М. Атья

ЛЕКЦИИ ПО K-ТЕОРИИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР» Москва 1967

Лекции известного английского математика М. Ф. Атья, удостоенного Филдсовской медали 1966г., посвящены одному из самых мощных средств современной алгебраической топологии — теории K-функтора. С помощью этой теории недавно были решены многие трудные задачи из разных областей математики.

Понятие K-функтора возникло в самое последнее время и опирается на различные факты из теории расслоенных пространств, топологии многообразий и гомологической алгебры. Лекции вполне доступны студентам-математикам второго-третьего курсов.

В приложение к книге включен перевод лекций М. Атья и Г. Сегала по K_G-теории, а также ряд недавних статей, посвященных разным вариантам и обобщениям K-теории.

Книга представляет интерес для математиков всех специальностей и будет полезна преподавателям, аспирантам и студентам старших курсов университетов.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие редактора перевода

Современная алгебраическая топология создала новые мощные методы, позволившие до конца решить многие давно стоявшие проблемы как в области самой топологии, так и в других областях математики. Одним из таких методов является K-теория, построенная в основном в работах молодого английского математика Майкла Ф. Атья, награжденного Филдсовской медалью на Международном конгрессе математиков (Москва, 1966 г.).

Содержание K-теории состоит в построении и изучении так называемого K-функтора, сопоставляющего каждому топологическому пространству X некоторое кольцо $K(X)$ и каждому непрерывному отображению $f\colon X \to Y$ гомоморфизм соответствующих колец $K(f)\colon K(Y) \to K(X)$. Таким образом, K-теория развивает идеи теории пучков и групп когомологий и позволяет свести ряд новых задач анализа и топологии к алгебраическим задачам.

Основу этой книги составляет перевод лекций, которые М. Ф. Атья читал в Гарвардском университете. Лекции рассчитаны на студентов, имеющих лишь минимальную подготовку в области топологии (т. е. владеющих понятиями топологического пространства и непрерывного отображения). В этих лекциях дается изложение K-теории (включая теорему периодичности Ботта) с полными (хотя часто очень сжатыми) доказательствами. Специальное дополнение посвящено вопросу об индексе оператора в гильбертовом пространстве. Далее следует приложение, состоящее из четырех частей.

В цикле лекций М. Атья и Г. Сегала излагается K_G-теория, т. е. K-теория пространств, на которых действует топологическая группа G. Эта часть написана более сжато и требует от читателя большей подготовки, в частности знакомства с основами теории представлений конечных и компактных групп.

В статье „K-теория и вещественность" дается единообразное изложение разных вариантов и обобщений K-теории. Один из результатов этой статьи — короткое доказательство периодичности Ботта для ортогональной группы.

Небольшая заметка Атья о K-теории компактных групп Ли дает простое доказательство теоремы Ходжкина о структуре K-функтора в том случае, когда исходное топологическое пространство является компактной группой Ли.

Наконец, в книгу включен перевод статьи Н. Кюйпера, ссылки на которую имеются в нескольких лекциях основного цикла. Эта статья посвящена доказательству следующего нетривиального факта: группа унитарных операторов в гильбертовом пространстве, снабженная топологией, определяемой нормой оператора, является стягиваемым по себе пространством. (Ранее был известен более простой факт — стягиваемость этой группы в сильной операторной топологии.)

Мы надеемся, что эту книгу с интересом прочитают и начинающие, и специалисты — все, кто хочет ознакомиться с новыми плодотворными идеями современной математики.

А. А. Кириллов

ГЛАВА 1

ВЕКТОРНЫЕ РАССЛОЕНИЯ

§ 1.1. Основные определения

В этой работе мы будем рассматривать лишь *комплексные* векторные расслоения, хотя многие из наших результатов верны также для вещественных и симплектических расслоений. В соответствии с этим, если специально не оговорено противное, под векторным пространством мы всегда будем понимать комплексное векторное пространство.

Пусть X — топологическое пространство. *Семейством векторных пространств над* X называется топологическое пространство E вместе с:

(i) непрерывным отображением $p\colon E \to X$,

(ii) структурой конечномерного векторного пространства на каждом

$$E_x = p^{-1}(x) \quad \text{для} \quad x \in X,$$

совместимой с топологией пространства E_x, индуцированной топологией пространства E.

Отображение p называется проекцией, E — полным пространством семейства, X — базисным пространством семейства и E_x — слоем над $x \in X$.

Сечением семейства $p\colon E \to X$ называется такое непрерывное отображение $s\colon X \to E$, что $ps(x) = x$ для всех $x \in X$ [1]).

Гомоморфизмом одного семейства $p\colon E \to X$ в другое семейство $q\colon F \to X$ называется такое непрерывное отображение $\varphi\colon E \to F$, что

(i) $q\varphi = p$,

(ii) для каждого $x \in X$ отображение $\varphi_x\colon E_x \to F_x$ есть линейное отображение векторных пространств.

Будем говорить, что отображение φ — *изоморфизм*, если φ взаимно однозначно и φ^{-1} непрерывно. Если

---

[1]) Часто сечением называют также образ отображения s. — *Прим. ред.*

существует изоморфизм между семействами E и F, то будем говорить, что эти семейства изоморфны.

Пример 1. Пусть V — векторное пространство, $E = X \times V$ и p: $E \to X$ — проекция на первый сомножитель. В этом случае E называется *семейством-произведением* со слоем V. Семейство F, изоморфное некоторому семейству-произведению, мы будем называть *тривиальным* семейством.

Пусть Y — подпространство пространства X. Если E — семейство векторных пространств над X с проекцией p, то очевидно, что p: $p^{-1}(Y) \to Y$ является семейством над Y. Мы назовем его *ограничением* семейства E на Y и обозначим через $E|_Y$. Если Y — произвольное пространство и f: $Y \to X$ — непрерывное отображение, то мы определим индуцированное семейство $f^*(p)$: $f^*(E) \to Y$ следующим образом:

$f^*(E)$ — подпространство пространства $Y \times E$, состоящее из всех таких точек (y, e), что $f(y) = p(e)$; проекция и структура векторного пространства на каждом слое очевидны. Для непрерывного отображения g: $Z \to Y$ существует естественный изоморфизм $g^*f^*(E) \cong (fg)^*(E)$, который задается сопоставлением каждой точке вида (z, e) точки вида $(z, g(z), e)$, где $z \in Z$ и $e \in E$. Если f: $Y \to X$ — вложение, то ясно, что существует изоморфизм $E|_Y \cong$ $\cong f^*(E)$, который задается сопоставлением точке $e \in E|_Y$ точки $(p(e), e)$.

Семейство E векторных пространств над X называется *локально тривиальным*, если для каждой точки $x \in X$ найдется такая окрестность U, что $E|_U$ — тривиальное семейство. Локально тривиальное семейство мы будем называть также *векторным расслоением*. Тривиальное семейство мы будем называть тривиальным расслоением. Очевидно, что для произвольного непрерывного отображения f: $Y \to X$ и векторного расслоения E над X семейство $f^*(E)$ является векторным расслоением над Y. Векторное расслоение $f^*(E)$ в этом случае называется индуцированным расслоением.

Пример 2. Пусть V — векторное пространство и X — ассоциированное с ним проективное пространство. Определим $E \subset X \times V$ как множество всех таких пар (x, v), что $x \in X$, $v \in V$ и вектор v принадлежит прямой, определяющей точку x. Предлагаем читателю доказать, что E является векторным расслоением над X.

Заметим, что если E — векторное расслоение над X, то $\dim(E_x)$ — локально постоянная функция на X и, следовательно, постоянная на каждой связной компоненте пространства X. Если $\dim(E_x)$ — постоянная функция на всем X, то говорят, что E имеет размерность и размерностью расслоения E является общее значение $\dim(E_x)$ для всех x. (Предостережение: размерность расслоения E, определенная таким образом, обычно отличается от размерности E как топологического пространства.)

Так как векторное расслоение локально тривиально, то любое сечение векторного расслоения локально описывается векторнозначной функцией на базисном пространстве. Обозначим через $\Gamma(E)$ множество всех сечений векторного расслоения E. Так как множество функций на некотором пространстве со значениями в фиксированном векторном пространстве само является векторным пространством, то мы видим, что в $\Gamma(E)$ можно естественным образом ввести структуру векторного пространства.

Пусть V, W — векторные пространства и $E = X \times V$, $F = X \times W$ — соответствующие расслоения-произведения. Тогда любой гомоморфизм φ: $E \to F$ определяет отображение Φ: $X \to \mathrm{Hom}(V, W)$ по следующей формуле: $\varphi(x, v) = (x, \Phi(x)v)$. Более того, если задать в $\mathrm{Hom}(V, W)$ обычную топологию, то Φ будет непрерывным отображением; обратно, любое такое непрерывное отображение Φ: $X \to \mathrm{Hom}(V, W)$ определяет гомоморфизм φ: $E \to F$. (Это легко заметить, если выбрать базисы $\{e_i\}$ и $\{f_i\}$ в векторных пространствах V и W соответственно. Тогда каждое $\Phi(x)$ представляется матрицей $\Phi(x)_{i,j}$, где

$$\Phi(x)e_i = \sum_j \Phi(x)_{i,j} f_j.$$

Непрерывность любого из отображений φ или Φ эквивалентна непрерывности функций $\Phi_{i,j}$.)

Пусть $\mathrm{Iso}(V, W) \subset \mathrm{Hom}(V, W)$ — подпространство всех изоморфизмов между V и W. Очевидно, что $\mathrm{Iso}(V, W)$ — открытое множество в $\mathrm{Hom}(V, W)$. Далее, обратное отображение $T \to T^{-1}$ дает непрерывное отображение

$\mathrm{Iso}(V, W) \to \mathrm{Iso}(W, V)$. Предположим, что φ: $E \to F$ — такое отображение, что φ_x: $E_x \to F_x$ является изоморфизмом для всех $x \in X$. Это эквивалентно утверждению, что $\Phi(x) \subset \subset \mathrm{Iso}(V, W)$. Отображение $x \to \Phi(x)^{-1}$ определяет непрерывное отображение Ψ: $X \to \mathrm{Iso}(W, V)$. Следовательно, соответствующее отображение ψ: $F \to E$ непрерывно. Таким образом, отображение φ: $E \to F$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда оно взаимно однозначно, или, что эквивалентно, φ есть изоморфизм тогда и только тогда, когда каждое φ_x — изоморфизм. Так как множество $\mathrm{Iso}(V, W)$ открыто в $\mathrm{Hom}(V, W)$, то для любого гомоморфизма φ множество точек $x \in X$, для которых φ_x — изоморфизм, образует открытое подмножество пространства X. Все эти утверждения по существу локальны и, следовательно, имеют место не только для тривиальных семейств, но и для векторных расслоений.

Замечание. В предыдущих рассуждениях существенна конечномерность векторного пространства V. При рассмотрении бесконечномерных векторных расслоений следует различать разные топологии на пространстве $\mathrm{Hom}(V, W)$.

§ 1. 2. Операции на векторных расслоениях

Естественные операции на векторных пространствах, такие, как прямая сумма и тензорное произведение, можно обобщить на векторные расслоения. Трудность представляет лишь вопрос о том, как ввести топологию в полученные пространства. Мы дадим общий метод распространения операций с векторных пространств на векторные расслоения, который решает все эти задачи одновременно.

Пусть T — функтор, переводящий конечномерные векторные пространства в конечномерные векторные пространства. Для простоты предположим, что T — ковариантный функтор одной переменной. Таким образом, каждому векторному пространству V ставится в соответствие векторное пространство $T(V)$. Говорят, что T — *непрерывный функтор*, если для всех векторных пространств V и W отображение T: $\mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{Hom}(T(V), T(W))$ непрерывно.

Пусть E — векторное расслоение. Определим множество $T(E)$ как объединение векторных пространств

$$\bigcup_{x \in X} T(E_x)$$

и для гомоморфизма расслоений $\varphi\colon E \to F$ определим отображение $T(\varphi)\colon T(E) \to T(F)$ при помощи отображений $T(\varphi_x)\colon T(E_x) \to T(F_x)$. Покажем теперь, что множество $T(E)$ имеет естественную топологию и что в этой топологии отображение $T(\varphi)$ непрерывно.

Сначала определим топологическое пространство $T(E)$ для случая, когда E — расслоение-произведение. Если $E = X \times V$, то определим пространство $T(E)$ как $X \times T(V)$ с топологией прямого произведения. Предположим также, что $F = X \times W$ и что $\varphi\colon E \to F$ — гомоморфизм расслоений. Пусть $\Phi\colon X \to \operatorname{Hom}(V, W)$ — отображение, соответствующее этому гомоморфизму. Так как по предположению отображение $T\colon \operatorname{Hom}(V, W) \to \operatorname{Hom}(T(V), T(W))$ непрерывно, то и отображение $T\Phi\colon X \to \operatorname{Hom}(T(V), T(W))$ также непрерывно. Таким образом, и отображение $T(\varphi)\colon X \times T(V) \to X \times T(W)$ непрерывно. Если φ — изоморфизм, то и отображение $T(\varphi)$ — изоморфизм, так как оно непрерывно и является изоморфизмом на каждом слое.

Теперь предположим, что E — тривиальное расслоение, не имеющее фиксированной структуры прямого произведения. Выберем некоторый изоморфизм $\alpha\colon E \to X \times V$ и введем в $T(E)$ топологию, требуя, чтобы отображение $T(\alpha)\colon T(E) \to X \times T(V)$ было гомеоморфизмом. Если $\beta\colon E \to X \times W$ — любой другой изоморфизм, то, полагая $\varphi = \beta\alpha^{-1}$, как и выше, мы видим, что отображения $T(\alpha)$ и $T(\beta)$ индуцируют одну и ту же топологию на множестве $T(E)$, так как $T(\varphi) = T(\beta)\, T(\alpha)^{-1}$ — гомеоморфизм. Таким образом, топология на $T(E)$ не зависит от выбора изоморфизма α. Далее, если $Y \subset X$, то очевидно, что топология на множестве $T(E)|_Y$ та же самая, что и на множестве $T(E|_Y)$. Наконец, если $\varphi\colon E \to F$ — гомоморфизм тривиальных расслоений, то отображение $T(\varphi)\colon T(E) \to T(F)$ непрерывно и, следовательно, является гомоморфизмом.

Теперь предположим, что E — произвольное векторное расслоение. Тогда, если окрестность $U \subset X$ такая, что $E|_U$ тривиально, то введем в множестве $T(E|_U)$ топологию указанным выше способом. В множестве $T(E)$ введем топологию, считая открытыми множествами такие подмножества $V \subset T(E)$, что $V \cap (T(E)|_U)$ открыто в $T(E|_U)$ для всех открытых окрестностей $U \subset X$, для которых $E|_U$ тривиально. Читатель может теперь легко проверить, что если $Y \subset X$, то топология на множестве $T(E|_Y)$ та же, что и на множестве $T(E)|_Y$, и что если φ: $E \to F$ — любой гомоморфизм, то $T(\varphi)$: $T(E) \to T(F)$ — также гомоморфизм.

Если f: $Y \to X$ — непрерывное отображение и E — векторное расслоение над X, то для любого непрерывного функтора T мы имеем естественный изоморфизм

$$f^*T(E) \cong Tf^*(E).$$

Аналогичные рассуждения применимы в случае, когда T зависит от нескольких переменных, ковариантных и контравариантных. Таким образом, мы можем определить для векторных расслоений E и F соответствующие расслоения:

(i) $E \oplus F$ — прямая сумма,

(ii) $E \otimes F$ — тензорное произведение,

(iii) $\operatorname{Hom}(E, F)$,

(iv) E^* — двойственное к E расслоение,

(v) $\lambda^i(E)$, где λ^i есть i-я внешняя степень.

Кроме того, можно доказать, что существуют следующие естественные изоморфизмы:

(i) $E \oplus F \cong F \oplus E$,

(ii) $E \otimes F \cong F \otimes E$,

(iii) $E \otimes (F' \oplus F'') \cong (E \otimes F') \oplus (E \otimes F'')$,

(iv) $\operatorname{Hom}(E, F) \cong E^* \otimes F$,

(v) $\lambda^k(E \oplus F) \cong \bigoplus_{i+j=k} (\lambda^i(E) \otimes \lambda^j(F))$.

Наконец, заметим, что сечения расслоения $\operatorname{Hom}(E, F)$ взаимно однозначно соответствуют гомоморфизмам φ: $E \to F$.

Следовательно, можно определить $\mathrm{HOM}(E, F)$ как векторное пространство всех гомоморфизмов расслоения E в расслоение F и отождествить $\mathrm{HOM}(E, F)$ с $\Gamma(\mathrm{Hom}(E, F))$.

§ 1.3. Подрасслоения и факторрасслоения

Пусть E — векторное расслоение. *Подрасслоением* расслоения E называется подмножество расслоения E, которое является расслоением в индуцированной структуре.

Гомоморфизм $\varphi: F \to E$ называется *мономорфизмом* (соответственно *эпиморфизмом*), если каждое отображение $\varphi_x: F_x \to E_x$ — мономорфизм (соответственно эпиморфизм). Заметим, что $\varphi: F \to E$ — мономорфизм тогда и только тогда, когда $\varphi^*: E^* \to F^*$ — эпиморфизм. Если F — подрасслоение расслоения E и если $\varphi: F \to E$ — отображение вложения, то φ — мономорфизм.

Лемма 1.3.1. *Если $\varphi: F \to E$ — мономорфизм, то $\varphi(F)$ — подрасслоение расслоения E и $\varphi: F \to \varphi(F)$ — изоморфизм.*

Доказательство. Отображение $\varphi: F \to \varphi(F)$ является взаимно однозначным, поэтому, если $\varphi(F)$ — подрасслоение, то φ — изоморфизм. Таким образом, остается показать, что $\varphi(F)$ — подрасслоение.

Эта задача локальная, поэтому достаточно рассмотреть случай, когда E и F — расслоения-произведения. Пусть $E = X \times V$; для $x \in X$ выберем $W_x \subset V$ как подпространство, дополнительное к $\varphi(F_x)$. Тогда $G = X \times W_x$ — подрасслоение расслоения E. Определим отображение $\theta: F \oplus G \to E$ формулой $\theta(a \oplus b) = \varphi(a) + i(b)$, где $i: G \to E$ — вложение. По построению θ_x — изоморфизм. Следовательно, существует такая открытая окрестность U точки x, что $\theta|_U$ — изоморфизм. Так как F — подрасслоение расслоения $F \oplus G$, то $\theta(F) = \varphi(F)$ — подрасслоение расслоения $\theta(F \oplus G) = E$ на U.

Заметим, что из наших рассуждений вытекает больше, чем мы утверждали. Мы показали, что для произвольного гомоморфизма $\varphi: F \to E$ множество точек, для которых φ_x — мономорфизм, образует открытое множество. Кроме того, мы показали, что локально подрасслоение является прямым слагаемым. Этот второй факт позволяет нам определить факторрасслоения.

Определение 1.3.1. Если F — подрасслоение расслоения E, то *факторрасслоением* E/F называется объединение всех векторных пространств E_x/F_x, снабженное фактортопологией.

Так как расслоение F является локально прямым слагаемым в расслоении E, то факторрасслоение E/F локально тривиально и, таким образом, является расслоением. Это оправдывает принятую терминологию.

Если φ: $F \to E$ — произвольный гомоморфизм, то функция $x \to \dim \ker(\varphi_x)$ не обязательно постоянна и даже не обязательно локально постоянна.

Определение 1.3.2. Говорят, что φ: $F \to E$ — *точный гомоморфизм*, если функция $x \to \dim \ker(\varphi_x)$ локально постоянна.

Предложение 1.3.2. *Если* φ: $F \to E$ — *точный гомоморфизм, то*

(i) $\ker(\varphi) = \bigcup\limits_x \ker(\varphi_x)$ — *подрасслоение расслоения* F,

(ii) $\operatorname{im}(\varphi) = \bigcup\limits_x \operatorname{im}(\varphi_x)$ — *подрасслоение расслоения* E,

(iii) $\operatorname{coker}(\varphi) = \bigcup\limits_x \operatorname{coker}(\varphi_x)$ — *расслоение в факторструктуре.*

Доказательство. Заметим, что утверждение (iii) вытекает из (ii). Докажем (ii). Эта задача локальна, поэтому мы можем предположить, что $F = X \times V$ для некоторого векторного пространства V. При данном $x \in X$ выберем $W_x \subset V$ как дополнение к $\ker(\varphi_x)$ в V. Положим $G = X \times W_x$; тогда отображение φ индуцирует при помощи композиции с вложением такой гомоморфизм ψ: $G \to E$, что ψ_x — мономорфизм. Таким образом, ψ является мономорфизмом в некоторой окрестности U точки x. Следовательно, $\psi(G)|_U$ — подрасслоение расслоения $E|_U$. Однако $\psi(G) \subset \varphi(F)$, и так как $\dim(\varphi(F_y))$ постоянна для всех y и $\dim(\psi(G_y)) = \dim(\psi(G_x)) = \dim(\varphi(F_x)) = \dim(\varphi(F_y))$ для всех $y \in U$, то $\psi(G)|_U = \varphi(F)|_U$. Таким образом, $\varphi(F)$ — подрасслоение расслоения E.

Наконец, мы должны доказать (i). Ясно, что φ^*: $E^* \to F^*$ — точный гомоморфизм. Так как соответствие $F^* \to \operatorname{coker}(\varphi^*)$ представляет собой эпиморфизм, то $(\operatorname{coker}(\varphi^*))^* \to F^{**}$ является мономорфизмом. Однако для каждого x мы имеем естественную коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \ker(\varphi_x) & \to & F_x \\ \downarrow & & \downarrow \\ \left(\operatorname{coker}\left(\varphi_x^*\right)\right)^* & \to & F_x^{**} \end{array}$$

в которой вертикальные стрелки обозначают изоморфизмы. Таким образом, $\ker(\varphi) \cong (\operatorname{coker}(\varphi^*))^*$, и поэтому, согласно лемме 1.3.1, $\ker(\varphi)$ является подрасслоением расслоения F.

Мы опять доказали несколько больше, чем утверждали. Наши рассуждения показывают, что для любого $x \in X$ имеет место неравенство $\dim \varphi_x(F_x) \leqslant \dim \varphi_y(F_y)$ для всех $y \in U$, где U — некоторая окрестность точки x. Таким образом, *ранг* (φ_x) *является полунепрерывной сверху функцией точки* x.

Определение 1.3.3. *Проектором* называется такой гомоморфизм P: $E \to E$, что $P^2 = P$.

Заметим, что ранг (P_x) + ранг $(1 - P_x) = \dim E_x$, и так как и ранг (P_x), и ранг $(1 - P_x)$ являются полунепрерывными сверху функциями от x, то они локально постоянны. Таким образом, операторы P и $(1 - P)$ являются оба точными гомоморфизмами. Так как $\ker(P) = (1 - P)E$, то E — прямая сумма двух подрасслоений PE и $(1 - P)E$. Таким образом, любой проектор P: $E \to E$ определяет разложение расслоения E в прямую сумму $E = (PE) \oplus ((1 - P)E)$.

Рассмотрим теперь метрики на векторных расслоениях. Определим функтор Herm, который каждому векторному пространству V ставит в соответствие векторное пространство $\operatorname{Herm}(V)$ всех эрмитовых форм на V. Методы § 1.2 позволяют нам для каждого расслоения E определить векторное расслоение $\operatorname{Herm}(E)$.

Определение 1.3.4. *Метрикой* на расслоении E называется любое такое сечение h: $X \to \operatorname{Herm}(E)$, что $h(x)$ — положительно определенная эрмитова форма для всех $x \in X$. Расслоение с заданной метрикой называется эрмитовым.

Предположим, что E — некоторое расслоение, F — подрасслоение расслоения E и h — эрмитова метрика на E. Тогда для каждого $x \in X$ можно рассмотреть ортогональную проекцию P_x: $E_x \to F_x$, определенную этой метрикой, и тем самым задать отображение P: $E \to F$, которое, как мы сейчас докажем, непрерывно. Эта задача локальна, поэтому можно предположить, что F — тривиальное расслоение и заданы сечения $f_1, \ldots, f_n$ расслоения F, образующие базис на каждом слое. Для произвольного вектора $v \in F_x$ имеем

$$P_x(v) = \sum_i h_x(v, f_i(x)) f_i(x).$$

Так как отображение h непрерывно, то и отображение P непрерывно. Таким образом, P — проектор на расслоении E. Обозначим через $F_x^{\perp}$ подпространство пространства E_x, ортогональное пространству F_x относительно метрики h; пространство $F^{\perp} = \bigcup\limits_x F_x^{\perp}$ является ядром проектора P и, таким образом, представляет собой подрасслоение расслоения E. Кроме того, $E \cong F \oplus F^{\perp}$. Таким образом, метрика для любого подрасслоения определяет дополнительное подрасслоение.

Замечание. До сих пор бóльшая часть наших рассуждений носила весьма общий характер и мы могли бы заменить слово „непрерывный" словами „алгебраический", „дифференцируемый", „аналитический" и т. д. без каких бы то ни было затруднений. В следующем параграфе наши рассуждения станут менее общими.

§ 1.4. Векторные расслоения на компактных пространствах

Прежде чем приступить к дальнейшему изучению, необходимо наложить некоторые ограничения на класс базисных пространств, которые мы будем рассматривать. Мы будем предполагать, что наши базисные пространства *компактны и хаусдорфовы*. Какие из результатов верны для более общих базисных пространств, предоставляем разобраться читателю.

Напомним, что если f: $X \to V$ — непрерывная векторнозначная функция, то носителем f (обозначается $\operatorname{supp} f$) называется замыкание множества $f^{-1}(V - \{0\})$.

В дальнейшем нам потребуются следующие результаты из теоретико-множественной топологии. Мы сформулируем их в векторной форме, которая эквивалентна обычной.

Теорема Титце о продолжении. *Пусть X — нормальное пространство, $Y \subset X$ — замкнутое подпространство, V — вещественное векторное пространство и f: $Y \to V$ — непрерывное отображение. Тогда существует такое непрерывное отображение g: $X \to V$, что $g|_Y = f$.*

Существование разбиения единицы. *Пусть X — компактное хаусдорфово пространство, $\{U_i\}$ — конечное открытое покрытие. Тогда существуют такие непрерывные отображения f_i: $X \to \mathbf{R}$, что*

(i) $f_i(x) \geqslant 0$ *для всех* $x \in X$,

(ii) $\operatorname{supp}(f_i) \subset U_i$,

(iii) $\sum_i f_i(x) = 1$ *для всех* $x \in X$.

Такой набор $\{f_i\}$ называется *разбиением единицы.*

Рассмотрим сначала теорему Титце о продолжении для расслоений.

Лемма 1.4.1. *Пусть X — компактное хаусдорфово пространство, $Y \subset X$ — замкнутое подпространство и E — расслоение над X. Тогда любое сечение s: $Y \to E|_Y$ может быть продолжено на X.*

Доказательство. Пусть $s \in \Gamma(E|_Y)$. Так как локально s — векторнозначная функция, то можно, применив теорему Титце о продолжении, показать, что для каждого $x \in X$ существуют такое открытое множество U, содержащее x, и такое $t \in \Gamma(E|_U)$, что $t|_{U \cap Y} = s|_{U \cap Y}$. Так как X компактно, то можно найти конечное подпокрытие $\{U_\alpha\}$ такими открытыми множествами. Пусть $t_\alpha \in \Gamma(E|_{U_\alpha})$ — соответствующие сечения, и пусть $\{p_\alpha\}$ — такое разбиение единицы, что $\operatorname{supp}(p_\alpha) \subset U_\alpha$. Определим $S_\alpha \in \Gamma(E)$ формулой

$$S_\alpha(x) = \begin{cases} p_\alpha(x)\, t_\alpha(x), & \text{если } x \in U_\alpha, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда $\sum S_\alpha$ есть сечение расслоения E и ограничением этого сечения на Y, очевидно, является s.

2 Зак. 719.

Лемма 1.4.2. *Пусть Y — замкнутое подпространство компактного хаусдорфова пространства X, и пусть E, F — два векторных расслоения над X. Если $f\colon E|_Y \to F|_Y$ — изоморфизм, то существует открытое множество U, содержащее Y, и продолжение отображения f (а именно отображение $E|_U \to F|_U$), которое также является изоморфизмом.*

Доказательство. Отображение f является сечением расслоения $\operatorname{Hom}(E|_Y, F|_Y)$ и поэтому продолжается до сечения расслоения $\operatorname{Hom}(E, F)$. Пусть U — множество таких точек, для которых это отображение представляет собой изоморфизм. Тогда U — открытое множество, содержащее Y.

Лемма 1.4.3. *Пусть Y — компактное хаусдорфово пространство, $f_t\colon Y \to X$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, — некоторая гомотопия и E — векторное расслоение над X. Тогда имеет место изоморфизм*

$$f_0^*E \cong f_1^*E.$$

Доказательство. Пусть I — единичный интервал, $f\colon Y \times I \to X$ — такая гомотопия, что $f(Y, t) = f_t(y)$, и пусть $\pi\colon Y \times I \to Y$ — проекция. Применим лемму 1.4.2 к расслоениям f^*E, $\pi^* f_t^* E$ и подпространству $Y \times \{t\}$ пространства $Y \times I$, на котором существует очевидный изоморфизм s. Из компактности пространства Y мы заключаем, что расслоения f^*E и $\pi^* f_t^* E$ изоморфны в некоторой полосе $Y \times \delta t$, где δt — окрестность точки t в интервале I. Следовательно, класс[1]) расслоения f_t^*E есть локально постоянная функция от t. Так как интервал I — связное множество, то эта функция постоянна, откуда

$$f_0^*E \cong f_1^*E.$$

Обозначим через $\operatorname{Vect}(X)$ множество классов изоморфных векторных расслоений над X, а через $\operatorname{Vect}_n(X)$ — подмножество множества $\operatorname{Vect}(X)$, представленное расслоениями размерности n. Множество $\operatorname{Vect}(X)$ представ-

---

[1]) Здесь и в дальнейшем *классом* расслоения E называется совокупность всех расслоений, изоморфных E. — *Прим. ред.*

ляет собой абелеву полугруппу относительно суммы Уитни (прямой суммы). В множестве $\mathrm{Vect}_n(X)$ мы имеем один естественно отмеченный элемент — класс тривиальных расслоений размерности n.

Лемма 1.4.4.

(1) *Если* $f\colon X \to Y$ — *гомотопическая эквивалентность, то* $f^*\colon \mathrm{Vect}(Y) \to \mathrm{Vect}(X)$ — *взаимно однозначное отображение.*

(2) *Если пространство X стягиваемо, то каждое расслоение над X тривиально и множество* $\mathrm{Vect}(X)$ *изоморфно полугруппе неотрицательных целых чисел.*

Лемма 1.4.5. *Если E — расслоение над $X \times I$ и* $\pi\colon X \times I \to X \times \{0\}$ — *проекция, то E изоморфно расслоению* $\pi^*(E|_{X \times \{0\}})$.

Обе эти леммы следуют непосредственно из леммы 1.4.3.

Предположим, что пространство Y замкнуто в X, E — векторное расслоение над X и $\alpha\colon E|_Y \to Y \times V$ — изоморфизм. Мы будем называть отображение α *тривиализацией расслоения E над Y*. Пусть $\pi\colon Y \times V \to V$ — проекция; определим отношение эквивалентности на $E|_Y$ формулой

$$e \sim e' \Longleftrightarrow \pi\alpha(e) = \pi\alpha(e').$$

Это отношение мы продолжим тождественно на $E|_{X \setminus Y}$[1]; пусть E/α — факторпространство расслоения E, полученное при помощи этого отношения эквивалентности. Это факторпространство имеет естественную структуру семейства векторных пространств над X/Y. Мы утверждаем, что E/α фактически является векторным расслоением. Чтобы доказать это, мы должны проверить лишь локальную тривиальность семейства E/α в отмеченной точке Y/Y пространства X/Y. Согласно лемме 1.4.2, для некоторого открытого множества U, содержащего Y, изоморфизм α можно продолжить до изоморфизма $\tilde{\alpha}\colon E|_U \to U \times V$. Тогда $\tilde{\alpha}$ индуцирует изоморфизм

$$(E|_U)/\alpha \cong (U/Y) \times V,$$

[1]) То есть две точки из $E|_{X \setminus Y}$ считаются эквивалентными только в том случае, когда они совпадают. — *Прим. ред.*

который и устанавливает локальную тривиальность расслоения E/α.

Пусть α_0, α_1 — гомотопные тривиализации расслоения E над Y. Это означает, что существует такая тривиализация β расслоения $E \times I$ над подпространством $Y \times I \subset X \times I$, которая индуцирует α_0 и α_1 в концах отрезка I. Пусть $f\colon X/Y \times I \to X \times I/Y \times I$ — естественное отображение. Тогда $f^*(E \times I/\beta)$ — расслоение над $X/Y \times I$, ограничением которого на $X/Y \times \{i\}$ является расслоение E/α_i, $i = 0, 1$. Следовательно, по лемме 1.4.3

$$E/\alpha_0 \cong E/\alpha_1.$$

Таким образом, доказана

Лемма 1.4.6. *Тривиализация α расслоения E над $Y \subset X$ определяет расслоение E/α над X/Y. Класс расслоения E/α зависит лишь от гомотопического класса тривиализации α.*

Используя этот факт, мы докажем теперь следующую лемму:

Лемма 1.4.7. *Пусть $Y \subset X$ — замкнутое стягиваемое подпространство. Тогда проекция $f\colon X \to X/Y$ индуцирует взаимно однозначное соответствие $f^*\colon \mathrm{Vect}(X/Y) \to \mathrm{Vect}(X)$.*

Доказательство. Пусть E — расслоение над X. По лемме 1.4.4 расслоение $E|_Y$ тривиально, следовательно, тривиализации $\alpha\colon E|_Y \to Y \times V$ существуют. Более того, две такие тривиализации отличаются автоморфизмом расслоения-произведения $Y \times V$, т. е. отображением $Y \to \mathrm{GL}(V)$. Но $\mathrm{GL}(V) = \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ — связное пространство, а Y — стягиваемое. Следовательно, тривиализация α единственна с точностью до гомотопии, и поэтому класс расслоения $E|_\alpha$ однозначно определяется классом расслоения E. Таким образом, мы построили отображение

$$\mathrm{Vect}(X) \to \mathrm{Vect}(X/Y),$$

которое, очевидно, является двусторонним обратным для отображения f^*. Следовательно, f^* — взаимно однозначное отображение, что и утверждалось.

Векторные расслоения обычно строятся при помощи конструкции сцепления или склеивания, к описанию которой мы теперь приступаем.

Рассмотрим пространство $X = X_1 \cup X_2$ и обозначим через A пространство $X_1 \cap X_2$, где X_1 и X_2 компактны. Предположим, что заданы векторное расслоение E_i над пространством X_i ($i = 1, 2$) и некоторый изоморфизм φ: $E_1|_A \to E_2|_A$. Определим векторное расслоение $E_1 \cup_\varphi E_2$ над X следующим образом. Как топологическое пространство, $E_1 \cup_\varphi E_2$ представляет собой факторпространство непересекающейся суммы $E_1 + E_2$ по отношению эквивалентности, которое отождествляет вектор $e_1 \in E_1|_A$ с вектором $\varphi(e_1) \in E_2|_A$. Рассматривая X как соответствующее факторпространство пространства $X_1 + X_2$, мы получаем естественную проекцию p: $E_1 \cup_\varphi E_2 \to X$, причем $p^{-1}(x)$ имеет естественную структуру векторного пространства. Остается показать, что семейство $E_1 \cup_\varphi E_2$ локально тривиально. Так как $E_1 \cup_\varphi E_2|_{X \setminus A} = (E_1|_{X_1 \setminus A}) + (E_2|_{X_2 \setminus A})$, то локальная тривиальность в точках $x \notin A$ следует из локальной тривиальности расслоений E_1 и E_2. Пусть $a \in A$ и V_1 — замкнутая окрестность точки a в X_1, над которой расслоение E_1 тривиально, так что мы имеем изоморфизм

$$\theta_1\colon E_1|_{V_1} \to V_1 \times \mathbf{C}^n.$$

Ограничивая на A, мы получаем изоморфизм

$$\theta_1^A\colon E_1|_{V_1 \cap A} \to (V_1 \cap A) \times \mathbf{C}^n.$$

Пусть

$$\theta_2^A\colon E_2|_{V_1 \cap A} \to (V_1 \cap A) \times \mathbf{C}^n$$

— изоморфизм, соответствующий θ_1^A при изоморфизме φ. По лемме 1.4.2 его можно продолжить до изоморфизма

$$\theta_2\colon E_2|_{V_2} \to V_2 \times \mathbf{C}^n,$$

где V_2 — некоторая окрестность точки a в X_2. Тогда пара θ_1, θ_2 определяет очевидным образом изоморфизм

$$\theta_1 \cup_\varphi \theta_2\colon E_1 \cup_\varphi E_2|_{V_1 \cup V_2} \to (V_1 \cup V_2) \times \mathbf{C}^n,$$

устанавливающий локальную тривиальность семейства $E_1 \cup_\varphi E_2$.

Конструкция сцепления обладает следующими элементарными свойствами.

(i) Если E — расслоение над X и $E_i = E|_{X_i}$, то тождественное отображение определяет изоморфизм 1_A: $E_1|_A \to E_2|_A$ и

$$E_1 \cup_{1_A} E_2 \cong E.$$

(ii) Если β_i: $E_i \to E_i'$ — изоморфизмы на X_i и $\varphi'\beta_1 = \beta_2\varphi$, то

$$E_1 \cup_\varphi E_2 \cong E_1' \cup_{\varphi'} E_2'.$$

(iii) Если (E_i, φ) и (E_i', φ') — две пары на X_i, то

$$(E_1 \cup_\varphi E_2) \oplus (E_1' \cup_{\varphi'} E_2') \cong E_1 \oplus E_1' \cup_{\varphi \oplus \varphi'} E_2 \oplus E_2',$$
$$(E_1 \cup_\varphi E_2) \otimes (E_1' \cup_{\varphi'} E_2') \cong E_1 \otimes E_1' \cup_{\varphi \otimes \varphi'} E_2 \otimes E_2',$$
$$(E_1 \cup_\varphi E_2)^* \cong E_1^* \cup_{(\varphi^*)^{-1}} E_2^*.$$

Более того, справедлива также

Лемма 1.4.8. *Класс расслоения $E_1 \cup_\varphi E_2$ зависит только от гомотопического класса изоморфизма φ: $E_1|_A \to E_2|_A$.*

Доказательство. Гомотопия изоморфизмов $E_1|_A \to E_2|_A$ определяет изоморфизм следующих расслоений:

$$\Phi: \pi^*E_1|_{A \times I} \to \pi^*E_2|_{A \times I},$$

где I — единичный интервал и π: $X \times I \to X$ — проекция. Пусть отображение

$$f_t: X \to X \times I$$

определяется формулой $f_t(x) = x \times \{t\}$; обозначим через

$$\varphi_t: E_1|_A \to E_2|_A$$

изоморфизм, который получается из Φ при помощи отображения f_t. Тогда имеет место изоморфизм

$$E_1 \cup_{\varphi_t} E_2 \cong f_t^*(\pi^*E_1 \cup_\Phi \pi^*E_2).$$

Так как f_0 и f_1 гомотопны, то из леммы 1.4.3 вытекает, что

$$E_1 \cup_{\varphi_0} E_2 \cong E_1 \cup_{\varphi_1} E_2,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Конструкции „стягивания“ и „сцепления“ для построения расслоений (соответственно над X/Y и $X_1 \cup X_2$) являются частными случаями общего процесса образования расслоений над факторпространствами. Предоставляем читателю в качестве упражнения дать точное описание этой общей конструкции.

Обозначим через $[X, Y]$ множество гомотопических классов отображений $X \to Y$ и через $S(X)$ надстройку над X.

Лемма 1.4.9. *Для любого пространства X существует естественный изоморфизм*

$$\mathrm{Vect}_n(S(X)) \cong [X, \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})].$$

Доказательство. Представим $S(X)$ в виде $C^+(X) \cup C^-(X)$, где $C^+(X) = [0, 1/2] \times X/\{0\} \times X$, $C^-(X) = [1/2, 1] \times X/\{1\} \times X$. Тогда $C^+(X) \cap C^-(X) = X$. Если E — произвольное n-мерное расслоение над пространством $S(X)$, то ограничения $E|_{C^+(X)}$ и $E|_{C^-(X)}$ тривиальны. Пусть $\alpha^\pm$: $E|_{C^\pm(X)} \cong C^\pm(X) \times V$ — соответствующие изоморфизмы. Тогда $(\alpha^+|_X)(\alpha^-|_X)^{-1}$: $X \times V \to X \times V$ — отображение расслоений, и поэтому оно определяет отображение α пространства X в $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C}) = \mathrm{Iso}(V)$. Так как пространства $C^+(X)$ и $C^-(X)$ стягиваемы, то гомотопические классы изоморфизмов α^+ и α^- однозначно определены и, следовательно, гомотопический класс изоморфизма α также однозначно определен. Таким образом, мы имеем естественное отображение θ: $\mathrm{Vect}_n(S(X)) \to [X, \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})]$. С другой стороны, по лемме 1.4.8 конструкция сцепления определяет отображение

$$\varphi: [X, \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})] \to \mathrm{Vect}_n(S(X)).$$

Очевидно, что отображения θ и φ обратны друг другу и поэтому определяют взаимно однозначное соответствие.

Таким образом, мы показали, что $\mathrm{Vect}_n(S(X))$ имеет теоретико-гомотопическую интерпретацию. Дадим теперь аналогичную интерпретацию множеству $\mathrm{Vect}_n(X)$. Для этого установим сначала несколько элементарных результатов о факторрасслоениях.

Лемма. 1.4.10. *На произвольном векторном расслоении E над пространством X существует (эрмитова) метрика.*

Доказательство. Метрика на векторном пространстве V определяет метрику на расслоении-произведении $X \times V$. Следовательно, на тривиальных расслоениях метрики существуют. Пусть $\{U_\alpha\}$ — такое конечное открытое покрытие пространства X, что $E|_{U_\alpha}$ тривиально, и пусть h_α — метрика на $E|_{U_\alpha}$. Пусть $\{p_\alpha\}$ — разбиение единицы, такое, что $\operatorname{supp} p_\alpha \subset U_\alpha$; определим отображение

$$k_\alpha(x) = \begin{cases} p_\alpha(x)\, h_\alpha(x) & \text{для} \quad x \in U_\alpha \\ 0 & \text{во всех других случаях.} \end{cases}$$

Тогда отображение k_α является положительным полуопределенным сечением расслоения $\operatorname{Herm}(E)$. Но для любого $x \in X$ существует такое α, что $p_\alpha(x) > 0$ (по условию $\sum p_\alpha = 1$), и поэтому $x \in U_\alpha$. Следовательно, для этого α эрмитова форма $k_\alpha(x)$ является положительно определенной. Таким образом, эрмитова форма $\sum\limits_\alpha k_\alpha(x)$ является положительно определенной для всех точек $x \in X$, и поэтому сечение $k = \sum\limits_\alpha k_\alpha$ определяет метрику на расслоении E.

Последовательность гомоморфизмов векторных расслоений

$$\ldots \to E \to F \to \ldots$$

называется *точной*, если для каждого $x \in X$ последовательность гомоморфизмов векторных пространств

$$\ldots \to E_x \to F_x \to \ldots$$

точна.

Следствие 1.4.11. *Предположим, что*

$$0 \longrightarrow E' \xrightarrow{\varphi'} E \xrightarrow{\varphi''} E'' \longrightarrow 0$$

— точная последовательность расслоений над X. Тогда существует изоморфизм $E \cong E' \oplus E''$.

Доказательство. Зададим на расслоении E метрику; тогда имеет место изоморфизм $E \cong E' \oplus (E')^\perp$. Но $(E')^\perp \cong E''$. Это и дает требуемый результат.

Говорят, что подпространство $V \subset \Gamma(E)$ *достаточное*, если

$$\varphi\colon X \times V \to E,$$

где $\varphi(x, s) = s(x)$, есть эпиморфизм.

Лемма 1.4.12. *Если E — произвольное расслоение над компактным хаусдорфовым пространством X, то $\Gamma(E)$ содержит конечномерное достаточное подпространство.*

Доказательство. Пусть $\{U_\alpha\}$ — такое конечное открытое покрытие пространства X, что $E|_{U_\alpha}$ тривиально для каждого α, и пусть $\{p_\alpha\}$ — разбиение единицы, такое, что $\operatorname{supp} p_\alpha \subset U_\alpha$. Так как $E|_{U_\alpha}$ тривиально, то можно найти конечномерное достаточное подпространство $V_\alpha \subset \subset \Gamma\left(E|_{U_\alpha}\right)$. Определим теперь отображение

$$\theta_\alpha\colon V_\alpha \to \Gamma(E)$$

формулой

$$\theta_\alpha v_\alpha(x) = \begin{cases} p_\alpha(x) \cdot v_\alpha(x), & \text{если } x \in U_\alpha, \\ 0 & \text{во всех других случаях.} \end{cases}$$

Отображение θ_α определяет гомоморфизм

$$\theta\colon \prod_\alpha V_\alpha \to \Gamma(E),$$

и образом при гомоморфизме θ является конечномерное достаточное подпространство пространства сечений $\Gamma(E)$; действительно, для каждой точки $x \in X$ существует такое α, что $p_\alpha(x) > 0$, и поэтому отображение

$$\theta_\alpha(V_\alpha) \to E_x$$

является эпиморфизмом.

Следствие 1.4.13. *Если E — произвольное расслоение, то для некоторого целого числа m существует эпиморфизм*

$$\varphi\colon X \times \mathbf{C}^m \to E.$$

Следствие 1.4.14. *Если E — произвольное расслоение, то существует такое расслоение F, что расслоение $E \oplus F$ тривиально.*

Теперь можно доказать существование теоретико-гомотопического определения множества $\operatorname{Vect}_n(X)$. Введем сначала многообразие Грассмана. Если V — произвольное векторное пространство и n — целое число, то обозначим через $G_n(V)$ множество всех подпространств пространства V коразмерности n. Если в пространстве V задана некоторая эрмитова метрика, то каждое подпространство пространства V определяет проектор. Это позволяет определить отображение $G_n(V) \to \operatorname{End}(V)$, где $\operatorname{End}(V)$ — множество эндоморфизмов пространства V. В множестве $G_n(V)$ введем топологию, индуцированную этим отображением.

Предположим, что E — произвольное расслоение над X, V — векторное пространство и φ: $X \times V \to E$ — эпиморфизм. Определим отображение пространства X в многообразие Грассмана $G_n(V)$, сопоставляя точке x пространство $\ker(\varphi_x)$; это отображение непрерывно для любой метрики на пространстве V (здесь $n = \dim(E)$). Назовем такое отображение $X \to G_n(V)$ отображением, индуцированным эпиморфизмом φ.

Пусть V — векторное пространство и $F \subset G_n(V) \times V$ — подрасслоение, состоящее из всех таких точек (g, v), что $v \in g$. В этом случае факторрасслоение $E = (G_n(V) \times V)/F$ называется *классифицирующим расслоением* над $G_n(V)$.

Заметим, что если E' — расслоение над пространством X и φ: $X \times V \to E'$ — эпиморфизм, то имеет место изоморфизм $E' \cong f^*(E)$, где f: $X \to G_n(V)$ — отображение, индуцированное эпиморфизмом φ, и E — классифицирующее расслоение.

Предположим, что h — метрика на V. Обозначим через $G_n(V_h)$ множество $G_n(V)$ с топологией, индуцированной метрикой h. Если h' — другая метрика на V, то эпиморфизм $G_n(V_{h'}) \times V \to E$ (где E — классифицирующее расслоение) индуцирует тождественное отображение $G_n(V_h) \to$ $\to G_n(V_{h'})$. Таким образом, тождественное отображение непрерывно и, следовательно, топология на $G_n(V)$ не зависит от метрики.

Теперь рассмотрим естественные проекции

$$\mathbf{C}^m \to \mathbf{C}^{m-1},$$

заданные формулой $(z_1, \ldots, z_m) \to (z_1, \ldots, z_{m-1})$. Эти проекции индуцируют непрерывные отображения

$$\iota_{m-1}: \ G_n(\mathbf{C}^{m-1}) \to G_n(\mathbf{C}^m).$$

Если $E_{(m)}$ — классифицирующее расслоение над $G_n(\mathbf{C}^m)$, то отсюда немедленно следует, что

$$\iota^*_{m-1}(E_{(m)}) \cong E_{(m-1)} + 1.$$

Теорема 1.4.15. *Отображение*

$$\varinjlim_m [X, G_n(\mathbf{C}^m)] \to \mathrm{Vect}_n(X),$$

индуцированное отображением $f \to f^*(E_{(m)})$ для $f: X \to G_n(\mathbf{C}^m)$, является изоморфизмом для всех компактных хаусдорфовых пространств X.

Доказательство. Мы построим обратное отображение. Если E — расслоение над X, то существует (согласно следствию 1.4.13) эпиморфизм φ: $X \times \mathbf{C}^m \to E$. Пусть f: $X \to G_n(\mathbf{C}^m)$ — отображение, индуцированное эпиморфизмом φ. Если мы сможем показать, что гомотопический класс отображения f (в $G_n(V^{m'})$) для достаточно большого m' не зависит от выбора эпиморфизма φ, то мы построим обратное отображение $\mathrm{Vect}_n(X) \to \varinjlim_m [X, G_n(V^m)]$, переводя E в гомотопический класс отображения f.

Пусть φ_i: $X \times \mathbf{C}^{m_i} \to E$ — два эпиморфизма ($i = 0, 1$). Пусть g_i: $X \to G_n(\mathbf{C}^{m_i})$ — отображение, индуцированное эпиморфизмом φ_i. Определим ψ_t: $X \times \mathbf{C}^{m_0} \times \mathbf{C}^{m_1} \to E$ формулой $\psi_t(x, v_0, v_1) = (1 - t)\varphi_0(x, v_0) + t\varphi_1(x, v_1)$. Это эпиморфизм. Пусть f_t: $X \to G_n(\mathbf{C}^{m_0} \oplus \mathbf{C}^{m_1})$ — отображение, индуцированное эпиморфизмом ψ_t. Если отождествить $\mathbf{C}^{m_0} \oplus \mathbf{C}^{m_1}$ с $\mathbf{C}^{m_0+m_1}$ при помощи отображения $(z_1, \ldots, z_{m_0}) \oplus (u_1, \ldots, u_{m_1}) \to (z_1, \ldots, z_{m_0}, u_1, \ldots, u_{m_1})$, то

$$f_0 = j_0 g_0, \quad f_1 = T j_1 g_1,$$

где j_i: $G_n(\mathbf{C}^{m_i}) \to G_n(\mathbf{C}^{m_0+m_1})$ — естественное вложение и

$$T: G_n(\mathbf{C}^{m_0+m_1}) \to G_n(\mathbf{C}^{m_0+m_1})$$

— отображение, индуцированное перестановкой координат в $\mathbf{C}^{m_0+m_1}$ и поэтому гомотопное тождественному. Таким образом, $j_1 g_1$ гомотопно отображению f_1 и, следовательно, отображению $j_0 g_0$, что и требовалось.

Замечание. Можно интерпретировать векторные расслоения как модули следующим образом. Пусть $\mathbf{C}(X)$ — кольцо непрерывных комплекснозначных функций на X. Если E — векторное расслоение над X, то семейство сечений $\Gamma(E)$ представляет собой $\mathbf{C}(X)$-модуль относительно поточечного умножения, т. е.

$$fs(x) = f(x)\,s(x), \quad f \in \mathbf{C}(X), \quad s \in \Gamma(E).$$

Более того, гомоморфизм $\varphi\colon E \to F$ определяет гомоморфизм $\mathbf{C}(X)$-модулей

$$\Gamma\varphi\colon \Gamma(E) \to \Gamma(F).$$

Таким образом, Γ есть функтор из категории $\mathfrak{V}$ векторных расслоений над X в категорию $\mathfrak{M}$ $\mathbf{C}(X)$-модулей. Если E — тривиальное расслоение размерности n, то $\Gamma(E)$ — свободный модуль ранга n. Если F — также тривиальное расслоение, то отображение

$$\Gamma\colon \mathrm{Hom}(E,\ F) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}(X)}(\Gamma(E),\ \Gamma(F))$$

является взаимно однозначным. Действительно, выбирая изоморфизмы $E \cong X \times V$ и $F \cong X \times W$, мы имеем[1])

$$\mathrm{Hom}(E,\ F) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(V,\ W)^X \cong \mathbf{C}(X) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(V,\ W) \cong \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}(X)}(\Gamma(E),\ \Gamma(F)).$$

Таким образом, функтор Γ индуцирует эквивалентность категории $\mathfrak{T}$ тривиальных векторных расслоений и категории $\mathfrak{F}$ свободных $\mathbf{C}(X)$-модулей конечного ранга. Пусть $\mathrm{Proj}(\mathfrak{T})$ — подкатегория категории $\mathfrak{V}$, объектами которой являются образы проекционных операторов категории $\mathfrak{T}$, и пусть $\mathrm{Proj}(\mathfrak{F}) \subset \mathfrak{M}$ — подкатегория, определенная аналогично. Отсюда непосредственно вытекает, что функтор Γ индуцирует эквивалентность категорий

$$\mathrm{Proj}(\mathfrak{T}) \to \mathrm{Proj}(\mathfrak{F}).$$

---

[1]) Напомним, что через $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(V,\ W)^X$ обозначается множество непрерывных отображений пространства X в $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(V,\ W)$. — *Прим. перев.*

Но, согласно следствию 1.4.14, $\mathrm{Proj}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{V}$. По определению $\mathrm{Proj}(\mathfrak{F})$ есть категория конечно порожденных проективных $C(X)$-модулей. Итак, мы установили следующее

Предложение. *Функтор* Γ *индуцирует эквивалентность категории векторных расслоений над* X *и категории конечно порожденных проективных модулей над* $C(X)$.

Таким образом, мы видим, что категория векторных расслоений над X эквивалентна категории конечно порожденных проективных модулей над $C(X)$.

§ 1.5. Добавочные структуры

В линейной алгебре часто рассматривают векторные пространства с некоторой добавочной структурой; мы можем сделать то же самое для векторных расслоений. Например, мы уже говорили об эрмитовой метрике. Следующий очевидный пример—невырожденные билинейные формы. Если V — векторное расслоение, то невырожденная билинейная форма на V становится элементом T расслоения $\mathrm{Hom}(V \otimes V, 1)$, который индуцирует невырожденный элемент слоя $\mathrm{Hom}(V_x \otimes V_x, C)$ для всех $x \in X$. Аналогично T можно рассматривать как элемент, принадлежащий множеству $\mathrm{Iso}(V, V^*)$. Векторное расслоение V вместе с этим изоморфизмом T будем называть *самодвойственным* расслоением.

Если элемент T симметричен, т. е. если преобразование T_x симметрично для всех $x \in X$, то мы будем называть пару (V, T) *ортогональным* расслоением. Если T кососимметричен, т. е. если преобразование T_x кососимметрично для всех $x \in X$, то мы будем называть пару (V, T) *симплектическим* расслоением.

С другой стороны, мы можем рассматривать пары (V, T), когда $T \in \mathrm{Iso}(V, \bar{V})$, где $\bar{V}$ — расслоение, *комплексно сопряженное* расслоению V (т. е. полученное применением „функтора комплексного сопряжения" к расслоению V). Такая пара может быть названа *самосопряженным* расслоением. Можно рассматривать также антилинейный изоморфизм[1]) $T: V \to V$. Если T^2 — тождественный изоморфизм,

[1]) То есть $T(\lambda v) = \bar{\lambda}(Tv)$ для любых $v \in V$ и $\lambda \in C$. — *Прим. перев.*

то мы можем назвать пару (V, T) ***вещественным*** расслоением. Действительно, подпространство $W \subset V$, состоящее из всех таких точек $v \in V$, что $Tv = v$, имеет структуру ***вещественного векторного расслоения***, и V можно отождествить с $W \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$, т. е. с ***комплексификацией*** расслоения W. Если T^2 — оператор умножения на -1, то можно назвать пару (V, T) ***кватернионным*** расслоением. Действительно, можно определить структуру кватернионного векторного пространства на каждом слое V_x, положив $j(v) = Tv$ (где кватернионы порождаются над $\mathbf{R}$ операторами i, j, обладающими свойствами $ij = -ji$, $i^2 = j^2 = -1$).

Если V имеет эрмитову метрику h, то определен изоморфизм $\bar{V} \to V^*$, который превращает самосопряженное расслоение в самодвойственное. Легко проверить, что h превращает ортогональное расслоение в вещественное, а симплектическое—в кватернионное. Мы показали, что эрмитовы метрики существуют и единственны с точностью до гомотопии; отсюда следует, что с точностью до гомотопии понятия самосопряженного, ортогонального, симплектического расслоений по существу эквивалентны понятиям самодвойственного, вещественного, кватернионного расслоений. Поэтому можно выбирать те из них, которые более удобны в каждом конкретном случае. Например, результаты предшествующего параграфа немедленно обобщаются на вещественные и кватернионные векторные расслоения, хотя обобщение леммы 1.4.3, например, на симплектические или ортогональные расслоения не так очевидно. С другой стороны, изучать тензорные произведения удобнее в терминах билинейных форм. Так, тензорное произведение пар (V, T) и (W, S) равно $(V \otimes W, T \otimes S)$, и свойства симметрии преобразования $T \otimes S$ вытекают сразу из соответствующих свойств преобразований T и S. Заметим, в частности, что тензорное произведение двух симплектических расслоений является ортогональным расслоением.

Понятие самосопряженного расслоения является частным случаем более общего понятия. Пусть F, G — два непрерывных функтора на векторных пространствах. Тогда под $(F \to G)$-расслоением мы будем понимать пару (V, T), где V — векторное расслоение и $T \in \operatorname{Iso}(F(V), G(V))$. Очевидно, что к самосопряженному расслоению мы приходим, когда F — тождественный функтор, а $G = {}^*$. Другой важный пример получится, если предположить, что F и G — функторы умножения на фиксированное целое число m, т. е.

$$F(V) = G(V) = V \oplus V \oplus \ldots \oplus V \quad (m \text{ слагаемых}).$$

Таким образом, $(m \to m)$-расслоение (или, короче, m-расслоение) есть пара (V, T), где $T \in \operatorname{Aut}(mV)$. Если существует такое $S \in \operatorname{Aut}(V)$, что $T = mS$, то m-расслоение (V, T) называется *тривиальным*.

В общем случае для $(F \to G)$-расслоений аналог леммы 1.4.3 не верен, т. е. гомотопность отображений не влечет за собой изоморфности индуцированных расслоений. Таким образом, хорошее понятие эквивалентности должно включать гомотопию.

Например, два m-расслоения (V_0, T_0) и (V_1, T_1) называются *эквивалентными*, если существует такое m-расслоение (W, S) над $X \times I$, что

$$(V_i, T_i) \cong (W, S)|_{X \times \{i\}}, \quad i = 0, 1.$$

Замечание. Определенное выше m-расслоение над X можно представлять себе как „mod m-векторное расслоение" над $S(X)$[1]).

§ 1.6. G-расслоения над G-пространствами

Пусть G — некоторая топологическая группа. Под *G-пространством* мы будем понимать топологическое пространство X вместе с данным непрерывным действием группы G на пространстве X; это означает, что группа G действует на X и отображение $G \times X \to X$ непрерывно. Отображение, согласованное с действием группы G, называется *G-отображением* между G-пространствами. Некоторое G-пространство E называется векторным G-расслоением

---

[1]) Как доказано в лемме 1.4.9, всякое расслоение над $S(X)$ можно рассматривать как пару: тривиальное расслоение над X и автоморфизм этого расслоения на себя; m-расслоение над X — это пара: mod m-тривиальное расслоение и автоморфизм его на себя. — *Прим. перев.*

над G-пространством X, если

(i) E — векторное расслоение над X,

(ii) проекция $E \to X$ является G-отображением,

(iii) для каждого $g \in G$ отображение $E_x \to E_{g(x)}$ представляет собой гомоморфизм векторных пространств.

Если G — группа, состоящая из одного элемента, то каждое пространство есть G-пространство и каждое векторное расслоение есть векторное G-расслоение. С другой стороны, если X — точка, то X является G-пространством для всех групп G и векторное G-расслоение над X является в точности (конечномерным) пространством представления группы G. Таким образом, векторные G-расслоения образуют естественное обобщение, включающее и обычные векторные расслоения, и G-модули. Многое из теории векторных расслоений над компактными пространствами можно обобщить на векторные G-расслоения, при условии что группа G также компактна. Однако при этом используются основные факты о представлениях компактных групп. Поэтому здесь мы ограничимся *конечными группами*, при изучении которых не приходится обращаться к анализу.

Существуют два крайних вида G-пространств:

(i) X — свободное G-пространство, если $g \neq 1 \Rightarrow g(x) \neq x$,

(ii) X — тривиальное G-пространство, если $g(x) = x$ для всех $x \in X$, $g \in G$.

Исследуем структуру векторных G-расслоений в этих двух крайних случаях.

Пусть X — свободное G-пространство, и пусть X/G — пространство траекторий. Тогда π: $X \to X/G$ — конечное накрытие. Пусть E — некоторое векторное G-расслоение над X. Тогда E также является свободным G-пространством. Пространство траекторий E/G имеет естественную структуру векторного расслоения над X/G; действительно, отображение $E/G \to X/G$ локально совпадает с отображением $E \to X$, и, следовательно, из локальной тривиальности расслоения E следует локальная тривиальность расслоения E/G. Обратно, предположим, что V — векторное расслоение над X/G. Тогда π^*V является векторным

G-расслоением над X; в самом деле, $\pi^*V \subset X \times V$ и G действует на $X \times V$ по формуле $g(x, v) = (g(x), v)$. Ясно, что $E \to E/G$ и $V \to \pi^*V$ — взаимно обратные соответствия. Таким образом, справедливо

Предложение 1.6.1. *Если X — свободное G-пространство, то отображение $E \to E/G$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между векторными G-расслоениями над X и векторными расслоениями над X/G.*

Прежде чем приступить к рассмотрению тривиальных G-пространств, напомним основной факт о представлениях конечных групп, а именно, существует такое конечное множество $V_1, V_2, \ldots, V_k$ неприводимых представлений группы G, что любое представление V группы G эквивалентно единственной прямой сумме $\sum_{i=1}^{k} n_i V_i$. Далее, для любых двух G-модулей (т. е. для пространств представлений) V, W можно определить векторное пространство $\mathrm{Hom}_G(V, W)$ G-гомоморфизмов. Имеем[1])

$$\mathrm{Hom}_G(V_i, V_j) = 0, \qquad i \neq j,$$
$$\mathrm{Hom}_G(V_i, V_j) \cong C, \qquad i = j.$$

Следовательно, для любого V это означает, что естественное отображение

$$\sum V_i \otimes \mathrm{Hom}_G(V_i, V) \to V$$

является G-изоморфизмом. Результат в этой форме мы можем обобщить на G-расслоения над тривиальным G-пространством. Действительно, если E — произвольное G-расслоение над тривиальным G-пространством X, то мы можем определить гомоморфизм $Av \in \mathrm{End}\, E$ формулой

$$Av(e) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g(e), \quad e \in E,$$

где через $|G|$ обозначен порядок группы G. (Это связано с тем фактом, что для тривиального G-пространства X каждый элемент $g \in G$ определяет эндоморфизм простран-

---

[1]) Это вытекает из известной леммы Шура. — *Прим. перев.*

ства E.) Из этой формулы немедленно вытекает, что Av является проектором для расслоения E, и поэтому его образ, инвариантное подпространство пространства E, представляет собой векторное расслоение. Обозначим это расслоение через E^G и назовем инвариантным *подрасслоением* расслоения E. Таким образом, если E, F — два G-расслоения, то $\mathrm{Hom}_G(E, F) = (\mathrm{Hom}(E, F))^G$ является опять векторным расслоением. В частности, если считать, что E — это тривиальное расслоение $\hat{V}_i = X \times V_i$ с естественным действием группы G, то можно рассмотреть естественное отображение расслоений

$$\sum_{i=1}^{k} \hat{V}_i \otimes \mathrm{Hom}_G(\hat{V}_i, F) \to F.$$

Мы уже видели, что для G-модуля F это отображение является G-изоморфизмом. Другими словами, для любого G-расслоения F над пространством X это отображение представляет собой G-изоморфизм для всех $x \in X$ и, следовательно, является изоморфизмом G-модулей. Таким образом, каждое G-расслоение F изоморфно G-расслоению вида $\sum \hat{V}_i \otimes E_i$, где E_i — векторное расслоение с тривиальным действием группы G. Более того, расслоения E_i определяются однозначно с точностью до изоморфизма. Действительно, мы имеем

$$\mathrm{Hom}_G(\hat{V}_i, F) \cong \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Hom}_G(\hat{V}_i, \hat{V}_j \otimes E_j) \cong$$

$$\cong \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Hom}_G(\hat{V}_i, \hat{V}_j) \otimes E_j \cong E_i.$$

Итак, доказано

Предложение 1.6.2. *Пусть X — тривиальное G-пространство, $V_1, \ldots, V_k$ — полное множество неприводимых G-модулей, $\hat{V}_i = X \times V_i$ — соответствующие G-расслоения. Тогда любое G-расслоение F над X изоморфно прямой сумме $\sum_{i=1}^{k} \hat{V}_i \otimes E_i$, где E_i — векторные расслоения с тривиальным действием группы G. Более того, расслоение E_i единственно с точностью до* *изоморфизма и определяется формулой* $E_i = \mathrm{Hom}_G(\hat{V}_i, F)$ $(i = 1, \ldots, k)$.

Перейдем теперь к случаю общего (компактного) G-пространства X и покажем, как обобщить результаты § 1.4 на G-расслоения. Заметим сначала, что если E является G-расслоением, то группа G действует естественно на пространстве сечений $\Gamma(E)$ по формуле

$$(gs)(x) = g(s(g^{-1}(x))), \quad s \in \Gamma(E).$$

Сечение s назовем *инвариантным*, если $gs = g$ для всех $g \in G$. Множество всех инвариантных сечений образует подпространство $\Gamma(E)^G$ пространства $\Gamma(E)$. Оператор усреднения

$$Av = \frac{1}{|G|} \sum g$$

определяет, как обычно, гомоморфизм $\Gamma(E) \to \Gamma(E)^G$, тождественный на подпространстве $\Gamma(E)^G$.

Лемма 1.6.3. *Пусть X — компактное G-пространство, $Y \subset X$ — замкнутое G-подпространство (т. е. инвариантное относительно действия группы G), и пусть E — некоторое G-расслоение над X. Тогда любое инвариантное сечение s: $Y \to E|_Y$ продолжается до инвариантного сечения над X.*

Доказательство. По лемме 1.4.1 можно продолжить сечение s до некоторого сечения t расслоения E над X. Тогда $Av(t)$ является инвариантным сечением расслоения E над X, в то время как над Y мы имеем

$$Av(t) = Av(s) = s,$$

так как s — инвариантное сечение. Таким образом, $Av(t)$ — требуемое продолжение.

Если E, F — два G-расслоения, то $\mathrm{Hom}(E, F)$ также является G-расслоением, и мы имеем

$$\Gamma(\mathrm{Hom}(E, F))^G \cong \mathrm{HOM}_G(E, F).$$

Следовательно, G-аналоги лемм 1.4.2 и 1.4.3 вытекают сразу из леммы 1.6.3. Таким образом, справедлива

Лемма 1.6.4. *Пусть Y — компактное G-пространство, X — некоторое G-пространство, f_t: $Y \to X$,*

$0 \leqslant t \leqslant 1$, — *некоторая G-гомотопия и E — векторное G-расслоение над X. Тогда f_0^*E и f_1^*E — изоморфные G-расслоения.*

Под G-гомотопией подразумевается, конечно, G-отображение $F: Y \times I \to X$, где I — единичный интервал с тривиальным действием группы G. Мы называем G-пространство G-стягиваемым, если оно G-гомотопически эквивалентно точке. В частности, конус над G-пространством является всегда G-стягиваемым. Под тривиальным G-расслоением мы будем понимать G-расслоение, изоморфное произведению $X \times V$, где V — некоторый G-модуль. При таких определениях результаты 1.4.4—1.4.11 обобщаются на G-модули без всяких изменений. Для этого нужно только заметить, что если h — метрика на расслоении E, то $Av(h)$ — инвариантная метрика.

Чтобы обобщить лемму 1.4.12, заметим, что если семейство сечений $V \subset \Gamma(E)$ достаточное, то семейство сечений $\sum_{g \in G} gV \subset \Gamma(E)$ достаточное и инвариантное. Это ведет сразу к соответствующему обобщению следствия 1.4.14.

Для обобщения теоремы 1.4.15 необходимо рассмотреть грассманианы G-подпространств пространства $m \sum_{i=1}^{k} V_i$ при $m \to \infty$, где, как и прежде, $V_1, \ldots, V_k$ — полное множество неприводимых G-модулей. Оставим формулировку этого утверждения читателю.

Наконец, рассмотрим модульную интерпретацию векторных расслоений. Введем обозначение $A = C(X)$. Если X — некоторое G-пространство, то группа G действует на A как группа автоморфизмов алгебры. Если E — векторное G-расслоение над X, то $\Gamma(E)$ — проективный A-модуль и группа G действует на $\Gamma(E)$; мы имеем следующие соотношения между действиями групп A и G:

$$g(as) = g(a)g(s), \quad a \in A, \quad g \in G, \quad s \in \Gamma(E).$$

Можно смотреть на это иначе и ввести „скрещенное произведение“ B группы G и алгебры A, а именно, элементами B являются линейные комбинации $\sum_{g \in G} a_g g$, где $a_g \in A$, а произведение определяется формулой

$$(ag)(a'g') = (ag(a'))gg'.$$

Действительно, $\Gamma(E)$ является тогда B-модулем. Предоставим читателю показать, что категория векторных G-расслоений над X эквивалентна категории B-модулей, конечно порожденных и проективных над A.

