уже относящийся к носителям тока. Из-за этого эффекта прекращается передача энергии от волны к носителям тока, так что волна проникает в проводник, не затухая. Ниже будут изложены детали механизма этих эффектов.

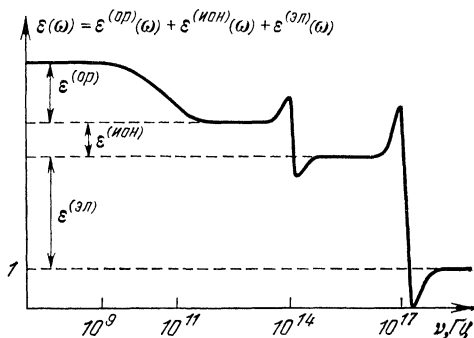


Рис. 24.2.

2. От дисперсии зависит, как распространяются электромагнитные волны разных частот в различных веществах. Эти вопросы имеют важное значение, например, в оптике, потому что в оптических устройствах ряд элементов (к ним относятся разнообразные линзы и призмы) работают в режиме пропускания света. В связи с этим практический интерес представляет задача об определении зависимости скорости распространения света через данную диэлектрическую среду от частоты световой волны. В переменном поле волны диэлектрик следует рассматривать как систему нежестких диполей. Для простоты каждый из них будет считаться образованным колебаниями одного внешнего электрона в атоме или молекуле. В принятой нами модели эти колебания будут рассматриваться на основе законов классической механики.

Составим уравнение движения для связанного электрона, пренебрегая действием на него магнитной силы, что, как было установлено в § 24.1, вполне оправдано. Смещение электрона ограничено объемом атома или молекулы (в дальнейшем для определенности мы будем говорить только об атомах). Длина даже самых коротких ультрафиолетовых световых волн на порядок превосходит линейный размер атома. Поэтому мы можем принять, что в каждый момент электрическое поле волны  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  имеет одно и то же значение во всем объеме атома, т. е. на всей траектории электрона.

Будем считать волну плоско поляризованной. Выберем систему отсчета так, чтобы ее начало совпало с равновесным положением электрона, а ось  $x$  имела направление, параллельное электрическому полю волны. Тогда единственной ненулевой компонентой электрического поля будет  $E_x$ , которую мы обозначим через  $E$ , так что  $\mathbf{E} = (E, 0, 0)$ . Пусть абсолютное значение амплитуды электрического поля волны в атоме равно  $E_0$ , а частота волны равна  $\omega$ . Тогда в атоме электрическое поле будет изменяться во времени следующим образом:

$$E = E_0 e^{-i\omega t}.$$

Так как заряд электрона равен  $-q_0$ , то действующая на электрон со стороны поля волны вынуждающая сила

$$F = -q_0 E_0 e^{-i\omega t}.$$

На электрон также будет действовать возвращающая сила

$$F' = -k\xi$$

и тормозящая сила

$$F'' = -\beta \frac{d\xi}{dt}.$$

Здесь через  $\xi$  обозначено смещение электрона от начала координат, а через  $k$  и  $\beta$ , соответственно, коэффициент упругости связи электрона в атоме и коэффициент сопротивления, определяющий величину тормозящей силы. Обе силы действуют вдоль оси  $x$ , так что  $\mathbf{F}' = \{F'; 0; 0\}$  и т. д.

Вид силы упругости определяется тем, что при малых отклонениях от равновесия возвращающая сила пропорциональна величине отклонения (см. § 7.1 тома I), а вид тормозящей силы взят как типичный для затухающего осциллятора (§ 7.2 тома I). Введение феноменологических сил  $F'$  и  $F''$  соответствует модельному учету квантовых законов. Так, сила  $F'$ , удерживающая электрон в положении равновесия, по своему происхождению электрическая. Но электрические силы могут создавать устойчивые конфигурации заряженных частиц (т. е. атомы) только при учете их квантовых свойств. Поэтому величины  $k$  и  $\beta$  можно рассчитать теоретически только в квантовой теории. Введением силы  $F'$  учитывается опытный факт наличия у атома собственной частоты электронных колебаний. Введением силы  $F''$  учитывается опытный факт затухания этих колебаний после возбуждения атома.

Применяя второй закон Ньютона, составляем уравнение движения электрона в поле суммарной силы  $F + F' + F''$ :

$$m_e \frac{d^2\xi}{dt^2} = -q_0 E_0 e^{-i\omega t} - k\xi - \beta \frac{d\xi}{dt}.$$



Здесь  $m_e$  — масса электрона. При отклонении электрона от положения равновесия на величину  $\xi$  у атома возникает электрический дипольный момент  $p = -q_0\xi$ . Заменяв в уравнении движения электрона  $\xi$  на  $-p/q_0$ , получим уравнение для дипольного момента:

$$\frac{d^2p}{dt^2} + 2\gamma \frac{dp}{dt} + \omega_0^2 p = \frac{q_0^2 E_0}{m_e} e^{-i\omega t}. \quad (24.4)$$

Здесь  $\omega_0 = \sqrt{k/m_e}$  — собственная частота электронного осциллятора, а  $\gamma = \beta/2m_e$  — его коэффициент затухания. Уравнение (24.4) с точностью до обозначений совпадает с уравнением для вынужденных колебаний затухающего гармонического осциллятора (см. (7.23) тома I).

Решение уравнения (24.4) имеет следующий вид:

$$p(t) = \epsilon_0 \alpha(\omega) E(t), \quad (24.5)$$

где

$$\alpha(\omega) = \frac{q_0^2}{\epsilon_0 m_e (\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega)}. \quad (24.6)$$

Это решение соответствует установившемуся режиму вынужденных колебаний. В том, что  $p(t)$  из (24.5) удовлетворяет уравнению (24.4) с  $\alpha(\omega)$  из (24.6), можно убедиться либо непосредственной проверкой, либо посмотрев § 7.2 тома I. Из сравнения (24.5) с (19.4) следует, что величина  $\alpha(\omega)$  является электронной поляризуемостью атома в переменном поле частоты  $\omega$ . Поляризуемость  $\alpha$  в статическом поле, введенная равенством (19.4), является частным случаем  $\alpha(\omega)$ :  $\alpha = \alpha(0)$ .

Квантовомеханический расчет приводит к результатам вида (24.5), (24.6) со следующими уточнениями. Во-первых, у электронов в атомах есть не одна, а несколько собственных частот, у каждой из которых имеется свой коэффициент затухания. Поэтому полная поляризуемость атома является суммой поляризуемостей, создаваемых отдельными собственными колебаниями. Во-вторых, вклад в  $\alpha(\omega)$  от каждого электронного возбуждения входит в сумму с некоторым численным коэффициентом  $f_j$ , называемым *силой осциллятора*. В результате точный ответ, полученный уже квантовыми методами, имеет вид

$$\alpha(\omega) = \sum_{j=1}^n f_j \alpha_j(\omega),$$

где  $\alpha_j(\omega)$  имеет вид (24.6):

$$\alpha_j(\omega) = \frac{q_0^2}{\epsilon_0 m_e (\omega_{0j}^2 - \omega^2 - 2i\gamma_j\omega)}.$$

Здесь каждая из величин  $\omega_{0j}$  и  $\gamma_j$  является, соответственно, одной из собственных электронных частот и отвечающим ей коэффициентом затухания на этой частоте. Постоянные  $f_j$  являются силами осцилляторов для соответствующих собственных частот. Каждая из постоянных  $f_j$  положительна и по порядку величины не отличается от единицы. Мы видим, что классическая феноменологическая модель дает правильную частотную зависимость и правильный порядок величины  $\alpha(\omega)$ .

Пусть концентрация атомов диэлектрика равна  $n_0$  (число атомов в единице объема). Тогда поляризованность  $\mathbf{P}$  диэлектриков в электромагнитной волне с частотой  $\omega$  будет равна

$$\mathbf{P}(t) = n_0 \mathbf{p}(t).$$

Сравнивая это выражение с (24.3), находим диэлектрическую восприимчивость  $\chi(\omega)$ :

$$\chi(\omega) = n_0 \alpha(\omega). \quad (24.7)$$

Мы видим, что диэлектрическая восприимчивость действительно зависит от частоты. Другое свойство функции  $\chi(\omega)$  состоит в том, что она комплексна. Частотная зависимость приводит к дисперсии электромагнитных волн. А комплексность  $\chi(\omega)$  приводит к затуханию этих волн в диэлектрике. В этом можно убедиться следующим образом. Если в уравнении

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

для распространения электромагнитной волны в среде величина  $\varepsilon$  комплексна, то это уравнение имеет решение только в форме затухающих волн. Действительно, если искать решение выписанного выше уравнения в виде плоской волны  $\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t + ikx}$ , то для связи между  $\omega$  и  $k$  получим, что  $k^2 = \omega^2 \varepsilon / c^2$ . Отсюда видно, что при комплексном  $\varepsilon$  комплексным будет и  $k$ :  $k = \text{Re } k + i \text{Im } k$ . Следовательно,  $e^{ikx}$  будет содержать множитель  $e^{-(\text{Im } k)x}$ , экспоненциальнозатухающий с возрастанием  $x$ , если  $\text{Im } k = \frac{\omega}{c} \text{Im } n(\omega) >$

$> 0$ , где  $n(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)}$  — показатель преломления. Можно непосредственно проверить, что знак мнимой части полученной зависимости  $\varepsilon(\omega) = 1 + n_0 \alpha(\omega)$  именно такой, что  $\text{Im } n(\omega) > 0$ . Поэтому при распространении волны вдоль оси  $x$  колебания поля затухают.

В области низких частот, а именно таких, что  $\omega \ll \min \omega_{0j}$  и  $\omega \gamma_j \ll 1$ , в выражениях для поляризуемостей  $\alpha_j(\omega)$  можно положить равными нулю  $\omega^2$  и  $\gamma_j \omega$ . Мы видим, что при низких ча

стотах поляризуемости  $\alpha_j$  действительны, постоянны и положительны:

$$\alpha_j = \alpha_j(0) = \frac{\gamma_j q_0^2}{\epsilon_0 m_e \omega_{0j}^2} \quad (\omega \rightarrow 0). \quad (24.8)$$

Поэтому в низкочастотной области диэлектрическая проницаемость

$$\epsilon = 1 + n_0 \sum_j f_j \alpha_j(0) = 1 + \frac{n_0 q_0^2}{\epsilon_0 m_e} \sum_j \frac{1}{\omega_{0j}^2} > 1$$

тоже действительна, постоянна и положительна. Следовательно, при низких частотах затухание практически отсутствует. Соотношение (24.8) раскрывает микроскопическую природу электронной поляризуемости в стационарных или медленно меняющихся полях.

В области высоких частот, а именно таких, для которых  $\omega \gg \max \omega_{0j}$ , в выражении для  $\alpha_j(\omega)$  в знаменателе величинами  $\omega_{0j}^2$  и  $\gamma_j \omega$  можно пренебречь, как малыми по сравнению с  $\omega^2$ . Поэтому при высоких частотах

$$\alpha_j(\omega) \approx -\frac{q^2}{\epsilon_0 m_e \omega^2} \quad (\omega \rightarrow \infty). \quad (24.9)$$

Отсюда видно, что при очень высоких частотах поляризуемость падает, как  $1/\omega^2$ , с ростом частоты и отрицательна. Следовательно, и в высокочастотной области затухание также практически отсутствует, причем  $\chi(\omega) < 0$ ,  $\omega^2 \chi(\omega) \rightarrow \text{const}$  при  $\omega \rightarrow \infty$ .