ГЛАВА 2

K-ТЕОРИЯ

§ 2.1. Определения

Пусть X — произвольное пространство. Множество $\mathrm{Vect}(X)$ имеет структуру абелевой полугруппы, в которой аддитивная структура определяется прямой суммой. Если A — любая абелева полугруппа, то мы можем поставить ей в соответствие абелеву группу $K(A)$, обладающую следующим свойством: существует такой гомоморфизм полугрупп $\alpha: A \to K(A)$, что если G — любая группа, $\gamma: A \to G$ — произвольный гомоморфизм полугрупп, то существует такой единственный гомоморфизм $\varkappa: K(A) \to G$, что $\gamma = \varkappa\alpha$. Если такая группа $K(A)$ существует, то она должна быть единственной.

Группа $K(A)$ определяется обычным образом. Пусть $F(A)$ — свободная абелева группа, порожденная элементами полугруппы A, и пусть $E(A)$ — подгруппа группы $F(A)$, порожденная элементами вида $a + a' - (a \oplus a')$, где $\oplus$ — сложение в A (a, $a' \in A$). Тогда группа $K(A) = F(A)/E(A)$ обладает сформулированным выше универсальным свойством с очевидным отображением $\alpha: A \to K(A)$.

Иногда бывает удобна конструкция группы $K(A)$, несколько отличающаяся от описанной выше. Пусть $\Delta: A \to A \times A$ — диагональный гомоморфизм полугрупп, и пусть $K(A)$ — множество классов смежности подполугруппы $\Delta(A)$ в полугруппе $A \times A$. Множество $K(A)$ является факторполугруппой, но перестановка координат в $A \times A$ индуцирует обратный элемент в $K(A)$, поэтому $K(A)$ является группой. Определим $\alpha_A: A \to K(A)$ как композицию вложения $a \to (a, 0)$ с естественной проекцией $A \times A \to K(A)$. (Для простоты мы полагаем, что A содержит нуль.) Пара $(K(A), \alpha_A)$ есть функтор полугруппы A, поэтому если $\gamma: A \to B$ — гомоморфизм полугрупп, то мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha_A} & K(A) \\ {\scriptstyle\gamma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle K(\gamma)} \\ B & \xrightarrow{\alpha_B} & K(B) \end{array}$$

Если B — группа, то α_B — изоморфизм. Это показывает, что группа $K(A)$ обладает требуемым универсальным свойством.

Если A является, кроме того, полукольцом (т. е. в A определено умножение, дистрибутивное по отношению к сложению в A), то $K(A)$ является, очевидно, кольцом. Если A — коммутативное кольцо, то $K(A)$ обладает универсальными свойствами, подобными тем, которыми оно обладает как группа.

Если X — топологическое пространство, то обозначим через $K(X)$ кольцо $K(\mathrm{Vect}(X))$. (Это обозначение не должно приводить к недоразумениям.) Если $E \in \mathrm{Vect}(X)$, то обозначим через $[E]$ образ расслоения E в кольце $K(X)$. Чтобы избежать лишних обозначений, мы будем писать E вместо $[E]$ там, где можно не опасаться путаницы.

Используя вторую конструкцию группы K, мы видим, что если X — некоторое пространство, то каждый элемент группы $K(X)$ имеет вид $[E]-[F]$, где E, F — расслоения над X. Пусть G — такое расслоение, что расслоение $F\oplus G$ тривиально. Тривиальное расслоение размерности n мы обозначим через $\underline{n}$. Пусть $F\oplus G=\underline{n}$. Тогда $[E]-[F]=[E]+[G]-([F]+[G])=[E\oplus G]-[\underline{n}]$. Таким образом, каждый элемент группы $K(X)$ имеет вид $[H]-[\underline{n}]$.

Пусть E, F — такие расслоения, что $[E]=[F]$. Тогда из нашей второй конструкции группы K вытекает существование такого расслоения G, что $E\oplus G\cong F\oplus G$. Пусть G' — такое расслоение, что $G\oplus G'\cong\underline{n}$. Тогда $E\oplus G\oplus G'\cong F\oplus G\oplus G'$, и поэтому $E\oplus\underline{n}\cong F\oplus\underline{n}$. Если два расслоения становятся эквивалентными после добавления к каждому из них подходящих тривиальных расслоений, то эти расслоения называются *стабильно эквива-*

лентными. Таким образом, $[E]=[F]$ тогда и только тогда, когда E и F стабильно эквивалентны.

Пусть $f\colon X\to Y$ — непрерывное отображение. Тогда $f^*\colon \mathrm{Vect}(Y)\to \mathrm{Vect}(X)$ индуцирует гомоморфизм колец $f^*\colon K(Y)\to K(X)$. По лемме 1.4.3 этот гомоморфизм зависит только от гомотопического класса отображения f.

§ 2.2. Теорема периодичности

Теорема периодичности является основной теоремой K-теории. В своем простейшем виде она утверждает, что для любого пространства X существует изоморфизм между кольцами $K(X)\otimes K(S^2)$ и $K(X\times S^2)$. Это частный случай более общей теоремы, которую мы здесь докажем.

Пусть E — векторное расслоение над пространством X. Обозначим через E_0 пространство $E\setminus X$, где пространство X отождествлено с нулевым сечением расслоения E; тогда ненулевые комплексные числа действуют на E_0 как группа автоморфизмов, сохраняющих слой. Пусть $P(E)$ — факторпространство, полученное из E_0 факторизацией по действию таких комплексных чисел. Пространство $P(E)$ назовем проективным расслоением, ассоциированным с расслоением E, или, короче, проективизацией расслоения E. Если $p\colon P(E)\to X$ — проекция, то для всех $x\in X$ слой $p^{-1}(x)$ представляет собой комплексное проективное пространство. Если V — некоторое векторное пространство, а W — одномерное векторное пространство, то пространства V и $V\otimes W$ изоморфны, но не являются естественно изоморфными. Для любого ненулевого элемента $\omega\in W$ отображение $v\to v\otimes\omega$ определяет изоморфизм между пространствами V и $V\otimes W$ и, следовательно, определяет изоморфизм $P(\omega)\colon P(V)\to P(V\otimes W)$. Если ω' — любой другой ненулевой элемент пространства W, то $\omega'=\lambda\omega$, где λ — некоторое ненулевое комплексное число. Таким образом, $P(\omega)=P(\omega')$, и поэтому изоморфизм между проективными пространствами $P(V)$ и $P(V\otimes W)$ естествен. Следовательно, если E — произвольное векторное расслоение и L — линейное расслоение, то существует естественный изоморфизм $P(E)\cong P(E\otimes L)$.

Пусть E — векторное расслоение над X; каждая точка $a\in P(E)_x=P(E_x)$ представляет собой одномерное подпространство $H_a^* \subset E_x$. Объединение всех этих подпространств определяет подпространство $H^* \subset p^*E$, где $p: P(E) \to X$ — проекция. Легко проверить, что H^* — подрасслоение расслоения p^*E. Действительно, так как задача локальна, мы можем предположить, что E — прямое произведение, и тогда вопрос сводится к частному случаю грассманиана, уже рассмотренному в § 1.4. Мы обозначили наше линейное расслоение через H^*, так как хотим обозначить через H двойственное к нему расслоение (выбор обозначений диктуется алгебро-геометрическими соображениями, которые мы не будем обсуждать здесь).

Сформулируем теперь теорему периодичности.

Теорема 2.2.1. *Пусть L — линейное расслоение над X. Кольцо $K(P(L \oplus 1))$ представляет собой $K(X)$-алгебру с одной образующей $[H]$ и единственным соотношением $([H]-[1])([L][H]-[1])=0$.*

Прежде чем приступить к доказательству этой теоремы, укажем два ее следствия. Заметим, что $P(1 \oplus 1) = X \times S^2$.

Следствие 2.2.2. *Кольцо $K(S^2)$ как K(точка)-модуль порождается элементом $[H]$, причем $[H]$ подчиняется единственному соотношению $([H]-[1])^2=0$.*

Следствие 2.2.3. *Для любого пространства X гомоморфизм $\mu: K(X) \otimes K(S^2) \to K(X \times S^2)$, определенный формулой $\mu(a \otimes b) = (\pi_1^* a)(\pi_2^* b)$, где π_1, π_2 — проекции на сомножители, является изоморфизмом колец.*

Доказательство теоремы 2.2.1 мы разобьем на несколько лемм.

Сначала заметим, что для любого $x \in X$ существует естественное вложение $L_x \to P(L \oplus 1)_x$, определяемое отображением $y \to (y, 1)$. Это отображение продолжается на одноточечную компактификацию слоя L_x и дает гомеоморфизм одноточечной компактификации слоя L_x на слой $P(L \oplus 1)_x$. Если мы отобразим X в $P(L \oplus 1)_x$, переводя точку x в образ „бесконечно удаленной точки“ одноточечной компактификации слоя L_x, то получим сечение расслоения $P(L \oplus 1)$, которое мы назовем „бесконечным сечением“. Аналогично нулевое сечение расслоения L дает нам сечение расслоения $P(L \oplus 1)$, которое мы назовем нулевым сечением.

Выберем метрику на расслоении L; пусть $S \subset L$ — расслоение со слоем единичная окружность. Обозначим через P^0 часть расслоения L, состоящую из векторов длины $\leqslant 1$, а через P^∞ — часть расслоения $P(L \oplus 1)$, состоящую из сечения в бесконечности вместе со всеми векторами длины $\geqslant 1$. Обозначим проекции $S \to X$, $P^0 \to X$, $P^\infty \to X$ соответственно через π, π_0, π_∞.

Так как π_0 и π_∞ — гомотопические эквивалентности, то каждое расслоение над P^0 имеет вид $\pi_0^*(E^0)$, а каждое расслоение над P^∞ имеет вид $\pi_\infty^*(E^\infty)$, где E^0 и E^∞ — расслоения над X. Таким образом, любое расслоение E над $P(L \oplus 1)$ изоморфно одному из расслоений вида $(\pi_0^*(E^0), f, \pi_\infty^*(E^\infty))$, где $f \in \operatorname{ISO}(\pi^*(E^0), \pi^*(E^\infty))$ — функция сцепления. Если мы потребуем, чтобы изоморфизм

$$E \to (\pi_0^*(E^0),\ f,\ \pi_\infty^*(E^\infty))$$

совпадал с очевидными изоморфизмами над нулевым и бесконечным сечениями, то *гомотопический класс изоморфизма f будет однозначно определяться классом расслоения E*. При этом снова используется тот факт, что нулевое сечение есть деформационный ретракт пространства P^0 и что бесконечное сечение есть деформационный ретракт пространства P^∞. Упростим немного наши обозначения, записывая (E^0, f, E^∞) вместо $(\pi_0^*(E^0), f, \pi_\infty^*(E^\infty))$.

Покажем, что расслоения E^0 и E^∞ и функцию сцепления f можно выбрать в простом частном виде. В случае, когда расслоение L тривиально, S является прямым произведением $X \times S^1$, а проекция $S \to S^1$ — комплекснозначной функцией на S, которую мы обозначим через z (здесь S^1 отождествляется с множеством комплексных чисел, равных по модулю единице). Это позволяет нам рассмотреть функции на S, которые являются конечными рядами Лорана от z с коэффициентами, представляющими собой функции на X:

$$\sum_{k=-n}^{n} a_k(x) z^k.$$

Такие конечные ряды Лорана можно использовать для равномерной аппроксимации функций на S.

Если L — нетривиальное расслоение, то мы имеем аналог конечных рядов Лорана. В этом случае z является сечением в расслоении, а не функцией. Так как $\pi^*(L)$ — подмножество прямого произведения $S \times L$, то диагональное отображение $S \to S \times S \subset S \times L$ дает нам сечение в расслоении $\pi^*(L)$. Обозначим это сечение через z. Взяв тензорные произведения, мы получаем для $k \geqslant 0$ сечение z^k расслоения $(\pi^*(L))^k$ и сечение z^{-k} расслоения $(\pi^*(L^*))^k$. Обозначим расслоение $(L^*)^k$ через L^{-k}. Тогда для любых k, k' имеем $L^k \otimes L^{k'} \cong L^{k+k'}$. Предположим, что $a_k \in \Gamma(L^{-k})$; тогда $\pi^*(a_k) \otimes z^k \in \Gamma(\pi^*(1))$, и таким образом, $\pi^*(a_k) \otimes z^k$ есть функция на S. Обозначим эту функцию через $a_k z^k$. Под конечным рядом Лорана мы будем понимать сумму функций на S вида

$$\sum_{k=-n}^{n} a_k z^k,$$

где $a_k \in \Gamma(L^{-k})$ для всех k.

Более общо, если E^0, E^∞ — два векторных расслоения над X и $a_k \in \Gamma(\mathrm{Hom}(L^k \otimes E^0, E^\infty))$, то, обозначив $a_k \otimes z^k$ через $a_k z^k$, мы увидим, что конечная сумма вида

$$f = \sum_{k=-n}^{n} a_k z^k$$

является элементом пространства сечений $\Gamma(\pi^*(E^0), \pi^*(E^\infty))$. Если $f \in \mathrm{ISO}(\pi^*(E^0), \pi^*(E^\infty))$, то будем называть f *функцией сцепления Лорана* для пары расслоений (E^0, E^∞).

Функция z является функцией сцепления для пары $(1, L)$. Далее, $(1, z, L)$ есть в точности расслоение H^*, которое мы определили ранее. Чтобы показать это, напомним сначала, что H^* определялось как подрасслоение расслоения $\pi^*(L \oplus 1)$. Для каждого $y \in P(L \oplus 1)_x$ слой H_y^* является подпространством пространства $(L \oplus 1)_x$ и

$$H_\infty^* = L_x \oplus 0, \qquad H_0^* = 0 \oplus 1_x.$$

Таким образом, композиция

$$H^* \to \pi^*(L \oplus 1) \to \pi^*(1),$$

индуцированная проекцией $L \oplus 1 \to 1$, определяет изоморфизм

$$f_0\colon H^*|_{P^0} \to \pi_0^*(1).$$

Аналогично композиция

$$H^* \to \pi^*(L \oplus 1) \to \pi^*(L),$$

индуцированная проекцией $L \oplus 1 \to L$, определяет изоморфизм

$$f_\infty\colon H^*|_{P^\infty} \to \pi_0^*(L).$$

Следовательно, $f = f_\infty f_0^{-1}\colon \pi^*(1) \to \pi^*(L)$ есть функция сцепления для расслоения H^*. Ясно, что если $y \in S_x$, то $f(y)$ — изоморфизм, образ которого есть H_y^*. Так как H_y^* — подпространство пространства $L_x \oplus 1_x$, натянутое на вектор $y \oplus 1$ ($y \in S_x \subset L_x$, $1 \in \mathbf{C}$), то мы видим, что f есть в точности наше сечение z. Таким образом,

$$H^* \cong (1, z, L).$$

Следовательно, для любого целого числа k

$$H^k \cong \left(1, z^{-k}, L^{-k}\right).$$

Следующий шаг в нашей классификации расслоений над пространством P — показать, что всякая функция сцепления может быть взята как функция сцепления Лорана. Предположим, что $f \in \Gamma\,\mathrm{Hom}\,(\pi^*(E^0), \pi^*(E^\infty))$ — любое сечение. Определим коэффициенты Фурье этого сечения

$$a_k \in \Gamma\,\mathrm{Hom}\,(L^k \otimes E^0, E^\infty)$$

формулой

$$a_k(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_x} f_x z_x^{-k-1}\, dz_x.$$

Здесь f_x, z_x — ограничения сечений f, z на S_x, и dz_x является, следовательно, дифференциалом на S_x с коэффициентами в L_x. Пусть S_n — частичная сумма

$$S_n = \sum_{k=-n}^{n} a_k z^k;$$

определим средние Чезаро

$$f_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} S_k.$$

Тогда доказательство теоремы Фейера о $C(0, 1)$-суммируемости рядов Фурье немедленно обобщается на рассматриваемый более общий случай и получается

Лемма 2.2.4. *Пусть f — любая функция сцепления для (E^0, E^∞), и пусть f_n — последовательность средних Чезаро для ряда Фурье функции f. Тогда последовательность f_n равномерно сходится к f. Таким образом, f_n при достаточно больших n есть функция сцепления для пары расслоений (E^0, E^∞) и $(E^0, f, E^\infty) \cong \cong (E^0, f_n, E^\infty)$.*

Доказательство. Так как $\mathrm{ISO}(E^0, E^\infty)$ — открытое подмножество векторного пространства $\mathrm{HOM}(E^0, E^\infty)$, то существует такое $\varepsilon > 0$, что $g \in \mathrm{ISO}(E^0, E^\infty)$, если $|f - g| < \varepsilon$, где $|\ \ |$ означает обычную sup-норму по отношению к фиксированным метрикам в E^0, E^∞. Так как последовательность f_n равномерно сходится к f, то мы имеем $|f - f_n| < \varepsilon$ для достаточно большого n. Таким образом, $|f - (tf + (1 - t) f_n)| < \varepsilon$ для $0 \leqslant t \leqslant 1$. Следовательно, f и f_n гомотопны в пространстве $\mathrm{ISO}(E^0, E^\infty)$, поэтому $(E^0, f, E^\infty) \cong (E^0, f_n, E^\infty)$.

Далее рассмотрим полиномиальную функцию сцепления, т. е. функцию вида

$$p = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k.$$

Рассмотрим гомоморфизм

$$\mathfrak{L}^n(p)\colon\ \pi^*\left(\sum_{k=0}^{n} L^k \otimes E^0\right) \to \pi^*\left(E^\infty \oplus \sum_{k=1}^{n} L^k \otimes E^0\right),$$

заданный матрицей

$$\mathfrak{L}^n(p) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ -z & 1 & & & \\ & -z & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -z & 1 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что $\mathfrak{L}^n(p)$ — гомоморфизм, *линейный* по z. Теперь определим последовательность функций $p_r(z)$ по индукции формулой

$$p_0 = p, \quad z p_{r+1}(z) = p_r(z) - p_r(0).$$

Тогда мы имеем следующее матричное тождество:

$$\mathfrak{L}^n(p) = \begin{pmatrix} 1 & p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} p & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -z & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & -z & 1 & \\ & & & -z & 1 \end{pmatrix},$$

или, короче,

$$\mathfrak{L}^n(p) = (1 + N_1)(p \oplus 1)(1 + N_2),$$

где N_1 и N_2 — нильпотентные матрицы. Если N — нильпотентная матрица, то $(1 + tN)$ — невырожденная матрица для $0 \leqslant t \leqslant 1$, и поэтому мы получаем

Предложение 2.2.5. *Функции сцепления $\mathfrak{L}^n(p)$ и $p \oplus 1$ определяют изоморфные расслоения над пространством P, т. е.*

$$(E^0, p, E^\infty) \oplus \left(\sum_{k=1}^{n} L^k \otimes E^0, 1, \sum_{k=1}^{n} L^k \otimes E^0\right) \cong$$
$$\cong \left(\sum_{k=0}^{n} L^k \otimes E^0, \mathfrak{L}^n(p), E^\infty \oplus \sum_{k=1}^{n} L^k \otimes E^0\right).$$

Замечание. Определение функции $\mathfrak{L}^n(p)$, очевидно, подсказано правилом перехода от обыкновенного дифференциального уравнения порядка n к системе уравнений первого порядка.

Для краткости мы обозначим расслоение

$$\left(\sum_{k=0}^{n} L^k \otimes E^0, \mathfrak{L}^n(p), E^\infty \oplus \sum_{k=1}^{n} L^k \otimes E^0\right)$$

через $\mathfrak{L}^n(E^0, p, E^\infty)$.

Лемма 2.2.6. *Пусть p — полиномиальная функция сцепления степени $\leqslant n$ для пары расслоений (E^0, E^∞). Тогда имеют место следующие изоморфизмы:*

$$\text{(i)}\quad \mathfrak{L}^{n+1}(E^0, p, E^\infty) \cong \mathfrak{L}^n(E^0, p, E^\infty) \oplus$$
$$\oplus (L^{n+1} \otimes E^0, 1, L^{n+1} \otimes E^0),$$

$$\text{(ii)}\quad \mathfrak{L}^{n+1}(L^{-1} \otimes E^0, zp, E^\infty) \cong \mathfrak{L}^n(E^0, p, E^\infty) \oplus$$
$$\oplus (L^{-1} \otimes E^0, z, E^0).$$

Доказательство. Имеем

$$\mathfrak{L}^{n+1}(p) = \begin{pmatrix} & & 0 \\ & \mathfrak{L}^n(p) & \vdots \\ 0 \; \ldots & -z & 1 \end{pmatrix}.$$

Умножение функции z, стоящей в нижней строке, на параметр t определяет гомотопию между функциями сцепления $\mathfrak{L}^{n+1}(p)$ и $\mathfrak{L}^n(p) \oplus 1$. Тем самым доказана первая часть леммы.

Аналогично рассмотрим функцию сцепления $\mathfrak{L}^{n+1}(zp)$ в матричной записи:

$$\mathfrak{L}^{n+1}(zp) = \begin{pmatrix} 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ -z & 1 & 0 & & & \\ 0 & -z & 1 & & & \\ & & -z & \ddots & & \\ & & & \ddots & 1 & \\ & & & & -z & 1 \end{pmatrix}.$$

Умножив 1, стоящую во второй строке, на параметр t, мы получим гомотопию между функциями сцепления $\mathfrak{L}^{n+1}(zp)$ и $\mathfrak{L}^n(p) \oplus (-z)$ [1]. Так как функция $-z$ есть композиция функции z с отображением (-1) и так как отображение (-1) продолжается на все пространство расслоения E^0, то имеет место изоморфизм $(L^{-1} \otimes E^0, -z, E^0) \cong (L^{-1} \otimes E^0, z, E^0)$. Следовательно, и вторая часть леммы доказана.

Дадим теперь простое алгебраическое описание кольца $K(P)$. Обозначим в дальнейшем $[(E^0, p, E^\infty)]$ через $[E^0, p, E^\infty]$.

Предложение 2.2.7. *Для любой полиномиальной функции сцепления p пары расслоений (E^0, E^∞) имеет место тождество*

$$([E^0, p, E^\infty] - [E^0, 1, E^0])([L][H] - [1]) = 0.$$

Доказательство. Из второй части леммы 2.2.6 и предложения 2.2.6 мы получаем, что

$$(L^{-1} \otimes E^0, zp, E^\infty) \oplus \left(\sum_{k=0}^{n} L^k \otimes E^0, 1, \sum_{k=0}^{n} L^k \otimes E^0 \right) \cong$$
$$\cong (E^0, p, E^\infty) \oplus \left(\sum_{k=1}^{n} L^k \otimes E^0, 1, \sum_{k=1}^{n} L^k \otimes E^0 \right) \oplus$$
$$\oplus (L^{-1} \otimes E^0, z, E^0).$$

[1] Выполнив указанное умножение, мы найдем семейство функций сцепления $\mathfrak{L}^{n+1}(zp)_{(t)}$, причем $\mathfrak{L}^n(p) \oplus (-z)$ получится из $\mathfrak{L}^{n+1}(zp)_{(0)}$, если поменять местами первую и вторую строки. Легко заметить, что $\mathfrak{L}^{n+1}(pz)_{(0)}$ и $\mathfrak{L}^n(p) \oplus (-z)$ гомотопны в пространстве $\mathrm{ISO}(E^0, E^\infty)$. — *Прим. перев.*

Таким образом, в кольце $K(P)$ имеет место равенство

$$[L^{-1}\otimes E^0,\ zp,\ E^\infty]\oplus[E^0,\ 1,\ E^0]=$$
$$=[E^0,\ p,\ E^\infty]\oplus[L^{-1}\otimes E^0,\ z,\ E^0].$$

Так как $[1,\ z,\ L]=[H^{-1}]$, то

$$[L^{-1}][H^{-1}][E^0,\ p,\ E^\infty]\oplus[E^0,\ 1,\ E^0]=$$
$$=[E^0,\ p,\ E^\infty]\oplus[L^{-1}][H^{-1}][E^0,\ 1,\ E^0].$$

В частности, полагая $E^0=1$, $p=z$, $E^\infty=L$, мы получаем формулу

$$([H]-[1])([L][H]-[1])=0,$$

которая составляет часть утверждения нашей основной теоремы.

Теперь обратим внимание на линейную функцию сцепления. Сначала предположим, что T — некоторый эндоморфизм конечномерного векторного пространства E. Пусть S — окружность в комплексной плоскости, не проходящая ни через одно собственное значение эндоморфизма T. Тогда оператор

$$Q=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_S (z-T)^{-1}\,dz$$

является проектором S в E и коммутирует с T. Следовательно, разложение $E=E_+\oplus E_-$, $E_+=QE$, $E_-=(1-Q)E$, инвариантно относительно T, и поэтому оператор T можно представить в виде $T=T_+\oplus T_-$, причем все собственные значения оператора T_+ лежат *внутри* окружности S, тогда как все собственные значения оператора T_- расположены *вне* S. Разумеется, равенство $T=T_++T_-$ есть просто спектральное разложение эндоморфизма T, соответствующее двум компонентам связности дополнения к окружности S в комплексной плоскости.

Обобщим теперь эти результаты на векторные расслоения, но сначала сделаем некоторые замечания относительно обозначений. В предыдущих рассуждениях z и, следовательно, $p(z)$ были сечениями над S. Однако эти сечения продолжаются естественным образом до сечений над всем расслоением L. В некоторые утверждения будет удобно включить также бесконечное сечение расслоения P. Так, если мы утверждаем, что $p(z)=az+b$ — изоморфизм вне S, то это включает в себя утверждение о том, что a — изоморфизм.

Пусть p — линейная функция сцепления для пары расслоений (E^0, E^∞); определим эндоморфизмы Q^0, Q^∞ расслоений E^0, E^∞ следующими формулами:

$$Q_x^0=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_x} p_x^{-1}\,dp_x,\quad Q_x^\infty=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_x} dp_x\cdot p_x^{-1}.$$

Тогда Q^0 и Q^∞ — проекторы и

$$pQ^0=Q^\infty p.$$

Обозначим $E_+^i=Q^iE^i$, $E_-^i=(1-Q^i)E^i$, $i=0, \infty$, так что $E^i=E_+^i\oplus E_-^i$. В этих обозначениях имеет место

Предложение 2.2.8. *Функция сцепления p для пары расслоений (E^0, E^∞) совместима с разложениями $E^i=E_+^i\oplus E_-^i$, $i=0, \infty$, и поэтому $p=p_+\oplus p_-$. Более того, p_+ — изоморфизм вне S, а p_- — изоморфизм внутри S.*

Доказательство. Достаточно проверить эти утверждения в каждой точке $x\in X$. Другими словами, можно предположить, что X — точка, $L=\mathbf{C}$ и z — комплексное число. Так как функция $p(z)$ определяет изоморфизм для $|z|=1$, то можно найти такое вещественное число $\alpha>1$, что $p(\alpha)$: $E^0\to E^\infty$ — изоморфизм. Для простоты вычислений мы отождествим E^0 с E^∞ при помощи этого изоморфизма. Далее рассмотрим конформное преобразование

$$w=\frac{1-\alpha z}{z-\alpha},$$

которое сохраняет единичную окружность и ее внутренность. Выражая z через w и учитывая, что мы положили $p(\alpha)=1$, находим следующее выражение для функций $p(z)$:

$$p(z)=\frac{w-T}{w+\alpha},$$

где $T \in \operatorname{End}(E^0)$. Следовательно,

$$Q^0 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=1} p^{-1}\,dp =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=1} \left(-(w+\alpha)^{-1}\,dw + (w-T)^{-1}\,dw\right) =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=1} (w-T)^{-1}\,dw, \text{ так как } |\alpha| > 1.$$

Аналогично

$$Q^\infty = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=1} (dw)(w-T)^{-1} = Q^0,$$

поэтому наши утверждения следуют из соответствующих утверждений о линейном преобразовании T.

Следствие 2.2.9. *Пусть p — линейная функция сцепления, определенная в предложении* 2.2.8; *рассмотрим функции*

$$p_+ = a_+ z + b_+, \quad p_- = a_- z + b_-.$$

Тогда если $p(t) = p_+(t) \oplus p_-(t)$, где

$$p_+(t) = a_+ z + t b_+, \quad p_-(t) = t a_- z + b_-, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

то мы получаем гомотопию линейных функций сцепления, связывающую p с $a_+ z + b_-$. Таким образом,

$$(E^0, p, E^\infty) \cong (E^0_+, z, L \otimes E^0_+) \oplus (E^0_-, 1, E^0_-).$$

Доказательство. Из последней части леммы 2.2.6 вытекает, что $p_+(t)$ и $p_-(t)$ — изоморфизмы на S для $0 \leqslant t \leqslant 1$. Таким образом, $p(t)$ — функция сцепления при $0 \leqslant t \leqslant 1$. Следовательно, имеют место изоморфизмы

$$(E^0, p, E^\infty) \cong (E^0, p(1), E^\infty) \cong$$
$$\cong (E^0_+, a_+ z, E^\infty_+) \oplus (E^0_-, b_-, E^\infty_-).$$

Так как $a_+ \colon L \otimes E^0_+ \to E^\infty_+$, $b_- \colon E^0_- \to E^\infty_-$ — непременно изоморфизмы, то мы видим, что

$$(E^0_+, a_+ z, E^\infty_+) \cong (E^0_+, z, L \otimes E^0_+),$$
$$(E^0_-, b_-, E^\infty_-) \cong (E^0_-, 1, E^0_-).$$

Рассмотрим теперь снова полиномиальную функцию сцепления p степени $\leqslant n$. Тогда $\mathfrak{L}^n(p)$ — линейная функция сцепления для пары расслоений (V^0, V^∞), где

$$V^0 = \sum_{k=0}^{\infty} L^k \otimes E^0, \quad V^\infty = E^\infty \oplus \sum_{k=1}^{n} L^k \otimes E^0.$$

Следовательно, как и выше, линейная функция сцепления определяет разложение

$$V^0 = V_+^0 \oplus V_-^0.$$

Чтобы подчеркнуть зависимость расслоения V_+^0 от функции p и числа n, запишем V_+^0 в виде

$$V_+^0 = V_n(E^0, p, E^\infty).$$

Заметим, что V_+^0 — векторное расслоение над X. Если p_t — гомотопия полиномиальных функций сцепления степени $\leqslant n$, то из построения расслоения V_n над пространством $X \times I$ следует, что

$$V_n(E^0, p_0, E^\infty) \cong V_n(E^0, p_1, E^\infty).$$

Поэтому из гомотопий, используемых в доказательстве леммы 2.2.6, мы получаем следующие изоморфизмы:

$$V_{n+1}(E^0, p, E^\infty) \cong V_n(E^0, p, E^\infty),$$
$$V_{n+1}(L^{-1} \otimes E^0, zp, E^\infty) \cong V_n(E^0, p, E^\infty) \oplus (L^{-1} \otimes E^0),$$

или, что эквивалентно,

$$V_{n+1}(E^0, zp, L \otimes E^\infty) \cong L \otimes V_n(E^0, p, E^\infty) \oplus E^0.$$

Комбинируя этот результат со следствием 2.2.9 и предложением 2.2.5, мы получаем следующую формулу в кольце $K(P)$:

$$\begin{aligned}[E^0, p, E^\infty] + \left\{ \sum_{k=1}^{n} [L^k \otimes E^0] \right\} [1] = \\ = [V_n(E^0, p, E^\infty)] [H^{-1}] + \\ + \left\{ \sum_{k=0}^{n} [L^k \otimes E^0] - [V_n(E^0, p, E^\infty)] \right\} [1],\end{aligned}$$

и отсюда формулу

$$[E^0,\ p,\ E^\infty] = [V_n(E^0,\ p,\ E^\infty)]([H^{-1}] - [1]) + [E^0][1].$$

Это показывает, что элемент $[V_p^+] \in K(X)$ полностью определяет элемент $[E^0,\ p,\ E^\infty] \in K(P)$. Теперь мы можем доказать нашу теорему.

Пусть t — независимая переменная над кольцом $K(X)$. Так как имеет место соотношение $([H]-[1])([L][H]-[1])=0$, то отображение $t \to [H]$ индуцирует гомоморфизм $K(X)$-алгебр

$$\mu:\ K(X)[t]/((t-1)([L]t-1)) \to K(P).$$

Чтобы доказать, что μ — изоморфизм, мы построим обратный гомоморфизм в явном виде.

Пусть f — функция сцепления для пары расслоений $(E^0,\ E^\infty)$, f_n — последовательность средних Чезаро ее ряда Фурье, и пусть $p_n = z^n f_n$. Тогда p_n при достаточно большом n представляет собой полиномиальную функцию сцепления (степени $\leqslant 2n$) для пары расслоений $(E^0,\ L^n \otimes E^\infty)$. Определим элемент

$$\nu_n(f) \in K(X)[t]/((t-1)([L]t-1))$$

формулой

$$\nu_n(f) = [V_{2n}(E^0,\ p_n,\ L^n \otimes E^\infty)](t^{n-1} - t^n) + [E^0]t^n.$$

Теперь для достаточно большого n отрезок, соединяющий функции p_{n+1} и zp_n[1]), определяет гомотопию полиномиальных функций сцепления степени $\leqslant 2(n+1)$. Следовательно, согласно формулам, вытекающим из следствия 2.2.9, имеют место изоморфизмы

$$\begin{aligned} V_{2n+2}(E^0,\ p_{n+1},\ L^{n+1} \otimes E^\infty) &\cong V_{2n+2}(E^0,\ zp_n,\ L^{n+1} \otimes E^\infty) \cong \\ &\cong V_{2n+1}(E^0,\ zp_n,\ L^{n+1} \otimes E^\infty) \cong \\ &\cong L \otimes V_{2n}(E^0,\ p_n,\ L^n \otimes E^\infty) \oplus E^0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \nu_{n+1}(f) = \{[L][V_{2n}(E^0,\ p_n,\ L^n \otimes E^\infty)] + [E^0]\}(t^n - t^{n+1}) + \\ + [E^0]t^{n+1} = \nu_n(f), \end{aligned}$$

[1]) Отрезком, соединяющим функции a и b, здесь называется семейство функций $ta + (1-t)b$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. — *Прим. перев.*

так как $(t-1)([L]t-1)=0$. Таким образом, $\nu_n(f)$ при достаточно больших n не зависит от n и, следовательно, зависит только от функции f. Учитывая это, мы будем писать $\nu(f)$ вместо $\nu_n(f)$. Если g — функция, достаточно близкая к f, и n — достаточно большое число, то отрезок, соединяющий функции f_n и g_n, дает гомотопию полиномиальных функций сцепления степени $\leqslant 2n$ и, следовательно, $\nu(f)=\nu_n(f)=\nu_n(g)=\nu(g)$. Таким образом, $\nu(f)$ — локально постоянная функция от f и, следовательно, зависит только от гомотопического класса функции f. Далее, если E — произвольное расслоение над P и f — функция сцепления, определяющая расслоение E, то мы положим $\nu(E)=\nu(f)$; при этом элемент $\nu(E)$ корректно определен и зависит только от класса расслоения E. Так как сопоставление каждому расслоению E элемента $\nu(E)$, очевидно, аддитивно относительно сложения, то оно индуцирует гомоморфизм групп

$$\nu\colon\ K(P)\to K(X)[t]/((t-1)([L]t-1)).$$

Из нашего определения ясно, что ν является, кроме того, гомоморфизмом $K(X)$-модулей.

Сначала мы проверим, что гомоморфизм $\mu\nu$ тождественный. Используя введенные выше обозначения, получаем

$$\begin{aligned}\mu\nu(E)&=\mu\left\{\left[V_{2n}\left(E^0,\ p_n,\ L^n\otimes E^\infty\right)\right]\left(t^{n-1}-t^n\right)+\left[E^0\right]t^n\right\}=\\&=\left[V_{2n}\left(E^0,\ p_n,\ L^n\otimes E^\infty\right)\right]\left([H]^{n-1}-[H]^n\right)+\left[E^0\right][H]^n=\\&=[E^0,\ p_n,\ L^n\otimes E^\infty]\,[H]^n=[E^0,\ f_n,\ E^\infty]=[E^0,\ f,\ E^\infty]=E.\end{aligned}$$

Так как кольцо $K(P)$ аддитивно порождено элементами вида $[E]$, то тем самым доказано, что $\mu\nu$ — тождественный гомоморфизм.

Наконец, докажем, что и $\nu\mu$ — тождественный гомоморфизм. Так как $\nu\mu$ — гомоморфизм $K(X)$-модулей, то достаточно показать, что $\nu\mu(t^n)=t^n$ для всех $n\geqslant 0$. Однако

$$\begin{aligned}\nu\mu\left(t^n\right)&=\nu\,[H]^n=\nu\left[1,\ z^{-n},\ L^{-n}\right]=\\&=[V_{2n}(1,\ 1,\ 1)]\left(t^{n-1}-t^n\right)+[1]\,t^n=t^n,\end{aligned}$$

так как $V_{2n}(1,\ 1,\ 1)=0$.

§ 2.3. Группа $K_G(X)$

Пусть G — конечная группа, X — некоторое G-пространство и $\mathrm{Vect}_G(X)$ — множество классов изоморфных векторных G-расслоений над X. Множество $\mathrm{Vect}_G(X)$ является абелевой полугруппой относительно суммы Уитни $\oplus$. Образуем ассоциированную абелеву группу и обозначим ее через $K_G(X)$. Если $G=1$ — тривиальная группа, то $K_G(X)=K(X)$. С другой стороны, если X — точка, то $K_G(X)\cong R(G)$ — кольцо характеров группы G.

Если E — векторное G-расслоение над X, то $P(E)$ является G-пространством. Если $E=L\oplus 1$ и L — некоторое G-расслоение, то нулевое и бесконечное сечения $X\to P(E)$ являются оба G-сечениями. Расслоение H над $P(E)$ также является линейным G-расслоением. Внимательное изучение данного выше доказательства теоремы периодичности позволяет заметить, что во всех пунктах доказательства мы могли бы ввести действие группы G. Таким образом, мы можем получить теорему периодичности для групп K_G.

Теорема 2.3.1. *Для G-пространства X и линейного G-расслоения L над X отображение $t\to[H]$ индуцирует изоморфизм $K_G(X)$-модулей*

$$K_G(X)[t]/((t-1)(t[L]-1))\to K_G(P(L\oplus 1)).$$

§ 2.4. Когомологические свойства функтора K

Определим группу $K(X, Y)$ для компактных пар (X, Y). Тогда мы сможем установить чисто формально некоторые свойства функтора K. Так как доказательства формальны, то наши теоремы одинаково верны для любой "теории когомологий", удовлетворяющей некоторым аксиомам. Мы предоставляем эту формализацию читателю.

Пусть $\mathfrak{C}$ — категория компактных пространств, $\mathfrak{C}^+$ — категория компактных пространств с отмеченной базисной точкой и $\mathfrak{C}^2$ — категория компактных пар. Определим функторы

$$\mathfrak{C}^2\to\mathfrak{C}^+,$$

$$\mathfrak{C}\to\mathfrak{C}^2,$$

ставя в соответствие паре (X, Y) пространство X/Y с отмеченной точкой Y/Y (если Y — пустое множество, то под X/Y понимается непересекающееся объединение пространства X с отмеченной точкой). Второй функтор каждому пространству X ставит в соответствие пару $(X, \varnothing)$. Композиция этих функторов определяет функтор $\mathfrak{C} \to \mathfrak{C}^+$, который переводит X в X^+, где через X^+ обозначено пространство $X/\varnothing$.

Если X принадлежит категории $\mathfrak{C}^+$, то мы определим $\tilde{K}(X)$ как ядро отображения $i^*\colon K(X) \to K(x_0)$, где $i\colon x_0 \to X$ — вложение базисной точки. Если $c\colon X \to x_0$ — естественная проекция, то c^* индуцирует расщепление $K(X) \cong \tilde{K}(X) \oplus K(x_0)$. Это расщепление, очевидно, естественно для отображений в категории $\mathfrak{C}^+$. Таким образом, $\tilde{K}$ — функтор на категории $\mathfrak{C}^+$. Очевидно также, что $K(X) \cong \tilde{K}(X^+)$. Определим группу $K(X, Y)$ равенством $K(X, Y) = \tilde{K}(X/Y)$. В частности, $K(X, \varnothing) \cong K(X)$. Так как $\tilde{K}$ — функтор на категории $\mathfrak{C}^+$, то $K(X, Y)$ — контравариантный функтор пары (X, Y) в категории $\mathfrak{C}^2$.

Теперь введем операцию „$\wedge$-произведения" в категории $\mathfrak{C}^+$. Если $X, Y \in \mathfrak{C}^+$, то положим

$$X \wedge Y = X \times Y / X \vee Y,$$

где $X \vee Y = X \times y_0 \cup x_0 \times Y$, x_0, y_0 — отмеченные точки соответственно пространств X, Y. Для любых трех пространств $X, Y, Z \in \mathfrak{C}^+$ имеет место естественный гомеоморфизм

$$X \wedge (Y \wedge Z) \approx (X \wedge Y) \wedge Z,$$

поэтому мы отождествляем эти пространства.

Пусть I — единичный интервал $[0, 1]$ и $\partial I = \{0\} \cup \{1\}$ — его граница. Примем факторпространство $I/\partial I \in \mathfrak{C}^+$ за стандартную модель окружности S^1. Аналогично, если I^n — единичный куб в R^n, то примем факторпространство $I^n/\partial I^n$ за модель n-мерной сферы S^n. В этом случае мы имеем естественный гомеоморфизм

$$S^n \approx S^1 \wedge S^1 \wedge \ldots \wedge S^1 \quad (n \text{ сомножителей}).$$

Для $X \in \mathfrak{C}^+$ пространство $S^1 \wedge X \in \mathfrak{C}^+$ называется *приведенной надстройкой* над пространством X и часто записывается в виде SX. Ясно, что n-кратно итерированная надстройка $SS \ldots SX$ (n раз) естественно гомеоморфна пространству $S^n \wedge X$; она записывается как S^nX.

Определение 2.4.1. Для $n \geqslant 0$ положим

$$\tilde{K}^{-n}(X) = \tilde{K}(S^nX) \quad \text{для} \quad X \in \mathfrak{C}^+,$$
$$K^{-n}(X, Y) = \tilde{K}^{-n}(X/Y) = \tilde{K}(S^n(X/Y)) \quad \text{для} \quad (X, Y) \in \mathfrak{C}^2,$$
$$K^{-n}(X) = K^{-n}(X, \varnothing) = \tilde{K}(S^n(X^+)) \quad \text{для} \quad X \in \mathfrak{C}.$$

Очевидно, что так определенные группы $\tilde{K}^{-n}(X)$, $K^{-n}(X, Y)$, $K^{-n}(X)$ представляют собой контравариантные функторы на соответствующих категориях.

Прежде чем приступить к дальнейшему изложению, определим *конус* над пространством X формулой

$$CX = I \times X/\{0\} \times X.$$

Таким образом, конус C является функтором $C: \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}^+$. Отождествим X с подпространством $\{1\} \times X$ пространства CX. Пространство $CX/X = I \times X/\partial I \times X$ называется *неприведенной надстройкой* над X. Заметим, что неприведенная надстройка является функтором $\mathfrak{C} \to \mathfrak{C}^+$, тогда как приведенная надстройка S представляет собой функтор $\mathfrak{C}^+ \to \mathfrak{C}^+$. Если $X \in \mathfrak{C}^+$ с отмеченной точкой x_0, то мы имеем естественное отображение вложения

$$I \approx Cx_0/x_0 \to CX/X,$$

а факторпространство, полученное стягиванием интервала I в пространстве CX/X, является в точности приведенной надстройкой SX. Таким образом, по лемме 1.4.8 проекция $p: CX/X \to SX$ индуцирует изоморфизм групп $K(SX) \cong K(CX/X)$ и, следовательно, также изоморфизм групп $\tilde{K}(SX) \cong \tilde{K}(CX/X)$. Поэтому использование обозначения SX как для приведенных, так и для неприведенных надстроек не приводит к ошибкам.

Если $(X, Y) \in \mathfrak{C}^2$, то определим $X \cup CY$ как пространство, полученное из X и CY отождествлением подпространств $Y \subset X$ и $\{1\} \times Y \subset CY$. Рассматривая отмеченную точку пространства CY как отмеченную точку пространства $X \cup CY$, имеем

$$X \cup CY \in \mathfrak{C}^+.$$

Заметим, что X — подпространство пространства $X \cup CY$ и что существует естественный гомеоморфизм

$$X \cup CY/X \approx CY/Y.$$

Таким образом, если $Y \in \mathfrak{C}^+$, то

$$K(X \cup CY,\ X) \cong K(CY,\ Y) \cong \tilde{K}(SY) = \tilde{K}^{-1}(Y).$$

Начнем с одной простой леммы.

Лемма 2.4.2. *Для пары* $(X,\ Y) \in \mathfrak{C}^2$ *имеет место точная последовательность*

$$K(X,\ Y) \xrightarrow{j^*} K(X) \xrightarrow{i^*} K(Y),$$

где $i\colon Y \to X$ *и* $j\colon (X,\ \varnothing) \to (X,\ Y)$ — *вложения.*

Доказательство. Композиция гомоморфизмов i^*j^* индуцируется композицией отображений $ji\colon (Y,\ \varnothing) \to (X,\ Y)$ и поэтому разлагается в композицию двух гомоморфизмов, одним из которых является отображение в нулевую группу $K(Y,\ Y)$. Таким образом, $i^*j^* = 0$. Предположим теперь, что $\xi \in \operatorname{Ker} i^*$. Мы можем представить элемент ξ в виде $[E] - [n]$, где E — векторное расслоение над X. Так как $i^*\xi = 0$, то $[E|_Y] = [n]$ в группе $K(Y)$. Это означает, что для некоторого целого числа m мы имеем

$$(E \oplus m)|_Y = n \oplus m,$$

т. е. тривиализацию α расслоения $(E \oplus m)|_Y$. Это определяет расслоение $E \oplus m/\alpha$ на факторпространстве X/Y и поэтому элемент

$$\eta = [E \oplus m/\alpha] - [n \oplus m] \in \tilde{K}(X/Y) = K(X,\ Y).$$

Тогда

$$j^*(\eta) = [E \oplus m] - [n \oplus m] = [E] - [n] = \xi.$$

Таким образом, $\operatorname{Ker} i^* = \operatorname{Im} j^*$ и точность установлена.

Следствие 2.4.3. *Если* $(X,\ Y) \in \mathfrak{C}^2$ *и* $Y \in \mathfrak{C}^+$ *(так что, взяв ту же отмеченную точку в пространстве* X*,* *что и в пространстве Y, имеем $X \in \mathfrak{C}^+$), то последовательность*

$$K(X, Y) \to \tilde{K}(X) \to \tilde{K}(Y)$$

точна.

Доказательство. Следствие вытекает непосредственно из леммы 2.4.2 и естественных изоморфизмов

$$K(X) \cong \tilde{K}(X) \oplus K(y_0),$$
$$K(Y) \cong \tilde{K}(Y) \oplus K(y_0).$$

Теперь докажем наше основное утверждение.

Предложение 2.4.4. *Для пары $(X, Y) \in \mathfrak{C}^+$ существует естественная точная последовательность (бесконечная слева)*

$$\ldots \to K^{-2}(Y) \xrightarrow{\delta} K^{-1}(X, Y) \xrightarrow{j^*} K^{-1}(X) \xrightarrow{i^*}$$
$$\to K^{-1}(Y) \xrightarrow{\delta} K^0(X, Y) \xrightarrow{j^*} K^0(X) \xrightarrow{i^*} K^0(Y).$$

Доказательство. Очевидно, достаточно показать, что для $(X, Y) \in \mathfrak{C}^2$ и $Y \in \mathfrak{C}^+$ имеет место точная последовательность из пяти членов

$$(*) \quad \tilde{K}^{-1}(X) \xrightarrow{i^*} \tilde{K}^{-1}(Y) \xrightarrow{\delta} \tilde{K}^0(X, Y) \xrightarrow{j^*}$$
$$\to \tilde{K}^0(X) \xrightarrow{i^*} \tilde{K}^0(Y).$$

Действительно, если это установлено, то, заменив пару (X, Y) парой (S^nX, S^nY) для $n = 1, 2 \ldots,$ мы получим бесконечную последовательность, продолжающую последовательность $(*)$. Затем, заменив пару (X, Y) парой (X^+, Y^+), где (X, Y) — любая пара из категории $\mathfrak{C}^2$, мы получим требуемую бесконечную последовательность. Далее из следствия 2.4.3 вытекает точность последних трех членов последовательности $(*)$. Чтобы доказать точность оставшейся части, применим следствие 2.4.3 к парам $(X \cup CY, X)$ и $((X \cup CY) \cup CX, X \cup CY)$. Сначала, взяв пару $(X \cup CY, X)$, мы получим точную последовательность (где k, m — естественные вложения)

$$K(X \cup CY, X) \xrightarrow{m^*} \tilde{K}(X \cup CY) \xrightarrow{k^*} \tilde{K}(X).$$

Так как пространство CY стягиваемо, то из леммы 1.4.8 следует, что отображение

$$p^*\colon \tilde{K}(X/Y) \to \tilde{K}(X \cup CY)$$

является изоморфизмом, где

$$p\colon X \cup CY \to X \cup CY/CY = X/Y$$

— естественная проекция. Кроме того, композиция k^*p^* совпадает с гомоморфизмом j^*. Пусть

$$\theta\colon K(X \cup CY,\ X) \to K^{-1}(Y)$$

— определенный ранее изоморфизм. Задавая гомоморфизм

$$\delta\colon K^{-1}(Y) \to K(X,\ Y)$$

формулой $\delta = m^*\theta^{-1}$, мы получаем точную последовательность

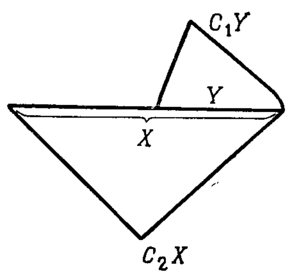
$$\tilde{K}^{-1}(Y) \xrightarrow{\delta} K(X,\ Y) \xrightarrow{j^*} \tilde{K}(X),$$

которая совпадает со средней частью последовательности (*).

Наконец, применим следствие 2.4.3 к паре

$$(X \cup C_1Y \cup C_2X,\quad X \cup C_1Y),$$

где C_1 и C_2 — конусы соответственно над Y и X.



Таким образом, мы получили точную последовательность

$$K(X \cup C_1Y \cup C_2X,\ X \cup C_1Y) \to$$
$$\to \tilde{K}(X \cup C_1Y \cup C_2X) \to \tilde{K}(X \cup C_1Y).$$

Достаточно показать, что эта последовательность изоморфна последовательности, полученной из первых трех членов последовательности (*). Принимая во внимание определение гомоморфизма δ, достаточно показать, что диаграмма

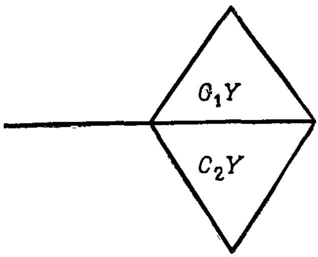
$$
\text{(D)}\qquad
\begin{tikzcd}
K(X \cup C_1Y \cup C_2X,\ X \cup C_1Y) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \tilde{K}(X \cup C_1Y \cup C_2X) \arrow[d, equal] \\
\tilde{K}(C_2X/X) \arrow[d, equal] & \tilde{K}(C_1Y/Y) \arrow[d, equal] \\
K^{-1}(X) \arrow[r, "i^*"] & K^{-1}(Y)
\end{tikzcd}
$$

коммутативна с точностью до знака. Трудность заключается, конечно, в том, что i^* индуцируется вложением

$$C_2Y \to C_2X$$

и что в рассмотренной выше диаграмме мы имеем C_1Y, а не C_2Y.

Чтобы справиться с этой задачей, введем двойной конус над Y, а именно $C_1Y \cup C_2Y$.



Это приводит к коммутативной диаграмме отображений

$$
\text{(E)}\qquad
\begin{tikzcd}
X \cup C_1Y \cup C_2X \arrow[rr, Rightarrow] \arrow[dd] & & C_1Y/Y \arrow[r, Rightarrow] & SY \\
& C_1Y \cup C_2Y \arrow[ul, Rightarrow] \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] \arrow[dl] & & \\
C_2X/X & & C_2Y/Y \arrow[ll] \arrow[r, Rightarrow] & SY
\end{tikzcd}
$$

где все двойные стрелки индуцируют изоморфизм групп K. Используя эту диаграмму, мы видим, что диаграмма (D) коммутативна с точностью до знака, при условии, что индуцированная диаграммой (E) диаграмма

$$\begin{tikzcd} & K(C_1Y/Y) \arrow[dl] & \tilde{K}(SY) \arrow[l] \\ K(C_1Y \cup C_2Y) & & \\ & K(C_2Y/Y) \arrow[ul] & \tilde{K}(SY) \arrow[l, dashed] \end{tikzcd}$$

коммутативна с точностью до знака. А это вытекает непосредственно из следующей леммы, которая представляет интерес сама по себе и потребуется нам в дальнейшем.

Лемма 2.4.5. *Пусть отображение* $T\colon S^1 \to S^1$ *определяется формулой* $T(t) = 1 - t$, $t \in I$ *(напомним, что* $S^1 = I/\partial I$*), и пусть* $T \wedge 1\colon SY \to SY$ *— отображение, полученное из* T *на* S^1 *и тождественного отображения на* Y *(для* $Y \in \mathfrak{C}^+$*). Тогда для* $y \in \tilde{K}(SX)$ *имеет место равенство* $(T \wedge 1)^* y = -y$.

Эта лемма легко выводится из следующей.

Лемма 2.4.6. *Для любого отображения* $f\colon Y \to \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ *и соответствующего векторного расслоения* E_f *над надстройкой* SY *отображение* $f \to [E_f] - [n]$ *индуцирует изоморфизм групп*

$$\lim_{n\to\infty} [Y, \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})] \cong \tilde{K}(SY),$$

причем групповая структура множества в левой части индуцируется групповой структурой группы $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$.

Действительно, по лемме 2.4.6 операция $(T \wedge 1)^*$ на группе $\tilde{K}(SY)$ соответствует с точностью до изоморфизма операции, заменяющей отображение $y \to f(y)$ отображением $y \to f(y)^{-1}$, т. е. инверсии в группе. Таким образом, из леммы 2.4.6 вытекает лемма 2.4.5 и, следовательно, предложение 2.4.4. Итак, остается доказать лемму 2.4.6. Из леммы 1.4.9 вытекает, что отображение $f \to [E_f] - [n]$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между множествами

$$\varinjlim [Y, \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})] \to \tilde{K}(SY).$$

Тот факт, что это гомоморфизм групп, следует из гомотопии, связывающей два отображения $\mathrm{GL}(n) \times \mathrm{GL}(n) \to$

$\to \mathrm{GL}(2n)$, заданных формулами

$$A \times B \to \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

$$A \times B \to \begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Эта гомотопия определяется формулой

$$\rho_t(A \times B) =$$

$$= \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

где $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$.

Из предложения 2.4.4 выводим

Следствие 2.4.7. *Если Y — ретракт пространства X, то для всех $n \geqslant 0$ точная последовательность $K^{-n}(X, Y) \to K^{-n}(X) \to K^{-n}(Y)$ расщепляется:*

$$K^{-n}(X) \cong K^{-n}(X, Y) \oplus K^{-n}(Y).$$

Следствие 2.4.8. *Если X, Y — два пространства с отмеченными точками, то для всех $n \geqslant 0$ проекции π_X: $X \times Y \to X$, π_Y: $X \times Y \to Y$ индуцируют изоморфизм*

$$\tilde{K}^{-n}(X \times Y) \cong \tilde{K}^{-n}(X \wedge Y) \oplus \tilde{K}^{-n}(X) \oplus \tilde{K}^{-n}(Y).$$

Доказательство. Пространство X является ретрактом пространства $X \times Y$, Y — ретрактом пространства $(X \times Y)/X$. Поэтому сформулированный результат получится, если дважды применить следствие 2.4.7.

Так как группа $\tilde{K}^0(X \wedge Y)$ представляет собой ядро отображения $i_X^* \oplus i_Y^*$: $K^0(X \times Y) \to K^0(X) \oplus K^0(Y)$, то обычное тензорное произведение $K^0(X) \otimes K^0(Y) \to K^0(X \times Y)$ индуцирует спаривание $\tilde{K}^0(X) \otimes \tilde{K}^0(Y) \to \tilde{K}^0(X \wedge Y)$. Таким образом, имеет место спаривание

$$\tilde{K}^{-n}(X) \otimes \tilde{K}^{-m}(Y) \to \tilde{K}^{-n-m}(X \wedge Y),$$

так как $S^n X \wedge S^m Y = S^n \wedge S^m \wedge X \wedge Y = S^{n+m} \wedge X \wedge Y$. Заменяя X на X^+ и Y на Y^+, мы получаем

$$K^{-n}(X) \otimes K^{-m}(Y) \to K^{-n-m}(X \times Y).$$

Используя это спаривание, можно перефразировать теорему периодичности следующим образом.

Теорема 2.4.9. *Для любого пространства X и любого $n \leqslant 0$ отображение K^{-2}(точка)$\otimes K^{-n}(X) \to K^{-n-2}(X)$ индуцирует изоморфизм β: $K^{-n}(X) \to K^{-n-2}(X)$.*

Доказательство. Абелева группа K^{-2}(точка)$= \tilde{K}(S^2)$ является свободной и порождается элементом $[H]-[1]$. Если $(X, Y) \in \mathfrak{C}^2$, то отображения в точной последовательности из предложения 2.4.4 коммутируют с изоморфизмом периодичности β. Это, очевидно, верно для гомоморфизмов i^* и j^*, а также для δ, так как этот гомоморфизм тоже индуцирован отображением пространств. Другими словами, изоморфизм β сдвигает всю последовательность влево на шесть членов. Следовательно, если мы определим $K^n(X, Y)$ для $n > 0$ индуктивно по формуле $K^{-n} = K^{-n-2}$, то мы сможем распространить предложение 2.4.4 на точную последовательность, бесконечную в обе стороны. С другой стороны, используя периодичность β, можно определить точную последовательность из шести членов

$$\begin{array}{ccccc} K^0(X, Y) & \to & K^0(X) & \to & K^0(Y) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ K^1(Y) & \leftarrow & K^1(X) & \leftarrow & K^1(X, Y) \end{array}$$

Если не оговорено противное, мы будем всегда отождествлять K^n и K^{n-2}. Введем группу

$$K^*(X) = K^0(X) \oplus K^1(X).$$

Тогда для любой пары (X, Y) мы имеем точный треугольник

$$\begin{tikzcd} K^*(X, Y) \arrow[rr] & & K^*(X) \arrow[dl] \\ & K^*(Y) \arrow[ul, "\delta"] & \end{tikzcd}$$

В формулировке 2.4.9 теорема периодичности является частным случаем более общей „теоремы Тома об изоморфизме". Пусть X — компактное пространство, E — вещественное векторное расслоение над X. Комплексом Тома X^E расслоения E называется одноточечная компактификация полного пространства расслоения E. С другой стороны, если E — комплексное расслоение, то $X^E = P(E \oplus 1)/P(E)$. Таким образом, мы видим, что $\tilde{K}(X^E)$ представляет собой модуль над $K(X)$.

Докажем теорему Тома об изоморфизме для комплексных линейных расслоений.

Теорема 2.4.10. *Если L — комплексное линейное расслоение, то $\tilde{K}(X^L)$ представляет собой свободный $K(X)$-модуль с одной образующей $\mu(L)$, причем образом $\mu(L)$ в кольце $K(P(L \oplus 1))$ является элемент* $[H] - [L^*]$.

Доказательство. Утверждение немедленно следует из основной теоремы, определяющей кольцо $K(P(L \oplus 1))$, и точной последовательности пары $P(L \oplus 1)$, $P(L)$ (заметим, что $P(L) = X$).

В заключение этого параграфа приведем обобщение леммы 2.4.5, которое потребуется нам в дальнейшем.

Лемма 2.4.11. Пусть T_σ: $S^n X \to S^n X$ — *отображение, индуцированное перестановкой σ n сомножителей в выражении $S^n = S^1 \wedge S^1 \wedge \ldots \wedge S^1$. Тогда $(T_\sigma)^* x = \operatorname{sgn}(\sigma) x$ для любого элемента $x \in \tilde{K}(S^n X)$.*

Доказательство. Рассматривая сферу S^n как одноточечную компактификацию вещественного евклидова пространства $\mathbf{R}^n$, мы можем определить действие группы $GL(n, \mathbf{R})$ на ней и, следовательно, на группе $\tilde{K}(S^n X)$. Тем самым обобщается действие перестановки T_σ. Так как группа $GL(n, \mathbf{R})$ имеет ровно две компоненты линейной связности, характеризуемые знаком определителя преобразования, то достаточно проверить формулу $T^* x = -x$ для *одного* преобразования $T \in GL(n, \mathbf{R})$, для которого $\det T = -1$. Но следствие 2.4.5 дает требуемую формулу для преобразования

$$T = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

§ 2.5. Вычисление группы $K^*(X)$ для некоторых пространств X

Из теоремы периодичности мы видим, что $\tilde{K}(S^n)=0$, если n нечетно, и $\tilde{K}(S^n)=\mathbf{Z}$, если n четно. Это позволяет нам доказать теорему Брауэра о неподвижной точке.

Теорема 2.5.1. *Пусть D^n — единичный шар в евклидовом n-мерном пространстве. Если отображение $f: D^n \to D^n$ непрерывно, то для некоторого $x \in D^n$ имеет место равенство $f(x)=x$.*

Доказательство. Так как $\tilde{K}^*(D^n)=0$ и $\tilde{K}^*(S^{n-1})\neq 0$, то S^{n-1} не является ретрактом шара D^n. Если $f(x)\neq x$ ни для какого $x \in D^n$, то определим отображение $g: D^n \to S^{n-1}$ формулой $g(x)=(1-\alpha(x))f(x)+\alpha(x)x$, где $\alpha(x)$ — единственная функция, такая, что $\alpha(x)\geqslant 0$ и $|g(x)|=1$. Если $f(x)\neq x$ для всех точек x, то ясно, что такая функция $\alpha(x)$ существует. Если $x \in S^{n-1}$, то $\alpha(x)=1$ и $g(x)=x$. Таким образом, g является ретракцией шара D^n на сферу S^{n-1}.

Мы будем говорить, что пространство X является клеточным разбиением, если в X существует такая фильтрация замкнутыми множествами $X_{-1}\subset X_0 \subset X_1 \subset \ldots \subset X_n = X$, что каждое $X_k - X_{k-1}$ есть непересекающееся объединение открытых k-мерных клеток и $X_{-1}=\varnothing$.

Предложение 2.5.2. *Если X — такое клеточное разбиение, что $X_{2k}=X_{2k+1}$ для всех k, то $K^1(X)=0$, $K^0(X)$ — свободная группа, образующие которой находятся во взаимно однозначном соответствии с клетками разбиения X.*

Доказательство. Проведем индукцию по n. Так как факторпространство X_{2n}/X_{2n-2} представляет собой объединение $2n$-мерных сфер с одной общей точкой, то

$$K^1(X_{2n}, X_{2n-2})=0,$$
$$K^0(X_{2n}, X_{2n-2})=\mathbf{Z}^k,$$

где k — число $2n$-мерных клеток в X. Таким образом, результат для остова X_{2n} следует из предположения индукции и точной последовательности пары (X_{2n}, X_{2n-2}). Утверждение 2.5.2 можно применить, например, к таким пространствам X, как комплексное многообразие Грассмана, многообразие флагов, комплексная квадрика (пространство, которое определяется однородным уравнением вида $\sum z_i^2 = 0$). В дальнейшем мы еще вернемся к многообразиям флагов.

Предложение 2.5.3. *Пусть $L_1, \ldots, L_n$ — линейные расслоения над X, и пусть H — стандартное расслоение над проективизацией $P(L_1 \oplus \ldots \oplus L_n)$. Тогда отображение $t \to [H]$ индуцирует изоморфизм $K(X)$-модулей*

$$K(X)[t]/\prod_{i=1}^{n}\left(t - [L_i^*]\right) \to K(P(L_1 \oplus \ldots \oplus L_n)).$$

Доказательство. Сначала мы покажем, что можно взять $L_n = 1$. Действительно, для любого векторного расслоения E и линейного расслоения L над X мы имеем $P(E \otimes L) = P(E)$, и стандартные линейные расслоения G, H над проективизациями $P(E \otimes L^*)$, $P(E)$ связываются формулой $G^* = H^* \otimes L$, т. е. $G = H \otimes L^*$. Взяв $E = L_1 \oplus \ldots \oplus L_n$ и $L = L_n^*$, мы видим, что утверждения для расслоений $L_1 \oplus \ldots \oplus L_n$ и $M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$, где $M_i = L_i \otimes L_n^*$ эквивалентны. Мы можем, следовательно, предположить, что $L_n = 1$. Обозначим для краткости

$$P_m = P(L_1 \oplus \ldots \oplus L_m) \text{ для } 1 \leqslant m \leqslant n,$$

так что имеют место включения $X = P_1 \to P_2 \to \ldots \to P_n$. Если H_m — стандартное линейное расслоение над P_m, то $H_m|_{P_{m-1}} \cong H_{m-1}$. Теперь мы видим, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} P_{n-1} & \xrightarrow{s} & P\left(H_{n-1}^* \oplus 1\right) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_{n-1}} & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ P_1 & \xrightarrow{i_n} & P_n \end{array}$$

коммутативна (π_{n-1} — проекция на $X = P_1$, i_n — вложение, s — нулевое сечение). Из этой диаграммы вытекает существование гомеоморфизма

$$P\left(H_{n-1}^* \oplus 1\right)/s(P_{n-1}) \to P_n/P_1.$$

Более того, $q^*(H_n) \cong G$ представляет собой стандартное линейное расслоение над $P(H^*_{n-1} \oplus 1)$. Кольцо $K(P(H^*_{n-1} \oplus 1))$ является свободным $K(P_{n-1})$-модулем с двумя образующими $[1]$ и $[G]$, причем $[G]$ удовлетворяет уравнению $([G]-[1])([G]-[H_{n-1}])=0$. Так как $s^*[G]=[1]$, то $K(P(H^*_{n-1} \oplus 1), s(P_{n-1}))$ — свободный подмодуль, порожденный элементом $[G]-[1]$, причем на этом подмодуле умножение на элемент $[G]$ и умножение на элемент $[H_{n-1}]$ совпадают. Следовательно, кольцо $K(P_n, P_1)$ представляет собой свободный $K(P_{n-1})$-модуль, порожденный элементом $([H_n]-[1])$. Структура этого модуля такова, что для любого элемента $x \in K(P_n, P_1)$

$$[H_{n-1}]\, x = [H_n]\, x.$$

Предположим теперь, что утверждение 2.5.3 доказано для $(n-1)$ и, таким образом,

$$K(P_{n-1}) \cong K(X)\,[t]/\prod_{i=1}^{n} (t-[L_i^*]),$$

где t соответствует элементу $[H_{n-1}]$. Отсюда следует, что отображение $t \to [H_n]$ индуцирует изоморфизм идеала, порожденного элементом $(t-1)$ в кольце

$$K(X)\,[t]/(t-1)\prod_{i=1}^{n-1} (t-[L_i^*]),$$

на кольцо $K(P_n, P_1)$. Так как

$$K(P_n) \cong K(P_n, P_1) \oplus K(X)$$

и так как $L_n = 1$, это дает требуемый результат для кольца $K(P_n)$; тем самым установлен переход от $n-1$ к n и завершено доказательство.

Следствие 2.5.4. *Отображение $t \to [H]$ устанавливает изоморфизм колец $K(P(\mathbf{C}^n)) \cong \mathbf{Z}\,[t]/(t-1)^n$.*

Доказательство. Предположим, что X — точка, и применим утверждение 2.5.3.

В доказательствах результатов этого параграфа мы могли бы опять ввести действие конечной группы и получить следующее утверждение:

$$K_G(X)\,[t]/\prod_{i=1}^{n} (t-[L_i^*]) \cong K_G(P(L_1 \oplus \ldots \oplus L_n)).$$

§ 2.6. Умножение в кольце $K^*(X, Y)$

Заметим сначала, что умножение в кольце $K(X)$ может быть определено „внешне“ следующим образом. Пусть E, F — два расслоения над X; обозначим символом $E \hat{\otimes} F$ расслоение $\pi_1^*(E) \otimes \pi_2^*(F)$ над $X \times X$. Если Δ: $X \to X \times X$ — диагональное отображение, то по определению $E \otimes F = \Delta^*(E \hat{\otimes} F)$.

Если E — расслоение над X, а F — расслоение над Y, то обозначим через $E \hat{\otimes} F$ расслоение $\pi_X^*(E) \otimes \pi_Y^*(F)$ над $X \times Y$. Это определяет спаривание

$$K(X) \otimes K(Y) \to K(X \times Y).$$

Если пространства X, Y имеют отмеченные точки, то кольцо $\tilde{K}(X \wedge Y)$ представляет собой ядро естественной проекции $\tilde{K}(X \times Y) \to \tilde{K}(X) \oplus \tilde{K}(Y)$. Таким образом, определен гомоморфизм

$$\tilde{K}(X) \otimes \tilde{K}(Y) \to \tilde{K}(X \wedge Y).$$

Пусть (X, A), (Y, B) — пары пространств. Тогда определен гомоморфизм

$$\tilde{K}(X/A) \otimes \tilde{K}(Y/B) \to \tilde{K}((X/A) \wedge (Y/B)),$$

т. е. гомоморфизм

$$K(X, A) \otimes K(Y, B) \to K(X \times Y, (X \times B) \cup (A \times Y)).$$

Определим прямое произведение $(X, A) \times (Y, B)$ как пару $(X \times Y, (X \times B) \cup (A \times Y))$.

В частном случае, когда $X = Y$, определено диагональное отображение Δ: $(X, A \cup B) \to (X, A) \times (X, B)$. Это дает нам спаривание $K(X, A) \otimes K(X, B) \to K(X, A \cup B)$. В частности, полагая $B = \varnothing$, мы видим, что группа $K(X, A)$ является $K(X)$-модулем. Далее легко заметить, что

$$K(X, A) \to K(X) \to K(A)$$

— точная последовательность $K(X)$-модулей.

Более обще, для $m, n \leqslant 0$ можно определить спаривание

$$K^{-n}(X, A) \otimes K^{-m}(Y, B) \to K^{-n-m}((X, A) \times (Y, B))$$

следующим образом. По определению

$$K^{-n}(X, A) = \tilde{K}(S^n \wedge (X/A)),$$
$$K^{-m}(Y, B) = \tilde{K}(S^m \wedge (Y/B)),$$

поэтому определен гомоморфизм

$$K^{-n}(X, A) \otimes K^{-m}(Y, B) \to \tilde{K}(S^n \wedge (X/A) \wedge S^m \wedge (Y/B)) =$$
$$= \tilde{K}(S^n \wedge S^m \wedge (X/A) \wedge (Y/B)) =$$
$$= K^{-n-m}((X, A) \times (Y, B)).$$

Таким образом, если мы определим элемент $xy \in K^{-n-m}(X, A \cup B)$ для $x \in K^{-n}(X, A)$, $y \in K^{-m}(X, B)$ как $\Delta^*(x \otimes y)$, где $\Delta\colon (X, A \cup B) \to (X, A) \times (X, B)$ — диагональное отображение, то по лемме 2.4.11 мы получим $xy = (-1)^{mn} yx$.

Обозначим через $K^{\#}(X, A)$ следующую сумму:

$$K^{\#}(X, A) = \sum_{n=0}^{\infty} K^{-n}(X, A).$$

Ясно, что $K^{\#}(X)$ — градуированное кольцо, а $K^{\#}(X, A)$ — градуированный $K^{\#}(X)$-модуль. Пусть β — образующая группы K^{-2} (точка); умножение на β индуцирует изоморфизм групп $K^{-n}(X, A) \to K^{-n-2}(X, A)$ для всех n. Обозначим через $K^*(X, A)$ факторкольцо $K^{\#}(X, A)/(1-\beta)$. Тогда $K^*(X)$ является кольцом, градуированным с помощью поля вычетов $\mathbf{Z}_2$, а $K^*(X, A)$ является $\mathbf{Z}_2$-градуированным модулем над $K^*(X)$.

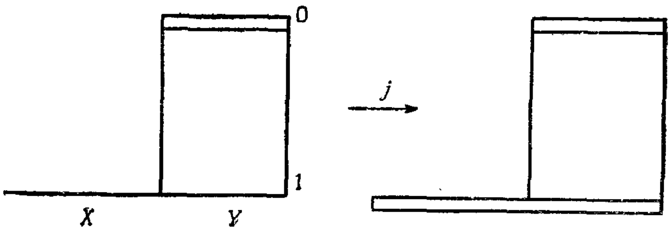
Для любой пары (X, A) каждое из отображений в точном треугольнике

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] K^*(X) \arrow[rr] & & K^*(A) \arrow[dl, "\delta"] \\ & K^*(X, A) \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$

является отображением $K^*(X)$-модулей. Лишь для гомоморфизма δ это утверждение не совсем очевидно, поэтому мы докажем следующую лемму:

Лемма 2.6.0. *Гомоморфизм* $\delta\colon K^{-1}(Y) \to K^0(X, Y)$ *является гомоморфизмом* $K(X)$-*модулей.*

Доказательство. По определению гомоморфизм δ индуцируется вложением пар $j: (X \times \{1\} \cup Y \times I, Y \times \{0\}) \to (X \times \{1\} \cup Y \times I, Y \times \{0\} \cup X \times \{1\})$. Следовательно,



$\delta = j^*$ — гомоморфизм модулей над абсолютной группой

$$K(X \times \{1\} \cup Y \times I) \cong K(X).$$

Остается лишь заметить, что структура $K(X)$-модуля в двух рассматриваемых нами группах совпадает со стандартной. Для группы $K^{-1}(Y)$ это очевидно, а для группы $K(X, Y)$ мы должны показать, что проекция $I \to \{1\}$ индуцирует изоморфизмы

$$K(X, Y) \xrightarrow{\cong} K(X \times \{1\} \cup Y \times I, \; Y \times \{0\}),$$
$$K(X) \xrightarrow{\cong} K(X \times \{1\} \cup Y \times I).$$

Теперь мы несколько отвлечемся и дадим другое определение группы $K(X, A)$. Это определение часто более удобно, в особенности при описании произведения в $K(X, A)$.

Пусть $n \geqslant 1$; определим категорию $\mathfrak{C}_n(X, A)$ следующим образом: объектом категории $\mathfrak{C}_n(X, A)$ является набор $E_n, E_{n-1}, \ldots, E_0$ векторных расслоений над X вместе с отображениями α_i: $E_i|_A \to E_{i-1}|_A$, для которых имеет место точная последовательность

$$0 \to E_n|_A \xrightarrow{\alpha_n} E_{n-1}|_A \xrightarrow{\alpha_{n-1}} \ldots \xrightarrow{\alpha_1} E_0|_A \to 0.$$

Морфизмом φ: $E \to F$, где $E = (E_i, \alpha_i)$, $F = (F_i, \beta_i)$, является набор таких отображений φ_i: $E_i \to F_i$, что $\beta_i \varphi_i = \varphi_{i-1}\alpha_i$. В частности, $\mathfrak{C}_1(X, A)$ состоит из пар расслоений (E_1, E_0) над X и изоморфизма α: $E_1|_A \cong E_0|_A$.

Назовем элементарной последовательностью в категории $\mathfrak{C}_n(X, A)$ последовательность вида $0, 0, \ldots, 0, E_p, E_{p-1}, 0, \ldots, 0$, где $E_p = E_{p-1}$, α — тождественное отображение. Будем считать, что два объекта E и F эквивалентны, если для некоторого множества элементарных элементов $Q_1, \ldots, Q_n, P_1, \ldots, P_m$ имеется изоморфизм

$$E \oplus Q_1 \oplus \ldots \oplus Q_n \cong F \oplus P_1 \oplus \ldots \oplus P_m.$$

Множество таких классов эквивалентности обозначим через $\mathfrak{L}_n(X, A)$. Очевидно, что $\mathfrak{L}_n(X, A)$ — полугруппа для каждого n.

Существует естественное вложение $\mathfrak{C}_n(X, A) \subset \subset \mathfrak{C}_{n+1}(X, A)$, которое индуцирует гомоморфизм полугрупп $\mathfrak{L}_n(X, A) \to \mathfrak{L}_{n+1}(X, A)$. Обозначим через $\mathfrak{C}_\infty(X, A)$ объединение всех $\mathfrak{C}_n(X, A)$, а через $\mathfrak{L}_\infty(X, A)$ — прямой предел последовательности полугрупп $\mathfrak{L}_n(X, A)$.

Основной теоремой этого параграфа является

Теорема 2.6.1. *Для всех $n \geqslant 1$ отображения $\mathfrak{L}_n(X, A) \to \mathfrak{L}_{n+1}(X, A)$ являются изоморфизмами и*

$$\mathfrak{L}_n(X, A) \cong K(X, A).$$

Разобьем доказательство этой теоремы на ряд лемм.

Рассмотрим сначала частный случай $A = \varnothing$, $n = 1$. Тогда категория $\mathfrak{C}_1(X, \varnothing)$ состоит из всех пар расслоений (E_1, E_0). По определению $(E_1, E_0) \sim (F_1, F_0)$ тогда и только тогда, когда существуют такие тривиальные расслоения Q, P, что $E_1 \oplus Q \cong F_1 \oplus P$, $E_0 \oplus Q \cong F_0 \oplus P$. Но при этом отображение $\mathfrak{L}_1(X, \varnothing) \to K(X)$, заданное формулой $(E_1, E_0) \to [E_0] - [E_1]$, является изоморфизмом. Действительно, определение полугруппы $\mathfrak{L}_1(X_1 \varnothing)$ совпадает с одним из наших определений группы $K(X)$.

Определение 2.6.2. *Эйлеровой характеристикой* χ_n элементов полугруппы $\mathfrak{L}_n$ называется такое преобразование функторов

$$\chi_n \colon \mathfrak{L}_n(X, A) \to K(X, A),$$

которое для пары $(X, \varnothing)$ выражается формулой [1])

$$\chi_n(E_n, E_{n-1}, \ldots, E_0) = \sum (-1)^i [E_i].$$

[1]) Существование и единственность этого отображения доказываются ниже. — *Прим. ред.*

Докажем сначала следующую лемму.

Лемма 2.6.3. *Пусть $A \subset X$, и пусть E, F — некоторые расслоения над X. Пусть φ: $E|_A \to F|_A$, ψ: $E \to F$ — мономорфизмы (соответственно изоморфизмы) расслоений. Если ограничение гомоморфизма $\psi|_A$ гомотопно гомоморфизму φ, то φ продолжается до мономорфизма (соответственно изоморфизма) расслоений над всем X.*

Доказательство. Обозначим через Y пространство $(A \times [0, 1]) \cup (X \times [0])$. Проекция π: $Y \to X$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между расслоениями над пространствами X и Y. Пусть E', F' — расслоения над Y, соответствующие расслоениям E, F. Можно определить такой гомоморфизм Φ: $E' \to F'$, который является мономорфизмом (соответственно изоморфизмом), причем $\Phi|_{A \times [1]} = \varphi$, $\Phi|_{X \times [0]} = \psi$. Мы можем продолжить гомоморфизм Φ на соответствующие расслоения над пространством $(U \times [0, 1]) \cup (X \times [0])$ для некоторой окрестности U пространства A в X. Пусть f: $X \to [0, 1]$ — такое непрерывное отображение, что $f(A) = 1$, $f(X \setminus U) = 0$. Определим гомоморфизм φ_X, который в каждой точке $x \in X$ представляет собой гомоморфизм $\Phi(x, f(x))$ слоя в точке x. По построению этот гомоморфизм продолжает φ до гомоморфизма расслоений E и F на всем X.

Лемма 2.6.4. *Если A — точка, то последовательность*

$$0 \to \mathfrak{L}_1(X, A) \to \mathfrak{L}_1(X) \to \mathfrak{L}_1(A)$$

точна. Таким образом, в этом случае эйлерова характеристика χ_1 для элементов полугруппы $\mathfrak{L}_1$ устанавливает изоморфизм

$$\mathfrak{L}_1(X, A) \to K(X, A).$$

Доказательство. Пусть пара расслоений (E_0, E_1) представляет собой элемент полугруппы $\mathfrak{L}_1(X)$, образом которого в $\mathfrak{L}_1(A)$ является нуль; следовательно, расслоения E_1 и E_0 имеют одну и ту же размерность над A и существует изоморфизм φ: $E_1|_A \to E_0|_A$. Таким образом, последовательность $\mathfrak{L}_1(X, A) \to \mathfrak{L}_1(X) \to \mathfrak{L}_1(A)$ точна.

Если образом объекта (E_1, E_0, φ) в полугруппе $\mathfrak{L}_1(X)$ является нуль, то существуют тривиальный объект P и изоморфизм ψ: $E_1 \oplus P \cong E_0 \oplus P$. Поэтому преобразование $\psi(\varphi \oplus 1)^{-1}$ является автоморфизмом расслоения $E_0 \oplus P|_A$. Но так как A — точка, то любой такой автоморфизм должен быть гомотопен тождественному, и, следовательно, по лемме 2.6.3 он продолжается до автоморфизма α: $E_0 \oplus P \cong E_0 \oplus P$. Таким образом, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} (E_1 \oplus P)|_A & \xrightarrow{\varphi \oplus 1} & (E_0 \oplus P)|_A \\ \downarrow{\scriptstyle \psi|_A} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha|_A} \\ (E_0 \oplus P)|_A & \xrightarrow{1} & (E_0 \oplus P)|_A \end{array}$$

Следовательно, объект (E_1, E_0, φ) представляет собой нулевой элемент в полугруппе $\mathfrak{L}_1(X, A)$ и гомоморфизм $\mathfrak{L}_1(X, A) \to \mathfrak{L}_1(X)$ является мономорфизмом.

Лемма 2.6.5. *Естественный гомоморфизм*

$$\pi: \mathfrak{L}_1(X/A, A/A) \to \mathfrak{L}_1(X, A)$$

является изоморфизмом для всех пар (X, A), *т. е. эйлерова характеристика* χ_1: $\mathfrak{L}_1(X, A) \to K(X, A)$ *является изоморфизмом для всех пар* (X, A).

Доказательство. Так как $\mathfrak{L}_1(X/A, A/A) \to K(X, A)$ разлагается в композицию двух гомоморфизмов, одним из которых является гомоморфизм π: $\mathfrak{L}_1(X/A, A/A) \to \mathfrak{L}_1(X, A)$, то очевидно, что π — мономорфизм. Докажем, что π — эпиморфизм.

Пусть E_1, E_0 — векторные расслоения над X, и пусть α: $E_1|_A \to E_0|_A$ — изоморфизм их ограничений. Пусть P — такое расслоение над X, что существует изоморфизм β: $E_1 \oplus P \to F$, где F — тривиальное расслоение. Тогда объект (E_1, E_0, α) эквивалентен объекту $(F, E_0 \oplus P, \gamma)$, где $\gamma = (\alpha \oplus 1)\beta^{-1}$. Но объект $(F, E_0 \oplus P, \gamma)$ является образом объекта $(F, (E_0 \oplus P)/\gamma, \gamma/\gamma)$. Таким образом, гомоморфизм π: $\mathfrak{L}_1(X/A, A/A) \to \mathfrak{L}_1(X, A)$ является эпиморфизмом.

Лемма 2.6.6. *Если χ_1, χ_1' — две эйлеровы характеристики объектов полугруппы $\mathfrak{L}_1$, то $\chi_1 = \chi_1'$.*

Доказательство. Композиция $\chi_1' \chi_1^{-1}$ представляет собой преобразование функтора K в себя, тождественное на каждой группе $K(X)$. Но так как группа $K(X, A) = \tilde{K}(X/A)$ вложена в $K(X/A)$, то это преобразование является тождественным на всех группах $K(X, A)$.

Лемма 2.6.7. *Для элементов полугруппы $\mathfrak{L}_1$ существует эйлерова характеристика χ_1.*

Доказательство. Предположим, что объект (E_1, E_0, α) представляет некоторый элемент полугруппы $\mathfrak{L}_1(X, A)$. Пусть X_0, X_1 — два экземпляра пространства X и $Y = X_0 \cup_A X_1$ — пространство, которое получается из X_0 и X_1 отождествлением по подпространству A. Тогда можно определить элемент $[E_1, \alpha, E_0] \in K(Y)$. Очевидная ретракция $\pi_i\colon Y \to X_i$ индуцирует разложение $K(Y) = K(Y, X_i) \oplus K(X_i)$. Отображение $(X_0, A) \to (Y, X_1)$ индуцирует изоморфизм $K(Y, X_1) \to K(X_0, A)$. Определим теперь эйлерову характеристику $\chi_1(E_1, E_0, \alpha)$ как образ компоненты элемента $[E_1, \alpha, E_0]$, принадлежащей группе $K(Y, X_1) \subset K(Y)$. Если $A = \varnothing$, то очевидно, что $\chi_1(E_1, E_0, \alpha) = [E_0] - [E_1]$. Легко проверить, что это определение не зависит от выбора экземпляра пространства X.

Следствие 2.6.8. *Класс объекта (E_1, E_0, α) в полугруппе $\mathfrak{L}_1(X, A)$ зависит только от гомотопического класса изоморфизма α.*

Доказательство. Пусть $Y = X \times [0, 1]$, $B = A \times [0, 1]$ и $\pi\colon Y \to X$ — естественная проекция. Тогда, если α_t — некоторая гомотопия и $\alpha_0 = \alpha$, то α_t определяет изоморфизм $\beta\colon \ \pi^*(E_1)|_B \cong \pi^*(E_0)|_B$. Пусть $i_j\colon (X, A) \to (X \times [j], A \times [j])$. Так как в коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccccc}
\mathfrak{L}_1(X, A) & \xleftarrow{i_0^*} & \mathfrak{L}_1(Y, B) & \xrightarrow{i_1^*} & \mathfrak{L}_1(X, A) \\
\downarrow{\scriptstyle \chi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \chi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \chi_1} \\
K(X, A) & \xleftarrow{i_0^*} & K(Y, B) & \xrightarrow{i_1^*} & K(X, A)
\end{array}$$

каждое отображение является изоморфизмом и так как $i_0^*(i_1^*)^{-1}$ — тождественное отображение, то $(E_1, E_0, \alpha_0) = (E_1, E_0, \alpha_1)$.

Лемма 2.6.9. *Для $n \geqslant 1$ естественное отображение $\mathfrak{L}_n(X, A) \to \mathfrak{L}_{n+1}(X, A)$ является эпиморфизмом.*

Доказательство. Если объект $(E_{n+1}, \ldots, E_0, \alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_1)$ представляет некоторый элемент полугруппы $\mathfrak{L}_{n+1}(X, A)$, то объект

$$(E_{n+1}, E_n \oplus E_{n+1}, E_{n-1} \oplus E_{n+1}, E_{n-2}, \ldots, E_0; \\ \alpha_{n+1}, \alpha_n \oplus 1, \ldots, \alpha_1)$$

также представляет этот элемент. Два отображения $\alpha_{n+1}\oplus 0\colon E_{n+1}\to E_n\oplus E_{n+1}$ и $0\oplus 1\colon E_{n+1}\to E_n\oplus E_{n+1}$ (линейно) гомотопны в множестве мономорфизмов. Отображение $0\oplus 1$ продолжается до отображения расслоений над всем X, и, таким образом, по лемме 2.6.3 и отображение $\alpha_{n+1}\oplus 0$ продолжается до мономорфизма $\beta\colon E_{n+1}\to$ $\to E_n\oplus E_{n+1}$, определенного уже на всем X. Поэтому расслоение $E_n\oplus E_{n+1}$ можно представить в виде $\beta(E_{n+1})\oplus Q$. Заметим теперь, что если обозначить через γ получающееся в результате отображение $Q\to E_{n-1}\oplus E_{n+1}$, то объект $(E_{n+1}, \ldots, E_0; \alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_1)$ эквивалентен объекту $(0, Q, E_{n-1}\oplus E_{n+1}, \ldots, E_0; 0, \gamma, \ldots, \alpha_1)$. Следовательно, отображение $\mathfrak{L}_n(X, A)\to\mathfrak{L}_{n+1}(X, A)$ является эпиморфизмом.

Лемма 2.6.10. *Для всех $n\geqslant 1$ отображение $\mathfrak{L}_n(X, A)\to\mathfrak{L}_{n+1}(X, A)$ является изоморфизмом.*

Доказательство. Достаточно построить отображение $\mathfrak{L}_{n+1}(X, A)\to\mathfrak{L}_1(X, A)$, которое является левым обратным к отображению $\mathfrak{L}_1(X, A)\to\mathfrak{L}_{n+1}(X, A)$.

Пусть объект $(E_n, \ldots, E_0; \alpha_n, \ldots, \alpha_1)$ представляет элемент полугруппы $\mathfrak{L}_n(X, A)$. Выберем эрмитову метрику на каждом расслоении E_i. Пусть $\alpha_i'\colon E_{i-1}|_A\to E_i|_A$ — эрмитово сопряженное к отображению α_i.

Положим $F_0=\sum E_{2i}$, $F_1=\sum E_{2i+1}$ и определим отображение $\beta\colon F_1\to F_0$ формулой $\beta=\sum\alpha_{2i+1}+\sum\alpha_{2i}'$. Тогда можно проверить, что $(F_1, F_0, \beta)\in\mathfrak{L}_1(X, A)$. Это дает нам отображение $\mathfrak{L}_n(X, A)\to\mathfrak{L}_1(X, A)$. Чтобы показать, что это определение корректно, нужно лишь доказать, что оно не зависит от выбора метрик. Но напомним, что все метрики гомотопны между собой, так что выбор метрик не меняет гомотопического класса отображения β. Таким образом, отображение $\mathfrak{L}_n(X, A)\to\mathfrak{L}_1(X, A)$ определено корректно, причем ясно, что оно является левым обратным к отображению $\mathfrak{L}_1(X, A)\to\mathfrak{L}_n(X, A)$.

Следствие 2.6.11. *Для каждого n существует единственная эйлерова характеристика $\chi_n\colon\mathfrak{L}_n(X, A)\to$ $\to K(X, A)$, которая всегда является изоморфизмом. Таким образом, существует изоморфизм*

$$\chi\colon\mathfrak{L}_\infty(X, A)\to K(X, A).$$

Далее мы хотим определить спаривания

$$\mathfrak{L}_n(X, Y)\otimes\mathfrak{L}_m(X', Y')\to\mathfrak{L}_{n+m}((X, Y)\times(X', Y')),$$

совместимые со спариваниями

$$K(X, Y)\otimes K(X', Y')\to K((X, Y)\times(X', Y')).$$

Для этого необходимо рассмотреть комплексы векторных расслоений, т. е. последовательности расслоений

$$0\to E_n\xrightarrow{\sigma_n}E_{n-1}\xrightarrow{\sigma_{n-1}}\ldots\to E_0\to 0,$$

в которых $\sigma_i\sigma_{i+1}=0$ для всех i.

Лемма 2.6.12. *Пусть $E_0, \ldots, E_n$ — векторные расслоения над X, и пусть σ_i: $E_i|_Y\to E_{i-1}|_Y$ — такие отображения, что последовательность*

$$0\to E_n\xrightarrow{\sigma_n}E_{n-1}\xrightarrow{\sigma_{n-1}}\ldots\to E_0\to 0$$

точна на подпространстве Y. Тогда отображения σ_i могут быть продолжены до отображений ρ_i: $E_i\to E_{i-1}$, определенных на всем X и таких, что $\rho_i\rho_{i+1}=0$ для всех i.

Доказательство. Покажем сначала, что существуют некоторая открытая окрестность U пространства Y в X и для всех i такие продолжения τ_i отображений σ_i на окрестность U, что последовательность

$$0\to E_n\xrightarrow{\tau_n}E_{n-1}\xrightarrow{\tau_{n-1}}\ldots\to E_0\to 0$$

точна на U. Продолжение отображений τ_i на все X достигается после этого заменой отображений τ_i отображениями $\rho\tau_i$, где ρ — такая непрерывная функция на X, что $\rho|_Y=1$ и $\operatorname{supp}\rho\subset U$.

Предположим, что на некоторой замкнутой окрестности U_i пространства Y в X мы можем так продолжить отображения $\sigma_1, \ldots, \sigma_i$ до отображений $\tau_1, \ldots, \tau_i$, что на U_i последовательность

$$E_i\xrightarrow{\tau_i}E_{i-1}\to\ldots\to E_0\to 0$$

точна. Обозначим через K_i ядро отображения τ_i на U_i. Тогда отображение σ_{i+1} определяет сечение расслоения

$\mathrm{Hom}\ (E_{i+1},\ K_i)|_Y$. Но это сечение можно продолжить на окрестность пространства Y в U_i, и, таким образом, отображение σ_{i+1}: $E_{i+1} \to K_i$ можно продолжить до отображения τ_{i+1}: $E_{i+1} \to K_i$ на этой окрестности. Отображение $\sigma_{i+1}|_Y$ является эпиморфизмом, поэтому τ_{i+1} будет эпиморфизмом на некоторой замкнутой окрестности U_{i+1} пространства Y в U_i. Таким образом, лемма доказывается при помощи индукции по i.

Введем множество $\mathfrak{D}_n(X,\ Y)$, состоящее из комплексов длины n на X, ограничение которых на Y ациклично. Мы будем говорить, что два таких комплекса гомотопны, если они изоморфны ограничениям некоторого элемента из $\mathfrak{D}_n(X \times I,\ Y \times I)$ соответственно на $X \times \{0\}$ и $X \times \{1\}$. Существует естественное отображение

$$\Phi\colon\ \mathfrak{D}_n(X,\ Y) \to \mathfrak{L}_n(X,\ Y),$$

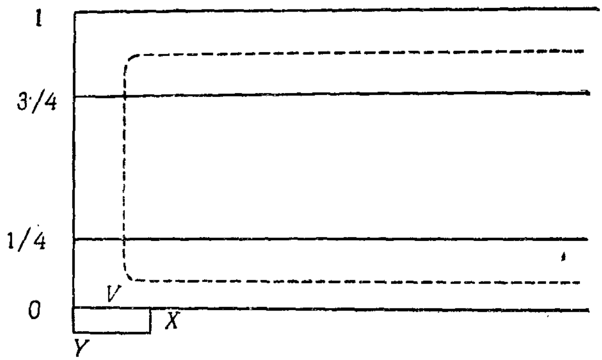
определяемое ограничением гомоморфизмов на Y.

Лемма 2.6.13. *Отображение Φ индуцирует взаимно однозначное соответствие между классами гомотопных комплексов и элементами полугруппы $\mathfrak{L}_n(X,\ Y)$.*

Доказательство. Из леммы 2.6.12 вытекает, что отображение Φ — эпиморфизм. Чтобы показать, что Φ — мономорфизм, мы должны доказать, что любой комплекс над пространством $X \times \{0\} \cup X \times \{1\} \cup Y \times I$, ацикличный над $Y \times I$, может быть продолжен до комплекса на всем пространстве $X \times I$. Разобьем построение требуемого продолжения на три этапа. Сначала выполним очевидные продолжения на пространства $X \times [0,\ 1/4]$ и $X \times [3/4,\ 1]$. Затем применим лемму 2.6.12 к паре $X \times [1/4,\ 3/4]$, $Y \times [1/4,\ 3/4] \cup V \times \{1/4\} \cup V \times \{3/4\}$, где V — замкнутая окрестность пространства Y в X, над которой данные комплексы еще ацикличны. Тем самым определяется такой комплекс на пространстве $X \times [1/4,\ 3/4]$, который согласуется с комплексом, уже построенным на двух утолщенных концах вдоль полосок $V \times \{1/4\}$ и $V \times \{3/4\}$. Если мы теперь умножим продолжающие отображения на такую функцию ρ, что

(i) $\rho = 1$ на $X \times \{0\} \cup X \times \{1\} \cup Y \times I$,

(ii) $\rho = 0$ на $(X \setminus V) \times \{1/4\} \cup (X \setminus V) \times \{3/4\}$, то получим требуемое продолжение (пунктирная линия на рисунке указывает носитель функции ρ).



Если $E \in \mathfrak{D}_n(X, Y)$, $F \in \mathfrak{D}_m(X', Y')$, то тензорное произведение $E \otimes F$ является комплексом на пространстве $X \times X'$, ацикличным на $(X \times Y') \cup (Y \times X')$. Таким образом, имеет место естественное спаривание

$$\mathfrak{D}_n(X, Y) \otimes \mathfrak{D}_m(X', Y') \to \mathfrak{D}_{n+m}((X, Y) \times (X', Y')),$$

которое совместимо с разбиением комплексов на классы гомотопных комплексов. При помощи отображения Φ спаривание в комплексах индуцирует спаривание

$$\mathfrak{L}_n(X, Y) \otimes \mathfrak{L}_m(X', Y') \to \mathfrak{L}_{n+m}((X, Y) \times (X', Y')).$$

Лемма 2.6.14. *Для любых классов $x \in \mathfrak{L}_n(X, Y)$ и $x' \in \mathfrak{L}_m(X', Y')$ имеет место формула*

$$\chi(x \otimes x') = \chi(x)\chi(x').$$

Доказательство. Утверждение леммы очевидно в случае, когда $Y = Y' = \varnothing$. Напомним, что спаривание $K(X, Y) \otimes K(X', Y') \to K((X, Y) \times (X', Y'))$, определенное ранее, — это единственное естественное спаривание, совместимое со спариваниями, определенными для случая $Y = Y' = \varnothing$. Тем самым лемма 2.6.14 доказана.

Теперь при помощи этой леммы можно дать очень удобное описание относительного произведения. В виде простого применения дадим новую конструкцию образующей группы $\tilde{K}(S^{2n}) = \mathbf{Z}$.

Пусть V — комплексное векторное пространство; рассмотрим внешнюю алгебру $\Lambda^*(V)$. Мы можем рассматривать внешнюю алгебру $\Lambda^*(V)$ естественным образом как комплекс векторных расслоений над V. А именно, положим $E_i = V \times \Lambda^i(V)$ и определим отображение

$$V \times \Lambda^i(V) \to V \times \Lambda^{i+1}(V)$$

формулой

$$(v, w) \to (v, v \wedge w).$$

Если $\dim V = 1$, то этот комплекс имеет только одно отображение, которое является изоморфизмом для всех $v \neq 0$. Таким образом, этот комплекс определяет элемент группы $K(B(V), S(V)) \cong \tilde{K}(S^2)$, где $B(V)$, $S(V)$ — единичный шар и единичная сфера в пространстве V по отношению к некоторой метрике. Более того, этот элемент является по определению канонической образующей группы $\tilde{K}(S^2)$ с точностью до множителя (-1). Так как имеет место изоморфизм

$$\Lambda^*(V \oplus W) \cong \Lambda^*(V) \otimes \Lambda^*(W),$$

то для любого векторного пространства V внешняя алгебра $\Lambda^*(V)$ определяет комплекс над V, ацикличный на $V \setminus \{0\}$, а этот комплекс определяет каноническую образующую группы $\tilde{K}(B(V), S(V)) = \tilde{K}(S^{2n})$ с точностью до множителя $(-1)^n$ (где $n = \dim V$).

Более общо, та же самая конструкция применима к векторному расслоению V над пространством X. Введем пространство Тома X^V, определив его как одноточечную компактификацию пространства расслоения V, или, что эквивалентно, как факторпространство $B(V)/S(V)$. Тогда $K(B(V), S(V)) \cong \tilde{K}(X^V)$ и внешняя алгебра расслоения V определяет элемент группы $\tilde{K}(X^V)$, который мы обозначим через λ_V. Этот элемент обладает двумя важными свойствами:

(A) для произвольной точки $p \in X$ ограничение элемента λ_V на слой $\pi^{-1}(p) = \mathbf{C}^n$ совпадает с образующей группы $\tilde{K}(p^V)$, где π — проекция расслоения;

(B) $\lambda_{V \oplus W} = \lambda_V \cdot \lambda_W$, где произведение определяется спариванием $\tilde{K}(X^V) \otimes \tilde{K}(X^W) \to \tilde{K}(X^{V \oplus W})$.

Аналогичные рассуждения применимы для проективных пространств. Пусть V — векторное расслоение над X, и пусть H — стандартное линейное расслоение над P, где $P = P(V \oplus 1)$, — как и прежде, проективизация расслоения $(V \oplus 1)$. Непосредственно из определений вытекает, что естественное вложение

$$H^* \to \pi^*(V \oplus 1),$$

где $\pi\colon P \to X$ — проекция, является мономорфизмом. Поэтому, взяв тензорное произведение с расслоением H, мы увидим, что в расслоении

$$H \otimes \pi^*(V \oplus 1) = (H \otimes \pi^*(V)) \oplus (H \otimes 1)$$

имеется сечение. Проектирование на первое слагаемое определяет, таким образом, естественное сечение

$$s \in \Gamma(H \otimes \pi^* V).$$

Рассмотрим внешнюю алгебру $\Lambda^*(H \otimes \pi^* V)$. Каждая компонента внешней алгебры есть векторное расслоение над P; внешнее умножение на сечение s определяет комплекс векторных расслоений, ацикличный вне подпространства, на котором $s = 0$. Но это подпространство совпадает с образом естественного сечения $X \to P$. Непосредственно из конструкции расслоения H видно, что его ограничение на дополнение подпространства $P(V)$ в пространстве $P(V \oplus 1)$ представляет собой одномерное тривиальное расслоение, и поэтому построенный нами комплекс расслоений определяет на пространстве $(P(V \oplus 1) - P(V))$ элемент λ_V (напомним, что пространство $(P(V \oplus 1) - P(V))$ можно естественным образом отождествить с пространством расслоения V). Из этого следует, что образом элемента λ_V при гомоморфизме

$$\tilde{K}(X^V) = K(P(V \oplus 1),\ P(V)) \to K(P(V \oplus 1))$$

является альтернированная сумма

$$\sum (-1)^i [H]^i [\lambda^i V].$$

В заключение этого параграфа заметим, что все наши рассуждения совершенно аналогично можно провести для G-пространств, где G — конечная группа. При доказательстве мы использовали лишь основные факты о продолжениях гомоморфизмов и т. д., которые верны и для G-расслоений. Таким образом, элементы группы $K_G(X, Y)$ могут быть представлены комплексами векторных G-расслоений над X, ацикличными над Y. В частности, внешняя алгебра векторного G-расслоения V определяет элемент

$$\lambda_V \in \tilde{K}_G(X^V),$$

как и выше.

§ 2.7. Изоморфизм Тома

Пусть $E=\sum L_i$ — разложимое векторное расслоение над X (т. е. сумма линейных расслоений). Предложение 2.5.3 описывает структуру кольца $K(P(E))$ как $K(X)$-алгебру. Далее, для любого пространства X мы имеем канонический изоморфизм

$$K^*(X) \cong K(X \times S^1).$$

Пусть $\pi\colon X \times S^1 \to X$ — естественная проекция; тогда имеет место, очевидно, равенство

$$P(E) \times S^1 = P(\pi^* E),$$

и поэтому существует изоморфизм

$$K^*(P(E)) \cong K(P(\pi^* E)).$$

Таким образом, заменяя в предложении 2.5.3 пространство X пространством $X \times S^1$, мы получаем

Предложение 2.7.1. *Пусть $E=\sum L_i$ — разложимое векторное расслоение над пространством X. Тогда кольцо $K^*(P(E))$ является $K^*(X)$-алгеброй с одной образующей $[H]$ и одним соотношением*

$$\prod([L_i][H]-[1])=0.$$

Замечание. Это предложение, как и предложение 2.5.3, сразу обобщается на G-пространства и определяет кольцо $K_G^*(P(E))$ как $K_G^*(X)$-алгебру.

Заметим теперь, что пространство Тома X^E можно отождествить с факторпространством $P(E \oplus 1)/P(E)$; кроме того, в конце § 2.6 мы показали, что образом элемента

$\lambda_E \in K(X^E)$ в кольце $K(P(E \oplus 1))$ является альтернированная сумма

$$\sum (-1)^i [H]^i [\lambda^i E] = \prod ([1] - [L_i][H]).$$

Так как этот элемент является образующей ядра гомоморфизма

$$K^*(P(E \oplus 1)) \to K^*(P(E)),$$

рассматриваемого как идеал в $K^*(P(E \oplus 1))$, то мы получаем

Предложение 2.7.2. *Пусть E — разложимое векторное расслоение над пространством X. Тогда кольцо $\tilde{K}^*(X^E)$ представляет собой свободный $K^*(X)$-модуль с образующей λ_E.*

Замечание. Эта „теорема об изоморфизме Тома" для разложимых расслоений верна, как и предыдущие предложения, для G-пространств. Мы сейчас покажем, как это можно использовать.

Следствие 2.7.3. *Пусть X — такое G-пространство, что $K_G^1(X) = 0$, и пусть E — разложимое векторное G-расслоение. Тогда имеет место точная последовательность*

$$0 \to K_G^1(S(E)) \to K_G^0(X) \xrightarrow{\varphi} K_G^0(X) \to K_G^0(S(E)) \to 0,$$

где гомоморфизм φ есть умножение на элемент

$$\lambda_{-1}[E] = \sum (-1)^i \lambda^i [E],$$

а $S(E)$ — ассоциированное с расслоением E расслоение со слоем сфера.

Доказательство. Для доказательства нужно применить предложение 2.7.2 к точной последовательности пары $(B(E), S(E))$.

Чтобы применить это следствие к случаю, когда X — точка, необходимо проверить следующее утверждение.

Лемма 2.7.4. K_G^1 *(точка)* $= 0$.

Доказательство. Достаточно показать, что естественный гомоморфизм

$$K_G(S^1) \to K_G \text{ (точка)}$$

является изоморфизмом. Но так как по определению группа G действует тривиально на сфере S^1, мы имеем изоморфизмы

$$K_G(S^1) \cong K(S^1) \otimes R(G) \cong K\text{ (точка)} \otimes R(G) \cong K_G\text{ (точка)}.$$

Таким образом, следствие 2.7.3 применимо в случае, когда X — точка. Более того, если группа G абелева, то расслоение E обязательно разложимо. Отсюда мы получаем

Следствие 2.7.5. *Пусть G — абелева группа, E — некоторый G-модуль. Тогда имеет место точная последовательность*

$$0 \to K_G^1(S(E)) \to R(G) \xrightarrow{\varphi} R(G) \to K_G^0(S(E)) \to 0,$$

где φ — умножение на элемент

$$\lambda_{-1}[E] = \sum (-1)^i \lambda^i [E].$$

Предположим, в частности, что группа G действует свободно на пространстве $S(E)$ (в этом случае группа непременно циклическая), и поэтому имеет место изоморфизм

$$K_G^*(S(E)) \cong K^*(S(E)/G).$$

В этом случае мы получаем

Следствие 2.7.6. *Пусть G — циклическая группа, E — такой G-модуль, для которого пространство $S(E)$ является G-свободным. Тогда мы имеем точную последовательность*

$$0 \to K^1(S(E)/G) \to R(G) \xrightarrow{\varphi} R(G) \to K^0(S(E)/G) \to 0,$$

где φ — умножение на элемент $\lambda_{-1}[E]$.

Замечание. Аналогичный результат верен и для таких групп, свободно действующих на сферах, для которых имеет место изоморфизм Тома для K_G в случае неразложимых расслоений. Однако это утверждение не будет доказано в настоящих лекциях.

Рассмотрим частный случай следствия 2.7.6, полагая $G = \mathbf{Z}_2$, $E = \mathbf{C}^n$ и считая, что группа $\mathbf{Z}_2$ действует на $\mathbf{C}^n$ умножением на (-1). Тогда

$$S(E)/G = P_{2n-1}(\mathbf{R})$$

— вещественное проективное пространство нечетной размерности. Легко заметить, что

$$R(\mathbf{Z}_2)=\mathbf{Z}[\rho]/(\rho^2-1),$$
$$\lambda_{-1}[E]=(1-\rho)^n.$$

Положим $\sigma=\rho-1$; тогда $\sigma^2=-2\sigma$ и $\lambda_{-1}[E]=(-\sigma)^n$. В этом случае группа $\tilde{K}^0(P_{2n-1}(\mathbf{R}))$ является циклической порядка 2^{n-1}, тогда как группа $K^1(P_{2n-1}(\mathbf{R}))$—бесконечная циклическая. Сравнивая точные последовательности для n и $n+1$, мы получим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \to K^1(P_{2n+1}) & \to & R(\mathbf{Z}_2) & \xrightarrow{(-\sigma)^{n+1}} & R(\mathbf{Z}_2) \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle -\sigma} & & \downarrow{\scriptstyle =} \\
0 \to K^1(P_{2n-1}) & \to & R(\mathbf{Z}_2) & \xrightarrow{(-\sigma)^{n}} & R(\mathbf{Z}_2)
\end{array}$$

Но в кольце $R(\mathbf{Z}_2)$ ядро гомоморфизма умножения на $(-\sigma)^n$ (для $n\geqslant 1$) есть группа, порожденная элементом $(2-\sigma)$, и поэтому совпадает с ядром гомоморфизма умножения на $(-\sigma)$. Следовательно, отображение

$$K^1(P_{2n+1})\to K^1(P_{2n-1})$$

есть нулевой гомоморфизм. Из точных последовательностей пар (P_{2n+1}, P_{2n}), (P_{2n}, P_{2n-1}) мы получаем, что отображение

$$K^1(P_{2n+1})\to K^1(P_{2n})$$

— эпиморфизм, тогда как отображение

$$K^1(P_{2n})\to K^1(P_{2n-1})$$

является мономорфизмом. Следовательно,

$$K^1(P_{2n})=0.$$

Тогда из точной последовательности пары (P_{2n+1}, P_{2n}) вытекает, что отображение

$$K^0(P_{2n+1})\to K^0(P_{2n})$$

— изоморфизм. Суммируя эти результаты, получаем

Предложение 2.7.7. *Группы $K^*(P_n(\mathbf{R}))$ таковы:*

$$K^1(P_{2n+1}) = \mathbf{Z},$$
$$K^1(P_{2n}) = 0,$$
$$\tilde{K}^0(P_{2n+1}) = \tilde{K}^0(P_{2n}) = \mathbf{Z}_{2^n}.$$

Применения следствия 2.7.6 к другим пространствам мы оставляем читателю в качестве упражнения.

Теперь мы приступим к общей теореме об изоморфизме Тома. Следует подчеркнуть здесь, что используемые далее методы *не* обобщаются на G-расслоения. Для G-расслоений нужны совершенно другие методы, и мы не будем обсуждать их здесь.

Начнем со следующего общего результата.

Теорема 2.7.8. *Пусть π: $B \to X$ — отображение компактных пространств, $\mu_1, \ldots, \mu_n$ — однородные элементы группы $K^*(B)$, и пусть M^* — свободная $(\mathbf{Z}_2)$-градуированная группа, порожденная элементами $\mu_1, \ldots, \mu_n$. Если каждая точка $x \in X$ имеет такую окрестность U, что для всех $V \subset U$ естественное отображение*

$$K^*(V) \otimes M^* \to K^*(\pi^{-1}(V))$$

является изоморфизмом, то для любого $Y \subset X$ отображение

$$K^*(X, Y) \otimes M^* \to K^*(B, \pi^{-1}(Y))$$

также является изоморфизмом.

Доказательство. Заметим, что если $V_1 \supset V_2$ и отображение $K^*(V_i) \otimes M^* \to K^*(\pi^{-1}(V_i))$ — изоморфизм для $i = 1, 2$, то из точной последовательности пары, пользуясь тем, что группа M^* свободна от кручений, мы получаем изоморфизм

$$K^*(V_1, V_2) \otimes M^* \cong K^*(\pi^{-1}(V_1), \pi^{-1}(V_2)).$$

Мы используем также совместимость гомоморфизма δ с произведениями (лемма 2.6.0). Пусть теперь U_1, U_2 — такие два подпространства пространства X, что для пары $V_1 \subset U_1$, $V_2 \subset U_2$ имеет место изоморфизм

$$K^*(U_i, V_i) \otimes M^* \cong K^*(\pi^{-1}(U_i), \pi^{-1}(V_i)), \quad i = 1, 2.$$

Тогда, если $U = U_1 \cup U_2$ и $V \subset U$, то мы имеем равенство

$$K^*(U, V) \otimes M^* = K^*(U_1 \cup U_2, V_1 \cup V_2) \otimes M^*,$$

где $V_i = V \cup U_i$. Но

$$K^*(U_1 \cup U_2, V_1 \cup V_2) = \tilde{K}^*(U_1 \cup U_2/V_1 \cup V_2) =$$
$$= \tilde{K}^*((U_1/V_1) \vee (U_2/V_2)) \cong \tilde{K}^*(U_1/V_1) \oplus \tilde{K}^*(U_2/V_2) =$$
$$= K^*(U_1, V_1) \oplus K^*(U_2, V_2).$$

Следовательно,

$$K^*(U, V) \otimes M^* \cong K^*(\pi^{-1}(U), \pi^{-1}(V)).$$

Доказательство заканчивается индукцией по числу описанных в условии теоремы множеств U, необходимых для того, чтобы покрыть все пространство X.

Следствие 2.7.9. *Пусть* π: $E \to X$ — *векторное расслоение и* H — *каноническое линейное расслоение над пространством* $P(E)$. *Тогда кольцо* $K^*(P(E))$ *является свободным* $K^*(X)$-*модулем от образующих* $1, [H], [H]^2, \ldots, [H]^{n-1}$, *причем* $[H]$ *удовлетворяет соотношению* $\sum (-1)^i [H]^i [\lambda^i E] = 0$.

Доказательство. Так как расслоение E локально тривиально, то оно, в частности, локально разложимо. (Это утверждение *не обобщается* на G-пространства!) Следовательно, согласно предложению 2.7.1, каждая точка $x \in X$ имеет такую окрестность U, что для всех $V \subset U$ кольцо $K^*(P(E|_V))$ является свободным $K^*(V)$-модулем от образующих $1, [H], \ldots, [H]^{n-1}$. Теперь применим теорему 2.7.8. Соотношение для элемента $[H]$ уже установлено в конце § 2.6.

Следствие 2.7.10. *Пусть* π: $E \to X$ — *векторное расслоение и* $F(E)$ — *расслоение на флаги, ассоциированное с расслоением* E, *с отображением проекции* p: $F(E) \to X$. *Тогда гомоморфизм*

$$p^*: K^*(X) \to K^*(F(E))$$

является мономорфизмом.

Доказательство. Легко заметить, что расслоение $F(E)$ можно рассматривать как расслоение на флаги, ассоциированное с расслоением размерности $\dim(E) - 1$ над проективизацией $P(E)$. Таким образом, следствие 2.7.10 доказывается индукцией по $\dim(E)$.

Следствие 2.7.11. (Принцип расщепления.) *Пусть $E_1, \ldots, E_n$ — произвольный набор векторных расслоений над пространством X. Существуют такое пространство F и такое отображение $\pi: F \to X$, что*

(1) *гомоморфизм $\pi^*: K^*(X) \to K^*(F)$ является мономорфизмом;*

(2) *каждое расслоение $\pi^*(E_i)$ представляет собой сумму линейных расслоений.*

Доказательство. Достаточно взять в качестве пространства F расслоение на флаги, ассоциированное с расслоением $\bigoplus E_i$.

Важность принципа расщепления очевидна. Он дает нам возможность свести многие задачи о векторных расслоениях к задачам о разложимых векторных расслоениях.

Следствие 2.7.12. (Теорема об изоморфизме Тома.) *Если $\pi: E \to X$ — векторное расслоение, то гомоморфизм*

$$\Phi: K^*(X) \to \tilde{K}^*(X^E),$$

определенный формулой $\Phi(x) = \lambda_E x$, является изоморфизмом.

Доказательство. Этот факт выводится из следствия 2.7.9 так же, как предложение 2.7.2 из предложения 2.7.1.

Доказательства следующих предложений мы оставляем в качестве упражнения читателю.

Предложение 2.7.13. *Если $\pi: E \to X$ — векторное расслоение и если $L_1, \ldots, L_n$ — канонические линейные расслоения над пространством $F(E)$, то отображение, определенное формулой $t_i \to [L_i]$, определяет изоморфизм $K^*(X)$-модулей*

$$K^*(X)[t_1, \ldots, t_n]/I \to K^*(F(E)),$$

где I — идеал, порожденный элементами

$$\sigma^1(t_1, \ldots, t_n) - E, \quad \sigma^2(t_1, \ldots, t_n) - \lambda^2(E), \ldots$$
$$\ldots, \sigma^n(t_1, \ldots, t_n) - \lambda^n(E),$$

σ^i есть i-я элементарная симметрическая функция

Предложение 2.7.14. *Пусть* $\pi: E \to X$ *есть* n*-мерное векторное расслоение, и пусть* $G_k(E)$ *— расслоение Грассмана*[1] *(*k*-мерных подпространств), ассоциированное с расслоением* E*. Пусть* F *— каноническое* k*-мерное векторное расслоение над пространством* $G_k(E)$, F' *— факторрасслоение* $p^*(E)/F$*. Тогда отображение, заданное формулами* $t_i \to \lambda^i(F)$, $s_i \to \lambda^i(F')$*, определяет изоморфизм* $K^*(X)$*-модулей*

$$K^*(X)[t_1, \ldots, t_k, s_1, \ldots, s_{n-k}]/I \to K^*(G_k(E)),$$

где I *— идеал, порожденный элементами*

$$\left(\sum_{i+j=l} t_i s_j\right) - \lambda^l(E)$$

для всех l.

(*Указание*: сравните расслоение $G_k(E)$ с расслоением на флаги, ассоциированным с расслоением E.)

В частности, мы видим, что для многообразия Грассмана $G_{n,k}$ k-мерных подпространств n-мерного векторного пространства кольцо $K^*(G_{n,k})$ свободно от кручений. Этот результат можно получить также из клеточного разбиения многообразия Грассмана.

Теорема 2.7.15. *Пусть* X *— такое пространство, что кольцо* $K^*(X)$ *свободно от кручений, и пусть* Y *— (конечное) клеточное разбиение, а* $Y' \subset Y$ *— подразбиение. Тогда естественное отображение*

$$K^*(X) \otimes K^*(Y, Y') \to K^*(X \times Y, X \times Y')$$

является изоморфизмом.

Доказательство. Из предложения 2.7.2 следует, что теорема верна в случае, когда Y — шар, а Y' — его граница. Таким образом, она верна для любой пары конечных клеточных разбиений (Y, Y'). Доказательство проводится индукцией по числу клеток в разбиении Y.

---

[1]) Расслоение Грассмана $G_k(E)$ представляет собой расслоение со слоем многообразие Грассмана $G_{n,k}$, ассоциированное с расслоением E. Над расслоением $G_k(E)$ имеется каноническое векторное расслоение $F \subset p^*(E)$, которое определяется также как расслоение H^* в случае проективизации $P(E) = G_1(E)$ (см. § 2.2), где p — проекция расслоения $G_k(E) \to X$. — *Прим. перев.*

Следствие 2.7.16. (Теорема Кюннета.) *Пусть X — такое пространство, что $K^*(X)$ — конечно порожденная абелева группа, и пусть Y — клеточное разбиение. Тогда существует естественная точная последовательность*

$$0 \to \sum_{i+j=k} K^i(X) \otimes K^j(Y) \to K^k(X \times Y) \to$$

$$\to \sum_{i+j=k+1} \operatorname{Tor}(K^i(X),\ K^j(Y)) \to 0,$$

где все индексы рассматриваются как элементы поля вычетов $\mathbf{Z}_2$.

Доказательство. Предположим, что можно найти такое Z и такое $f\colon X \to Z$, что группа $K^*(Z)$ свободна от кручений и гомоморфизм $f^*\colon K^*(Z) \to K^*(X)$ является эпиморфизмом. Тогда из точной последовательности пары $(Z \cup_f X, X)$, где $Z \cup_f X$ — цилиндр отображения f, вытекает, что группа $K^*(Z/X)$ также свободна от кручений. По теореме 2.7.15 имеют место следующие изоморфизмы:

$$K^*(Z \times Y) = K^*(Z) \otimes K^*(Y),$$

$$K^*((Z/X) \times Y) = K^*(Z/X) \otimes K^*(Y).$$

Поэтому необходимый результат вытекает из точной последовательности для пары $(Z \times Y,\ X \times Y)$.

Построим теперь такое отображение $g\colon SX \to Z$. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — образующие группы $K^0(X)$, и $b_1, \ldots, b_m$ — образующие группы $K^{-1}(X) = K(SX)$. Тогда каждый элемент a_i определяет отображение $\alpha_i\colon X \to G_{r_i,\, s_i}$ для подходящих чисел r_i, s_i, и каждый элемент b_i определяет отображение $\beta_i\colon SX \to G_{u_i,\, v_i}$. Обозначим через $\alpha\colon X \to G_{r_1,\, s_1} \times \ldots \times G_{r_n,\, s_n} = G'$ отображение $\alpha_1 \times \ldots \times \alpha_n$, а через $\beta\colon SX \to G_{u_1,\, v_1} \times \ldots \times G_{u_m,\, v_m} = G''$ отображение $\beta_1 \times \ldots \times \beta_m$. Тогда гомоморфизмы

$$\alpha^*\colon K^0(G') \to K^0(X),$$

$$\beta^*\colon K^0(G'') \to K^0(SX)$$

являются эпиморфизмами. Таким образом, если $f\colon (S\alpha) \times \times \beta\colon SX \to (SG') \times G'' = G$, то гомоморфизм

$$f^*\colon K^*(G) \to K^*(SX)$$

является эпиморфизмом и группа $K^*(G)$ свободна от кручений, что и требовалось. Это доказывает следствие 2.7.16 для надстройки $S(X)$ и, следовательно, для пространства X [1]).

Далее мы выясним структуру кольца $K^*(U(n))$, где $U(n)$ — унитарная группа преобразований пространства $\mathbf{C}^n$. Для любой компактной группы Ли G мы можем рассматривать представления $\rho: G \to \mathrm{GL}(m, \mathbf{C})$ как некоторые элементы $[\rho] \in K^1(G)$: для этого представление ρ рассматривается просто как непрерывное отображение и игнорируется тот факт, что ρ — гомоморфизм. Предположим теперь, что α, β — два представления $G \to \mathrm{GL}(m, \mathbf{C})$, совпадающие на замкнутой подгруппе H. Тогда мы можем определить отображение

$$\gamma: G/H \to \mathrm{GL}(m, \mathbf{C})$$

формулой $\gamma(gH) = \alpha(g) \cdot \beta(g)^{-1}$. Это определение корректно, так как α, β являются гомоморфизмами. Отображение γ определяет элемент $[\gamma] \in K^1(G/H)$, образом которого в группе $K^1(G)$ является в точности элемент $[\alpha] - [\beta]$. Рассмотрим частный случай

$$G = U(n), \quad H = U(n-1), \quad G/H = S^{2n-1}.$$

В качестве представлений α, β мы возьмем представления группы G на четной и нечетной частях внешней алгебры $\Lambda^*(\mathbf{C}^n)$ и отождествим эти два пространства представления при помощи внешнего умножения на n-й базисный вектор e_n пространства $\mathbf{C}^n$. Так как подгруппа $U(n-1)$ оставляет вектор e_n неподвижным, то это отождествление совместимо с действием группы $U(n-1)$. Таким образом, мы попадаем

---

[1]) Рассмотрим комплекс $M_q = S^1 \cup_\varphi D^2$, где характеристическое отображение $\varphi: S^1 \to S^1$ имеет степень q, $q \geqslant 2$ (этот комплекс называется пространством Мура). Из точной последовательности пары (M_q, S^1) легко заметить, что $\widetilde{K}^0(M_q) = \mathbf{Z}_q$, $\widetilde{K}^1(M_q) = 0$. Определим теперь для каждого конечного комплекса X группу $K^*(X; \mathbf{Z}_q)$, положив $\widetilde{K}^*(X; \mathbf{Z}_q) = \widetilde{K}^*(X \wedge M_q)$. По теореме Кюннета имеет место точная последовательность

$$0 \to \widetilde{K}^i(X) \otimes \mathbf{Z}_q \to \widetilde{K}^i(X; \mathbf{Z}_q) \to \mathrm{Tor}(\widetilde{K}^{i+1}(X), \mathbf{Z}_q) \to 0,$$

где $i \in \mathbf{Z}_2$. — *Прим. перев.*

в рассмотренную ранее ситуацию и поэтому можем определить элемент

$$[\gamma] \in K^1(S^{2n-1}).$$

Переходя к изоморфной группе $\tilde{K}(S^{2n})$, мы видим из определения, что элементом $[\gamma]$ является в точности базисный элемент

$$\lambda_{\mathbf{C}^n} \in \tilde{K}(S^{2n}),$$

построенный ранее из внешней алгебры. Таким образом, элемент $[\gamma]$ есть образующая группы $K^1(S^{2n-1})$, и его образом в группе $K^1(U(n))$ является $\sum (-1)^i [\lambda^i]$, где λ^i — представление, соответствующее i-й внешней степени. Эти предварительные рассуждения позволяют доказать следующую теорему.

Теорема 2.7.17. *Кольцо $K^*(U(n))$ есть внешняя алгебра, порожденная элементами $[\lambda^1], \ldots, [\lambda^n]$, где λ^i — представление группы $U(n)$, соответствующее i-й внешней степени.*

Доказательство. Доказательство будем проводить индукцией по n. Рассмотрим отображение

$$U(n) \to U(n)/U(n-1) = S^{2n-1}.$$

Так как ограничением представления λ^i на подгруппу $U(n-1)$ является представление $\mu^i \oplus \mu^{i-1}$, где μ^i — представление группы $U(n-1)$, соответствующее i-й внешней степени, то из предположения индукции и теоремы 2.7.8 следует, что кольцо $K^*(U(n))$ есть свободный $K^*(S^{2n-1})$-модуль, порожденный одночленами от элементов $[\lambda^1], \ldots, [\lambda^{n-1}]$. Но группа $K^*(S^{2n-1})$ является внешней алгеброй с одной образующей $[\gamma]$, образом которой в кольце $K^*(U)$, как показано выше, является альтернированная сумма

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i [\lambda^i].$$

Следовательно, кольцо $K^*(U(n))$ является внешней алгеброй от образующих $[\lambda^1], \ldots, [\lambda^n]$, что и утверждалось.

ГЛАВА 3

КОГОМОЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ В K-ТЕОРИИ

§ 3.1. Внешние степени

Под операцией F в K-теории мы будем понимать естественное преобразование функтора $K(X)$ в себя. Иными словами, для каждого пространства X операция F представляет собой такое отображение множеств F_X: $K(X) \to K(X)$, что для произвольного непрерывного отображения f: $X \to Y$ выполняется равенство $F_X f^* = f^* F_Y$.

Пусть F и G — такие две операции, что для любого разложимого расслоения E и любого целого числа n имеет место равенство $F([E]-n) = G([E]-n)$. Тогда из принципа расщепления, рассмотренного в предыдущей главе, вытекает, что $F(x) = G(x)$ для всех элементов $x \in K(X)$.

Существуют различные способы определения когомологических операций при помощи операций внешних степеней. Сначала мы рассмотрим один из этих способов, предложенный Гротендиком.

Пусть V — векторное расслоение над пространством X. Рассмотрим элемент $\lambda_t[V] \in K(X)[[t]]$, представляющий собой степенной ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} t^i [\lambda^i(V)].$$

Поскольку

$$\lambda^k(V \oplus W) \cong \sum_{i+j=k} \lambda^i(V) \otimes \lambda^j(W)$$

для любых двух расслоений V, W, мы получаем формулу

$$\lambda_t[V \oplus W] = \lambda_t[V]\,\lambda_t[W].$$

Для любого расслоения W степенной ряд $\lambda_t[W]$ есть обратимый элемент в кольце $K(X)[[t]]$, так как он начинается с 1.

Таким образом, элемент λ_t определяет гомоморфизм

$$\lambda_t\colon \operatorname{Vect}(X) \to 1 + K(X)[[t]]^+$$

аддитивной полугруппы $\operatorname{Vect}(X)$ в мультипликативную группу степенных рядов над кольцом $K(X)$, начинающихся с единицы. Из универсального свойства кольца $K(X)$ следует, что этот гомоморфизм единственным образом продолжается до гомоморфизма

$$\lambda_t\colon K(X) \to 1 + K(X)[[t]]^+.$$

Таким образом, коэффициенты при t^i в степенном ряде определяют операции

$$\lambda^i\colon K(X) \to K(X).$$

Очевидно, имеет место формула

$$\lambda_t([V] - [W]) = \lambda_t[V]\,\lambda_t[W]^{-1}.$$

Аналогично можно рассматривать *симметрические степени* $S^i(V)$. Так как

$$S^k(V \oplus W) \cong \sum_{i+j=k} S^i(V) \otimes S^j(W),$$

то мы получаем гомоморфизм

$$S_t\colon K(X) \to 1 + K(X)[[t]]^+,$$

коэффициенты которого определяют операции

$$S^i\colon K(X) \to K(X).$$

Заметим, что если L — линейное расслоение, то

$$\lambda_t(L) = 1 + tL,$$
$$S_t(L) = 1 + tL + t^2L + \ldots = (1 - tL)^{-1},$$

и поэтому

$$\lambda_{-t}(L)\,S_t(L) = 1.$$

Таким образом, если V — сумма линейных расслоений, то имеет место равенство $\lambda_{-t}[V]\,S_t[V] = 1$. Следовательно, для любого элемента $x \in K(X)$ имеем $\lambda_{-t}(x) S_t(x) = 1$, и поэтому

$$\lambda_t([V] - [W]) = \lambda_t [V] S_{-t} [W],$$

т. е.

$$\lambda^k([V] - [W]) = \sum_{i+j=k} (-1)^j \lambda^i [V] S^j [W].$$

Последняя формула дает явное выражение для операций λ^i в терминах известных операций над векторными расслоениями.

Напомним теперь, что для любого расслоения E размерность слоя $\dim E_x$ есть локально постоянная функция точки x. Так как пространство X по предположению компактно, то размерность расслоения, определенная формулой

$$\dim E = \operatorname{Sup}_{x \in X} \dim E_x,$$

конечна. Внешние степени векторных расслоений обладают тем важным свойством, что

$$\lambda^i E = 0, \text{ если } i > \dim E.$$

Назовем элемент кольца $K(X)$ *положительным* (записывается $x \geqslant 0$), если он представляется настоящим расслоением, т. е. если он является образом некоторого элемента из полугруппы $\operatorname{Vect}(X)$. Тогда имеет место импликация

$$x \geqslant 0 \Rightarrow \lambda_t(x) \in K(X)[t].$$

Для решения многих задач представляет интерес не $\dim E$, а другое целое число, которое определяется следующим образом. Обозначим через $\operatorname{rank} E$ расслоение, слоем которого в точке x является $\mathbf{C}^{d(x)}$, где $d(x) = \dim E_x$; если пространство X связно, то $\operatorname{rank} E$ представляет собой тривиальное расслоение размерности $\dim E$. Таким образом, отображение $E \to \operatorname{rank} E$ индуцирует (идемпотентный) эндоморфизм колец

$$\operatorname{rank}\colon K(X) \to K(X),$$

который обычно называется *пополняющим гомоморфизмом* или *аугментацией*. Ядром этого эндоморфизма является идеал, который мы обозначим через $K_1(X)$. Для связных пространств с отмеченной точкой, очевидно, имеет место равенство

$$K_1(X)=\widetilde{K}(X).$$

Для любого элемента $x \in K(X)$

$$x-\operatorname{rank} x \in K_1(X).$$

Определим теперь размерность $\dim_K x$ для любого элемента $x \in K(X)$ как наименьшее число n, для которого

$$x-\operatorname{rank} x+n \geqslant 0.$$

Так как каждый элемент кольца $K(X)$ может быть представлен в виде $[V]-n$, где V — некоторое векторное расслоение, то размерность $\dim_K x$ *конечна* для всех элементов $x \in K(X)$. Для векторного расслоения E очевидно следующее неравенство

$$\dim_K [E] \leqslant \dim E.$$

Заметим, что

$$\dim_K x=\dim_K x_1,$$

где $x_1=x-\operatorname{rank} x$, так что размерность $\dim_K$ является по существу функцией на факторкольце кольца $K(X)$ по $K_1(X)$.

Теперь удобно ввести операции γ^i, которые так же связаны с размерностью $\dim_K$, как операции λ^i с размерностью расслоений. Вновь следуя Гротендику, определим элемент

$$\gamma_t(x)=\lambda_{t/(1-t)}(x) \in K(X)[[t]];$$

легко проверить, что $\gamma_t(x+y)=\gamma_t(x)\gamma_t(y)$. Таким образом, для каждого i мы получаем операцию

$$\gamma^i\colon K(X) \to K(X).$$

Операция γ^i является линейной комбинацией операций λ^j, где $j \leqslant i$; верно и обратное утверждение, как видно из формулы

$$\lambda_s(x)=\gamma_{s/(1+s)}(x),$$

которую легко получить, положив $s=t/(1-t)$, $t=s/(1+s)$. Заметим, что

$$\gamma_t(1)=(1-t)^{-1}$$

и для линейного расслоения

$$\gamma_t([L]-1)=1+t([L]-1).$$

Предложение 3.1.1. *Для произвольного элемента $x\in K_1(X)$ элемент $\gamma_t(x)$ является многочленом степени $\leqslant \dim_K x$.*

Доказательство. Пусть $n=\dim_K x$, так что $x+n>0$. Таким образом, $x+n=[E]$ для некоторого векторного расслоения E. Более того, $\dim E=n$, и поэтому

$$\lambda^i(E)=0 \quad \text{для} \quad i>n.$$

Таким образом, $\lambda_t(x+n)$ — многочлен степени $\leqslant n$. Далее имеем

$$\gamma_t(x)=\gamma_t(x+n)\gamma_t(1)^{-n}=\lambda_{t/(1-t)}(x+n)(1-t)^n=$$
$$=\sum_{i=0}^{n}\lambda^i(x+n)t^i(1-t)^{n-i}.$$

Следовательно, $\gamma_t(x)$ — многочлен степени $\leqslant n$, как и утверждалось.

Далее определим $\dim_\gamma x$ как наибольшее целое число n, для которого $\gamma^n(x-\operatorname{rank} x)\neq 0$, и положим

$$\dim_K X=\sup_{x\in K(X)}\dim_K x,$$
$$\dim_\gamma X=\sup_{x\in K(X)}\dim_\gamma x.$$

Из предложения 3.1.1 следуют неравенства

$$\dim_\gamma x\leqslant \dim_K x,\quad \dim_\gamma X\leqslant \dim_K X.$$

Мы покажем теперь, что при слабых ограничениях на пространство X размерность $\dim_K X$ конечна. Для этого нам понадобятся некоторые предварительные леммы о симметрических функциях.

Лемма 3.1.2. *Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — независимые переменные. Тогда любой однородный многочлен степени*

$>n(n-1)$ *в кольце* $\mathbf{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ *принадлежит идеалу, порожденному симметрическими функциями положительной степени от переменных* $x_1, \ldots, x_n$.

Доказательство. Пусть $\sigma_i(x_1, \ldots, x_n)$ есть i-я элементарная симметрическая функция. Тогда уравнение

$$x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} - \ldots + (-1)^n \sigma_n = 0$$

имеет корни $x = x_i$. Таким образом, x_i^n принадлежит идеалу, порожденному функциями $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$. Но любой одночлен степени $>n(n-1)$ от переменных $x_1, \ldots, x_n$ делится на x_i^n для некоторого i и поэтому также содержится в этом идеале.

Лемма 3.1.3. *Пусть* $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ — *независимые переменные и*

$$a_i = \sigma_i(x_1, \ldots, x_n), \quad b_i = \sigma_i(y_1, \ldots, y_m)$$

— *элементарные симметрические функции. Пусть* I — *идеал в кольце* $\mathbf{Z}[a, b]$, *а* J — *его продолжение в кольце* $\mathbf{Z}[x, y]$. *Тогда*

$$J \cap \mathbf{Z}[a, b] = I.$$

Доказательство. Известно, что кольцо $\mathbf{Z}[x]$ является свободным $\mathbf{Z}[a]$-модулем с базисом, состоящим из одночленов

$$x^r = x_1^{r_1} x_2^{r_2} \ldots x_{n-1}^{r_{n-1}}, \quad 0 \leqslant r_i \leqslant n - i.$$

Следовательно, кольцо $\mathbf{Z}[x, y] = \mathbf{Z}[x] \otimes \mathbf{Z}[y]$ является свободным модулем над кольцом $\mathbf{Z}[a, b] = \mathbf{Z}[a] \otimes \mathbf{Z}[b]$ с базисом, состоящим из одночленов $x^r y^s$. Тогда идеал $J \subset \mathbf{Z}[x, y]$ состоит из всех элементов f вида

$$f = \sum f_{r,s} x^r y^s, \quad f_{r,s} \in I.$$

Так как одночлены $x^r y^s$ образуют свободный базис, то элемент f принадлежит кольцу $\mathbf{Z}[a, b]$ тогда и только тогда, когда $f_{r,s} = 0$ для $r, s \neq (0, 0)$. Итак, если $f \in J$ принадлежит кольцу $\mathbf{Z}[a, b]$, то

$$f = f_{0,0} \in I.$$

Таким образом, $J \cap \mathbf{Z}[a, b] = I$, как утверждалось.

Замечание. Эта лемма является по существу алгебраической формой принципа расщепления, так как она утверждает, что мы можем вложить кольцо $\mathbf{Z}[a, b]/I$ в кольцо $\mathbf{Z}[x, y]/J$. Это утверждение носит, конечно, чисто формальный характер, и, по-видимому, всякий раз, когда мы имеем дело с формальными алгебраическими результатами, предпочтительнее использовать именно его, а не топологический принцип расщепления. Топологический принцип расщепления связан с теоремой периодичности, и его следует использовать только тогда, когда мы имеем дело со свойствами, столь же глубокими, как эта теорема.

Лемма 3.1.4. *Пусть K — коммутативное кольцо (с единицей), и пусть*

$$a(t) = 1 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n,$$
$$b(t) = 1 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots + b_m t^m$$

— такие элементы кольца $K[t]$, что

$$a(t)\, b(t) = 1.$$

Тогда существует такое целое число $N = N(n, m)$, что любой одночлен

$$a_1^{r_1} a_2^{r_2} \ldots a_n^{r_n}$$

веса $\sum\limits_j j r_j > N$ равен нулю.

Доказательство. Легко заметить, что лемма 3.1.4 вытекает из следующего утверждения: если $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_m$ — независимые переменные, то любой одночлен α веса $\geqslant N$ от переменных a_i принадлежит идеалу I, порожденному элементами

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j, \quad k = 1, \ldots, mn \quad (a_0 = b_0 = 1).$$

Рассмотрим такие независимые переменные $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_m$, что $a_i = \sigma_i(x_1, \ldots, x_n)$, $b_i = \sigma_i(y_1, \ldots, y_m)$. По лемме 3.1.3 для доказательства нашего утверждения достаточно показать, что одночлен α принадлежит продолженному идеалу J. Но элемент c_k есть в точности k-я элементарная симметрическая функция от $m+n$ переменных $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$.