Поведение показателя преломления  $n(\omega) = \sqrt{\epsilon(\omega)}$  вблизи каждой из резонансных частот  $\omega_{0j}$  показано на рис. 24.3. Видно, что функция  $\text{Re } n(\omega)$  ведет себя зигзагообразно, а у функции  $\text{Im } n(\omega)$  имеется «горб». Эти особенности делают зависимость  $n(\omega)$  характеристической. По местам расположения «зигзагов» и «горбов» (о последних сигнализирует усиление затухания) можно определять собственные частоты  $\omega_{0j}$  электронных осцилляторов вещества. Экспериментальные значения собственных частот колебаний электронов внешних оболочек в атомах расположены в диапазоне видимого света, а также в ультрафиолетовом и близком инфракрасном диапазонах.

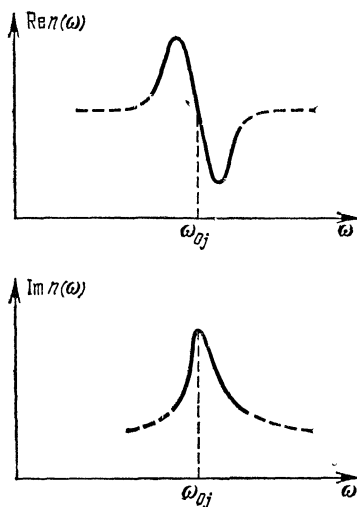


Рис. 24.3.

3. Если бы электромагнитные волны в веществе эффективно взаимодействовали только с электронами внешних оболочек атомов, то согласно (24.8), (24.9) все вещества были бы прозрачными для волн далекого инфракрасного и радиоволнового диапазонов, а также для жесткого ультрафиолетового и всех более высокочастотных диапазонов. Опытные факты показывают, что это не соответствует действительности, так что существуют другие механизмы взаимодействия электромагнитных волн с диэлектриками. Эти механизмы будут рассмотрены в настоящем пункте.

В предыдущем пункте главной является формула (24.6), дающая выражение для поляризуемости  $\alpha(\omega)$ , создаваемой одним собственным колебанием электрона с частотой  $\omega$  и с коэффициентом затухания  $\gamma$ . Эта формула может быть обобщена в двух отношениях. Во-первых, если электрический дипольный момент создается колебаниями не электрона, а иона, то вывод, ведущий к (24.6), можно полностью повторить, заменив массу электрона  $m_e$  на массу иона  $M$ , заряд электрона  $-q_0$  на заряд иона  $q$  и понимая под  $\omega_0$  и  $\gamma$ , соответственно, собственную частоту и коэффициент затухания ионных колебаний. В результате получится аналогичная (24.6) зависимость ионной поляризуемости  $\alpha_{\text{ион}}(\omega)$  от частоты:

$$\alpha_{\text{ион}}(\omega) = \frac{q^2}{\epsilon_0 M (\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega)}. \quad (24.10)$$

У ионов массы значительно больше, чем у электронов, а собственные частоты, напротив, намного ниже:  $m_e \ll M$ ,  $(\omega_0)_{\text{эл}} \gg (\omega_0)_{\text{ион}}$ . Поэтому ионная поляризуемость дает основной вклад в  $\chi(\omega)$  на низких инфракрасных частотах. Обычно соблюдается неравенство

$$M(\omega_0)_{\text{ион}}^2 < m_e (\omega_0)_{\text{эл}}^2.$$

Поэтому если в веществе есть ионная поляризация, то она превышает электронную, но проявляется в области более низких частот (см. рис. 24.2).

Второе обобщение формулы (24.6) опирается на зависимость (24.8), согласно которой (в простейшем случае одной собственной частоты  $\omega_0$ )

$$\frac{q_0^2}{m_e} = \epsilon_0 \omega_0^2 \alpha(0).$$

Это равенство позволяет преобразовать (24.6) к более общему виду:

$$\alpha(\omega) = \frac{\alpha(0) \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega}. \quad (24.11)$$

Это выражение имеет следующий смысл. Любое собственное колебание в веществе, сопровождающееся возникновением электрического дипольного момента, взаимодействует с электромагнитными волнами и дает вклад (24.11) в поляризуемость. Для ионных молекул и особенно для ионных диэлектриков типа NaCl формулу (24.11) можно применять и к коллективным (т. е. не одночастичным) колебаниям. Например, в кристалле NaCl возможны волны, похожие на акустические, в которых, однако, ионы натрия и хлора сходятся и расходятся, так что в волне возникают колебания дипольного момента. Из-за этих колебаний кристалл NaCl, прозрачный для видимого и близкого инфракрасного диапазона, становится совершенно непрозрачным в далеком инфракрасном диапазоне. Коллективные колебания в твердых телах, приводящие к возникновению дипольных моментов, лежат в основном в далекой инфракрасной области.

В далекой ультрафиолетовой области начинается поглощение электромагнитных волн веществом, обусловленное возбуждениями колебаний электронов внутренних оболочек. Кроме того, начинает возникать существенно квантовое явление фотоэффекта — выбивание электронов из атомов полем волны. В целом в рентгеновском диапазоне эффекты поглощения ослабевают в силу асимптотического поведения поляризуемости типа (24.9), поскольку частота рентгеновского излучения далека почти от всех собственных частот вещества. Именно поэтому многие вещества просвечиваются рентгеновскими лучами. Поглощение рентгеновских лучей происходит в основном за счет фотоэффекта. Еще более прозрачно вещество для  $\gamma$ -излучения, для которого фотоэффект становится малым.

4. Рассмотренная выше теория дисперсии может быть распространена и на металлы, являющиеся хорошими проводниками. В металлах электроны проводимости свободны, но испытывают действие тормозящей силы, порождающей омическое сопротивление (см. (17.2)). Поэтому для электрона проводимости поляризуемость имеет тот же вид (24.6), но с  $\omega_0 = 0$ :

$$\alpha(\omega) = -\frac{q_0^2}{\epsilon_0 m_e (\omega^2 + 2i\gamma\omega)}. \quad (24.12)$$

Восприимчивость металла  $\chi(\omega) = n_0 \alpha(\omega)$ , где  $n_0$  — концентрация электронов проводимости.

В металлах коэффициент затухания  $\gamma$  выражается через время релаксации  $\tau$  электронов проводимости. Сравнив уравнение Ньютона (17.2) для электрона проводимости с выписанным в п. 2 уравнением Ньютона для связанного электрона, получим, что если в последнем уравнении положить  $\omega_0 = 0$  ( $k = 0$ ), то оба уравнения совпадут, если

$$2\gamma = \tau^{-1}.$$

Это и есть искомая связь  $\gamma$  с  $\tau$ . Отсюда с учетом (17.6) и определения подвижности можно выразить  $\gamma$  через проводимость:

$$\gamma = \frac{q_0^2 n_0}{2m_e \sigma}. \quad (24.13)$$

Правомерность использования (24.13) для случая переменных полей обосновывается экспериментально выполнением закона Ома в металлах вплоть до очень высоких частот (см. § 17.1).

Для показателя преломления металлов из (24.12) и (24.13) получаем  $(n^2(\omega) = \epsilon(\omega) = 1 + \chi(\omega) = 1 + n_0 \alpha(\omega))$ ;

$$n^2(\omega) = 1 - \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0 (\omega \tau + i)}. \quad (24.14)$$

Из полученного выражения следует, что дисперсия электромагнитных волн в металлах существенно разная в областях низких и высоких частот. При этом низкими здесь надо считать частоты, для которых выполняются оба неравенства

$$\omega \tau \ll 1, \quad \omega \epsilon_0 / \sigma \ll 1. \quad (24.15)$$

Рассмотрим, например, медь. Для меди  $n_0 = 8,5 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$ ,  $\sigma = 5,76 \cdot 10^7 \text{ (Ом} \cdot \text{м)}^{-1}$ . Подставляя эти данные, а также  $q_0 = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$  и  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$  в (24.13), находим

$$\tau^{-1} = 4,1 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}, \quad \sigma / \epsilon_0 = 6,5 \cdot 10^{19} \text{ с}^{-1}.$$

Из этих оценок следует, что для меди низкими частотами будут такие, которые не превышают  $10^{12} \text{ Гц}$  (эта частота соответствует длине волны  $3 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ , принадлежащей микроволновому участку радиодиапазона).

Для низких частот показатель преломления мнимый:

$$n(\omega) \approx \left( i \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega \epsilon_0}} (1 + i),$$

откуда видно, что  $\text{Im } n(\omega) \approx \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega \epsilon_0}} \gg 1$ . Поэтому в низкочастотной области наблюдается сильное затухание электромагнитных волн в металлах.

Для высоких частот, у которых

$$\omega \tau \gg 1, \quad (24.16)$$

показатель преломления действительный:

$$n^2(\omega) \approx 1 - \frac{\sigma}{\tau \epsilon_0 \omega^2} = 1 - \frac{q_0^2 n_0}{\epsilon_0 m_e} \frac{1}{\omega^2}.$$

Следовательно, для волн высоких частот металл становится прозрачным. Согласно (18.1) для таких волн показатель

преломления для металла можно записать в форме

$$n(\omega) = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{\text{пл}}}{\omega}\right)^2}, \quad (24.17)$$

где  $\omega_{\text{пл}}$  — частота плазменных колебаний электронов. Мы видим, что  $\omega_{\text{пл}}$  приобретает смысл критической частоты. Именно, если  $\omega < \omega_{\text{пл}}$ , то  $\text{Im } n(\omega) \neq 0$ , т. е. происходит поглощение электромагнитных волн. Если же  $\omega \gg \omega_{\text{пл}}$ , то показатель преломления становится вещественным, так что поглощение прекращается. Для меди  $\omega_{\text{пл}} \approx 10^{16}$  Гц. Поэтому медь становится прозрачной только в рентгеновском диапазоне частот. Но некоторые металлы прозрачны даже для ультрафиолетовых лучей (например, упомянутый в начале этого параграфа натрий).

Обратим внимание на то, что высокие частоты, о которых мы только что говорили, — это такие, при которых уже наблюдаются отклонения от закона Ома. В связи с этим возникает вопрос о правомерности рассмотрения частот, удовлетворяющих условию (24.16), опираясь при этом на выражение для  $n^2(\omega)$ , полученное выше в предположении выполнения закона Ома. Но, как мы видели, проводимость  $\sigma$  в (24.17) вообще не входит. Это обстоятельство как раз и отражает тот факт, что в высокочастотных полях электроны проводимости не успевают упорядоченным образом следовать за изменениями поля. Поэтому исчезают омические потери (прекращается затухание волн) и перестают действовать связанные с законом Ома ограничения.