Следовательно, результат вытекает из леммы 3.1.2 при $N=(m+n)(m+n-1)$.

Замечание. Значение числа $N(m, n)$, полученное в доказательстве леммы, не наилучшее. Более тщательное рассмотрение позволяет заключить, что наилучшим значением является число mn.

Применим теперь эти алгебраические результаты.

Предложение 3.1.5. *Для каждого элемента $x \in K_1(X)$ существует такое целое число N, зависящее от x, что любой одночлен*

$$\gamma^{i_1}(x)\gamma^{i_2}(x)\ \ldots\ \gamma^{i_k}(x)$$

веса $\sum_{j=1}^{k} i_j > N$ равен нулю.

Доказательство. Применим лемму 3.1.4 к многочленам $\gamma_t(x)$, $\gamma_t(-x)$. Заметим, что число N зависит от $\dim_\gamma x$, $\dim_\gamma(-x)$.

Так как $\gamma^1(x)=x$, мы получаем

Следствие 3.1.6. *Любой элемент $x \in K_1(X)$ нильпотентен.*

Если мы положим *степень* каждой операции γ^i, равной единице, то для любого одночлена от операций γ^i получим

$$\text{вес} \geqslant \text{степень}.$$

Итак, из предложения 3.1.5 следует, что для произвольного элемента $x \in K_1(X)$ все одночлены достаточно большой степени от элементов $\gamma^i(x)$ равняются нулю. Таким образом, мы можем применить *формальный степенной ряд* от операций γ^i к любому элементу $x \in K_1(X)$. (Как обычно, под формальным степенным рядом понимается сумма $f=\sum f_n$, где f_n — однородный *многочлен* степени n, который может содержать, очевидно, лишь конечное число переменных.) Обозначим через $\mathrm{Op}(K_1, K)$ множество всех операций $K_1 \to K$. Это множество операций имеет структуру кольца, индуцированную структурой кольца K (сложение и умножение значений операций). Тогда, как мы уже показали, имеет место гомоморфизм колец

$$\varphi\colon \mathbf{Z}[[\gamma^1, \ldots, \gamma^n, \ldots]] \to \operatorname{Op}(K_1, K)^{1)}.$$

Теорема 3.1.7. *Гомоморфизм*

$$\varphi\colon \mathbf{Z}[[\gamma^1, \ldots, \gamma^n, \ldots]] \to \operatorname{Op}(K_1, K)$$

является изоморфизмом.

Доказательство. Обозначим через $Y_{n,m}$ произведение n экземпляров комплексного проективного пространства $P_m(\mathbf{C})$. Используя $P_0(\mathbf{C})$ в качестве отмеченной точки в пространстве $P_m(\mathbf{C})$, мы получаем прямой спектр пространств $Y_{n,m}$ с естественными вложениями

$$Y_{n,m} \to Y_{n',m'} \quad \text{для} \quad n' \geqslant n, \; m' \geqslant m.$$

Тогда совокупность групп $K(Y_{n,m})$ образует обратный спектр групп, для которого верны следующие утверждения:

$$K(Y_{n,m}) = \mathbf{Z}[x_1, \ldots, x_n]/(x_1^{m+1}, \ldots, x_n^{m+1}),$$

$$\varprojlim_m K(Y_{n,m}) = \mathbf{Z}[[x_1, \ldots, x_n]],$$

$$\varprojlim_{m,n} K(Y_{n,m}) = \varprojlim_n \mathbf{Z}[[x_1, \ldots, x_n]].$$

Любая операция индуцирует операцию на пределе обратного спектра. Следовательно, мы можем определить отображение

$$\psi\colon \operatorname{Op}(K_1, K) \to \varprojlim_n \mathbf{Z}[[x_1, \ldots, x_n]]$$

формулой $\psi(f) = \varprojlim f(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$. Так как в группе $K(Y_{n,m})$ имеет место равенство

$$\gamma_t(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = \prod_{i=1}^{n}(1 + x_i t),$$

---

[1]) Через $\mathbf{Z}[[x_1, \ldots, x_n, \ldots]]$ обозначено кольцо формальных степенных рядов от переменных $x_1, \ldots, x_n, \ldots$, таких, что однородные компоненты зависят лишь от конечного числа переменных. — *Прим. перев.*

то отсюда следует, что

$$\psi\varphi(\gamma^i) = \varprojlim_n \sigma_i(x_1, \ldots, x_n),$$

где σ_i есть i-я элементарная симметрическая функция. В частности, из этого вытекает, что гомоморфизм $\psi\varphi$ является мономорфизмом, и поэтому гомоморфизм φ также является мономорфизмом. Более того, образом гомоморфизма $\psi\varphi$ является кольцо

$$\mathbf{Z}[[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]],$$

которое совпадает с кольцом

$$\varprojlim_n \mathbf{Z}[[x_1, \ldots, x_n]]^{S_n},$$

где через $[\ ]^{S_n}$ обозначено подкольцо, инвариантное относительно естественного действия симметрической группы S_n. Но для всех операций $f \in \mathrm{Op}(K_1, K)$ элемент

$$\psi(f) = \varprojlim f(x_1 + \ldots + x_n)$$

принадлежит этому кольцу. Другими словами,

$$\mathrm{Im}\,\psi\varphi = \mathrm{Im}\,\psi.$$

Чтобы завершить доказательство, остается теперь показать, что гомоморфизм ψ является мономорфизмом. Предположим, что $\psi(f) = 0$ для некоторой операции f. Так как любое линейное расслоение над пространством X индуцируется отображением в некоторое пространство $P_n(\mathbf{C})$, отсюда следует, что если расслоение E представляет собой сумму n линейных расслоений, то

$$f([E] - n) = 0.$$

Но из принципа расщепления в этом случае вытекает, что

$$f(x) = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in K_1,$$

т. е. f — нулевая операция, что и утверждалось.

Обозначим, как обычно, через $H^0(X, \mathbf{Z})$ кольцо всех непрерывных отображений пространства X в кольцо целых чисел $\mathbf{Z}$. Тогда мы имеем разложение в прямую сумму групп

$$K(X) = K_1(X) \oplus H^0(X, \mathbf{Z}),$$

определенное аугментацией. Легко видеть, что не существует ненулевых естественных гомоморфизмов

$$H^0(X, \mathbf{Z}) \to K_1(X),$$

и поэтому множество операций $\mathrm{Op}(K) = \mathrm{Op}(K, K)$ отличается от $\mathrm{Op}(K_1, K)$ только множеством $\mathrm{Op}(H^0(\mathbf{Z}))$, которое совпадает с кольцом всех отображений $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$. Таким образом, теорема 3.1.7 дает по существу полное описание множества всех операций $\mathrm{Op}(K)$.

Перейдем теперь к обсуждению необходимых ограничений на кольцо $K(X)$. Сначала рассмотрим кольцо $H^0(X, \mathbf{Z})$.

Предложение 3.1.8. *Следующие два утверждения эквивалентны:*

(A) $H^0(X, \mathbf{Z})$ — *нётерово кольцо,*

(B) $H^0(X, \mathbf{Z})$ — *конечный* $\mathbf{Z}$-*модуль.*

Доказательство. Утверждение (A) вытекает из утверждения (B) тривиальным образом. Поэтому мы докажем только импликацию (A)$\Rightarrow$(B). Пусть кольцо $H^0(X, \mathbf{Z})$ нётерово. Допустим, что мы можем найти строго убывающую бесконечную цепь компонент (открыто-замкнутых множеств) пространства

$$X = X_0 \supset X_1 \supset \ldots \supset X_n \supset X_{n+1} \supset \ldots .$$

Тогда для каждого n мы можем найти такое непрерывное отображение $f_n\colon X \to \mathbf{Z}$, что

$$f_n(X_{n+1}) = 0,$$
$$f_n(X_n - X_{n+1}) = 1.$$

Рассмотрим идеал I кольца $H^0(X, \mathbf{Z})$, состоящий из таких отображений $f\colon X \to \mathbf{Z}$, что $f(X_n) = 0$ для некоторого n. Так как кольцо $H^0(X, \mathbf{Z})$ нётерово, то идеал I конечно порожден, и, следовательно, существует такое N, что

$$f(X_N) = 0 \quad \text{для всех } f \in I.$$

Таким образом, мы получили противоречие, так как по построению

$$f_N \in I \quad \text{и} \quad f_N(X_N) \neq 0.$$

Следовательно, пространство X имеет только конечное число компонент, т. е.

$$X=\sum_{i=1}^{n} X_i,$$

где пространства X_i связны. Поэтому кольцо $H^0(X, \mathbf{Z})$ изоморфно кольцу $\mathbf{Z}^n$.

Рассмотрим теперь кольцо $K(X)$.

Предложение 3.1.9. *Следующие два утверждения эквивалентны:*

(A) $K(X)$ — *нётерово кольцо,*

(B) $K(X)$ — *конечный* $\mathbf{Z}$-*модуль.*

Доказательство. Предположим сначала, что верно утверждение (A), тогда кольцо $H^0(X, \mathbf{Z})$, являющееся факторкольцом кольца $K(X)$, также нётерово. Следовательно, согласно предложению 3.1.8, кольцо $H^0(X, \mathbf{Z})$ является конечным $\mathbf{Z}$-модулем. Далее, кольцо $K_1(X)$ является идеалом кольца $K(X)$, состоящим из нильпотентных элементов, см. следствие 3.1.6. Так как кольцо $K(X)$ нётерово, то $K_1(X)$ является нильпотентным идеалом. Для краткости положим $I=K_1(X)$. Тогда $I^n=0$ для некоторого n, и I^m/I^{m+1}, $m=0, 1, \ldots, n-1$, являются конечными модулями над кольцом $K/I=H^0(X, \mathbf{Z})$. Следовательно, кольцо $K(X)$ является конечным $H^0(X, \mathbf{Z})$-модулем, и поэтому также конечным $\mathbf{Z}$-модулем.

Примерами пространств, для которых кольцо $K(X)$ есть конечный $\mathbf{Z}$-модуль, являются конечные клеточные разбиения.

Определим фильтрацию в группе $K(X)$ подгруппами $K_n^\gamma(X)$, порожденными всеми одночленами вида

$$\gamma^{i_1}(x_1)\gamma^{i_2}(x_2)\ldots\gamma^{i_k}(x_k),$$

где $\sum_{j=1}^{k} i_j \geqslant n$ и $x_i \in K_1(X)$. Тогда $K_0^\gamma=K$ и, так как $\gamma^1(x)=x$, мы имеем $K_1^\gamma=K_1$. Если $x\in K_n^\gamma(X)$, то мы говорим, что x имеет γ-фильтрацию $\geqslant n$, и записываем это так: $F_\gamma(x)\geqslant n$.

Предложение 3.1.10. *Если кольцо $K(X)$ — конечный $\mathbf{Z}$-модуль, то для некоторого числа n имеет место равенство*

$$K_n^\gamma(X)=0.$$

Доказательство. Пусть $x_1, \ldots, x_s$—образующие кольца $K_1(X)$, и пусть $N_j = N(x_j)$ — целые числа, определенные в предложении 3.1.5. Так как имеет место формула

$$\gamma_t(a+b) = \gamma_t(a)\gamma_t(b),$$

то достаточно доказать существование такого N, что все одночлены от $\gamma^i(x_j)$ общего веса $> N$ равны нулю. Но, взяв $N = \sum_{j=1}^{s} N_j$, мы видим, что любой такой одночлен для некоторого j должен иметь вес $> N_j$ по $\gamma^i(x_j)$. Следовательно, согласно предложению 3.1.5, этот одночлен равен нулю.

Следствие 3.1.11. *Если $K(X)$ — конечный $\mathbf{Z}$-модуль, то размерность $\dim_\gamma X$ конечна.*

Обратим внимание читателя на некоторые дальнейшие свойства операций γ^i.

Предложение 3.1.12. *Если V—расслоение размерности n, то $\lambda_{-1}[V] = \gamma^n([V]-n)$. Таким образом, кольцо $\tilde{K}^*(X^V)$ есть свободный $K^*(X)$-модуль, порожденный элементом $\gamma^n([V]-n)$.*

Предложение 3.1.13. *Существуют такие многочлены P_i, Q_{ij}, что для всех элементов x, y имеют место формулы*

$$\gamma^i(xy) = P_i(\gamma^1(x), \gamma^1(y), \gamma^2(x), \gamma^2(y), \ldots, \gamma^i(x), \gamma^i(y)),$$

$$\gamma^i(\gamma^j(x)) = Q_{ij}(\gamma^1(x), \ldots, \gamma^{i+j}(x)).$$

Доказательства этих утверждений мы предоставляем читателю, который легко проведет их, используя принцип расщепления.

§ 3.2. Операции Адамса

В этом параграфе мы изучим некоторые когомологические операции, которые лучше связаны с алгебраической структурой кольца $K(X)$, чем операции Гротендика. Они были введены Адамсом[1]). Определим сначала операцию

[1]) См. сб. *Математика*, 7:6 (1963), 61—64. — *Прим. перев.*

$\Psi^0(x) = \operatorname{rank}(x)$; затем в кольце $K(X)[[t]]$ рассмотрим степенной ряд $\Psi_t(x) = \sum\limits_{i=0} t^i \Psi^i(x)$, определяемый равенством

$$\Psi_t(x) = \Psi_1^0(x) - t\frac{d}{dt}(\log \lambda_{-t}(x)).$$

Выражение $\frac{d}{dt}(\log \lambda_{-t}(x))$ понимается здесь как соответствующий формальный степенной ряд, причем, так как все коэффициенты этого степенного ряда — целые числа, наше определение имеет смысл.

Предложение 3.2.1. *Для любых элементов x, $y \in K(X)$ имеют место следующие утверждения*:

(1) $\Psi^k(x+y) = \Psi^k(x) + \Psi^k(y)$ *для всех целых чисел* k,

(2) *если x — линейное расслоение, то* $\Psi^k(x) = x^k$,

(3) *свойства* (1) *и* (2) *однозначно определяют операции* Ψ^k.

Доказательство. По определению $\Psi_t(x+y) = \Psi_t(x) + \Psi_t(y)$, следовательно, $\Psi^k(x+y) = \Psi^k(x) + \Psi^k(y)$ для каждого k.

Если x — линейное расслоение, то $\lambda_{-t}(x) = 1 - tx$, и поэтому

$$\frac{d}{dt}(\log(1 - tx)) = \frac{-x}{1-tx} = -x - tx^2 - t^2x^3 - \ldots.$$

Таким образом, $\Psi_t(x) = 1 + tx + t^2x^2 + \ldots$.

Последнее утверждение вытекает из принципа расщепления.

Предложение 3.2.2. *Для любых элементов x, $y \in K(X)$ справедливы следующие утверждения*:

(1) $\Psi^k(xy) = \Psi^k(x)\Psi^k(y)$ *для всех целых чисел* k,

(2) $\Psi^k(\Psi^l(x)) = \Psi^{kl}(x)$ *для всех пар целых чисел* k, l,

(3) *если p — простое число, то* $\Psi^p(x) \equiv x^p \pmod p$,

(4) *если $u \in \tilde{K}(S^{2n})$, то $\Psi^k(u) = k^n u$ для всех целых чисел* k.

Доказательство. Первые два утверждения вытекают непосредственно из предложения 3.2.1 и принципа расщепления. Кроме того, из принципа расщепления мы получаем разложение $\Psi^p(x) = x^p + pf(\lambda^1(x), \ldots, \lambda^p(x))$, где f — некоторый многочлен с целыми коэффициентами. Наконец, если h — образующая группы $\tilde{K}(S^2)$, то из уже доказанных свойств операций Ψ^k немедленно вытекает равенство $\Psi^k(h) = kh$. Но сферу S^{2n} можно представить в виде $S^2 \wedge \ldots \wedge S^2$, а группа $\tilde{K}(S^{2n})$ порождается элементом $h \otimes h \otimes \ldots \otimes h$, поэтому и утверждение (4) вытекает из уже доказанных свойств.

Теперь мы дадим одно применение операций Адамса Ψ^k. Предположим, что f: $S^{4n-1} \to S^{2n}$ — непрерывное отображение. Определим инвариант Хопфа $H(f)$ следующим образом. Обозначим через X_f конус отображения f; пусть i: $S^{2n} \to X_f$ — естественное вложение, а j: $X_f \to S^{4n}$ — естественная проекция. Обозначим через u образующую группы $\tilde{K}(S^{4n})$. Из точной последовательности пары (X_f, S^{2n}) мы видим, что существует такой элемент $x \in \tilde{K}(X_f)$, что элемент $i^*(x)$ порождает группу $\tilde{K}(S^{2n})$. Более того, из той же точной последовательности легко заметить, что $\tilde{K}(X_f)$ — свободная абелева группа, порожденная элементами x и $y = j^*(u)$. Так как $(i^*(x))^2 = 0$, то для некоторого числа H имеет место равенство $x^2 = Hy$. Это целое число H мы и назовем инвариантом Хопфа отображения f. Ясно, что с точностью до знака инвариант $H(f)$ полностью определен[1]). Следующая теорема была впервые доказана Адамсом при помощи обычной теории когомологий H^*[2]).

Теорема 3.2.3. *Если для некоторого отображения f число $H(f)$ нечетно, то $n = 1$, 2 или 4.*

Доказательство. Из свойств операций Ψ^k легко следует, что для образующих x группы $\tilde{K}(X_f)$ имеют место равенства $\Psi^2(x) = 2^n x + ay$, $\Psi^3(x) = 3^n x + by$. Так как $\Psi^2(x) \equiv x^2 \pmod 2$, то коэффициент a нечетен. Для образующей y имеют место равенства $\Psi^k(y) = j^*(\Psi^k(u)) = k^{2n} y$.

---

[1]) Напомним, что если конусы отображений f и g: $S^l \to S^k$ гомотопически эквивалентны, то $[f] = \pm [g]$, где $[f]$ и $[g]$ — элементы группы $\pi_l(S^k)$, соответствующие отображениям f и g.— *Прим. перев.*

[2]) См. сб. *Математика*, 5 : 4 (1961), 3—86. — *Прим. перев.*

Следовательно, значение операции Ψ^6 на элементе x имеет вид

$$\Psi^6(x) = \Psi^3(\Psi^2(x)) = 6^n x + (2^n b + 3^{2n} a) y,$$
$$\Psi^6(x) = \Psi^2(\Psi^3(x)) = 6^n x + (2^{2n} b + 3^n a) y.$$

Таким образом, мы получаем уравнение для числа n: $2^n b + 3^{2n} a = 2^{2n} b + 3^n a$, или $2^n(2^n - 1) b = 3^n (3^n - 1) a$. Так как a нечетно, то 2^n является делителем числа $(3^n - 1)$, что, согласно элементарной теории чисел, может произойти лишь в том случае, когда $n = 1$, 2 или 4.

Если $n = 1$, 2 или 4, то можно определить отображения Хопфа, имеющие инвариант Хопфа, равный единице. Для этого достаточно, например, заменить сферу S^{4n-1} подпространством ненулевых векторов в двумерном комплексном или кватернионном пространстве или пространстве Кэли, а сферу S^{2n} рассматривать как комплексную или кватернионную проективную прямую или проективную прямую Кэли. Мы оставляем читателю проверку этого утверждения[1]).

Предложение 3.2.4. *Если элемент $x \in K(X)$ имеет γ-фильтрацию $F_\gamma(x) \geqslant n$, то для любого целого числа k элемент $(\Psi^k(x) - k^n x)$ имеет γ-фильтрацию*

$$F_\gamma(\Psi^k(x) - k^n x) \geqslant n + 1.$$

Доказательство. Пусть $n = 0$. Имеем

$$\Psi^k(x) = \Psi^k(\operatorname{rank} x + x_1) = \operatorname{rank} x + \Psi^k x_1,$$

где x_1, а потому и $\Psi^k x_1$ принадлежат группе $K_1(X)$. Следовательно,

$$\Psi^k x - x = \Psi^k x_1 - x_1 \in K_1(X) = K_1^\gamma(X),$$

т. е. в случае $n = 0$ утверждение верно.

Рассмотрим случай $n > 0$. Так как операция Ψ^k является гомоморфизмом колец, то достаточно доказать, что следующая операция: $(\Psi^k \gamma^n - k^n \gamma^n)$ (где $\Psi^k \in \operatorname{Op}(K)$, $\gamma^n \in \operatorname{Op}(K_1, K)$) представляет собой многочлен от опера-

---

[1]) Полное доказательство можно найти, например, в книге Стинрод Н., Топология косых произведений, ИЛ, М., 1953, стр. 128—134. — *Прим. перев.*

ций γ^i, в котором каждый член имеет вес $\geqslant n+1$. По теореме 3.1.7 имеет место изоморфизм

$$\mathbf{Z}[[\gamma^1, \ldots, \gamma^n, \ldots]] \cong \operatorname{Op}(K_1, K) \cong \varprojlim_m \mathbf{Z}[x_1, \ldots, x_m]^{S_m},$$

при котором операция γ^i соответствует i-й элементарной симметрической функции σ_i от переменных x_j. Так как

$$\Psi^k(x_i) = (1 + x_i)^k - 1,$$

то

$$\Psi^k(\sigma_n(x_1, \ldots)) = \sigma_n((1+x_1)^k - 1, \ldots) = k^n \sigma_n(x) + f,$$

где f — многочлен от σ_i веса $\geqslant n+1$. Поскольку операции $\Psi^k \gamma^n$ при рассматриваемом изоморфизме соответствует функция $\Psi^k(\sigma_n)$, предложение 3.2.4 доказано[1]).

Применяя последовательно предложение 3.2.4, мы получаем

Следствие 3.2.5. *Если $K^{\gamma}_{n+1}(X) = 0$, то для любой последовательности неотрицательных целых чисел $k_0, k_1, \ldots, k_n$ имеет место соотношение*

$$\left[\prod_{m=0}^{n} \Psi^{k_m} - (k_m)^m\right] = 0.$$

---

[1]) Если элемент x имеет γ-фильтрацию $\geqslant n$, то по определению

$$x = \gamma^{i_1}(x_1)\gamma^{i_2}(x_2)\ldots\gamma^{i_l}(x_l), \quad x_j \in K_1(X) \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{l} i_j \geqslant n.$$

Заметим теперь, что если $\sum_{j=1}^{l} i_j > n$, то предложение 3.2.4 верно априори, так как операции Ψ^k, очевидно, не понижают γ-фильтрации. Рассмотрим более подробно случай $\sum_{j=1}^{l} i_j = n$. Как доказано, $\Psi^k \gamma^{i_j} x = k^{i_j} \gamma^{i_j}(x) + f^j(x)$, причем элемент $f^i(x)$ имеет γ-фильтрацию $\geqslant i_j + 1$. Следовательно,

$$\Psi^k x = \Psi^k \gamma^{i_1}(x_1) \cdot \Psi^k \gamma^{i_2}(x_2) \ldots \Psi^k \gamma^{i_l}(x_l) = k^{\Sigma i_j} x + f(x),$$

где элемент f_k уже имеет γ-фильтрацию $\geqslant \sum_{j=1}^{l} i_j + 1 = n+1$, т. е. $F_\gamma(\Psi^k x - k^n x) \geqslant n+1$. — *Прим. перев.*

Согласно предложению 3.1.10, мы можем применить следствие 3.2.5, в частности, тогда, когда группа $K(X)$ представляет собой конечный $\mathbf{Z}$-модуль.

Заметим, что операция Ψ^k является линейным преобразованием векторного пространства $K(X)\otimes\mathbf{Q}$. Взяв последовательность чисел $k_m=k$ для всех m, мы видим из следствия 3.2.5, что на $K(X)\otimes\mathbf{Q}$ выполняется соотношение

$$\prod_{m=0}^{n}(\Psi^k-k^m)=0.$$

Таким образом, собственными значениями каждого преобразования Ψ^k являются степени числа k, не превышающие k^n. Обозначим через $V_{k,i}$ собственное пространство преобразования Ψ^k, соответствующее собственному значению k^i (может, конечно, оказаться, что $V_{k,i}=0$). Если $k>1$, то мы можем рассмотреть ортогональное разложение тождественного оператора 1 в пространстве $K(X)\otimes\mathbf{Q}$:

$$1=\sum\Pi_i,\quad \Pi_i=\prod_{m\neq i}(\Psi^k-k^m)/(k^i-k^m).$$

Таким образом, векторное пространство $K(X)\otimes\mathbf{Q}$ является прямой суммой пространств $V_{k,i}$. Далее, взяв последовательность чисел

$$k_i=l \quad \text{и} \quad k_m=k \quad \text{для} \quad m\neq i,$$

мы получаем, согласно следствию 3.2.5, что

$$(\Psi^l-l^i)V_{k,i}=0,$$

и поэтому имеет место включение $V_{k,i}\subset V_{l,i}$. Таким образом, доказано

Предложение 3.2.6. *Предположим, что кольцо $K(X)$ имеет конечную γ-фильтрацию; пусть $V_{k,i}$ — собственное пространство оператора Ψ^k в векторном пространстве $K(X)\otimes\mathbf{Q}$, соответствующее собственному значению k^i. Тогда для любых целых чисел k, $l>1$ имеет место равенство*

$$V_{k,i}=V_{l,i}.$$

Так как подпространство $V_{k,i}$ не зависит от k (для $k>1$), то его можно обозначить символом, не зависящим от k. Мы обозначим пространство $V_{k,i}$ через $H^{2i}(X;\ \mathbf{Q})$ и назовем его $2i$-мерной *группой Бетти* пространства X. Из предложения 3.2.4 следует, что собственному значению $k^0=1$ могут соответствовать только векторы из пространства $H^0(X,\ \mathbf{Z})\otimes\mathbf{Q}$. Таким образом, в наших обозначениях

$$H^0(X,\ \mathbf{Z})\otimes\mathbf{Q}=H^0(X;\ \mathbf{Q}).$$

Определим нечетномерную группу Бетти равенством

$$H^{2m+1}(X;\ \mathbf{Q})=H^{2m+2}(SX^+;\ \mathbf{Q}),$$

где $X^+=X\cup$ (точка) и S — приведенная надстройка. Если все рассматриваемые пространства конечномерны, то введем обозначение

$$B_k=\dim_{\mathbf{Q}} H^k(X;\ \mathbf{Q})$$

и определим эйлерову характеристику $E(X)$ формулой

$$E(X)=\sum(-1)^k B_k=\dim_{\mathbf{Q}}(K^0(X)\otimes\mathbf{Q})-\dim_{\mathbf{Q}}(K^1(X)\otimes\mathbf{Q}).$$

Заметим, что из формулы Кюннета (когда она применима) вытекает равенство

$$E(X\times Y)=E(X)E(Y).$$

Следующее утверждение является простой переформулировкой предложения 3.2.4 в терминах введенных нами обозначений.

Предложение 3.2.7. *Имеет место изоморфизм*

$$K_n^{\gamma}(X)\otimes\mathbf{Q}=\sum_{m\geqslant n} H^{2m}(X;\ \mathbf{Q}),$$

и поэтому

$$\{K_n^{\gamma}(X)/K_{n+1}^{\gamma}(X)\}\otimes\mathbf{Q}\cong H^{2n}(X;\ \mathbf{Q}).$$

Так как для образующей u группы $\tilde{K}(S^2)$ справедлива формула $\Psi^k u=ku$, то легко проверить следующее равенство:

$$\Psi^k\beta(x)=k\beta\Psi^k(x),$$

где β: $K(X) \to K^{-2}(X)$ — изоморфизм периодичности Ботта. Таким образом, изоморфизм Ботта β индуцирует изоморфизм построенных нами групп:

$$H^{2m}(X; \mathbf{Q}) \cong H^{2m+2}(S^2X^+; \mathbf{Q}).$$

Из способа определения нечетномерных групп Бетти следует, что для всех чисел k имеет место

Формула 3.2.8. $H^k(X; \mathbf{Q}) \cong H^{k+1}(SX^+; \mathbf{Q})$.

Если теперь рассмотреть точную последовательность пары (X, A) в K-теории, тензорно умноженной на поле рациональных чисел $\mathbf{Q}$, и разложить ее по действию операций Ψ^k, то из 3.2.8 мы получим

Предложение 3.2.9. *Пусть $A \subset X$ — пара топологических пространств. Если группы $K^*(X)$ и $K^*(A)$ являются конечными $\mathbf{Z}$-модулями, то точная последовательность*

$$\ldots \to K^{i-1}(A) \xrightarrow{\delta} K^i(X, A) \to K^i(X) \to K^i(A) \xrightarrow{\delta} \ldots$$

индуцирует точную последовательность

$$\ldots \to H^{i-1}(A; \mathbf{Q}) \xrightarrow{\delta} H^i(X, A; \mathbf{Q}) \to$$
$$\to H^i(X; \mathbf{Q}) \to H^i(A; \mathbf{Q}) \xrightarrow{\delta} \ldots$$ [1].

Далее мы дадим второе применение операций Ψ^k. Так как факторпространство $P_n(\mathbf{C})/P_{n-1}(\mathbf{C})$ представляет собой сферу S^{2n}, то имеет место естественное вложение S^{2n} в $P_{n+k}(\mathbf{C})/P_{n-1}(\mathbf{C})$ для всех k. Мы хотим знать, для каких значений n и k сфера S^{2n} является ретрактом пространства $P_{n+k}(\mathbf{C})/P_{n-1}(\mathbf{C})$, т. е. когда может существовать отображение f: $P_{n+k}(\mathbf{C})/P_{n-1}(\mathbf{C}) \to S^{2n}$, ограничение кото-

---

[1]) Можно показать, что построенные здесь группы $H^i(X; \mathbf{Q})$ естественно изоморфны обычным группам когомологий $H^i(X; \mathbf{Q})$. Более того, как показал Атья в работе „Power operation in K-theory“, *Quart. J. Math.*, ser. 2, 17, № 60 (1966), 165—193, операции Ψ^k позволяют для пространств без кручения в обычных когомологиях восстановить не только кольцо $H^*(X; \mathbf{Q})$, но и действие операций Стинрода в группе $H^*(X, \mathbf{Z}_p) = \sum H^i$ (p — любое простое число), т. е. восстановить структуру A_p-модуля $H^*(X, \mathbf{Z}_p)$, где A_p — алгебра Стинрода всех стабильных когомологических операций. — *Прим. перев.*

рого на вложенную сферу S^{2n} есть тождественное отображение. Мы получим некоторые необходимые условия на числа n и k, при которых отображение f существует.

Теорема 3.2.10. *Для того чтобы существовала ретракция*

$$f\colon P_{n+k}(\mathbf{C})/P_{n-1}(\mathbf{C}) \to P_n(\mathbf{C})/P_{n-1}(\mathbf{C}) = S^{2n},$$

необходимо, чтобы коэффициенты при x^i *для* $i \leqslant k$ *в разложении в ряд функции* $\left(\frac{\log(1+x)}{x}\right)^n$ *были целыми числами.*

Доказательство. Пусть ξ — каноническое линейное расслоение над проективным пространством P_{n+k}. Положим $x = \xi - 1$; тогда $K(P_{n+k})$ — свободная абелева группа с образующими x^s, $0 \leqslant s \leqslant n+k$, а группу $K(P_{n+k}, P_{n-1})$ можно отождествить с подгруппой, порожденной элементами x^s при $n \leqslant s \leqslant n+k$. Рассмотрим в кольце $K(P_{n+k}) \otimes \mathbf{Q}$ элемент $y = \log(1+x)$. Так как $\xi = e^y$, то

$$e^{ry} = \xi^r = \Psi^r(e^y) = e^{\Psi^r(y)},$$

т. е. для элемента y имеет место формула $\Psi^r(y) = ry$. Таким образом, для $n \leqslant s \leqslant n+k$ группа $H^{2s}(P_{n+k}/P_{n-1}; \mathbf{Q})$ является одномерным пространством, порожденным элементом y^s. Далее, пусть u — образующая группы $\tilde{K}(S^{2n})$; рассмотрим элемент

$$f^*(u) = \sum_{i=n}^{n+k} a_i x^i.$$

Так как отображение f является ретракцией, то, очевидно, $a_n = 1$. Кроме того, так как $\Psi^k u = k^n u$, элемент $f^*(u)$ должен быть кратным элемента y^n, т. е.

$$\sum_{i=n}^{n+k} a_i x^i = \lambda y^n.$$

Ограничивая элемент $f^*(u)$ на вложенную сферу S^{2n}, мы видим, что $\lambda = 1$. Так как по определению

$$y^n = (\log(1+x))^n,$$

8 Зак. 719.

то тем самым доказано, что все коэффициенты при x^i, $n \leqslant i \leqslant n+k$, в разложении в ряд функции $(\log(1+x))^n$ являются *целыми числами*, что и утверждалось.

Замечание. Адамс и Грант-Уолкер показали, что условие теоремы 3.2.10 является не только необходимым, но и *достаточным* для существования ретракции (*Proc. Camb. Phil. Soc.*, **61** (1965), 81—103)[1]).

Рассмотрим теперь непрерывное отображение f: $S^{2m+2n-1} \to S^{2m}$. Поставим в соответствие каждому такому отображению f инвариант $e(f) \in \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ следующим образом.

Пусть X — конус отображения f, i: $S^{2m} \to X$ — естественное вложение и j: $X \to S^{2n+2m}$ — естественная проекция. Обозначим через u образующую группы $\tilde{K}^0(S^{2n+2m})$, через v — образующую группы $\tilde{K}^0(S^{2m})$, через x — такой элемент группы $\tilde{K}^0(X)$, что $i^*(x) = v$, и через $y \in \tilde{K}^0(X)$ — элемент $j^*(u)$. Тогда для любого целого числа k имеет место формула

$$\Psi^k(x) = k^m x + a_k y.$$

Так как для любых целых чисел k, l выполняется равенство $\Psi^k \Psi^l = \Psi^l \Psi^k$, мы получаем соотношение

$$k^n(k^m - 1)\, a_l = l^n(l^m - 1)\, a_k.$$

Таким образом, для данного элемента $x \in \tilde{K}^0(X)$ однозначно определено число

$$e(f) = \frac{a_k}{k^n(k^m - 1)} \in \mathbf{Q}.$$

Если для элементов x_1 и x_2 выполняется равенство $i^*(x_i) = v$, $i = 1, 2$, то из точной последовательности пары (X, S^{2m}) мы получаем, что $x_1 - x_2 = ky$ для некоторого целого числа k. Но легко заметить, что в этом случае числа $e(f)$, построенные соответственно для элементов x_1 и x_2, отличаются на целое число, так что дробная часть числа $e(f) \in \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ уже не зависит от выбора элемента x. Мы оставляем читателю в качестве элементарного упраж-

[1]) Русский перевод: сб. *Математика*, **11 : 4** (1967), 42—69. — *Прим. перев.*

нения доказать, что таким образом построен гомоморфизм групп e: $\pi_{2n+2m-1}(S^{2m}) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. Оказывается, что этот гомоморфизм является очень полезным инвариантом[1]).

§ 3.3. Группы $J(X)$

В этом параграфе мы предполагаем для простоты, что пространство X связно. Можно ввести понятие эквивалентности между векторными расслоениями, известное как послойная гомотопическая эквивалентность, которая представляет большой интерес в теории гомотопий. Пусть E, E' — два расслоения над пространством X; предположим, что в расслоениях E и E' заданы эрмитовы метрики. Расслоения E и E' называются *послойно гомотопически эквивалентными*, если существуют такие отображения f: $S(E) \to S(E')$, g: $S(E') \to S(E)$[2]), коммутирующие с проекцией на базисное пространство X, что отображения gf и fg послойно гомотопны тождественному отображению. Ясно, что это отношение эквивалентности определено на множестве классов эквивалентных векторных расслоений над X.

Послойная гомотопическая эквивалентность аддитивна, т. е. если расслоения E, E' послойно гомотопически эквивалентны соответственно расслоениям F, F', то расслоение $E \oplus E'$ послойно гомотопически эквивалентно расслоению $F \oplus F'$. Это следует из того факта, что пространство $S(E \oplus E')$ может быть представлено в виде послойного соединения двух расслоенных пространств $S(E)$, $S(E')$. В общем случае послойное соединение расслоенных пространств π: $Y \to X$, π': $Y' \to X$ определяется как пространство троек (y, t, y'), где $t \in I$, $\pi(y) = \pi'(y')$, на которое наложены отношения эквивалентности

$$(y, 0, y_1') \sim (y, 0, y_2'),$$
$$(y_1, 1, y') \sim (y_2, 1, y').$$

---

[1]) При помощи гомоморфизма e можно, например, дать простое доказательство известной теоремы Милнора — Кервера об образе стабильного J-гомоморфизма, см. сб. *Математика*, **11** : 4 (1967), 3—42. — *Прим. перев.*

[2]) Здесь через $S(E)$ обозначено расслоение со слоем сфера, ассоциированное при помощи эрмитовой метрики с векторным расслоением E. — *Прим. перев.*

Легко проверить, что так определенное послойное соединение также является расслоенным пространством с базой X.

Мы говорим, что два расслоения E, E' ***стабильно*** послойно гомотопически эквивалентны, если существуют такие тривиальные расслоения V, V', что расслоение $E \oplus V$ послойно гомотопически эквивалентно расслоению $E' \oplus V'$. Множество всех классов стабильно послойно гомотопически эквивалентных расслоений над X образует полугруппу, которую мы обозначим через $J(X)$. Так как каждое векторное расслоение E имеет дополнительное расслоение F, т. е. такое расслоение, что расслоение $E \oplus F$ тривиально, то полугруппа $J(X)$ является группой, и, следовательно, естественное отображение

$$\mathrm{Vect}(X) \to J(X)$$

продолжается до эпиморфизма

$$K(X) \to J(X),$$

который мы также обозначим через J.

Пусть E, E' — некоторые расслоения и π: $S(E) \to X$, π': $S(E') \to X$ — проекции соответствующих расслоений со слоем сфера. Комплексы Тома X^E, $X^{E'}$ расслоений E и E' являются в точности конусами соответственно отображений π, π'. Таким образом, мы видим, что если E и E' — послойно гомотопически эквивалентные расслоения, то комплексы Тома X^E и $X^{E'}$ имеют один и тот же гомотопический тип. Однако если E — тривиальное расслоение размерности n, то $X^E = S^{2n}(X^+)$. Таким образом, чтобы показать, что $J(E) \neq 0$, достаточно показать, что комплекс Тома X^E не является стабильно гомотопически эквивалентным надстройке над пространством X^+ [1]).

Теперь мы покажем, как при помощи операций Ψ^k, определенных в § 3.2, дать необходимые условия того, что $J(E) = 0$. По теореме об изоморфизме Тома (см. следствие 2.7.12) мы знаем, что кольцо $\tilde{K}(X^E)$ есть свобод-

[1]) Два пространства X и Y называются стабильно гомотопически эквивалентными, если существуют такие целые числа n и m, что пространства S^nX и S^mY гомотопически эквивалентны (где S^nX есть n-кратная надстройка над X). — ***Прим. перев.***

ный $K(X)$-модуль, порожденный элементом λ_E. Следовательно, для любого числа k существует единственный элемент $\rho^k(E) \in K(X)$, который определяется равенством

$$\Psi^k(\lambda_E) = \lambda_E \rho^k(E).$$

Из свойства мультипликативности фундаментального класса λ_E (см. § 3.2) и того факта, что операции Ψ^k — гомоморфизмы колец, вытекает формула

$$\rho^k(E \oplus E') = \rho^k(E) \cdot \rho^k(E').$$

Напомним теперь, что если $E = 1$, то $X^E = S^2(X)$, и из формулы

$$\Psi^k \cdot \beta = k\beta \cdot \Psi^k,$$

где β — изоморфизм периодичности Ботта, мы получаем равенство

$$\rho^k(1) = k.$$

Рассмотрим подкольцо $\mathbf{Q}_k = \mathbf{Z}[1/k]$ кольца рациональных чисел $\mathbf{Q}$, состоящее из дробей со знаменателями, равными степеням числа k. Тогда, определяя элемент $\sigma^k(E)$ формулой

$$\sigma^k(E) = k^{-n}\rho^k(E), \qquad n = \dim E,$$

мы получаем гомоморфизм

$$\sigma^k\colon K(X) \to G_k,$$

где G_k — *мультипликативная группа обратимых элементов* кольца $K(X) \otimes \mathbf{Q}_k$.

Предположим теперь, что расслоение E послойно гомотопически тривиально. В этом случае, как легко вытекает из предыдущего, существует такой элемент $u \in \tilde{K}(X^E)$, что $\Psi^k u = k^n u$. Элемент u можно представить в виде $\lambda_E a$, следовательно,

$$\Psi^k u = \Psi^k \lambda_E \cdot \Psi^k a = k^n \lambda_E a,$$

и поэтому

$$\sigma^k(E) \cdot \Psi^k(a) = a.$$

Более того, рассматривая ограничение элемента a на точку, мы видим, что аугментация элемента a равна единице. Таким образом, элементы a и $\Psi^k(a)$ оба принадлежат группе G_k. Следовательно, определен элемент

$$\sigma^k(E)=\frac{a}{\Psi^k(a)}\in G_k.$$

Так как элемент $\sigma^k(E)$ зависит только от класса стабильной эквивалентности расслоения E, то мы установили

Предложение 3.3.1. *Пусть $H_k\subset G_k$ — подгруппа, порожденная всеми элементами вида $a/\Psi^k(a)$, где a — некоторый обратимый элемент кольца $K(X)$. Тогда гомоморфизм*

$$\sigma^k\colon K(X)\to G_k$$

отображает ядро гомоморфизма J в подгруппу H_k и, следовательно, индуцирует гомоморфизм

$$J(X)\to G_k/H_k.$$

Чтобы применить предложение 3.3.1, необходимо уметь вычислять элементы $\sigma^k(E)$ или, что эквивалентно, элементы $\rho^k(E)$. Но элемент

$$\rho^k\in \mathrm{Op}(K)$$

является операцией. Аугментация его известна, поэтому остается определить его значение на комбинациях линейных расслоений. Учитывая мультипликативные свойства операции ρ^k, мы видим, что остается лишь определить элемент $\rho^k(L)$ для линейных расслоений L.

Лемма 3.3.2. *Для линейных расслоений L имеет место формула*

$$\rho^k(L)=\sum_{j=0}^{k-1}[L^j].$$

Доказательство. В предложениях 2.7.1 и 2.7.2 дано описание кольца $\widetilde{K}(X^L)$ как $K(X)$-модуля, порожденного в кольце $K(P(L\oplus 1))$ элементом $u=1-[L][H]$. Описание структуры кольца $K(P(L\oplus 1))$ дано в нашей основной теореме 2.2.1. Поэтому в кольце $K(P(L\oplus 1))$ имеем

$$\Psi^k(u)=1-[L^k][H^k]=(1-[L][H])\left\{\sum_{j=0}^{k-1}[L^j][H^j]\right\}=$$

$$=u\sum_{j=0}^{k-1}[L^j],\ \text{так как}\ (1-[L][H])(1-[H])=0.$$

Таким образом,

$$\Psi^k \lambda_L = \lambda_L \left\{ \sum_{j=0}^{k-1} [L^j] \right\},$$

откуда вытекает требуемая формула

$$\rho^k(L) = \sum_{j=0}^{k-1} [L^j].$$

В качестве примера рассмотрим случай, когда $X = P_{2n}(\mathbf{R})$ — вещественное проективное пространство размерности $2n$. Как показано в предложении 2.7.7, аддитивная группа кольца $\tilde{K}(X)$ представляет собой циклическую группу порядка 2^n с образующей $x = [L] - 1$, где L — каноническое линейное расслоение [1]). Мультипликативная структура кольца $\tilde{K}(X)$ полностью определяется соотношением $[L]^2 = 1$ (которое выполняется, поскольку расслоение L ассоциировано с главным расслоением со структурной группой $\mathbf{Z}_2$). Положим $k = 3$; тогда

$$\Psi^3(x) = [L^3] - 1 = x,$$

т. е. в этом случае группа H_3, определенная выше, состоит из одного элемента. Используя лемму 3.3.2, находим, что

$$\begin{aligned}
\sigma^3(mx) &= \rho^3(mx) = (\rho^3(x))^m = (\rho^3[L])^m \cdot 3^{-m} = \\
&= 3^{-m}\left(1 + [L] + [L]^2\right)^m = \left(\frac{1+x}{3}\right)^m = \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i-1} \frac{2^{i-1}}{3^i} \binom{m}{i} x \ (\text{так как } x^2 = -2x) = \\
&= 1 + \frac{1}{2}\left(1 - \left(1 - \frac{2}{3}\right)^m\right) x = \\
&= 1 + 3^{-m}\left(\frac{3^m - 1}{2}\right) x.
\end{aligned}$$

Таким образом, если $J(mx) = 0$, то число $(3^m - 1)$ делится на 2^{n+1}. Это возможно тогда и только тогда, когда m делится на 2^{n-1}. Следовательно, ядро гомоморфизма

$$J\colon\ \tilde{K}(P_{2n}(\mathbf{R})) \to J(P_{2n}(\mathbf{R}))$$

---

[1]) Расслоение L является комплексификацией канонического вещественного расслоения над $P_{2n}(\mathbf{R})$. — *Прим. перев.*

является группой самое большее порядка 2. Этот результат лежит в основе решения проблемы векторных полей на сферах и может быть улучшен при помощи вещественной K-теории [1]).

Задача, рассмотренная в теореме 3.2.10, фактически является частным случаем более общей проблемы, которую мы сейчас рассматриваем. Действительно, легко видеть, что пространство $P_{n+k}(\mathbf{C})/P_{n-1}(\mathbf{C})$ является пространством Тома расслоения nH над пространством $P_k(\mathbf{C})$ [2]). Утверждение теоремы 3.2.10 можно, следовательно, интерпретировать как утверждение о порядке элемента $J(H) \in J(P_k(\mathbf{C}))$. Для доказательства теоремы 3.2.10 по существу используется тот же метод, что и в этом параграфе. Но здесь мы рассматриваем не одно конкретное пространство, а целый класс, а именно класс пространств Тома, и даем описание метода, пригодного для всех пространств из этого класса.

Для более детального ознакомления с группой $J(X)$ читатель может обратиться к серии работ Дж. Ф. Адамса (Adams J. F., On the groups $J(X)$, *Topology*, **2** (1963), 181—195; **3** (1965), 137—171, 193—222; **5** (1966), 21—71 [3])).

---

[1]) Окончательное решение проблемы векторных полей на сферах дано Дж. Ф. Адамсом, см. сб. *Математика*, **7**:**6** (1963), 48—79. Доказательство основной теоремы 1.2 в этой работе состоит по существу в доказательстве изоморфизма

$$J\colon \tilde{K}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}P^n) \xrightarrow{\cong} J(\mathbf{R}P^n).$$

— *Прим. перев.*

[2]) Доказательство этого утверждения можно найти в статье Атья М. Ф., Пространства Тома, сб. *Математика*, **10**:**5** (1966), 48—69. — *Прим. перев.*

[3]) Эта серия работ Дж. Ф. Адамса переведена в сб. *Математика*, **10**:**5** (1966), 70—84; **11**:**4** (1967), 42—69. — *Прим. перев.*

ДОПОЛНЕНИЕ

ПРОСТРАНСТВО ОПЕРАТОРОВ ФРЕДГОЛЬМА

В этом дополнении мы дадим интерпретацию группы $K(X)$ при помощи гильбертова пространства. [Эти результаты были получены независимо Енихом (Jänich K., Bonn dissertation, 1964).] Такой подход представляет интерес в связи с теорией индекса эллиптических операторов.

Пусть H — сепарабельное комплексное гильбертово пространство; обозначим через $\mathfrak{A}(H)$ алгебру всех ограниченных операторов на H. В алгебре $\mathfrak{A}$ мы будем рассматривать топологию, индуцированную нормой оператора. Хорошо известно, что в этом случае $\mathfrak{A}$ является банаховой алгеброй. В частности, группа $\mathfrak{A}^*$ обратимых элементов алгебры $\mathfrak{A}$ образует открытое множество. Напомним также, что по теореме о замкнутом графике любой оператор $T \in \mathfrak{A}$, являющийся алгебраическим изоморфизмом $H \to H$, является также топологическим изоморфизмом, т. е. оператор T^{-1} принадлежит алгебре $\mathfrak{A}$, и поэтому $T \in \mathfrak{A}^*$.

Определение. Оператор $T \in \mathfrak{A}(H)$ называется *оператором Фредгольма*, если $\operatorname{Ker} T$ и $\operatorname{Coker} T$ — конечномерные пространства. Целое число $\dim \operatorname{Ker} T - \dim \operatorname{Coker} T$ называется *индексом* оператора T.

Заметим сначала, что для оператора Фредгольма T образ $T(H)$ замкнут. Действительно, так как пространство $T(H)$ имеет конечную коразмерность в пространстве H, мы можем найти конечномерное алгебраическое дополнение P. Таким образом, отображение $T \oplus j\colon H \oplus P \to H$ (где $j\colon P \to H$ — вложение) является эпиморфизмом, и поэтому, согласно теореме о замкнутом графике, образ любого замкнутого множества замкнут. В частности, пространство $T(H) = T \oplus j(H \oplus 0)$ замкнуто.

Обозначим через $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{A}$ подпространство всех операторов Фредгольма. Если T, S — два оператора Фредгольма, то легко проверить следующие неравенства:

$$\dim \operatorname{Ker} TS \leqslant \dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Ker} S,$$
$$\dim \operatorname{Coker} TS \leqslant \dim \operatorname{Coker} T + \dim \operatorname{Coker} S,$$

и поэтому TS — также оператор Фредгольма. Таким образом, $\mathfrak{F}$ является топологическим пространством с ассоциативным умножением $\mathfrak{F} \times \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}$. Следовательно, для любого пространства X множество $[X, \mathfrak{F}]$ гомотопических классов отображений $X \to \mathfrak{F}$ является полугруппой. Основная цель этого приложения — доказать следующую теорему:

Теорема 1. *Для любого компактного пространства X имеет место естественный изоморфизм*

$$\text{index}: [X, \mathfrak{F}] \to K(X).$$

Замечание. Если X — точка, то из этой теоремы вытекает, что связные компоненты пространства $\mathfrak{F}$ определяются целыми числами. Эти числа являются индексами операторов; этим и объясняется использование обозначения index в формулировке теоремы.

Теорема 1 утверждает, что пространство $\mathfrak{F}$ является классифицирующим (или представляющим) пространством для K-теории. Другое классифицирующее пространство, тесно связанное с пространством $\mathfrak{F}$, может быть получено следующим образом. Обозначим через $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{A}$ подпространство всех вполне непрерывных операторов. Пространство $\mathfrak{K}$ представляет собой, очевидно, замкнутый двусторонний идеал в алгебре $\mathfrak{A}$, и, следовательно, факторалгебра $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}/\mathfrak{K}$ является снова банаховой алгеброй. Обозначим через $\mathfrak{B}^*$ группу обратимых элементов алгебры $\mathfrak{B}$. Группа $\mathfrak{B}^*$ является топологической группой, и поэтому для любого пространства X множество $[X, \mathfrak{B}^*]$ представляет собой группу. Наша вторая теорема утверждает следующее.

Теорема 2. *Топологическая группа $\mathfrak{B}^*$ является классифицирующим пространством для K-теории, т. е. имеет место естественный изоморфизм групп*

$$[X, \mathfrak{B}^*] \cong K(X).$$

Доказательство мы начнем со следующей леммы, которая является по существу обобщением предложения 1.3.2 на бесконечномерный случай.

Лемма 3. *Если T — оператор Фредгольма и V — такое замкнутое подпространство в H конечной коразмерности, что $V \cap \operatorname{Ker} T = 0$, то существует такая* *окрестность U оператора T в алгебре $\mathfrak{A}$, что для всех операторов $S \in U$ имеем*

(i) $V \cap \operatorname{Ker} S = 0$;

(ii) *пространство* $\bigcup\limits_{S \in U} H/S(V)$, *топологизированное как факторпространство пространства* $U \times H$, *является тривиальным векторным расслоением над* U.

Доказательство. Пусть $W = T(V)^{\perp}$ — ортогональное дополнение пространства $T(V)$ в H. Так как $T \in \mathfrak{F}$ и $\dim(H/V)$ конечна, то и $\dim W$ конечна. Определим теперь для произвольного оператора $S \in \mathfrak{A}$ отображение

$$\varphi_S\colon V \oplus W \to H$$

формулой $\varphi_S(V \oplus W) = S(V) + W$. Тогда соответствие $S \to \varphi_S$ определяет непрерывное линейное отображение

$$\varphi\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{L}(V \oplus W, H),$$

где через $\mathfrak{L}$ обозначено пространство всех непрерывных линейных отображений с топологией, индуцированной нормой. Далее, отображение φ_T, очевидно, является изоморфизмом, а множество всех изоморфизмов в пространстве $\mathfrak{L}$ открыто (подобно группе обратимых элементов в алгебре $\mathfrak{A}$). Следовательно, существует такая окрестность U оператора T в алгебре $\mathfrak{A}$, что отображение φ_S является изоморфизмом для всех операторов $S \in U$ [1]). Ясно, что отсюда вытекают утверждения (i) и (ii).

Следствие 4. *Пространство операторов Фредгольма $\mathfrak{F}$ открыто в алгебре $\mathfrak{A}$.*

Доказательство. Достаточно применить лемму 3 к пространству $V = (\operatorname{Ker} T)^{\perp}$, где T — оператор Фредгольма.

Предложение 5. *Пусть $T\colon X \to \mathfrak{F}$ — непрерывное отображение компактного пространства X. Тогда существует такое замкнутое подпространство $V \subset H$ конечной коразмерности, что*

(i) $V \cap \operatorname{Ker} T_x = 0$ *для всех точек* $x \in X$;

(ii) *пространство* $\bigcup\limits_{x \in X} H/T_x(V)$, *топологизированное*

---

[1]) Заметим, что все операторы $S \in U$ фредгольмовы, т. е. $U \subset \mathfrak{F}$. — *Прим. перев.*

как факторпространство пространства $X \times H$, является векторным расслоением над X.

Доказательство. Для каждой точки $x \in X$ рассмотрим пространство $V_x = (\operatorname{Ker} T_x)^{\perp}$ и обозначим через U_x прообраз при отображении T открытого множества, определенного в лемме 3. Таким образом, мы получаем покрытие пространства X открытыми множествами U_x. Пусть $K_i = U_{x_i}$ — конечное подпокрытие из этого семейства открытых множеств. Тогда для пространства $V = \bigcap_i V_{x_i} \in H$ выполняется утверждение (i). Чтобы доказать (ii), применим лемму 3 к каждому оператору T_x и получим, что семейство векторных пространств $\bigcup_y H/T_y(V)$ локально тривиально в окрестности точки x и, следовательно, является векторным расслоением.

Для краткости мы будем обозначать расслоение $\bigcup_{x \in X} H/T_x(V)$, построенное в предложении 5, через $H/T(V)$. Как и в конечномерном случае, мы можем расщепить естественное отображение $p\colon H \to H/T(V)$ [1]; точнее мы можем найти непрерывное отображение

$$\varphi\colon H/T(V) \to X \times H,$$

коммутирующее с проекцией на X и такое, что

$$p\varphi \text{ — тождественное отображение.}$$

Один из способов построить отображение φ заключается в том, чтобы, используя метрику в пространстве H, отобразить пространство $H/T(V)$ на ортогональное дополнение $T(V)^{\perp}$ к $T(V)$. Этот способ неудобен, так как в этом случае необходимо проверить, что $T(V)^{\perp}$ — векторное расслоение. Вместо этого заметим, что по определению отображение p локально расщепляется, и поэтому мы можем выбрать расщепления φ_i в окрестности U_i, где $\{U_i\}$ — некоторое конечное открытое покрытие пространства X. Тогда отображение $\varphi_i - \varphi_j = \theta_{ij}$ является по суще-

[1] В данном случае через H обозначено пространство $X \times H$. — *Прим. перев.*

ству отображением $H/T(V)|_{U_i \cap U_j} \to U_i \cap U_j \times H$. Если ρ_i — разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{U_j\}$, то мы рассмотрим, как обычно, отображения

$$\theta_i = \sum \rho_j \theta_{ij},$$

которые определены уже над всей окрестностью U_i. Таким образом, отображение $\varphi = \varphi_i - \theta_i$ не зависит от i и определяет требуемое расщепление [1]).

Теперь мы можем определить индекс отображения T для любого непрерывного отображения $T\colon X \to \mathfrak{F}$ (X компактно). Выберем пространство V, удовлетворяющее условиям предложения 5, и положим по определению

$$\operatorname{index} T = [H/V] - [H/T(V)] \in K(X),$$

где через H/V обозначено тривиальное расслоение $X \times H/V$. Мы должны показать, что это определение не зависит от выбора пространства V. Если W — другое такое пространство, то мы можем рассмотреть их пересечение $V \cap W$, поэтому, очевидно, достаточно предположить, что $W \subset V$. Но в этом случае мы имеем точные последовательности векторных расслоений

$$0 \to V/W \to H/W \to H/V \to 0,$$
$$0 \to V/W \to H/T(W) \to H/T(V) \to 0.$$

Следовательно, имеют место равенства

$$[H/V] - [H/W] = [V/W] = [H/T(V)] - [H/T(W)],$$

что и утверждалось.

Очевидно, что наше определение индекса отображения T функториально, т. е. если $f\colon Y \to X$ — некоторое непрерывное отображение компактных пространств, то

$$\operatorname{index} Tf = f^* \operatorname{index} T.$$

Это следует из того факта, что если подпространство V

---

[1]) То есть расщепление определяется такой функцией φ, ограничение которой на окрестность U_i совпадает с функцией $\varphi_i - \theta_i = \sum_j \rho_j \varphi_j$. — *Прим. перев.*

удовлетворяет условиям предложения 5 для отображения T, то оно удовлетворяет этим условиям и для отображения Tf.

Если $T\colon X\times I\to\mathfrak{F}$ — некоторая гомотопия отображений T_0 и T_1, то ограничениями индекса отображения $T\in K(X\times I)$ являются индексы отображений $T_i\in K(X\times\{i\})$, $i=0,1$. Но мы знаем, что отображение

$$K(X\times I)\to K(X\times\{i\})\cong K(X)$$

— изоморфизм, следовательно, index $T_0=$ index T_1. Таким образом, отображение index: $[X,\mathfrak{F}]\to K(X)$ определено корректно.

Далее мы должны показать, что отображение index является гомоморфизмом. Пусть $S\colon X\to\mathfrak{F}$, $T\colon X\to\mathfrak{F}$ — два непрерывных отображения, и пусть V, $W\subset H$ — подпространства, выбранные в соответствии с предложением 5 соответственно для отображений S, T. Заменяя V подпространством $V\cap S^{-1}(W)$, можно предположить, что $S(V)\subset W$. Тогда подпространство V удовлетворяет условиям предложения 5 для отображения TS, и мы имеем точную последовательность векторных расслоений над X:

$$0\to W/SV\xrightarrow{T}H/TSV\to H/TW\to 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\operatorname{index}TS&=[H/V]-[H/TSV]=\\&=[H/V]-[W/SV]-[H/TW]=\\&=[H/V]-[H/SV]+[H/W]-[H/TW]=\\&=\operatorname{index}S+\operatorname{index}T,\end{aligned}$$

что и требовалось.

Итак, мы доказали, что отображение index: $[X,\mathfrak{F}]\to K(X)$ является гомоморфизмом. Следующим шагом в доказательстве теоремы 1 является

Предложение 6. *Имеет место точная последовательность полугрупп*

$$[X,\mathfrak{A}^*]\to[X,\mathfrak{F}]\xrightarrow{\text{index}}K(X)\to 0.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала отображение $T\colon X\to\mathfrak{F}$ индекса нуль. Это означает, что

$$[H/V]-[H/TV]=0\quad\text{в группе}\quad K(X).$$

Следовательно, добавляя тривиальное расслоение P к обоим слагаемым, мы получаем изоморфизм расслоений

$$H/V \oplus P \cong H/TV \oplus P,$$

или, что эквивалентно, заменяя V таким замкнутым подпространством W, что $\dim(V/W) = \dim P$, мы получаем изоморфизм расслоений

$$H/W \cong H/TW.$$

Если мы теперь расщепим отображение $H \to H/TW$ описанным ранее способом, то получим непрерывное отображение

$$\varphi\colon X \times H/W \to X \times H,$$

коммутирующее с проекцией на X и линейное на слоях. Если

$$\Phi\colon X \to \mathfrak{L}(H/W, H)$$

— отображение, ассоциированное с φ, то из построения отображения φ следует, что соответствие

$$x \to \Phi_x + T_x$$

определяет непрерывное отображение

$$X \to \mathfrak{A}^*.$$

Но для $0 \leqslant t \leqslant 1$ отображение $T + t\Phi$ является гомотопией отображений $X \to \mathfrak{F}$, связывающей T и $T + \Phi$. Это доказывает точность в середине последовательности.

Остается показать, что гомоморфизм index является эпиморфизмом. Пусть E — векторное расслоение над компактным пространством X, и пусть F — такое расслоение, что расслоение $E \oplus F$ изоморфно тривиальному расслоению $X \times V$. Обозначим через $\pi_x \in \operatorname{End} V$ проекцию пространства V на подпространство, соответствующее E_x. Пусть $T_k \in \mathfrak{F}$ — стандартный оператор индекса k, определенный относительно некоторого ортонормального базиса $\{e_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$, формулой

$$T_k(e_i) = \begin{cases} e_{i-k}, & \text{если } i - k \geqslant 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Определим отображение

$$S\colon X \to \mathfrak{F}(H \otimes V) \cong \mathfrak{F}(H)$$

формулой $S_x = T_{-1} \otimes \pi_x + T_0 \otimes (1 - \pi_x)$. Имеем $\operatorname{Ker} S_x = 0$ для всех точек x. Более того, легко заметить, что существует изоморфизм $H \otimes V / S(H \otimes V) \cong E$. Следовательно,

$$\operatorname{index} S = -[E].$$

Постоянное отображение $T_k \colon X \to \mathfrak{F}$, определенное формулой $T_k(x) = T_k$, имеет, очевидно, индекс k, и поэтому

$$\operatorname{index} T_k S = k - [E].$$

Но так как каждый элемент группы $K(X)$ имеет вид $k - [E]$, то это показывает, что гомоморфизм index является эпиморфизмом. Тем самым предложение 6 доказано.

Теорема 1 вытекает теперь из предложения 6 и следующего утверждения:

Предложение 7. *Для любого пространства X группа $[X, \mathfrak{A}^*]$ состоит из одного элемента.*

Это утверждение доказано Кюйпером, и мы не будем воспроизводить здесь его доказательство[1]). Фактически Кюйпер в своей работе показывает, что группа $\mathfrak{A}^*$ как топологическое пространство стягиваема.

Вернемся теперь к доказательству теоремы 2. Напомним сначала, что имеет место включение

$$1 + \mathfrak{K} \subset \mathfrak{F}.$$

Этот факт доказывается довольно просто стандартными методами теории вполне непрерывных операторов.

Предложение 8. *Пусть $\pi \colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B} = \mathfrak{A}/\mathfrak{K}$ — естественное отображение. Тогда*

$$\mathfrak{F} = \pi^{-1}(\mathfrak{B}^*).$$

Доказательство. Рассмотрим оператор Фредгольма T и обозначим через P и Q ортогональные проекторы соответственно на пространства $\operatorname{Ker} T$, $\operatorname{Ker} T^*$. Тогда операторы $T^*T + P$ и $TT^* + Q$ оба принадлежат группе $\mathfrak{A}^*$, и поэтому их образы при отображении π содержатся в группе $\mathfrak{B}^*$. Так как P, $Q \in \mathfrak{K}$, то $\pi(T^*) \cdot \pi(T) \in \mathfrak{B}^*$ и $\pi(T) \cdot \pi(T^*) \in \mathfrak{B}^*$. Следовательно, и $\pi(T) \in \mathfrak{B}^*$.

Докажем теперь включение $\pi^{-1}(\mathfrak{B}^*) \subset \mathfrak{F}$. Пусть $T \in \pi^{-1}(\mathfrak{B}^*)$, т. е. существует такой оператор $S \in \mathfrak{A}$, что

[1]) См. стр. 241—260 настоящей книги. — *Прим. перев.*

ST и TS принадлежат $1 + \mathfrak{K} \subset \mathfrak{F}$. Но так как $\dim \operatorname{Ker} T \leqslant \leqslant \dim \operatorname{Ker} ST$ и

$$\dim \operatorname{Coker} T \leqslant \dim \operatorname{Coker} TS,$$

то $T \in \mathfrak{F}$.

Теорема 2 вытекает теперь из теоремы 1 и следующей общей леммы (которую следует применять, положив $L = \mathfrak{A}$, $M = \mathfrak{B}$, $U = \mathfrak{B}^*$).

Лемма 9. *Пусть π: $L \to M$ — такое непрерывное линейное отображение банаховых пространств, что пространство $\pi(L)$ плотно в M, и пусть U — некоторое открытое множество в M. Тогда для любого компактного пространства X естественное отображение*

$$[X, \pi^{-1}(U)] \to [X, U]$$

является взаимно однозначным.

Доказательство. Сначала мы покажем, что если отображение

$$\pi\colon\ L \to M$$

и пространства L и M удовлетворяют условиям леммы, то для любого компактного пространства X индуцированное отображение

$$\pi^X\colon\ L^X \to M^X$$

и пространства L^X и M^X также удовлетворяют условиям этой леммы. Так как пространства L^X и M^X, очевидно, банаховы, то остается лишь доказать, что пространство $\pi^X(L^X)$ плотно в M^X. Итак, пусть f: $X \to M$ — некоторое непрерывное отображение. Мы должны построить такое непрерывное отображение g: $X \to L$, чтобы для всех точек $x \in X$ выполнялось неравенство $\|\pi g(x) - f(x)\| < \varepsilon$. Выберем такие точки $a_1, \ldots, a_n$ в $f(X)$, что их $(\varepsilon/3)$-окрестности U_i покрывают все пространство $f(X)$. Далее выберем такие точки b_i, для которых выполняются неравенства $\|\pi(b_i) - a_i\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Пусть $u_i(x)$ — разбиение единицы на пространстве X, подчиненное покрытию $\{f^{-1}U_i\}$. Определим отображение g: $X \to L$ формулой

$$g(x) = \sum u_i(x)\, b_i.$$

Это и есть требуемое отображение.

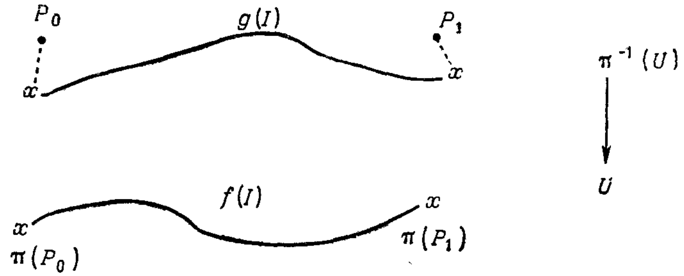
Следовательно, заменив π отображением π^X, а множество U множеством U^X (которое открыто в пространстве M^X), мы видим, что достаточно доказать лемму для случая, когда X — точка, т. е. доказать, что естественное отображение

$$\pi^{-1}(U) \to U$$

индуцирует взаимно однозначное соответствие компонент линейной связности. Ясно, что это отображение индуцирует эпиморфизм компонент линейной связности: если $P \in U$, то существует такая точка $Q \in \pi(L) \cap U$, что сегмент PQ полностью содержится в множестве U. Чтобы убедиться в том, что это отображение индуцирует мономорфизм, рассмотрим две точки P_0, $P_1 \in \pi^{-1}(U)$ и предположим, что $f\colon I \to U$ — некоторый путь, соединяющий точку $f(0) = \pi(P_0)$ с точкой $f(1) = \pi(P_1)$. По доказанному вначале существует такой путь $g\colon I \to \pi^{-1}(U)$, что для всех $t \in I$ выполняется неравенство

$$\| \pi g(t) - f(t) \| < \varepsilon.$$

Если ε взять достаточно малым, то сегменты, соединяющие точки $\pi g(i)$ с точками $f(i)$ для $i = 0, 1$, будут полностью лежать в множестве U. Отсюда следует, что сегмент, соединяющий $g(i)$ с P_i для $i = 0, 1$, полностью лежит в множестве $\pi^{-1}(U)$. Таким образом, точку P_0 можно соединить с P_1 путем, лежащим в множестве $\pi^{-1}(U)$.



Тем самым лемма 9 доказана.

ПРИЛОЖЕНИЕ

I. ЭКВИВАРИАНТНАЯ K-ТЕОРИЯ[1])

М. Атья, Г. Сегал

ЛЕКЦИЯ 1. ВЕКТОРНЫЕ G-РАССЛОЕНИЯ

В настоящей лекции мы введем понятие векторного G-расслоения и определим кольцо $K_G(X)$. В дальнейшем G будет обозначать некоторую фиксированную топологическую группу; в лекции 2 и далее мы будем понимать под G компактную группу Ли.

1.1. Определения

Мы будем называть *G-пространством* топологическое пространство X вместе с непрерывным отображением $G \times X \to X$, удовлетворяющим закону ассоциативности $g_1(g_2x) = (g_1g_2)x$ для любых g_1, $g_2 \in G$ и $x \in X$.

Мы будем называть G-отображением между двумя G-пространствами непрерывное отображение, коммутирующее с действием группы G. Более общо, если X является G-пространством, а Y является H-пространством и θ: $H \to G$ — непрерывный гомоморфизм, то мы будем называть f: $Y \to X$ *θ-эквивариантным отображением*, когда оно непрерывно и когда $f(hy) = \theta(h) f(y)$ для всех $h \in H$ и $y \in Y$.