Следует обратить внимание еще на одно обстоятельство. В принципе нет никакой разницы в том, находятся ли свободные электроны в металле или же в плазме, например в ионосфере Земли. Поэтому соотношения, полученные выше, справедливы и для электромагнитных волн, проходящих через плазму (разумеется, с соответствующими значениями  $n_0$  и  $\tau$ ). Этим объясняется, почему радиоволны не проходят через ионосферу, если длина волны недостаточно мала.

Для промежуточных частот нужно пользоваться самим выражением (24.14), а не его предельными формами. Из (24.14) следует, что в общем случае показатель преломления проводящей среды имеет зависящие от частоты действительную и мнимую части. Поэтому волны разных частот в проводящей среде распространяются с разными скоростями и при этом по-разному затухают. Если слой такой среды достаточно тонок, то волны могут пройти через него с некоторой потерей интенсивности. Но потери будут разными для волн разных частот. Это явление широко используется при изготовлении специальных полупрозрачных оптических элементов, таких, как, например, защитные очки для работы вблизи высокотемпературных печей. Стекла таких очков покрываются очень тонким слоем золота. Оно практиче-

ски не пропускает инфракрасное излучение, но прозрачно для видимого света.

5. Из опыта известно, что распространение электромагнитных волн в веществе всегда сопровождается их *рассеянием*. Рассеяние заключается в возникновении в веществе волн, распространяющихся в направлениях, отличных от направления падающей на вещество волны. Дадим объяснение этому явлению на примере световых волн, проходящих через вещество, состоящее из одиночных атомов, каждый из которых имеет по одному внешнему электрону. Эти ограничения не имеют принципиального значения, но позволяют упростить рассмотрение.

Как мы уже знаем, каждый возбужденный световой волной электрон становится излучателем новых волн. Эти излучатели действуют когерентно при упорядоченном расположении атомов, ибо в этом случае фазовые соотношения колебаний разных электронов строго определены и обусловлены только временем, которое необходимо волне для того, чтобы покрыть расстояние от одного осциллятора до другого. Следовательно, при упорядоченном расположении атомов в среде происходит интерференция многих волн. Ее главным свойством является погашение всех световых волн, распространяющихся в направлениях, отличных от направления падающей волны (доказательство этого мы опускаем). А это означает, что в этом случае рассеяние света не происходит. Оно возникает, если расположение атомов начинает случайным образом изменяться. Эти изменения нарушают согласованность излучений разных атомов. Соответственно разрушается интерференционная картина и, как следствие этого, появляются волны, распространяющиеся в других направлениях. Они-то и образуют рассеянный свет. Из этой аргументации следует, что рассеяние происходит всегда в результате хаотических тепловых изменений в расположении атомов.

Волны разных частот рассеиваются различным образом. Найдем частотную зависимость интенсивности рассеянных волн  $I_{\text{расс}}$ . Так как при беспорядочных изменениях положений атомов интерференция отсутствует, то для определения  $I_{\text{расс}}(\omega)$  достаточно найти, как зависит от частоты излучение одного атома. Интенсивность всего рассеянного света будет равна сумме интенсивностей излучений разных атомов.

Согласно (22.30) полная интенсивность излучения одного атома пропорциональна  $\omega^4 p_0^2$ , где  $\omega$  — частота осциллирующего в атоме электрона (он осциллирует на частоте падающей волны) и  $p_0$  — амплитуда возбужденного волной электронного дипольного момента. Из (24.5) и (24.6) следует, что  $p_0 \sim [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2]^{-1/2}$ , где  $\omega_0$  — собственная частота электронного осциллятора. Учтем теперь, что рассеяние будет заметным эффектом



лишь при слабом затухании волны. Поэтому примем, что коэффициент затухания  $\gamma$  пренебрежимо мал. Тогда  $\rho_0 \sim (\omega_0^2 - \omega^2)^{-1}$ , так что

$$\bar{I}_{\text{расс}}(\omega) \sim \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}. \quad (24.18)$$

Это и есть искомая зависимость. У нее существует две предельных формы, описывающие рассеяние в области низких частот ( $\omega \ll \omega_0$ ) и в области высоких частот ( $\omega \gg \omega_0$ ).

Рассеяние волн низких частот называется *рэлеевским*. Для рэлеевского рассеяния интенсивность

$$\bar{I}_{\text{расс}}^{(\text{рэл})}(\omega) \sim \omega^4.$$

Рэлеевское рассеяние происходит, например, при прохождении видимого света через воздух. Голубой свет, частота которого примерно в  $\sqrt{2}$  раз больше частоты света у красной границы солнечного спектра, рассеивается почти в 4 раза интенсивнее, чем красный. Поэтому цвет неба голубой. Еще более высокочастотный свет рассеивается еще сильнее, чем голубой. Однако поток фиолетового излучения от Солнца у поверхности Земли слабее, чем поток голубого излучения.

Рассеяние волн высоких частот называется *томсоновским*. Для томсоновского рассеяния интенсивность  $\bar{I}_{\text{расс}}^{(\text{томс})}$  не зависит от частоты:

$$\bar{I}_{\text{расс}}^{(\text{томс})} \sim \frac{\omega^4}{\omega^4} = 1..$$

Этот результат получается из (24.18) приравниванием  $\omega_0$  нулю. Отсюда следует, что томсоновское рассеяние происходит на свободных зарядах.

**6.** До сих пор мы рассматривали дисперсию электромагнитных волн в изотропных средах, свойства которых одинаковы во всех направлениях. В монокристаллах свойство изотропии может не соблюдаться. В частности, собственные частоты колебаний электронов и ионов могут быть разными для колебаний в разных направлениях. Очевидно, что это различие приведет к тому, что показатель преломления будет зависеть не только от частоты, но и от направления распространения волны и от ее поляризации.

Установим качественный характер этих зависимостей в оптике для простейшего (и наиболее важного для приложений) класса *одноосных оптически анизотропных кристаллов*.

Оптически анизотропный кристалл называется одноосным, если в нем есть такое направление, что собственные частоты электронов и ионов одинаковы для колебаний, происходящих в плоскости, перпендикулярной выделенному направлению, но от-

лично от собственных частот колебаний вдоль этого направления. Указанное выделенное направление называется *оптической осью*. В механике доказывается (это придется принять на веру), что в направлениях, составляющих угол  $\alpha$  с оптической осью, собственные частоты имеют определенные промежуточные значения, плавно и монотонно меняющиеся при изменении  $\alpha$  от нуля до  $\pi/2$ .

Перейдем к показателю преломления света  $n$ . Учтем, что для плоско поляризованной световой волны  $n$  зависит от спектра колебаний электронов и ионов в направлении поляризации света. Рассмотрим зависимость показателя преломления от направления и поляризации. Начнем с монохроматической волны, распространяющейся вдоль оптической оси. В этом случае волна возбуждает колебания электрических диполей кристалла в плоскости, перпендикулярной оптической оси. В одноосном кристалле все колебания в этой плоскости одинаковы. Поэтому показатели преломления  $n_o$  для обеих линейно независимых поляризаций волны будут одинаковы. Другая картина получится для распространения волны в направлении, перпендикулярном оптической оси. Если направление поляризации волны перпендикулярно оптической оси, то показатель преломления для нее равен тому же значению  $n_o$ . Но если волна поляризована в направлении оптической оси, то она раскачивает осцилляторы с другими собственными частотами, так что показатель преломления уже будет другим. Обозначим его через  $n_e$ . Одноосный кристалл называется положительным при  $n_e > n_o$  и отрицательным при  $n_e < n_o$ .

Промежуточная ситуация получается при прохождении волны под углом  $\alpha$  относительно оптической оси, т. е. при  $0 < \alpha < \pi/2$ . В этом случае при поляризации, перпендикулярной оптической оси, показатель преломления по-прежнему равен  $n_o$ , а при поляризации в плоскости направления луча и оптической оси показатель преломления имеет значение  $n(\alpha)$ , промежуточное между  $n_o$  и  $n_e$ . Рассмотренные выше предельные случаи соответствуют значениям  $\alpha = 0$  и  $\alpha = \pi/2$ . Поэтому  $n(0) = n_o$ , а  $n(\pi/2) = n_e$ . Луч света, поляризованного перпендикулярно оптической оси, называется *обыкновенным*. Луч света, поляризованного в плоскости направления луча и оптической оси, называется *необыкновенным*. Зависимости показателей преломления этих лучей от угла  $\alpha$  в отрицательном одноосном кристалле иллюстрирует рис. 24.4. На рисунке ось  $z$  ориентирована вдоль оптической оси кристалла. Обыкновенный луч поляризован перпендикулярно плоскости чертежа, а необыкновенный — в плоскости чертежа, перпендикулярно волновому вектору  $\mathbf{k}$ . Значениям  $n(\alpha)$  отвечают точки эллипса, а значению  $n_o$  — точки окружности радиуса  $n_o$  (для положительного

кристалла точки  $n(\alpha)$ , составляют эллипс, лежащий вне круга радиуса  $n_o$ ).

Оптическая анизотропия кристалла приводит к явлению *двойного лучепреломления*. Оно состоит в том, что неполяризованный луч, попадая в одноосный кристалл под ненулевым углом к оптической оси, расщепляется на две компоненты, плоско поляризованные во взаимно перпендикулярных плоскостях. Расщепление происходит из-за того, что показатели преломления для этих компонент различны.

Явление двойного лучепреломления широко используется для получения поляризованных лучей и для других целей.

Другим важным для приложений свойством анизотропных кристаллов является возможность плавно изменять показатель преломления посредством поворота кристалла. Это свойство используется в нелинейной оптике (см. § 24.4).

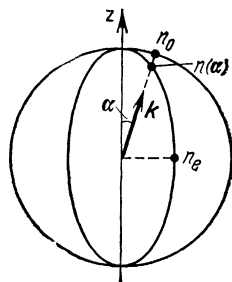


Рис. 24.4.

### § 24.3. Поведение электромагнитных волн на границах сред

1. Часто бывает, что, распространяясь в одной среде, электромагнитная волна переходит в другую. Если при этом толщина переходного слоя ничтожно мала по сравнению с длиной волны, то в этом случае границу раздела сред можно считать гладкой поверхностью. Таким образом можно, например, рассматривать границу между воздухом и стеклом, в которых распространяется свет (переходная область, в которой свойства вещества изменяются, имеет толщину всего в несколько ангстрем, а длина световых волн измеряется тысячами ангстрем). На поверхностях раздела различных сред волны *отражаются* и *преломляются*. Эти явления и будут рассмотрены в настоящем параграфе.

Допустим, что имеется одна плоская поверхность раздела, по разные стороны которой находятся два различных диэлектрических вещества. Каждое из них является линейной, однородной и изотропной средой. Как мы знаем, в линейной среде всякая волна представляема суперпозицией плоских монохроматических волн. Поэтому для установления законов отражения и преломления достаточно рассмотреть влияние границы раздела на распространение только таких волн. Примем также, что в обеих средах отсутствует поглощение, так что их диэлектрические проницаемости вещественны,

Пусть исходная волна, называемая *падающей*, распространяется из первого диэлектрика во второй. Выберем систему отсчета так, как это показано на рис. 24.5. Ось  $z$  системы ориентирована перпендикулярно волновому вектору  $\mathbf{k}$  падающей волны, в силу чего  $k_z = 0$  и  $\mathbf{k} = \{k_x, k_y, 0\}$ . Плоскость рис. 24.5 параллельна  $\mathbf{k}$ , а ось  $z$  ориентирована перпендикулярно плоскости рисунка. Принимается, что падающая волна проходит

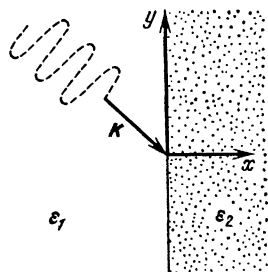


Рис. 24.5.

через диэлектрик с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_1(\omega)$ , где  $\omega$  — частота падающей волны. Другой диэлектрик имеет диэлектрическую проницаемость  $\epsilon_2(\omega)$ .

Как и все законы электродинамики, законы отражения и преломления электромагнитных волн являются следствиями уравнений Максвелла и устанавливаются так. Сначала находятся волновые решения уравнений Максвелла в каждой из соприкасающихся сред — в нашем случае в двух полупространствах; при  $x < 0$  и при  $x > 0$ . При этом учитываются

два очевидных обстоятельства. Во-первых, решение в области  $x < 0$  должно содержать падающую волну, которая считается заранее заданной. Во-вторых, в области  $x > 0$  решение должно описывать только уходящую волну в сторону от меньших  $x$  к большим, поскольку мы приняли, что нет волн, падающих из второго диэлектрика в первый.

Затем решения, полученные по разные стороны от поверхности раздела, «сшиваются» на этой поверхности с помощью граничных условий. Для стационарных полей условия такого рода получены в §§ 19.4 и 20.4. Напомним, что эти условия были выведены из уравнений Максвелла, примененных к случаям, когда свойства вещества изменяются скачком при переходе через некоторую поверхность. Граничные условия, полученные в §§ 19.4 и 20.4, применимы и для полей, зависящих от времени, в том числе и волновых. В этом можно убедиться, повторив вывод граничных условий не из стационарных, а из общих уравнений Максвелла (21.4). Причина возможности переноса граничных условий для стационарных полей на нестационарный случай имеет простое объяснение. В двух точках, которые находятся на разных сторонах поверхности раздела и не смещены друг относительно друга вдоль этой поверхности, поля не запаздывают одно относительно другого, поскольку расстояние между этими точками равно нулю \*).

\*) Это в макроскопическом масштабе. Пространственное разделение, конечно, есть, но оно является микроскопическим, а следовательно, пренебрежимым при макроскопическом описании полей.

Выпишем граничные условия (19.21) и (20.24), приняв во внимание выбор системы отсчета (рис. 24.5), условие  $\mu = 1$  и то, что поверхность раздела является чистой, так что на ней нет свободных зарядов. В итоге получим, что при  $x = 0$  на всей плоскости  $y, z$  будут выполняться соотношения

$$\varepsilon_1 E_x^{(1)} = \varepsilon_2 E_x^{(2)}, \quad E_y^{(1)} = E_y^{(2)}, \quad E_z^{(1)} = E_z^{(2)}, \quad \mathbf{B}^{(1)} = \mathbf{B}^{(2)}. \quad (24.19)$$

Здесь верхние индексы отмечают поля волн, распространяющихся, соответственно, в полупространствах  $x < 0$  и  $x > 0$ .

2. Приступим к решению задачи. Ее теперь можно сформулировать так: найти такое решение свободных уравнений Максвелла (21.4) (приняв материальные уравнения (21.5) с  $\sigma = 0$  и  $\mu = 1$ ), которое слева от границы раздела (см. рис. 24.5) описывает только заданную падающую волну и справа от границы раздела не содержит волны, падающей на эту границу. При этом волны в полупространствах  $x < 0$  и  $x > 0$  должны быть «сшитыми» граничными условиями (24.19). Отметим, что для падающей волны по ее определению волновой вектор должен быть направлен к поверхности раздела, т. е. должно быть  $k_x > 0$ .

Прежде всего докажем от противного, что задача имеет только одно решение. Если решений два, то их разность — тоже решение, но с условием, что падающая волна равна нулю. А при нулевой падающей волне единственное решение нулевое, так что оба решения должны совпадать. Доказав единственность решения, мы получили возможность делать любые предположения о виде этого решения. Если при этих предположениях решение найдется, то других решений быть не может.

При  $x < 0$  ищем решение в виде суммы двух плоских монохроматических волн. Сумму электрических волновых полей запишем так:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t). \quad (24.20)$$

Волна  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t + i(\mathbf{k}, \mathbf{r})}$  — падающая. По условиям задачи волна  $\mathbf{E}_1$  может распространяться только от границы раздела. Поэтому волну  $\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{10} e^{-i\omega t + i(\mathbf{k}, \mathbf{r})}$  назовем *отраженной*. Соответственно для нее должно быть  $k_{1x} < 0$ .

При  $x > 0$  электрическое поле волны ищем в виде  $\mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{20} e^{-i\omega t + i(\mathbf{k}, \mathbf{r})}$ . Эту волну назовем *преломленной*. По условиям задачи преломленная волна идет от поверхности раздела. Поэтому для волнового вектора  $\mathbf{k}_2$  этой волны будет  $k_{2x} > 0$ . Примем также, что все волны распространяются в плоскости  $x, y$ , т. е. что  $k_{1z} = k_{2z} = 0$ . Эти равенства подсказываются соображениями симметрии.

Очевидно, что все три волны должны иметь одну и ту же частоту:  $\omega = \omega_1 = \omega_2$ . Только при соблюдении этого требования

граничные условия (24.19), выполненные в момент  $t = 0$ , будут выполняться и во все последующие моменты времени. Теперь нам достаточно обеспечить выполнение граничных условий только при  $t = 0$ .

Перейдем к ограничениям на волновые векторы.

Во-первых, при одинаковых частотах падающая, отраженная и преломленная волны будут решениями волновых уравнений с фазовыми скоростями, равными, соответственно,  $v_1 = c/n_1$  и  $v_2 = c/n_2$  при условии

$$\frac{k^2}{n_1^2} = \frac{k_1^2}{n_1^2} = \frac{k_2^2}{n_2^2}, \quad (24.21)$$

где  $n_1^2 = \epsilon_1$ ,  $n_2^2 = \epsilon_2$ .

Во-вторых, надо потребовать, чтобы граничные условия, выполненные в одной точке поверхности раздела, выполнялись бы и в других ее точках. Для этого необходимо и достаточно, чтобы проекции всех трех волновых векторов на плоскость границы были одинаковы, т. е. чтобы было

$$k_z = k_{1z} = k_{2z} = 0, \quad k_y = k_{1y} = k_{2y}. \quad (24.22)$$

Условие равенства  $z$ -компонент у нас уже выполнено. Все эти компоненты равны нулю, что и отмечено в (24.22). Условия равенства  $y$ -компонент, совместно с условиями  $k_{1x} < 0$ ,  $k_{2x} > 0$  и (24.21), однозначно определяют  $x$ -компоненты волновых векторов, для которых получается

$$k_{1x} = -k_x, \quad k_{2x} = k^2 \frac{n_2^2}{n_1^2} - k_y^2. \quad (24.23)$$

Волновые векторы  $k_1$ ,  $k_2$  отраженной и преломленной волн найдены. Осталось найти амплитуды этих волн. Для нахождения амплитуд выпишем граничные условия (24.19) в точке границы  $y = 0$ ,  $z = 0$  в момент  $t = 0$ :

$$\begin{aligned} \epsilon_1 E_{0x} + \epsilon_1 E_{10x} &= \epsilon_2 E_{20x}, & E_{0y} + E_{10y} &= E_{20y}, \\ E_{0z} + E_{10z} &= E_{20z}, & \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_{10} &= \mathbf{B}_{20}. \end{aligned} \quad (24.24)$$

Подобно (22.10), амплитуды магнитного поля в падающей, отраженной и преломленной волнах линейно выражаются, соответственно, через  $\mathbf{E}_0$ ,  $\mathbf{E}_{10}$ ,  $\mathbf{E}_{20}$ :

$$\omega \mathbf{B}_0 = [k \mathbf{E}_0], \quad \omega \mathbf{B}_{10} = [k_1 \mathbf{E}_{10}], \quad \omega \mathbf{B}_{20} = [k_2 \mathbf{E}_{20}]^*. \quad (24.25)$$

Подставим эти выражения для амплитуд магнитных полей в

\*) Например, для падающей волны единичный вектор  $\mathbf{n}$  в направлении ее распространения равен  $\mathbf{k}/k$ . Отношение же  $\omega/k$  равно фазовой скорости волны, кооторая в вакууме равна  $c_1$ .

последнее равенство (24.24). После этого соотношения (24.24) образуют систему шести линейных уравнений с шестью неизвестными — компонентами векторов  $\mathbf{E}_{10}$  и  $\mathbf{E}_{20}$ . Поскольку число неизвестных равно числу уравнений, то система имеет решение\*), причем единственное. С этим решением все характеристики отраженной и преломленной волн будут выражены через характеристики падающей волны и через показатели преломления  $n_1, n_2$  обеих сред. Все коэффициенты в уравнениях (24.24) действительны. Поэтому решения для компонент векторов  $\mathbf{E}_{10}, \mathbf{E}_{20}$  тоже действительные. Сдвиги фаз для отраженной и преломленной волн могут иметь значения только нуль или  $\pi$ . Об одном возможном исключении будет сказано ниже.

3. Проведем анализ физических следствий из полученного решения задачи о прохождении плоской электромагнитной волны через границу двух диэлектриков.

Назовем: *углом падения*  $\alpha$  угол между направлением падающего луча и нормалью к границе; *углом отражения*  $\beta$  угол между направлением отраженного луча и нормалью к границе; *углом преломления*  $\gamma$  угол между направлением преломленного луча и нормалью к границе. Эти углы изображены на рис. 24.6. Из этого рисунка следует, что

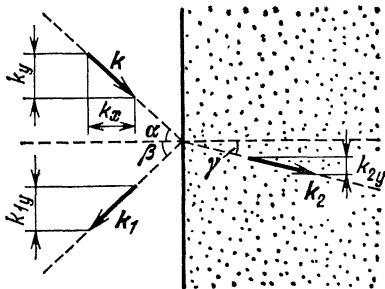


Рис. 24.6.

$$\sin \alpha = \frac{|k_y|}{k}, \quad \sin \beta = \frac{|k_{1y}|}{k_1}, \quad \sin \gamma = \frac{|k_{2y}|}{k},$$

где  $k = |\mathbf{k}|$  и т. д. Из (24.22), (24.23) теперь получается

$$\alpha = \beta, \quad (24.26)$$

$$\frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{n_1}{n_2}. \quad (24.27)$$

Мы получили основные законы отражения и преломления. Перечислим их.

*Частота волны не изменяется ни при отражении, ни при преломлении.*

*Три луча — падающий, отраженный и преломленный — лежат в одной плоскости, перпендикулярной границе раздела сред. Плоскость, в которой лежат эти лучи, называется плоскостью падения.*

\*) Если, конечно, соответствующий детерминант не равен нулю, что можно проверить.

Это свойство следует из первого соотношения (24.22).