Под *векторным G-расслоением* над G-пространством X мы будем понимать векторное расслоение p: $E \to X$ вместе со структурой G-пространства на E, где

(i) p является G-отображением;

(ii) если $g \in G$, то g: $p^{-1}(x) \to p^{-1}(gx)$ является линейным отображением.

Назовем *G-гомоморфизмом* $E \to F$ между векторными G-расслоениями E и F отображение, которое является одновременно гомоморфизмом векторных расслоений и G-отображением.

---

[1]) Atiyah M. F., Segal G. B., Equivariant K-theory Lecture notes, Oxford, 1965. [Лекции 1, 4—6 принадлежат М. Атья, остальные — Г. Сегалу.] Настоящие лекции записаны Д. Эпштейном и Р. Шварценбергером.

Если X — точка, то векторное G-расслоение над X является представлением группы G.

Если $G = 1$, то векторные G-расслоения являются обычными векторными расслоениями.

Если X — некоторое G-пространство, то существует факторотображение q: $X \to X/G$. Векторное расслоение F над X/G индуцирует расслоение q^*F над X. Из универсального свойства индуцированного расслоения следует, что на q^*F существует единственная структура векторного G-расслоения, для которой следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
q^*F \arrow[rr, "g"] \arrow[dr] \arrow[dd] & & q^*F \arrow[dl] \arrow[dd] \\
& F \arrow[dd] & \\
X \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "q"'] & & X \arrow[dl, "q"] \\
& X/G &
\end{tikzcd}$$

Ясно, что q^* является функтором из категории векторных расслоений и гомоморфизмов над X/G в категорию векторных G-расслоений и G-гомоморфизмов над X.

Предложение 1.1.1. *Если X — главное G-расслоение*[1]*, то функтор q^* является эквивалентностью.*

Доказательство. Мы должны найти такой функтор r, что q^*r и rq^* естественно изоморфны тождественному функтору. Пусть задано векторное G-расслоение E над X.

Тогда существует естественное отображение $E/G \to X/G$; докажем, что оно является векторным расслоением над X/G, и возьмем это расслоение за $r(E)$. Требуется только доказать, что отображение $E/G \to X/G$ локально тривиально. Пусть K — поле скаляров, n — размерность слоя в расслоении E. Пусть U — окрестность некоторой заданной точки в пространстве X/G, такая, что отображение $X \to X/G$ тривиально над U. Достаточно показать, что ограничение отображения $E/G \to X/G$ на U локально тривиально. Это сводит задачу к случаю, когда $X = G \times X_1$ и $X \to X/G = X_1$ является проекцией произведения. Пусть

[1] То есть группа G действует на пространстве X свободно.— *Прим. перев.*

$x \in X_1$. Тогда существуют окрестность V единицы $e \in G$ и окрестность W точки x, такие, что отображение p: $E \to G \times X_1$ тривиально над $V \times W$. Тогда мы имеем изоморфизм векторных расслоений над $e \times W$:

$$e \times W \times K^n \to p^{-1}(e \times W),$$

который может быть продолжен единственным образом до G-изоморфизма

$$G \times W \times K^n \to p^{-1}(G \times X_1)$$

векторных G-расслоений над $G \times W$. Это индуцирует изоморфизм между расслоением $W \times K^n \to W$ и ограничением на W расслоения $E/G \to X_1$. Таким образом, $E/G \to X/G$ является векторным расслоением $r(E)$ над X/G.

Коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E & \to & E/G \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \to & X/G \end{array}$$

показывает, что $E \to X$ является индуцированным расслоением и что q^*r естественно изоморфно тождественному функтору. (Мы отмечали выше, что существует единственная G-структура на индуцированном расслоении.)

Для того чтобы показать, что rq^* естественно изоморфно тождественному функтору, заметим, что $q^*F = X \times_{X/G} F \subset X \times F$. Группа G действует на первом сомножителе. Отображение $q^*F \to F$ индуцирует изоморфизм $q^*F/G \to F$ векторных расслоений над X/G.

Следствие 1.1.2. *Категория векторных G-расслоений над G эквивалентна категории векторных пространств.*

В дальнейшем мы будем использовать такое обобщение следствия 1.1.2. Пусть H — подгруппа группы G, а Y — некоторое H-пространство. Обозначим через $G \times_H Y$ пространство, которое получается из $G \times Y$ отождествлениями по следующему отношению эквивалентности:

$$(g_1, y_1) \sim (g_2, y_2) \Longleftrightarrow g_2 = g_1 h^{-1}, \quad y_2 = hy_1$$

для некоторого $h \in H$.

Тогда на $G \times_H Y$ можно ввести структуру G-пространства, задавая действие группы G формулой

$$g(g_1, y) = (gg_1, y)$$

и замечая, что $g(g_1h^{-1}, hy) = (gg_1h^{-1}, hy) \sim (gg_1, y) = g(g_1, y)$.

Предложение 1.1.3. *Категория векторных H-расслоений над Y эквивалентна категории векторных G-расслоений над пространством $G \times_H Y$.*

Доказательство. Рассмотрим подпространство $H \times_H Y$ пространства $G \times_H Y$. Ясно, что это пространство гомеоморфно Y и устойчиво относительно действия подгруппы H группы G. Поэтому каждое векторное G-расслоение над $G \times_H Y$ при ограничении на $H \times_H Y = Y$ определяет векторное H-расслоение.

Теперь пусть F является векторным H-расслоением над Y; рассмотрим отображение $G \times_H F \to G \times_H Y$. Здесь $G \times_H F$ есть G-пространство с действием $g \in G$, заданным формулой $g(g_1, f) = (gg_1, f)$, а также является векторным расслоением. Ограничение расслоения $G \times_H F$ на $H \times_H Y$ совпадает, очевидно, с $H \times_H F = F$. С другой стороны, если E — векторное G-расслоение над $G \times_H Y$, то существует отображение

$$G \times_H (E/H \times_H Y) \to E,$$

определенное формулой $(g, e) \to ge$, которое является G-изоморфизмом.

Следствие 1.1.4. *Категория векторных G-расслоений над G/H эквивалентна категории векторных H-пространств.*

1.2. Тривиальные G-пространства

Мы назовем X *тривиальным* G-пространством, если $gx = x$ для всех $g \in G$, $x \in X$. Если X — тривиальное G-пространство, а V — векторное G-пространство, то через $\underline{V}$ обозначим векторное G-расслоение $X \times V \to X$.

Теперь пусть G — компактная хаусдорфова группа, и пусть E — векторное G-пространство, другими словами, E является пространством представления группы G. Мы ограничимся *комплексными* представлениями. Вводя меру Хаара на группе G, легко построить G-инвариантное эрмитово скалярное произведение на E. Так как E вполне приводимо, мы можем написать

$$E = \bigoplus_i n_i E_i,$$

где E_i — неприводимые векторные G-пространства, а через $n_i E_i$ обозначена прямая сумма n_i экземпляров E_i. Числа n_i однозначно определяются пространством E.

Лемма Шура утверждает, что для неприводимого G-модуля E все его G-эндоморфизмы получаются из тождественного умножением на скаляр, т. е. $\operatorname{End}_G E = \mathbf{C}$.

Пусть $\{E_\pi\}_{\pi \in S}$ — множество всех неприводимых попарно не эквивалентных представлений группы G. Если E — некоторое векторное G-пространство, то будем писать $\pi E = \operatorname{Hom}_G(E_\pi, E)$. Существует G-отображение

$$\bigoplus_\pi (E_\pi \otimes \pi E) \to E,$$

которое в силу предыдущих результатов является G-изоморфизмом. Эти рассуждения соответствуют изучению векторных G-расслоений над точкой. Докажем общее для всех тривиальных G-пространств

Предложение 1.2.1. *Пусть G — компактная хаусдорфова группа, X — тривиальное G-пространство. Пусть E и F — комплексные векторные G-расслоения над X. Тогда*

(i) *подпространство E^G пространства E, состоящее из точек, инвариантных относительно G, является векторным подрасслоением в E;*

(ii) $\operatorname{Hom}_G(E, F)$ *есть векторное подрасслоение расслоения* $\operatorname{Hom}(E, F)$,

(iii) *пусть* $\pi E = \operatorname{Hom}_G(\underline{E}_\pi, E)$. *Из* (ii) *следует, что это векторное расслоение. Естественное отображение* $\bigoplus_\pi (\underline{E}_\pi \otimes \pi E) \to E$ *является изоморфизмом векторных G-расслоений.*

Доказательство. (ii) тривиально следует из (i). (iii) имеет смысл в силу (ii) и доказывается проверкой для каждой точки $x \in X$. Для того чтобы доказать (i), используем меру Хаара на G. Если V—векторное G-пространство, то определим *усредняющее отображение* μ: $V \to V$ формулой

$$\mu(v) = \int_G gv.$$

Очевидно, что μ линейно. Кроме того, это проектор, т. е. $\mu^2 = \mu$, и его образом является V^G. Аналогично существует непрерывный проектор μ: $E \to E$ с образом E^G. Но образ проектора всегда является векторным подрасслоением ([2], лемма 1.4).

Предложения 1.1.1 и 1.2.1 описывают два крайних случая: когда X — главное G-расслоение и когда X — тривиальное G-пространство. В общем случае описание векторных G-расслоений значительно сложнее.

1.3. Кольцо Гротендика

Теперь мы определим кольцо $K_G(X)$. Определение имеет смысл для произвольного G-пространства X, но оказывается неудобным, когда X не компактно. Поэтому мы будем далее предполагать, что X — *компактное* G-пространство. Определение кольца $K_G(X)$ для некомпактного X будет дано в п. 2.9.

Пусть X — компактное G-пространство. Классы эквивалентных векторных G-расслоений образуют коммутативную полугруппу $E_G(X)$ относительно прямой суммы (логических трудностей можно избежать при помощи одного из известных методов, см., например, [3]). Определим $K_G(X)$ как группу, которая обладает следующим универсальным свойством.

Существует такой гомоморфизм полугруппы θ: $E_G(X) \to K_G(X)$, что для любой группы H и любого гомоморфизма φ: $E_G(X) \to H$ имеется единственный гомоморфизм ψ: $K_G(X) \to H$, такой, что $\psi\theta = \varphi$.

Группа $K_G(X)$ является факторгруппой свободной абелевой группы, порожденной $E_G(X)$, по подгруппе, порожденной элементами вида $E \oplus F - E - F$.

Тензорное произведение двух векторных G-расслоений станет векторным G-расслоением, если мы допустим, что на произведении группа $K_G(X)$ действует диагональным образом. Тем самым вводится коммутативное билинейное произведение на свободной абелевой полугруппе над $E_G(X)$

и индуцируется коммутативное билинейное произведение в группе $K_G(X)$. Таким образом, $K_G(X)$ является коммутативным кольцом с единицей, представленной векторным G-расслоением $X \times K \to X$, где G действует тривиально на поле скаляров K.

Если $G=1$, мы получаем известное кольцо $K(X)$. Если X — точка, мы получаем кольцо $R(G)$ виртуальных представлений. Напомним, что если группа G компактна, то $R(G)$ — свободная абелева группа, порожденная неприводимыми представлениями.

Постоянное G-отображение пространства X в точку индуцирует гомоморфизм колец $R(G) \to K_G(X)$, который отображает векторное G-пространство V в векторное G-расслоение $X \times V \to X$. Последнее отображение является отображением проекции, а действие g задается следующим образом:

$$g(x, v) = (gx, gv).$$

Заметим, что этот гомоморфизм превращает $K_G(X)$ в $R(G)$-модуль.

Рассмотрим теперь категорию, объектами которой являются пары (G, X), где X есть G-пространство, а морфизмами — пары (θ, f): $(H, Y) \to (G, X)$, где θ — гомоморфизм $H \to G$, а отображение f: $Y \to X$ θ-эквивариантно. Если задано векторное G-расслоение над X, то морфизм (θ, f) индуцирует векторное H-расслоение над Y. Таким образом, $K_G(X)$ определяет контравариантный функтор из рассмотренной выше категории в категорию коммутативных колец с единицей.

Отображение $(G, X) \to (G,$ точка$)$ индуцирует гомоморфизм колец $R(G) \to K_G(X)$, упомянутый выше. Очевидное отображение $(G, X) \to (1, X/G)$ индуцирует гомоморфизм колец $K(X/G) \to K_G(X)$, который в случае, когда X — тривиальное G-пространство, дает гомоморфизм колец $K(X) \to K_G(X)$. Мы используем эти гомоморфизмы в предложениях 1.3.1 и 1.3.2.

Предложение 1.3.1. *Если X — главное G-расслоение, то $K(X/G) \to K_G(X)$ — изоморфизм.*

Доказательство. Утверждение следует из предложения 1.1.1.

Предложение 1.3.2. *Пусть K — поле комплексных чисел. Если X — тривиальное G-пространство и G — компактная хаусдорфова группа, то композиция $R(G)\otimes K(X)\to K_G(X)\otimes K_G(X)\to K_G(X)$ представляет собой изоморфизм.*

Доказательство. Мы имеем отображение $E_G(X)\to\to R(G)\otimes K(X)$, которое в обозначениях предложения 1.2.1 сопоставляет векторному G-расслоению E над X пространство $\bigoplus\limits_{\pi}(\underline{E}_\pi\otimes\underline{\pi E})$. Это, очевидно, дает аддитивный гомоморфизм

$$K_G(X)\to R(G)\otimes K(X).$$

Композиция

$$E_G(X)\to K_G(X)\to R(G)\otimes K(X)\to K_G(X)$$

является канонической проекцией $E_G(X)\to K_G(X)$, как видно из 1.2.1 (iii). Следовательно, композиция

$$K_G(X)\to R(G)\otimes K(X)\to K_G(X)$$

является тождественным отображением. Композиция

$$R(G)\otimes K(X)\to K_G(X)\to R(G)\otimes K(X)$$

также является тождественным отображением, в чем можно убедиться при помощи проверки на элементах вида $\underline{E}_\pi\otimes F$, где F — векторное расслоение над X.

Предложения 1.3.1 и 1.3.2 описывают $K_G(X)$ в двух крайних случаях: когда X — главное G-расслоение и когда X — тривиальное G-пространство. В общем случае структура кольца $K_G(X)$ значительно сложнее. Заметим, однако, что из предложения 1.1.3 мы получаем

Предложение 1.3.3. *Пусть H — подгруппа группы G. Отображение $(H, Y)\to(G, G\times_H Y)$ определяет изоморфизм*

$$K_G(G\times_H Y)\cong K_H(Y)$$

для каждого H-пространства Y.

Следствие 1.3.4. $K_G(G/H)\cong R(H)$.

Рассмотрим случай, когда X является G-пространством и H — подгруппа группы G. Тогда X можно рассматривать также как H-пространство. Существует G-отображение

$$G \times_H X \to X,$$

определяемое формулой $(g, x) \to gx$. Если H — подгруппа конечного индекса n в группе G, то это отображение является накрывающим отображением степени n. Конструкция прямого образа ([1], § 1) связывает с каждым векторным G-расслоением над $G \times_H X$, имеющим слой размерности q, некоторое векторное G-расслоение над X со слоем размерности nq. В самом деле, в этом случае $G \times_H X$ гомеоморфно пространству $(G/H) \times X$, т. е. дизъюнктному объединению n экземпляров пространства X; поэтому прямой образ можно определить как прямую сумму. Это определяет гомоморфизм ([1], § 2)

$$K_G(G \times_H X) \to K_G(X)$$

и, следовательно, гомоморфизм $K_H(X) \to K_G(X)$. Мы будем называть его *переходным гомоморфизмом.*

Когда X — точка, мы получаем конструкцию индуцированного представления, хорошо известную в теории групп.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Atiyah M. F., Characters and cohomology of finite groups, *Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci.*, 9 (1961).
[2] Atiyah M. F., Bott R., On the periodicity theorem for complex vector-bundles, *Acta Math.*, 112 (1964), 229—247.
[3] Стинрод Н., Топология косых произведений, ИЛ, М., 1956.

ЛЕКЦИЯ 2. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СВОЙСТВА ФУНКТОРА K_G

В этой лекции будут рассмотрены те факты из K_G-теории, которые можно получить при помощи небольшой модификации рассуждений обыкновенной K-теории, см. [1].

Мы будем предполагать, что G — компактная группа Ли, и будем рассматривать только *комплексные* векторные расслоения. Для удобства все G-пространства мы также будем считать компактными.

2.1. Пространство сечений векторного G-расслоения

Пусть p: $E \to X$ — векторное расслоение над компактным пространством X. Сечением в E называется такое отображение $s\colon X\to E$, что $ps=1_X$. Множество всех сечений образует векторное пространство $\Gamma(E)$. Так как X компактно, $\Gamma(E)$ является банаховым пространством и подпространством (в компактно-открытой топологии) пространства E^X.

Предположим, что E — векторное G-расслоение. Тогда группа G действует на $\Gamma(E)$ следующим образом:

$$(g\cdot s)(x)=g\cdot s(g^{-1}\cdot x),\quad g\in G,\quad s\in\Gamma(E),$$

и определяет гомоморфизм $G\to \operatorname{Aut}(\Gamma(E))$, соответствующий G-действию $G\times\Gamma(E)\to\Gamma(E)$.

Для того чтобы доказать, что это G-действие непрерывно, рассмотрим отображения

$$\begin{aligned}&G\times\Gamma(E)\times X\to G\times\Gamma(E)\times X\to G\times E\to E,\\ &\quad g\times s\times x\to g\times s\times g^{-1}x\to g\times s(g^{-1}x)\to(g\cdot s)x.\end{aligned}$$

Так как каждое отображение непрерывно, композиция непрерывна и определяет непрерывное отображение

$$\begin{aligned}&G\times\Gamma(E)\to\Gamma(E)\subset E^X,\\ &g\times s\to gs.\end{aligned}$$

Мы заключаем, что группа G непрерывно действует на банаховом пространстве $\Gamma(E)$.

Так как группа G компактна, усредняющее отображение $s\to\int_G gs$ определяет проекцию

$$\mu\colon\ \Gamma(E)\to\Gamma^G(E)$$

пространства $\Gamma(E)$ на подпространство $\Gamma^G(E)$ G-инвариантных сечений расслоения E. Проекция μ даст нам возможность распространить некоторые результаты о сечениях векторных расслоений на G-инвариантные сечения в векторных G-расслоениях.

Лемма 2.1.1. *Пусть s' есть G-инвариантное сечение расслоения E над замкнутым устойчивым подмножеством A пространства X. Тогда s' можно продолжить до G-инвариантного сечения над X.*

Доказательство. Выберем такое покрытие $\{U_i\}$ пространства X, что ограничение $E|_{U_i}$ тривиально. Продолжим отображение s'_i: $A \cap U_i \to \mathbf{C}^n$ до отображения s_i: $U_i \to \mathbf{C}^n$ и положим $s = \sum \varphi_i s_i$, где $\{\varphi_i\}$ — разбиение единицы, соответствующее покрытию $\{U_i\}$. Тогда s является сечением расслоения E над X. Рассмотрим G-инвариантное сечение μs. Так как A устойчиво, то μs совпадает с s и s' на A.

2.2. Продолжение гомоморфизмов

Рассмотрим два векторных G-расслоения E и F над X. Существует векторное расслоение $\operatorname{Hom}(E, F)$ со слоем

$$\operatorname{Hom}(E, F)_x = \operatorname{Hom}(E_x, F_x).$$

Более того, $\operatorname{Hom}(E, F)$ является векторным G-расслоением с действием группы G, определяемым формулой

$$(g \cdot \varphi_x)(e) = g \cdot \varphi_x(g^{-1}e)$$

для $g \in G$, $e \in Eg \cdot x$, $\varphi_x \in \operatorname{Hom}(E_x, F_x)$. Подпространство $\Gamma^G(\operatorname{Hom}(E, F))$ G-инвариантных сечений расслоения $\operatorname{Hom}(E, F)$ состоит из всех гомоморфизмов векторных расслоений φ: $E \to F$, таких, что $g \cdot \varphi_x(e) = \varphi_{gx}(ge)$ для всех $x \in E$, $e \in E_x$, $g \in G$. Это означает, что пространство гомоморфизмов векторных G-расслоений φ: $E \to F$ может быть отождествлено с $\Gamma^G(\operatorname{Hom}(E, F))$.

Лемма 2.2.1. *Пусть φ': $E|_A \to F|_A$ — гомоморфизм векторных G-расслоений над замкнутым G-устойчивым подпространством A пространства X. Тогда φ' можно продолжить до гомоморфизма векторных G-расслоений φ: $E \to F$ над X. Если φ' — изоморфизм, то существует такая G-устойчивая открытая окрестность U подмножества A, что $\varphi|_U$ является изоморфизмом.*

Доказательство. Применяя лемму 2.1.1 к G-инвариантному сечению φ' расслоения $\operatorname{Hom}(E, F)|_A$, мы получим G-инвариантное сечение φ расслоения $\operatorname{Hom}(E, F)$. В силу непрерывности существует такая открытая окрестность V подмножества A, что $\varphi|_V$ — изоморфизм. Утверждение леммы получается, если положить $U = \bigcup_{g \in G} gV$.

Замечание. Пусть φ_0, φ_1 — два продолжения изоморфизма φ': $E|_A \to F|_A$. Тогда $\varphi_t = (1-t)\varphi_0 + t\varphi_1$ — также гомоморфизм $E \to F$, ограничение которого на A

совпадает с φ'. Следовательно, существует такая открытая окрестность V подмножества A, что $\varphi_t|_V$ — изоморфизм для всех $0 \leqslant t \leqslant 1$. Поэтому φ_0, φ_1 гомотопны в множестве изоморфизмов в некоторой окрестности множества A.

2.3. Гомотопические свойства расслоений

Пусть Y — некоторое G-пространство, а I — единичный интервал $0 \leqslant t \leqslant 1$. Тогда $Y \times I$ является G-пространством с действием группы $g(y, t) = (gy, t)$.

Лемма 2.3.1. *Пусть Y — компактное пространство, f_t: $Y \to X$ — гомотопия G-отображений ($0 \leqslant t \leqslant 1$), а E — векторное G-расслоение над X. Тогда $f_0^*E \cong f_1^*E$.*

Доказательство ([1], предложение 1.3). Пусть f: $Y \times I \to X$ — отображение, осуществляющее гомотопию, т. е. $f(y, t) = f_t(y)$, и пусть π: $Y \times I \to Y$ — проекция. Рассмотрим замкнутое подпространство $Y = Y \times \{t_0\}$ пространства $Y \times I$. Ограничения векторных G-расслоений f^*E и $\pi^* f_t^* E$ на Y изоморфны, поэтому в силу 2.3 они изоморфны в некоторой полосе $Y \times \delta T$, где δT обозначает некоторую окрестность множества $\{t_0\}$ в I. Следовательно, класс эквивалентности, содержащий f_t^*E, является локально постоянной и, следовательно, постоянной функцией от аргумента t. Отсюда мы заключаем, что $f_0^*E \cong f_1^*E$.

Как и в обычной теории, векторные G-расслоения часто определяются при помощи функций сцепления. Пусть $X = X_1 \cup X_2$, $A = X_1 \cap X_2$, где X_i есть G-устойчивое замкнутое подпространство пространства X. Пусть E_i — векторное G-расслоение над X_i ($i = 1, 2$) и α: $E_1|_A \to E_2|_A$ — изоморфизм. Тогда имеется векторное G-расслоение $E = E_1 \cup_\alpha E_2$ над X, такое, что $E|_{X_1} \cong E_1$, $E|_{X_2} \cong E_2$.

Лемма 2.3.2. *Класс расслоения $E_1 \cup_\alpha E_2$ зависит только от гомотопического класса изоморфизма α.*

Доказательство. Гомотопия изоморфизма $E_1|_A \to E_2|_A$ определяет изоморфизм

$$\Phi: \pi^*E_1|_A \times I \to \pi^*E_2|_A \times I,$$

где π: $X \times I \to X$ — проекция. Пусть отображение f_t: $X \to X \times I$ определяется формулой $f_t(x) = (x, t)$, и пусть φ_t: $E_1|_A \to E_2|_A$ — изоморфизм, получающийся из Φ при помощи f_t. Тогда $E_1 \cup_{\varphi_t} E_2 \simeq f_t^*(\pi^* E_1 \cup_\Phi \pi^* E_2)$. Так как f_0 и f_1 гомотопны, отсюда следует, что

$$E_1 \cup_{\varphi_0} E_2 \cong E_1 \cup_{\varphi_1} E_2.$$

2.4. Существование дополнительных расслоений

Мы будем пользоваться следующими определением и леммой, принадлежащими Мостову.

Определение. Рассмотрим действие группы G на банаховом пространстве Γ. Вектор $s \in \Gamma$ называется *периодическим*, если $G \cdot s$ лежит в конечномерном подпространстве пространства Γ.

Лемма 2.4.1. *Периодические векторы в* Γ *образуют плотное множество.*

Доказательство можно найти в [2; § 2.16].

Пусть E — векторное G-расслоение над X. Расслоение F называется *дополнительным* векторным расслоением, если существует такой G-модуль M, что $E \oplus F = \underline{M} = X \times M$. Мы хотим показать, что существуют такие расслоения с конечномерным модулем M.

Рассмотрим G-инвариантное отображение $X \times \Gamma(E) \to E$, определенное формулой $(x, s) \to s(x)$. Для данной точки $x \in X$ существуют окрестность U_x и сечения $s_1^x, \ldots, s_n^x \in \Gamma(E)$, такие, что для всех $y \in U_x$ линейная оболочка векторов $s_1^x(y), \ldots, s_n^x(y)$ представляет собой слой E_y над y. Кроме того, по предыдущей лемме векторы $s_1^x, \ldots, s_n^x$ можно выбрать периодическими. Так как X — компактное пространство, покрытие $\{U_n\}$ содержит конечное подпокрытие $\{U_{x(i)}\}$. Соответствующее конечное множество сечений $s_j^{x(i)}$ определяет конечномерное G-устойчивое подпространство M в $\Gamma(E)$, такое, что индуцированное отображение $\underline{M} \to E$ является G-инвариантным эпиморфизмом. Пусть F — ядро этого отображения, так что существует точная последовательность векторных G-расслоений

$$0 \to F \to \underline{M} \to E \to 0.$$

Применяя процесс усреднения μ, определенный в п. 2.1, мы получаем G-инвариантную метрику на $\underline{M}$ и, следовательно, расщепление написанной выше точной последовательности. Отсюда мы заключаем, что $\underline{M} = E \oplus F$.

Обратим внимание на два важных следствия, вытекающих из существования дополнительных расслоений.

(1) Пусть G_n обозначает грассманиан всех n-мерных подпространств модуля M. Действие группы G на M определяет универсальное векторное G-расслоение

$$K = \{g \times m;\ g \in G_n,\ m \in M,\ m \in g\} \subset G_n \times M$$

над G_n. Отображение $f\colon X \to G_n$, определяемое формулой $x \to E_x$, дает $E = f^*K$. Таким образом, каждое векторное G-расслоение индуцируется некоторым векторным G-расслоением над соответствующим грассманианом.

(2) Группа $K_G(X)$ является абелевой группой, соответствующей полугруппе векторных G-расслоений над X. Таким образом, каждый элемент из $K_G(X)$ представляется парой $(E_0, E_1) = [E_0] - [E_1]$, где $[E_i]$ — элемент, представленный векторным G-расслоением E_i над X. Тогда $K_G(X)$ определяется следующим отношением эквивалентности:

$$(E_0, E_1) \sim (F_0, F_1)$$

тогда и только тогда, когда существуют векторное G-расслоение E и изоморфизм

$$E_0 \oplus F_1 \oplus E \cong E_1 \oplus F_0 \oplus E.$$

Так как существует такое векторное G-расслоение F, что $E \oplus F = \underline{M}$ является тривиальным расслоением, мы заключаем, что

$$(E_0, E_1) \sim (F_0, F_1)$$

тогда и только тогда, когда существует G-модуль M такой, что

$$E_0 \oplus F_1 \oplus \underline{M} \cong E_1 \oplus F_0 \oplus \underline{M}.$$

В частности, каждый элемент из $K_G(X)$ может быть представлен парой $(E, \underline{M})$, где E — векторное G-расслоение, а M есть G-модуль.

2.5. Продолжение расслоений

Пусть E — векторное G-расслоение над пространством X; рассмотрим векторное G-расслоение $\mathrm{Hom}(E, E)$ со слоем $\mathrm{Hom}(E_x, E_x)$, где $x \in X$. Элемент $p_x \in \mathrm{Hom}(E_x, E_x)$

является *проектором*, если $p_x^2 = p_x$. Множество всех проекторов p_x, $x \in X$, является замкнутым подпространством

$$\operatorname{Proj}(E) \subset \operatorname{Hom}(E, E).$$

Рассмотрим теперь открытое подпространство $Q(E) \subset \subset \operatorname{Hom}(E, E)$, состоящее из всех $T \in \operatorname{Hom}(E, E)$, таких, что для всех собственных значений z гомоморфизма T выполняется условие $|z-1| \neq 1/2$. Ясно, что $\operatorname{Proj}(E) \subset Q(E)$.

Лемма 2.5.1. *Существует ретракция* $\alpha\colon Q(E) \to \operatorname{Proj}(E)$.

Доказательство. Для данного $T \in Q(E)$ положим

$$\alpha T = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-1|=1/2} (x - T)^{-1}\, dz.$$

Мы должны показать, что

(i) отображение α корректно определено,

(ii) $\alpha T \in \operatorname{Proj}(E)$,

(iii) если $T \in \operatorname{Proj}(E)$, то $\alpha T = T$.

(i) Рассмотрим гомоморфизм $zI - T \in \operatorname{Hom}(E_x, E_x)$, где I — тождественный гомоморфизм. Гомоморфизм $zI - T$ допускает обращение, если только $\det(zI - T) \neq 0$, т. е. если z не является собственным значением гомоморфизма T. Поскольку $T \in Q$, на окружности $|z-1| = 1/2$ нет собственных значений гомоморфизма T.

(ii) Обозначим через C окружность $|z-1| = 1/2$, и пусть C' — окружность меньшего радиуса $|z-1| = \rho < 1/2$, такая, что в кольце $\rho \leqslant |z-1| \leqslant 1/2$ нет собственных значений гомоморфизма T. Тогда

$$\begin{aligned}
(2\pi i)^2 (\alpha T)^2 &= \left(\int\limits_C (z - T)^{-1}\, dz\right)\left(\int\limits_{C'} (z' - T)^{-1}\, dz'\right) = \\
&= \int\limits_C \int\limits_{C'} \left(\frac{1}{z-T} - \frac{1}{z'-T}\right) \frac{1}{z'-z}\, dz\, dz' = \\
&= \int\limits_C \frac{1}{z-T}\left(\int\limits_{C'} \frac{dz'}{z'-z}\right) dz + \\
&\quad + \int\limits_{C'} \frac{1}{z'-T}\left(\int\limits_C \frac{dz}{z-z'}\right) dz' = \\
&= 0 + (2\pi i)^2 \alpha T.
\end{aligned}$$

Следовательно, $(\alpha T)^2 = \alpha T$ и $\alpha T \in \operatorname{Proj}(E)$.

(iii) Рассмотрим проектор p_x: $E_x \to E_x$ и выберем систему координат таким образом, чтобы матрица оператора p_x имела диагональный вид. Если p_x имеет диагональ $(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$, то $(z-p_x)^{-1}$ имеет диагональ $\left((z-1)^{-1}, \ldots, (z-1)^{-1}, z^{-1}, \ldots, z^{-1}\right)$ и $\int\limits_C (z-p_x)^{-1} dz$ имеет диагональ $(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$.

Теперь пусть E' — векторное расслоение над G-устойчивым замкнутым подпространством A пространства X. Тогда $E' \oplus F' = M$ для некоторого G-модуля M. Отображение p': $\underline{M} \to \underline{M}$, заданное формулой $e \oplus f \to e \oplus 0$, является проектором и $E' = \operatorname{im} p'$. Мы можем продолжить p' до сечения $p \in \Gamma(\operatorname{Hom}(E, E))$ над X.

Существует окрестность U пространства A, такая, что $p|_U \in Q(E)$. Следовательно, сечение $\alpha(p) \in \Gamma(\operatorname{Hom}(E, E))$ является проектором над U, который продолжает p'. Мы заключаем, что существует расслоение $E = \operatorname{im} \alpha(p)$ над U, такое, что $E|_A = E'$.

Следствие 2.5.2. $K_G(A) \cong \varinjlim\limits_{U \supset A} K_G(U)$.

Доказательство. Существует гомоморфизм

$$\varinjlim_{U \supset A} K_G(U) \to K_G(A),$$

определяемый ограничением. Он является эпиморфизмом, согласно проведенным выше рассуждениям. Кроме того, этот эпиморфизм взаимно однозначен, ибо любые два продолжения расслоения E' над A изоморфны над некоторой окрестностью V пространства A (см. п. 2.2).

2.6. Относительная K_G-теория

Пусть $A \subset X$ есть G-устойчивое подпространство. Рассмотрим полугруппу троек (E_0, E_1, α), где E_0, E_1 — векторные G-расслоения над X и α: $E_0|_A \to E_1|_A$ — изоморфизм векторных G-расслоений над A. Зададим следующее отношение эквивалентности:

$$(E_0, E_1, \alpha) \sim (F_0, F_1, \beta)$$

тогда и только тогда, когда существует векторное G-расслоение E и G-изоморфизм $E_0 \oplus F_1 \oplus E \cong E_1 \oplus F_0 \oplus E$, ограничение которого на A совпадает с $\alpha \oplus \beta^{-1} \oplus 1$. Соответствующие классы эквивалентности образуют группу $K_G(X, A)$.

Теперь предположим, что A замкнуто в X. Существует последовательность

$$K_G(X, A) \to K_G(X) \to K_G(A), \qquad (1)$$

в которой первый гомоморфизм переводит тройку (E_0, E_1, α) в класс, содержащий пару (E_0, E_1), а второй определяется ограничением на A.

Лемма 2.6.1. *Последовательность* (1) *точна.*

Доказательство. Каждый элемент из $K_G(X, A)$ представляется тройкой (E_0, E_1, α). Для последовательности (1) мы имеем

$$(E_0, E_1, \alpha) \to (E_0, E_1) \to (E_0|_A, E_1|_A) \sim (0, 0),$$

так как α — изоморфизм. Теперь рассмотрим элемент из $K_G(X)$, представленный парой (E_0, E_1), и предположим, что $(E_0|_A, E_1|_A) \sim (0, 0)$. Тогда существуют G-модуль M и изоморфизм

$$\alpha\colon E_0|_A \oplus \underline{M} \cong E_1|_A \oplus \underline{M}.$$

Тройка $(E_0 \oplus \underline{M}, E_1 \oplus \underline{M}, \alpha)$ определяет требуемый элемент из $K_G(X, A)$.

Пусть X/A обозначает пространство, полученное стягиванием G-устойчивого подпространства A в точку $* \in X$. Тогда X/A является G-пространством, а $r\colon X \to X/A$ является G-отображением.

Лемма 2.6.2. $K_G(X, A) \cong K_G(X/A, *)$.

Доказательство. Согласно п. 2.4, мы можем представить каждый элемент из $K_G(X/A, *)$ тройкой $(E', \underline{M}, \alpha')$, где E' — векторное G-расслоение над X/A, M является G-модулем и α' — изоморфизм $E'_* \cong M$. Тройка $(r^*E', \underline{M}, r^*\alpha')$ представляет элемент из $K_G(X, A)$, и, следовательно, r определяет гомоморфизм $K_G(X/A, *) \to$ $\to K_G(X, A)$.

Обратный гомоморфизм мы определим с помощью функции сцепления. Пусть тройка $(E, \underline{M}, \alpha)$ представляет элемент из $K_G(X, A)$. Согласно п. 2.2, изоморфизм α можно продолжить на G-устойчивую открытую окрестность U пространства A. Его ограничение на $U \setminus A$ представляет собой изоморфизм $\tilde{\alpha}$: $E|_{U\setminus A}\to(U\setminus A)\times M$. Теперь построим векторное расслоение

$$E'=(E|_{X\setminus A})\cup_{\tilde{\alpha}} r(U)\times M$$

над $(X\setminus A)\cup r(U)=X/A$. По построению существует изоморфизм α': $E'_*\to M$, и тройка $(E', \underline{M}, \alpha')$ представляет соответствующий элемент из $K_G(X/A, \overline{*})$.

Лемма 2.6.3. *Если пространство A G-стягивается к точке $x_0\in A$, то $K_G(X, A)\cong K_G(X, x_0)$.*

Доказательство. Пусть r: $A\to x_0$ — ретракция; определим гомоморфизмы

$$K_G(X, A)\to K_G(X, x_0)\to K_G(X, A)$$

формулой

$$(E, F, \alpha)\to(E, F, \alpha|_{x_0})\to(E, F, r^*(\alpha|_{x_0})).$$

Так как A G-стягиваемо, то $r^*(\alpha|_{x_0})$ G-гомотопно отображению α (см. п. 2.2) и, следовательно, $K_G(X, A)\cong K_G(X, x_0)$.

2.7. Периодичность Ботта

Если E — векторное G-расслоение над X, то, исключая из E образ нулевого сечения и отождествляя в каждом слое точки, которые получаются друг из друга умножением на ненулевой скаляр, мы получаем пространство $P(E)$, называемое *проективизацией* расслоения E. Действие группы G на E превращает $P(E)$ в G-пространство. Проекция p: $P(E)\to X$ является G-отображением и индуцирует гомоморфизм колец p': $K_G(X)\to K_G(P(E))$, так что $K_G(P(E))$ становится $K_G(X)$-модулем.

По построению точке $y\in p^{-1}(x)$ соответствует одномерное линейное подпространство $[y]$ в слое E_x расслоения E над X.

Теперь рассмотрим векторное G-расслоение p^*E над $P(E)$. Подпространство

$$\{y\times e\in P(E)\times E;\ e\in[y]\}\subset p^*E\subset P(E)\times E$$

является G-устойчивым подпространством пространства p^*E; оно является пространством расслоения векторного G-расслоения H^* над $P(E)$ со слоем $\mathbf{C}$. Пусть η обозначает соответствующий элемент кольца $K_G(P(E))$. Теорема периодичности описывает структуру $K_G(X)$-модуля $K_G(P(E))$ в одном частном случае.

Теорема 2.7.1. *Пусть X — компактное G-пространство, L — векторное G-расслоение над X со слоем $\mathbf{C}$ и ρ — соответствующий элемент в $K_G(X)$. Пусть $\eta \in K_G(P(L \oplus \underline{\mathbf{C}}))$ — элемент, определенный выше. Тогда $K_G(X)$-алгебра $K_G(P(L \oplus \underline{\mathbf{C}}))$ порождается элементом η, подчиненным соотношению $(\eta-1)(\eta-\rho)=0$.*

Доказательство этой теоремы периодичности является прямым обобщением соответствующего элементарного доказательства для K-теории, данного Атья и Боттом.

Мы дадим несколько следствий из теоремы периодичности для частного случая, когда L — векторное G-расслоение $X \times \mathbf{C}$ и действие группы G определяется представлением ρ: $G \to U(1)$. В этом случае $P(L \oplus \underline{\mathbf{C}}) = X \times S^2$ и p: $X \times S^2 \to X$ — проекция произведения. Рассмотрим S^2 как риманову сферу и введем следующие обозначения:

$$D_+ = \{z \in \mathbf{C};\ |z| \leqslant 1\},$$
$$D_- = \{z \in \mathbf{C};\ |z| \geqslant 1\} \cup \{\infty\},$$
$$S^2 = D_+ \cup D_-; \quad S^1 = D_+ \cap D_-.$$

Представление ρ определяет действие группы G на S^2 следующим образом:

$$g \cdot z = \rho(g) \cdot z, \quad z \in \mathbf{C};$$

при этом $\{0\}$, $\{\infty\}$ неподвижны, а D_+, D_-, S^1 являются G-устойчивыми. Пусть α: $\underline{\mathbf{C}}|_{X \times S^1} \to p^*L|_{X \times S^1}$ есть G-изоморфизм, задаваемый формулой

$$x \times z \times c \to x \times z \times zc,$$

где $x \in X$, $z \in S^1$, $c \in L$. Тогда $H^* = \left(\underline{\mathbf{C}}|_{X \times D_+}\right) \cup_\alpha \left(p^*L|_{X \times D_-}\right)$. Таким способом элемент $\eta \in K_G(X \times S^2)$ описывается непосредственно при помощи функции сцепления.

Следствие 2.7.2. *Алгебра $K_G(X \times S^2)$ изоморфна алгебре полиномов $K_G(X)[\eta]$ с одним соотношением $(\eta-1)(\eta-\rho)=0$.*

Следствие 2.7.3. *Алгебра $K_G(S^2)$ изоморфна алгебре полиномов $R(G)[\eta]$ с одним соотношением $(\eta-1)(\eta-\rho)=0$.*

Следствие 2.7.4. *Пусть G действует тривиально на S^2. Тогда алгебра $K_G(X \times S^2)$ изоморфна алгебре полиномов $K_G(X)[\eta]$ с одним соотношением $(\eta - 1)^2 = 0$.*

Следствие 2.7.5. $K_G(X \times D_+, X \times S^1) \cong K_G(X)$.

Доказательство. Следствие 2.7.2 следует из теоремы периодичности, если выбрать L, как указано выше; следствие 2.7.3 получается, если считать X точкой; следствие 2.7.4 соответствует случаю $L = \underline{C}$, $\rho = 1$. Для того чтобы доказать следствие 2.7.5, рассмотрим точную последовательность

$$K_G(X \times S^2, X \times \{\infty\}) \to K_G(X \times S^2) \xrightarrow{i^!} K_G(X),$$

где i: $X \to X \times S^2$ — вложение $X = X \times \{\infty\}$. Проекция произведения p индуцирует расщепляющий гомоморфизм $p^!$: $K_G(X) \to K_G(X \times S^2)$.

Как и в случае K-теории, кольцо $K_G(X \times S^2, X \times \{\infty\})$ можно отождествить с ядром гомоморфизма $i^!$. Так как $i^! \eta = \rho$, это ядро является идеалом, порожденным элементом $(\eta - \rho)$. Поскольку $\eta(\eta - \rho) = \eta - \rho$, этот идеал имеет вид $K_G(X)(\eta - \rho)$ и, следовательно, изоморфен кольцу $K_G(X)$. Требуемый результат получается тогда из изоморфизма

$$K_G(X \times D_+, X \times S^1) \cong K_G(X \times S^2, X \times \{\infty\}).$$

Замечание. Интересно, что теорема периодичности может быть выведена из следствия 2.7.2. Пусть Q — главное $U(1)$-расслоение, ассоциированное с L, и q: $Q \to X$ — проекция. Тогда $P = P(L \oplus \underline{C}) = Q \times_{U(1)} S^2$ и существует коммутативная диаграмма отображений:

$$\begin{array}{ccc} Q \times S^2 & \xrightarrow{r} & P \\ \downarrow & & \downarrow p \\ Q & \xrightarrow{q} & X \end{array}$$

Действие группы G на расслоенном пространстве L индуцирует действие G на Q, такое, что q является G-отображением и $q^*L = \underline{C}$. С другой стороны, Q можно рассматривать как $\tilde{G}$-пространство, где $\tilde{G} = U(1)$. Действие группы $U(1)$ на S^2 определяется действием группы $\tilde{G}$ на $Q \times S^2$. Аналогично q^*L можно рассматривать как векторное $\tilde{G}$-расслоение $\tilde{L}$ с пространством расслоения $Q \times \mathbf{C}$ и действием группы, задаваемым формулой

$$(g \times z)(b \times c) = g \cdot b \times z \cdot c,\ g \in G,\ z \in U(1),\ b \in Q,\ c \in \mathbf{C}.$$

Пусть $\eta \in K_G(P)$ — элемент, определенный в теореме периодичности. Применим следствие 2.7.2 к $\tilde{G}$-пространству Q, представлению $\tilde{\rho}$: $\tilde{G} \to U(1)$, заданному как проекция произведения, и элементу $\tilde{\eta} = r^*\eta \in K_{\tilde{G}}(Q \times S^2)$. В результате мы получим, что алгебра $K_{\tilde{G}}(Q \times S^2)$ изоморфна алгебре полиномов $K_{\tilde{G}}(Q)[\tilde{\eta}]$ и удовлетворяет соотношению $(\tilde{\eta} - 1)(\tilde{\eta} - \tilde{\rho}) = 0$. Теперь $K_{\tilde{G}}(Q \times S^2) \cong K_G(P)$ и элемент $\tilde{\eta}$ соответствует элементу $\eta \in K_G(P)$. Кроме того, $K_{\tilde{G}}(Q) \cong K_G(X)$ и элемент $\tilde{\rho} = q^*\rho \in K_{\tilde{G}}(Q)$ соответствует элементу $\rho \in K_G(X)$. Следовательно, алгебра $K_G(P)$ изоморфна алгебре $K_G(X)[\eta]$ и удовлетворяет соотношению $(\eta - 1)(\eta - \rho) = 0$.

2.8. Группы $K_G^n(X, A)$

В заключение дадим определение экстраординарной теории когомологий K_G^*. Пусть

$$K_G^{-n}(X) = K_G(X \times D^n,\ X \times S^{n-1}),$$
$$K_G^{-n}(X, A) = K_G(X \times D^n,\ X \times S^{n-1} \cup A \times D^n),$$

где S^{n-1}, D^n — соответственно единичная $(n-1)$-мерная сфера и единичный n-мерный шар в $\mathbf{R}^n$ и группа G действует на них тривиально. Заметим, что

$$K_G^{-m-n}(X, A) = K_G(X \times D^{m+n},\ X \times S^{m+n-1} \cup A \times D^{m+n}) =$$
$$= K_G(X \times D^m \times D^n,\ X \times D^m \times S^{n-1} \cup X \times S^{m-1} \times D^n \cup$$
$$\cup A \times D^m \times D^n) =$$
$$= K_G^{-n}(X \times D^m,\ X \times S^{m-1} \cup A \times D^m).$$

По теореме периодичности (следствие 2.7.5)

$$K_G^{-2}(X) = K_G(X \times D^2,\ X \times S^1) = K_G(X).$$

Аналогично $K_G^{-2}(X, A) \cong K_G(X, A)$, и, следовательно, $K_G^n(X, A)$ можно определить для всех, не только неположительных, значений n.

Как и в обычной K-теории, существует бесконечная точная последовательность (мы опускаем доказательство).

Группа $K_G^{-1}(X)$ имеет особенно простое описание. Она является группой $K_G(X \times I, X \times \{0\} \cup X \times \{1\})$, и, следовательно, каждый элемент представляется тройкой $(E, \underline{M}, \alpha')$, где E — векторное G-расслоение над $X \times I$, а α' определяется двумя изоморфизмами

$$\alpha_0\colon \underline{M} \to E|_{X \times \{0\}}, \quad \alpha_1\colon \underline{M} \to E|_{X \times \{1\}}.$$

Пусть $\alpha = \alpha_1^{-1}\alpha_0$. Тогда элементы из $K_G^{-1}(X)$ могут быть представлены парами $(\underline{M}, \alpha)$, где M является G-модулем, а α является автоморфизмом $\alpha\colon \underline{M} \to \underline{M}$, $\underline{M} = X \times M$. В этом случае кограничное отображение

$$K_G^{-1}(A) \to K_G(X, A)$$

определяется как

$$(\underline{M}, \alpha) \to (\underline{M}, \underline{M}, \alpha).$$

Умножение в $K_G(X)$, задаваемое тензорными произведениями векторных G-расслоений, может быть продолжено (мы и здесь опустим доказательство) до определения произведения в относительных группах

$$K_G(X, A) \otimes K_G(Y, B) \to K_G(X \times Y, A \times Y \cup X \times B),$$

а также в высших K_G-группах.

Теорема периодичности может быть продолжена на относительный случай и на высшие K_G-группы. Рассмотрим случай, когда G-пространство X имеет отмеченную точку x_0. Существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc}
0 \to K_G(X, \{x_0\})[\eta] & \longrightarrow & K_G(X)[\eta] & \to & K_G(\{x_0\})[\eta] \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 \to K_G(X \times S^2, \{x_0\} \times S^2) & \to & K_G(X \times S^2) & \to & K_G(\{x_0\} \times S^2)
\end{array}$$

где $K_G(X, \{x_0\})[\eta]$ обозначает кольцо полиномов от η, а с левой стороны диаграммы написаны нули, так как группа $K_G^{-1}(\{x_0\}) = K_G^{-1}(\{x_0\} \times S^2)$ равна нулю. Согласно следствию 2.7.2, вторая и третья вертикальные стрелки соответствуют изоморфизмам. Следовательно, первая стрелка также обозначает изоморфизм.

Предложение 2.8.1. *Пусть Y — замкнутое G-подпространство компактного G-пространства X. Тогда*

$$K_G(X \times S^2,\ Y \times S^2) \cong K_G(X,\ Y)[\eta],$$

где $(\eta - 1)(\eta - \rho) = 0$, *а* $K_G(X, Y)[\eta]$ *обозначает кольцо полиномов от* η.

Доказательство. Пусть $\{x_0\}$ — отмеченная точка пространства X/Y. Тогда

$$\begin{aligned} K_G(X,\ Y)[\eta] &\cong K_G(X/Y,\ \{x_0\})[\eta] \cong \\ &\cong K_G(X/Y \times S^2,\ \{x_0\} \times S^2) \cong \\ &\cong K_G(X \times S^2/Y \times S^2,\ \{x_0\} \times \{0\}) \cong K_G(X \times S^2,\ Y \times S^2). \end{aligned}$$

Предложение 2.8.2. *Пусть Y — замкнутое G-подпространство компактного G-пространства X. Тогда*

$$K_G^*(X \times S^2,\ Y \times S^2) = K_G^*(X,\ Y)[\eta],$$

где $(\eta - 1)(\eta - \rho) = 0$, *а* $K_G^*(X, Y)[\eta]$ — *кольцо полиномов от* η.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} K_G^{-n}(X \times S^2,\ Y \times S^2) &\cong \\ &\cong K_G(X \times S^2 \times D^n,\ X \times S^2 \times S^{n-1} \cup Y \times S^2 \times D^n) \cong \\ &\cong K_G(X \times D^n,\ X \times S^{n-1} \cup Y \times D^n)[\eta] \cong K_G^{-n}(X,\ Y)[\eta]. \end{aligned}$$

2.9. Функтор K_G с компактными носителями

До сих пор в этой лекции мы предполагали, что все рассматриваемые G-пространства X компактны. Функтор $K_G(X)$ можно также определить для некомпактных пространств, но простое определение с помощью векторных G-расслоений уже не годится. Можно, однако, дать простое определение функтора K_G с компактными носителями для локально компактных G-пространств, что мы теперь и сделаем.

Определение. Пусть X — локально компактное G-пространство. Рассмотрим полугруппу троек $(E_0, E_1;\ \alpha_C)$, где E_0, E_1 — векторные G-расслоения над X и α_C: $E_0|_{X\setminus C} \to E_1|_{X\setminus C}$ — изоморфизм над дополнением к некоторому относительно компактному G-подпространству C пространства X. Обозначим через $K_{G,C}(X)$ факторгруппу этой полугруппы по отношению эквивалентности $\sim$, где

$$(E_0, E_1; \alpha_C) \sim (F_0, F_1; \beta_D)$$

тогда и только тогда, когда существуют векторное G-расслоение L над компактной окрестностью A пространства $\overline{C} \cup \overline{D}$ в X и G-изоморфизм

$$\theta\colon (E_0 \oplus F_1)|_A \oplus L \to (E_1 \oplus F_0)|_A \oplus L,$$

такой, что $\theta|_W = \alpha_C|_W \oplus \beta_D^{-1}|_W \oplus \mathrm{id}|_W$, где

$$W = A \setminus (C \cup D).$$

Аналогично определяется группа $K_{G,C}(X, A)$ для локально замкнутого множества A в X, но только рассматриваются такие тройки $(E_0, E_1; \alpha_C)$, что $C \subset X \setminus A$.

Замечания. (1) Мы оставляем читателю проверить, что $K_{G,C}(X)$ и $K_{G,C}(X, A)$ определены корректно. (2) Легко проверяется, что если X и A компактны, то

$$K_{G,C}(X, A) \cong K_G(X, A).$$

(3) $K_{G,C}(X)$ является кольцом без единицы, если X некомпактно. Если бы мы определили кольцо $K_G(X)$, то оно было бы $K_G(X)$-модулем. Во всяком случае, ясно, что векторное расслоение E над X определяет эндоморфизм

$$(E_0, E_1; \alpha_C) \to (E \otimes E_0, E \otimes E_1; \mathrm{id} \otimes \alpha_C),$$

который аддитивно зависит от E. (4) $X \to K_{G,C}(X)$ является контравариантным функтором на категории локально компактных G-пространств и *собственных*[1]) отображений. Если отображение $f\colon X \to Y$ является собственным, то мы будем писать

$$f^!\colon K_{G,C}(Y) \to K_{G,C}(X)$$

для индуцированного отображения.

---

[1]) Непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ называется собственным, если прообраз каждого компактного множества $A \subset Y$ является компактным множеством в пространстве X_0. — *Прим. перев.*

С другой стороны, $X \to K_{G,C}(X)$ является также *ковариантным* функтором на категории локально компактных G-пространств и *открытых вложений*[1]). Если $j\colon U \to X$ — открытое вложение, то мы будем писать

$$j_!\colon K_{G,C}(U) \to K_{G,C}(X)$$

для индуцированного отображения.

Предложение 2.9.1. *Если X — открытое G-подпространство компактного G-пространства Y и $B = Y \setminus X$, то*

$$K_G(Y, B) \xrightarrow{\cong} K_{G,C}(X).$$

Доказательство. Пусть данная тройка $(E_0, E_1; \alpha)$ представляет некоторый элемент из $K_G(Y, B)$; продолжим α до изоморфизма $\tilde{\alpha}$ над замкнутой G-устойчивой окрестностью $\tilde{B}$ пространства B в Y. Тогда $(E_0|_X, E_1|_X; \tilde{\alpha}|_{X \cap \tilde{B}})$ представляет элемент из $K_{G,C}(X)$ и ясно, что этот процесс определяет гомоморфизм

$$\rho\colon K_G(Y, B) \to K_{G,C}(X).$$

Обратно, пусть данная тройка $(E_0, E_1; \alpha_C)$ представляет элемент из $K_{G,C}(X)$. Выберем компактную окрестность A пространства $\bar{C}$ в X и дополнительное расслоение F для $E_1|_A$. Пусть $\psi\colon E_1|_A \oplus F \xrightarrow{\cong} \underline{M}$. Тогда тройка $((E_0|_A \oplus F) \cup_{\psi\alpha_C|_{A \setminus C}} (M \times (Y \setminus C)), \underline{M}$; тождественное отображение) определяет элемент из $K_G(Y, B)$. Легко показать, что эта конструкция дает гомоморфизм, обратный к ρ.

Следствие. *Имеем* $K_{G,C}(X) \cong K_G(X^+$, точка), *где X^+ — одноточечная компактификация пространства X.*

Мы будем теперь всегда под $K_G(X, A)$ понимать $K_{G,C}(X, A)$, тем более что, если X и A компактны, эти группы совпадают.

---

[1]) Непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ называется открытым, если образ $f(B)$ каждого открытого множества $B \subset X$ открыт в пространстве Y. — *Прим. перев.*

ЛИТЕРАТУРА

[1] Atiyah M. F., Bott R., On the periodicity theorem for complex vector bundles, *Acta Math.*, 112 (1964), 229—247.
[2] Mostow G. D., Cohomology of topological groups and solvmanifolds, *Ann. Math.*, 73 (1961), 20—48.

ЛЕКЦИЯ 3. ДАЛЬНЕЙШИЕ СВОЙСТВА ФУНКТОРА K_G

В этой лекции мы построим спектральную последовательность для K_G-теории и используем ее для вывода следствий о поведении функтора K_G при локализации. Мы будем здесь предполагать, что G — компактная группа Ли, а X — компактное G-пространство.

3.1. Нервы покрытий G-устойчивыми подмножествами

Пусть X — компактное G-пространство, $\mathrm{F}=\{F_\alpha\}_{\alpha\in S}$ — конечное покрытие пространства X замкнутыми G-устойчивыми подмножествами. Для $\sigma\subset S$ определим множество

$$F_\sigma=\bigcap_{\alpha\in\sigma} F_\alpha;$$

пусть N_F — нерв покрытия F, рассматриваемый как совокупность подмножеств из F. Существует отображение множеств

$$\xi\colon X\to N_\mathrm{F},$$

определенное следующим образом: $\xi(x)=\{\alpha\in S;\ x\in F_\alpha\}$. Пусть $|N_\mathrm{F}|$ — некоторая геометрическая реализация нерва N_F, а $\nu\colon |N_\mathrm{F}|\to N_\mathrm{F}$ — отображение, которое сопоставляет каждой точке единственный открытый симплекс, содержащий ее.

Определение.

$$W_\mathrm{F}=\{(n,\ x)\in|N_\mathrm{F}|\times X;\ \nu(n) \text{ — грань симплекса } \xi(x)\},$$

или, что эквивалентно,

$$W_\mathrm{F}=\bigcup_{\sigma\in N_\mathrm{F}}|\bar\sigma|\times F_\sigma\subset|N_\mathrm{F}|\times X.$$

Пространство W_F замкнуто в $|N_\mathrm{F}|\times X$ и является, следовательно, компактным G-пространством. Существуют естественные проекции $p_1\colon W_\mathrm{F}\to|N_\mathrm{F}|$ и $p_2\colon W_\mathrm{F}\to X$.

Заметим, что конструкция $(X, \mathrm{F}) \to W_{\mathrm{F}} = W(X, \mathrm{F})$ функториальна, т.е. если $(f, \theta): (X, \mathrm{F} = \{F_\alpha\}_{\alpha \in S}) \to (Y, \mathrm{H} = \{H_\beta\}_{\beta \in T})$ — морфизм ($f: X \to Y$, $\theta: S \to T$ и $F_\alpha \subset H_{\theta\alpha}$ для $\theta \in S$), то $|\theta| \times f$ отображает $W(X, \mathrm{F})$ в $W(Y, \mathrm{H})$.

Доказательство следующей леммы основано на стандартных рассуждениях о том, что различные утонченные отображения смежны [1]).

Лемма 3.1.1. *Пусть* (f, θ_0), (f, θ_1): $(X, \mathrm{F}) \to (Y, \mathrm{H})$ — *два морфизма; тогда индуцированные отображения*

$$W(X, \mathrm{F}) \to W(Y, \mathrm{H})$$

G-гомотопны.

Теперь мы зафиксируем пару (X, F) и опустим индекс F у пространств N_{F} и W_{F}. Полиэдр $|N|$ имеет конечную фильтрацию по своим остовам

$$|N| \supset \ldots \supset |N^n| \supset \ldots \supset |N^1| \supset |N^0|.$$

Аналогично X имеет конечную фильтрацию замкнутыми G-устойчивыми подмножествами

$$X = X_0 \supset X_1 \supset \ldots \supset X_r \supset \ldots,$$

где

$$X_r = \{x \in X, \ \dim \xi(x) \geqslant r\}.$$

Определение. $W^p = p_1^{-1}|N^p|$, $W_r = p_2^{-1}|X_r|$.

Теперь мы введем K_G-группы пространств W. В дальнейшем несколько раз используется следующая тривиальная лемма.

Лемма 3.1.2. *Пусть Y — компактное G-пространство, $\{Y_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — замкнутое G-устойчивое покрытие и*

$$Y_{\alpha\beta} = Y_\alpha \cap Y_\beta, \quad Y'_\alpha = \bigcup_{\beta \neq \alpha} Y_{\alpha\beta}, \quad Y' = \bigcup_\alpha Y'_\alpha.$$

---

[1]) Симплициальные отображения f; g: $(X, Y) \to (K, L)$ называются смежными, если для каждого симплекса a комплекса X (подкомплекса Y) симплексы $f(|a|)$ и $g(|a|)$ являются гранями одного и того же симплекса комплекса K (соответственно подкомплекса L).

Заметим, что смежные отображения гомотопны, причем гомотопия задается формулой $h(\alpha, t) = (1-t)f(\alpha) + tg(\alpha)$, $\alpha \in |X|$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, однако гомотопные отображения не обязательно смежны. — *Прим. перев.*

Тогда $\bigsqcup_{\alpha\in A}(Y_\alpha, Y'_\alpha)\to(Y, Y')$ *является относительным гомеоморфизмом* ($\bigsqcup$ обозначает дизъюнктное объединение) *и индуцирует изоморфизм*

$$K_G^*(Y, Y')\to\prod_{\alpha\in A}K_G^*(Y_\alpha, Y'_\alpha).$$

Предложение 3.1.3 *Проекция* p_2: $W\to X$ *индуцирует изоморфизм* $K_G^*(X)\to K_G^*(W)$.

Доказательство. Отображение p_2: $(W, W_1)\to(X, X_1)$ является относительным гомеоморфизмом, и, следовательно, отображение p_2^*: $K_G^*(X, X_1)\to K_G^*(W, W_1)$ является изоморфизмом.

Аналогично для всех $r\geqslant 0$ имеем

$$K_G^*(W_r, W_{r+1})\cong K_G^*\Big(\bigcup_{\dim\sigma\geqslant r}|\bar\sigma|\times F_\sigma, \bigcup_{\dim\sigma\geqslant r+1}|\bar\sigma|\times F_\sigma\Big)\cong$$

(по определению W_r)

$$\cong K_G^*\Big(\bigcup_{\dim\sigma=r}|\bar\sigma|\times F_\sigma, \bigcup_{\dim\sigma=r}|\bar\sigma|\times F'_\sigma\Big)\cong$$

(по определению F'_σ)

$$\cong\prod_{\dim\sigma=r}K_G^*(|\bar\sigma|\times F_\sigma, |\bar\sigma|\times F'_\sigma)\cong$$

(по лемме)

$$\cong p_2^*\prod_{\dim\sigma=r}K_G^*(F_\sigma, F'_\sigma)\cong K_G^*(X_r, X_{r+1}).$$

(по лемме)

Отсюда по индукции следует, что отображение p_2^*: $K_G^*(X, X_r)\to K_G^*(W, W_r)$ есть изоморфизм для всех r. Но для достаточно больших r пространства X_r и W_r пусты. Поэтому p_2^*: $K_G^*(X)\to K_G^*(W)$ — изоморфизм.

3.2. Спектральная последовательность для K_G-теории

Применим метод Картана — Эйленберга для построения спектральной последовательности по фильтрации

$$W\supset W^{r-1}\supset\ldots\supset W^p\supset\ldots\supset W^0.$$

Мы получим спектральную последовательность, которая сходится к $K_G^*(W) \cong K_G^*(X)$ и член $E_2^{p,q}$ которой представляет собой p-мерную группу когомологий комплекса

$$K_G^q(W^0) \to K_G^{q+1}(W^1, W^0) \to \ldots \to K_G^{p+q}(W^p, W^{p-1}).$$

Стандартными методами мы получаем

$$K_G^{p+q}(W^p, W^{p-1}) \cong \prod_{\dim \sigma = p} K_G^{p+q}(|\bar{\sigma}| \times F_\sigma, |\dot{\sigma}| \times F_\sigma) \cong$$
$$\cong \prod_{\dim \sigma = p} K_G^q(F_\sigma) \cong C^p(N, \{K_G^q(F_\sigma)\}),$$

где $c^p(N, \cdot)$ обозначает p-мерную группу коцепей симплициального комплекса в соответствующей системе коэффициентов.

Для того чтобы проверить, что кограница

$$d_1\colon K_G^{p+q}(W^p, W^{p-1}) \to K_G^{p+q+1}(W^{p+1}, W^p)$$

является обычным кограничным оператором на коцепях, мы должны уточнить способ отождествления группы $K_G^q(F_\sigma)$ с $K_G^{p+q}(|\bar{\sigma}| \times F_\sigma, |\dot{\sigma}| \times F_\sigma)$. Для удобства отбросим знаки реализации. Выберем последовательность

$$\sigma_0 \subset \sigma_1 \subset \ldots \subset \sigma_p = \sigma$$

граней симплекса σ размерностей, равных индексам. Отождествим $K_G^{p+q}(\bar{\sigma}_p \times F_\sigma, \dot{\sigma}_p \times F_\sigma)$ с $K_G^{p+q-1}(\bar{\sigma}_{p-1} \times F_\sigma, \dot{\sigma}_{p-1} \times F_\sigma)$ при помощи композиции изоморфизма (относительного гомеоморфизма)

$$K_G^{p+q-1}(\bar{\sigma}_{p-1} \times F_\sigma, \dot{\sigma}_{p-1} \times F_\sigma) \cong$$
$$\cong K_G^{p+q-1}(\dot{\sigma}_p \times F_\sigma, (\dot{\sigma}_p - \dot{\sigma}_{p-1}) \times F_\sigma)$$

и изоморфизма

$$d\colon K_G^{p+q-1}(\dot{\sigma}_p \times F_\sigma, (\dot{\sigma}_p - \dot{\sigma}_{p-1}) \times F_\sigma) \to$$
$$\to K_G^{p+q}(\bar{\sigma}_p \times F_\sigma, \dot{\sigma}_p \times F_\sigma),$$

заданного кограничным оператором тройки

$$(\bar{\sigma}_p \times F_\sigma, \dot{\sigma}_p \times F_\sigma, (\dot{\sigma}_p - \dot{\sigma}_{p-1}) \times F_\sigma).$$

Продолжая этот процесс, мы приходим к группе $K_G^q(F_\sigma)$. Конечно, выбор последовательности $\sigma_0 \subset \sigma_1 \subset \ldots$

$\ldots \subset \sigma_p = \sigma$ определяет ориентацию симплекса σ, и различные наборы определяют одно и то же отождествление тогда и только тогда, когда они определяют одну и ту же ориентацию. Теперь обратимся к диаграмме

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, phantom, "="] \arrow[d, shift right] & K_G^{p+q}(W^p, W^{p-1}) \arrow[r, phantom, "="] \arrow[d] & D \arrow[r, "d_1"] \arrow[d] & K_G^{p+q+1}(W^{p+1}, W^p) \arrow[d, shift right] \\
B \arrow[r] \arrow[u, shift right] & K_G^{p+q}(\bar{\sigma} \times F_\tau, \dot{\sigma} \times F_\tau) \arrow[r, "\cong"] & E \arrow[r, "d"] & K_G^{p+q+1}(\tau \times F_\tau, \dot{\tau} \times F_\tau) \arrow[u, shift right] \\
C \arrow[r] \arrow[u, "\cong"'] & K_G^q(F_\tau) \arrow[u, "\cong"'] \arrow[rr, equal] & & K_G^q(F_\tau) \arrow[u, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

где $A = D = K_G^{p+q}(W^p, W^{p-1})$, $B = K_G^{p+q}(\bar{\sigma} \times F_\sigma, \dot{\sigma} \times F_\sigma)$, $C = K_G^q(F_\sigma)$, $E = K^{p+q}(\dot{\tau} \times F_\tau, (\dot{\tau} - \dot{\sigma}) \times F_\tau)$, τ есть $(p+1)$-мерный, а σ есть p-мерный симплекс полиэдра N. Все прямоугольники этой диаграммы, очевидно, коммутативны, за исключением правого нижнего, который коммутативен, антикоммутативен или вырождается в нулевой в зависимости от того, согласована или не согласована ориентация σ с ориентацией симплекса τ, или σ вовсе не является гранью симплекса τ. Это показывает, что кограница d_1 является обычным кограничным оператором. Таким образом, справедлива

Теорема 3.2.1. *Существует спектральная последовательность, член $E_2^{p,q}$ которой равен $E_2^{p,q} = H^p(N, \{K_G^q(F_\sigma)\})$, сходящаяся к $K_G^*(X)$.*

Легко видеть, что эта спектральная последовательность, кроме того, является функтором от аргументов (X, F).

3.3. Пучок $K_G^q f$

Пусть группа G действует тривиально на компактном пространстве Y, и пусть $f\colon X \to Y$ является G-отображением. Определим предпучок $K_G^q f$ на пространстве Y формулой $(K_G^q f)(U) = K_G^q(f^{-1}\bar{U})$. В силу непрерывности K_G^* (см. 2.5.2) стеблем этого предпучка $K_G^q f$ над точкой $y \in Y$ является $K_G^q(f^{-1}(y))$. По определению $K_G^q f$ является предпучком $R(G)$-модулей.

Пусть $\mathrm{Cov}(Y)$ — множество конечных открытых покрытий пространства Y. Каждому $\mathrm{U}\in\mathrm{Cov}(Y)$ соответствует конечное замкнутое покрытие $\overline{\mathrm{U}}$. Пусть $\mathrm{Cov}'(Y)$ — подмножество в $\mathrm{Cov}(Y)$, состоящее из покрытий U, таких, что $N_{\mathrm{U}}=N_{\overline{\mathrm{U}}}$. Легко видеть, что множество $\mathrm{Cov}'(Y)$ является конфинальным в $\mathrm{Cov}(Y)$.

Аналогично если Y имеет конечное покрытие размерности n, то множество таких покрытий U, что $N_{\mathrm{U}}=N_{\overline{\mathrm{U}}}$ и $\dim\mathrm{U}=n$, является конфинальным в $\mathrm{Cov}(Y)$.

Для каждого $\mathrm{U}\in\mathrm{Cov}(Y)$ теорема 3.2.1 дает спектральную последовательность

$$\Sigma_{\mathrm{U}}\colon\ H^p\left(N_{\overline{\mathrm{U}}},\ \{K_G^q(f^{-1}\overline{\mathrm{U}}_\alpha)\}\right)\Rightarrow K_G^*(X).$$

Если V — измельчение покрытия U, то существует морфизм спектральных последовательностей $\Sigma_{\mathrm{U}}\to\Sigma_{\mathrm{V}}$. Далее напомним, что $\varinjlim$ является точным функтором; применяя его к семейству $\{\Sigma_{\mathrm{U}}\}_{\mathrm{U}\in\mathrm{Cov}'(Y)}$, получим в результате спектральную последовательность $R(G)$-модулей

$$H^p(Y,\ K_G^q f)\Rightarrow K_G^*(X),$$

где $K_G^q f$ теперь обозначает *пучок*, ассоциированный с описанным выше предпучком. Если Y имеет конечное покрытие размерности n, то мы можем взять прямой предел по покрытиям размерности n. В этом случае мы имеем прямой предел сходящихся спектральных последовательностей, каждая из которых связана с фильтрацией длины n.