*Угол падения равен углу отражения*, что отмечено в равенстве (24.26). Этот закон как опытный факт был известен уже Евклиду.

*Отношение синусов углов преломления и отражения равно отношению показателей преломления сред, в которых распространяются луч падающий и луч преломленный.*

Этот закон выражен соотношением (24.27). Он был установлен опытным путем Снеллиусом. Если, пользуясь (23.24) и (23.25), выразить закон Снеллиуса через фазовые скорости  $v_1$  и  $v_2$  в соответствующих средах:

$$\frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{v_2}{v_1}, \quad (24.28)$$

то перечисленные четыре закона оказываются применимыми к прохождению через плоскую границу двух сред волн любой природы, например акустических. Надо только, чтобы выполнялись такие условия, как малость толщины переходного слоя по сравнению с длиной волны, линейность, однородность и изотропность обеих сред. Действительно, при выводе этих законов использованы только общие свойства волн и не использованы такие специфические свойства, как, например, наличие и тип поляризации или закон дисперсии.

Нетривиальным волновым эффектом является *просачивание преломленного излучения при полном внутреннем отражении*.

Само полное внутреннее отражение происходит при

$$\frac{n_2}{n_1} < \sin \alpha. \quad (24.29)$$

В этом случае закон Снеллиуса (24.27) теряет смысл, так как для величины  $\sin \gamma$  формально получается значение, превышающее единицу. Поэтому при полном внутреннем отражении преломленной волны нет. Однако и в случае (24.29) сохраняют смысл соотношения (24.21), (24.22), (24.23), из которых при  $n_2/n_1 > \sin \alpha$  выводится закон Снеллиуса. Из перечисленных соотношений в случае полного внутреннего отражения для квадрата  $x$ -компоненты волнового вектора преломленного луча  $k_{2x}$  получается отрицательное выражение:

$$k_{2x}^2 = -k^2 \left( \sin^2 \alpha - \frac{n_2^2}{n_1^2} \right).$$

Поэтому величина  $k_{2x}$  — чисто мнимая:

$$k_{2x} = \pm i\kappa,$$

где  $\kappa$  — действительное положительное число. Как видно из этой формулы,  $1/\kappa$  имеет порядок длины волны  $\lambda$  падающего излу-



чения. Мнимость проекции  $k_{2x}$  означает, что преломленная волна имеет множитель

$$e^{i k_{2x} x} = e^{-\gamma x}.$$

Амплитуда преломленной волны не может расти при росте  $x$  \*). Поэтому физический смысл имеет только значение  $k_{2x} = +i\gamma$ . Тогда амплитуда преломленной волны будет пропорциональной  $e^{-\gamma x}$  на расстоянии  $x$  от границы. Мы пришли к выводу, что при полном внутреннем отражении преломленная волна существует, но экспоненциально затухает с увеличением расстояния от границы, спадая практически до нуля на расстоянии порядка нескольких длин волн от границы. Этот эффект и называется просачиванием преломленного излучения.

В просачивающейся волне происходят колебания векторов  $\mathbf{E}_2$  и  $\mathbf{B}_2$  с частотой  $\omega$ . Пусть теперь преломляющая среда с показателем преломления  $n_2$  представляет собой плоский слой толщины порядка длины волны, окруженный с обеих сторон диэлектрической средой с показателем преломления  $n_1 > n_2$ . Если на этот слой упадет луч под углом  $\alpha$ , удовлетворяющим условию полного внутреннего отражения (24.28), то преломленный луч, не успев полностью затухнуть, достигнет второй границы, на которой уже существует нормальное преломление. Поэтому часть волны пройдет через слой диэлектрика (рис. 24.7).

В оптическом диапазоне частот эффект просачивания наблюдать довольно трудно, поскольку длина волны мала, так что слой с показателем преломления  $n_2$  должен быть очень тонким (для видимого света его толщина не должна превосходить  $10^{-7}$  м). Но на волнах микроволнового диапазона этот эффект обнаруживается достаточно просто. Например, трехсантиметровая волна экспоненциально затухающего поля распространяется с заметной интенсивностью на расстояния порядка 1 см. Сделать же прослойку такой толщины нетрудно.

Приведем один из способов обнаружения эффекта прохождения трехсантиметровых волн. Излучающая антенна направляет волну на парафиновую призму, сечение которой имеет вид равнобедренного прямоугольного треугольника. Показатель преломления парафина для трехсантиметровых волн равен 1,5. Соответственно угол полного внутреннего отражения составляет

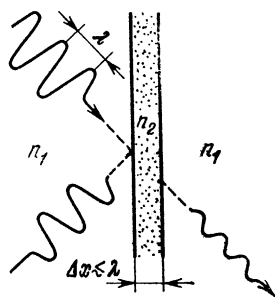


Рис. 24.7.

\*) При таком росте энергия волны будет бесконечно велика.

41,5°. Поэтому трехсантиметровая волна полностью отражается от поверхности парафина, наклоненной под углом в 45° к падающей волне. Отраженная волна будет приниматься приемником *A* (левая часть рис. 24.8). Если к первой призме очень плотно прижать вторую такую же призму, то приход волны отметит только приемник *B* (центральная часть рис. 24.8). Если

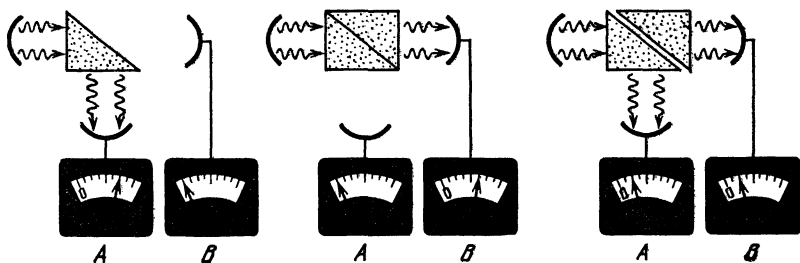


Рис. 24.8.

же призмы раздвинуты \*) на расстояние, по порядку величины не превышающее 1 см, то излучение зарегистрируют оба приемника *A* и *B* (правая часть рис. 24.8). При этом последний принимает только волну, «просочившуюся» через зазор между призмами.

Эффекты, свойственные только электромагнитным волнам, описываются уравнениями (24.24) для амплитуд. Решать эти уравнения несложно, но громоздко. Решение содержит полную информацию как о распределении интенсивности между отраженной и преломленной волнами при различных углах падения и поляризациях падающей волны, так и о поляризациях отраженных и преломленных волн.

Мерой распределения интенсивности между волнами является коэффициент отражения  $R$ , который по определению равен отношению интенсивностей  $\bar{I}/\bar{I}_1$  падающей и отраженной волн:

$$R = \frac{\bar{I}}{\bar{I}_1} = \frac{E_0^2}{E_{10}^2}. \quad (24.30)$$

Из поляризационных эффектов заслуживает упоминания так просто формулируемый факт:

*Если угол падения равен  $\text{arctg } n_2/n_1$  и падающий луч поляризован в плоскости падения, то отраженный луч отсутствует.*

\*) В результате образуется слой воздуха, показатель преломления которого близок к единице, т. е. заметно меньше показателя преломления парафина.

Это свойство называется *законом Брюстера*, а угол  $\alpha_B = \arctg(n_2/n_1)$  — *углом Брюстера*. Если же луч, падающий под углом Брюстера, поляризован в плоскости границы, то отраженный луч поляризован в той же плоскости и, как нетрудно убедиться, перпендикулярен преломленному лучу.

Из свойств угла Брюстера следует, что если неполяризованный луч падает на поверхность под углом Брюстера, то отраженный луч полностью поляризован. Прозрачная пластинка, расположенная под углом Брюстера к генерируемым лучам, имеется в рабочем объеме многих лазеров. Лазер с такой пластинкой излучает поляризованный свет.

В заключение этого пункта отметим, что электромагнитные волны, особенно низкочастотные, хорошо отражаются от металлов. Это отражение обусловлено большой величиной мнимой части показателя преломления металла в низкочастотной области. Волна затухает в металле на глубине порядка  $\lambda$ , поэтому она не успевает передать значительную часть своей энергии свободным электронам и почти полностью отражается. Полученные нами общие формулы (24.24) справедливы и для границы металла, если его показатель преломления считать комплексным. Соответствующие расчеты также несложны, но громоздки. Для ориентировки укажем, что коэффициент отражения  $R$  от металла для желтой линии излучения натрия при нормальном падении луча равен 0,95 для серебра, 0,85 для золота и 0,74 для меди.

4. Отражение и преломление электромагнитных волн широко используются в различных целях. Например, по отраженным (а также по рассеянным) радиоволнам обнаруживаются различные объекты и определяется их местоположение в пространстве. На этом основаны все методы радиолокации. С помощью радиолокации решаются задачи воздушной, морской и космической навигации, ведется наблюдение земной поверхности с летательных аппаратов, действуют системы предупреждения о приближении препятствий, производится обнаружение самолетов и других летательных устройств и осуществляется слежение за ними, действуют системы радиоальтиметров (высотометров), радиодальномеров и др. Без хорошего отражения радиоволн от металлов была бы невыполнима работа различных электромагнитных резонаторов и волноводов. В этих системах стоячие волны и волны, распространяющиеся в строго определенных направлениях, получают только благодаря отражению волн от металлических поверхностей, предотвращающих растекание электромагнитной энергии в ненужных направлениях.

Отражение и преломление света наиболее широко используется в различных оптических приборах и устройствах. Так, преломление света позволяет производить пространственное

разделение световых волн различных частот. Делается это, например, с помощью спектральных призм (рис. 24.9). Преломлением же обусловлено собирающее и рассеивающее действие различных линз. Отражая свет, различные зеркала создают направленные световые потоки, разворачивают их в нужных направлениях, удерживают свет в заданном объеме (оптические резонаторы).

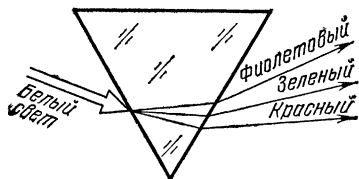


Рис. 24.9.

На многократных отражениях в диэлектриках основано действие многослойных тонких пленок. Толщины и показатели преломления слоев можно подбирать так, чтобы получить оптические фильтры с заданными свойствами, например полностью отражающие излучение на определенных заданных частотах и пропускающие все остальное. Такого рода оптические фильтры аналогичны давно применяющимся фильтрам электрических сигналов.

На многократных отражениях в диэлектриках основано действие многослойных тонких пленок. Толщины и показатели преломления слоев можно подбирать так, чтобы получить оптические фильтры с заданными свойствами, например полностью отражающие излучение на определенных заданных частотах и пропускающие все остальное. Такого рода оптические фильтры аналогичны давно применяющимся фильтрам электрических сигналов.

данными свойствами, например полностью отражающие излучение на определенных заданных частотах и пропускающие все остальное. Такого рода оптические фильтры аналогичны давно применяющимся фильтрам электрических сигналов.