Поэтому, если пространство Y имеет конечномерное покрытие, то спектральная последовательность $H^p(Y,\ K_G^q f)\Rightarrow$ $\Rightarrow K_G^*(X)$ сходится.

Рассмотрим случай, когда $Y=X/G$, а $f\colon X\to X/G$ — естественное отображение проекции. Тогда стебель пучка $K_G^q f$ в точке xG определяется как

$$K_G^q(G/G_x)\cong K_{G_x}^q(\text{точка})\cong R(G_x)\otimes K^q(\text{точка}).$$

Поэтому этот стебель совпадает с кольцом $R(G_x)$ в точке xG для четного q и равен 0 для нечетного q.

Если $G = 1$, то отображение f является тождественным и пучок $K_G^q f$ изоморфен группе $\mathbf{Z}$ для четных q. Тогда $H^*(X, \mathbf{Z}) \Rightarrow K^*(X)$ — спектральная последовательность, построенная в работе [1; § 2].

Для общей группы G мы получаем спектральную последовательность

$$H^p(X/G, K_G^q f) \Rightarrow K_G^*(X).$$

3.4. Локализация

Кольцо $R(G)$ является подкольцом кольца комплекснозначных функций на множестве классов сопряженных элементов группы G. Мы будем обозначать одной и той же буквой γ класс сопряженных элементов в группе G, гомоморфизм γ: $R(G) \to \mathbf{C}$, сопоставляющий функции $\chi \in R(G)$ ее значение на классе $\gamma \subset G$, а также простой идеал γ в кольце $R(G)$, который является ядром этого гомоморфизма.

Далее, $K_G(X)$ является $R(G)$-модулем. Локализуя кольцо $R(G)$ по простому идеалу γ, мы получим $R(G)_\gamma$-модуль $K_G(X)_\gamma$ [1]. Обратимся теперь к спектральной последовательности для K_G-теории, чтобы получить геометрическую интерпретацию модуля $K_G(X)_\gamma$.

Определение. Если γ — класс сопряженных элементов группы G, то через X^γ обозначим множество

$$\{x \in X;\ G_x \cap \gamma = \varnothing\} = \bigcup_{g \in \gamma} X^g,$$

где X^g — множество неподвижных точек элемента g.

Ясно, что $gx \in X^\gamma$ тогда и только тогда, когда $x \in X^\gamma$. Следовательно, X^γ является G-пространством. Вложение i: $X^\gamma \to X$ определяет гомоморфизмы

$$i^!: K_G^*(X) \to K_G^*(X^\gamma),\quad i_\gamma^!: K_G^*(X)_\gamma \to K_G^*(X^\gamma)_\gamma.$$

---

[1]) Локализацией кольца A по простому идеалу $I \subset A$ называется кольцо A_I, состоящее из всех „дробей“ вида ab^{-1}, $b \notin I$. Локализацией A-модуля M называется A_I-модуль $M_I = M \otimes_A A_I$. — *Прим. перев.*

Теорема 3.4.1. *Если X/G имеет конечномерное покрытие, то отображение $i_\gamma^!$ является изоморфизмом.*

Доказательство. Заметим сначала, что локализация является точным функтором и поэтому спектральная последовательность

$$H^*(X/G,\ K_G^* f) \Longrightarrow K_G^*(X),$$

соответствующая отображению $f\colon X \to X/G$, может быть локализована, в результате чего получается спектральная последовательность

$$H^*(X/G,\ K_G^* f)_\gamma \Longrightarrow K_G^*(X)_\gamma.$$

Вложение $i\colon X^\gamma \to X$ индуцирует гомоморфизм спектральных последовательностей

$$\begin{array}{ccc}
H^*(X/G,\ K_G^* f_\gamma) = H^*(X/G, K_G^* f)_\gamma & \Longrightarrow & K_G^*(X)_\gamma \\
\Big\downarrow {\scriptstyle i_\gamma^*} & & \Big\downarrow {\scriptstyle i_\gamma^!} \\
H^*\left(X/G,\ K_G^* f_\gamma|_{X^\gamma/G}\right) = H^*\left(X^\gamma/G,\ K_G^* f|_{X^\gamma/G}\right)_\gamma & \Longrightarrow & K_G^*(X^\gamma)_\gamma .
\end{array}$$

Так как X/G имеет конечномерное покрытие, спектральная последовательность сходится и, следовательно, достаточно доказать, что отображение i_γ^* является изоморфизмом.

Мы будем пользоваться следующей леммой.

Лемма. 3.4.2. *Пусть H — замкнутая подгруппа компактной группы Ли G, а γ — класс сопряженных элементов группы G. Если $H \cap \gamma = \varnothing$, то существует такой обобщенный характер χ группы G, что $\chi(\gamma) \neq 0$, но $\chi|_H = 0$.*

Так как H — замкнутая подгруппа группы G, кольцо $R(H)$ является $R(G)$-модулем. Если $\chi(\gamma) \neq 0$, но $\chi|_H = 0$ для некоторого $\chi \in R(G)$, то $R(H)_\gamma = 0$.

В точках $f(x) \in X/G$ стебель пучка $K_G^q f_\gamma$ равен $R(G_x)_\gamma$ для четных q, 0 — для нечетных q. Если $x \notin X^\gamma$, то $G_x \cap \gamma = \varnothing$. Отсюда, согласно лемме, $R(G_x)_\gamma = 0$. Следовательно, пучок $K_G^* f_\gamma$ равен нулю во всех точках пространства X^γ/G. Отсюда мы получаем, что отображение i_γ^* является изоморфизмом.

Следствие 3.4.3. *Предположим, что элемент* $g \in G$ *действует без неподвижных точек; тогда* $K_G(X)_{[g]} = 0$.

Доказательство. Применим теорему для $\gamma = [g]$ — класса сопряженных элементов, содержащего элемент g.

3.5. Теоремы конечности

Если H — замкнутая подгруппа группы G, то кольцо $R(H)$ является конечным $R(G)$-модулем. Этот факт можно использовать для доказательства того, что при соответствующих предположениях член E_2 спектральной последовательности

$$H^p(X/G, K_G^q f) \Rightarrow K_G^*(X)$$

является конечным $R(G)$-модулем. Например, это так в случае, когда X — компактное дифференцируемое G-многообразие, или, более общо, если X локально G-стягиваемо (т. е. каждая орбита имеет окрестность, для которой эта орбита является G-деформационным ретрактом). Если дополнительно потребовать, чтобы X/G имело конечномерное покрытие, то из спектральной последовательности можно получить, что $K_G^*(X)$ является конечным $R(G)$-модулем. В частности, справедлива

Теорема 3.5 1. *Если X — компактное дифференцируемое G-многообразие, то $K_G^*(X)$ является конечным $R(G)$-модулем.*

Доказательство и обобщения этой теоремы можно найти в статье Г. Сегала, которая скоро выйдет. Но она понадобится нам только в 7.2.5.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Атья М. Ф., Хирцебрух Ф., Векторные расслоения и однородные пространства, сб. *Математика*, 6: 2 (1962), 3—39.

[2] Grothendieck A., Dieudonné J., Eléments de géometrie, algébrique, *Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci.*, 4 (1960).

[3] Grothendieck A., Théorémes de finitude ..., *Bull. Soc. Math. France*, 84 (1956), 1—7.

ЛЕКЦИЯ 4. ТЕОРЕМЫ ЦЕЛОЧИСЛЕННОСТИ, I

В этой лекции мы докажем теорему об изоморфизме Тома для K_G-теории, когда G — абелева группа, и используем ее для вывода теоремы целочисленности (4.3.1) для дифференцируемых G-многообразий. Мы предполагаем, что X—компактное G-пространство.

4.1. Гомоморфизм Тома

Пусть X — компактное G-пространство, F — векторное G-расслоение над X с n-мерным слоем и s: $X \to F$ есть G-инвариантное сечение.

В каждой точке $x \in X$ существует линейное отображение

$$s(x) \wedge : \lambda^i F_x \to \lambda^{i+1} F_x.$$

Комбинируя эти отображения, мы получим последовательность

$$(\Lambda_{-1}F, s)\colon\ 0 \to \lambda^0 F \to \ldots \to \lambda^k F \to \lambda^{k+1} F \to \ldots$$
$$\ldots \to \lambda^n F \to 0,$$

которая точна во всех точках $x \in X$, где $s(x) \neq 0$.

В частности, предположим, что Y — замкнутое G-подпространство пространства X и что задано нигде не обращающееся в нуль G-инвариантное сечение s пространства $F|_Y$. Тогда предыдущая конструкция определяет элемент из $K_G(X, Y)$. (Напомним, что не только тройка (E_0, E_1, α) определяет элемент из $K_G(X, Y)$, но также и комплекс (E_i, d_i) векторных G-расслоений над X, который ацикличен над Y. Подробнее см. [3].)

Теперь заметим, что если p: $E \to X$ — векторное G-расслоение с n-мерным слоем, то векторное G-расслоение p^*E над E имеет каноническое G-инвариантное сечение δ (диагональное отображение $E \to E \times_X E = p^*E$), которое никогда не равняется нулю на дополнении нулевого сечения в E. Итак, мы получили комплекс векторных G-расслоений $(\Lambda_{-1}p^*E, \delta)$ над локально компактным пространством E, который ацикличен на дополнении компактного множества и поэтому определяет канонический элемент λ_E в группе $K_G(E)$.

Для приложений удобно компактифицировать пространство E, рассматривая его как аффинную часть проективного расслоения $P(E\oplus\mathbf{C})=E\cup P(E)$ над X. (Пространство E вкладывается в $P(E\oplus\mathbf{C})$ по формуле $\xi\to(\xi, 1)$.) Тогда $K_G(E)=K_G(P(E\oplus\mathbf{C}), P(E))$.

Но комплекс $(\Lambda_{-1}p^*E, \delta)$ над E не может быть расширен до комплекса над пространством $P(E\oplus\mathbf{C})$ наиболее очевидным способом. Точнее, точка $\xi\in P(E_x\oplus\mathbf{C})$ не определяет гомоморфизм $\mathbf{C}\to E_x$, но определяет вложение $H_\xi^*\to E_x\oplus\mathbf{C}$ и, следовательно, вложение $C\to(E_x\oplus\mathbf{C})\otimes H_\xi$, где H^* — расслоение, сопряженное хопфовскому, над пространством $P(E\oplus\mathbf{C})$, определенное в п. 2.7. Таким образом, если $\tilde{p}$: $P(E\oplus\underline{\mathbf{C}})\to X$ — проекция, то расслоение $\tilde{p}^*(E\oplus\underline{\mathbf{C}})\otimes H$ над пространством $P(E\oplus\underline{\mathbf{C}})$ имеет каноническое не обращающееся в нуль сечение, проекцию которого в $\tilde{p}^*E\otimes H$ мы обозначим через $\tilde{\delta}$. Если $\xi\in P(E_x)\subset\subset p(E_x\oplus\mathbf{C})$, то $H_\xi^*\subset E_x\subset E_x\oplus\mathbf{C}$, и поэтому $\tilde{\delta}$ не может обращаться в нуль на $P(E)$. Но отображение $H^*\to\to\tilde{p}^*(E\oplus\mathbf{C})\to\mathbf{C}$ индуцирует каноническую тривиализацию $\underline{\mathbf{C}}\to\bar{H}|_E$, и поэтому изоморфизм θ: $p^*E\to p^*E\otimes(H|_E)$; легко видеть, что $\theta\circ\delta=\tilde{\delta}|_E$. Таким образом, комплекс $(\Lambda_{-1}p^*E, \delta)$ над пространством E можно рассматривать как ограничение комплекса $(\Lambda_{-1}(\tilde{p}^*E\otimes H), \tilde{\delta})$ на пространство $P(E\oplus\mathbf{C})$. Наконец, заметим, что $\lambda^k(\tilde{p}^*E\otimes H)\cong\cong(\lambda^k\tilde{p}^*E)\otimes H^k\cong(\tilde{p}^*\lambda^kE)\otimes H^k$. Суммируя все сказанное, получаем

Предложение 4.1.1. *Существует канонический элемент λ_E в группе $K_G(E)$, такой, что если i: $X\to E$— нулевое сечение, то* $i^!\lambda_E=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\lambda^kE=\lambda_{-1}E$.

Если $K_G(E)$ рассматривать как $K_G(P(E\oplus\underline{\mathbf{C}}), P(E))$, то образом элемента λ_E в группе $K_G(P(E+\underline{\mathbf{C}}))$ будет элемент $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\tilde{p}^!(\lambda^kF)\cdot\eta^{-k}$.

Следствие. *При ограничении на группу $K_G(P(E))$ элемент $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\tilde{p}^!(\lambda^kE)\eta^{-k}$ группы $K_G(P(E+\underline{\mathbf{C}}))$ переходит в нуль.*

Определение. Если A — замкнутое G-подпространство пространства X, то гомоморфизм $K_G^*(X)$-модулей

$$\varphi_E\colon K_G^*(X, A) \to K_G^*\left(E, E|_{p^{-1}A}\right),$$

определяемый формулой $\varphi_E(u) = (-1)^n (p^! u)\lambda_E$, мы назовем *гомоморфизмом Тома*.

Замечания.

1. Элемент $p^! u$ фактически принадлежит $K_G^*\left(E, E|_{p^{-1}A}\right)$, но это не меняет дела, согласно замечанию (iii), сделанному в 2.9.1.

2. Отображение $i^! \varphi_E\colon K_G^*(X, A) \to K_G^*(X, A)$ является умножением на $(-1)^q \lambda_{-1}[E] \in K_G(X)$.

3. Согласно сказанному ранее, отображение $\varphi_E\colon K_G^*(X) \to$ $\to K_G^*(P(E \oplus \underline{C}), P(E))$ представляет собой гомоморфизм $K_G^*(P(E \oplus \underline{C}))$-модулей.

4. Теорема периодичности (см. 2.7) является утверждением, что $\varphi_L\colon K_G^*(X) \to K_G^*(L) = K_G^*(P(L \oplus \underline{C}), P(L))$ — изоморфизм, когда L — линейное G-расслоение. Так как $P(L) \cong X$ и существует сечение $X \cong P(L) \to P(L \otimes \underline{C})$ (обозначенное i_∞ в доказательстве теоремы периодичности; очевидно, что $i_\infty^*(H^*) \cong L$), мы видим, что верхняя строчка диаграммы

$$\begin{tikzcd}
K_G^*(P(L \oplus \underline{C}), X) \arrow[r] & K_G^*(P(L \oplus \underline{C})) \arrow[r] & K_G^*(X) \\
K_G^*(X) \arrow[u, "\varphi_L"] \arrow[r, "\mu"'] & K_G^*(X)[\eta]/(\eta - 1)(\eta - \rho) \arrow[u, "\cong"] \arrow[r, "\nu"] & K_G^*(X) \arrow[u, equal]
\end{tikzcd}$$

является короткой точной последовательностью. Определим отображение μ как $a \to -(\eta - \rho)a$, а отображение ν — формулой $f(\eta) \to f(\rho)$. Тогда диаграмма коммутативна и можно показать, что нижняя строчка также является короткой точной последовательностью, поэтому φ_L — изоморфизм.

В следующем пункте мы покажем, что φ_E является изоморфизмом для любого векторного G-расслоения E, которое представляет собой сумму линейных G-расслоений.

4.2. Обобщение теоремы периодичности

В п. 4.1 мы показали, как векторное G-расслоение E над X можно отождествить с открытым подмножеством компактного пространства $P(E \oplus \underline{C})$, являющимся дополнением к замкнутому подпространству $P(E)$. Это можно обобщить следующим образом.

Пусть заданы два векторных G-расслоения E_1, E_2 над пространством X. Выберем метрику в E_2. Поднимем E_1 до векторного G-расслоения $\tilde{E}_1 = E_1 \times_X P(E_2)$ над $P(E_2)$. Тогда расслоение $E_1 \times_X P(E_2)$ можно отождествить с открытым подмножеством пространства $P(E_1 \oplus E_2)$, являющимся дополнением к замкнутому подпространству $P(E_1)$. Действительно, требуемое вложение дается отображением

$$(\xi_1, \xi_2) \to (\xi_1 \| \xi_2 \|, \xi_2).$$

Заменяя во всех рассуждениях п. 4.1 $\underline{C}$ символом E_2, можно обнаружить, что когда $K_G(\tilde{E}_1)$ отождествляется с $K_G(P(E_1 \oplus E_2), P(E_1))$, канонический элемент $\lambda_{\tilde{E}_1}$ в группе $K_G(\tilde{E}_1)$ отображается в элемент $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \tilde{p}^! (\lambda^k E_1) \eta^{-k}$ из группы $K_G(P(E_1 \oplus E_2))$. Более того, отображение $\varphi_{\tilde{E}_1}\colon K_G(P(E_2)) \to K_G(P(E_1 \oplus E_2), P(E_1))$ является гомоморфизмом $K_G(P(E_1 \oplus E_2))$-модулей.

Теперь мы можем доказать обобщение теоремы периодичности.

Теорема 4.2.1. *Пусть X — компактное G-пространство и $E = L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_n$, где $L_j (1 \leqslant j \leqslant n)$ — линейные G-расслоения над X. Пусть $\eta \in K_G^*(P(E))$ — элемент, определенный расслоением H^*, сопряженным хопфовскому. Тогда $K_G^*(P(E))$ порождается как алгебра над кольцом $K_G^*(X)$ элементом η, удовлетворяющим единственному соотношению*

$$\theta_n(\eta) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \lambda^k \eta^{n-k} = 0.$$

Замечания. Обозначим через A кольцо $K_G^*(X)$, и пусть $\rho_j \in K_G(X)$ — элементы, соответствующие L_j. Тогда

(1) $\theta_n(x) = \prod_{j=1}^{n}(x - \rho_j)$ является единицей в кольце полиномов $A[x]$; в этом легко убедиться при помощи индукции;

(2) согласно следствию из предложения 4.1.1, мы можем определить гомоморфизм колец α_n: $A[x]/(\theta_n(x)) \to K_G^*(P(E))$, сопоставляя элементу x элемент η.

Доказательство. Мы проведем доказательство по индукции. Случай $n = 1$ тривиален, так как $P(E) \cong X$. Таким образом, достаточно показать, что если

$$\alpha_n\colon A[x]/(\theta_n(x)) \xrightarrow{\cong} K_G^*(P(E)),$$

то отображение

$$\alpha_{n+1}\colon A[y]/(\theta(y)(y - \rho)) \to K_G^*(P(E \oplus L)),$$

где E — векторное G-расслоение над X, а L — линейное G-расслоение, является изоморфизмом. Очевидно, что ограничение на пространство $P(E)$ расслоения, сопряженного хопфовскому (кохопфовского расслоения) над пространством $P(E \oplus L)$, является кохопфовским расслоением над $P(E)$.

Расслоение $\tilde{p}$: $P(E \oplus L) \to X$ имеет каноническое сечение i, поэтому мы получаем расщепленную короткую точную последовательность $K_G^*(P(E \oplus L))$-модулей

$$0 \to K_G^*(P(E \oplus L), P(L)) \xrightarrow{r_!} K_G^*(P(E \oplus L)) \xrightarrow{i_!} K_G^*(X) \to 0.$$

С другой стороны, по теореме периодичности гомоморфизм Тома

$$\varphi_L\colon K_G^*(X) \to K_G^*(L \times_X P(E)) \cong K_G^*(P(E \oplus L), P(L)),$$

который, как мы видели, является гомоморфизмом $K_G^*(P(E \oplus L))$-модулей, представляет собой изоморфизм. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A[x]/(\theta(x)) \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\alpha_n"] & A[y]/(\theta(y)(y-\rho)) \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "\alpha_{n+1}"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_G^*(P(E)) \arrow[r, "r_! \cdot \varphi_L"] & K_G^*(P(E \oplus L)) \arrow[r, "i_!"] & K_G^*(X) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

где отображение μ определяется формулой $f(x)\to\to(-1)^n(y-\rho)f(y)$, а отображение ν — формулой $h(y)\to h(\rho)$. Верхняя строчка является короткой точной последовательностью, и диаграмма коммутативна по построению, следовательно, α_{n+1} является изоморфизмом.

Отсюда непосредственно вытекает

Теорема 4.2.2. *Гомоморфизм Тома φ_E: $K_G^*(X)\to\to K_G^*(E)$ является изоморфизмом, если E представляет собой сумму линейных G-расслоений.*

Замечание. Это ограничение не является необходимым, как мы увидим в лекции 6.

Доказательство. Рассмотрим следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0\to & A & \xrightarrow{\mu} & A[y]/(\theta_{n+1}(y)) & \xrightarrow{\nu} & A[x]/(\theta_n(x)) & \to 0 \\
 & \downarrow{\scriptstyle\varphi_E} & & \downarrow{\scriptstyle\cong} & & \downarrow{\scriptstyle\cong} & \\
0\to & K_G^*(E) & \longrightarrow & K_G^*(P(E\oplus \underline{C})) & \xrightarrow{\psi} & K_G^*(P(E)) & \to 0,
\end{array}$$

где μ определяется формулой $a\to(-1)^n a\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\lambda^k y^{-k}=$ $=(-1)^n a\theta_n(y)$, а ν определяется формулой $f(y)\to f(x)$.

Как мы проверяли, верхняя строчка является точной последовательностью. Нижняя строчка точна, потому что отображение ψ есть, как известно, эпиморфизм. Диаграмма коммутативна, следовательно, отображение φ_E является изоморфизмом.

4.3. Гомоморфизм Гизина

Пусть X — дифференцируемое многообразие; обозначим через TX пространство касательного расслоения над X. Если группа G действует на X дифференцируемым образом, то дифференцирование индуцирует действие группы G на пространстве TX и мы можем рассмотреть группы (с компактными носителями!) $K_G(TX)$.

Пусть f: $Y\to X$ — дифференцируемое G-отображение компактных G-многообразий. Мы хотим определить функториальным образом гомоморфизм

$$f_!:\ K_G(TY)\to K_G(TX),$$

аналогичный гомоморфизму Гизина в обычной теории когомологий.

Существует эквивариантное вложение h пространства Y в некоторое вещественное векторное G-пространство V. Доказательство, очень похожее на рассуждения, приведенные в п. 2.4, можно найти в работе [2].

Итак, отображение $f\colon Y \to X$ может быть разложено в композицию G-отображений

$$Y \xrightarrow{i} N \xrightarrow{j} X \times V \xrightarrow{p} X,$$

где $ji\colon Y \to X \times V$ задается формулой $f \times h$, отображение $j\colon N \to X \times V$ есть вложение G-инвариантной трубчатой окрестности N пространства $ji(Y)$ в пространстве $X \times V$, $i\colon Y \to N$ является отображением пространства Y на нулевое сечение нормального расслоения над пространством Y в $X \times V$, а $p\colon X \times V \to X$ — естественная проекция. Теперь достаточно определить отображения $i_!$, $j_!$, $p_!$.

Определение $i_!$. Рассмотрим следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} TY & \leftarrow & TN \\ \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow \\ Y & \leftarrow & N \end{array}$$

Здесь TN рассматривается как вещественное векторное расслоение над пространством TY со слоем $N_y \oplus N_y$ над каждой точкой из $p^{-1}(y)$. Следовательно, TN можно отождествить естественным путем с пространством векторного G-расслоения $p^*(N \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C})$ над TY. Гомоморфизм (относительный) Тома

$$\varphi\colon K_G(TY) \to K_G(TN)$$

и является гомоморфизмом $i_!$. Согласно предложению 4.2.1, отображение $i^! i_!$ является умножением на $(-1)^n \lambda_{-1}(N \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C})$, где n — размерность слоя расслоения над пространством N. Заметим, что $n = \dim X - \dim Y + \dim V$.

Определение $j_!$. Обозначим через $(TN)^+$ одноточечную компактификацию пространства TN. Существует G-отображение $r\colon (T(X \times V))^+ \to (TN)^+$, полученное стягиванием дополнения к TN в многообразии в точку. Гомоморфизм

$$r^!: K_G(TN) \to K_G(T(X \times V))$$

и является гомоморфизмом $j_!$.

Определение $p_!$. Гомоморфизмом Тома для векторного G-расслоения $\underline{V \otimes \mathbf{C}}$ является гомоморфизм

$$\varphi: K_G(TX) \to K_G(TX \times (\underline{V \otimes \mathbf{C}})) = K_G(T(X \times V)).$$

Требуемым гомоморфизмом $p_!$ служит гомоморфизм

$$\varphi^{-1}: K_G(T(X \times V)) \to K_G(TX),$$

который определен, когда φ — изоморфизм.

В силу следствия из теоремы 4.2.2 отображение φ является изоморфизмом, когда G — абелева группа; следовательно, в этом случае отображение $p_!$ определено корректно.

Теорема 4.3.1. *Пусть f: $Y \to X$ — дифференцируемое G-отображение компактных G-многообразий и G — абелева группа. Существует такой естественный гомоморфизм*

$$f_!: K_G(TY) \to K_G(TX),$$

что $(fg)_! = f_! g_!$ и $f_!(yf^!(x)) = f_!(y) \cdot x$ для $x \in K_G(TX)$, $y \in K_G(TY)$. Более того, если отображение f является вложением коразмерности n с нормальным расслоением N, то отображение $f^! f_!$ представляет собой умножение на элемент $(-1)^n \lambda_{-1}(N \otimes \mathbf{C})$.

Доказательство. Пусть i, j, p — отображения, определенные выше; положим $f_! = p_! j_! i_!$. Далее доказательство проводится так же, как в K-теории (см. [1]). Главное — это показать, что отображение $f_!$ не зависит от выбора V: два вложения в V и V' определяют вложения в пространство $V \oplus V'$, которые эквивариантно гомотопны.

Следствие 4.3.2. *Пусть Y — компактное G-многообразие и f: $X \to \{точка\}$ — постоянное отображение. Тогда $f_!(u) \in R(G)$ для всех $u \in K_G(TY)$.*

В следующей лекции мы будем в частных случаях получать другие выражения для $f_!(u)$ как элемента из $R(G) \otimes \mathbf{C}$. Утверждение, что в действительности $f_!(u)$ принадлежит $R(G)$, будет тогда называться теоремой целочисленности.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Atiyah M. F., Hirzebruch F., The Riemann—Roch theorem for analytic embeddings, *Topology*, 1 (1962), 151—166.
[2] Palais R., Theory of G-spaces, Memoirs A. M. S.
[3] Atiyah M. F., Bott R., Shapiro A., Clifford Modules, *Topology*, 3, Suppl. 1 (1964), 3—38.

ЛЕКЦИЯ 5. ТЕОРЕМЫ ЦЕЛОЧИСЛЕННОСТИ, II

В этой лекции мы применим теорему 4.3.1 в случае, когда G — циклическая группа. Это даст возможность получить более конкретные результаты и яснее увидеть связь с обычными теоремами целочисленности для дифференцируемых многообразий. Мы предполагаем, что X — компактное дифференцируемое G-многообразие.

5.1. Дифференцируемое действие циклических групп

В настоящей лекции удобно под циклической группой G понимать либо конечную циклическую группу с образующей $g \in G$, либо компактную группу Ли, в которой степени некоторого фиксированного элемента $g \in G$ плотны. Типичной циклической группой второго типа является тор $T = S^1 \times \ldots \times S^1$, или, более общо, произведение тора и конечной циклической группы.

Пусть X — дифференцируемое G-многообразие, где $G = \{g^k\}$ — циклическая группа с образующей $g\colon X \to X$. Обозначим через X^g множество неподвижных точек преобразования g. Для каждой точки $x \in X^g$ существует автоморфизм $dg\colon T_x \to T_x$ касательного пространства T_x к X в точке x. Подпространство

$$T_x^g = \{v \in T_x;\ dg(v) = v\} \subset T_x$$

отождествляется естественным образом с касательным пространством в точке x дифференцируемого многообразия X^g. Следовательно, $T_x \cong T_x^g \oplus N_x^g$, где N_x^g — подпространство пространства T_x, натянутое на собственные векторы оператора dg с собственными значениями, не равными единице. Обозначим через N^g нормальное расслоение $\bigcup_{x \in X^g} N_x^g$ над X^g в пространстве X, а через $N^g \otimes \mathbf{C}$ — комплексификацию расслоения N^g.

Действие группы G на пространстве $N^g \otimes \mathbf{C}$ определяет элемент $\lambda_{-1}(N^g \otimes \mathbf{C}) \in K_G(X^g)$. Мы используем то же обозначение для соответствующего элемента из $K_G(X^g)_g$.

Предложение 5.1.1. *Элемент* $\lambda_{-1}(N^g \otimes \mathbf{C})$ *является обратимым в* $K_G(X^g)_g$.

Доказательство. Сначала предположим, что X^g имеет n связных компонент с отмеченными точками x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Так как действие группы G на X^g тривиально, то вложение f_i: $\{x_i\} \to X^g$ является G-отображением. Рассмотрим точную последовательность

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & I(X^g) \otimes R(G) & \to & K(X^g) \otimes R(G) & \xrightarrow{\varepsilon} & \bigoplus\limits_i K(\{x_i\}) \otimes R(G) \\ & \| & & \| & & \| \\ 0 \to & I_G(X^g) & \to & K_G(X^g) & \xrightarrow{\varepsilon} & \bigoplus K_G(\{x_i\}) \end{array}$$

где $\varepsilon = \bigoplus\limits_i f_i^!$. Идеал $I_G(X^g)$ нильпотентен, и, следовательно, элемент $u \in K_G(X^g)$ является обратимым тогда и только тогда, когда элемент $\varepsilon(u)$ обратим, т. е. тогда и только тогда, когда элементы $f_i^!(u)$ обратимы для $i = 1, 2, \ldots, n$. Поэтому достаточно рассмотреть случай $n = 1$. Тогда $K_G(\{x_i\})_g = R(G)_g$ является локальным кольцом A с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$.

Если группа G конечна, то $R(G) \cong \mathbf{Z}[x]/(x^n - 1)$ и простой идеал (g) является ядром гомоморфизма $R(G) \to \mathbf{C}$, переводящего x в ζ — первообразный корень степени n из единицы. Тогда $R(G)_g = A \cong \mathbf{Q}(\zeta)$. Если $G = \underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{n}$ — тор, то $R(G)$ является кольцом полиномов от $e^{\pm i\theta_j}$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ с целыми коэффициентами, а $R(G)_g = A$ — поле таких полиномов с рациональными коэффициентами.

Для того чтобы доказать обратимость элемента $f_1^!(u)$, достаточно доказать, что $f_1^!(u) \notin \mathfrak{m}$, т. е. что значение $f_1^!(u)$ на элементе g не равно нулю. Пусть теперь $u_t = \lambda_t(N^g \otimes \mathbf{C})$. Тогда

$$f_1^!(u_t)(g) = \lambda_t\left(N_{x_1}^g \otimes \mathbf{C}\right)(g) = \det(1 + t\, dg),$$

где dg: $N_{x_1}^g \to N_{x_1}^g$ — автоморфизм, индуцированный отображением dg.

Так как оператор dg не имеет собственного значения 1, мы получаем, что $f_1^!(u_1)(g) \neq 0$ и $f_1^!(u_1) \notin \mathfrak{m}$. Следовательно, элемент $\lambda_{-1}(N^g \otimes \mathbf{C})$ обратим в кольце $K_G(X^g)_g$.

Замечание. Так как группа G действует тривиально на X^g, то

$$K_G(X^g)_g = K(X^g) \otimes R(G)_g = K(X^g) \otimes A.$$

Введем следующее обозначение: $\Lambda \subset A$, где

(1) если G — циклическая группа порядка n, то

$$\Lambda = \mathbf{Z}[\xi], \quad \xi^n = 1,$$

(2) если $G = S^1 \times \ldots \times S^1$, то Λ — подкольцо тригонометрических полиномов с целыми коэффициентами.

Теорема 5.1.2. *Пусть G — циклическая группа с образующей g, X^g — множество неподвижных точек G-многообразия X, отображение i: $X^g \to X$ является вложением, а f^g: $X^g \to \{точка\}$, f: $X \to \{точка\}$ — постоянные отображения. Пусть N^g — нормальное расслоение над X^g в многообразии X и $u \in K_G(TX)$. Тогда, если рассматривать $f_!(u)$ как элемент из $A = R(G)_g$, то*

$$(-1)^n f_!(u) = f_!^g\left(\frac{i^! u}{\lambda_{-1}(N^g \otimes \mathbf{C})}\right),$$

где n — коразмерность пространства X^g в многообразии X.

Следствие 5.1.3. $f_!^g\left(\dfrac{i^! u}{\lambda_{-1}(N^g \otimes \mathbf{C})}\right) \in \Lambda.$

Доказательство. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} X^g \arrow[r, "f^g"] \arrow[d, "i"'] & \text{точка} \\ X \arrow[ur, dashed, "f"'] & \end{tikzcd}$$

По теореме 4.3.1 существует соответствующая ей такая диаграмма

$$\begin{tikzcd} K_G(TX^g) \arrow[r, "f_!^g"] \arrow[d, shift right, "i_!"'] & R(G)_g \\ K_G(TX)_g \arrow[u, shift right, "i^!"'] \arrow[ur, dashed, "f_!"'] & \end{tikzcd}$$

что $f_! i_! (v) = f_!^g (v)$ для всех $v \in K_G (TX^g)_g$. По теореме 3.4.1 отображение $i^!$ является изоморфизмом с обратным отображением $i_! \left(\dfrac{1}{\lambda_{-1}(N^g \otimes \mathbf{C})}\right)$[1], и, следовательно, используя теорему 4.3.1, получаем

$$(-1)^n f_!^g \left(\frac{i^! u}{\lambda_{-1}(N^g \otimes \mathbf{C})}\right) = f_! i_! \left(\frac{i^! u}{\lambda_{-1}(N^g \otimes \mathbf{C})}\right) = f_! (u).$$

5.2. Действия с конечным числом неподвижных точек

Предположим, что X^g состоит из конечного числа точек $p \in X$. Тогда

$$f_i^g \left(\frac{i^! u}{\lambda_{-1}(N^g \otimes \mathbf{C})}\right) = \sum_p \frac{i_p^! u}{\lambda_{-1}(T_p \otimes \mathbf{C})},$$

где отображение i_p: $\{p\} \to X$ — вложение, T_p — касательное пространство к X в точке p и $u \in K_G(TX)$. Пусть

$$0 \to E_0 \to E_1 \to \ldots \to E_n \to 0$$

[1] Под этим надо понимать, что элемент x переходит в $i_! \left(\dfrac{x}{\lambda_{-1}(N^g \otimes \mathbf{C})}\right)$. — *Прим. перев.*

— последовательность векторных G-расслоений над TX, которая является точной вне нулевого сечения в пространстве TX. Это определяет такой элемент $u \in K_G(TX)$, что

$$f_!^g\left(\frac{i^! u}{\lambda_{-1}(N^g \otimes \mathbf{C})}\right) = \sum_p \left(\frac{\sum_i (-1)^i \operatorname{tr} g|_{E_{i,p}}}{\lambda_{-1}(T_p \otimes \mathbf{C})}\right) = \sum_p \left(\frac{\sum_i (-1)^i \operatorname{tr} g|_{E_{i,p}}}{\det(1 - dg_p)}\right).$$

Тогда из теоремы 5.1 вытекает

Предложение 5.2.1. *При сделанных выше предположениях*

$$\sum_p \left(\frac{\sum_i (-1)^i \operatorname{tr} g|_{E_{i,p}}}{\det(1 - dg_p)}\right) \in \Lambda.$$

Предложение 5.2.1 можно рассматривать как множество условий на линейные отображения dg_p, $g|_{E_{i,p}}$, которые выполняются, если точки p можно рассматривать как неподвижные точки относительно действия группы G на некотором дифференцируемом многообразии.

5.3. Тривиальные действия

Для того чтобы показать, как теорема 5.1.2 связана с обычными теоремами целочисленности для характеристических классов, рассмотрим случай $G = 1$. Так как $X = X^g$, это является другим крайним случаем по сравнению с тем, когда множество X^g конечно. Если $G = 1$, то $\Lambda = \mathbf{Z}$ и отображение

$$f_!\colon K(TX) \to K(T\{x_0\}) = \mathbf{Z},$$

где x_0 — точка, всегда определено. С другой стороны, это отображение можно вычислить обычными когомологическими методами. Характер Чжэня определяет гомоморфизм колец

$$\operatorname{ch}\colon K(TX) \to H^*(TX, \mathbf{Q})$$

из кольца $K(TX)$ в кольцо $H^*(TX, \mathbf{Q})$ рациональных когомологий с компактными носителями. Существует диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
K(TX) & \xrightarrow{f_!} & K(T\{x_0\}) = \mathbf{Z} \\
\Big\downarrow \mathrm{ch} & & \Big\downarrow \mathrm{ch} = j \\
H^*(TX, \mathbf{Q}) & \xrightarrow{f^*} & H^*(T\{x_0\}, \mathbf{Q}) = \mathbf{Q}
\end{array}$$

в которой отображение $j\colon \mathbf{Z} \to \mathbf{Q}$ является естественным гомоморфизмом и $f_*(u) = (u)[TX]$.

Напомним конструкцию отображения $f_!$, которая была приведена в п. 4.3. Существенным шагом было рассмотрение вложения $i\colon X \to V$ с вещественным n-мерным нормальным расслоением N. В этом случае

$i^! i_!$ — умножение на элемент $(-1)^n \lambda_{-1}(N \otimes \mathbf{C})$,

$i^* i_*$ — умножение на класс Чжэня $c_n(N \otimes \mathbf{C})$.

Рассмотрим формальное разложение $c(N \otimes \mathbf{C}) = \prod_{j=1}^{n}(1 - x_j^2)$, так что класс Понтрягина $p(N)$ есть $\prod_{j=1}^{n}(1 + x_j^2)$. Тогда

$$i^* \mathrm{ch}\, i_!(u) = \mathrm{ch}\, i^! i_!(u) = \mathrm{ch}(u) \cdot (-1)^n [\mathrm{ch}\, \lambda_{-1}(N \otimes \mathbf{C})] =$$

$$= (-1)^n \mathrm{ch}(u) \prod_{j=1}^{n} (1 - e^{x_j})(1 - e^{-x_j}),$$

$$i^* i_* \mathrm{ch}(u) = (-1)^n \mathrm{ch}(u) \prod_{j=1}^{n} (-x_j)(x_j)$$

и, следовательно,

$$i^* \mathrm{ch}\, i_!(u) = i^* i_* \left[\mathrm{ch}(u) \left(\prod_{j=1}^{n} \left(\frac{x_j}{1 - e^{-x_j}} \right) \left(\frac{-x_j}{1 - e^{x_j}} \right) \right)^{-1} \right].$$

Мы не можем, конечно, прямо заключить, что

$$\mathrm{ch}\, i_!(u) = i_* \left[\mathrm{ch}(u) \left(\prod_{j=1}^{n} \left(\frac{x_j}{1 - e^{-x_j}} \right) \left(\frac{-x_j}{1 - e^{x_j}} \right) \right)^{-1} \right].$$

Однако совершенно аналогичные вычисления на классифицирующем пространстве для $N \otimes \mathbf{C}$ показывают, что эта формула верна и что

$$\mathrm{ch}\, f_!(u) = f_*(\mathrm{ch}(u) \cdot \tau(X))[TX],$$

где $\tau(X)$ — полином от классов Понтрягина $p_i(X) \in H^{4i}(X, \mathbf{Q})$. Если $p(X) = \prod (1 + y_i^2)$, то

$$c(T \otimes \mathbf{C}) = \prod_i (1 - y_i^2) = \left(\prod_i (1 - x_i^2)\right)^{-1},$$

$$\tau(X) = \prod_i \left(\frac{y_i}{1 - e^{-y_i}}\right)\left(\frac{-y_i}{1 - e^{y_i}}\right) =$$

$$= \prod_i \left(\frac{x_i}{1 - e^{-x_i}}\right)^{-1} \left(\frac{-x_i}{1 - e^{x_i}}\right)^{-1}.$$

Следовательно, справедлива

Теорема 5.3.1. *Если u принадлежит $K(TX)$, то $(\mathrm{ch}(u)\tau(X))[TX]$ — целое число.*

Следствие 5.3.2. *Если X — ориентируемое многообразие и отображение φ: $H^*(X, \mathbf{Q}) \to H^*(TX, \mathbf{Q})$ — изоморфизм Тома, то $(\varphi^{-1}\mathrm{ch}(u)\tau(X))[X]$ — целое число.*

Это обычная теорема целочисленности. Для получения более конкретных результатов необходимо выбрать некоторый элемент $u \in K(TX)$. Различные теоремы целочисленности соответствуют различным выборам элемента u.

5.4. Теорема целочисленности

Теперь мы выведем формулу, которая объединяет два крайних случая, рассмотренных в п. 5.2 и 5.3. Мы будем пользоваться обозначениями теоремы 5.1.2.

Так как группа G действует тривиально на пространстве X^g, мы имеем $K_G(X^g) = K(X^g) \otimes R(G)$ и, следовательно, характер Чжэня является гомоморфизмом

$$\mathrm{ch}\colon K_G(X^g) \to H^*(X^g, A),$$

где $A = (R(G) \otimes \mathbf{C})_g$.

Аналогично если $\{x_0\}$ — изолированная точка, то характер Чжэня

$$\mathrm{ch}\colon K_G(T\{x_0\}) \to H^*(T\{x_0\}, A) = A$$

является отображением на подкольцо $\Lambda \subset A$. По теореме 5.1.2

$$\operatorname{ch} f_!(u) = \operatorname{ch} f_!^g\left(\frac{i^!u}{\lambda_{-1}(N^g \otimes \mathbf{C})}\right).$$

С одной стороны, $\operatorname{ch} f_!(u) \in \Lambda$. С другой стороны, так как гомоморфизм ch мультипликативен и группа G действует тривиально на X^g (см. п. 5.3), то

$$\operatorname{ch} f_!^g\left(\frac{i^!u}{\lambda_{-1}(N^g \otimes \mathbf{C})}\right) = \left[\frac{\operatorname{ch} i^!u}{\operatorname{ch} \lambda_{-1}(N^g \otimes \mathbf{C})}\tau(X^g)\right][TX^g].$$

Рассмотрим векторное G-расслоение N^g. Каждое представление циклической группы разлагается в прямую сумму одномерных представлений, которые определяются собственными значениями элемента g. Отсюда следует, что

$$N^g = N_\pi \oplus \sum_\theta N_\theta,$$

где N_π — подпространство пространства N^g, натянутое на собственные векторы с собственным значением -1, а N_θ — (вещественное) подпространство пространства N^g, натянутое на собственные векторы с собственными значениями $e^{\pm i\theta}$, $0 < \theta < \pi$. Тогда N_θ обладает естественной комплексной структурой и

$$N_\theta \otimes \mathbf{C} = N_\theta^+ \oplus N_\theta^-,$$

где N_θ^+, N_θ^- — (комплексные) векторные G-расслоения, на которых g действует умножением соответственно на $e^{i\theta}$ и $e^{-i\theta}$. Аналогично $N_\pi \otimes \mathbf{C}$ является векторным G-расслоением, на котором g действует умножением на -1.

Рассмотрим формальные разложения

$$p(N_\pi) = \prod_j (1 + y_{\pi, j}^2), \quad c(N_\theta) = \prod_j (1 + y_{\theta, j}).$$

Тогда

$$c(N^g \otimes \mathbf{C}) = \prod_j (1 - y_{\pi, j}^2) \prod_{0<\theta<\pi} (1 + y_{\theta, j})(1 - y_{\theta, j})$$

и

$$\operatorname{ch}(\lambda_{-1}(N_\theta^+)) = \sum_r (-1)^r \operatorname{ch} \lambda^r(N_\theta^+) =$$

$$= \sum_r (-1)^r \sum e^{ir\theta} e^{y_{\theta, i_1} + \ldots + y_{\theta, i_r}} = \prod_j (1 - e^{i\theta} e^{y_{\theta, j}}).$$

Аналогично

$$\operatorname{ch}(\lambda_{-1}(N_{\bar\theta})) = \prod_j \left(1 - e^{-i\theta} e^{y_{\theta,j}}\right),$$

$$\operatorname{ch}(N_\pi \otimes \mathbf{C}) = \prod_j \left(1 + e^{y_{\theta,j}}\right)\left(1 + e^{-y_{\theta,j}}\right)$$

и, следовательно,

$$\operatorname{ch}(\lambda_{-1}(N^g \otimes \mathbf{C})) =$$

$$= \prod_{0<\theta\leqslant\pi} \prod_j \left(1 - e^{i\theta} e^{y_{\theta,j}}\right)\left(1 - e^{-i\theta} e^{-y_{\theta,j}}\right) =$$

$$= \prod_{0<\theta\leqslant\pi} \prod_j (-1)\left(e^{\frac{1}{2}(i\theta + y_{\theta,j})} - e^{-\frac{1}{2}(i\theta + y_{\theta,j})}\right)^2.$$

Подставляя этот результат в выражение для $\operatorname{ch} f_!(u)$, мы получаем следующее утверждение.

Теорема 5.4.1. *Пусть G — циклическая группа с образующей g, X есть G-многообразие, X^g — множество его неподвижных точек, i: $X^g \to X$ — отображение вложения и N^g — нормальное расслоение над X^g в многообразии X. Пусть элементы $y_{\theta,j}$ определены, как выше, и пусть $u \in K_G(TX)$. Тогда значение коцикла*

$$\frac{\operatorname{ch} i^! u\tau(X^g)}{\prod_j \left(e^{\frac{1}{2}y_{\pi,j}} + e^{-\frac{1}{2}y_{\pi,j}}\right)^2 \prod_{0<\theta<\pi} \prod_j (-1)\left(e^{\frac{1}{2}(i\theta + y_{\theta,j})} - e^{-\frac{1}{2}(i\theta + y_{\theta,j})}\right)^2}$$

на группе $[TX^g]$ принадлежит Λ.

Снова для получения более конкретных результатов необходимо выбрать некоторый элемент $u \in K_G(TX)$. Это будет сделано в п. 5.5; более подробное изложение можно найти в работе [1].

5.5. Построение элемента $u \in K_G(TX)$

Для того чтобы определить элементы $u \in K_G(TX)$, мы построим последовательность

$$0 \to E_0 \to E_1 \to E_2 \to \ldots \to E_n \to 0$$

векторных G-расслоений E_i над касательным пространством TX к многообразию X, которая точна вне нулевого сечения в TX. Для того чтобы сделать это, мы предположим, что многообразие X обладает H-структурой, т. е.

существуют главное H-расслоение P над X, вещественное пространство представления V группы H и изоморфизм $TX \cong P \times_H V$. Теперь предположим, что имеются такие комплексные пространства представления $M_0, M_1, \ldots, M_n$ группы H, что существует H-отображение $V \otimes M_{i-1} \to M_i$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ и что последовательность

$$0 \to M_0 \xrightarrow{v} M_1 \xrightarrow{v} \ldots \xrightarrow{v} M_n \to 0,$$

определяемая при помощи $v \in V$, точна для всех $v \neq 0$. Тогда, если p: $TX \to X$ — отображение проекции, то существует требуемая последовательность

$$0 \to E_0 \to E_1 \to \ldots \to E_n \to 0,$$

где $E_i = p^*(P \times_H M_i)$. Если; кроме того, X является также G-многообразием с H-структурой (т. е. группа G действует согласованно с действием группы H и дифференциальным действием G на касательном пространстве TX), то E_i представляет собой векторное G-расслоение и наша последовательность определяет элемент $u \in K_G(TX)$. Тогда определен изоморфизм Тома φ: $H^*(X, \tilde{Q}) \to$ $\to H^*(TX, \tilde{Q})$, где через $\tilde{Q}$ обозначена группа коэффициентов, целочисленная или приведенная по модулю два, в соответствии с тем, является ли многообразие X ориентируемым или неориентируемым (многообразие TX всегда ориентируемо). Если s: $X \to TX$ — нулевое сечение и $\dim X = 2k$, то отображение $(-1)^k s^* \varphi$ является умножением на эйлеров класс $e(T)$ многообразия X (эйлеров класс берется целочисленный или приведенный по модулю два в зависимости от ориентируемости многообразия X). Следовательно,

$$\varphi^{-1} \operatorname{ch} u = \frac{\sum\limits_j (-1)^j \operatorname{ch}(P \times_H M_j)}{(-1)^k e(T)}$$

всякий раз, когда правая часть имеет смысл.

Далее мы рассмотрим простейшие примеры этой конструкции. Для удобства предположим, что $\dim V = 2k$.

1. *Почти комплексная структура.* В этом случае $H = \mathrm{GL}(k, \mathbf{C})$, $V = \mathbf{C}^k$, $M_i = \lambda^i V$ и $V \otimes \lambda^{i-1} V \to \lambda^i V$ —

внешнее умножение. Многообразие X автоматически является ориентируемым и

$$\sum_i (-1)^i \operatorname{ch}(P \times_H M_i) = \operatorname{ch} \lambda_{-1} T = \prod_{j=1}^{k} \left(1 - e^{y_j}\right),$$

где T — касательное комплексное расслоение над X и $c(T) = \prod_{j=1}^{k}(1 + y_j)$. Таким образом, $\varphi^{-1} \operatorname{ch}(u) = \prod_{j=1}^{k}\left(\frac{1-e^{y_j}}{-y_j}\right)$ и $\varphi \operatorname{ch}(u) \tau(X) = \prod_{j=1}^{k}\left(\frac{-y_j}{1-e^{-y_j}}\right)$ — характеристика Тодда многообразия X. В частности, из теоремы 5.3.1 следует, что род Тодда $T(X)$ многообразия X является целым числом.

2. *Спинорная структура*. В этом случае $H = \operatorname{Spin}(2k)$, $V = \mathbf{R}^{2k}$. Рассмотрим гомоморфизм $V \otimes M_0 \to M_1$, где M_0, M_1 — два спинорных представления, а умножение является клиффордовым умножением. В этом случае $p(X) = \prod_{j=1}^{k}\left(1 + y_j^2\right)$ и

$$\operatorname{ch}(P \times_H M_0) - \operatorname{ch}(P \times_H M_1) = \prod_{j=1}^{k}\left(e^{\frac{1}{2} y_j} - e^{-\frac{1}{2} y_j}\right).$$

Многообразие X автоматически ориентируемо и

$$\varphi^{-1} \operatorname{ch}(u) \tau(X) = \left(\prod_{j=1}^{k} \frac{e^{\frac{1}{2} y_j} - e^{-\frac{1}{2} y_j}}{-y_j}\right) \tau(X) =$$

$$= \prod_{j=1}^{k} \frac{-y_j}{e^{\frac{1}{2} y_j} - e^{-\frac{1}{2} y_j}} = \prod_{j=1}^{k} \frac{-\frac{1}{2} y_j}{\operatorname{sh} \frac{1}{2} y_j}.$$

В частности, теорема 5.3.1 утверждает, что $\hat{A}$-род многообразия X является целым числом.

Заметим, что, используя последовательность

$$0 \to \mathbf{Z}_2 \to \operatorname{Spin}(2k) \to SO(2k) \to 0,$$

можно показать, что ориентируемое $2k$-многообразие допускает спинорную структуру тогда и только тогда, когда второй характеристический класс Штифеля $w_2(X) \in \in H^2(X, \mathbf{Z}_2)$ равен нулю.

3. Ориентируемость. В этом случае $H = SO(2k)$ и $V = \mathbf{R}^{2k}$. Пусть Λ^* обозначает внешнюю алгебру над $\mathbf{R}^{2k}$; рассмотрим оператор двойственности $*$: $\lambda^q\mathbf{R}^{2k} \to \lambda^{2k-q}\mathbf{R}^{2q}$. Определим отображение α: $\Lambda^* \to \Lambda^*$ при помощи формулы $\alpha(\omega^q) = (-1)^{\frac{1}{2}q(q-1)} * \omega$. Тогда $\alpha^2 = (-1)^k$ и

$$\Lambda^* \otimes_R \mathbf{C} = M_0 \oplus M_1,$$

где пространство M_0 натянуто на собственные векторы с собственными значениями $+i^k$, а пространство M_1 — на собственные векторы с собственными значениями $-i^k$. Определим отображение $R^{2k} \otimes M_0 \to M_1$ формулой $v \otimes w \to \to v(w) = v \wedge w - v \vee w$, где $\wedge$ — внешнее умножение, а $\vee$ — сопряженное к нему внутреннее умножение. Тогда

$$v(v(w)) = v \wedge (v \wedge w - v \vee w) -$$
$$- v \vee (v \wedge w - v \vee w) = -\|v\|^2 w,$$

и, следовательно, $\vee$ является изоморфизмом для $v \neq 0$. В этом случае $p(X) = \prod_{j=1}^{k}(1 + y_j^2)$ и

$$\mathrm{ch}(P \times_H M_0) - \mathrm{ch}(P \times_H M_1) = \prod_{j=1}^{k}\left(e^{-y_j} - e^{y_j}\right).$$

Так как X — ориентируемое многообразие, то

$$\varphi^{-1}\,\mathrm{ch}(u)\,\tau(X) = \left(\prod_{j=1}^{k}\frac{e^{-y_j} - e^{y_j}}{-y_j}\right)\tau(X) = \prod_{j=1}^{k}\frac{y_j}{\mathrm{th}\,\frac{1}{2}y_j}.$$

В частности, теорема 5.3.1 утверждает, что элемент $\prod_{j=1}^{k}\frac{y_j}{\mathrm{th}\,\frac{1}{2}y_j}$, вычисленный на $2k$-мерном фундаментальном цикле многообразия X, является целым числом.

Далее,

$$\left(\prod_{j=1}^{k}\frac{y_j}{\mathrm{th}\,\frac{1}{2}y_j}\right)[X] = \frac{1}{2^k}\left(\prod_{j=1}^{k}\frac{2y_j}{\mathrm{th}\,y_j}\right)[X] = \left(\prod_{j=1}^{k}\frac{y_j}{\mathrm{th}\,y_j}\right)[X],$$

так что это согласуется с обычным определением L-рода многообразия X.

Заметим, что, используя последовательность

$$0 \to SO(2k) \to O(2k) \to \mathbf{Z}_2 \to 0,$$

можно доказать, что $2k$-мерное многообразие X является ориентируемым тогда и только тогда, когда первый характеристический класс Штифеля $w_1(X) \in H^1(X, \mathbf{Z}_2)$ равен нулю.

5.6. Частный случай

Применим теорему 5.4.1 в частном случае, когда $u \in K_G(TX)$ является элементом, заданным в примере 3 предыдущего пункта. Рассмотрим формальное разложение

$$p(X^g) = \prod_j (1 + y_j^2), \quad e(T^g) = \prod_j y_j,$$
$$c(T^q \otimes \mathbf{C}) = \prod_j (1 + y_j)(1 - y_j).$$

Тогда в обозначениях п. 5.4 если $s\colon X^g \to TX^g$ является нулевым сечением, то

$$s^* \operatorname{ch} i^!(u) = \prod_j \left(e^{-y_j} - e^{y_j}\right) \prod_j \left(e^{y_{\pi, j}} - e^{-y_{\pi, j}}\right) \times$$
$$\times \prod_\theta \prod_j \left(e^{-(i\theta + y_{\theta, j})} - e^{(i\theta + y_{\theta, j})}\right).$$

Следовательно,

$$\varphi^{-1}\left(\frac{\operatorname{ch} i^! u}{\operatorname{ch} \lambda_{-1}(N^g \otimes \mathbf{C})} \tau(X^g)\right)$$

является произведением сомножителей трех типов:

$$(1) \qquad \prod_j \left(\frac{e^{-y_j} - e^{y_j}}{-y_j}\right) \tau(X^g) = \prod_j \frac{y_j}{\operatorname{th} \frac{1}{2} y_j},$$

$$(2) \qquad \frac{\prod_j \left(e^{y_{\pi, j}} - e^{-y_{\pi, j}}\right)}{\prod_j \left(e^{\frac{1}{2} y_{\pi, j}} + e^{-\frac{1}{2} y_{\pi, j}}\right)^2} = \left(\prod_j \frac{y_{\pi, j}}{\operatorname{th} \frac{1}{2} y_{\pi, j}}\right)^{-1} \prod_j y_{\pi, j},$$

$$(3) \qquad \prod_{0 < \theta < \pi} \frac{\prod_j \left(e^{-(i\theta + y_{\theta, j})} - e^{(i\theta + y_{\theta, j})}\right)}{\prod_j (-1)\left(e^{\frac{1}{2}(i\theta + y_{\theta, j})} - e^{-\frac{1}{2}(i\theta + y_{\theta, j})}\right)^2} =$$
$$= \prod_{0 < \theta < \pi} \prod_j \frac{1}{\left(\operatorname{th} \frac{1}{2}(y_j + i\theta)\right)}.$$

Теперь положим

(1) $\mathscr{L}(X^g)=\prod\limits_j \dfrac{y_j}{\operatorname{th}\frac{1}{2}y_j}$ — полином от классов Понтрягина многообразия X^g с рациональными коэффициентами;

(2) $\mathscr{L}(N_\pi)=\prod\limits_j \dfrac{y_{\pi,j}}{\operatorname{th}\frac{1}{2}y_{\pi,j}}$ — полином от классов Понтрягина пространства N_π с рациональными коэффициентами;

(3) $\mathscr{M}(N_\pi)=\prod\limits_j \dfrac{1}{\operatorname{th}\frac{1}{2}(y_j+i\theta)}$ — полином от классов Чжэня с комплексными коэффициентами.

Пусть $e(N_\pi)$ — класс Эйлера пространства N_π, целочисленный или приведенный по модулю два в зависимости от ориентируемости многообразия X^g. Тогда из теоремы 5.4.1 следует

Теорема 5.6.1. *При сделанных выше предположениях*

$$\left\{\mathscr{L}(X^g)\cdot\mathscr{L}(N_\pi)^{-1}\prod_{0<\theta<\pi}\mathscr{M}(N_\theta)\cdot e(N_\pi)\right\}[X^g]\in\Lambda.$$

В случае $G=\mathbf{Z}_2$ собственные значения элемента g равны ± 1 и, следовательно, все пространство $N_\pi=N^g$ является нормальным расслоением над X^g. Отсюда вытекает

Следствие 5.6.2. *Предположим, что $G=\mathbf{Z}_2$. Тогда*

$$\{\mathscr{L}(X^g)\cdot\mathscr{L}(N^g)^{-1}\cdot e(N^g)\}[X^g]\in\Lambda.$$

Следствие 5.6.3. *Предположим, что характеристические классы расслоений N_π и N_θ равны нулю для всех θ. Тогда*

$$\left\{\mathscr{L}(X^g)\cdot\prod_{0<\theta<\pi}\operatorname{cth}\left(\frac{1}{2}i\theta\right)\right\}[X^g]\in\Lambda.$$

Мы закончим эту лекцию одним более конкретным применением следствия 5.6.3.

Предложение 5.6.4. *Пусть G — циклическая группа порядка p^r, где p нечетно. Тогда группа G не может действовать на многообразии X в точности с одной неподвижной точкой.*

Доказательство. Предположим, что X^g состоит из единственной точки. Тогда $N_\pi=0$, $(X^g)=1$ и собственные значения элемента g имеют вид $\eta, \eta^{r_2}, \ldots, \eta^{r_k}$, где $\eta = e^{2\pi i/n}$, $n=p^r$ и $\eta \neq -1$, так как p нечетно. Из следствия 5.6.3, полагая $\theta = \frac{2\pi r_j}{n}$, получаем

$$\tau = \prod_j \frac{1+\eta^{r_j}}{1-\eta^{r_j}} \in \mathbf{Z}[\eta].$$

Следовательно,

$$\tau \cdot \prod_j (1-\eta^{r_j}) = \prod_j (1+\eta^{r_j}) = \prod_j (2-(1-\eta^{r_j})).$$

Левая часть этого равенства принадлежит идеалу кольца $\mathbf{Z}[\eta]$, порожденному элементом $(1-\eta)$. С другой стороны, правая часть является степенью двойки по модулю этого идеала. А так как $\mathbf{Z}[\eta]/(\eta-1) \cong \mathbf{Z}_p$, мы приходим к противоречию.

ЛИТЕРАТУРА [1])

[1] Palais R., Seminar on the Atiyah — Singer index theorem, with contributions by A. Borel, F. E. Browder and R. Solovay, Annals of Mathematics Studies, 57, Princeton University Press, 1965.

[2*] Милнор Дж., Лекции о характеристических классах I, сб. *Математика*, **3**:**4** (1959), 3—53.

[3*] Милнор Дж., Лекции о характеристических классах II, сб. *Математика*, **9**:**4** (1965), 3—40.

[4*] Том Р., Некоторые свойства „в целом" дифференцируемых многообразий, сб. «Расслоенные пространства», ИЛ, М., 1958, стр. 293—351.

[5*] Атья М., Пространства Тома, сб. *Математика*, **10**:**5** (1966), 48—69.

[6*] Atiyah M., Hirzebruch F., Riemann — Roch theorems for differentiable manifolds, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **65** (1959).

[1]) Звездочкой отмечены работы, добавленные переводчиком. — *Прим. перев.*

ЛЕКЦИЯ 6. АНАЛИТИЧЕСКИЙ ИНДЕКС

В этой лекции мы наметим в общих чертах доказательства двух теорем, касающихся описания кольца $K_G^*(P(E))$ и изоморфизма Тома $K_G^*(X) \cong K_G^*(E)$, которые ранее были получены только для расслоений E, являющихся прямой суммой векторных G-расслоений со слоем $\mathbf{C}$. Как следствие мы получим описание кольца $K_G^*(X \times P(V))$ и изоморфизма Тома $K_G^*(X) \cong K_G^*(X \times V)$ для всех G-модулей V, что ранее было сделано только для случая, когда G — абелева группа. Мы будем предполагать, что X является компактным G-пространством.

6.1. Расщепление векторных G-расслоений

Мы хотим распространить на векторные G-расслоения известный способ расщепления векторных расслоений. Это обобщение основано на следующей теореме, доказательство которой использует дифференциальные операторы и будет приведено в очень краткой форме в п. 6.2.

Теорема 6.1.1. *Пусть X — компактное G-пространство, E — векторное G-расслоение над X и p: $P(E) \to X$ — проективизация расслоения E. Существует такой естественный гомоморфизм*

$$p_!\colon K_G(P(E)) \to K_G(X),$$

что отображение $p_! p^!$ совпадает с тождественным. В частности, отображение $p^!$ является мономорфизмом.

Мы дадим несколько приложений теоремы 6.1.1; некоторые другие приложения даются в п. 7.2 следующей лекции.

Пусть E — векторное G-расслоение со слоем $\mathbf{C}^n$, P — ассоциированное главное расслоение со слоем $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$, а $F(E)$ — пространство расслоения над X, получающееся из расслоения P факторизацией по действию треугольных матриц из группы $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$. Действие группы G на пространстве E вводит в $F(E)$ структуру G-пространства, и проекция π: $F(E) \to X$ является G-отображением. Расслоение $F(E)$ называется *расслоением флагов* на пространстве E. По построению точка $y \in \pi^{-1}(x)$ соответствует некоторому флагу линейных подпространств

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_n = E_x$$

в слое E_x расслоения E над X. Существуют такие векторные G-расслоения $L_1, \ldots, L_n$ над пространством $F(E)$ со слоем $\mathbf{C}$, что

$$\pi^* E = L_1 \oplus \ldots \oplus L_n.$$

Предложение 6.1.2. *Существует такой естественный гомоморфизм*

$$\pi_!\colon K_G(F(E)) \to K_G(X),$$

что отображение $\pi_! \pi^!$ совпадает с тождественным. В частности, отображение $\pi^!$ является мономорфизмом.

Доказательство. Наше утверждение оказывается верным для случая $n = 1$, так как тогда $F(E) = X$. Предположим, что оно верно для случая $n - 1$, $n > 1$. Существует коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} F(E') \arrow[r, equal] \arrow[d, "\pi'"] & F(E) \arrow[d, "\pi"] \\ P(E) \arrow[r, "p"] & X \end{tikzcd}$$

где E' — векторное G-расслоение над пространством $P(E)$, определенное при помощи точной последовательности

$$0 \to H^* \to p^* E \to E' \to 0.$$

По предположению индукции отображение $\pi'_!$ определено. По теореме 6.1.1 отображение $p_!$ также определено. Определим отображение $\pi_!$ следующим образом: $\pi_! = p_! \pi'_!$.

Предложение 6.1.3. *Алгебра $K_G^*(P(E))$ над кольцом $K_G^*(X)$ порождена элементом* η (см. п. 2.7) *с единственным соотношением*

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \eta^{n-i} \lambda^i (E) = 0.$$

Доказательство. Случай, когда $E = L_1 \oplus \ldots \oplus L_n$, где каждое L_i является векторным G-расслоением со слоем $\mathbf{C}$, был рассмотрен в теореме 4.2.1. Рассмотрим следующие диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} P(\pi^*E) & \xrightarrow{\omega} & P(E) \\ \downarrow{\scriptstyle q} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ F(E) & \xrightarrow[\pi]{} & X \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} K_G^*(P(\pi^*E)) & \overset{\omega_!}{\underset{\omega^!}{\rightleftarrows}} & K_G^*(P(E)) \\ \uparrow{\scriptstyle q^!} & & \uparrow{\scriptstyle p^!} \\ K_G^*(F(E)) & \overset{\pi_!}{\underset{\pi^!}{\rightleftarrows}} & K_G^*(X) \end{array}$$

где p и q — проектирующие отображения проективизации соответствующих расслоений, а π и ω являются проектирующими отображениями расслоений флагов. Тогда алгебра $K_G^*(P(\pi^*E))$ порождена над кольцом $K_G^*(F(E))$ элементом η' с единственным соотношением (теорема 4.2.1)

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \eta'^{n-i} q^! \lambda^i (\pi^*E) = 0,$$

где $\eta' = \omega^! \eta$. Отсюда

$$\omega^! \left[\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \eta^{n-i} p^! \lambda^i (E)\right] = 0,$$

и так как отображение $\omega^!$ является мономорфизмом (предложение 6.1.2), то

$$\sum_{i=0}^{n}(-1^i) \eta^{n-i} \lambda^i (E) = 0.$$

Так как отображение $\omega^!$ — мономорфизм, это — единственное соотношение между элементами $1, \eta, \ldots, \eta^n$; поскольку отображение $\omega_!$ — эпиморфизм, каждый элемент из кольца $K_G^*(P(E))$ является линейной комбинацией элементов $1, \eta, \ldots, \eta^{n-1}$.

Теперь из предложения 6.1.3 следует теорема об изоморфизме Тома; рассуждения при доказательстве аналогичны рассуждениям из теоремы 4.2.2.

Теорема 6.1.4. *Пусть X — компактное G-пространство и E — векторное G-расслоение над X. Тогда алгебра $K_G^*(E)$ является свободным $K_G^*(X)$-модулем, порожденным элементом λ_V. В частности, гомоморфизм Тома φ: $K_G(X) \to K_G(E)$ является изоморфизмом.*

Доказательство. Пусть отображение i: $P(E) \to P(E \oplus \mathbf{C})$ является вложением. Согласно предложению 6.1.3, отображение $i^!$ является эпиморфизмом и существует точная последовательность

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to K_G^*(E) \to & K_G^*(P(E \oplus \mathbf{C})) & \xrightarrow{i^!} & K_G^*(P(E)) & \to 0 \\ & \| & & \| & \\ & K_G^*(X)[\eta'] & \to & K_G^*(X)[\eta] & \to 0 \end{array}$$

со следующими соотношениями: $i^!\eta' = \eta$, $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \eta^{n-i} \lambda^i (E) = 0$ и $\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \eta'^{n+1-i} \lambda^i (E \oplus \mathbf{C}) = (\eta - 1) \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \eta'^{n-i} \lambda^i (E) = 0$. Поэтому алгебра $K_G^*(X) = \ker i^!$ изоморфна свободному $K_G^*(X)$-модулю, порожденному элементом $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \times \eta^{n-i} \lambda^i (E)$, и (как это видно, если мы возьмем соответствующий элемент из $K_G^*(E)$) изоморфна свободному $K_G^*(X)$-модулю, порожденному элементом $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \lambda^i (E) = \lambda_E$.

6.2. Семейства дифференциальных операторов

Пусть p: $Y \to X$ — расслоенное пространство, слоем которого является компактное дифференцируемое многообразие M, а структурной группой — подгруппа группы диффеоморфизмов многообразия M. Тогда дифференциал dp: $TY \to p^*TX$ имеет максимальный ранг. Ядро T_p отображения dp является вещественным векторным расслоением со слоем размерности $\dim M$ и называется расслоением *вдоль слоев* пространства Y.

Предположим, что группа G действует на расслоении p: $Y \to X$ согласованно со структурной группой, и вспомним, что при помощи метрики мы можем отождествить пространство T_p с его двойственным.

Предложение 6.2.1. *Существует естественный гомоморфизм $K_G(X)$-модулей*

$$\text{ind}: K_G(T_p) \to K_G(X),$$

который в случае, когда X — точка, сводится к аналитическому индексу[1]).

Мы не будем доказывать здесь это предложение, но сделаем несколько замечаний для случая, когда X — точка.