## § 24.4. Нелинейная оптика

1. Для рассмотрения эффектов нелинейной оптики примем два упрощающих допущения. Во-первых, будем считать справедливыми законы классической (т. е. некантовой) физики. Во-вторых, будем считать, что электрические волновые поля  $E$  хотя и сравнимы с характеристическим полем  $E_a$  в среде (см. § 21.1), но все же заметно меньше его:

$$E < E_a. \quad (24.31)$$

Без доказательства отметим, что первое допущение качественно справедливо для большинства основных нелинейных эффектов. Принятие второго допущения оправдано тем, что оно, с одной стороны, коренным образом упрощает рассмотрение, а с другой стороны, выполняется в подавляющем большинстве реальных ситуаций, даже для мощных лазерных источников.

Из первого допущения следует, что мы имеем право пользоваться уравнениями Максвелла (21.4) для описания распространения электромагнитных волн в среде. Но в материальных уравнениях пользоваться линейной зависимостью между полями  $D$  и  $E$  или, что то же, линейной зависимостью между поляризованностью среды  $P$  и полем  $E$  нельзя. Однако в силу второго допущения вектор  $P$  с достаточной точностью можно аппроксимировать несколькими членами степенного ряда по  $E$  \*).

\*) Этот ряд представляет собой разложение Тейлора функции  $P(E)$  с центром разложения в точке  $E = 0$ .

Рассмотрим простейший случай. Среда является однородной и изотропной. В нее проникает монохроматическая световая волна с частотой  $\omega$  и волновым числом  $k$ , распространяющаяся в  $x$ -направлении и практически не затухающая. Электрическое поле волны поляризовано вдоль оси  $z$ . Обозначим через  $E$  единственную ненулевую компоненту поля:

$$E = E_0 \cos(\omega t - kx). \quad (24.32)$$

В этом случае представляющий поляризованность  $P(E)$  степенной ряд имеет такой вид:

$$P = \epsilon_0 \chi E + \kappa E^2 + \theta E^3 + \dots, \quad (24.33)$$

где  $\kappa$ ,  $\theta$ ,  $\dots$  — новые константы, характеризующие нелинейные электрические свойства среды. Эти константы, разумеется, могут быть разными для различных частот.

Обратим внимание на то, что в (24.32) мы отказались от комплексного представления волнового поля. Это необходимо в связи с тем, что в нелинейном случае таким представлением пользоваться нельзя.

Эффекты, порождаемые вторым слагаемым в (24.33), называются *квадратичными по полю*. Эффекты, порождаемые третьим слагаемым, называются *кубическими по полю*. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только этих эффектов.

Подчеркнем, что малость нелинейных слагаемых в (24.33) не обязательно приводит к малым нелинейным эффектам. В определенных условиях эти эффекты могут накапливаться. Примеры такого накопления будут приведены ниже.

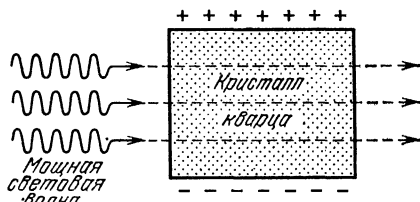


Рис. 24.10.

2. Рассмотрим квадратичные нелинейные эффекты. Подставив  $E$  из (24.32) в квадратичный член  $\kappa E^2$  из (24.33), получим сумму двух слагаемых:

$$\kappa E^2 = \kappa E_0^2 \cos^2(\omega t - kx) = \frac{\kappa E_0^2}{2} + \frac{\kappa E_0^2}{2} \cos(2\omega t - 2kx). \quad (24.34)$$

Первое из них определяет постоянную поляризованность среды

$$P_2 = \frac{1}{2} \kappa E_0^2 = \text{const.}$$

Появление такой поляризации кристалла кварца в поле достаточно интенсивной волны схематически изображено на рис. 24.10.

Второе слагаемое в правой части (24.34) описывает волну поляризации с удвоенной частотой  $2\omega$ . Осциллирующая с частотой  $2\omega$  поляризованность является источником нового излучения. Это излучение также имеет частоту  $2\omega$  и поэтому называется *второй гармоникой исходной волны*. Итак, выясняется, что квадратичная нелинейность в (24.33) приводит к генерации второй гармоники света в среде. Например, проходя через кристалл дигидрофосфата калия, красный свет рубинового лазера с длиной волны  $\gamma = 6943 \text{ \AA}$  возбуждает ультрафиолетовое излучение с длиной волны  $\lambda_2 = \lambda/2 = 3472 \text{ \AA}$ . Вторые гармоники начали получать с 1961 г. Нелинейный эффект генерации вторых (и более высоких) гармоник используется для получения мощного высокомонокроматического ультрафиолетового излучения, для которого нет лазерных источников.

Рассмотрим вопрос об условиях накопления для нелинейного квадратичного процесса генерации второй гармоники. Для этого оценим степень синфазности волн с частотами  $2\omega$ , излучаемых различными элементами объема среды. Запишем электрическое поле второй гармоники в виде

$$E_2(x, t) = E_{20} \cos(2\omega t - k_2 x), \quad (24.35)$$

где  $k_2$  — волновое число второй гармоники. Фазовая скорость волны (24.35) равна

$$v_2 = \frac{2\omega}{k_2} = \frac{c}{n(2\omega)}, \quad (24.36)$$

где  $n(2\omega)$  — показатель преломления среды для волн с частотой  $2\omega$ . Фазовая скорость волны поляризации

$$P_2(x, t) = \frac{1}{2} \chi E_0^2 \cos(2\omega t - 2kx), \quad (24.37)$$

квадратичной по электрическому полю (см. (24.37) и (24.35)), равна

$$v_P = \frac{2\omega}{2k} = \frac{c}{n(\omega)}. \quad (24.38)$$

Здесь  $n(\omega)$  — показатель преломления среды для волн с частотой  $\omega$ . Из (24.38) видно, что фазовая скорость волны поляризации  $P_2(x, t)$  совпадает с фазовой скоростью исходной волны с частотой  $\omega$ . Сравнивая (24.35) и (24.37), находим, что на расстоянии  $l$  в направлении распространения волн возникает разность фаз волн  $P_2(x, t)$  и  $E_2(x, t)$ , равная

$$\Delta\theta = (k_2 - 2k)l.$$

Согласно (24.36) и (24.38) эту величину можно привести к виду

$$\Delta\theta = \frac{2\omega}{c} \{n(2\omega) - n(\omega)\}l.$$

Введем характеристическую длину  $l_0$ , определив ее из условия  $\Delta\theta = \pi$ :

$$l_0 = \frac{\pi c}{2\omega \{n(2\omega) - n(\omega)\}}. \quad (24.39)$$

Смысл длины  $l_0$  следующий. Очевидно, что на расстояниях  $l \leq l_0$  направления электрических полей, генерируемых разными элементами среды на частоте  $2\omega$ , будут иметь одну и ту же ориентацию. Поэтому, складываясь, эти поля будут усиливать друг друга, что приведет к возрастанию интенсивности второй гармоники. Наоборот, при  $l > l_0$  интерференция выразится в ослаблении интенсивности второй гармоники. Мы видим, что  $l_0$  имеет смысл длины когерентности для вторичных волн с частотой  $2\omega$ . При фиксированной амплитуде падающей волны интенсивность второй гармоники максимальна при прохождении слоя толщины  $l_0$ . Из-за большой величины оптической дисперсии (велика разность  $n(2\omega) - n(\omega)$ ) значения  $l_0$  невелики. Так, для кварца при красном свете исходной волны будет  $l_0 \approx 10^{-5}$  м. Малость  $l_0$  резко ограничивает возможности достижения высоких интенсивностей вторых гармоник.

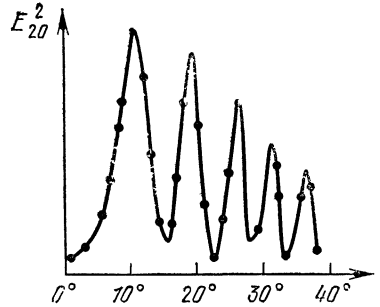


Рис. 24.11.

Зависимость интенсивности второй гармоники в пластине из кварца от ее толщины приведена на рис. 24.11. По оси ординат графика, представленного на этом рисунке, отложены значения  $E_{2\omega}^2$  — величины, пропорциональной интенсивности. Максимумы интенсивности соответствуют толщинам  $(2m + 1)l_0$ , где  $m$  — целое число. По оси абсцисс отложены значения не толщины пластины, а углов ее наклона относительно луча. Толщина слоя среды, через который проходит свет, варьируется изменением этого угла.

Согласно (24.39) длина  $l_0$  становится неограниченно большой, если

$$n(2\omega) = n(\omega). \quad (24.40)$$

Из (24.36) и (24.38) следует, что при выполнении (24.40)

$$v_2 = v_p. \quad (24.41)$$

Это равенство называется *условием фазового синхронизма* или, короче, *условием синхронизма*. При выполнении (24.41) эффект рождения второй гармоники будет неограниченно накапливать-

ся, так что ее можно интенсивно генерировать даже при слабой нелинейности. Это дает возможность получать интенсивные вторые гармоники даже при относительно небольших интенсивностях падающего излучения. В частности, точные оценки значения коэффициентов  $\chi$  из (24.33) обычно производятся на маломощных, но удобных гелий-неоновых лазерах.

В начале шестидесятих годов нашего столетия была высказана и экспериментально подтверждена идея о выполнении условий фазового синхронизма в оптически анизотропных кристаллах, в которых показатель преломления достаточно сильно различается для разных поляризаций луча. В таком кристалле изменение показателя преломления при удвоении частоты можно скомпенсировать, выбрав условия таким образом, чтобы исходная волна была бы обыкновенной, а вторая гармоника — необыкновенной (или наоборот, в зависимости от знака эффекта двойного лучепреломления)\*). В области прозрачности кристалла для любой фиксированной поляризации  $n(2\omega) > n(\omega)$ . Поэтому для оптически отрицательных одноосных кристаллов (см. § 24.2, п. 4) волновой синхронизм если и возможен, то только при обыкновенной падающей волне, а для положительных одноосных кристаллов — при необыкновенной. Соответственно условие синхронизма имеет вид

$$n(\alpha, 2\omega) = n_o(\omega)$$

для отрицательного кристалла и

$$n_o(2\omega) = n(\alpha, \omega)$$

для положительного. Если эффект двойного лучепреломления достаточно велик, то выполнения этих условий можно добиться выбором угла  $\alpha$  между оптической осью кристалла и направлением распространения падающей волны (\*\*). Например, первое из указанных выше условий может быть выполнено в отрицательном кристалле дигидрофосфата калия (\*\*\*)), а второе — в положительном кристалле кварца.

Отметим, что реальная длина когерентности ограничена степенью непараллельности падающего пучка, поскольку даже при малых изменениях угла  $\alpha$  условие синхронизма нарушается настолько, что значения  $l_0$  резко уменьшаются. Поэтому рождение второй гармоники не удастся наблюдать на нелазерных источниках света.

\*) Для анизотропных сред разложение  $P(E)$  в ряд по степеням  $E$  уже не имеет столь простого вида, как (24.33). Но формулировка условия синхронизма сохраняется.

\*\*) Ниже будет указан один способ осуществления условия синхронизма.

\*\*\*) В литературе он называется кристаллом КДР.