Пусть π: $TM \to M$ — проекция; рассмотрим дифференцируемые комплексные векторные расслоения E и F над многообразием M. Дифференциальный оператор d: $\Gamma(E) \to \Gamma(F)$ порядка k определяет символ

$$\sigma\colon \pi^*E \to \pi^*F.$$

Определение. Оператор d называется эллиптическим, если σ является изоморфизмом вне нулевого сечения расслоения TM.

Следовательно, эллиптический дифференциальный оператор d определяет элемент $\sigma(d) = (\pi^*E, \pi^*F, \sigma)$ из $K(TM)$. С другой стороны, из условия эллиптичности можно вывести, что пространства $\ker d$ и $\operatorname{coker} d$ имеют конечную размерность. Индекс $\operatorname{ind} d$ оператора d определяется формулой

$$\operatorname{ind} d = \dim\ker d - \dim\operatorname{coker} d.$$

В действительности не каждый элемент $d \in K(TM)$ соответствует дифференциальному оператору. Однако это будет верно, если мы рассмотрим более широкий класс — класс псевдодифференциальных операторов, введенных Сили [3]. По тем же самым соображениям определяется гомоморфизм

$$\operatorname{ind}\colon K(TM) \to \mathbf{Z}.$$

Более полные результаты содержатся в работе [4], в которой также разобран и более общий случай.

Если X — точка и M — некоторое G-многообразие, то эллиптический дифференциальный оператор d, который перестановочен с действием группы G на пространствах $\Gamma(E)$, $\Gamma(F)$, определяет, с одной стороны, элемент

$$\sigma(d) \in K_G(TM),$$

а с другой стороны,

$$\operatorname{ind} d = \ker d - \operatorname{coker} d \in R(G).$$

---

[1]) Определение аналитического индекса дается далее. — *Прим. перев.*

где $\ker d$ и $\operatorname{coker} d$ теперь являются пространствами представления группы G. Отсюда мы получаем требуемый гомоморфизм

$$\mathrm{ind}\colon K_G(TM) \to K_G(\text{точка}) = R(G).$$

Распространение этих результатов на общие G-пространства X и G-расслоения $p\colon Y \to X$ связано с рассмотрением семейств $d = \{d_x\}$ эллиптических дифференциальных операторов. Каждый из них гомотопен оператору, для которого $\ker d_x$ и $\operatorname{coker} d_x$ имеют постоянную размерность и поэтому определяют векторные G-расслоения $\ker d$ и $\operatorname{coker} d$. Тогда

$$\mathrm{ind}\, d = \ker d - \operatorname{coker} d \in K_G(X)$$

и существует гомоморфизм

$$\mathrm{ind}\colon K_G(T_p) \to K_G(X).$$

Если T_p является также комплексным векторным расслоением, то композиция гомоморфизма ind с гомоморфизмом Тома $\varphi\colon K_G(Y) \to K_G(T_p)$ определяет естественный гомоморфизм

$$p^!\colon K_G(Y) \to K_G(X).$$

Заметим, что отображение $p^!$ не обладает какими-то специальными свойствами по отношению к отображению $p_!$. Это будет доказано в п. 6.3 для расслоений $p\colon Y \to X$, удовлетворяющих некоторым дополнительным ограничениям.

6.3. Семейства дифференциальных операторов над комплексными многообразиями[1])

Пусть M — компактное комплексное многообразие, и пусть Q_M — пучок ростков голоморфных функций на M. Если многообразие M связно, то по теореме Лиувиля $H^0(M, Q_M) \cong \mathbf{C}$. Мы будем говорить, что M — *регулярное* многообразие, если M связно и если $H^i(M, Q_M) = 0$ для всех $i > 0$.

[1]) Определения и доказательство некоторых утверждений, относящихся к этому пункту, читатель может найти в книге: Чжэнь Шэн-шэнь, Комплексные многообразия, ИЛ, М., 1961. — *Прим. перев.*

(Предостережение: слово «регулярный» употребляется иногда в том смысле, что $H^1(M, Q_M)=0$.)

Лемма 6.3.1. *Пусть V — комплексное векторное пространство. Комплексные многообразия $P(V)$ и $F(V)$ регулярны.*

Доказательство (см. [2; § 15]). Из теоремы Дальбо следует, что $\dim H^i(M, Q_M)$ равна числу $h^{0,i}$ линейно независимых гармонических форм типа $(0, i)$. С другой стороны, $P(V)$ и $F(V)$ являются кэлеровыми многообразиями, кольцо комплексных когомологий которых порождается элементами из $H^2(P(V), \mathbf{C})$ и $H^2(F(V), \mathbf{C})$. Эти элементы являются классами Чжэня комплексных аналитических линейных расслоений и, следовательно, имеют тип $(1, 1)$. Отсюда вытекает, что $h^{p,q}=0$ для всех $p\neq q$, и поэтому $h^{0,i}=0$ для $i>0$.

Теперь предположим, что $p\colon Y\to X$ — расслоение со слоем регулярное комплексное многообразие M и что структурная группа согласована с группой комплексных аналитических гомеоморфизмов многообразия M. Обозначим через T_p *двойственное* комплексное векторное расслоение вдоль слоев. Существует дифференциальный оператор (более подробно см. [2; § 15 и 25])

$$\bar{\partial}\colon \Gamma(\lambda^r\bar{T}_p)\to\Gamma(\lambda^{r+1}\bar{T}_p),$$

задаваемый дифференцированием по координате $\bar{z}$. Соответствующий комплекс дифференциальных операторов

$$0\to\Gamma(\lambda^0\bar{T}_p)\xrightarrow{\bar{\partial}}\ldots\to\Gamma(\lambda^{m-1}\bar{T}_p)\xrightarrow{\bar{\partial}}\Gamma(\lambda^m\bar{T}_p)\to 0$$

эллиптичен. Его символ является элементом из $K_G(\bar{T}_p)=K_G(T_p)$, определяемым при помощи последовательности внешних произведений

$$0\to\pi^*\lambda^0\bar{T}_p\to\ldots\to\pi^*\lambda^{m-1}\bar{T}_p\to\pi^*\lambda^m\bar{T}_p\to 0.$$

Здесь $\pi\colon\bar{T}_p\to X$ — комплексное векторное расслоение, сопряженное к расслоению T_p; пространства расслоений $\bar{T}_p$ и $\bar{T}_p$ совпадают.

В каждой точке $x\in X$ ядром соответствующего дифференциального оператора d_x служит пространство гармонических форм на многообразии M типа $(0, r)$, где r четно, а коядром — пространство гармонических форм на M типа $(0, r)$, где r нечетно. Так как многообразие M регулярно, существуют изоморфизмы

$$\ker d_x \cong \mathbf{C}, \qquad \operatorname{coker} d_x = 0,$$
$$\ker \{d_x\} \cong \mathbf{C}, \qquad \operatorname{coker} \{d_x\} = 0.$$

Если $p\colon Y \to X$ есть расслоенное G-пространство и группа G содержится в структурной группе, то образом элемента $\{d_x\}$ при гомоморфизме

$$\operatorname{ind}\colon K_G(T_p) \to K_G(X)$$

является элемент $1 \in K_G(X)$.

Вспомним определение гомоморфизма Тома $\varphi\colon K_G(Y) \to \to K_G(\overline{T}_p)$. Из построения элемента $\{d_x\}$ вытекает, что его символом является $\varphi(1)$ и, следовательно, что

$$p_!(1) = \operatorname{ind}(\varphi(1)) = 1 \in K_G(X).$$

Так как отображение $p_!$ является гомоморфизмом $K_G(X)$-модулей, мы заключаем, что при сделанных выше предположениях $p_! p^!$ — тождественное отображение. Это доказывает теорему 6.1.1 (если положить $Y = P(E)$) и предложение 6.1.2 (при $Y = F(E)$).

6.4. Замечания к теореме об индексе

В п. 4.3 мы определили гомоморфизм

$$f_!\colon K_G(TY) \to K_G(\text{точка}) = R(G)$$

для любой абелевой группы G. В п. 6.2 мы определили гомоморфизм

$$\operatorname{ind}\colon K_G(TY) \to K_G(\text{точка}) = R(G)$$

для любой группы G. Заметим, что определение отображения $f_!$ опирается на топологические методы, а определение отображения ind — на аналитические методы.

Теорема 6.4.1. *Отображения $f_!$ и* ind *совпадают там, где они оба определены.*

В случае когда G — единичная группа, это утверждение представляет собой теорему Атья — Зингера об индексе, которая доказана в работе [1]. Другое доказательство, которое будет опубликовано в выходящей в ближайшее время работе Атья и Зингера, справедливо для произвольной компактной группы Ли G.

Теорема 6.4.1 показывает, что мы можем, используя теорему об изоморфизме Тома (6.1.4), распространить определение отображения $f_!$ на неабелевы группы G без каких-либо затруднений. Эта теорема также дает объяснение целым числам и представлениям, которые появляются в теоремах целочисленности; они выступают теперь как индексы дифференциальных операторов.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Atiyah M. F., Singer I. M., The index of elliptic operators on compact manifolds, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 69 (1963), 422—433. (Русский перевод: сб. *Математика*, 10 : 3 (1966), 29—38.)

[2] Hirzebruch F., Neue topologishe methoden in der algebraischen Geometrie, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1956.

[3] Seeley R., Integro-differential operators on vector bundles, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 117 (1965), 167—204. (Русский перевод: сб. *Математика*, 11 : 2 (1967), 57—97.)

[4] Palais R., Seminar on the Atiyah — Singer index theorem, with contributions by A. Borel, F. E. Browder and R. Solovay, Annals of Math. Studies, 57, Princeton University Press.

ЛЕКЦИЯ 7. ПОПОЛНЕНИЯ

В этой лекции мы сформулируем один результат, касающийся пополнения $\widehat{K}_G(X)$ $R(G)$-модуля $K_G(X)$, соответствующего $I(G)$-адической топологии. Мы будем предполагать, что X — компактное G-пространство.

7.1. Пополнения $R(G)$-модулей

Пусть A — некоторое кольцо, I — идеал в кольце A и M — некоторый A-модуль.

Под *I-адической топологией* модуля M мы будем понимать топологию, в которой подмодули I^nM модуля M образуют базис окрестностей нуля $0 \in M$.

Существуют цепочка вложений

$$\ldots \subset I^nM \subset I^{n-1}M \subset \ldots \subset I^2M \subset IM \subset M$$

и соответствующая ей цепочка гомоморфизмов

$$\ldots \to M/I^nM \to M/I^{n-1}M \to \ldots \to M/I^2M \to M/IM.$$

Пополнение $\hat{M}$ модуля M, соответствующее I-адической топологии, мы определим как

$$\hat{M} = \varprojlim_n M/I^n M.$$

Ясно, что $\hat{M}$ является $\hat{A}$-модулем [1] и что существует естественное отображение $M \to \hat{M}$ с ядром $\bigcap_{n=0}^{\infty} I^n M$.

Замечание. Модуль M является хаусдорфовым пространством тогда и только тогда, когда множество $\bigcap_{n=0}^{\infty} I^n M$ пусто. В этом случае $\hat{M}$ является пополнением модуля M, соответствующим метрике

$$\| x \| = e^{-v(x)},$$

где

$$v(x) = \begin{cases} \infty, & \text{если} \quad x = 0, \\ n, & \text{если} \quad x \in I^n M, \quad x \notin I^{n+1} M. \end{cases}$$

Гомоморфизм u: $M' \to M$ индуцирует диаграмму гомоморфизмов

$$\begin{array}{ccc} M'/I^n M' & \to & M'/I^{n-1} M' \\ \downarrow & & \downarrow \\ M/I^n M & \to & M/I^{n-1} M \end{array}$$

и, следовательно, гомоморфизм $\hat{u}$: $\hat{M}' \to \hat{M}$ $\hat{A}$-модулей.

Теперь рассмотрим кольцо $R(G)$. Существует гомоморфизм [2]

$$\varepsilon: R(G) \to \mathbf{Z},$$

который ставит в соответствие каждому представлению его размерность. Положим $I(G) = \ker \varepsilon$ и рассмотрим

---

[1] Пополнением кольца A, соответствующим I-адической топологии, где I — идеал в кольце A, называется кольцо $\hat{A} = \varprojlim_n A/I^n A$. — *Прим. перев.*

[2] В литературе часто этот гомоморфизм называют аугментацией. — *Прим. перев.*

$I(G)$-адическое пополнение $\hat{R}(G)$ модуля $R(G)$. Более подробное описание структуры $\hat{R}(G)$ можно найти в работе [3] для случая, когда G — связная группа Ли, и в работе [1], если группа G конечна.

Напомним, что $R(G)$ является нётеровым кольцом и что (см. п. 3.5) если X — компактное дифференцируемое G-многообразие, то $K_G(X)$ — модуль конечного типа над кольцом $R(G)$. Эти замечания важны отчасти потому, что ([1; § 3]) пополнение является точным функтором для модулей конечного типа над нётеровым кольцом.

7.2. Обобщение теоремы Атья: $K(B_G) = \hat{R}(G)$

В этом пункте мы обсудим следующий вопрос: можно ли связать естественным образом с компактным G-пространством X такое пространство X_G, что $K_G(X) \cong K(X_G)$.

Если группа G действует без неподвижных точек на пространстве X, то ответ на этот вопрос, как мы знаем, положительный, потому что $K_G(X) \cong K(X/G)$. Если же G не действует без неподвижных точек, то ответ, по-видимому, отрицательный, однако *можно* определить функтор $X \to X_G$, такой, что $K_G(X)$ и $K(X_G)$ будут изоморфны, если их пополнить по соответствующим естественным топологиям в них как в модулях с фильтрацией.

Рассмотрим случай, когда X — точка. Известно, что $\hat{R}(G) \cong K(E_G/G)$, где E_G — стягиваемое пространство, на котором группа G действует без неподвижных точек. (См. [1] для конечной группы G, [3] — для связной группы G, [2] — для общей группы G.) Это подсказывает общее решение: выберем свободное G-пространство $E(X)$ и G-отображение $E(X) \to X$, являющееся гомотопической эквивалентностью над X (но не обязательно G-гомотопической эквивалентностью). Положим $X_G = E(X)/G$. Тогда мы хотели бы построить изоморфизм типа

$$\hat{K}_G(X) \xrightarrow{\cong} \hat{K}_G(E(X)) = \hat{K}(X_G).$$

В частности, если X — свободное G-пространство, то за пространство $E(X)$ можно принять само X.

Мы не можем дать здесь полного решения данного вопроса по двум причинам. Во-первых, потому что компактная группа не может действовать без неподвижных точек на компактном стягиваемом пространстве (по крайней мере если пространство является также локально стягиваемым), поэтому $E(X)$ не может быть компактным, если только X не является свободным. Но для некомпактных пространств мы не определили функтор K_G.

Второй причиной является то, что мы не определили фильтрацию на $K_G(X)$. Однако известно, что топология фильтрации в $R(G) = K_G$(точка) совпадает с $I(G)$-адической топологией, определенной в п. 7.1. Кроме того, $K_G(X)$ — модуль с фильтрацией над кольцом с фильтрацией $R(G)$, и представляется, во всяком случае, вероятным, что, когда $K_G(X)$ — конечный $R(G)$-модуль, топология фильтрации в $K_G(X)$ индуцируется соответствующей топологией кольца $R(G)$ и совпадает с $I(G)$-адической топологией. Эти замечания служат обоснованием следующих теорем.

Пусть $\underline{E(X)}$ — категория компактных свободных G-пространств над X. (Другими словами, объектами категории $\underline{E(X)}$ являются пары $(E,\ p_E\colon E \to X)$, где E — компактное свободное G-пространство, а p_E является G-отображением.)

Теорема 7.2.1. *Если $K_G^*(X)$ — конечный $R(G)$-модуль, то*

(1) $\hat{K}_G^*(X) \xrightarrow{\cong} \varprojlim_E \hat{K}_G^*(E) = \varprojlim_E \hat{K}^*(E/G)$,

(2) $R^1 \varprojlim_E \hat{K}_G^*(E) = 0$ [1]),

где E пробегает категорию $\underline{E(X)}$ и все пополнения берутся в $I(G)$-адической топологии.

Замечание. Утверждение (2) включено для удобства тех, кто знаком с поведением обобщенных теорий когомологий и понимает, что есть основания надеяться получить короткую точную последовательность (см. [5])

$$0 \to R^1 \varprojlim \hat{K}_G^{q-1}(E) \to \hat{K}_G^q(X) \to \varprojlim \hat{K}_G^q(E) \to 0.$$

Прежде чем переходить к доказательству, заметим, что допустимо и удобно понимать под $\underline{E(X)}$ категорию

---

[1]) В обозначениях Гротендика $R^1(\ \ )$ — первый производный функтор. — *Прим. перев.*

компактных свободных G-пространств над X и *послойно G-гомотопических классов* отображений.

Напомним также, что функтор $\theta\colon \mathscr{E}_0 \to \mathscr{E}$ называется конфинальным, если

(1) для каждого объекта из $\mathscr{E}$ существует морфизм в объект $\theta(E)$, $E \in \mathscr{E}_0$;

(2) каждая диаграмма

$$\begin{tikzcd} & \theta(E_1) \\ P \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & \theta(E_2) \end{tikzcd}$$

в $\mathscr{E}$ может быть продолжена до коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} & \theta(E_1) \arrow[dr, "\theta(f_1)"] & \\ P \arrow[ur] \arrow[dr] & & \theta(E) \\ & \theta(E_2) \arrow[ur, "\theta(f_2)"'] & \end{tikzcd}$$

Теперь уже без труда можно показать, что естественное отображение

$$\theta^*\colon \varprojlim_{\mathscr{E}} F \to \varprojlim_{\mathscr{E}_0} F \circ \theta$$

является изоморфизмом для каждого контравариантного функтора из $\mathscr{E}$ в категорию абелевых групп.

Мы разобьем доказательство теоремы 7.2.1 на несколько этапов.

Предложение 7.2.2. *Теорема 7.2.1 эквивалентна следующему утверждению:*

Если $K_G^*(X)$ — конечный $R(G)$-модуль, то

(1) $\widehat{K}_G^*(X) \xrightarrow{\cong} \varprojlim_P \widehat{K}_G^*(P \times X)$,

(2) $R^1 \varprojlim_P \widehat{K}_G^*(P \times X) = 0$,

где P пробегает категорию компактных свободных G-пространств и G-гомотопических классов отображений.

Доказательство. Мы должны показать, что подкатегория проекций $(P \times X \to X)$ является конфинальной в категории $\underline{E}(X)$. Но каждый элемент $(E \to X)$ в $\underline{E(X)}$ допускает очевидное отображение в $\left(E \times X \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} X\right)$. С другой стороны, каждая диаграмма

$$\begin{tikzcd} & P_1 \times X \\ E \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & P_2 \times X \end{tikzcd}$$

может быть продолжена до диаграммы

$$\begin{tikzcd} & P_1 \times X \arrow[dr] & \\ E \arrow[ur] \arrow[dr] & & (P_1 * P_2) \times X \\ & P_2 \times X \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

которая является коммутативной с точностью до послойной G-гомотопии.

Теперь выберем и зафиксируем вложение $\varphi\colon G \to U$ группы G в некоторую унитарную группу. Вложение φ индуцирует функтор φ_*: $\{G\text{-пространства}\} \to \{U\text{-пространства}\}$, определяемый формулой $X \to U \times_G X$. Из 1.3.3 получаем, что $K_U^*(\varphi_* X) \cong K_G^*(X)$. Но $I(G)$-адическая топология на каждом $R(G)$-модуле совпадает с $I(U)$-адической топологией, поэтому $\hat{K}_U^*(\varphi_* X) \cong \hat{K}_G^*(X)$.

Функтор φ_* сопоставляет свободному G-пространству свободное U-пространство. Отображение φ_*, рассматриваемое как функтор из $\underline{E(X)}$ в $\underline{(E(\varphi_* X)}$, является конфинальным, так как пространство X допускает G-отображение в пространство $U \times_G X$ и т. д. Таким образом, теорема 7.2.1 для G-пространств X эквивалентна теореме 7.2.1 для U-пространств $\varphi_* X$, т. е. имеет место

Предложение 7.2.3. *Достаточно доказать теорему* 7.2.1 *для унитарной группы* $U(n)$.

Предложение 7.2.4. *Достаточно доказать теорему* 7.2.1 *для случая, когда группа* G *является тором* $T^n = T$.

Доказательство. Напомним, что в п. 6.1 мы определили естественный гомоморфизм

$$p_!\colon K_G(F \times X) \to K_G(X),$$

такой, что $p_! p^!$ — тождественный гомоморфизм, (через F обозначено многообразие флагов на $\mathbf{C}^n$, $F = U(n)/T$).

Применяя это к случаю, когда $G = U(n)$, мы замечаем, что если X является $U(n)$-пространством, то

$$U(n)/T \times X \cong U(n) \times_T X.$$

Мы получили естественный гомоморфизм

$$K_T(X) \cong K_{U(n)}(U(n) \times_T X) \xrightarrow{p_!} K_{U(n)}(X),$$

который является левым обратным к гомоморфизму „ограничения“ $p^!$: $K_{U(n)}(X) \to K_T(X)$.

Теперь рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} \widehat{K}^*_{U(n)}(X) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, shift right, "p^!"'] & \varprojlim \widehat{K}^*_{U(n)}(E) \arrow[d, shift right, "\widetilde{p}^!"'] \\ \widehat{K}^*_T(X) \arrow[r, "\beta"] \arrow[u, shift right, "p_!"'] & \varprojlim \widehat{K}^*_T(E) \arrow[u, shift right, "\widetilde{p}_!"'] \end{tikzcd}$$

где $p_! p^!$ и $\widetilde{p}_! \widetilde{p}^!$ — тождественные отображения. Ясно, что если β — изоморфизм, то и α — изоморфизм.

Аналогично $R^1 \varprojlim \widehat{K}^*_{U(n)}(E)$ является прямым слагаемым в $R^1 \varprojlim \widehat{K}^*_T(E)$, что доказывает вторую часть утверждения.

Доказательство для случая, когда $G = T$. Заметим сначала, что если $G = H_1 \times H_2$ и если P_1, P_2 являются свободными соответственно H_1-, H_2-пространствами, то $P_1 \times P_2$ является свободным G-пространством, и что свободные G-пространства такого типа конфинальны в категории всех свободных G-пространств. (В самом деле, каждое свободное G-пространство P допускает диагональное отображение на пространство $P/H_1 \times P/H_2$ и т. д.)

Применяя это к случаю $G = T$ и используя предложение 7.2.2, мы видим, что теорема 7.2.1 полностью вытекает из следующего предложения.

Предложение 7.2.5. *Если* $K^*_T(X)$ — *конечный* $R(T)$-*модуль, то*

(1) $\widehat{K}^*_T(X) \xrightarrow{\cong} \varprojlim_P \widehat{K}^*_T(X \times P)$,

(2) $R^1 \varprojlim_P \widehat{K}^*_T(X \times P) = 0$,

где P пробегает категорию компактных свободных S^1-пространств и S^1-гомотопических классов отображений. (Предполагается, что задан фиксированный гомоморфизм θ: $T \to S^1$, который S^1-пространство превращает в T-пространство.)

Доказательство предложения 7.2.5. Будем рассматривать S^1 как группу комплексных чисел, по модулю равных 1. Тогда S^1 действует естественно на S^{2n-1} — единичной сфере в пространстве $\mathbf{C}^n$. Кроме того, множество сфер S^{2n-1} с отображениями вложения является конфинальным в категории свободных S^1-пространств. Каждое свободное S^1-пространство P можно рассматривать как расслоение на единичные сферы, ассоциированное с комплексным линейным расслоением L. Но L можно считать подрасслоением тривиального расслоения со слоем $\mathbf{C}^n$. Результирующее $\mathbf{C}$-отображение $L \to \mathbf{C}^n$ индуцирует S^1-отображение $P \to S^{2n-1}$. Но каждые два S^1-отображения $P \to S^{2n-1}$, $P \to S^{2m-1}$ гомотопны в $S^{2(m+n)-1} \simeq S^{2n-1} \wedge S^{2m-1}$. Таким образом, мы должны показать, что

(1) $\widehat{K}_T^*(X) \xrightarrow{\cong} \varprojlim_n \widehat{K}_T^*(X \times S^{2n-1})$,

(2) $R^1 \varprojlim_n \widehat{K}_T^*(X \times S^{2n-1}) = 0$.

Рассмотрим длинную точную последовательность

$$\ldots \to K_T^*(X \times D^{2n},\ X \times S^{2n-1}) \to$$
$$\to K_T^*(X \times D^{2n}) \to K_T^*(X \times S^{2n-1}) \to \ldots$$

Используя изоморфизм Тома, получаем

$$\ldots \to K_T^*(X) \xrightarrow{\alpha} K_T^*(X) \to K_T^*(X \times S^{2n-1}) \to \ldots,$$

где отображение α является умножением на $\lambda_{-1}[\mathbf{C}^n] = (1-\theta)^n$.

Так как $K_T^*(X)$ — конечный $R(T)$-модуль, эта последовательность останется точной после применения операции пополнения. (Это единственное место, где используется конечность.) Мы получаем точные последовательности

$$(1)\quad 0 \to A/(1-\theta)^n A \to \hat{K}_T^*(X \times S^{2n-1}) \to B_n \to 0,$$

$$(2)\quad 0 \to B_n \to A_n \xrightarrow{(1-\theta)^n} (1-\theta)^n A \to 0,$$

где $A = \hat{K}_T^*(X)$, $A_n = A$, но отображение $A_{n+1} \to A_n$ является умножением на $(1-\theta)$. Теперь заметим, что $(1-\theta)^n A \subset I^n(T) \cdot A$ и $\varprojlim_n (1-\theta)^n A = 0$.

По той же причине $\varprojlim_n A/(1-\theta)^n A = A$. Далее, $R^1 \varprojlim_n A/(1-\theta)^n A = 0$, так как отображения в последовательности (1) являются эпиморфизмами. Наконец, напомним, что

$$0 \to \varprojlim A_n \to \prod A_n \xrightarrow{\varphi} \prod A_n \to R^1 \varprojlim A_n \to 0,$$

где $\varphi(\{a_i\}) = \{a_i + (1-\theta) a_{i+1}\}$ (см. [5]). Но φ является изоморфизмом на полном модуле $\prod A_n$, так как существует обратное отображение

$$\{a_i\} \to \Big\{ \sum_{j \geqslant 0} (1-\theta)^j a_{i+j} \Big\}.$$

Отсюда $\varprojlim_n A_n = R' \varprojlim_n A_n = 0$.

Этим завершается доказательство, поскольку (1) индуцирует последовательность

$$0 \to \varprojlim A/(1-\theta)^n A \to \varprojlim \hat{K}_T^*(X \times S^{2n-1}) \to \varprojlim B_n \to$$
$$\to R^1 \varprojlim A/(1-\theta)^n A \to R^1 \varprojlim \hat{K}_T^*(X \times S^{2n-1}) \to$$
$$\to R^1 \varprojlim B_n \to 0,$$

в то время как из (2) мы получаем

$$0 \to \varprojlim B_n \to \varprojlim A_n \to \varprojlim (1-\theta)^n A \to$$
$$\to R^1 \varprojlim B_n \to R^1 \varprojlim A_n,$$

откуда $\varprojlim B_n = R^1 \varprojlim B_n = 0$.

Замечание 7.2.6. Построение конфинальной последовательности свободных S^1-пространств является, конечно, частным случаем милноровского построения универсальных расслоений [4]. Действительно, последовательность G, $G*G$, $G*G*G$, ... конфинальна в категории свободных компактных G-пространств, поэтому теорема 7.2.1 получает следующую эквивалентную формулировку:

$$(1)\quad \hat{K}^*_G(X) \xrightarrow{\cong} \varprojlim_n \hat{K}^*(X^n_G),$$

$$(2)\quad R^1 \varprojlim_n \hat{K}^*(X^n_G) = 0,$$

где $X^n_G = (X \times E^n_G)/G$ и $E^n_G = G* \ldots *G$ (n экземпляров). Когда X — точка, мы получаем в точности результат Атья.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Atiyah M. F., Characters and cohomology of finite groups Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci., 9 (1961).
[2] Atiyah M. F., Finiteness theorems for compact Lie groups (в печати).
[3] Атья М. Ф., Хирцебрух Ф., Векторные расслоения и однородные пространства, сб. *Математика*, 6:2 (1962), 3—39.
[4] Milnor J., Construction of universal bundles I, II, *Ann. Math.*, 63 (1956), 272—284, 430—436.
[5] Milnor J., Axiomatic homology theory, *Pacific J. Math.*, 12 (1962), 337—341.

II. K-ТЕОРИЯ И ВЕЩЕСТВЕННОСТЬ [1])

М. Ф. Атья

Введение

K-теория комплексных векторных расслоений [2, 5] имеет много вариантов и уточнений. Вот некоторые из них:

1. K-теория вещественных векторных расслоений, обозначаемая через KO.

2. K-теория самосопряженных расслоений, обозначаемая через KC [1] или через KSC [7].

3. K-теория векторных G-расслоений над G-пространствами [6], обозначаемая через K_G.

В этой работе вводится новая K-теория, которую мы будем обозначать KR и которая в некотором смысле является смесью этих трех. Наше определение оправдывается отчасти аналогией с вещественной алгебраической геометрией и с теорией вещественных эллиптических операторов. В самом деле, наша KR-теория удобна при рассмотрении проблемы индекса вещественного эллиптического оператора. С другой стороны, с чисто топологической точки зрения KR-теория имеет ряд преимуществ, и есть основания рассматривать ее как первичную теорию, а все остальные получать из нее. Одна из главных целей этой работы состоит в том, чтобы получить из KR-теории элегантное доказательство теоремы периодичности для KO-теории, отправляясь по существу от теоремы периодичности в K-теории, доказанной в [3]. Попутно мы естественным образом сталкиваемся с самосопряженной теорией и различными точными последовательностями, связывающими различные теории. Здесь наша работа существенно пересекается с диссертацией Андерсона [1], но с нашей новой точки зрения соотношения между различными теориями делаются значительно прозрачнее.

---

[1]) Atiyah M. F., K-theory and reality, *The Quarterly Journal of Mathematics*, 17, 68 (1966), 367—386.

Недавно Каруби [8] развил абстрактную K-теорию в некотором классе категорий с инволюцией. Наша теория включается в эту абстракцию, но ее частные свойства не развиты в [8]; не рассматривается там и упрощение KO-периодичности.

Определение и элементарные свойства функтора KR даны в § 1. В § 2 обсуждаются теорема периодичности и общие когомологические свойства KR. Далее, в § 3, мы приводим несколько производных теорий: KR-теория с коэффициентами в некоторых пространствах. В конце этого параграфа доказана теорема периодичности для KO-теории. В § 4 мы коротко обсуждаем связь KR-теории с клиффордовыми алгебрами (см. [4]) и, в частности, доказываем лемму, которая используется в § 3. Значение KR-теории для изучения топологическими методами вещественных эллиптических операторов коротко обсуждается в § 5.

Эта работа возникла по существу в результате совместных исследований автора с И. М. Зингером, относящихся к теореме об индексе. Ее отдельная публикация вызвана тем, что она представляет самостоятельный топологический интерес.

1. Вещественная категория

Под *пространством с инволюцией* мы понимаем топологическое пространство X и гомеоморфизм $\tau\colon X \to X$ периода 2 (т. е. $\tau^2 = \mathrm{id}$). Инволюция τ рассматривается как часть структуры X и там, где это не может вызвать недоразумений, часто опускается. В терминах [6] пространство с инволюцией — это Z_2-пространство, где Z_2 — группа порядка 2. В другой более удобной терминологии пространство с инволюцией называется *вещественным* пространством (по аналогии с алгебраической геометрией). В самом деле, если X — множество комплексных точек вещественного алгебраического многообразия, то оно имеет естественную структуру вещественного пространства в нашем смысле (инволюция задается комплексным сопряжением). Заметим, что неподвижные точки этой инволюции — это как раз вещественные точки многообразия X. В соответствии с этим примером мы будем часто записывать инволюцию τ как комплексное сопряжение: $\tau(x) = \bar{x}$.

Под *вещественным векторным расслоением* над *вещественным* пространством X мы понимаем комплексное векторное расслоение E над X, которое также является вещественным пространством, и

(i) проекция $E \to X$ вещественна (т. е. коммутирует с инволюциями на E и X),

(ii) отображение $E_x \to E_{\bar{x}}$ антилинейно, т. е. диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C} \times E_x & \to & E_x \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{C} \times E_{\bar{x}} & \to & E_{\bar{x}} \end{array}$$

в которой вертикальные стрелки означают инволюцию, а $\mathbf{C}$ рассматривается в своей стандартной вещественной структуре ($\tau(z) = \bar{z}$), коммутативна.

Важно заметить разницу между векторными расслоениями в категории вещественных пространств (в смысле данного здесь определения) и комплексными векторными расслоениями в категории Z_2-пространств. В определении последних отображение

$$E_x \to E_{\tau(x)}$$

предполагается комплексно-линейным. С другой стороны, заметим, что если E — вещественное векторное расслоение в категории Z_2-пространств, то его комплексификация может быть задана двумя разными способами в зависимости от того, продолжается отображение

$$E_x \to E_{\tau(x)}$$

линейно или антилинейно. В первом случае это будет расслоение в вещественной категории, в то время как во втором случае — комплексное расслоение в Z_2-категории.

В неподвижных точках инволюции на X (называемых также вещественными точками X) инволюция на E задает антилинейное отображение

$$\tau_x\colon E_x \to E_x,$$

такое, что $\tau_x^2 = 1$. Это означает, что E_x является в естественном смысле комплексификацией вещественного векторного пространства, а именно собственного подпространства преобразования τ_x, соответствующего собственному значению $+1$ (точки этого подпространства называются вещественными точками пространства E_x). В частности, если инволюция на X тривиальна, то все точки пространства X являются вещественными, и мы получаем естественную эквивалентность между категорией $\mathscr{E}(X)$ вещественных векторных расслоений над X и категорией $\mathscr{F}(X)$ вещественных векторных расслоений над вещественным пространством X [1]): достаточно определить отображение $\mathscr{E}(X) \to \mathscr{F}(X)$, сопоставив расслоению E расслоение $E \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ ($\mathbf{C}$ понимается в естественной вещественной структуре и отображение $\mathscr{F}(X) \to \mathscr{E}(X)$, сопоставив расслоению F расслоение F_R (F_R — множество вещественных точек расслоения F). Это оправдывает употребление термина «вещественное векторное расслоение» в категории вещественных пространств, так как это понятие может рассматриваться как естественное распространение понятия вещественного векторного расслоения в категории обычных пространств.

Если E — вещественное векторное расслоение над вещественным пространством X, то пространство сечений $\Gamma(E)$ представляет собой комплексное векторное пространство с антилинейной инволюцией: если $s \in \Gamma(E)$, то $\bar{s}$ определяется равенством

$$\bar{s}(x) = \overline{s(\bar{x})}.$$

Таким образом, $\Gamma(E)$ наделено структурой вещественного пространства, т. е. является комплексификацией вещественного векторного пространства $\Gamma(E)_R$.

Если E, F — вещественные векторные расслоения над вещественным пространством X, то морфизм $\varphi\colon E \to F$ по определению есть гомоморфизм комплексных векторных расслоений, коммутирующий с инволюциями, т. е.

$$\varphi(\bar{e}) = \overline{\varphi(e)}, \quad \text{где} \quad e \in E.$$

Расслоения $E \otimes_{\mathbf{C}} F$ и $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(E, F)$ естественным образом снабжаются структурами вещественных векторных расслоений. Например, для $\varphi_x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(E_x, F_x)$ мы определим $\bar{\varphi}_x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(E_{\bar{x}}, F_{\bar{x}})$ формулой

$$\bar{\varphi}_x(u) = \overline{\varphi_x(\bar{u})}, \quad \text{где} \quad u \in E_{\bar{x}}.$$

---

[1]) Морфизмы в категории $\mathscr{F}(X)$ будут определены ниже.

Ясно, что морфизм $\varphi\colon E\to F$ есть просто вещественное сечение расслоения $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(E, F)$, т. е. элемент из $\Gamma(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(E, F))_R$.

Далее, если X компактно, то точно так же, как это сделано в [3; § 1], мы выведем гомотопическое свойство вещественных векторных расслоений. Нужно только заметить, что вещественное сечение s над вещественным подпространством Y вещественного пространства X всегда может быть продолжено до вещественного сечения над X: достаточно взять любое продолжение t и рассмотреть сечение $(t+\bar{t})/2$.

Теперь предположим, что X — вещественное алгебраическое пространство (т. е. множество комплексных точек вещественного алгебраического многообразия). Тогда, как мы уже замечали, X является вещественным топологическим пространством $(X_{\mathrm{alg}}\mapsto X_{\mathrm{top}})$. *Вещественное алгебраическое* векторное расслоение для наших целей может быть определено как комплексное алгебраическое векторное расслоение $\pi\colon E\to X$, где X, E, π и умножение на скаляр $\mathbf{C}\times E\to E$ определены над $\mathbf{R}$ (т. е. заданы уравнениями с вещественными коэффициентами). Переходя к топологической структуре этих объектов, мы получаем, что E_{top} — вещественное векторное расслоение над X_{top}.

Рассмотрим как частный пример $(n-1)$-мерное комплексное проективное пространство $X=P(\mathbf{C}^n)$. Стандартное линейное расслоение H над $P(\mathbf{C}^n)$ является вещественным алгебраическим расслоением. В самом деле, H определяется точной последовательностью векторных расслоений

$$0\to E\to X\times\mathbf{C}^n\to H\to 0,$$

где $E\subset X\times\mathbf{C}^n$ состоит из всех пар $(z, u)\in X\times\mathbf{C}^n$, таких, что

$$\sum u_i z_i=0.$$

Так как это уравнение имеет вещественные коэффициенты, E — вещественное алгебраическое расслоение. Следовательно, H — тоже вещественное алгебраическое расслоение. Таким образом, H — вещественное расслоение над вещественным пространством $P(\mathbf{C}^n)$.

В качестве другого примера рассмотрим аффинную квадрику

$$\sum_{i=1}^{n} z_i^2 + 1 = 0.$$

Так как это многообразие аффинно, вещественное векторное расслоение может быть определено проективными модулями над аффинным кольцом

$$A_+ = \mathrm{R}\,[z_1, \ldots, z_n]/\left(\sum z_i^2 + 1\right).$$

Пересечением этой квадрики с мнимой плоскостью является сфера

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 1,$$

инволюция на которой есть просто симметрия относительно центра (антиподальная инволюция). Таким образом, проективный модуль над кольцом A_+ определяет вещественное векторное расслоение над S^{n-1} с антиподальной инволюцией. Рассмотрим теперь квадрику

$$\sum z_i^2 - 1 = 0.$$

Ее пересечением с вещественной плоскостью является сфера с тривиальной инволюцией. Поэтому проективный модуль над

$$A_- = \mathrm{R}\,[z_1, \ldots, z_n]/\left(\sum z_i^2 - 1\right)$$

определяет вещественное векторное расслоение над сферой S^{n-1} с тривиальной инволюцией (т. е. вещественное векторное расслоение в обычном смысле). Значение сферы в этом примере состоит в том, что это деформационный ретракт квадрики в нашей категории (т. е. ретракция сохраняет инволюцию).

Группа Гротендика категории вещественных векторных расслоений над вещественным пространством X обозначается через $KR(X)$. Ограничиваясь множеством вещественных точек пространства X, мы получаем гомоморфизм

$$KR(X) \to KR(X_R) \cong KO(X_R).$$

В частном случае $X = X_R$ имеем

$$KR(X) \cong KO(X).$$

Взяв, например, $X = P(\mathbf{C}^n)$, мы получаем $X_R = P(\mathbf{R}^n)$ и в результате имеем гомоморфизм ограничения

$$KR(P(\mathbf{C}^n)) \to KR(P(\mathbf{R}^n)) = KO(P(\mathbf{R}^n)).$$

Заметим, что образ элемента $[H]$ при этом гомоморфизме есть просто стандартное вещественное хопфовское расслоение над $P(\mathbf{R}^n)$.

Тензорное умножение обычным образом превращает $KR(X)$ в кольцо.

Игнорируя инволюцию на X, мы получаем естественный гомоморфизм

$$c\colon KR(X) \to K(X).$$

Если $X = X_R$, то это просто комплексификация. С другой стороны, если E—комплексное векторное расслоение над X, то расслоение $E \oplus \tau^* \overline{E}$ имеет естественную вещественную структуру, и, таким образом, мы получаем гомоморфизм

$$\tau\colon K(X) \to KR(X).$$

Если $X = X_R$, то это просто „овеществление", т. е. игнорирование комплексной структуры.

2. Теорема периодичности

Обратимся теперь к теореме периодичности в KR-теории. Мы будем здесь аккуратно следовать доказательству теоремы периодичности в K-теории, изложенному в [3; § 2], и отмечать необходимые нам в новой теории модификации.

Если E — вещественное векторное расслоение над вещественным пространством X, то через $P(E)$ мы обозначим его проективизацию. Очевидно, $P(E)$ также в естественном смысле является вещественным пространством. Более того, стандартное линейное расслоение H над $P(E)$ является вещественным линейным расслоением. Теорема периодичности для KR-теории состоит в следующем.

Теорема 2.1. *Пусть L — вещественное линейное расслоение над вещественным компактным пространством X, H — стандартное вещественное линейное расслоение над вещественным пространством $P(L \oplus 1)$.*

Тогда $KR(P(L \oplus 1))$ как $KR(X)$-алгебра порождается элементом $[H]$ с единственным соотношением

$$([H]-[1])([L][H]-[1])=0.$$

Прежде всего мы выберем в L метрику, инвариантную относительно инволюции. Тогда расслоение со слоем единичная окружность S представляет собой вещественное пространство. Сечение z пучка $\pi^*(L)$, определенное вложением $S \to L$, есть *вещественное* сечение. Следовательно, такими являются и сечения z^k. Изоморфизм

$$H^k \cong (1, z^{-k}, L^{-k}) \quad [3; (2.5)]$$

является изоморфизмом вещественных расслоений. Наконец, мы утверждаем, что если f — вещественное сечение расслоения $\mathrm{Hom}(\pi^*E^0, \pi^*E^\infty)$, то его коэффициенты Фурье a_k — вещественные сечения расслоения $\mathrm{Hom}(L^k \otimes E^0, E^\infty)$. Действительно,

$$\overline{a}_k(x) = \overline{a_k(\overline{\overline{x}})} = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_{\overline{x}}} \overline{\left(f_{\overline{x}} z_{\overline{x}}^{-k-1}\right) dz_{\overline{x}}} =$$

(так как инволюция изменяет ориентацию S)

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_x} \left(\overline{f}_{\overline{x}} \left(\overline{z}_{\overline{x}}\right)^{-k-1}\right) \overline{d z}_{\overline{x}} =$$

(так как f и z вещественны)

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_x} \left(f_x \cdot z_x^{-k-1}\right) dz_x =$$

$$= a_k(x).$$

Полезно выяснить, что происходит в вещественной точке пространства X. Условие вещественности отображения f_x записывается так:

$$f_x(e^{-i\theta}) = \overline{f_x(e^{i\theta})}.$$

Отсюда следует вещественность коэффициентов Фурье.

Поскольку процесс линеаризации в [3; § 3] использует только a_k и z_k, все получающиеся там изоморфизмы являются вещественными.

Проекторы Q^0 и Q^∞ из [3; § 4] также вещественны при условии вещественности p. В самом деле,

$$\overline{Q}^0_x = \overline{Q}^0_{\bar{x}} = -\frac{1}{2\pi i}\overline{\int\limits_{S_{\bar{x}}} p_{\bar{x}}^{-1}\,dp_{\bar{x}}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_x} \left(\overline{p_{\bar{x}}}\right)^{-1} d\overline{p_{\bar{x}}} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_x} p_x^{-1}\,dp_x.$$

(так как p вещественно)

Аналогичная выкладка проводится и для оператора Q^∞. Следовательно, расслоение $V_n(E^0, p, E^\infty)$ вещественно и равенство (4.6) из [3] имеет место и в KR-теории. Осталось совершенно формально применить доказательство, приведенное в [3; § 5].

Теперь мы можем построить обычную теорию типа теории когомологий, используя относительные группы и надстройки. Однако здесь имеется одна важная деталь. Помимо обычной надстройки, базирующейся на $\mathbf{R}$ с тривиальной инволюцией, мы можем рассматривать также ее аналог, построенный при помощи $\mathbf{R}$ с инволюцией, переводящей x в $-x$. Часто бывает удобно считать, что в первом случае мы имеем дело с вещественной осью $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$, во втором — с мнимой осью $i\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$; где $\mathbf{C}$ снабжено стандартной вещественной структурой, индуцированной сопряжением. Мы будем использовать следующие обозначения:

$$R^{p,q} = \mathbf{R}^q \oplus i\mathbf{R}^p,$$

$B^{p,q}$ — единичный шар в $R^{p,q}$,

$S^{p,q}$ — единичная сфера в $R^{p,q}$.

Заметим, что $R^{p,p} \cong \mathbf{C}^p$ и что сфера $S^{p,q}$ имеет размерность $p+q-1$.

Относительная группа $KR(X, Y)$ определяется обычным образом как $\widetilde{KR}(X/Y)$, где $\widetilde{KR}(Z)$ — ядро отображения, индуцированного вложением отмеченной точки в Z. Положим далее

$$KR^{p,q}(X, Y) = KR\left(X \times B^{p,q},\ X \times S^{p,q} \cup Y \times B^{p,q}\right).$$

Группа KR^{-q} определяется по формуле

$$KR^{-q} = KR^{0,q}.$$

Так же, как в [2], можно получить точную последовательность для вещественной пары (X, Y):

$$\ldots \to KR^{-1}(X) \to KR^{-1}(Y) \to KR(X, Y) \to \\ \to KR(X) \to KR(Y). \quad (2.2)$$

Аналогично можно получить точную последовательность вещественной тройки (X, Y, Z). Взяв тройку $(X \times B^{p,0}, X \times S^{p,0} \cup Y \times B^{p,0}, X \times S^{p,0})$, можно получить точную последовательность

$$\ldots \to KR^{p,1}(X) \to KR^{p,1}(Y) \to KR^{p,0}(X, Y) \to \\ \to KR^{p,0}(X) \to KR^{p,0}(Y)$$

для любого целого $p \geqslant 0$.

Кольцевое умножение на $KR(X)$ продолжается естественным образом до внешнего умножения

$$KR^{p,q}(X, Y) \otimes KR^{p',q'}(X', Y') \to \\ \to KR^{p+p',q+q'}(X \times X', X \times Y' \cup Y \times X').$$

Ограничением на диагональ мы получаем внутреннее умножение.

Теорему 2.1 можно сформулировать по-другому, так, как обычно формулируются теоремы периодичности. Положим

$$b = [H] - 1 \in KR^{1,1}(\text{точка}) = KR(B^{1,1}, S^{1,1}) = \widetilde{KR}(P(\mathbf{C}^2))$$

и обозначим через β гомоморфизм

$$KR^{p,q}(X, Y) \to KR^{p+1,q+1}(X, Y),$$

переводящий x в $b \cdot x$.

Теорема 2.3. *Отображение* $\beta: KR^{p,q}(X, Y) \to KR^{p+1,q+1}(X, Y)$ *является изоморфизмом.*

Заметим также, что точная последовательность вещественной пары согласуется с изоморфизмом периодичности. Таким образом, если мы положим

$$KR^p(X, Y) = KR^{p,0}(X, Y) \quad \text{при} \quad p \geqslant 0,$$

то точная последовательность (2.2) для (X, Y) может быть сделана бесконечной в обе стороны. Более того, имеет место естественный изоморфизм $KR^{p,q} \cong KR^{p-q}$.

Рассмотрим общую теорему об изоморфизме Тома в том виде, как она доказана в K-теории [2; § 2.7]. Напомним, что основные этапы доказательства состоят в следующем:

(i) для линейных расслоений мы используем теорему 2.1;

(ii) для разложимых векторных расслоений мы рассуждаем по индукции, используя теорему 2.1;

(iii) для общего векторного расслоения мы используем принцип расщепления.

Внимательное изучение доказательства, приведенного в [2; § 2.7], показывает, что единственное место в этом доказательстве, требующее для случая KR-теории существенной модификации, — это утверждение, что векторное расслоение локально тривиально и, следовательно, локально разложимо. Но вещественное векторное расслоение определялось нами как векторное расслоение с вещественной структурой. Таким образом, оно локально тривиально как расслоение в категории обычных пространств. А нам нужно показать, что оно *локально тривиально* также *в категории вещественных пространств*. Для того чтобы сделать это, мы должны рассмотреть два случая.

(i) $x \in X$ — вещественная точка. Тогда $E_x \cong \mathbf{C}^n$ в нашей категории. Отсюда, согласно лемме о продолжении, существует вещественная окрестность U точки x, такая, что $E|_U \cong U \times \mathbf{C}^n$ в рассматриваемой категории.

(ii) $x \neq \bar{x}$. Рассмотрим комплексный изоморфизм $E_x \cong \mathbf{C}^n$. Он индуцирует комплексный изоморфизм $E_{\bar{x}} \cong \mathbf{C}^n$. Отсюда мы получаем вещественный изоморфизм

$$E|_Y \cong Y \times \mathbf{C}^n,$$

где $Y = \{x, \bar{x}\}$. По лемме о продолжении существует вещественная окрестность U множества Y, такая, что $E|_U = U \times \mathbf{C}^n$.

Таким образом, справедлива

Теорема 2.4 (Теорема об изоморфизме Тома.) *Пусть E — вещественное векторное расслоение над компактным пространством X. Тогда отображение*

$$\varphi\colon KR(X) \to \widetilde{KR}(X^E)$$

является изоморфизмом. Здесь $\varphi(x) = \lambda_E x$, *где* λ_E *— элемент кольца* $\widetilde{KR}(X^E)$, *определенный внешней алгеброй расслоения* E.

Среди других результатов, которые автоматически переносятся из [2; § 2.7], мы отметим следующий:

$$KR(X \times P(\mathbf{C}^n)) \cong KR(X)[t]/(t^n - 1) \cong$$
$$\cong KR(X) \otimes_{\mathbf{Z}} K(P(\mathbf{C}^n)).$$

Вычисление функтора KR для грассманианов и многообразий флагов мы оставляем читателю в качестве упражнения. Более интересной задачей является вычисление KR для квадрик, так как здесь ответ будет зависеть от сигнатуры квадратичной формы.

В заключение приведем следующее замечание. Рассмотрим вложение

$$R^{0,1} = \mathbf{R} \xrightarrow{i} \mathbf{C} = R^{1,1}.$$

Оно индуцирует гомоморфизм

$$\begin{array}{ccc} KR^{1,1}(\text{точка}) & \xrightarrow{i^*} & KR^{0,1}(\text{точка}) \\ \| & & \| \\ \widetilde{KR}(P(\mathbf{C}^2)) & \longrightarrow & \widetilde{KR}(P(\mathbf{R}^2)) \end{array}$$

Так как $i^*[H]$ — вещественное хопфовское расслоение над $P(\mathbf{R}^2)$, то $\eta = i^*(b) = i^*([H] - 1)$ есть приведенное хопфовское расслоение над $P(\mathbf{R}^2)$.

3. Коэффициентные теории

Если Y — фиксированное вещественное пространство, то функтор $X \mapsto KR(X \times Y)$ определяет новую теорию когомологий в категории вещественных пространств, которая может быть названа *KR-теорией с коэффициентами в* Y. Мы будем рассматривать в качестве Y сферы $S^{p,0}$, т. е. сферы с антиподальной инволюцией. Будем говорить, что теория F имеет период q, если имеет место естественный изоморфизм $F \cong F^{-q}$.

Предложение 3.1. *KR-теория с коэффициентами в* $S^{p,0}$ *имеет период*

2, *если* $p = 1$,
4, *если* $p = 2$,
8, *если* $p = 4$.

Доказательство. Рассмотрим $\mathbf{R}^p$ как одну из трех алгебр $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ или $\mathbf{H}$ ($p=1$, 2 или 4). Тогда для любого вещественного пространства X отображение

$$\mu_p\colon X\times S^{p,0}\times R^{0,p}\to X\times S^{p,0}\times R^{p,0},$$

заданное формулой $\mu_p(x, s, u)=(x, s, su)$, где su — произведение в соответствующей алгебре, является вещественным изоморфизмом. Следовательно, оно индуцирует изоморфизм

$$\mu_p^*=KR^{p,0}(X\times S^{p,0})\to KR^{0,p}(X\times S^{p,0}).$$

Заменяя X соответствующей надстройкой, мы получаем изоморфизм

$$\mu_p^*=KR^{p,q}(X\times S^{p,0})\to KR^{0,p+q}(X\times S^{p,0}).$$

Полагая $q=p$ и используя изоморфизм

$$\beta^p\colon KR\to KR^{p,p},$$

существующий согласно теореме 2.1, мы получаем наконец изоморфизм

$$\begin{array}{rl}\mu_p^*\beta^p\colon KR(X\times S^{p,0})\to & KR^{0,2p}(X\times S^{p,0})\\ & \quad\| \\ & KR^{-2p}(X\times S^{p,0})\end{array}$$

Замечание. Очевидно, что μ^* — гомоморфизм $KR(X)$-модулей. Так как то же самое верно и для β, то изоморфизм периодичности

$$\gamma_p=\mu_p^*\beta^p\colon KR(X\times S^{p,0})\to KR^{-2p}(X\times S^{p,0})$$

есть умножение на образ c_p элемента 1 при изоморфизме

$$KR(S^{p,0})\to KR^{-2p}(S^{p,0}).$$

Этот элемент задается формулой

$$c_p=\gamma_p(1)=\mu_p^*(b^p1),\quad \text{где}\quad 1\in KR(S^{p,0}).$$

Для любого вещественного пространства Y проекция $X\times Y\to X$ порождает точную последовательность, связывающую KR и KR с коэффициентами в Y. Если Y — сфера, мы получаем последовательность типа Гизина.

Предложение 3.2. *Проекция* π: $S^{p,0} \to$ точка *индуцирует следующую точную последовательность*:

$$\ldots \to KR^{p-q}(X) \xrightarrow{\chi} KR^{-q}(X) \xrightarrow{\pi^*}$$
$$\to KR^{-q}(X \times S^{p,0}) \xrightarrow{\delta} \ldots,$$

где χ *есть умножение на* $(-\eta)^p$, $\eta \in KR^{-1}$(точка)$\cong$ $\cong \widetilde{KR}(P(\mathbf{R}^2))$ — *приведенное вещественное хопфовское расслоение.*

Доказательство. Заменим π эквивалентным вложением $S^{p,0} \to B^{p,0}$. Тогда относительная группа есть $KR^{p,q}(X)$. Для того чтобы вычислить χ, мы используем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
KR^{p,q}(X) \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "\beta^p"] \arrow[dr, "\varphi"] & KR^{0,q}(X) \arrow[d, "\beta^p"] \\
KR^{2p,p+q}(X) \arrow[r, "\chi"] & KR^{p,p+q}(X)
\end{tikzcd}$$

Пусть θ — автоморфизм группы $KR^{2p,p+q}(X)$, получающийся в результате перестановки двух сомножителей $R^{p,0}$. Тогда композиция $\chi\theta\beta^p$ представляет собой умножение на образ элемента b^p при гомоморфизме

$$KR^{p,p}(\text{точка}) \to KR^{0,p}(\text{точка}).$$

Но это как раз η^p. Остается только вычислить θ. Рассуждение, аналогичное использованному в [2; § 2.4], показывает, что $\theta = (-1)^{p^2} = (-1)^p$.

Теперь рассмотрим каждую из теорий предложения (3.1) более детально. Для $p = 1$ сфера $S^{p,0}$ представляет собой просто пару сопряженных точек $\{+1, -1\}$. Вещественное векторное расслоение E над $X \times \{+1, -1\}$ вполне определяется своим ограничением на $X \times \{+1\}$ — комплексным векторным расслоением E_+. Отсюда мы получаем

Предложение 3.3. *Имеет место естественный изоморфизм*

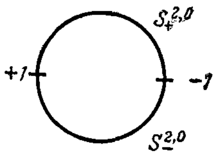
$$KR(X \times S^{1,0}) \cong K(X).$$

Заметим, что этот изоморфизм не зависит от вещественной структуры на X, а вполне определяется самим пространством. Предложение 3.1 дает период 2; это согласуется с тем, что мы уже знаем о $K(X)$. Точная последовательность из предложения 3.2 принимает вид

$$\ldots \to KR^{1-q}(X) \xrightarrow{\chi} KR^{-q}(X) \xrightarrow{\pi^*} K^{-q}(X) \xrightarrow{\delta} \to KR^{2-q}(X) \to \ldots, \quad (3.4)$$

где χ — умножение на $-\eta$, а $\pi^* = c$ — комплексификация. „Опознавание“ δ мы оставляем читателю в качестве упражнения. Эта точная последовательность хорошо известна (когда инволюция на X тривиальна), но она обычно извлекается из теоремы периодичности для ортогональной группы. Мы получили ее из других соображений и могли бы использовать (3.4) при доказательстве ортогональной периодичности. Но еще легче получить эту периодичность из случая $p = 4$ в предложении 3.1, что и будет сделано ниже.

Рассмотрим теперь случай $p = 2$ в предложении 3.1. Согласно этому предложению, группы $KR^{-q}(X \times S^{2,0})$ периодичны с периодом 4. Мы предлагаем отождествить



эту теорию с самосопряженной теорией. Если X — вещественное пространство с инволюцией τ, то под *самосопряженным* расслоением над X мы будем понимать комплексное векторное расслоение E с заданным изоморфизмом α: $E \to \overline{\tau^* E}$. Теперь рассмотрим пространство $X \times S^{2,0}$ и разобьем окружность $S^{2,0}$ на две половины $S_+^{2,0}$ и $S_-^{2,0}$ с пересечением $\{+1, -1\}$. Ясно, что задать вещественное векторное расслоение F над $X \times S^{2,0}$ — это то же самое, что задать комплексное векторное расслоение F_+ над $X \times S_+^{2,0}$ (ограничение F) и изоморфизм

$$\varphi: F|_{X \times \{+1\}} \to \tau^*(\overline{F}|_{X \times \{-1\}}).$$

Но $X \times \{+1\}$ есть деформационный ретракт пространства $X \times S^{2,0}_{+}$, и поэтому (ср. [3; (2.3)]) мы имеем изоморфизм

$$\theta\colon F_{+}|_{X\times\{-1\}} \to F_{+}|_{X\times\{+1\}},$$

единственный с точностью до гомотопии. Таким образом, задание изоморфизма φ эквивалентно с точностью до гомотопии заданию изоморфизма

$$\alpha\colon E \to \overline{\tau^* E},$$

где E — расслоение над X, индуцированное расслоением над F_{+} при отображении, переводящем x в $(x, 1)$, и

$$\alpha_x = \theta_{(\bar{x}, -1)}\varphi_{(x, 1)}.$$

Иными словами, *классы изоморфных вещественных расслоений над* $X \times S^{2,0}$ *взаимно однозначно соответствуют гомотопическим классам самосопряженных расслоений над* X. Более того, это соответствие, очевидно, перестановочно с тензорным произведением. Пусть $KSC(X)$ обозначает группу Гротендика гомотопических классов самосопряженных расслоений над X. Если инволюция τ тривиальна, то это соответствие согласуется с определениями, данными в [1] и [7]. Мы доказали, таким образом,

Предложение 3.5. *Имеет место естественный изоморфизм колец*

$$KSC(X) \to KR\left(X \times S^{2,0}\right).$$

Точная последовательность предложения 3.2 при $p=2$ превращается в точную последовательность

$$\ldots \to KR^{2-q}(X) \xrightarrow{\chi} KR^{-q}(X) \xrightarrow{\pi^*} KSC^{-q}(X) \xrightarrow{\delta}$$
$$\xrightarrow{\delta} KR^{3-q}(X) \to \ldots, \quad (3.6)$$

где χ — умножение на η^2, а π^*—отображение, сопоставляющее каждому вещественному расслоению ассоциированное самосопряженное расслоение (т. е. $\alpha = \tau$). Периодичность в KSC-теории задается умножением на образующую группы KSC^{-4} (точка).

Наконец, мы переходим к случаю $p = 4$. Нам потребуется следующая

Лемма 3.7. *Пусть* $\eta \in KR^{-1}$(точка) — *элемент, определенный в* § 2. *Тогда* $\eta^3=0$.

Доказательство. Напомним [4; § 11], что существует гомоморфизм α_k: $A_k \to KR^{-k}$ (точка), где A_k—группы, определяемые с помощью алгебр Клиффорда. Тогда η— образ образующей группы $A_1 \cong \mathbf{Z}_2$ и $A_3=0$. Так как гомоморфизмы α_k мультипликативны [4; § 11.4], то $\eta^3=0$.

Следствие 3.8. *Для любого* $p \geqslant 3$ *имеет место короткая точная последовательность*

$$0 \to KR^{-q}(X) \xrightarrow{\pi^*} KR^{-q}(X \times S^{p,0}) \xrightarrow{\delta} KR^{p+1-q}(X) \to 0.$$

Доказательство. Это следует из (3.7) и (3.2).

Из замечания, сделанного после доказательства предложения 3.1, вытекает, что периодичность для $KR(X \times S^{4,0})$ задается умножением на элемент

$$c_4 = \mu_4^*(b_4 1) \in KR^{-8}(S^{4,0}).$$

Теперь напомним, что [4; табл. 2] $A_8 \cong \mathbf{Z}$ порождается элементом λ, представляющим один из неприводимых градуированных модулей над алгеброй Клиффорда C_8. Применяя гомоморфизм

$$\alpha\colon A_8 \to KR^{-8}(\text{точка}),$$

мы получаем элемент $\alpha(\lambda) \in KR^{-8}$ (точка). Связь между c_4 и $\alpha(\lambda)$ описывается следующей леммой.

Лемма 3.9. *Пусть* $1 \in KR(S^{4,0})$. *Тогда*

$$c_4 = \alpha(\lambda)\, 1 \in KR^{-8}(S^{4,0}).$$

Доказательство леммы 3.9 требует тонких рассуждений, связанных с алгебрами Клиффорда, и поэтому будет проведено только в § 4, где алгебры Клиффорда обсуждаются более детально.

Используя 3.9, мы можем теперь доказать следующую теорему.

Теорема 3.10. *Пусть* $\lambda \in A_8$, $\alpha(\lambda) \in KR^{-8}$ (точка)— *те же, что и выше. Тогда умножение на* $\alpha(\lambda)$ *индуцирует изоморфизм*

$$KR(X) \to KR^{-8}(X).$$

Доказательство. Умножая точную последовательность из 3.8 на $\alpha(\lambda)$, мы получаем коммутативную диаграмму точных последовательностей

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & KR^{-q}(X) & \to & KR^{-q}(X \times S^{4,0}) & \to & KR^{5-q}(X) & \to 0 \\
& \downarrow{\scriptstyle \varphi_{-q}} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_q} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{5-q}} & \\
0 \to & KR^{-q-8}(X) & \to & KR^{-q-8}(X \times S^{4,0}) & \to & KR^{-3-q}(X) & \to 0
\end{array}$$

Из леммы 3.9 мы знаем, что ψ_q совпадает с *изоморфизмом периодичности* γ_4. Следовательно, φ_{-q} является мономорфизмом для всех q. Отсюда φ_{5-q} в диаграмме является мономорфизмом, и это вместе с тем фактом, что ψ_{-q}—изоморфизм, доказывает, что φ_{-q}—эпиморфизм. Таким образом, φ_{-q} — изоморфизм, что и требовалось.

Замечание. Если инволюция на X тривиальна, то $KR(X) \cong KO(X)$, и доказанная нами теорема превращается в обычную „теорему вещественной периодичности".

Рассматривая различные вложения $S^{q,0} \to S^{p,0}$, мы получаем интересные точные последовательности. Для описания входящих в них относительных групп нам потребуется следующая

Лемма 3.11. *Вещественное пространство* $S^{p,0}/S^{q,0}$ (*с отмеченной точкой*) *изоморфно пространству*

$$S^{p-q,0} \times B^{q,0}/S^{p-q,0} \times S^{q,0}.$$

Доказательство. Разность $S^{p,0} \setminus S^{q,0}$ изоморфна $S^{p-q,0} \times R^{q,0}$. Компактифицируя эту разность, мы получаем нужное утверждение.

Следствие 3.12. *Имеет место естественный изоморфизм*

$$KR(X \times S^{p,0}, X \times S^{q,0}) \cong KR^{0,q}(X \times S^{p-q,0}).$$

Принимая во внимание 3.8, мы видим, что интерес представляют только малые значения p и q. Особенно интересен случай $p=2$, $q=1$. Он дает точную последовательность (ср. [1])

$$\ldots \to K^{-1}(X) \to KSC(X) \to K(X) \to K(X) \to \ldots \quad (3.13)$$

Точная последовательность из 3.8 на самом деле канонически расщепляется, так что (при $p \geqslant 3$)

$$KR^{-q}(X \times S^{p,0}) \cong KR^{-q}(X) \oplus KR^{p+1-q}(X). \quad (3.14)$$

Для того чтобы доказать это, достаточно рассмотреть случай $p = 3$, потому что общий случай будет следовать из коммутативной диаграммы ($p \geqslant 4$)

$$\begin{array}{ccccc} 0 \to & KR(X) & \to & KR(X \times S^{p,0}) \\ & \downarrow & & \downarrow \\ 0 \to & KR(X) & \to & KR(X \times S^{3,0}) \end{array}$$

получающейся при ограничении с $S^{p,0}$ на $S^{3,0}$. Далее, $S^{3,0}$ есть двумерная сфера с антиподальной инволюцией. Она может быть представлена как конус $\sum_{i=0}^{2} z_i^2 = 0$ в $P(\mathbf{C}^3)$. В § 5 мы сформулируем (без доказательства) общее предложение, из которого будет вытекать, что если Y — квадрика, то отображение

$$KR(X) \to KR(X \times Y)$$

имеет каноническое левое обратное. Тем самым доказана формула (3.14).

4. Связь с клиффордовыми алгебрами

Пусть $\mathrm{Cliff}(R^{p,q})$ означает алгебру Клиффорда (над $\mathbf{R}$) квадратичной формы

$$-\left(\sum_{i=1}^{p} y_i^2 + \sum_{j=1}^{q} x_j^2\right)$$

на $R^{p,q}$. Инволюция $(y, x) \mapsto (-y, x)$ на $R^{p,q}$ индуцирует инволютивный автоморфизм клиффордовой алгебры $\mathrm{Cliff}(R^{p,q})$, обозначаемый $a \mapsto \bar{a}$[1]).

Пусть $M = M^0 \oplus M^1$ — комплексный $\mathbf{Z}_2$-градуированный $\mathrm{Cliff}(R^{p,q})$-модуль. Мы будем говорить, что M — *вещественный* $\mathbf{Z}_2$-градуированный $\mathrm{Cliff}(R^{p,q})$-модуль, если M

[1]) Это обозначение отличается от обозначений [4; § 1], где эта инволюция (для $q = 0$) обозначена через α, а „черта“ сохранена для обозначения антиавтоморфизма.

имеет вещественную структуру (т. е. существует антилинейная инволюция $m \mapsto \bar{m}$), такую, что

(i) $\mathbf{Z}_2$-градуировка согласуется с вещественной структурой, т. е.

$$\overline{M}^i = M^i \qquad (i = 0,\ 1),$$

(ii) $\overline{am} = \bar{a}\bar{m}$ для любых $a \in \mathrm{Cliff}(R^{p,q})$ и $m \in M$. Заметим, что если $p = 0$, то инволюция на $\mathrm{Cliff}(R^{p,q})$ тривиальна и

$$M_R = M_R^0 \oplus M_R^1 = \{m \in M \mid \bar{m} = m\}$$

представляет собой вещественный $\mathbf{Z}_2$-градуированный модуль над этой клифордовой алгеброй в обычном смысле (C_q-модуль в обозначениях [4]).

Основная конструкция, использованная в [4], проходит в этой новой ситуации. Таким образом, вещественный градуированный $\mathrm{Cliff}(R^{p,q})$-модуль $M = M^0 \oplus M^1$ определяет тройку (M^0, M^1, σ), где σ: $S^{p,q} \times M^0 \to S^{p,q} \times M^1$ — вещественный изоморфизм, заданный формулой

$$\sigma(s,\ m) = (s,\ sm).$$

Таким способом мы получаем гомоморфизм

$$h\colon\ M(p,\ q) \to KR^{p,q}(\text{точка}),$$

где $M(p,\ q)$ — группа Гротендика вещественных градуированных $\mathrm{Cliff}(R^{p,q})$-модулей. Если M — ограничение некоторого $\mathrm{Cliff}(R^{p,q+1})$-модуля, то σ можно продолжить на $S^{p,q+1}$. Так как проекция

$$S_+^{p,q+1} \to B^{p,q}$$

есть изоморфизм вещественных пространств (здесь S_+ означает верхнюю полусферу по отношению к последней координате), то M определяет нулевой элемент группы $KR^{p,q}$ (точка). Следовательно, определяя $A(p,\ q)$ как коядро ограничения

$$M(p,\ q+1) \to M(p,\ q),$$

мы видим, что h индуцирует гомоморфизм

$$\alpha\colon\ A(p,\ q) \to KR^{p,q}(\text{точка}).$$

Более того, как и в [4], гомоморфизм α мультипликативен. Заметим, что для $p=0$ это α по существу совпадает с тем, которое определялось в [4], так как

$$A(0,\ q)\cong A_q,$$
$$KR^{0,\ q}\,(\text{точка})\cong KO^{-q}\,(\text{точка}).$$

Внешняя алгебра $\Lambda^*(\mathbf{C}^1)$ определяет естественным образом $\mathrm{Cliff}\left(R^{1,\ 1}\right)$-модуль:

$$z(1)=ze,\quad z(e)=-\bar{z}1,$$

где $1\in\Lambda^0(\mathbf{C}^1)$ и $e\in\Lambda^1(\mathbf{C}^1)$ — образующие. Пусть $\lambda_1\in\in A(1,\ 1)$—элемент, определенный этим модулем. Вспомнив определение элемента $b\in KR^{(1,\ 1)}$ (точка), мы видим, что

$$\alpha(\lambda_1)=-b$$

и, следовательно, в силу мультипликативности α

$$\alpha\left(\lambda_1^4\right)=b^4.$$

Пусть M — градуированный $\mathrm{Cliff}\left(R^{4,\ 4}\right)$-модуль, представляющий λ_1^4 (на самом деле, как показано в [4; § 11], мы можем построить M из внешней алгебры $\Lambda^*(\mathbf{C}^4)$), и пусть $w=e_1e_2e_3e_4\in\mathrm{Cliff}\left(R^{4,\ 4}\right)$, где $e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4$ — стандартный базис пространства $R^{4,\ 0}$. Мы имеем

$$w^2=1,\quad \bar{w}=w,$$
$$wz=\bar{z}w\quad\text{при}\quad z\in\mathbf{C}^4=R^{4,\ 4}.$$

Следовательно, мы можем определить новую антилинейную инволюцию $m\longmapsto\tilde{m}$ на M, полагая

$$\tilde{m}=-w\bar{m},$$

и при этом получим

$$\widetilde{zm}=-w\overline{zm}=-w\bar{z}\bar{m}=-zw\bar{m}=z\tilde{m}.$$

Таким образом, M с этой новой инволюцией (или вещественной структурой) представляет собой вещественный градуированный $\mathrm{Cliff}\left(R^{0,\ 8}\right)$-модуль, C_8-модуль в обозначениях [4]. Обозначим его через N. Из соображений размерности (см. [4; табл. 2]) мы видим, что это должен быть один из неприводимых C_8-модулей. Но после комплексификации (т. е. „забывания“ вещественной структуры) он совпадает с M. Значит, N — тот элемент из A_8, который в [4] обозначен через λ.