Укажем без выкладок на еще один квадратичный эффект, оказавшийся важным для практических приложений. Он называется *параметрическим усилением света* и состоит в следующем. Пусть через среду проходит плоская световая волна с частотой  $\omega$ . Допустим, что в среде дополнительно возбуждены (например, вследствие флуктуаций) плоские волны в направлении исходной волны с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , причем  $\omega_1 + \omega_2 = \omega$ . Тогда в каждом элементарном объеме среды за счет квадратичной нелинейности эти волны будут усиливать друг друга. В этом можно убедиться, вычислив квадрат суммы полей  $E_0 \cos(\omega t - kx) + E_{01} \cos(\omega_1 t - k_1 x) + E_{02} \cos(\omega_2 t - k_2 x)$ . В общем случае произвольной  $\omega_1 < \omega$  и произвольной среды волны с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , порождаемые разными элементарными объемами среды, в среднем будут гасить друг друга, так что реально порождения этих волн не будет. Однако и здесь существует условие фазового синхронизма. Оно может быть выведено тем же способом, который был описан выше. Здесь условие синхронизма приводится к изящному виду:

$$k = k_1 + k_2.$$

Глубокий квантовый смысл этого равенства будет объяснен в следующем томе. Важно, что это условие одно и то же для синфазности усиления обеих волн. Выполнения этого условия и здесь можно добиться в кристаллах с двойным лучепреломлением. При этом происходит расщепление исходной волны с частотой  $\omega$  на две с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2 = \omega - \omega_1$ . Это явление и называется параметрическим усилением света. Меняя показатель преломления кристалла (например, путем изменения ориентации его оптической оси), можно плавно перестраивать частоту  $\omega$ . А поместив такой кристалл между двумя параллельными зеркалами, мы получим лазер с плавно регулируемой частотой (предложен Р. В. Хохловым и С. А. Ахмановым 1962 г.). В настоящее время лазеры с перестраиваемой частотой перекрывают весь оптический диапазон частот. Такие лазеры очень важны для спектрального анализа, для исследований селективных фотохимических реакций и для многих других приложений.

3. Рассмотрим кубичные нелинейные эффекты. Они связаны с третьим слагаемым в (24.33). Подставив  $E$  из (24.32) в третье слагаемое (24.33), после простых тригонометрических преобразований получим

$$\begin{aligned} P_3(x, t) &= \theta E^3(\tau, t) = \theta E_0^3 \cos^3(\omega t - kx) = \\ &= \frac{3}{4} \theta E_0^3 \cos(\omega t - kx) + \frac{1}{4} \theta E_0^3 \cos\{3\omega t - 3kx\}. \end{aligned} \quad (24.42)$$

Смысл второго слагаемого в этой формуле (пропорционального  $\cos(3\omega t - 3kx)$ ) очевиден. Оно приводит к генерации третьей гармоники исходной волны или, что то же самое, волны с утроенной частотой. Эти гармоники наблюдаются с 1962 г. Сейчас получают и более высокие гармоники. Высшие гармоники используются для создания лазеров в ультрафиолетовой области частот, там, где обычные методы накачки становятся неэффективными.

Рассмотрим более подробно первое слагаемое в правой части (24.42), пропорциональное  $\cos(\omega t - kx)$ . Это слагаемое характеризует нелинейную поляризацию среды, *имеющую ту же частоту*, что и линейная поляризованность  $\epsilon_0 \chi E$ . Поэтому

суммарная поляризованность с исходной частотой  $\omega$  равна

$$P(x, t) = \left( \chi + \frac{3}{4} \frac{\theta}{\epsilon_0} E_0^2 \right) E_0 \cos(\omega t - kx). \quad (24.43)$$

Отсюда следует, что

*кубичная нелинейность изменяет диэлектрическую восприимчивость среды. У восприимчивости появляется нелинейная добавка, зависящая от интенсивности исходной волны \*).*

Обозначим полную диэлектрическую восприимчивость через  $\chi_{\text{полн}}$ . Тогда сказанное выражается равенством

$$\chi_{\text{полн}} = \chi + \frac{3}{4\epsilon_0} \theta E_0^2. \quad (24.44)$$

В не очень интенсивной волне, удовлетворяющей критерию  $\frac{\theta}{\epsilon_0} E_0^2 \ll 1$ , полный показатель преломления среды  $n_{\text{полн}} = \sqrt{1 + \chi_{\text{полн}}}$  можно с хорошей точностью представить выражением

$$\begin{aligned} n_{\text{полн}} &= \sqrt{1 + \chi + \frac{3}{4\epsilon_0} \theta E_0^2} = \\ &= \sqrt{1 + \chi} \sqrt{1 + \frac{(3/4\epsilon_0) \theta E_0^2}{1 + \chi}} \approx n + \frac{3\theta E_0^2}{8\epsilon_0 n}, \end{aligned}$$

где  $n = \sqrt{1 + \chi}$ . Мы видим, что кубичная нелинейность приводит к зависимости показателя преломления от интенсивности падающей световой волны. Подчеркнем, что не только величина, но и *знак коэффициента*  $\theta$  может быть различным для разных веществ. При этом условие фазового синхронизма здесь выполняется автоматически (нет разных частот), так что эффекты, связанные с зависимостью показателя преломления среды от интенсивности падающей волны, всегда накапливаются. Отметим, что возможность изменять показатель преломления среды вариацией интенсивности падающего излучения используется для выполнения условия фазового синхронизма для вторых гармоник.

Интересными и важными эффектами, обусловленными кубичной нелинейностью, являются *самофокусировка* и *самодефокусировка* узких световых лучей большой интенсивности. В поперечном сечении луча плотность потока энергии максимальна в центре и спадает к периферии. Соответственно и абсолютная величина нелинейной добавки к коэффициенту преломления *нарастает* при переходе от периферии луча к его центру. Это означает, что луч превращает среду в линзу для самого себя. При

\*) Напоминаем, что интенсивность пропорциональна  $E_0^2$ .

$\theta < 0$  эта линза будет собирающей, так что луч будет сходиться. Это явление и называется самофокусировкой. Если  $\theta > 0$ , то, наоборот, среда становится рассеивающей линзой. Луч будет расходиться, что и называется самодефокусировкой. Начиная с некоторой интенсивности, самофокусировка компенсирует дифракционное расхождение луча. При еще большей мощности начинается лавинообразное возникновение тонких и ярких «стрел»: самофокусировка приводит к увеличению плотности излучения, что в свою очередь усиливает фокусирующее действие среды. В результате плотность потока энергии в «стреле» может на много порядков превысить плотность потока энергии в исходной волне.

4. В заключение сравним оптические и акустические нелинейные свойства. И там, и там основным является нелинейный эффект обогащения волны высшими гармониками. Но дисперсия акустических волн мала, так что в нелинейной акустике условие фазового синхронизма практически всегда довольно хорошо выполняется. Поэтому распространяющаяся интенсивная акустическая волна все время обогащается высшими гармониками (эффект накопления). При достаточно высокой интенсивности это обогащение приводит к образованию ударной волны (см. § 14.3 тома I). В ударной волне вклад высших гармоник максимален. В отличие от акустики, дисперсия света не является малой. Поэтому в оптике с возникновением высших гармоник условие синхронизма нарушается, чем и исключается образование оптических ударных волн.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Аккумулятор 133  
Анион 104  
Антенна 264, 283  
Антиферромагнетик 201—202
- Бинния 277—278
- Вектор Пойнтинга 51—53  
Взаимная индуктивность 211, 233—234  
Волновая зона 271, 294  
Волновая поверхность 256, 305  
Волновод 245, 265  
Время когерентности 279—281, 285, 288  
Время релаксации  
носителя тока 94—95, 98  
плазменных электронов 147  
свободных электронов металла 102, 333—334
- Гальванический элемент 133  
Гамма-лучи 262, 264  
Генератор переменного тока 223—227  
Генерация света  
второй гармоники 350  
третьей гармоники 353  
Геометрическая оптика 256, 263—264, 287  
Гидрат, гидратация 104  
Гидромагнитная неустойчивость плазмы 152  
Гистерезис  
диэлектрический 168—170  
магнитный 198—201  
Голограмма 313—317  
Голография 312—319  
Градиент скалярного поля 13  
Граничные условия  
в электродинамике 42  
на поверхности проводников 118, 178  
на поверхностях раздела диэлектриков 176—177, 341  
на поверхностях раздела магнетиков 208, 340—341  
Гюйгенса — Френеля принцип 306
- Давление  
магнитного поля на сверхпроводник 136  
света 52—53  
статического электрического поля на проводник 117
- Двойное лучепреломление 339, 352—353  
Дебаевский радиус 141  
Диамагнетизм (диамагнетик) 189—192, 206—207, 210  
Дивергенция векторного поля 13  
Диполь Герца 270, 283, 295, 299  
Дипольный момент (диполь) электрический 81, 83, 154—155, 159—162, 164, 167, 172, 270—274, 322, 324, 329, 333, 336
- Диссоциация 103  
Дисперсия  
дифракционной решетки 311  
спектрального прибора 311  
электромагнитных волн 325—327, 330, 334  
Дифракция 256, 263—264, 305—312  
Диэлектрика поляризация 154  
Диэлектрическая  
восприимчивость 174, 323, 325—326, 330, 334, 354  
проницаемость 174, 177, 216, 218, 304, 325—326, 330—331, 339—340, 342  
Длина когерентности 281—284, 286, 305, 351—352
- Емкостные коэффициенты 119  
Емкость  
конденсатора 119  
сосредоточенного элемента 235  
единичного провода 119
- Закон  
Био — Савара — Лапласа 66  
Брюстера 346—347  
Джоуля — Ленца 97, 126  
дисперсии электромагнитных волн 46, 247  
Кюри 162, 194  
Кюри — Вейсса 171, 198  
Ома 96, 216, 219, 224  
Ома обобщенный 111, 124  
Снеллиуса 344  
Фарадея электролиза (первый и второй) 105  
Замирание радиосигнала 283  
Затухание (поглощение) электромагнитной волны 324, 330—331, 333—335  
Зеркала Френеля 301  
Зоны Френеля 308
- Импеданс (комплексное сопротивление)  
емкости 236  
индуктивности 233  
резистора (сопротивления) 231  
сосредоточенного элемента 230, 236—238
- Инвариантность  
заряда 25  
калибровочная (градиентная) 44  
Индуктивность 211, 213, 231—234  
Индукция  
магнитного поля 33  
электрическая (электрическое смещение) 173  
Интенсивность  
излучения диполя Герца 273  
дифференциальная 273  
колебаний (волны) измеряемая 275, 285, 296—299, 336—337, 346

- Интерференция 276—286, 294—305, 306, 308—310, 313—314 319, 336  
 Интерферометр 302—303  
 Ионосфера 138, 145, 262, 335  
 Источник  
 тока 109—110, 132—133  
 электромагнитных волн 261—262
- Калибровка Лоренца 45  
 Катyon 104  
 Квазар 263  
 Квазинейтральность плазмы 137, 139—142, 147  
 Квазистационарный ток 217  
 Квантовый генератор 286—294  
 Кинетическая неустойчивость плазмы 152—153  
 Клаузиуса — Моссотти формула 164, 171, 174  
 Когерентность 275, 277—286, 287, 288, 295, 297, 300, 303, 306, 308—309, 313, 317—318, 336  
 Колебания электромагнитного поля 242—245  
 Колебательный контур 238, 264—265  
 Конденсатор 54, 121, 234—235  
 Контактная разность потенциалов 127—128  
 Контур тока 62  
 Красное смещение 251  
 Критерий Рэлея 312  
 Коэрцитивная сила  
 магнитная 200  
 электрическая 169  
 Коэффициент  
 Пельтье 129  
 отражения электромагнитной волны 346
- Лазер 283, 286—294  
 Линза Френеля 308  
 Луч  
 волны 256, 305  
 света необыкновенный 338  
 света обыкновенный 338
- Магнетик 182  
 Магнетон  
 Бора 88, 182—183  
 ядерный 88, 183  
 Магнитная  
 восприимчивость 205—207  
 постоянная 203—204  
 проницаемость 206—208, 213, 216, 219—220, 304, 321  
 Магнитное зеркало (пробка) 150—152  
 Магнитный момент 87, 88, 182—183, 187, 189, 191, 192  
 Магнитострикция 202—203  
 Магнитосфера 138  
 Мазер 283, 286  
 Материальные уравнения 10, 97, 173—174, 205—206, 216, 304, 348  
 Многополосник 229  
 Модель ферромагнетика Вейсса 195—198  
 Модулированное колебание 258, 283, 290  
 Молекулярное поле Вейсса 196  
 Мощность переменного тока 226, 236—238
- Намагниченность 182—187, 191, 192, 194, 196—202, 204—205, 210  
 Намагничивание 182
- Напряженность  
 магнитного поля 204  
 электрического поля 33  
 Насыщение  
 диэлектрическое 169  
 парамагнетика 194  
 тока 106  
 ферромагнетика 199  
 неполярная молекула 159, 320  
 несущая частота 258, 279  
 Носители электрического тока 92, 111, 134—135, 327
- Обратимости принцип 299  
 Объем когерентности 282  
 Оператор  
 Д'Аламбера 46  
 дифференцирования векторный 12  
 Лапласа 15  
 Опорный пучок в голографии 313  
 Оптика  
 линейная 323, 324  
 нелинейная 323, 348—355  
 Оптическая ось кристалла 337—338  
 Оптический фильтр 348  
 Остаточная  
 намагниченность 200  
 поляризованности 169  
 Отражение электромагнитной волны 300, 339—347
- Парамагнетизм (парамагнетик) 192—195  
 Параметрическое усиление света 353  
 Петля гистерезиса 170, 199  
 Пинч-эффект 150  
 Пироэлектричество 166  
 Плазма 107, 138, 335  
 Плазменная частота 141, 335  
 Плазменные колебания 141, 146—147  
 Плазменный шнур 149, 152  
 Плотность  
 заряда 26—28  
 зарядов линейная 70  
 зарядов поверхностная 69, 114, 156, 176—177  
 зарядов поляризации 156, 172—173  
 импульса электромагнитного поля 49—50, 52—53  
 момента импульса электромагнитного поля 53—55  
 потока энергии электромагнитной волны 252  
 тока 27—28  
 тока намагничивания 183, 187, 203  
 тока поверхностная 77, 183—184  
 тока поляризации 214—215  
 тока смещения 41, 218  
 энергии электромагнитного поля 49—51  
 Поглощение излучения 320  
 Подвижность носителя тока 94  
 Показатель преломления 304, 330—331, 334—335, 338, 342, 350—352, 354  
 Поле  
 в проводниках электрическое 113—116  
 векторное 11  
 вихревое 15, 219  
 диполя Герца 271  
 диполя электрического 82  
 заряженного цилиндра 71  
 заряженного шара 73, 163  
 заряженной плоскости 69  
 индукционное электрическое 38, 189, 190, 209

- Поле квазистационарное 217, 219  
   локальное 162  
   магнитного момента 87, 89  
   макроскопическое 9, 111, 113—114, 172—175, 204—205, 216  
   микроскопическое 9, 37, 39—41  
   однородное 15  
   переменное (нестационарное) 8  
   постоянное (стационарное) 8  
   потенциальное 15, 57, 113—114, 173, 225, 229, 232, 235  
   прямого провода с током 74  
   свободное 246  
   скалярное 11  
   соленоида с током 79, 207  
   сторонней силы 110  
   Холла 134  
   электромагнитное 7, 8, 33  
 Полное внутреннее отражение 344  
 Поляризация диэлектрика  
   ориентационная 161, 321, 323, 326  
   полная 165, 331, 323, 325—326  
   спонтанная 168  
 Поляризация электронная 159, 321—322, 325—326  
   электромагнитной волны 338—339, 347, 349  
 Поляризованность 154, 157—158, 160—161, 163—164, 168, 174, 180, 214—215, 323, 326, 330, 348, 350, 353  
 Поляризуемость 159, 161, 164, 165, 174, 329—332  
 Полярная молекула 159, 320  
 Постоянная Холла 135  
 Потенциал  
   векторный 43, 56—57, 66—67, 86—87, 205, 272  
   скалярный 43, 56—57, 60—61, 81—82, 113—114, 144, 173  
 Потенциальная энергия  
   тока в магнитном поле 65  
   электрических зарядов в электрическом поле 57  
 Поток векторного поля  
   интегральный 18  
   полный 18  
 Правильно  
   Кирхгофа (первое и второе) 123, 125, 229—230  
   Ленца 189, 221—222, 232—233  
 Предметный пучок в голографии 313  
 Преломление волн 339—347  
 Преобразование Лоренца  
   плотностей заряда и тока 30  
   электромагнитного поля 47—48  
 Проводимость 96, 101—104, 106, 147, 216, 218—220, 334  
 Пульсар 263  
  
**Работа**  
   выхода 111—112  
   намагничивания магнетика 210  
   поляризации диэлектрика 180  
   по приращению магнитного поля в магнетике 209—210  
   по приращению электрического поля в диэлектрике 179—180  
 Радиационные пояса Земли 138—139, 151, 152  
 Радиус когерентности 281, 308  
 Разрешающая способность 312  
 Разряд газовой 107  
 Рассеяние электромагнитной волны 336—337  
 Резистор (сопротивление) 231  
 Резонанс 238—239, 326  
  
**Резонатор**  
   оптический 257, 261—262  
   электромагнитный 244, 265, 287  
 Рекомбинация 103, 138  
 Рентгеновское излучение 261—262  
 Ротор векторного поля 13  
 Рэлеевское рассеяние 337  
  
**Самофокусировка (самодефокусировка)**  
   света 354—355  
 Сегнетоэлектрики 168, 170—172  
**Сила**  
   Ампера 34  
   взаимодействия параллельных токов 75  
   действия магнитного поля на магнетик 210  
   действия электрического поля на диэлектрик 180  
   осциллятора 321  
 Силовые линии 35  
 Скин-эффект 221  
**Скорость**  
   дрейфа носителей 94  
   распространения электромагнитной волны 46, 304  
 Сольват, сольватация 104  
 Соотношения неопределенностей 255—257, 259  
 Сопротивление  
   активное 238  
   омическое 96, 231, 236, 238—242  
   реактивное 238  
 Состояние электромагнитного поля 32—33  
 Суперпозиция полей принцип 35, 42—43, 61—62, 66, 174—175, 205—206, 216, 276, 307, 323  
  
**Теорема**  
   Гаусса — Остроградского 22  
   Пойнтинга, 52  
   Стокса 20  
   Фурье 257  
 Термоионизация 107  
 Термо-э д с. 128  
 Термозлемент 130  
**Ток**  
   индукционный 38, 136, 151  
   квазистационарный 217, 218  
   линейный 62—63, 66—67, 87, 88, 122  
   намагничивания 183  
   переменный (нестационарный) 29, 214, 223, 230  
   постоянный (стационарный) 29  
   трехфазный 227  
   Фуко 219, 221, 228  
 Токомагнитная камера (Токамак) 150, 152  
 Томсоновское рассеяние 337  
 Топливный элемент 133—134  
**Точка**  
   Кюри сегнетоэлектрика 170  
   Кюри ферромагнетика 197  
   Нееля 201—202  
  
**Ударная ионизация** 106  
**Уравнение**  
   Лапласа 118  
   непрерывности 29, 43, 51  
   Пуассона 56, 143—144  
**Уравнения Максвелла**  
   для свободного поля 246  
   макроскопические 9, 173, 175, 204—205, 216, 304, 340, 348

- Уравнения материальные 10, 97, 173—174, 205—206, 216, 348
- Условие квазистационарности 218  
фазового синхронизма 351, 353—355
- Фактор Ланде 188  
Ферромагнетик 202  
Феррит 202  
Ферромагнетизм (ферромагнетик) 195—201, 220  
Фиолетовое смещение 251  
Фосфоресценция 269  
Фотоэлемент 266—267  
Фотоэффект 266, 325, 333
- Циркуляция векторного поля 19  
Цуг волн 284
- Число Фарадея 105
- Ширина частотного распределения (спектральной линии) 279  
Шкала электромагнитных волн 261—262
- Электрет 165  
Электрическая постоянная 37—38  
Электрические колебания 238—245  
Электрический заряд 25—26  
Электрический ток 93
- Электродвижущая сила (э. д. с.) 124, 128  
Э. д. с. взаимной индукции 234  
Э. д. с. индукции 221—223, 225, 228, 231—233  
Э. д. с. самоиндукции 232—234  
Электролиз 105  
Электролит 102  
Электромагнитные волны 46, 246—260, 303—304, 320  
Электронвольт 57—58  
Электропроводность 93  
Электрострикция 167  
Электрохимический эквивалент 105  
Элементарный заряд 26  
Элемент сосредоточенный 228—229, 230  
Энергия  
диполя электрического в электрическом поле 85  
заряженного конденсатора 119  
магнитного момента в магнитном поле 90  
магнитного поля в магнетике 210—211  
поля электромагнитного 51—52, 58—59, 65—66, 252  
электрического поля в диэлектрике 181
- Эффект  
Допплера электромагнитный 250  
Зеебека 128  
Мейснера 135—136  
Пельтье 129  
пьезоэлектрический 166—168  
Холла 134
- Явление  
взаимной индукции 233, 265  
самоиндукции 232  
электромагнитной индукции 38, 135—136, 190, 219, 223

*Александр Валентинович Астахов,  
Юрий Михайлович Широков*

КУРС ФИЗИКИ, ТОМ II

Электромагнитное поле

М., 1980 г., 360 стр с илл.

Редактор *Н. А. Михалина*

Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод*

Корректоры *Т. С. Плетнева, Т. С. Вайсберг*

ИБ № 2170

Сдано в набор 15.05.80. Подписано к печати 05.11.80.  
Бумага 60×90/16. Тип. № 3. Литературная гарнитура. Вы-  
сокая печать. Условн. печ. л. 22,5. Уч.-изд. л. 22,44. Тираж  
30 000 экз. Заказ № 646. Цена книги 1 р.

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы  
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ленинградская типография № 2 головное предприятие  
ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского  
объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой  
Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР  
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.  
198052, г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29.