Теперь мы можем приступить к доказательству леммы 3.9. Мы должны доказать, что при отображении

$$M_4\colon\ S^{4,0}\times \mathbf{R}^8 \to S^{4,0}\times \mathbf{C}^4$$

элемент $KR^{4,4}(S^{4,0})$, определяемый модулем M, переходит в элемент из $KR^{-8}(S^{4,0})$, определяемый модулем N. Ясно, что для этого достаточно выписать коммутативную диаграмму вещественных изоморфизмов

$$\begin{array}{ccc} S^{4,0}\times \mathbf{R}^8\times N & \xrightarrow{\nu} & S^{4,0}\times \mathbf{C}^4\times M \\ \downarrow & & \downarrow \\ S^{4,0}\times \mathbf{R}^8\times N & \xrightarrow{\nu} & S^{4,0}\times \mathbf{C}^4\times M \end{array} \tag{4.1}$$

где ν перестановочно с μ_4 (т. е. $\nu(s, x, y, n)=(s, x+isy, m)$ для некоторого m) и где вертикальные стрелки — отображения, определяющие структуру модуля, т. е. $(s, x, y\ n)\mapsto$ $\mapsto(s, x, y, (x, y)n)$.

Рассмотрим теперь алгебру $\mathrm{Cliff}(R^{4,0})=C_4$. Четная часть C_4^0 изоморфна $\mathbf{H}\oplus\mathbf{H}$ [4; табл. 1]. Более того, ее центр порожден элементами 1 и $w=e_1e_2e_3e_4$, две проекции — соответственно $\frac{1}{2}(1\pm w)$. Определим вложение

$$\xi\colon\ \mathbf{H}\to \mathrm{Cliff}^0(R^{4,0}),$$

полагая

$$\begin{aligned} \xi(1)&=\frac{1+w}{2}, \\ \xi(i)&=\frac{1+w}{2}\,e_1e_2, \\ \xi(j)&=\frac{1+w}{2}\,e_1e_3, \\ \xi(k)&=\frac{1+w}{2}\,e_1e_4. \end{aligned}$$

Тогда мы сможем определить вложение

$$\eta\colon\ S(\mathbf{H})\to \mathrm{Spin}(4)\subset\Gamma_4,$$

положив $\eta(s)=\xi(s)+\frac{1}{2}(1-w)$, где Γ_4 — группа Клиффорда [4; 3.1], а $S(\mathbf{H})$ обозначает множество кватернионов нормы 1. Можно проверить, что композиция

$$S(\mathbf{H})\to \mathrm{Spin}(4)\to SO(4)$$

определяет естественное действие группы $S(\mathbf{H})$ на $\mathbf{R}^4=\mathbf{H}$, задаваемое умножением слева[1]). Другими словами,

$$\eta(s)\,y\,(\eta(s))^{-1}=sy, \quad \text{где} \quad s\in S(\mathbf{H}), \quad y\in\mathbf{R}^4. \tag{4.2}$$

Если мы определим на $S(\mathbf{H})$ антиподальную инволюцию, то η не будет коммутировать с инволюцией, поскольку инволюция на четной части C_4^0 тривиальна.

Рассматривая алгебру $\mathrm{Cliff}(R^{4,0})$ как вложенную естественным образом в алгебру $\mathrm{Cliff}(R^{4,4})$, мы определим требуемое отображение ν формулой

$$\nu(s,\ x,\ y,\ n)=(s,\ x+isy,\ \eta(s)\,n).$$

Из определения элемента w следует, что

$$\eta(s)\,w=-\eta(-s)$$

и что

$$\eta(-s)\,\tilde{n}=\eta(-s)\{-w\bar{n}\}=\eta(s)\,\bar{n}=\overline{\eta(s)\,n}.$$

Тем самым показано, что ν — *вещественное* отображение. Из равенства (4.2) вытекает, что

$$\eta(s)(x,\ y)\,n=(x+isy)\,\eta(s)\,n.$$

Таким образом, ν согласуется со структурой модуля. Итак, мы установили существование диаграммы (4.1) и этим завершили доказательство леммы 3.9.

Определения $M(p,\ q)$ и $A(p,\ q)$ были естественными с нашей настоящей точки зрения. Однако полезно указать, чему они соответствуют в более конкретных и классических терминах. Заметим для этого, что если M — вещественный $\mathrm{Cliff}(R^{p,q})$-модуль, то мы можем определить новое действие $[\ \ ]$ группы R^{p+q} на M, положив

$$[x,\ y]\,m=xm+iym.$$

---

[1]) Мы отождествляем $1,\ i,\ j,\ k$ со стандартным базисом e_1, e_2, e_3, e_4 (в этом порядке).

Тогда

$$[x, y]^2 m = \{-\|x\|^2 + \|y\|^2\} m.$$

Более того, для инволюций мы имеем

$$\overline{[x, y] m} = \overline{xm} + \overline{iym} =$$
$$(\text{так как } \bar{y} = -y)$$
$$= x\bar{m} + iy\bar{m} =$$
$$= [x, y]\bar{m}.$$

Таким образом, M_R — вещественный модуль в обычном смысле для клиффордовой алгебры $C_{p,q}$ квадратичной формы

$$Q(p, q) \equiv \sum_{i=1}^{p} y_i^2 - \sum_{j=1}^{q} x_j^2.$$

Легко видеть, что процесс обратим. Таким образом, *модуль $M(p, q)$ может быть равным образом определен как группа Гротендика вещественных градуированных $C_{p,q}$-модулей.* Отсюда нетрудно подсчитать группы $A_{(p,q)}$ из [4; § 4.5] и заметить, что они зависят только от разности $p - q \pmod 8$ (ср. также [8]). Используя результаты работы [4; 11.4], можно вывести, что

$$\alpha\colon A(p, q) \to KR^{p,q}(\text{точка})$$

всегда является изоморфизмом. Мы предоставляем читателю провести рассуждения во всех подробностях. По-видимому, следует заметить, что использование двойных индексов в наших обозначениях предложено Каруби [8].

Отображение α может быть определено в более общей ситуации для главных спинорных расслоений, как в работе [4]. При этом получается теорема об изоморфизме Тома для спинорных расслоений (ср. [4; 12.3]).

5. Связь с проблемой индекса

Обозначим через $\hat{\varphi}$ преобразование Фурье функции φ. Мы имеем

$$\hat{\hat{\varphi}}(x) = \overline{\hat{\varphi}(-x)}.$$

Так как символ $\sigma(P)$ эллиптического дифференциального оператора P определяется через преобразование Фурье [9], то отсюда следует, что

$$\sigma(\bar{P})(x, \xi) = \overline{\sigma(P)(x, -\xi)},$$

где $\bar{P}$ — оператор, определенный равенством

$$\bar{P}\varphi = \overline{P\bar{\varphi}}.$$

Мы предполагаем при этом, что P действует на функциях таким образом, что правая часть $\overline{P\bar{\varphi}}$ определена. Вообще если X — *вещественное дифференцируемое многообразие*, т. е. дифференцируемое многообразие с гладкой инволюцией $x \longmapsto \bar{x}$, и если E, F — вещественные дифференцируемые векторные расслоения над X, то пространства $\Gamma(E)$, $\Gamma(F)$ гладких сечений имеют вещественную структуру, и для любого линейного оператора

$$P\colon \Gamma(E) \to \Gamma(F)$$

мы можем определить $\bar{P}\colon \Gamma(E) \to \Gamma(F)$, положив

$$\bar{P}\varphi = \overline{P\bar{\varphi}}.$$

Если P — эллиптический оператор, то

$$\sigma(\bar{P})(x, \xi) = \overline{\sigma(P)(\bar{x}, -\tau^*(\xi))}. \tag{5.1}$$

Естественно назвать P *вещественным оператором*, если $P = \bar{P}$. Если инволюция на X тривиальна, то это просто означает, что P — дифференциальный оператор с вещественными коэффициентами по отношению к вещественным локальным базисам расслоений E, F. Во всяком случае, из (5.1) следует, что символ $\sigma(P)$ вещественного эллиптического оператора определяет изоморфизм вещественных векторных расслоений

$$\pi^*E \to \pi^*F,$$

где $\pi\colon S(X) \to X$ — проекция кокасательного расслоения со слоем сфера, и инволюция на $S(X)$ определена формулой

$$(x, \xi) \to (\bar{x}, -\tau^*(\xi)).$$

Заметим, что если τ — тождественная инволюция на X, то инволюция на $S(X)$ не тождественна, а *антиподальна на* *каждом слое.* В этом состоит основная причина, по которой наша KR-теория здесь необходима. В самом деле, тройка

$$(\pi^*E,\ \pi^*F,\ \sigma(P))$$

определяет обычным образом элемент

$$[\sigma(P)] \in KR(B(X),\ S(X)),$$

где $B(X)$ — кокасательное расслоение со слоем единичный шар — имеет индуцированную вещественную структуру [1]).

Ядро и коядро вещественного эллиптического оператора имеют естественную вещественную структуру. Таким образом, индекс в естественном смысле является элементом группы KR (точка). Разумеется, поскольку отображение

$$KR\,(\text{точка}) \to K\,(\text{точка})$$

является изоморфизмом, введение специально вещественного индекса не дает никаких немедленных преимуществ. Однако ситуация изменится, если мы рассмотрим *семейство* вещественных эллиптических операторов, зависящих как от параметра от точки некоторого пространства Y. В этом случае вещественный индекс может быть определен как элемент группы $KR(Y)$ и отображение

$$KR(Y) \to K(Y)$$

уже не является, вообще говоря, инъективным.

Все эти рассуждения допускают естественное обобщение на вещественные эллиптические комплексы [9]. В частности, представляет интерес комплекс Дольбо на вещественном алгебраическом многообразии. Это вещественный эллиптический комплекс, потому что голоморфное отображение $\tau\colon X \to \overline{X}$ преобразует комплекс Дольбо многообразия $\overline{X}$ в комплекс Дольбо многообразия X. Если X таково, что $H^q(X,\ \mathcal{O}) = 0$ при $q \geqslant 1$ и $H^0(X;\ \mathcal{O}) = \mathbf{C}$, то индекс, или эйлерова характеристика, комплекса Дольбо равняется 1. Основываясь на этом, можно получить такой результат:

[1]) Все это, конечно, распространяется на случай интегральных (или псевдодифференциальных операторов).

Предложение. *Пусть $f\colon X \to Y$ — расслоение на вещественные алгебраические многообразия, где слой F таков, что*

$$H^q(F; \mathfrak{G}) = 0 \quad \textit{при} \quad q \geqslant 1 \quad \textit{и} \quad H^0(F; \mathfrak{G}) = \mathbf{C}.$$

Тогда существует гомоморфизм

$$f_*\colon KR(X) \to KR(Y),$$

который является левым обратным для

$$f^*\colon KR(Y) \to KR(X).$$

Мы не можем поместить здесь доказательство; отметим лишь частный случай этого предложения, когда $X = Y \times F$, где F — компактное однородное пространство вещественной алгебраической линейной группы. Например, мы можем считать, что F — комплексная квадрика, как это требуется для доказательства формулы (3.14). Мы можем также положить $F = SO(2n)/U(n)$ или $F = SO(2n)/T^n$ — многообразие флагов группы $SO(2n)$. Эти пространства можно использовать для установления принципа расщепления для ортогональных расслоений. Важно заметить, что вещественное пространство

$$(SO(2n)/U(n)) \times R^{0,2n}$$

имеет структуру вещественного векторного расслоения. Точка пространства $SO(2n)/U(n)$ определяет комплексную структуру на $\mathbf{R}^{2n}$, а сопряженные точки определяют сопряженные структуры. Для $n = 2$ это по существу то же самое[1]), что мы использовали в § 3 для вывода ортогональной периодичности из теоремы 2.1.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Anderson D. W., Thesis (не опубликовано).
[2] Атья М., Лекции по K-теории (стр. 7—130 настоящей книги).
[3] Atiyah M. F., Bott R., On the periodicity theorem for complex vector bundles, *Acta Math.*, 112 (1964), 229—247.

---

[1]) В 3.1 мы использовали трехмерную сферу $S^{4,0}$. Мы могли бы с таким же успехом использовать сферу $S^{3,0} = SO(4)/U(2)$.

[4] Atiyah M. F., Bott R., Shapiro A., Clifford modules, *Topology*, **3** (1964), 3—38.
[5] Atiyah M. F., Hirzebruch F., Vector bundles and homogeneous spaces, Proc. Symp. in Pure Math., v. 3, Amer. Math. Soc. (1961). (Перевод в сб. *Математика*, **6**:**2** (1962), 3—39.)
[6] Атья М., Сегал Г., Эквивариантная *К*-теория (стр. 131—205 настоящей книги).
[7] Green P. S., A cohomology theory based upon self-conjugacies of complex vector bundles, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **70** (1964), 522.
[8] Karoubi M., Thesis (не опубликовано).
[9] Palais R., The Atiyah — Singer index theorem, *Ann. of Math. Study*, **57** (1965).

III. О K-ТЕОРИИ КОМПАКТНЫХ ГРУПП ЛИ [1])

М. Атья

Цель этой заметки — дать другое доказательство недавнего результата Л. Ходжкина о структуре $K^*(G)$, где K^* — функтор, введенный в работе [2] [2]), а G — односвязная компактная группа Ли.

Напомним, что для любого (компактного) пространства X по определению $K^*(X)=K^0(X)\oplus K^1(X)$, где $K^0(X)$ — группа Гротендика комплексных векторных расслоений над X, а $K^1(X)$ определяется с помощью расслоений над надстройкой над X, или, эквивалентно, с помощью гомотопических классов отображений пространства X в унитарную группу $U(n)$ (для достаточно большого n). При этом $K^*(X)$ является $\mathbf{Z}_2$-градуированным кольцом.

Если мы будем рассматривать представление ρ: $G \to U(n)$ просто как непрерывное отображение, мы получим элемент из $K^1(G)$, который обозначим $\beta(\rho)$. Напомним теперь, что группа G имеет l базисных представлений $\rho_1, \ldots, \rho_l$. Старшие веса этих представлений $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ образуют базис в группе $\hat{T}$, двойственной к максимальному тору T в G. Теорема Ходжкина утверждает, что $K^*(G)$ является внешней алгеброй, порожденной элементами $\beta(\rho_1), \ldots, \beta(\rho_l)$. На самом деле это утверждение распадается на две части:

(A) $K^*(G)$ не имеет кручений,

(B) $K^*(G)$ по модулю кручений является внешней алгеброй, порожденной образами элементов $\beta(\rho_1), \ldots, \beta(\rho_l)$.

В этой заметке мы дадим короткое доказательство части (B). Схема наших рассуждений следующая.

1. Используя теорему Римана — Роха для дифференцируемых многообразий, мы показываем, каким образом

---

[1]) Atiyah M. F., On the K-theory of compact Lie groups, *Topology*, 4 (1965), 95—99.

[2]) См. также стр. 64 этой книги. — *Прим. перев.*

утверждение (B) выводится из когомологических вычислений (предложение 1) с характерами Чжэня на G.

2. Рассматривая естественное отображение

$$\pi: G/T \times T \to G,$$

мы переносим когомологические вычисления с группы G на более удобное пространство $G/T \times T$. Для этого нужно исследовать отображение $\pi^*: K^*(G) \to K^*(G/T \times T)$ (лемма 2).

3. Наконец, мы выводим требуемую когомологическую формулу на $K^*(G/T \times T)$ из чисто алгебраической формулы, касающейся характеров представлений $\rho_1, \ldots, \rho_l$ (лемма 3).

Эти три этапа доказательства выполнены соответственно в сотрудничестве с Ф. Хирцебрухом, Д. В. Андерсоном и Б. Костантом; с удовольствием выражаю им свою благодарность.

Итак, мы начнем с того, что покажем, как вывести утверждение (B) из следующего предложения.

Предложение 1. *Пусть* $a = \prod_{i=1}^{l} \beta(\rho_i) \in K^*(G)$. *Тогда* $\operatorname{ch} a[G] = 1$, *где* $\operatorname{ch} a[G]$ — *значение характера Чжэня элемента* a *на фундаментальном классе гомологий группы* G (*при подходящем выборе ориентации*).

Пусть $A = K^*(G)/\operatorname{Tors} K^*(G)$, так что A — свободная абелева группа. Поскольку $H^*(G, \mathbf{Q})$, как хорошо известно, является внешней алгеброй с l образующими и поскольку характер Чжэня является изоморфизмом над $\mathbf{Q}$, мы получаем

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} H^*(G, \mathbf{Q}) = 2^l.$$

Пусть теперь $\Lambda = \Lambda(e_1, \ldots, e_l)$ — внешняя алгебра с образующими $e_1, \ldots, e_l$; определим гомоморфизм $j: \Lambda \to A$, полагая

$$j(e_i) = \beta(\rho_i) \bmod \operatorname{Tors} K^*(G).$$

Тогда из предложения 1 следует, в частности, что $a \neq 0$, и, таким образом, j — мономорфизм. С другой стороны, так как

$$\operatorname{rank} \Lambda = 2^l = \operatorname{rank} A,$$

мы заключаем, что $j(\Lambda)$ имеет конечный индекс в A. Заметим теперь, что, поскольку группа G параллелизуема, мы получаем в качестве весьма частного случая теоремы [2; 3.1] гомоморфизм

$$f_!\colon K^*(G)\to \mathbf{Z},$$

такой, что $f_! x = \operatorname{ch} x\,[G]$ для $x \in K^*(G)$.

Следовательно, мы можем определить гомоморфизм

$$k\colon A \to \operatorname{Hom}_{\mathbf{Z}}(\Lambda, \mathbf{Z}),$$

полагая $k(x)\,y = f_!(xj(y))$. Предложение 1 показывает теперь, что композиция

$$kj\colon \Lambda \to \operatorname{Hom}_{\mathbf{Z}}(\Lambda, \mathbf{Z})$$

является изоморфизмом. Значит, $j(\Lambda)$ — прямое слагаемое в A. Это слагаемое имеет конечный индекс, поэтому $j(\Lambda) = A$, и, следовательно, отображение $j\colon \Lambda \to A$ является изоморфизмом, что и утверждается в (B).

Для доказательства предложения 1 используем отображение

$$\pi\colon G/T \times T \to G,$$

заданное формулой $\pi(gT, u) = gug^{-1}$. Степень отображения π равна порядку $|W|$ группы Вейля W группы G. Значит, предложение 1 будет доказано, если мы покажем, что

$$\operatorname{ch}\pi^*(a)\,[G/T \times T] = |W|. \tag{1}$$

Исследуем теперь гомоморфизм $\pi^*\colon K^*(G)\to K^*(G/T\times T)$. Заметим, что, так как группа $K^*(T)$ не имеет кручений, формула Кюннета [1] позволяет отождествить $K^*(G/T\times T)$ с $K^*(G/T)\otimes K^*(T)$.

Лемма 2. *Пусть ρ — представление группы G с весами $\mu_1, \ldots, \mu_n$. Тогда*

$$\pi^*\beta(\rho) = \sum_{j=1}^{n} \alpha(\mu_j) \otimes \beta(\mu_j),$$

где $\alpha(\mu_j) \in K^0(G/T)$, $\beta(\mu_j) \in K^1(T)$ — элементы, определенные отображениями $\mu_j\colon T \to U(1)$.

Отложим на время доказательство леммы 2 и перейдем к заключительной, чисто алгебраической части наших рассуждений. Для этого введем еще несколько обозначений. Пусть $R(T)$ — целочисленное групповое кольцо группы $\hat{T}$, так что в обозначениях леммы 2 мы получаем гомоморфизм

$$\alpha\colon R(T) \to K^0(G/T).$$

Пусть $\Delta \in R(T)$ — элемент, заданный формулой

$$\Delta = \sum_{w \in W} \operatorname{sgn}(w)\, w(g),$$

где[1]) $g = \prod \lambda_i$. Следующая формула элементарна и хорошо известна [3; 20.1]:

$$\operatorname{ch} \alpha(\Delta)[G/T] = |W|. \tag{2}$$

По существу она означает, что эйлерова характеристика пространства G/T равна $|W|$. Заметим теперь, что так как $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ образуют базис в $\hat{T}$, то $K^*(T)$ является внешней алгеброй, порожденной $\beta(\lambda_1), \ldots, \beta(\lambda_l)$. Следовательно, полагая $b = \prod \beta[\lambda_i]$, мы получаем

$$\operatorname{ch} b[T] = 1. \tag{3}$$

Следующая наша лемма может быть сформулирована так:

Лемма 3. *Пусть λ_{ij} — веса представления ρ_i. Тогда*

$$\prod_{i=1}^{l} \Bigl(\sum_j \lambda_{ij} \otimes \beta(\lambda_{ij}) \Bigr) = \Delta \otimes b \in R(T) \otimes K^*(T).$$

Отложив на время доказательство этой леммы, покажем сначала, как из лемм 2 и 3 следует формула (1). Мы имеем

$$\pi^* a = \prod_{i=1}^{l} \pi^* \beta(\rho_i) = \prod_{i=1}^{l} \Bigl(\sum_j \alpha(\lambda_{ij}) \otimes \beta(\lambda_{ij}) \Bigr) =$$

(по лемме 2)

$$= (\alpha \otimes 1) \prod_{i=1}^{l} \Bigl(\sum_j \lambda_{ij} \otimes \beta(\lambda_{ij}) \Bigr) = (\alpha \otimes 1) \cdot \Delta \otimes b =$$

(по лемме 3)

$$= \alpha(\Delta) \otimes b$$

---

[1]) Функция g^2 совпадает с произведением положительных корней группы G (ср. [3; 3]).

и, следовательно,

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}\pi^*(a)[G/T\times T] &= \operatorname{ch}\alpha(\Delta)[G/T]\operatorname{ch}b[T] = \\ &\text{(согласно (3))} \\ &= \operatorname{ch}\alpha(\Delta)[G/T] = \\ &\text{(согласно (2))} \\ &= |W|.\end{aligned}$$

Остается доказать леммы 2 и 3.

Доказательство леммы 2. Рассмотрим главное G-расслоение $G*G \to S(G)$, где $*$ означает соединение, а $S(G)$ — (неприведенную) надстройку над G. Пусть $V(\rho)$ — векторное расслоение над $S(G)$, ассоциированное с этим главным расслоением при помощи представления ρ группы G. Тогда [1])

$$[V(\rho)] - \dim\rho = \beta(\rho) \in K^1(G) = \tilde{K}^0(S(G)).$$

Это вытекает непосредственно из конструкции Милнора [5] универсального G-расслоения и могло бы на самом деле служить определением $\beta(\rho)$. Для доказательства леммы 2 рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} G\times(T*T) & \longrightarrow & G*G \\ \downarrow{\scriptstyle\theta} & & \downarrow{\scriptstyle\psi} \\ G/T\times S(T) & \xrightarrow{f} & (G*G)/T \\ \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ S(G/T\times T) & \xrightarrow{S\pi} & S(G) \end{array}$$

Верхняя стрелка означает отображение, индуцированное умножением $G\times T \to G$, а нижняя соответствует надстройке над отображением π. Остальные отображения определяются очевидным образом, и коммутативность легко проверяется. Верхний квадрат диаграммы показывает, что [2]) T-расслоение $f^*(\psi)$ над $G/T\times S(T)$ ассоциировано с $(T\times T)$-расслоением θ при помощи умножения $T\times T\to T$ (которое является гомоморфизмом, так как T — абелева

---

[1]) Здесь $[V]$ означает образ в K векторного расслоения V.

[2]) Для краткости мы, говоря о расслоении, указываем только соответствующую проекцию.

группа). Таким образом, если $\lambda \in \hat{T}$ и если $\psi(\lambda)$ — элемент из $K^0((G*G)/T)$, определенный характером λ, то мы имеем

$$f^*\psi(\lambda) = \alpha(\lambda) \otimes [V(\lambda)] =$$
$$= \alpha(\lambda) \otimes (1 + \beta(\lambda)) \in K^0(G/T) \otimes K^0(S(T)).$$

Следовательно,

$$h^*(S\pi)^*[V(\rho)] = f^*g^*[V(\rho)] =$$
$$= \sum f^*\psi(\mu_j) = \sum \alpha(\mu_j) \otimes (1 + \beta(\mu_j)).$$

Заметим теперь, что $\sum \alpha(\mu_j) = \dim \rho$ (так как μ_j — это все веса представления ρ группы G) и что h^* — мономорфизм (так как h стягивает один сомножитель произведения). Следовательно, вычитая $\dim \rho$ из обеих частей предыдущего равенства, мы приходим к искомой формуле

$$\pi^*\beta(\rho) = \sum \alpha(\mu_j) \otimes \beta(\mu_j).$$

Доказательство леммы 3. Так как $K^*(T)$ — внешняя алгебра с l образующими, то для некоторого $A \in R(T)$ должно выполняться равенство вида

$$\prod_{i=1}^{l} \left(\sum_j \lambda_{ij} \otimes \beta(\lambda_{ij}) \right) = A \otimes b.$$

Далее группа Вейля действует на $R(T) \otimes K^*(T)$, и так как она переставляет между собой веса каждого представления ρ_i, отсюда следует, что произведение $A \otimes b$ инвариантно относительно W. Но действие W на b определяется „сигнум-представлением“:

$$w(b) = \operatorname{sgn}(w)\, b.$$

Поэтому то же самое должно быть справедливо и для A.

Рассмотрим теперь такие „кососимметричные“ элементы из $R(T)$. Они должны быть целочисленными комбинациями базисных кососимметричных выражений

$$E(\sigma) = \sum_{w \in W} \operatorname{sgn}(w)\, w(\sigma), \qquad \sigma \in \hat{T}.$$

Мы можем предполагать здесь, что σ — старший вес, т. е. что $\sigma \geqslant w(\sigma)$ для всех $w \in W$. Если σ сингулярен, т. е.

если существует $w \neq 1$, для которого $\sigma = w(\sigma)$, то $E(\sigma) = 0$. Далее, множество P всех старших весов является в точности подполугруппой в $\widehat{T}$, порожденной базисными весами $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$. Элемент множества P сингулярен тогда и только тогда, когда он лежит в одном из множеств P_i, где P_i — подполугруппа, порожденная весами λ_j при $j \neq i$. Элемент $g = \prod \lambda_i$ — минимальный несингулярный элемент в P, т. е. если $\sigma \in P$ и $\sigma < g$, то $E(\sigma) = 0$.

Исследуем теперь веса, которые входят в A. Так как старший вес входит в неприводимое представление с кратностью 1, то и в A вес g входит только один раз, а все остальные веса меньше, чем g. Таким образом,

$$A = E(g) = \Delta,$$

что и требовалось.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Atiyah M. F., Vector bundles and the Kunneth formula, *Topology*, 1 (1963), 245—248.

[2] Atiyah M. F., Hirzebruch F., Vector bundles and homogeneous spaces, Proc. Sumposia Amer. Math. Soc., v. 3, 1961, p. 7—38. (Перевод в сб. *Математика*, 6:2 (1962), 3—39.)

[3] Borel A., Hirzebruch F., Characteristic classes and homogeneous spaces, I, II, *Amer. J. Math.*, 80 (1958), 458—538.

[4] Hodgkin L. (в печати).

[5] Milnor J., Construction of universal bundles II, *Ann. Math.*, 63 (1956), 430—436.

IV. ГОМОТОПИЧЕСКИЙ ТИП УНИТАРНОЙ ГРУППЫ ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА [1]

Н. Кюйпер

§ 1. Введение

Пусть H — вещественное ($H_{\mathbf{R}}$), комплексное ($H_{\mathbf{C}}$) или кватернионное ($H_{\mathbf{H}}$) сепарабельное гильбертово пространство. Элементом пространства H, или вектором, называется счетная последовательность $x = (x_1, x_2, \ldots)$ чисел [2], для которых существует предел суммы $\sum_{j=1}^{\infty} \bar{x}_j x_j$, где $\bar{x}_j$ — число, сопряженное с x_j. Скалярным произведением xy векторов x и y называется сумма

$$xy = \sum_{j=1}^{\infty} \bar{x}_j y_j.$$

Длиной вектора x называется число $|x| = \sqrt{\bar{x}x}$. Вектор x длины $|x| = 1$ называется *единичным вектором*. Обозначим через $\operatorname{End} H$ *линейное пространство непрерывных* (или, что то же самое, ограниченных) *линейных операторов* (эндоморфизмов) пространства H с топологией, индуцированной *нормой*

$$\|h\| = \sup_{0 \neq x \in H} \frac{|h(x)|}{|x|}, \qquad h \in \operatorname{End} H.$$

Эта топология сильнее (больше открытых множеств), чем компактно открытая топология, для которой последующие теоремы, как известно, верны [8].

Композиция линейных операторов определяет произведение $\operatorname{End} H \times \operatorname{End} H \to \operatorname{End} H$, которое является непрерывной функцией по совокупности переменных.

---

[1] Kuiper N. H., The homotopy type of the unitary group of Hilbert space, *Topology*, 3, 1 (1965), 19—30.

[2] То есть элементов поля **R**, **C** или тела **H**. — *Прим. перев.*

По определению *общая линейная группа* GL есть топологическое подпространство пространства $\operatorname{End} H$, состоящее из обратимых операторов. Она является открытым подмножеством в пространстве $\operatorname{End} H$ и обозначается соответственно через $GL_{\mathbf{R}}$, $GL_{\mathbf{C}}$, $GL_{\mathbf{H}}$ в трех указанных случаях. Отображение Inv, ставящее в соответствие каждому оператору $f \in GL$ обратный оператор $\operatorname{Inv} f = f^{-1}$, является непрерывным. Следовательно, группа GL является *топологической группой*. Элемент $h \in GL$ называется *унитарным* (или ортогональным), если

$$|h(x)| = |x|$$

для всех векторов $x \in H$, или, что эквивалентно,

$$\|h\| = \|h^{-1}\| = 1.$$

Унитарные элементы группы GL образуют подгруппу, *унитарную группу* U гильбертова пространства H. (Эта группа *не* совпадает с бесконечномерной унитарной группой $U(\infty) = \lim\limits_{n \to \infty} U(n)$.)

Путнам и Уитнер [5], [6] доказали с помощью спектрального разложения, что группа $U_{\mathbf{R}}$ и, следовательно, группа $GL_{\mathbf{R}}$ связны. Хорошо известно, что группа $U_{\mathbf{C}}$ также связна (см., например, [1]).

В этой работе будет доказана

Теорема 1. *Все гомотопические группы пространства GL равняются нулю:*

$$\pi_k(GL) = 0 \text{ для } k = 0, 1, 2, \ldots .$$

А. Дольд любезно обратил мое внимание на то, что из теоремы 1 вытекает

Теорема 2. *Топологическая группа GL $(GL_{\mathbf{R}}, GL_{\mathbf{C}}$ и $GL_{\mathbf{H}})$ стягиваема к точке.*

Чтобы сделать настоящую работу независимой, мы приводим вывод теоремы 2 из теоремы 1 в § 3, хотя для этого достаточно, например, применить лемму 1 работы Милнора [3] к пространству GL (на основании последней части работы [3] это можно сделать).

Главным моментом в доказательстве является то, что локально выпуклое слабо гомотопически тривиальное пространство GL доминируется счетным CW-комплексом[1]).

Так как топологическая группа U является ретрактом группы GL, мы заключаем (§ 4), что верна

Теорема 3. *Унитарная группа* U $(U_{\mathbf{R}}, U_{\mathbf{C}}$ *и* $U_{\mathbf{H}})$ *гильбертова пространства стягиваема к точке*[2]).

Другими словами,

Группы GL и U как топологические пространства имеют гомотопический тип точки[3]).

Замечание. В конечномерном случае полезно заменять общую линейную группу $GL(n)$ соответствующей унитарной группой $U(n)$, так как последняя компактна. В случае гильбертова пространства такая замена не имеет смысла, так как обе группы не компактны.

Пале, Атья и А. С. Шварц предполагали справедливость теорем 2 и 3. В частности, Пале [не опубликовано], Шварц [7] и Ених [2] получили частный результат в этом направлении, эквивалентный нашей лемме 7.

В § 5 мы укажем некоторые приложения наших теорем, в частности к теории векторных расслоений.

---

[1]) Определение и подробное изучение свойств CW-комплекса можно найти в работе Whitehead J., Combinatorial homotopy, I, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55 (1949), 213—245 (см. также дополнение Д. В. Аносова к книге Милнора „Теория Морса“, изд-во «Мир», М., 1965). Два топологических пространства X и Y называются слабо гомотопически эквивалентными, если существуют CW-комплекс Z и отображения $f_1\colon Z \to X$ и $f_2\colon Z \to Y$, индуцирующие изоморфизм гомотопических групп. Пространство X называется слабо гомотопически тривиальным, если оно слабо гомотопически эквивалентно точке. Для этого, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы все гомотопические группы пространства X равнялись нулю. Говорят, что пространство X доминируется пространством Y, если существуют такие отображения $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to X$, что отображение gf гомотопно тождественному отображению пространства X на себя.—*Прим. перев.*

[2]) Напомним, что группа $U(\infty) \subset U_{\mathbf{C}}$ имеет следующие гомотопические группы: $\pi_{2k-1}(U(\infty)) = \mathbf{Z}$, $\pi_{2k}(U(\infty)) = 0$ (Ботт), см. стр. 41 этой книги. — *Прим. перев.*

[3]) Используя теорему 14.10 работы von Neumann J., Functional operators II, Ann. Math. Studies 22, p. 87, можно сделать аналогичный вывод для несепарабельного гильбертова пространства.

Мне хотелось бы выразить благодарность Хирцебруху, Атья, Пале, Дольду и другим за критические и другие замечания, которые во многом помогли мне при работе над этой статьей.

§ 2. Доказательство теоремы 1

Рассмотрим сначала случай $GL = GL_{\mathbf{R}}$. Доказательство теоремы будет разбито на ряд лемм, при помощи которых данное непрерывное отображение $f_0 = f\colon S \to GL$ k-мерной сферы $S = S^k$ в пространство GL будет постепенно упрощаться (f_t, $0 \leqslant t \leqslant 5$), оставаясь в классе гомотопных отображений. В результате мы получим постоянное отображение $f_5\colon S \to 1 \in GL$ сферы S в элемент $1 \in GL$, представляющий собой тождественное отображение пространства H.

Лемма 1. *Произвольное непрерывное отображение $f_0 = f\colon S \to GL$ гомотопно отображению f_1, образ которого $f_1(S) \subset GL$ содержится в конечном симплициальном комплексе пространства GL, состоящем из аффинных симплексов линейного пространства* $\operatorname{End} H$.

Доказательство. Если множество $\{w \mid \|w - z\| \leqslant \varepsilon\} \subset \operatorname{End} H$, $\varepsilon > 0$, w, $z \in \operatorname{End} H$ содержится в пространстве GL, то оно называется открытым *шаром в GL* с центром z и радиусом ε. Заметим, что шары являются выпуклыми множествами. Множество $f_0(S)$ можно накрыть конечным числом открытых шаров[1]). Пусть T — триангуляция сферы S, настолько мелкая, что образ каждого симплекса при отображении f_0 содержится по крайней мере в одном из таких шаров. Определим *кусочную линеаризацию* f_1 отображения f_0 следующими условиями:

(а) $f_1(s) = f_0(s)$, если точка s является вершиной триангуляции T;

(б) ограничение отображения f_1 на каждый симплекс триангуляции T является аффинным отображением.

Тогда искомая гомотопия задается формулой

$$f_t = (1-t) f_0 + t f_1, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

[1]) Напомним, что топологическая группа GL представляет собой открытое подпространство в пространстве $\operatorname{End} H$. — *Прим. перев.*

Из сделанных предположений и выпуклости шаров вытекает, что гомотопия $f_t(s)$ содержится не только в пространстве $\operatorname{End} H$, но и в пространстве GL для всех значений t и s. Более того, отображение $f_1(s)$ непрерывно по s и, следовательно, $f_t(s)$ непрерывно по t и s. Таким образом, лемма доказана.

Заметим, что приведенное доказательство применимо к отображению f любого конечного симплициального комплекса в пространство GL.

Атья предложил другое доказательство леммы 1, которое верно даже для более общего случая. Мы приведем его здесь, несмотря на то, что оно не потребуется нам в дальнейшем.

Доказательство Атья. Шар U радиуса ε в пространстве GL называется *маленьким шаром*, если он содержится в концентрическом шаре $\tilde{U}$ радиуса 3ε, также полностью лежащем в пространстве GL. Пусть $U_* = \bigcup_{j=1}^{N} U_j$ — объединение конечного числа маленьких открытых шаров. Каждое компактное множество в пространстве GL можно накрыть таким множеством U_*.

Пусть
$$U_j = \{w \mid \|w - z_j\| < \varepsilon_j\}.$$
Для каждого номера j определим числовую функцию $\psi_j(z)$ формулой
$$\psi_j(z) = \max(\varepsilon_j - \|z - z_j\|,\ 0)$$
и рассмотрим разбиение единицы [1]) на множестве U_*:
$$\varphi_j(z) = \frac{\psi_j(z)}{\sum_{k=1}^{N} \psi_k(z)}, \qquad z \in U_*.$$
Пусть $z \in U_*$, и пусть $U_{i_1}, U_{i_2}, \ldots, U_{i_e}$ — совокупность всех шаров, содержащих элемент z, и U_m — наибольший среди них. Тогда геометрически ясно, что
$$U_{i_j} \subset \tilde{U}_m = \{w \mid \|w - z_m\| < 3\varepsilon_m\}, \qquad j = 1, \ldots, l,$$

---

[1]) Определение разбиения единицы см., например, на стр. 17 настоящей книги. — *Прим. перев.*

и, следовательно, мы получаем, что при любом $0 \leqslant t \leqslant 1$ элемент

$$g_t(z) = (1-t)z + t\sum_{j=1}^{N} \varphi_j(z) \cdot z_j$$

принадлежит открытому шару $\tilde{U}_m \subset GL$. Таким образом, функция g_t для $0 \leqslant t \leqslant 1$ определяет гомотопию в пространстве GL тождественного отображения множества U_* в отображение при $t = 1$ множества U_* в симплициальный комплекс пространства GL с вершинами $z_1, z_2, \ldots, z_N$. Если $f\colon S \to GL$ — непрерывное отображение любого пространства S в множество $U_* \subset GL$, то семейство отображений $f_t = g_t f$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, определяет гомотопию отображения f_0 в отображение $f_1 = g_1 f$, которое уже обладает свойствами, требуемыми в лемме 1.

Так как множество $f_1(S)$ содержится в конечном симплициальном комплексе пространства $GL \subset \operatorname{End} H$, то оно содержится также и в векторном подпространстве $W \subset \operatorname{End} H$ конечной размерности $\leqslant N$.

Пусть $g_1, \ldots, g_N$ — элементы множества $f_1(S) \subset \subset GL \cap W$, порождающие векторное пространство W. Тогда мы можем сформулировать следующую лемму.

Лемма 2. *Линейное подпространство пространства H, порожденное элементами $f_1(s)(x)$, $s \in S$, или элементами $w(x)$, $w \in W$, имеет размерность $\leqslant N$ для каждого вектора $x \in H$.*

Доказательство. Первое подпространство совпадает со вторым, которое, очевидно, порождается векторами

$$g_j(x), \quad j = 1, \ldots, N.$$

Лемма 3. *Существуют бесконечномерное замкнутое подпространство H' пространства H и такое отображение $f_3\colon S \to GL$, гомотопное отображению f_1, что для всех точек $s \in S$ и векторов $x \in H'$*

$$f_3(s)\, x = x.$$

Для доказательства этой леммы нам потребуются некоторые предварительные результаты (леммы 4, 5 и 6).

Определим при помощи индукции по i бесконечную последовательность единичных векторов a_i подпространств

$A_i \subset H$ размерности $N+2$ и единичных векторов a_i^0, $i=1, 2, \ldots$.

Пусть a_1 — произвольный единичный вектор пространства H. Пусть A_1 — подпространство размерности $N+2$, содержащее векторы a_1, $g_j(a_1)$, $j=1, \ldots, N$, и, кроме того, единичный вектор a_1^0, ортогональный ко всем предыдущим $N+1$ векторам. Пусть B — замкнутое линейное подпространство пространства H; обозначим через $B^\perp$ ортогональное дополнение к B, т. е. замкнутое подпространство, состоящее из всех векторов пространства H, ортогональных к подпространству B:

$$B^\perp = \{x \in H \mid yx = 0 \text{ для любого } y \in B\}.$$

Теперь предположим, что a_k, A_k и a_k^0 определены для всех $k < i$. Тогда единичный вектор a_i выбирается в следующем подпространстве конечной коразмерности, которое, следовательно, не пусто:

$$a_i \in \bigcap_{k=1}^{i-1} \left[A_k^\perp \cap \left(\bigcap_{j=1}^{N} g_j^{-1}\left(A_k^\perp\right)\right)\right].$$

Отсюда непосредственно вытекает, что

$$a_i \in A_k^\perp \text{ и, следовательно, } a_i \perp A_k \text{ для всех } k < i$$

и

$$a_i \in g_j^{-1}\left(A_k^\perp\right).$$

Поэтому

$$g_j(a_i) \in A_k^\perp \text{ и } g_j(a_i) \perp A_k \text{ для всех } k < j.$$

Это позволяет выбирать следующие подпространства A_i:

A_i есть $(N+2)$-мерное подпространство пространства H, содержащее векторы a_i и $g_j(a_i)$ для $j=1, \ldots, N$ и ортогональное к подпространствам A_k для всех $k < i$.

Наконец, за вектор a_i^0 можно взять единичный вектор, принадлежащий подпространству A_i и ортогональный к векторам a_i и $g_j(a_i)$ для всех $j=1, \ldots, N$.

Определим теперь гомотопию f_t так, чтобы вектор $f_2(a_i)$ имел направление вектора a_i и чтобы $f_3(a_i) = a_i$ для $i=1, 2, \ldots$.

Пусть $C \geqslant 1$ — такое число, что для каждой точки $s \in S$

$$\|f_1(s)\| \leqslant C \quad \text{и} \quad \left\|f_1^{-1}(s)\right\| \leqslant C.$$

Определим множество W_C:

$$W_C = \{w \in W \cap GL \mid \|w\| \leqslant C \text{ и } \|w^{-1}\| \leqslant C\}. \tag{1}$$

Таким образом,

$$f_1(S) \subset W_C. \tag{2}$$

Теперь рассмотрим пространство A_i при некотором i. Для $w \in W_C$, например для $w \in f_1(S)$, мы знаем, что

$$w(a_i) \in A_i \quad \text{и} \quad \frac{1}{C} \leqslant |w(a_i)| \leqslant C.$$

Мы будем вращать вектор $w(a_i)$ в плоскости, натянутой на ортогональные векторы $w(a_i)$ и a_i^0, пока он не займет положения $|w(a_i)|\,a_i^0$. Затем повернем вектор a_i^0 в плоскости, натянутой на векторы a_i^0 и a_i (которые снова взаимно ортогональны), так, чтобы он занял положение вектора a_i. При обоих вращениях все векторы, перпендикулярные к плоскости вращения, остаются неподвижными. В результате мы получим движение, переводящее $w(a_i)$ в $|w(a_i)|\,a_i$. Опишем эту гомотопию следующими формулами.

Определим гомотопии $k_i(w, t) \in U \subset GL$ для $w \in W_C$ и $0 \leqslant t \leqslant 1$ следующим образом: для $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}$

$$k_i(w, t)(wa_i) = (\cos \pi t)(wa_i) + (\sin \pi t)\,|wa_i|\,a_i^0,$$

$$k_i(w, t)(|wa_i|\,a_i^0|) = -(\sin \pi t)(wa_i) + (\cos \pi t)\,|wa_i|\,a_i^0,$$

$$k_i(w, t)(x) = x \text{ для } x \in A_i \text{ и } x \perp wa_i, \quad x \perp a_i^0;$$

для $\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1$

$$k_i(w, t)\,k_i^{-1}\left(w, \frac{1}{2}\right)(a_i^0) =$$
$$= \cos \pi\left(t - \frac{1}{2}\right) \cdot a_i^0 + \sin \pi\left(t - \frac{1}{2}\right) \cdot a_i,$$

$$k_i(w, t)\,k_i^{-1}\left(w, \frac{1}{2}\right)(a_i) =$$
$$= -\sin \pi\left(t - \frac{1}{2}\right) \cdot a_i^0 + \cos \pi\left(t - \frac{1}{2}\right) \cdot a_i,$$

$$k_i(w, t)\,k_i^{-1}\left(w, \frac{1}{2}\right)(x) = x \text{ для } x \in A_i \text{ и } x \perp a_i^0, \; x \perp a_i.$$

Заметим, что $k_i(w, 1)(wa_i) = (|wa_i|)\,a_i$.

Лемма 4. *Гомотопия $k_i(w, t)$ является непрерывной функцией от $w \in W_C$ и t равномерно относительно i.*

Доказательство. Для произвольных пар w, $w' \in W_C$ и t, $t' \in [0, 1]$ имеем

$$\| k_i(w', t') - k_i(w, t) \| \leqslant \| k_i(w', t') - k_i(w', t') \| + \\ + \| k_i(w', t) - k_i(w, t) \|. \quad (3)$$

Так как по определению $k_i(w, t) \in U$ для любых $w \in W$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ и i, то правая часть неравенства (3) равна следующей сумме:

$$\| k_i(w', t')\, k_i^{-1}(w', t) - 1 \| + \\ + \| k_i(w', t)\, k_i^{-1}(w, t) - 1 \|. \quad (4)$$

Если параметры t и t' оба находятся в интервале $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ или оба в интервале $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, то преобразование $k_i(w', t')\, k_i^{-1}(w' t)$ является вращением на угол $\pi(|t' - t|)$ пространства A_i вокруг N-мерного подпространства пространства A_i как „оси“. Из планиметрии следует, что тогда

$$\| k_i(w', t')\, k_i(w', t) - 1 \| \leqslant \pi(|t' - t|). \quad (5)$$

Второе слагаемое в (4) остается постоянным при $\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1$, следовательно, мы можем ограничиться случаем $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}$.

Если угол между векторами $w'(a_i)$ и $w(a_i)$, ортогональными к a_i^0, равен α, то, принимая во внимание (1), мы получаем, что $|w'(a_i)| \geqslant C^{-1}$, $|w(a_i)| \geqslant C^{-1}$,

$$| w'(a_i) - w(a_i) | \geqslant C^{-1} \cdot 2 \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (6)$$

(Эти неравенства также вытекают из планиметрии.) Если $\alpha = 0$, то $w' = w$ и второе слагаемое в (4) обращается в нуль. Поэтому пусть $\alpha \neq 0$. Тогда векторы $w'(a_i)$ и $w(a_i)$, ортогональные к вектору a_i^0, порождают вместе с ним трехмерное пространство E. Преобразование $k_i(w', t)k_i^{-1}(w, t)$ оставляет неподвижным каждый вектор, ортогональный к пространству E. В пространстве E это преобразование представляет собой вращение, которое можно описать как композицию вращения на угол, равный по абсолютной величине α, вокруг фиксированного вектора a_i^0 и вращения на угол, равный по абсолютной величине α, вокруг фиксированного вектора $|w'a_i|(\cos \pi t)a_i^0 - (\sin \pi t) w'a_i$. Так как норма оператора вращения на угол α равна $2 \sin \frac{\alpha}{2}$, то

$$\left\| k_i\left(w', t\right) k_i^{-1}(w, t) - 1 \right\| < 2 \cdot 2 \sin \frac{\alpha}{2}. \tag{7}$$

Так как, кроме того, по определению нормы оператора имеет место неравенство

$$|w'(a_i) - w(a_i)| \leqslant \|w' - w\|, \tag{8}$$

то из (6), (7) и (8) получаем

$$\left\| k_i\left(w', t\right) k_i^{-1}(w, t) - 1 \right\| \leqslant 2C\left(\left\| w' - w \right\|\right). \tag{9}$$

Подставляя (5) и (9) в (3) и (4), мы получаем неравенство

$$\| k_i(w', t') - k_i(w, t) \| \leqslant \pi(|t' - t|) + 2C(\|w' - w\|), \tag{10}$$

из которого и вытекает утверждение леммы 4.

Пусть $k(w, t) \in GL$ — семейство ортогональных преобразований, определенное для всех $w \in W_C$ и $0 \leqslant t \leqslant 1$ формулой

$$\left(k(w, t)\,|_{A_i}\right) = k_i(w, t),$$

$$k(w, t)x = x \text{ для } x \perp A_i \text{ при всех } i.$$

Лемма 5. *Семейство преобразований $k(w, t)$ непрерывно зависит от w и t.*

Доказательство. Пусть x_{A_i} — компонента вектора $x \in H$ при ортогональном проектировании пространства H

на подпространство A_i. Тогда

$$|(k(w', t') - k(w, t))x| =$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{\infty} [k(w', t') - k(w, t)]\, x_{A_i} \right| =$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{\infty} [k_i(w', t') - k_i(w, t)\, x_{A_i} \right| =$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} [(k_i(w', t') - k_i(w, t))\, x_{A_i}]^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} ([\pi\,|t' - t| + 2C(\|w' - w\|)]\, x_{A_i})^2} \leqslant$$

$$\leqslant [\pi(|t' - t|) + 2C(\|w' - w\|)]\,|x|.$$

Таким образом, имеет место неравенство

$$\|k(w', t') - k(w, t)\| \leqslant \pi(|t' - t|) + 2C(\|w' - w\|),$$

которое доказывает лемму 5. Заметим, что

$$k(w, 0) = 1 \quad \text{и} \quad k(w, 1)(wa_i) = |wa_i|\, a_i. \tag{11}$$

Определим теперь гомотопию с начальным значением f_1 формулой

$$f_t(s) = k(f_1(s), t - 1) f_1(s), \qquad 1 \leqslant t \leqslant 2. \tag{12}$$

При $t = 1$ отображение $f_t(s)$ совпадает с f_1, так как $k(w, 0) = 1 \in GL$. При $t = 2$ получаем отображение

$$f_2(s)\, a_i = k(f_1(s), 1) f_1(s)\, a_i.$$

Таким образом, доказана

Лемма 6. *Отображение f_1 гомотопно такому отображению f_2, для которого*

$$f_2(s)\, a_i = |f_1(s)\, a_i|\, a_i.$$

Пусть H' — замкнутое подпространство пространства H с ортонормированным базисом $a_1, a_2, \ldots,$ и пусть $H_1 = (H')^{\perp}$. Обозначим через p' и p_1 ортогональные проекторы пространства H соответственно на подпространства H' и H_1. Тогда

$$p' + p_1 = 1 \in GL.$$

Определим следующие гомотопии f_t формулой

$$\left.\begin{aligned} f_t(s)\,a_i &= (3-t)\,f_2(s)\,a_i + (t-2)\,a_i \\ f_t(s)\,y &= f_2(s)\,y \quad \text{для} \quad y \in H_1 \end{aligned}\right\} \text{ для } 2 \leqslant t \leqslant 3. \tag{13}$$

Так как $\|f_2(s)\| = \|f_1(s)\| \leqslant C$, то $f_t(s)$ является непрерывной функцией от s и t. Можно дать другое определение этой гомотопии следующим образом:

$$f_t(s) = [(3-t)\,f_2(s) + (t-2)]\,p' + f_2(s)\,p_1.$$

При $t=2$ определения совпадают, так как

$$f_2(s) = f_2(s)\,[p' + p_1].$$

При $t=3$ мы получаем гомотопию, существование которой утверждается в лемме 3:

$$\begin{aligned} &f_3(s) = p' + f_2(s)\,p_1, \\ &f_3(s)\,a_i = a_i, \\ &f_3(s)\,x = x \quad \text{для} \quad x \in H'. \end{aligned}$$

Таким образом, лемма 3 доказана.

Оператору g, принадлежащему множеству

$$\{w \in GL \mid w = p' + wp_1\},$$

т. е. оператору, для которого выполняется равенство

$$gx = x \quad \text{при всех} \quad x \in H',$$

поставим в соответствие оператор

$$\omega g = p' + p_1 g p_1.$$

Оператор ωg принадлежит группе GL и удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{gathered} (\omega g\,|_{H'}) \text{ — тождественный оператор}, \\ (\omega g)\,H_1 = H_1. \end{gathered}$$

Отображение ω непрерывно, поэтому отображение

$$\tilde{f}_t(s) = (4-t)\,f_3(s) + (t-3)\,\omega(f_3(s)), \quad 3 \leqslant t \leqslant 4, \tag{14}$$

непрерывно по s и t, при $t=3$ совпадает с отображением f_3, а при $t=4$

$$\begin{aligned} &f_4(s)\,x = x \quad \text{для} \quad x \in H', \\ &f_4(s)\,H_1 = H_1. \end{aligned}$$

Лемма 7 (ср. [2]). *Пусть H' и H_1 — бесконечномерные замкнутые ортогональные дополнения гильбертова пространства H, т. е.*

$$H = H' + H, \quad H' \perp H.$$

Тогда подпространство $V \in GL$

$$V = \{g \mid (g\,|_{H'}) = 1 \in GL(H') \text{ и } gH_1 = H_1\}$$

стягиваемо по себе к тождественному оператору $1 \in GL$.

Доказательство. Пусть $H' = H_2 + H_3 + \ldots$ — „разложение" пространства H' в бесконечную сумму взаимно ортогональных гильбертовых подпространств. Если a_1, $a_2, \ldots$ — ортогональный базис в пространстве H', то в качестве подпространства H_i, $i \geqslant 2$, можно взять, например, замкнутое гильбертово подпространство, порожденное векторами a_j, для которых существуют числа m_j, такие, что

$$j = 2^{i-2}(2m_j + 1).$$

Каждый эндоморфизм пространства $H = H_1 + H_2 + H_3 + \ldots$ определяется матрицей, составленной из элементов

$$m(i, j) \in \operatorname{Hom}(H_i, H_j).$$

Если оператор g принадлежит пространству V, то его матричные элементы имеют вид

$$\begin{aligned} &m(1, 1) = u = g\,|_{H_1}, \\ &m(i, i) = 1 \in GL(H_i) \quad \text{для} \quad i > 1, \\ &m(i, j) = 0 \qquad\qquad\quad\ \text{для} \quad i \neq j. \end{aligned}$$

Следовательно, оператор g полностью определяется своими диагональными матричными элементами:

$$g = (u, 1, 1, 1, 1, \ldots),$$

или, что то же самое, элементами

$$g = (u, u^{-1}u, 1, u^{-1}u, 1, \ldots).$$

Определим теперь гомотопию η_t пространства V, которая переводит эту матрицу в диагональную матрицу с диагональю

$$g' = (u,\ u^{-1}u,\ u^{-1}u,\ \ldots),$$

а затем в матрицу с диагональю

$$(uu^{-1},\ 1,\ uu^{-1},\ 1,\ uu^{-1}\ \ldots).$$

Последняя матрица совпадает с единичной матрицей

$$(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \ldots) = 1 \in GL.$$

Гомотопия η_t для $0 \leqslant t \leqslant \pi$ определяется при $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$ следующими компонентами матрицы $\eta_t(g)$:

$$m(1,\ 1) = u;$$

для $i \geqslant 1$

$$\begin{pmatrix} m(2i,\ 2i) & m(2i,\ 2i+1) \\ m(2i+1,\ 2i) & m(2i+1,\ 2i+1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Остальные матричные элементы равны нулю. При $t = 0$ мы получаем матрицу g, а при $t = \pi/2$ матрицу g'. Гомотопия η_t при $\pi/2 \leqslant t \leqslant \pi$ определяется следующими компонентами матрицы $\eta_t(g)$:

$$\begin{pmatrix} m(2i-1,\ 2i-1) & m(2i-1,\ 2i) \\ m(2i,\ 2i-1) & m(2i,\ 2i) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{для } i \geqslant 1.$$

Остальные матричные элементы равны нулю. При $t = \pi/2$ мы получаем матрицу g', а при $t = \pi$ единичную матрицу $1 \in GL$.

Доказательство теоремы 1. Требуемой гомотопией является f_t для $0 \leqslant t \leqslant 5$ с начальным значением $f_0 = f$ и конечным значением f_5: $S \to 1$, где

$$f_t = \eta_{\pi(t-4)} f_4 \quad \text{для} \quad 4 \leqslant t \leqslant 5. \tag{15}$$

Доказательство для комплексного и кватернионного случаев проводится аналогично с некоторыми незначительными изменениями. Например, $\operatorname{End} H_{\mathbf{C}}$ является комплексным линейным пространством с естественной структурой вещественного линейного пространства. В рассуждениях, связанных с выпуклостью, мы используем эту вещественную линейную структуру. Линейные подпространства, аналогичные подпространствам W и A_i, являются тем не менее линейными подпространствами над полем $\mathbf{C}$ комплексной размерности соответственно $\leqslant N$ или $N+2$. Проведение детального доказательства мы оставляем читателю.

Замечание. Частный результат $\pi_0(GL)=0$ можно доказать проще. Леммы 1 и 2 в этом случае верны автоматически. Если w — произвольный элемент пространства GL, то в доказательстве леммы 3 подпространство A_i можно заменить пространством, натянутым на векторы a_i и wa_i; вектор a_1^0 в этом случае не нужен; мы вращаем непосредственно вектор wa_i до $|wa_i|a_i$. Далее доказательство проводится так же, как и выше.

§ 3. Доказательство теоремы 2

Пространство GL можно накрыть маленькими открытыми шарами радиуса $\varepsilon \leqslant 1$ (определение термина „маленький" см. в доказательстве Атья леммы 1 в § 2). Так как пространство GL паракомпактно, существует локально конечное разбиение единицы, подчиненное этому покрытию. Это означает, что существуют такие вещественные функции $\varphi_j\colon GL \to \mathbf{R}$, что

1) $\varphi_j(z) \geqslant 0, \quad \sum\limits_{j=1}^{\infty} \varphi_j(z) = 1;$

2) $V_j = \operatorname{supp} \varphi_j = \{z \in GL \mid \varphi_j(z) \neq 0\}$ содержится в некотором маленьком открытом шаре

$$u_j = \{z \in GL \mid \|z - z_j\| < \varepsilon_j\} \text{ с центром в } z_j;$$

3) каждая точка $z \in GL$ имеет окрестность, которая пересекается не более чем с конечным числом носителей.

Пусть N — нерв покрытия носителями V_j. Обозначим через b_j вершину, соответствующую носителю V_j. Нерв N является CW-комплексом с аффинными симплексами в качестве клеток. Как и в доказательстве Атья, можно показать, что для каждой точки $z \in GL$ и $0 \leqslant t \leqslant 1$ элемент

$$\xi_t(z) = (1-t)z + t\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(z) z_j$$

содержится в пространстве GL. При этом ξ_1 является непрерывным отображением пространства GL в себя. Отображение $\xi_t(z)$ непрерывно по t и z и, следовательно, является для $0 \leqslant t \leqslant 1$ гомотопией, переводящей тождественное отображение в отображение ξ_1 пространства GL в себя. Пусть σ: $GL \to N$ — отображение, определенное формулой

$$\sigma(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(z) b_j,$$

и пусть ρ_0: $N \to GL$ — непрерывное отображение, обладающее следующими свойствами:

1) $\rho_0(b_j) = z_j$;

2) ограничение отображения ρ_0 на каждый симплекс комплекса N является аффинным отображением.

Тогда

$$\xi_1 = \rho_0\sigma$$

$$\begin{tikzcd}
GL \arrow[rr, "\xi_1"] \arrow[dr, "\sigma"'] & & GL \\
& N \arrow[ur, "\rho_0"'] \arrow[d, "\cap"] & \\
& CN \arrow[uur, "\rho"'] &
\end{tikzcd}$$

Так как все гомотопические группы пространства GL являются нулевыми, отображение ρ_0: $N \to GL$ можно продолжить до непрерывного отображения ρ: $CN \to GL$ конуса CN над пространством N с вершиной ϑ, переходящей в тождественный оператор $1 \in GL$. Следовательно, существует такое непрерывное отображение ρ: $N \times I \to GL$, переводящее точку (u, t) в точку $\rho_t(u) \in GL$, что ρ_0 совпадает с данным выше и $\rho_1(u) = 1 \in GL$. Тогда отображение

$$\xi_t = \rho_{t-1}\sigma \quad \text{для } 1 \leqslant t \leqslant 2$$

является гомотопией ξ_t, $0 \leqslant t \leqslant 2$, переводящей ξ_0 (тождественное отображение GL в себя) в тривиальное отображение ξ_2: $GL \to 1 \in GL$. Тем самым теорема 2 доказана.

§ 4. Доказательство теоремы 3

Для каждого оператора $f \in GL (GL_{\mathbf{R}}, GL_{\mathbf{C}}$ или $GL_{\mathbf{H}})$ обозначим через $f^* \in GL$ оператор, сопряженный к f; оператор f^* определяется формулой

$$(f^*x)\, y = x\,(fy) \text{ для всех векторов } x,\ y \in H.$$

Заметим, что $(f^*fx)\, x = (fx)(fx) > 0$ для любого вектора $x \neq 0$. Ретракция τ: $GL \to U$ определяется формулой

$$\tau(f) = f \sqrt{(f^*f)^{-1}}.$$

(Оператор $\sqrt{f^*f}$ можно определить следующим образом. Пусть $g_1 = 1 \in GL$, $g_{n+1} = \frac{1}{2}\left[g_n + g_n^{-1}(f^*f)\right]$. Тогда оператор $\sqrt{f^*f} = g = \lim\limits_{n \to \infty} g_n$ удовлетворяет равенству $g = \frac{1}{2}[g + g^{-1}(f^*f)]$ и, следовательно, $g^2 = f^*f$.)

Оператор $\tau(f)$ принадлежит группе U, так как

$$(\tau(f)\,x)(\tau(f)\,x) = ([\tau(f)]^*\,\tau(f)\,x)\,x =$$
$$= (f^*f)^{-1/2} f^*f\,(f^*f)^{-1/2} xx = xx$$

для всех векторов $x \in H$.

Если $f \in U$, то $f^*f = 1 \in GL$, откуда $\tau(f) = f$. Требуемое стягивание группы U задается гомотопией

$$\tau(\xi_t) \text{ для } 0 \leqslant t \leqslant 2,$$

переводящей тождественное отображение $\tau(\xi_0)$ в постоянное отображение $\tau(\xi_2)$: $U \to 1 \in U \subset GL$. Здесь ξ_t является гомотопией стягивания группы GL (см. § 3).

§ 5. Следствия и приложения

В этом параграфе через X обозначается компактное пространство или пространство, имеющее гомотопический тип CW-комплекса.

Следствие 1. *Каждое расслоение со слоем гильбертово пространство, структурной группой GL и базисным пространством X является тривиальным расслоением.*

Пусть $\gamma_n(H)$ есть n-мерное векторное расслоение, базисным пространством которого $V_n(H)$ является пространство n-мерных подпространств пространства H (n-мерных плоскостей), пространство расслоения — пространство пар $\{(A, x) \mid A \in V_n(H),\ x \in A \subset H\}$, а проекция отображает пару (A, x) в A.

Следствие 2 (ср. [2]). *Для каждого n-мерного расслоения ξ с пространством расслоения $E(\xi)$ над X существует такое отображение $f\colon X \to V_n(H)$, что индуцированное расслоение $f^*(\gamma_n(H))$ изоморфно расслоению ξ.*

(Это вытекает уже из леммы 7 и было известно Пале.)

Доказательство. Пусть η — (тривиальное) расслоение над X со слоем гильбертово пространство H. Расслоение $\xi \oplus \eta$ также является расслоением со слоем гильбертово пространство и, следовательно, тривиально, поэтому имеется изоморфизм расслоений

$$\xi \oplus \eta \xrightarrow{i} \eta.$$

Рассмотрим следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
E(\xi) \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "\pi"'] & E(\xi\oplus\eta) \arrow[d] \arrow[r, phantom, "="] & X\times H \arrow[dl, "p_1"] \arrow[d, "p_2"] \\
 & X & H
\end{tikzcd}$$

В обозначениях этой диаграммы для каждой точки $x \in X$ существует n-мерная плоскость $p_2 g \pi^{-1}(x) \in V_n(H)$, и $f = p_2 g \pi^{-1}\colon X \to V_n(H)$ является отображением, существование которого утверждается в следствии. Легко заметить, что это отображение накрывается отображением расслоений.

Атья[1]) и Ених [2] применили для изучения векторных расслоений H-пространство F операторов Фредгольма на гильбертовом пространстве H. Оператор Фредгольма f

---

[1]) См. настоящую книгу, стр. 121—130. — *Прим. перев.*

является непрерывным линейным оператором в пространстве H с ядром конечной размерности p и замкнутым образом $f(H)$ конечной коразмерности q. Из стягиваемости пространства GL эти авторы получили, что

$$\mathrm{Groth}(VB(X)) = K(X) = [X, F],$$

где $K(X)$ — группа Гротендика классов стабильной эквивалентности векторных расслоений над компактным пространством X, $[X, F]$ — группа гомотопических классов отображений пространства X в F.

Доказано, что структура кольца может быть включена в это представление для случаев $\mathbf{R}$ и $\mathbf{C}$. Теперь, когда мы знаем, что пространство GL стягиваемо, по-видимому, эту теорию можно было бы развить более простыми методами. Пусть $a_1, a_2, \ldots$ — базис в пространстве H; группа $GL(n)$ состоит из таких элементов группы GL, которые оставляют неподвижным каждый вектор a_j, $j > n$, и оставляют инвариантным конечномерное подпространство, натянутое на $a_1, \ldots, a_n$. Объединением всех групп $GL(n)$ является группа

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} GL(n) = GL(\infty) \subset GL.$$

[Группа $GL(\infty)$ не является нульсвязной в случае $\mathbf{R}$ и не является односвязной в случае $\mathbf{C}$, так как функция „определителя“ [1]) со значениями в $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$ не принимает значения 0, и, следовательно, существует нестягиваемое в точку отображение сферы S^0 или S^1 соответственно в группу $GL_{\mathbf{R}}(\infty)$ или $GL_{\mathbf{C}}(\infty)$.] Замыкание GL^C группы $GL(\infty)$ в пространстве GL гомотопически эквивалентно группе $GL(\infty)$ ([4], [7]). Группа GL^C состоит из таких элементов группы GL, разность которых с тождественным оператором является вполне непрерывным оператором. Таким образом, по-видимому, может оказаться, что отображение $GL \to GL/GL^C$ определяет универсальное расслоение для GL^C-расслоений. Из работ Атья и Ениха можно

---

[1]) То есть функция, сопоставляющая каждому элементу $\alpha \in GL(\infty)$ определитель конечномерной матрицы, соответствующей этому элементу. — *Прим. перев.*

вывести, что GL/GL^C является универсальным базисным пространством для стабильных векторных расслоений:

$$\tilde{K}(X) \cong [X,\ GL/GL^C],$$
$$K(X) \cong [X,\ \mathbf{Z} \times (GL/GL^C)].$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Cordes H. O., Labrousse I. P., The invariance of the index in the metric space of closed operators, *J. Math. Mech.*, 12 (1963), 693—719.

[2] Jänich K., Vektorraumbündel und der Raum der Fredholm-Operatoren, Dissertation, Bonn, 1964.

[3] Milnor J., On spaces having the gomotopy type of *CW*-complex, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 90 (1959), 272—280.

[4] Palais R. S., On the gomotopy type of certain groups of operators, *Topology* (1964).

[5] Putnam R., Wintner A., The connectedness of the orthogonal group in Hilbert space, *Proc. Nat. Acad. Sci., Wash.*, 37 (1951), 110—112.

[6] Putnam R., Wintner A., The orthogonal group in Hilbert space, *Amer. J. Math.*, 74 (1952), 52—78.

[7] Шварц А. С., К гомотопической топологии банаховых пространств, *ДАН СССР*, 154 (1964), 61—63.

[8] Dixmier J., Douady A., *Bull. Soc. Math. France*, 91 (1963), 251.

СОДЕРЖАНИЕ

М. Атья

ЛЕКЦИИ ПО K-ТЕОРИИ